Г. А. ЛОРЕНТЦ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ЯВЛЕНИЯМ СВЕТА И ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Перевод с английского
проф. М. В. САВОСТЬЯНОВОЙ
Под редакцией
чл.-корр. АН СССР Т. П. КРАВЦА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1953

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

«Теория электронов» — классическая книга о классической теории. Современная наука после написания этой книги (в 1907 г.) нашла новые пути. Тем не менее появление ее в русском переводе следует признать желательным и даже необходимым. Кто желает получить углубленное понимание современных теорий, тот должен обратиться к изучению той почвы, из которой выросли ее построения.

Трудно было бы указать книгу, более пригодную для подобной цели, чем предлагаемая здесь книга Лорентца. Создатель теории электронов сосредоточил здесь все, чем эта теория жила с момента ее зарождения до момента ее самого пышного расцвета.

Когда книга писалась, уже существовала теория относительности, но она повлияла на ход мыслей автора очень мало; столь же мало отразилась в ней и теория квантов. Во втором издании книги он под впечатлением огромных качественных и количественных успехов релятивизма посвящает последнему больше места. Но органически влить новые представления в старую книгу он уже не может.

Переводчик и редактор сделали все возможное для сохранения точности в передаче подлинного текста; может быть, местами это им удалось только ценой известных жертв со стороны легкости изложения и стиля.

Перед текстом читатель найдет вводную статью об исторической перспективе, в которой развивалась электронная теория. Редактор счел также полезным поместить после текста свои примечания к тем местам книги, которые требуют дополнений в связи с позднейшим развитием вопроса.

Май 1934 г.

Проф. *Т. П. Кравец*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Выход в свет этих лекций, прочитанных мной в Колумбийском университете весной 1906 г., значительно затянулся — главным образом потому, что мне хотелось несколько развить их содержание и представить его в связном и достаточно полном виде; по этой причине я не удержался от многочисленных добавлений. Несмотря на это, ряда в высшей степени интересных вопросов, в той или иной мере относящихся к теории электронов, я мог коснуться лишь вскользь. Труд Фохта по магнитооптическим явлениям я имел возможность упомянуть только в примечании, и ни взгляды Планка на излучение, ни принцип относительности Эйнштейна не получили должного освещения.

Я боюсь, что эта книга окажется весьма недостаточной и в другом отношении. Я не мог остановиться достаточно подробно на тех различных способах, которыми можно установить основные принципы; поэтому, например, я не мог уделить достаточного внимания работам Лармора и Вихерта, которые приняли весьма значительное участие в развитии теории.

С большим удовольствием я выражаю благодарность проф. А. П. Уиллсу, любезно прочитавшему часть корректур, а также издателю за заботливость, с которой он отнесся к моему труду.

Лейден, январь 1909 г.

Г. А. Лоренц

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этом новом издании текст оставлен почти без изменений. Я ограничился небольшим числом изменений и добавлений в подстрочных примечаниях и в примечаниях после текста.

Гаарлем, декабрь 1915 г.

Г. А. Л.

Гендрик Антоон Лорентц, один из величайших теоретиков конца прошлого и начала нынешнего столетия, родился 18 июля 1853 г. в Арнхеме (Голландия). Начальную и среднюю школу он посещал в родном городе. Семнадцати лет он поступил в Лейденский университет. В университете он учился в течение двух лет, после чего уехал домой в Арнхем. Там он занимался преподаванием в средней школе и в то же время деятельно готовил свою докторскую диссертацию. В 1875 г. он получил докторскую степень. Представленная Лорентцом работа обнаруживает в двадцатидвухлетнем юноше зрелого и сильного теоретика и доставляет ему через два года кафедру теоретической физики в Лейдене. Эту кафедру Лорентц занимает бессменно в течение 35 лет. Благодаря его трудам она становится крупнейшим очагом физической теории; в своем развитии от классических представлений к современным физика прошла важный этап, который справедливо связать с фундаментальными работами Лорентца.

Весьма интересна та историческая обстановка, в которой складывалось начало научной работы Лорентца. В 1856 г. В. Вебер и Р. Кольрауш впервые определили так называемую «критическую скорость» — отношение электромагнитных и электростатических единиц — и обнаружили поистине потрясающий факт совпадения этой константы со скоростью света.

В 60-х годах Максвелл разрабатывает свою теорию электромагнитных явлений; в 1868 г. он повторяет измерения Вебера и Кольрауша и по этому поводу впервые провозглашает электромагнитную теорию света, а в 1873 г. появляется и знаменитый «Трактат». Конечно, представители старших поколений тогдашних физиков должны были отнестись к учению Максвелла с большим недоверием. Оно не только ниспровергало ставший классическим метод ньютоновских дальнодействий, прочно укоренившийся в электродинамике, — был труден самый язык его, так как оно создавало совершенно новый метод математической трактовки явлений электромагнетизма — то, что ныне называется теорией поля. Но на молодежь новые идеи и методы, несомненно, действовали весьма сильно. Во всяком случае, Лорентц делается адептом нового учения, и первая его работа существенно дополняет данную Максвеллом электромагнитную теорию света, разрешая важный вопрос об условиях на поверхности и об отражении и преломлении света с точки зрения новой теории.

Теория Максвелла, как сказано, переносит центр внимания с зарядов и потенциалов проводников на пространство между ними. Какое же значение сохраняет при этом заряд? Автор «Трактата» нигде не высказывается по этому поводу с большей или меньшей решительностью. У него пестрят фразы вроде следующей: «Какова бы ни была природа электричества и что бы мы ни понимали под словами „движение электричества“, то явление, которое мы назвали электрическим смещением, есть движение электричества в том же смысле, в каком мы говорим о движении электричества по проволоке» [1]). У ряда последователей Максвелла заряд зачастую перестает существовать как физический факт, превращаясь в математический символ, в меру того потока, который пронизывает поверхность, окружающую заряд. В особенности далеко идет по этому пути Пойнтинг. По его воззрениям, поверхность проводника вообще есть такая поверхность, за которой кончается электромагнитное поле. Никакого движения электричества при электрическом токе не происходит; единственное существенное явление при токе заключается в том, что имеющаяся в поле «тока» магнитная энергия втекает в проводник в направлении, нормальном к его поверхности, и, войдя в проводник, превращается в новый вид — в известное джаулево тепло.

Эти идеи, несомненно, много способствовали разъяснению отношений, существующих в поле, но они оставляли в тени участие вещества в электромагнитных явлениях, оставляли нерешенным вопрос о природе самой связи между полем и веществом.

Вещество трактуется при этом весьма суммарно; оно характеризуется тремя константами — проводимостью, диэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью. Физическая природа последних остается также совершенно не разъясненной. Более того, каждая из трех указанных констант дается как некоторое молярное свойство, и не видно, каким образом можно связать его с представлением о молекулярном строении вещества, со свойствами молекул и атомов.

О том, что внутри молекул существуют электрические заряды, мы знаем с момента открытия электролиза. Фарадей указал, что все одновалентные ионы несут при электролизе одинаковый заряд, все двухвалентные — двойной и т. д. Постоянное повторение одних и тех же «порций» электричества в простых кратных отношениях должно было бы подсказать идею атомарного строения электричества. Но нет — на протяжении десятилетий этот факт толкуется как свойство материи заряжаться определенными количествами электричества, а не как свойство самого электричества появляться в этих постоянных количествах.

Максвелл, гениальный истолкователь Фарадея, чрезвычайно близок к идее атомарного строения электричества. Он ставит вопрос, почему атом хлора, отделяясь в виде иона от атома цинка, уносит такой же заряд, какой он уносит при отделении, например, от меди. Вопрос кажется ему по некоторым причинам крайне трудным. «Но представим себе, — пишет он[1]), — что мы перешагнули эту трудность, ограничившись утверждением, что атомный заряд имеет постоянную величину; для упрощения наших рассуждений

[1]) «Трактат», § 260.

назовем этот постоянный молекулярный заряд *молекулой электричества*». Но тут же он оговаривается, что это — весьма несовершенное выражение, мало гармонирующее со всем остальным содержанием «Трактата». Он надеется, что со временем будет создана база для истинной теории электрического тока, и тогда «эти предварительные теории станут ненужными».

Первым провозвестником электрического атомизма следует поэтому все же назвать Гельмгольтца[1]), который в своей речи о воззрениях Фарадея смело и безоговорочно становится на точку зрения существования «электрических атомов», называя соответствующее заключение «поразительным».

Но творцом электронной *теории* является, конечно, Лорентц и только он один. Он не ограничился высказыванием гипотезы, — он сделал утверждение и разработку основного представления об электронах делом всей своей жизни. Поведение электронов в проводниках и диэлектриках, их участие в оптических явлениях, электронная магнитооптика, все подробности движения электронов, объяснение их внутриатомного трения, изменение формы электронов при движении, зависимость электромагнитной массы от скорости — все эти вопросы поставлены, в значительной степени разрешены и оценены с самых общих точек зрения самим Лорентцом.

Электронная теория оказала колоссальное влияние на развитие науки; под ее воздействием атомизм получил новый, пышный расцвет; механика и вся физика получили обоснование в электронике; к единству воззрений на вещество был сделан новый огромный шаг, подобный по размерам тому, которым мы обязаны электромагнитной теории света в области сведений об эфире.

Эфир... Это — тоже один из кардинальных пунктов лорентцовской теории. Лорентц первый провозгласил учение о неподвижном эфире и сделал из него все крайние выводы. Как известно, это учение выдержало все сравне-

---

[1]) Helmholtz, Vorträge und Reden 2, 249.

ния с опытом — все за исключением (в оптике) одного опыта Майкельсона. Героические усилия творца гипотезы неподвижного эфира не спасли его создания от гибели под ударами теории относительности; скорее можно сказать — иронии судьбы, — что он сам выковал для последней наиболее крепкое оружие в виде своих знаменитых «лорентцовских преобразований». Развившееся параллельно учение о квантах выбило из-под ног классической теории электронов последнюю опору.

И все же и для современного читателя книга Лорентца сохраняет значительную долю своего былого обаяния. Во всех подробностях выписанного им полотна виден огромный мастер, сильный и в замысле и в исполнении. Его борьба за свое учение поистине грандиозна. Поразительно и научное беспристрастие автора, который с уважением идет навстречу всем возражениям, всем трудностям. Прочтя его книгу, видишь воочию, что для спасения старых привычных воззрений сделано все — и это все не принесло им спасения. Движение вперед на новых путях предопределено новому поколению ученых.

Во всей своей долголетней научной деятельности Лорентц проявлял себя стойким материалистом; будучи теоретиком, он считал высшим арбитром истины непосредственный опыт. Он не дал себя увлечь ни в агностицизм, ни в махизм, ни в какие-либо другие идеалистические уклоны. Чтобы показать его философское лицо, достаточно будет процитировать несколько строк из настоящего труда, где автор раскрывает сущность своего научного метода (см. § 6): «Как вся атомистика, так, в частности, и электронная теория естественно встречают неблагоприятное отношение со стороны некоторых физиков, которые предпочитают прокладывать свой путь через новые и неисследованные области, следуя широким, торным научным путям в виде законов термодинамики, или приходят к важным и красивым результатам, ограничиваясь простым описанием явлений... В молекулярных теориях слишком предприимчивый физик часто рискует потерять дорогу. Однако... эти молекулярные гипотезы могут гордиться некоторыми такими результатами, которых никогда нельзя было бы достигнуть методами чистой термодинамики или при помощи уравнений электромагнитного поля в их самой общей форме».

Труды Лорентца создали ему огромный авторитет во всем научном мире. В 1900 г. по случаю юбилея его докторской работы был выпущен особый, посвященный ему, сборник (Lorentz-Festschrift). В 1902 г. Лорентц вместе с Зееманом получил Нобелевскую премию. Он был обязательным и бессменным президентом всех крупных физических конгрессов, в том числе так называемых Сольвеевских. На своей родине он пользовался, конечно, особым почетом.

Лорентц скончался 4 февраля 1928 г. в возрасте 75 лет; Голландия в его лице потеряла одного из своих великих сынов, которыми столь богата эта маленькая страна.

Т. Кравец

Г. А. ЛОРЕНТЦ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ЯВЛЕНИЯМ СВЕТА И ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ. ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Теория электронов, которую я буду иметь честь вам излагать, представляет собой в настоящее время такую обширную область, что разобрать ее полностью представится для меня невозможным. Даже в том случае, если я ограничусь общим обзором этой самой молодой ветви учения об электричестве и остановлюсь только на самых важных ее применениях в области света и лучистой теплоты и на тех ее затруднениях, которые пока что остаются неустраненными, я должен буду вести изложение возможно более сжато; только в таком случае я смогу использовать предоставленное в наше распоряжение время с надлежащей эффективностью.

Как здесь, так и в любой другой области теоретической физики мы должны отличать, с одной стороны, общие идеи и гипотезы физического характера, а с другой — ряд математических формул и вычислений, при помощи которых эти идеи и гипотезы могут быть выражены и разработаны. Я постараюсь осветить первую часть нашего предмета, оставляя вторую до некоторой степени в тени и опуская все длинные вычисления, которые лучше могут быть изложены в книге, чем на лекциях[1]).

1. Что касается физических основ, теория электронов ведет свое начало от великой теории электричества, с которой навсегда будут связаны имена Фарадея и Максвелла.

---

[1]) В этой книге вычисления, на которые я лишь коротко указал в тексте, приведены полностью в примечаниях в конце.

Вы все знаете теорию Максвелла, которую мы можем назвать общей теорией электромагнитного поля. Существенным в этой теории является то, что мы в ней обращаем главное внимание на состояние материи или среды, заполняющей поле. Упомянув об этом состоянии, я должен немедленно обратить ваше внимание на следующий любопытный факт. Хотя мы все время интересуемся этим «состоянием», нам вовсе не надо пытаться как-нибудь его себе наглядно представлять; и действительно, мы не можем сказать о нем слишком много. Правда, мы можем вообразить себе существование внутренних напряжений в среде, окружающей наэлектризованное тело или магнит; мы можем, далее, представлять себе электричество как некоторую субстанцию или жидкость, которая в проводнике перемещается свободно, а в диэлектрике связана с положением равновесия; мы можем, наконец, считать, что магнитное поле является носителем некоторых невидимых движений, например вращений вокруг линий сил. Все это и было проделано многими физиками, и сам Максвелл положил этому начало. Однако реальной необходимости в этом нет; мы можем широко развить теорию и выяснить целый ряд явлений, не прибегая к умозрительным представлениям такого рода. И действительно, ввиду тех трудностей, к которым приводят эти представления, в последние годы появилась тенденция избегать их вовсе и строить теорию на небольшом числе предположений более общего характера.

Первое из этих предположений заключается в том, что в электрическом поле имеется особое состояние, которое дает начало силе, действующей на наэлектризованное тело, и потому может быть символически представлено силой, действующей на единицу заряда такого тела. Это и есть то, что мы называем *электрической силой*, которую мы принимаем за символ для этого особого состояния среды; о природе этого состояния мы не будем высказывать какие-либо более определенные и рискованные суждения. Второе предположение касается магнитного поля. Не прибегая к скрытым вращениям, о которых я только что упоминал, мы можем определить его посредством так называемой *магнитной силы*, т. е. силы, действующей на полюс с массой, равной единице [1].

Введя эти две основные величины, мы пытаемся выразить их взаимные соотношения посредством системы уравнений, которые, как оказывается, могут быть применены к весьма большому числу разнообразнейших явлений. Таким образом, математические соотношения приобретают исключительное значение; Герц утверждал даже, что *теорию* Максвелла лучше всего определить как систему *уравнений* Максвелла.

Мы будем пользоваться этими уравнениями не в той несколько сложной форме, в которой они даны в «Трактате» Максвелла, но в том более ясном и концентрированном виде, который им придали Хивизайд и Герц. В целях наибольшего упрощения я введу в дальнейшем единицы[1]) такого рода, чтобы избавиться в большинстве случаев от множителей типа 4π или $\sqrt{4\pi}$, которыми формулы первоначально были сильно загромождены. Как вам, конечно, известно, Хивизайд особенно ратовал за изгнание этих лишних множителей, и, я думаю, будет правильно, если мы последуем его совету. Поэтому наша единица электричества будет в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем обычная электростатическая единица. Сделав этот выбор, мы тем самым фиксируем для каждого случая то число, которым выражается электрическая сила. Что касается магнитной силы, то здесь мы попрежнему будем понимать под этим словом силу, действующую на единицу северного магнетизма; эта последняя, впрочем, тоже в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем обычно употребляемая единица.

2. Прежде чем переходить к электромагнитным уравнениям, я считаю необходимым сказать несколько слов о выборе осей координат и о наших математических обозначениях. Во-первых, мы всегда будем обозначать линию через s, поверхность через σ, объем через S и будем

---

[1]) Единицы и обозначения в этих лекциях (за исключением букв, служащих для обозначений векторов) — те же, что в моих статьях по теории Максвелла и по теории электронов в «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften», т. V, 13 и 14.

писать ds, $d\sigma$, dS для элементов линии, поверхности и объема. При рассмотрении поверхностей часто придется иметь дело с нормалью к поверхности; мы будем ее обозначать через n. Она должна быть всегда проведена в определенную сторону, и мы условимся проводить ее всегда наружу, если будем иметь дело с замкнутой поверхностью.

Нормалью можно пользоваться для определения направления вращения на поверхности. Мы будем говорить, что направление вращения в плоскости и нормаль к плоскости соответствуют друг другу, если обыкновенный или правый винт, завинчиваемый по направлению вращения, продвигается в направлении нормали. Согласившись на этом, мы можем добавить, что оси координат должны быть выбраны таким образом, чтобы ось OZ соответствовала вращению на 90° от оси OX к оси OY.

В дальнейшем будет удобно пользоваться простым векторным анализом и различать векторные и скалярные величины, обозначая одни и другие разными буквами. Следуя обычным обозначениям, я буду пользоваться для скаляров обыкновенными латинскими или греческими буквами. Что касается векторов, то в некоторых предыдущих статьях я пользовался для их обозначения готическими буквами. Но в данном случае, мне кажется, следует предпочесть латинские буквы жирного шрифта, прописные или строчные, например $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{c}$. Я буду обозначать через A_h составляющую вектора $\boldsymbol{A}$ в направлении h, через A_x, A_y, A_z — его составляющие по осям координат, через A_s — составляющую по направлению линии s и, наконец, через A_n — составляющую по нормали к поверхности.

Величину вектора $\boldsymbol{A}$ будем обозначать $|\boldsymbol{A}|$. Для квадрата, впрочем, будем писать просто $\boldsymbol{A}^2$.

Я должен буду напомнить вам некоторые понятия векторного анализа: понятие суммы и разности векторов, а также *скалярного* и *векторного произведений* векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Первое из этих «произведений», которое обозначается символом $(\boldsymbol{AB})$, есть величина скалярная, определяемая формулой

$$(\boldsymbol{AB}) = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Векторное произведение, которое мы будем изображать

$$[\boldsymbol{AB}],$$

есть вектор, нормальный к плоскости, проведенной через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$; его направление соответствует вращению на угол, меньший 180°, в направлении от $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{B}$, а величина дается площадью параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Составляющими его являются:

$$[\boldsymbol{AB}]_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad [\boldsymbol{AB}]_y = A_z B_x - A_x B_z,$$
$$[\boldsymbol{AB}]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Во многих случаях нам приходится рассматривать скалярную величину φ или вектор $\boldsymbol{A}$, заданные в каждой точке некоторого пространства. Если φ является непрерывной функцией координат, мы можем ввести вектор с составляющими

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Легко можно показать, что он будет нормален к поверхности

$$\varphi = \text{const}.$$

Мы можем называть его *градиентом* φ, и в наших формулах будем сокращенно писать «grad φ».

Пространство, в каждой точке которого вектор $\boldsymbol{A}$ имеет определенное направление и определенную величину, можно назвать векторным полем, и линии, которые в каждой точке указывают направление $\boldsymbol{A}$, могут быть определены как линии данного вектора или линии направления. В таком векторном поле, если A_x, A_y, A_z являются непрерывными функциями координат, мы можем для каждой точки ввести некоторую скалярную величину и некоторый новый вектор, которые оба зависят от того, каким образом $\boldsymbol{A}$ изменяется от точки к точке, и не зависят от выбора осей координат. Указанная скалярная величина называется *дивергенцией* $\boldsymbol{A}$ и определяется формулой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Вектор называется *ротацией* или *кэрлем* (вихрем) $\boldsymbol{A}$; его составляющие даются выражениями

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

а сам он может быть представлен символом

$$«\operatorname{rot}\boldsymbol{A}».$$

Если дивергенция вектора равна нулю во всех точках, говорят о *соленоидальном* распределении этого вектора по пространству. С другой стороны, если во всех точках мы имеем $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$, мы будем говорить о *безвихревом* распределении.

Чтобы кончить с нашими обозначениями, я должен буду добавить только, что символ Δ является сокращением для выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и что можно дифференцировать по координатам или по времени не только скалярные, но и векторные величины. Так, например, $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}$ обозначает вектор, составляющими которого являются:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

и $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ имеет подобное же значение. Дифференцирование по времени t мы будем во многих случаях обозначать точкой, повторное дифференцирование — двумя точками и т. д.

3. Теперь мы приготовлены к тому, чтобы написать основные уравнения электромагнитного поля в той форме, какую они принимают для эфира. Будем обозначать через $\boldsymbol{d}$ электрическую силу; тем же символом будем пользоваться для диэлектрического смещения, так как в эфире эти две величины имеют одинаковое направление и, в силу выбора наших единиц, одинаковое численное значение. Далее будем обозначать через $\boldsymbol{h}$ магнитную силу и через c — постоянную, зависящую от свойств эфира. Третий вектор — это ток $\boldsymbol{c}$, который теперь состоит только из тока смещения

Максвелла. Он имеется там, где диэлектрическое смещение $\boldsymbol{d}$ есть функция времени, и дается формулой

$$\boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{d}}. \tag{1}$$

Формулы электромагнитного поля могут быть теперь выражены в форме дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c} \boldsymbol{c} = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{d}}, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}. \tag{5}$$

Четвертое уравнение совместно с третьим определяет магнитное поле, которое получается при данном распределении тока $\boldsymbol{c}$. Что касается последнего уравнения, оно выражает закон, по которому проявляются электрические силы в системе с переменным магнитным полем — иначе говоря, это есть закон так называемой электромагнитной индукции. Формулы (1), (4) и (5) являются векторными уравнениями; каждое из них может быть заменено тремя скалярными уравнениями, отнесенными к трем осям координат.

Так, (1) эквивалентно системе

$$\boldsymbol{c}_x = \frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t}, \quad \boldsymbol{c}_y = \frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t}, \quad \boldsymbol{c}_z = \frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial t},$$

а (4) эквивалентно системе

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t} \text{ и т. д.}$$

Наши основные уравнения имеют тот физический смысл, что изображаемое ими состояние распространяется со скоростью c. Действительно, из шести величин $\boldsymbol{d}_x$, $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{d}_z$, $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_y$, $\boldsymbol{h}_z$ мы можем исключить пять[1]), а для остающейся

[1]) См. примечание 1.

одной величины ψ можем найти уравнение вида

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{6}$$

Это — типичное дифференциальное уравнение для распространяющегося возмущения равновесного состояния; скорость этого распространения равна c.

Хотя все решения наших уравнений обладают этим основным свойством, самые решения могут быть весьма разнообразны. Простейшее из них соответствует системе поляризованных плоских волн. Для таких волн мы имеем, например:

$$\boldsymbol{d}_y = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad \boldsymbol{h}_z = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{7}$$

причем все другие составляющие $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ равны нулю.

Мне нет необходимости подробно излагать вам, что выражается этими формулами; основной смысл их таков: если для определенного значения t в какой-нибудь точке с координатой x электрическая и магнитная силы имеют значения $\boldsymbol{d}_y$ и $\boldsymbol{h}_z$, то по прошествии некоторого промежутка времени δt они будут иметь это же значение в точке с координатой $x + c\,\delta t$. Постоянная a есть амплитуда, n есть частота, т. е. число колебаний за время 2π. Если n достаточно велико, мы имеем дело с пучком плоско-поляризованного света, в котором, как вы знаете, электрические и магнитные колебания перпендикулярны к лучу и друг к другу.

Подобными же, хотя, может быть, более сложными, формулами можно представить распространение волн Герца или любых излучений, которые обязательно исходят из всякой электромагнитной системы, не находящейся в стационарном состоянии. Если мы прибавим соответственные граничные условия, то подобным же образом сможем подвести под нашу систему уравнений такие явления, как диффракция света через малые отверстия или рассеяние от мелких частичек.

Формулы для эфира составляют наиболее прочно установленную часть электромагнитной теории. Самый способ их вывода, может быть, и изменится в последующем, но трудно представить себе, чтобы изменились самые уравнения. Неточности и сомнения начинаются только тогда, когда мы подходим к рассмотрению явлений в весомых телах.

4. При изучении этих явлений есть один путь, который представляется сравнительно надежным и для наших целей вполне удовлетворительным. Следуя ему, мы просто исходим из некоторых соотношений, которые можно считать за краткие выражения наиболее важных результатов электромагнитных опытов. Мы должны ввести теперь *четыре* вектора: электрическую силу $\boldsymbol{E}$, магнитную силу $\boldsymbol{H}$, электрический ток $\boldsymbol{C}$ и магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$. Эти величины связаны следующими основными уравнениями:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{C} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \boldsymbol{C}, \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{B}}, \tag{11}$$

имеющими ту же форму, что и вышеприведенные уравнения для эфира.

Но теперь мы должны прибавить сюда соотношения между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{C}$, с одной стороны, и между $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ — с другой. Ограничиваясь изотропными телами, мы во многих случаях можем описывать явления с достаточной точностью, если для диэлектрического смещения будем писать векторное уравнение

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{12}$$

которое говорит, что смещение имеет направление электрической силы и ей пропорционально. Ток в этом случае равен опять-таки току смещения Максвелла

$$\boldsymbol{C} = \dot{\boldsymbol{D}}. \tag{13}$$

С другой стороны, в проводящих телах мы имеем дело с током проводимости, который дается выражением

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{14}$$

где σ есть новая постоянная. Если тело обладает свойствами только проводника, этот вектор представляет собой весь ток и является, следовательно, тождественным с тем, что мы назвали **C**. В некоторых случаях, однако, приходится рассматривать тела, обладающие свойствами как проводников, так и диэлектриков. Если мы допустим, что в такой среде электрическая сила вызывает как диэлектрическое смещение, так и ток проводимости, мы можем одновременно приложить оба уравнения (12) и (14) и написать для полного тока

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} = \varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \sigma\mathbf{E}. \tag{15}$$

Наконец, самое простое предположение, которое мы можем сделать относительно связи между магнитной силой и магнитной индукцией, можно выразить формулой

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{16}$$

где μ является новой постоянной.

5. Хотя уравнения (12), (14) и (16) оказываются полезными при рассмотрении многих задач, нельзя сказать, что их можно применять во всех без исключения случаях. Если бы даже это и имело место, наша теория перестала бы нас удовлетворять при попытке заглянуть глубже в природу явлений: действительно, ведь в этой общей теории мы, чтобы выразить особенные свойства различных весомых тел, просто приписываем каждому из них специальные значения диэлектрической постоянной ε, проводимости σ и магнитной проницаемости μ. Если мы хотим понять, каким образом электрические и магнитные свойства зависят от температуры, плотности, химического строения или кристаллического состояния вещества, то мы не можем удовлетвориться простым введением для каждого вещества этих коэффициентов, значения которых должны определяться из опыта; мы будем принуждены обратиться к какой-нибудь гипотезе относительно механизма, лежащего в основе всех этих явлений.

Эта необходимость и привела к представлению об *электронах* [2], т. е. крайне малых электрически заряженных частичках, которые в громадном количестве присутствуют во всех весомых телах; их распределением и движением мы и намерены объяснить все электрические и оптические явления, которые происходят не в свободном эфире. Моей задачей будет подробно разобрать некоторые из этих явлений, но я должен указать теперь же, что, по нашим новейшим воззрениям, электроны в проводнике (по крайней мере некоторая их часть) находятся в свободном состоянии, так что могут подчиняться электрической силе, которая перемещает положительные частицы в одну сторону, а отрицательные электроны — в противоположную. В случае непроводника мы будем, наоборот, предполагать, что электроны связаны с некоторым положением равновесия. Если в металлической проволоке электроны одного рода, например отрицательные, движутся в одном направлении и, возможно, электроны другого знака — в противоположном, мы имеем дело с током проводимости; такой ток может привести к состоянию, при котором тело, соединенное с одним концом проводника, получает избыток или положительных, или отрицательных электронов. Этот избыток, заряд тела в целом, может быть обнаружен, и если электричество находится в равновесии и тело состоит из проводящего вещества, то он сосредоточен в весьма тонком слое на поверхности тела.

В весомом диэлектрике тоже может происходить движение электронов. В самом деле, хотя мы и будем приписывать каждому из них определенное положение равновесия, мы не должны думать, что они вполне неподвижны. Они могут быть смещены электрической силой, возникающей в эфире; мы принимаем, что последний проникает всю весомую материю, — к этому вопросу нам скоро придется вернуться. Это смещение, однако, немедленно вызовет новую силу, которая будет стремиться вернуть частичку в ее первоначальное положение и которую поэтому уместно будет назвать *силой упругости*. В непроводящих телах, какими являются, например, стекло и сера, движение электронов, удерживаемых силой упругости в известных границах, и дает совместно с изменением диэлектрического смещения в самом эфире то, что Максвелл назвал током смещения. Вещество, в котором электроны смещены в новые положения, можно назвать электрически поляризованным.

Далее, под влиянием упругих сил электроны могут колебаться около положения своего равновесия. В силу этого, а также, вероятно, под влиянием других, более неправильных движений они становятся центрами волн, которые выходят в окружающий эфир и могут быть наблюдаемы как свет, если частота достаточно велика. Так мы можем истолковать тепловое или световое излучение. Что касается обратного явления, поглощения, его можно объяснить, рассматривая колебания электронов, вызываемые периодическими силами, которые имеются в пучке падающего света. Если движение электронов, приведенных таким образом в колебание возмущается и тем или иным путем превращается в движение неправильное, которое мы называем тепловым, то ясно, что часть падающей энергии будет накопляться в теле — другими словами, будет наблюдаться некоторое поглощение. Вынужденным движением электронов может быть объяснено не одно только поглощение. Оптический резонанс — так можно называть во многих случаях это явление — может сказываться и в том случае, если нет никакого сопротивления, так что тело совершенно прозрачно. В этом случае электроны, содержащиеся внутри молекул, тоже будут приводиться в движение, и хотя и не произойдет никакой потери колебательной энергии, колеблющиеся частички будут влиять на скорость, с которой колебания распространяются по телу. Принимая во внимание эту реакцию электронов, мы можем вывести электромагнитную теорию преломления света в зависимости от длины волны и состояния вещества и представить себе картину великолепных и разнообразных явлений двойного лучепреломления и круговой поляризации.

С другой стороны, значительное развитие получила теория движения электронов в металлических телах. Хотя здесь тоже многое еще остается сделать, так как по мере того, как мы двигаемся дальше, возникают новые вопросы, мы в настоящий момент уже можем отметить значительные результаты, полученные Рике, Друде и Дж. Дж. Томсоком[1]). Основная идея современной теории тепловых и электрических свойств металлов заключается в том, что свободные электроны в этих телах принимают участие в тепловом движении молекул вещества, двигаясь по всем направлениям с такими скоростями, что средняя кинетическая энергия каждого из них равна энергии молекулы газа, находящегося при той же температуре. Если мы допустим, далее, что электроны непрерывно сталкиваются с атомами металла, описывая при этом неправильные зигзагообразные траектории, то для нас станет ясной причина, по которой металлы являются одновременно хорошими проводниками как тепла, так и электричества и по которой, как общее правило, в ряду металлов отношение коэффициентов теплопроводности и электропроводности есть величина приблизительно постоянная. Чем больше число свободных электронов и чем больше промежуток времени между двумя последовательными столкновениями, тем больше будет проводимость как тепловая, так и электрическая.

6. Этого краткого обзора достаточно, чтобы показать, что электронную теорию следует рассматривать как распространение на область электричества молекулярной и атомной теорий, которые уже вполне оправдали себя во многих отраслях физики и химии [3]. Как вся атомистика, так, в частности, и электронная теория естественно встречают неблагоприятное отношение со стороны некоторых физиков, которые предпочитают прокладывать свой путь через новые и неисследованные области, следуя широким, торным научным путям в виде законов термодинамики, или

---

[1]) E. Riecke, Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme, Ann. Phys. Chem. **66** (1898), стр. 353, 545, 1199; Über das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektrizität, Ann. Phys. **2** (1900), стр. 835. P. Drude, Zur Elektronentheorie der Metalle, Ann. Phys. **1** (1900), стр. 566; **3** (1900), стр. 369. J. J. Thomson, Indications relatives à la constitution de la matière fournies par les recherches récentes sur le passage de l'électricité à travers les gaz. Rapports au Congrès de physique de 1900, Paris, **3**, стр. 138. См. также H. A. Lorentz, The motion of electrons in metallic bodies, Amsterdam Proc. 1904—1905, стр. 438, 588, 684.

приходят к важным и красивым результатам, ограничиваясь простым описанием явлений и их взаимных соотношений при помощи системы подходящих уравнений. Никто не может отрицать, что эти методы имеют свою прелесть и что, следуя им, мы все время чувствуем под собой твердую почву, тогда как в молекулярных теориях слишком предприимчивый физик часто рискует потерять дорогу или отклониться от нее в погоне за каким-нибудь обманчивым призраком успеха.

Мы не должны забывать, однако, что эти молекулярные гипотезы могут гордиться некоторыми такими результатами, которых никогда нельзя было бы достигнуть методами чистой термодинамики или при помощи уравнений электромагнитного поля в их самой общей форме, — эти результаты хорошо известны всем изучавшим кинетическую теорию газов, теорию слабых растворов, электролитическую теорию и теорию возникновения электрического тока путем переноса ионов. Равным образом плодотворности этих гипотез не может отрицать тот, кто следил за великолепными исследованиями Дж. Дж. Томсона[1]) и его сотрудников в области электрической проводимости газов.

7. Теперь я должен познакомить вас с уравнениями, лежащими в основе математической теории электронов. Позвольте мне, прежде чем их вводить, сделать несколько предварительных замечаний.

Во-первых, мы будем приписывать каждому электрону определенные конечные размеры, как бы малы они ни были, и будем исследовать не только внешнее поле, но и внутренность электрона: можно говорить об отдельных объемных элементах и внутри электронов, и там состояние может изменяться от одной точки к другой. Относительно этого состояния мы предположим, что оно имеет тот же характер, как и во внешних точках. Действительно, одно из важнейших наших основных предположений будет заключаться в том, что эфир не только занимает все пространство между молекулами, атомами и электронами, но

---

[1]) J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases. Cambridge, 1903.

что он и проникает все эти частички. Мы добавим гипотезу, что, хотя бы частички и находились в движении, *эфир всегда остается в покое* [4]. Мы можем примириться с этим, на первый взгляд поразительным, представлением, если будем мыслить частички материи как некоторые местные изменения в состоянии эфира. Эти изменения могут, конечно, очень хорошо продвигаться вперед, в то время как элементы объема среды, в которой они наблюдаются, остаются в покое.

Но если внутри электрона имеется эфир, там может существовать и электромагнитное поле, и все, что нам остается сделать, — это установить систему уравнений, которая бы была приложима как к тем частям эфира, в которых есть электрический заряд, т. е. к электронам, так и к тем, где заряда нет. Что касается распределения заряда, то здесь мы вольны делать какие угодно предположения. Для удобства рассуждений мы предположим, что он распределен по некоторому объему, — скажем, по всему объему, занятому электроном, и будем считать, что объемная плотность ρ есть непрерывная функция координат, так что у заряженной частички нет резкой границы; напротив, она окружена тонким слоем, в котором плотность непрерывно падает от того значения, которое она имеет внутри электрона, до нуля. Благодаря этой гипотезе непрерывности ρ, которую мы распространим на все другие величины, встречающиеся в наших уравнениях, нам не придется беспокоиться о поверхностях разрыва и загромождать теорию отдельными уравнениями для этих поверхностей. Мало того, если мы предположим, что различие между свойствами эфира внутри и вне электронов вызывается — во всяком случае в той мере, в какой это имеет значение для нас, — только присутствием объемной плотности внутри электронов, уравнения для внешнего поля могут быть получены из уравнений для внутреннего поля, если мы приравняем ρ нулю, так что мы должны написать только *одну* систему дифференциальных уравнений.

Очевидно, они должны быть выведены из уравнений (2) — (5), которые были установлены нами для свободного, т. е. лишенного зарядов, эфира, путем введения в них соответствующих изменений, выражающих влияние заряда. Было найдено, что мы можем прийти к цели при помощи самого простого изменения и представить себе следующую систему:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = \rho, \tag{17}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c} \boldsymbol{c} = \frac{1}{c} (\dot{\boldsymbol{d}} + \rho \boldsymbol{v}), \tag{19}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}, \tag{20}$$

в которой изменены только первая и третья формулы.

Чтобы оправдать эти изменения, я должен в первую очередь напомнить вам общее соотношение максвелловской теории, связывающее диэлектрическое смещение через замкнутую поверхность и величину заряда e, содержащуюся внутри нее. Это соотношение выражается уравнением

$$\int d_n \, d\sigma = e, \tag{21}$$

в котором интеграл взят по замкнутой поверхности, причем каждый ее элемент $d\sigma$ умножается на составляющую $\boldsymbol{d}$ по нормали n, которая, как мы ранее установили, направлена наружу. Применяя обычные рассуждения и сравнивая данное состояние с таким, при котором не было бы вообще никакого диэлектрического смещения, мы придем к заключению, что общее количество электричества, смещенное через поверхность (при этом то количесто электричества, которое смещено в направлении наружу, мы считаем за положительное), равно заряду e. Теперь, если мы приложим это рассуждение к элементу объема $dx\,dy\,dz$, взятому в точке, где объемная плотность равна ρ, имеем:

$$e = \rho \, dx \, dy \, dz,$$

и так как интеграл в (21) сводится к

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} \, dx \, dy \, dz,$$

мы сразу получаем формулу (17).

Во-вторых, мы должны заметить, что движущийся заряд образует то, что мы называем конвекционным током, и вызывает те же магнитные действия, что и обыкновенный ток проводимости; это было впервые показано в прославленном и общеизвестном опыте Роулэнда [5]. Если теперь $\boldsymbol{v}$ есть скорость заряда, естественно для тока конвекции написать $\rho\boldsymbol{v}$; в самом деле, три составляющие ρv_x, ρv_y, ρv_z представляют количества электричества, перенесенные в единицу времени через единицу площади поверхности, нормальной к осям координат. С другой стороны, если внутри электрона имеется электромагнитное поле, там будет иметь место также ток смещения $\dot{\boldsymbol{d}}$. Поэтому мы принимаем для полного тока следующее выражение:

$$\boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{d}} + \rho\boldsymbol{v}. \tag{22}$$

Для определения магнитного поля нам придется пользоваться уравнением (19). Конечно, это опять-таки векторное уравнение. При пользовании им в отдельных вопросах часто бывает удобно заменить его тремя скалярными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_x}{\partial t} + \rho v_x\right), \quad \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_y}{\partial t} + \rho v_y\right),$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial d_z}{\partial t} + \rho v_z\right).$$

Вы видите, что, полагая $\rho = 0$ в формулах (17) и (19), мы возвращаемся к первоначальным уравнениям (2) и (4).

8. Необходимо добавить сюда еще одно уравнение, которое по своему значению не уступает уравнениям (17)—(20). Следует отметить, что я тщательно избегал говорить что-нибудь о природе электрического заряда, представленного буквой ρ. Никакие умозрительные представления в этой области, никакие попытки свести идею заряда к идеям другого свойства не имеют места в настоящей теории; мы будем утверждать только одно, что ρ есть величина, относящаяся к известной точке эфира и уравнением (17) связанная с распределением диэлектрического смещения по соседству с этой точкой. Мы можем сказать,

что в эфире может наблюдаться известное состояние, определяемое вектором $\boldsymbol{d}$, который мы называем диэлектрическим смещением, и что, вообще говоря, этот вектор распределен соленоидально, но что имеются некоторые места, представляющие исключение из этого правила, — места, где дивергенция $\boldsymbol{d}$ принимает некоторое значение ρ, отличное от нуля. В этом случае мы говорим об электрическом заряде и понимаем под его плотностью величину $\operatorname{div}\boldsymbol{d}$.

Что касается утверждения, что заряды могут перемещаться сквозь эфир, причем сама среда остается в покое, то в самой простой его форме оно значит только то, что значение $\operatorname{div}\boldsymbol{d}$, которое в какой-нибудь момент существует в точке P, в следующий момент будет обнаружено в другой точке P'.

Но, чтобы объяснить электромагнитные явления, мы вынуждены пойти несколько дальше. Не вполне достаточно рассматривать ρ просто как символ некоторого состояния эфира. Наоборот, мы должны в известной степени наделить заряды субстанциальностью, — по крайней мере в той степени, чтобы мы могли признать возможность *сил*, действующих на них и вызывающих или изменяющих их движение. Слово «сила» употребляется в обычном смысле, какой оно имеет в динамике, и мы легко привыкнем к мысли о силах, действующих на заряды, если мы представим себе, что эти последние неразрывно связаны с тем, что мы привыкли называть материей, или являются свойством этой материи. Это и есть мысль, лежащая в основе выражения «заряженная частичка», которым мы уже пользовались и которым будем пользоваться в дальнейшем для обозначения электрона. В дальнейшем мы увидим, что, по крайней мере в некоторых случаях, является весьма сомнительным, насколько удачно мы выбрали этот термин.

Как бы то ни было, но нам придется говорить о силах, действующих на заряд или на электрон, на заряженную материю — как вы предпочитаете. В соответствии с основными принципами теории Максвелла мы будем считать, что эта сила вызывается состоянием эфира, или, так как эта среда проникает в электроны, что она представляет собой действие эфира на внутренние точки тех частиц, на которых имеется заряд. Если мы разделим весь электрон на элементы объема, мы будем иметь силу, действующую на каждый элемент и определяемую состоянием эфира именно внутри этого элемента. Мы допустим, что эта сила пропорциональна заряду элемента, так что нам остается узнать только силу, действующую на единицу заряда. Это — та сила, которую мы теперь можем назвать *электрической силой* в тесном смысле слова. Будем обозначать ее через $\boldsymbol{f}$. Определяющее ее выражение, которое нам остается добавить к уравнениям (17) и (20), имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vh}]. \tag{23}$$

Подобно нашим предыдущим уравнениям, оно получено путем обобщения результатов электромагнитных опытов. Первый член выражает силу, действующую на электрон в электростатическом поле. Действительно, в этом случае сила, действующая на единицу заряда, должна вполне определяться диэлектрическим смещением. С другой стороны, часть силы, даваемая вторым членом, может быть выведена из закона, по которому магнитное поле действует на элемент тока с силой, перпендикулярной к току и к линиям сил; это действие в наших единицах может быть выражено в векторной форме следующим образом [6]:

$$\boldsymbol{F} = \frac{s}{c}[\boldsymbol{ih}],$$

где $\boldsymbol{i}$ есть сила тока, рассматриваемого как вектор, а s — длина элемента тока. По электронной теории $\boldsymbol{F}$ слагается из всех сил, с которыми поле $\boldsymbol{h}$ действует на отдельные электроны, движущиеся по проводнику. Для упрощения вопроса мы предположим, что мы имеем дело с электронами только одного рода, движущимися с общей скоростью $\boldsymbol{v}$ и имеющими один и тот же заряд e; тогда можно написать:

$$s\boldsymbol{i} = Ne\boldsymbol{v},$$

где N есть (целое) число этих частичек в элементе s. Отсюда

$$\boldsymbol{F} = \frac{Ne}{c}[\boldsymbol{vh}],$$

так что, деля на Ne, получаем для силы, действующей на единицу заряда:

$$\frac{1}{c}[\boldsymbol{vh}].$$

Интересное и простое применение этого результата мы найдем в объяснении при его помощи индукционного тока, который получается в проводнике, пересекающем магнитные линии сил. Два рода электронов, имеющих скорости проводника $\boldsymbol{v}$, перемещаются в данном случае под действием сил, определяемых нашей формулой, в противоположных направлениях.

9. Итак, в одном случае мы пришли к необходимости ввести силу $\boldsymbol{d}$, а в другом — силу $\frac{1}{c}[\boldsymbol{vh}]$; мы теперь соединим обе силы так, как это сделано в уравнении (23); при этом, вводя предположение, что в общем случае обе силы существуют одновременно, мы выходим за пределы прямых опытов. Если бы, например, электрон двигался в пространстве, пронизываемом волнами Герца, мы могли бы вычислить действие поля при помощи значений $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, наблюдаемых в той точке поля, которая занята частичкой.

Конечно, в случаях, подобных только что рассмотренному, при вычислении силы, вызываемой внешним полем, нам нет нужды различать направление и величину силы $\boldsymbol{f}$ в различных точках электрона, если только частица не вращается; скорость $\boldsymbol{v}$ будет одна и та же во всех ее точках, и внешнее поле можно считать однородным, принимая во внимание малые размеры электрона. Но, когда электрон находится в состоянии переменного движения и нам нужно вычислить силу, зависящую от его собственного поля, наш анализ необходимо несколько продолжить. Теперь поле далеко не однородно, и, разделив нашу частичку на элементы объема, мы должны определить действие поля на каждый из них. В конце концов, если мы будем рассматривать электрон как твердое тело, мы без труда вычислим обычным способом результирующую силу и результирующую пару.

10. Я так смело говорю о том, что происходит внутри электрона, как будто я сумел заглянуть внутрь этих ма-

лых частичек, и боюсь, что кто-нибудь подумает, что лучше было бы мне и не пытаться входить во все эти детали. Мое оправдание заключается в том, что, если нам нужно иметь вполне определенную систему уравнений, нельзя поступать иначе; мало того, как мы увидим дальше, опыт действительно может дать кое-какие указания о размерах электронов. Во-вторых, следует заметить, что в тех случаях, когда начинает себя проявлять внутреннее состояние электронов, рассуждения, подобные вышеприведенному, являются во всяком случае интересными, независимо от их верности; в то же время их нужно считать безобидными, раз мы признаем, что внутреннее состояние электронов есть вопрос неважный по существу.

Следует также отметить, что наши основные предположения ни в коем случае не исключают возможности и таких распределений зарядов, о которых мы до сих пор не говорили. Бесконечно уменьшая толщину переходного слоя, в котором ρ изменяется от конечного значения до нуля, мы можем получить и предельный случай электрона с резкой границей. Мы можем также представить себе, что заряд сосредоточен не во всем объеме частички, а только в некотором поверхностном слое, толщина которого может быть как угодно мала, так что мы можем говорить о поверхностном заряде. В некоторых формулах мы действительно будем иметь в виду этот случай.

11. Так как наши уравнения являются краеугольным камнем того здания, которое мы собираемся построить, будет полезно рассмотреть их несколько подробнее, чтобы быть уверенными в том, что они совместимы друг с другом. Легко показать, что это действительно так, если только заряд каждого элемента объема остается постоянным во все время движения[1]). Если рассматривать электроны как твердые тела (а так мы и будем поступать почти всегда), то, конечно, ρ постоянно в каждой точке частички. Мы можем, впрочем, также предположить, что электроны изменят форму и объем; в этом случае нужно только

---

[1]) Примечание 2.

принять, что величина ρ для элемента объема изменяется обратно пропорционально величине элемента.

Важно также отметить, что наши формулы применимы к системе, в которой заряды не сосредоточены в определенных малых частичках, а распределены каким угодно способом в больших объемах. Мы можем даже пойти дальше и представить себе любое число зарядов с плотностями ρ_1, ρ_2 и т. д., которые обладают способностью взаимной проницаемости, занимая одну и ту же часть пространства, и которые в то же время двигаются каждый со своей скоростью. Это приведет нас к замене членов ρ и $\rho\boldsymbol{v}$ в (17) и (19) через $\rho_1+\rho_2+\ldots$ и $\rho_1\boldsymbol{v}_1+\rho_2\boldsymbol{v}_2+\ldots$, где векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ... являются скоростями отдельных зарядов. Такого рода предположение, сколь искусственным оно бы нам ни представлялось, окажется полезным в одной из задач, которые нам придется рассматривать.

12. Я теперь должен обратить ваше внимание на некоторые прекрасные результаты, которые могут быть выведены из наших основных уравнений, и в первую очередь на способ вычисления электромагнитного поля по формулам (17)—(20) при заданном распределении и движении зарядов. Возможность такого определения обусловливается, во-первых, тем, что совершенно таким же способом, как в случае уравнений для свободного эфира, мы можем здесь исключить пять величин из шести: d_x, d_y, d_z, h_x, h_y, h_z, а во-вторых, замечательной формой, в которой представляется окончательное уравнение[1]). Так, например, для составляющих $\boldsymbol{d}$ мы имеем три уравнения, которые мы можем соединить в одну векторную формулу:

$$\Delta\boldsymbol{d}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{d}}=\operatorname{grad}\rho+\frac{1}{c^2}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t};\tag{24}$$

подобное же условие имеем и для магнитной силы:

$$\Delta\boldsymbol{h}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{h}}=-\frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v}).\tag{25}$$

---

[1]) Примечание 3.

Нет нужды выписывать шесть скалярных уравнений для отдельных составляющих; мы можем ограничиться формулами для $\boldsymbol{d}_x$ и $\boldsymbol{h}_x$, т. е.

$$\Delta \boldsymbol{d}_x - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{d}}_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_x)}{\partial t}, \tag{26}$$

$$\Delta \boldsymbol{h}_x - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{h}}_x = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \boldsymbol{v}_y)}{\partial z}\right\}. \tag{27}$$

Для большей ясности будет целесообразно ввести специальное обозначение для левых частей этих уравнений. Результат операции Δ, примененной к величине ψ, являющейся функцией x, y, z, называется оператором Лапласа. Подобным же образом результат операции $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ может быть назван оператором Даламбера в память того, что математик Даламбер первый решил некоторое уравнение в частных производных, которое встречается в теории колебания струны и в котором имеется эта операция — вернее операция $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, являющаяся ее частным случаем.

Так как можно дифференцировать по времени и пространству и векторные величины, мы можем, конечно, говорить об операторах Даламбера для векторных величин с тем же правом, как и для скалярных. А так как для данного распределения и движения зарядов правые части наших последних уравнений являются известными функциями x, y, z и t, мы видим, что векторы $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, равно как и их составляющие, определяются значениями соответственных операторов Даламбера. Поэтому мы должны разобрать вопрос, каково должно быть значение величины ψ, для которой оператор Даламбера имеет заданное значение ω. Эта задача допускает простое решение. В обыкновенной теории потенциала доказывается, что функция ψ, для которой оператор Лапласа имеет заданное значение ω, может быть определена по формуле

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\omega}{r}\,dS, \tag{28}$$

где r — расстояние от элемента объема dS до точки P, для которой мы хотим вычислить ψ, а ω — значение оператора Лапласа для этого элемента; интегрирование производится по всему пространству, где ω отлично от нуля.

Так вот, весьма замечательно, что функцию ψ, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = \omega, \tag{29}$$

можно вычислить по методу, сильно напоминающему метод формулы (28) [1]). Единственное различие заключается в том, что если нам нужно определить значение ψ в точке P для момента времени t, мы должны для ω брать значение этой функции в элементе dS в момент времени $t - \frac{r}{c}$ [7]. В дальнейшем величины, значения которых следует брать не для момента времени t, а для более раннего момента $t - \frac{r}{c}$, мы будем заключать в квадратные скобки. Пользуясь этим обозначением, мы можем утверждать, что решением дифференциального уравнения (29) является функция

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{[\omega]}{r}\,dS. \tag{30}$$

Следует заметить, что это имеет место также и тогда, когда ω — величина векторная; в этом случае векторами являются и $[\omega]$ и $\frac{[\omega]}{r}dS$, и интегрирование в (30) следует понимать как суммирование бесконечного числа бесконечно малых векторов. Когда требуется произвести самое вычисление, векторное уравнение опять можно разложить на три скалярных уравнения, содержащих составляющие ω и дающих составляющие ψ.

13. Вышеприведенный метод вычисления можно применить к уравнениям (24) и (25) или (26) и (27). Так как, однако, вторые члены этих формул отличаются некоторой сложностью, мы предпочитаем не определять непосредственно $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, а вычислить в первую очередь некоторые

---

[1]) Примечание 4.

вспомогательные функции, которые называются *потенциалами* и через которые можно будет выражать электрические и магнитные силы. Первая из этих функций есть скалярная величина, которую мы будем обозначать через φ, а вторая является вектором, который будем обозначать через $\boldsymbol{a}$.

Если потенциалы удовлетворяют соотношениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\rho \tag{31}$$

и

$$\Delta\boldsymbol{a} - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}, \tag{32}$$

то можно показать[1]), пользуясь уравнениями (17) — (20), что диэлектрическое смещение дается выражением

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{33}$$

а магнитная сила — выражением

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{34}$$

Вы видите, что уравнения (31) и (32) имеют ту же форму, как и (29), так что оба потенциала определяются тем условием, что для них операторы Даламбера должны иметь простые значения $-\rho$ и $-\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}$. Поэтому, принимая во внимание (30), мы можем написать:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}[\rho]\,dS \tag{35}$$

и

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}[\rho\boldsymbol{v}]\,dS. \tag{36}$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (33) и (34) решают нашу задачу. Они показывают, что для вычисления поля мы должны поступать следующим образом. Пусть P будет та точка, для которой мы хотим определить значения потенциалов для момента времени t. Мы должны разделить

---

[1]) Примечание 5.

все окружающее пространство на элементы объема; какой-нибудь из них пусть будет dS. Пусть он находится при точке Q; расстояние QP обозначим через r. В этом элементе объема в определенный момент времени или имеется какая-нибудь часть электрона, или нет. Нас интересует только то, имеется ли там какой-нибудь заряд в момент времени $t-\frac{r}{c}$. В самом деле, квадратные скобки должны нам напоминать, что мы должны понимать под ρ плотность, имеющуюся в объеме dS в определенный момент времени $t-\frac{r}{c}$, а под ρv — произведение из плотности на скорость заряда внутри dS в тот же самый момент. Эти значения $[\rho]$ и $[\rho v]$ надо умножить на dS и разделить на r. Далее, мы должны со всеми элементами поступить так же, как мы поступили с одним элементом dS, и, наконец, все результаты сложить. Конечно, будет много элементов, которые в интеграле не дадут ничего; это будут все те элементы, в которых в момент времени $t-\frac{r}{c}$ не содержится заряда.

14. По поводу вышеизложенного следует сделать несколько дальнейших замечаний. Во-первых, вы видите, что множитель $\frac{1}{4\pi}$, от которого мы так заботливо хотели избавиться, все же появился на сцену. Мы никак не можем предотвратить его появления, но, к счастью, он теперь будет встречаться только в небольшом числе наших уравнений. Во-вторых, особенно важно заметить, что значения ρ и ρv, которые для какой-нибудь точки Q наблюдаются в момент времени $t-\frac{r}{c}$, в точке P проявляют себя не в этот момент $t-\frac{r}{c}$, а в более поздний момент t. Вот почему мы можем говорить о распространении со скоростью c. Части φ и a, обусловленные различными элементами dS, отвечают состояниям внутри этих элементов в различные моменты времени — моменты тем более отдаленные, чем больше расстояние этих элементов от рассматриваемой точки P.

Ввиду этого специального характера нашего результата потенциалы φ и $\boldsymbol{a}$, даваемые выражениями (35) и (36), часто называются *запаздывающими потенциалами*.

Я должен добавить, что функция (30) не является наиболее общим решением (29) и что по этой причине значения (33) и (34), выведенные из (35) и (36), не являются единственными, удовлетворяющими основным уравнениям. Нам нет, однако, нужды говорить о других решениях, если мы примем, что единственной причиной, вызывающей электромагнитное поле, является наличие электронов и их движений [1]).

15. Хороший пример для применения наших общих формул дает случай одного электрона. Предположим, во-первых, что частичка никогда не двигалась и не будет двигаться. Тогда $\boldsymbol{a} = 0$, и так как ρ имеет одно и то же значение для всех моментов времени, скалярный потенциал дается выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} dS.$$

Так как уравнения (33) и (34) приобретают вид

$$\boldsymbol{d} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

$$\boldsymbol{h} = 0,$$

мы возвращаемся к обычным формулам электростатики.

Рассмотрим, далее, электрон, который движется поступательно (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$) с постоянной скоростью w по некоторой прямой. Пусть P и P' будут две точки, расположенные таким образом, что прямая PP' совпадает с направлением движения частички. Легко видеть, что если мы хотим вычислить φ, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ сначала для точки P в момент времени t, а затем для точки P' в момент времени $t + \frac{PP'}{w}$, мы должны повторить в точности одни и те же вычисления. Если, например, dS есть элемент объема, входящий в интегралы (35) и (36) в первой задаче, то соответствующие интегралы во второй задаче

---

[1]) Примечание 6.

должны будут содержать элемент dS', который можно получить, перемещая dS в направлении движения на расстояние, равное PP'.

Отсюда вытекает, что электрон все время окружен одним и тем же полем, так что можно сказать, что он его несет с собой. Что касается природы этого поля, то из (33) — (36) легко вывести, что в случае сферического электрона с зарядом, распределенным симметрично вокруг центра, путь которого есть s, линии электрических сил суть кривые, расположенные в плоскостях, проходящих через s, а магнитные линии суть круги, имеющие s осью[1]. Это поле отличается от поля неподвижного электрона не только присутствием магнитной силы, но также и измененным распределением диэлектрического смещения.

Наконец, рассмотрим несколько более сложный случай. Допустим, что от $t = -\infty$ до некоторого момента времени t_1 электрон находится в покое в некоторой точке A и что за короткий промежуток времени, начиная от t_1, он приобретает скорость w, которая остается постоянной (по величине и направлению) до того момента, когда движение в течение короткого промежутка времени (кончающегося в момент t_2) прекращается. Пусть B будет конечное положение, в котором электрон после остановки останется навсегда.

Если P — какая-нибудь точка окружающего эфира, мы можем рассмотреть два расстояния l_1 и l_2, причем первое является кратчайшим расстоянием от P до точек электрона, находящегося в положении A, второе — наибольшим расстоянием от P до электрона, находящегося в положении B. Допустим, что интервал $t_2 - t_1$ настолько велик, что

$$t_2 + \frac{l_2}{c} > t_1 + \frac{l_1}{c}.$$

Ясно, что если мы вычислим φ и $\mathbf{a}$ для точки P и для момента времени, предшествующего $t_1 + \frac{l_1}{c}$, мы получим результат, совершенно не зависящий от движения элек-

[1]) Примечание 7.

трона. Это движение никоим образом не может сказаться в P в течение первого периода, который поэтому будет характеризоваться полем неподвижного электрона. Подобное же поле будет существовать в P после момента $t_2+\frac{l_2}{c}$, так как влияние, оказываемое движущейся частицей, уже опередило в своем поступательном движении рассматриваемую точку.

В промежутке времени между $t_1+\frac{l_1}{c}$ и $t_2+\frac{l_2}{c}$ поле в P будет вызываться движущимся электроном. Если мы допустим, что размеры частички весьма малы по сравнению с расстояниями l_1, l_2 и что скорость w приобретается и теряется за интервалы времени много меньшие, чем t_2-t_1, то мы можем быть уверены, что за бо́льшую часть промежутка времени между $t_1+\frac{l_1}{c}$ и $t_2+\frac{l_2}{c}$ поле в P будет таким, каким оно было бы, если бы все время существовала постоянная скорость w. Конечно, в моменты времени непосредственно после $t_1+\frac{l_1}{c}$ и перед $t_2+\frac{l_2}{c}$ положение будет иное; там будет постепенный переход от одного состояния к другому. Ясно также, что эти периоды перехода для различных точек P не будут совпадать друг с другом. Если S_1, S_2, S_3 суть части пространства, лежащие на различных расстояниях от линии AB, причем S_1 лежит дальше всего, а S_3 ближе всего, может легко случиться, что в некоторый момент времени S_1 будет занято полем электрона, находящегося в покое в точке A, S_2 — полем движущегося электрона, а S_3 — окончательным полем.

16. До сих пор мы пользовались только уравнениями (17) — (20). Прибавляя к этим уравнениям выражение (23) для электрической силы и предполагая, что силы другого характера, которые могли бы действовать на электрон, являются заданными, мы получаем возможность определить не только поле, но и движение зарядов. Нам, однако, не нужно вникать здесь в специальные задачи такого рода. Мы сосредоточим наше внимание на одной или двух общих

теоремах, имеющих место для любой системы движущихся электронов.

Во-первых, надлежащие преобразования основной формулы приводят к уравнению, выражающему закон сохранения энергии[1]). Ограничимся частью системы, лежащей внутри некоторой замкнутой поверхности; тогда это уравнение приобретает вид

$$\int \rho(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{h}^2)\,dS\right] + c\int[\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma = 0. \tag{37}$$

Попробуем его разъяснить. Так как $\boldsymbol{f}$ есть сила, с которой эфир действует на единицу заряда, сила, действующая на заряд элемента dS, будет $\rho\boldsymbol{f}\,dS$ и

$$(\rho\,dS\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS$$

будет ее работа за единицу времени. Таким образом, первый интеграл в (37) дает работу, произведенную за единицу времени силами эфира, действующими на электроны. Этот член совместно с работой других сил, которые могут действовать на электроны, позволит нам поэтому вычислить изменение кинетической энергии электронов.

Конечно, раз эфир отдает электронам некоторую работу, он должен терять эквивалентное количество энергии; это количество энергии может быть возмещено притоком энергии из частей системы, лежащих вне поверхности σ, т. е. явление должно сопровождаться переносом энергии к этому месту. Мы должны поэтому рассматривать

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{h}^2)\,dS \tag{38}$$

как выражение энергии, содержащейся внутри элемента объема эфира, а

$$c\int[\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma \tag{39}$$

---

[1]) Примечание 8.

—как выражение для количества энергии, потерянного системой внутри поверхности и приобретенного окружающим эфиром.

Те две части, на которые может быть разделено выражение (38), можно лучше всего назвать электрической и магнитной энергией эфира. Отнесенные к единице объема, оба эти выражения приобретают вид

$$w_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^2 \tag{40}$$

и

$$w_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{h}^2. \tag{41}$$

Эти выражения эквивалентны тем, которые в свое время были даны Максвеллом. То, что коэффициенты равны $\frac{1}{2}$, а не 2π или чему-нибудь в этом роде, вызывается выбором наших новых единиц и, конечно, лучше всего оправдывает этот выбор.

Что касается переноса энергии, даваемого выражением (39), то он необходимо должен иметь место в точках на самой поверхности σ, так как в нашей теории нет места ни для какого действия на расстоянии. Далее, мы естественным образом приходим к предположению, что действия, при помощи которых этот перенос имеет место, таковы, что для каждого элемента $d\sigma$ величина $c\,[\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma$ выражает количество энергии, переносимой через этот элемент. Таким путем мы переходим к представлению о *потоке энергии*, впервые формулированному Пойнтингом[1]) [8]. Он определяется векторным произведением $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, умноженным на постоянную c, так что мы можем написать:

$$\boldsymbol{s} = c\,[\boldsymbol{dh}]. \tag{42}$$

Смысл этого выражения таков, что для любого элемента $d\sigma$ количество энергии, проходящей через единицу его площади в единицу времени, определяется составляющей $\boldsymbol{s}_n$ вектора $\boldsymbol{s}$ по нормали к элементу.

---

[1]) J. H. Poynting, On the transfer of energy in the electromagnetic field, London Trans. 175 (1884), стр. 343.

17. Интересно применить вышеприведенные результаты к пучку поляризованного света, представляемого нашими уравнениями (7). Для энергии, содержащейся в единице объема, получаем:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{d}^2+\mathbf{h}^2)=a^2\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

а для потока энергии через площадку, нормальную к оси OX,

$$c\mathbf{d}_y\mathbf{h}_z=ca^2\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Средние значения этих выражений за полный период таковы:

$$\frac{1}{2}a^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}ca^2,$$

так как по известной теореме среднее значение $\cos^2 n\left(t-\frac{x}{c}\right)$ равно $\frac{1}{2}$.

Легко видеть, что выражением $\frac{1}{2}ca^2$ можно пользоваться также для вычисления потока энергии за любой промежуток времени, весьма большой по сравнению с одним периодом.

Если пучок света ограничен по бокам цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны OX, как это бывает в том случае, когда мы пренебрегаем явлениями диффракции, и если нормальное сечение имеет площадь Σ, поток энергии через сечение дается выражением $\frac{1}{2}ca^2\Sigma$. Для любых двух сечений имеем одно и то же выражение, как это и должно быть, так как количество энергии в части пучка, лежащей между сечениями, остается постоянным.

Случай одного электрона, движущегося равномерно и поступательно, тоже дает хорошую иллюстрацию того, что было сказано про поток энергии. Определив внутреннее и внешнее поле при помощи формул (33)—(36), мы можем вывести полную электромагнитную энергию из (40) и (41). С этой величиной мне придется иметь дело в дальнейшем. Сейчас я ограничусь указанием на то, что из общего вида электрических и магнитных силовых линий, пересекающих друг друга под прямым углом, мы должны заключить о присутствии потока энергии, общее направление которого совпадает с перемещением электрона. Этого и следовало ожидать, так как движущийся электрон все время окружен одним и тем же полем. Можно сказать, что энергия этого поля сопровождает частичку в ее движении.

На ряде других примеров можно показать подобным же образом, как теорема Пойнтинга часто проливает свет на запутанные вопросы. Значение ее действительно не может быть преувеличено, и теперь трудно представить себе состояние электромагнитной теории каких-нибудь тридцать лет назад, когда нам приходилось обходиться без этой прекрасной теоремы.

18. Прежде чем покончить с этим вопросом, разрешите мне обратить ваше внимание на вопрос, насколько точным можно считать представление о потоке энергии. Как мне кажется, следует признать, что раз мы узнаем взаимодействие между двумя частичками или двумя элементами объема, мы будем в состоянии сказать нечто определенное и об энергии, переходящей от одного элемента к другому. Всякая теория, которая объясняет вещи при помощи определенных предположений относительно взаимодействий между частями системы, должна в то же самое время признать возможность переноса энергии; относительно интенсивности последнего не возникает никаких сомнений. Но легко видеть, что даже и при этом условии невозможно, вообще говоря, определить пути частей или элементов энергии в том смысле, в каком мы имеем возможность проследить пути мельчайших частичек, из которых состоит вещество.

Чтобы показать это, я обозначу через P частичку или элемент объема и через A, B, C, ..., A', B', C', ... — некоторое число других частичек или элементов, которые взаимодействуют с элементом P. Это взаимодействие имеет следствием перенос энергии; в соответствии с вышеизложенным мы будем думать, что оно известно достаточно хорошо, и мы можем установить совершенно определенно, каким количеством энергии обменялись любые две частички. Пусть, например, P получит от A, B, C, ... количества энергии a, b, c, ... и пусть она передаст A', B', C', ... количества a', b', c', ..., причем у нее останется избыток энергии p. Тогда мы будем иметь уравнение

$$a+b+c+\ldots=p+a'+b'+c'+\ldots$$

Ясно, что если даже в нашем воображаемом случае будет известен каждый член этого уравнения, у нас все же не будет возможности узнать, каким путем количества энергии, содержащиеся в a, b, c, ..., — скажем, индивидуальные порции энергии, — распределятся между p, a', b', c', ... Если, например, в каждой части уравнения имеется только по два члена одного и того же рода, так что оно приобретает вид

$$a+b=a'+b',$$

мы не можем заключить, что a' есть та же самая энергия, которая заключалась в a, и b' — в b, или же, наоборот, что a' идентично с b, а b' с a. У нас нет никаких средств решить между этими двумя возможностями, равно как и между многими другими, которые бы могли представиться.

По этой причине поток энергии никогда не может, по моему мнению, иметь такой же четкий смысл, как «поток материальных частиц», в котором мы можем, по крайней мере мысленно, различать каждую отдельную частицу и проследить ее движение. Можно даже поставить вопрос, действительно ли в электромагнитных явлениях перенос энергии осуществляется тем путем, который указывается законом Пойнтинга; действительно ли, например, тепло, выделяемое волоском лампы накаливания, приносится потоком энергии, которую он получил от окружающей среды, как утверждает теорема Пойнтинга, и не есть ли это поток энергии вдоль самого волоска. В действительности все зависит от тех гипотез, которые мы примем относительно внутренних сил в системе, и очень легко может оказаться, что какое-нибудь изменение в этих гипотезах существенным образом изменит и наши представления относительно того пути, по которому энергия переносится из одной части системы в другую. Следует отметить, однако, что всякие сомнения должны будут отпасть, как только мы примем, что явления, происходящие в какой-нибудь части эфира, *полностью* определяются электрическими и магнитными силами, имеющимися налицо в этой части эфира. Никто не будет отрицать, что в пучке света имеется поток энергии; следовательно, если все зависит от электрической и магнитной силы, должен быть поток энергии и у поверхности проводника, по которому идет ток, так как и здесь, как и в световом пучке, существуют одновременно обе силы, и притом они взаимно перпендикулярны.

19. Рассмотрим результирующую всех сил, с которыми эфир действует на электроны какой-нибудь системы; тогда можно прийти к результатам, не менее важным, чем уравнение энергии, и имеющим такой же общий характер. За такую систему мы можем взять весомое тело, которое находится в особом, электромагнитном состоянии, т. е. в котором происходят электромагнитные явления. По нашей теории пондеромоторная сила, действующая на заряженный проводник, на магнит или на провод, по которому идет ток, составляется из всех сил, с которыми эфир действует на электроны тела.

Пусть σ опять будет замкнутая поверхность, а $\boldsymbol{F}$ — результирующая сила, действующая на электроны, находящиеся внутри поверхности. Тогда в силу (23) мы можем написать:

$$\boldsymbol{F} = \int \rho \left\{ \boldsymbol{d} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{vh}] \right\} dS, \tag{43}$$

где интеграл распространяется на все электроны или на весь объем S, так как в пространстве между частичками ρ равно нулю. Но, пользуясь уравнениями (17)—(20) [1]), можно показать, что эта сила $\boldsymbol{F}$ равна сумме двух векторов

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, \tag{44}$$

которые определяются уравнениями

$$F_{1x} = \frac{1}{2} \int \{2d_x d_n - d^2 \cos(n, x)\} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \{2h_x h_n - h^2 \cos(n, x)\} d\sigma \text{ и т. д.} \qquad (45)$$

и

$$F_2 = -\frac{1}{c^2} \int \dot{s}\, dS. \qquad (46)$$

Первая часть выражается интегралом, взятым по поверхности σ, причем его составляющие, из которых здесь приведена только одна, определяются значениями d_x, d_y, d_z, h_x и т. д. на поверхности. Вторая часть силы, напротив, представляется как интеграл по объему S и не только по тем частям его, где имеются электрические заряды, но также и по тем частям, где зарядов нет.

20. Рассматривая вышеприведенный результат, мы должны различать несколько отдельных случаев.

а) Во всех явлениях, в которых система находится в стационарном состоянии, сила F_2, для которой можем написать выражение

$$F_2 = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int s\, dS, \qquad (47)$$

пропадает, и вся сила F сводится к интегралу по поверхности σ. Другими словами, пондеромоторное действие можно рассматривать как сумму некоторых бесконечно малых частей, каждая из которых относится к одному из элементов поверхности $d\sigma$ и зависит от состояния, в котором находится именно этот элемент. Весьма естественный путь для интерпретации этого положения заключается в том, чтобы каждую из таких частей называть *натяжением* в эфире, действующим на рассматриваемый элемент.

Натяжение зависит от ориентации элемента. Если он определяется нормалью n и если, пользуясь обычными обозначениями, мы напишем X_n, Y_n, Z_n для составляющих силы, действующей на единицу площади и производимой частью среды, лежащей на положительной стороне поверхности, на ту часть среды, которая расположена по отрицательную сторону поверхности, мы получим:

$$X_n = \frac{1}{2}\{2\boldsymbol{d}_x \boldsymbol{d}_n - \boldsymbol{d}^2 \cos(n, x)\} + \\ + \frac{1}{2}\{2\boldsymbol{h}_x \boldsymbol{h}_n - \boldsymbol{h}^2 \cos(n, x)\} \text{ и т. д.} \quad (48)$$

Из этих формул мы легко можем вывести составляющие X_x, Y_x, Z_x, X_y и т. д. натяжений, действующих на элементы, нормаль к которым параллельна одной из осей координат. Находим:

$$X_x = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_x^2 - \boldsymbol{d}_y^2 - \boldsymbol{d}_z^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_x^2 - \boldsymbol{h}_y^2 - \boldsymbol{h}_z^2) \text{ и т. д.,} \quad (49)$$

$$X_y = Y_x = \boldsymbol{d}_x \boldsymbol{d}_y + \boldsymbol{h}_x \boldsymbol{h}_y \text{ и т. д.,} \quad (50)$$

т. е. в точности те же значения для натяжений, которыми Максвелл уже давно объяснял пондеромоторные силы, наблюдаемые в электрических и магнитных полях [9].

Такой метод вычисления результирующей силы часто является весьма удобным, в особенности потому, что за σ мы можем взять любую поверхность, окружающую тело, для которого мы должны решить задачу.

б) К подобным же выводам мы приходим, если будем рассматривать систему, являющуюся носителем периодических явлений, ограничивая себя средним значением силы, взятой за полный период времени T. Так как среднее значение дается выражением

$$\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{F}\, dt,$$

последний член в (44) пропадает. Действительно, по (47) интеграл по времени от $\boldsymbol{F}_2$ равен разности значений

$$-\frac{1}{c^2}\int \boldsymbol{s}\, dS$$

для $t = 0$ и $t = T$, а эти значения равны друг другу в силу периодичности изменений.

Следовательно, и в этом случае результирующая сила сводится к интегралу по поверхности, или, как мы можем сказать, к натяжениям в эфире.

Легко можно показать, что среднее значение $\boldsymbol{F}$ (и вообще всяких периодически изменяющихся величин) за любой промежуток времени, который много больше периода T, равно среднему значению за период, даже если рассматриваемый интервал не является точным кратным T.

21. Интересный пример мы имеем в давлении излучения. Пусть (рис. 1) AB будет плоский диск, на который в нормальном направлении падает пучок света L; мы можем его представить формулой (7), если за ось OX примем направление, показанное на рисунке. За σ примем поверхность плоского цилиндрического ящика $CDFE$, плоские стороны которого лежат перед диском и за ним и параллельны ему. Тогда, если пластинка совершенно непрозрачна, мы должны рассмотреть натяжение только на CD. Если мы, кроме того, предположим, что диск является идеально черным, так что отраженного света нет, то останется только то электромагнитное поле, которое представлено уравнениями (7). А так как нормаль к плоскости CD, проведенная наружу ящика $CDFE$, направлена в сторону, противоположную OX, то сила, действующая на поглощающее тело в направлении OX на единицу площади, дается выражением

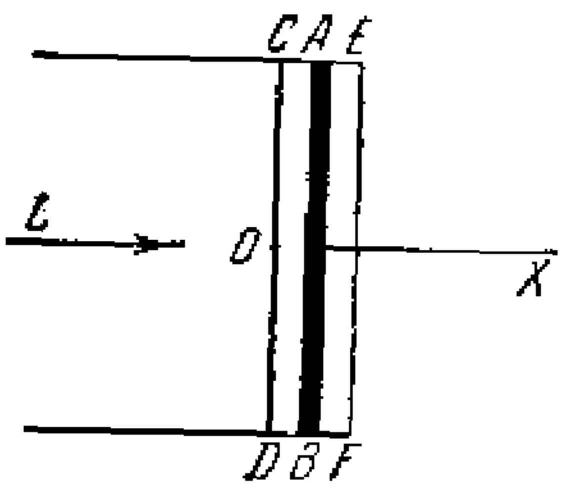

Рис. 1.

$$-X_x = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_y^2 + \boldsymbol{h}_z^2),$$

и среднее ее значение равно

$$\frac{1}{2}a^2.$$

Сравнивая это значение со значением энергии и учитывая направление силы, мы заключаем, что пучок света производит на поглощающее тело нормальное давление, причем величина силы, действующей на единицу поверхности, численно равна электромагнитной энергии, содержащейся в единице объема светового пучка.

Такой же метод можно применить к телу, которое пропускает и отражает некоторое количество света, и к диску, на который свет падает наклонно. Во всех случаях, в которых за диском не оказывается света, силой в направлении нормали будет давление $-X_x$ на освещенной стороне, если ось OX направлена так, как принято выше.

Мы применим эти рассуждения к излучению, распределенному равномерно и изотропно в некотором объеме, ограниченном идеально отражающими стенками. Под равномерным и изотропным распределением мы подразумеваем такое, когда наш объем пронизывается тепловыми или световыми лучами во всех направлениях, причем во всех его точках и во всех направлениях интенсивность излучения одна и та же, и в последнем одинаково представлены все направления $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$. Легко показать, что в этом случае элемент $d\sigma$ стенки не испытывает тангенциальных натяжений. Что касается нормального давления, которое выражается членом $-X_x$, то, если ось OX совместить с нормалью, можно написать:

$$p = \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{d}_y^2} + \overline{\boldsymbol{d}_z^2} - \overline{\boldsymbol{d}_x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{h}_y^2} + \overline{\boldsymbol{h}_z^2} - \overline{\boldsymbol{h}_x^2}\right),$$

где горизонтальные черточки должны обозначать средние значения различных членов по рассматриваемому объему [1]). Но, принимая во внимание наши предположения относительно характера излучения, можно написать:

$$\overline{\boldsymbol{d}_x^2} = \overline{\boldsymbol{d}_y^2} = \overline{\boldsymbol{d}_z^2}.$$

Каждая из этих величин равна, следовательно, трети их суммы, т. е. $\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{d}^2}$. Подобным же образом

$$\overline{\boldsymbol{h}_x^2} = \overline{\boldsymbol{h}_y^2} = \overline{\boldsymbol{h}_z^2} = \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{h}^2},$$

Следовательно, если вспомнить формулы (40) и (41):

$$p=\frac{1}{6}(\overline{d^2}+\overline{h^2})=\frac{1}{3}(w_e+w_m).$$

В этом случае давление на стенки на единицу поверхности равно трети электромагнитной энергии, содержащейся в единице объема.

Несколько позже задача о давлении излучения будет разобрана другим методом.

22. До сих пор мы упрощали уравнение (44), предполагая, что последний член пропадает. В общем случае, однако, этот член опущен быть не может, и силу $\boldsymbol{F}$ нельзя свести к системе натяжений, действующих на поверхность σ.

Это заключение принимает замечательный вид, если предположить, что внутри поверхности σ совсем нет электронов. Общая сила $\boldsymbol{F}$, конечно, должна в этом случае равняться нулю, как это можно видеть по первоначальному выражению (43). Тем не менее сила, вызываемая натяжениями, в общем случае не равна нулю, а имеет значение

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2=\frac{1}{c^2}\int\dot{\boldsymbol{s}}\,dS. \tag{51}$$

Следует отметить, что это последнее выражение совершенно не зависит от теории электронов, а является следствием основных уравнений для случая $\rho=0$, т. е. уравнений для свободного эфира. И в самом деле, оно известно уже давно[1]).

Ни Максвелл, ни прочие многочисленные авторы, работавшие в этой области, не сомневались, повидимому, в реальном существовании натяжений в эфире, определяемых формулами (49) и (50). С этой точки зрения уравнение (51) говорит, что в общем случае результирующая $\boldsymbol{F}_1$ всех натяжений, действующих на какую-нибудь часть эфира, не равна нулю. Это было впервые отмечено Гельмгольцем[2]). Он вывел отсюда, что эфир не может оставаться

---

[1]) Примечание 11.

[2]) Helmholtz, Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Äthers, Ann. Phys. Chem. **53** (1894), стр. 135.

в покое, и установил систему уравнений, при помощи которых можно определить его движение. Я не буду их касаться, так как никакой опыт никогда не мог обнаружить ни следа движения эфира в электромагнитном поле.

Резюмируя, мы можем сказать, что теория, которая признает существование натяжений Максвелла, приводит к следующим заключениям:

1. Участок эфира не находится в равновесии под влиянием натяжений, действующих на его поверхности.

2. Натяжения, действующие на элементы поверхности, окружающей весомые тела, вызывают в общем случае результирующую силу, отличную от силы, действующей на электроны тела согласно нашей теории.

23. Начиная отсюда, мы можем далее итти двумя различными путями. Во-первых, имея в виду, что эфир, несомненно, существенно отличается от всякого обычного вещества, мы можем сделать предположение, что эта среда, которая является носителем электромагнитной энергии и переносчиком многих — веровтно, всех — сил, действующих на весомую материю, по самой своей природе никогда не приводится в движение, что она не обладает ни скоростью, ни ускорением, так что у нас нет основания говорить об ее массе или о силах, к ней приложенных. С этой точки зрения следует считать, что действие на электрон в первую очередь определяется состоянием эфира внутри каждого элемента объема электрона, и уравнение (43) является прямым и непосредственным выражением этого положения. Нет совершенно никаких оснований считать, что сила должна вызываться давлениями или натяжениями в универсальной среде. Если мы исключим идею о силах, действующих на эфир, мы даже не можем говорить об этих натяжениях, так как они ведь суть силы, с которыми одна часть эфира действует на другую.

Я должен добавить, что, отрицая, таким образом, реальное существование натяжений в эфире, мы можем все же воспользоваться всеми математическими преобразованиями, которые могут облегчить применение формулы (43). Сведение силы к интегралу по поверхности может быть весьма полезно, и для удобства мы будем продолжать называть натяжениями величины, входящие в этот интеграл. Мы должны только помнить, что это — натяжения воображаемые, т. е. чисто вспомогательные математические величины.

Возможно, что все то, что тут было сказано про абсолютную неподвижность эфира и про отсутствие натяжений, может показаться несколько странным. Тот, кто не может примириться с этим представлением, может обратиться к другому представлению, о котором я упоминал. Если присоединиться к нему, придется признать реальное существование внутренних сил Максвелла и считать эфир неподвижным только *приближенно*.

Примем, что между двумя смежными частями эфира имеется взаимодействие, определяемое уравнениями (48), так что элемент объема свободного эфира испытывает силу

$$\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{s}}\,dS,$$

и предположим, что среда движется таким образом, что количество движения ее равно

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{s}\,dS, \tag{52}$$

или $\frac{1}{c^2}\mathbf{s}$ на единицу объема. Представим себе далее, что плотность эфира настолько велика, что количество движения (52) наблюдается при очень малой скорости — настолько малой, что ее нельзя обнаружить никакими имеющимися в нашем распоряжении средствами. Тогда формула (51), которая в применении к элементу эфира принимает вид

$$F_1 = \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{s}}\,dS,$$

говорит нам, что предположенное нами состояние движения действительно может существовать. Это ясно, потому что для весьма малых скоростей результирующая сила, действующая на эфир, который содержится в *данном* элементе объема, может быть приравнена скорости изменения количества движения, содержащегося *внутри* этого элемента [1]).

---

[1]) Примечание 12.

С другой стороны, в случае, если элемент dS занят зарядом, формулу

$$F = F_1 - \frac{1}{c^2}\dot{s}\,dS$$

можно истолковать следующим образом. На эфир внутри элемента действует сила F_1, вызываемая натяжениями на поверхности. Часть этой силы

$$\frac{1}{c^2}\dot{s}\,dS$$

идет на изменение количества движения эфира; остающаяся часть F передается заряду.

Вы легко увидите, что в конце концов различие между двумя упомянутыми точками зрения заключается главным образом в различном толковании одних и тех же уравнений.

24. Каково бы ни было наше мнение по поводу только что затронутых вопросов, наш разбор показывает нам важность вектора

$$\frac{1}{c^2}s\,dS,$$

который имеет определенное направление и величину для каждого элемента объема, и вектора

$$G = \frac{1}{c^2}\int s\,dS, \tag{53}$$

который можно получить из него путем интегрирования. Геттингенский ученый Абрагам[1]) назвал эти величины *электромагнитным количеством движения*. Мы можем сохранить это понятие даже в том случае, если не будем соглашаться с мыслью, что эти величины представляют собой реальные количества движения, как это вытекало бы из второго пути, которому мы следовали.

Способ, которым можно использовать представление об электромагнитном количестве движения для разъяснения

---

[1]) M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. Phys. 10 (1903), стр. 105.

электромагнитных явлений, выступает особенно ясно в том случае, когда, имея дело с системами конечных размеров, каковыми действительно и являются системы в наших опытах, мы отодвигаем замыкающую поверхность σ во все стороны на бесконечное расстояние. Можно показать, что интегралы по поверхности в уравнении (45) тогда обращаются в нуль, так что, если интегрирование распространить на все пространство, мы получим:

$$F = -\frac{dG}{dt}, \tag{54}$$

или, иначе говоря, сила, с которой эфир действует на систему электронов, или, как можно сказать, на весомую материю, содержащую эти электроны, равна по величине и противоположна по направлению изменению в единицу времени электромагнитного количества движения. Это действие стремится вызвать изменение в количестве движения (в обыкновенном смысле этого слова) весомой материи, равное самой силе; можно видеть, что сумма двух количеств движения — обычного и электромагнитного — не будет изменяться под влиянием сил, оказываемых эфиром.

Прежде чем перейти к одному-двум применениям, я должен обратить ваше внимание на глубокую связь между количеством движения и потоком энергии s. Уравнение (53) показывает нам сразу, что каждый участок пространства, в котором имеется поток энергии, дает свою часть в векторе G; следовательно, чтобы составить себе представление об этом векторе и его изменениях, мы должны в первую очередь фиксировать наше внимание на лучистой энергии, имеющейся налицо в различных частях пространства. Если с течением времени поток энергии дойдет до новых частей пространства или уйдет из тех частей, где он был прежде, это поведет к тому, что вектор G будет изменять свое значение от одного момента к другому.

Следует также иметь в виду, что уравнение (53) есть векторное уравнение и что уравнение (54) можно разложить на три формулы, дающие нам составляющие F_x, F_y, F_z результирующей силы.

25. Весьма интересные иллюстрации к вышеприведенной теории можно получить в явлениях давления излучения, к которым я поэтому на короткое время вернусь. Рассмотрим, например, источник света, посылающий лучи в одном направлении, что может быть осуществлено при помощи соответствующих приспособлений, и предположим, что эти лучи он начал испускать в определенный момент, так что мы можем говорить о *первой* волне или о *фронте* серии излученных волн. Этот фронт представляет собой плоскость, расположенную под прямым углом к лучам и продвигающуюся вперед со скоростью c. Следовательно, если Σ есть нормальное сечение пучка, объем, занятый излучением, увеличивается за единицу времени на $c\Sigma$. Как мы уже видели, направление потока энергии совпадает с направлением пучка. В последующем вычислении мы будем рассуждать так, как будто в каждой точке поток все время равен среднему значению потока $\bar{s}$, взятому за полный период. Если величина этого среднего потока, который относится к единице площади, есть $|\bar{s}|$, мы тотчас же найдем величину электромагнитного количества движения, направление которого тоже совпадает с направлением пучка, если мы умножим $\frac{1}{c^2}|\bar{s}|$ на объем, занимаемый светом. Отсюда получается, что изменение G за единицу времени равно

$$|\dot{G}| = \frac{1}{c}|\bar{s}|\Sigma.$$

Так как этот вектор имеет направление лучей, то, следовательно, источник света будет испытывать силу, равную по величине и противоположную по направлению тому, в котором испускаются лучи. Эту силу отдачи, которая, впрочем, чрезвычайно мала, можно сравнить с реакцией, которая наблюдалась бы в том случае, если бы лучи света представляли собой поток материальных частиц. Рассуждая подобным же образом, мы можем определить давление на черный диск, которое мы рассматривали ранее. Но в этом случае лучше представить себе, что в определенный момент времени излучение *прекращается*, так что получается плоскость, которую можно назвать *тылом* движущихся волн. Он приближается к черному диску со скоростью c, и если Σ и $|\bar{s}|$ имеют то же значение, как и прежде, величина электромагнитного количества движения уменьшится в единицу времени на величину

$$\frac{1}{c}|\bar{s}|\Sigma.$$

Следовательно, на диск будет действовать нормальное давление такой же интенсивности. Этот результат совпадает с тем, который мы получили, рассматривая натяжения в эфире, причем величина $|\bar{s}|$ связана с амплитудой a уравнением

$$|\bar{s}|=\frac{1}{2}ca^2.$$

Легко распространить эти результаты на более общий случай. Пусть на плоский диск падает в каком угодно направлении пучок параллельных лучей и пусть часть их отражается, другая поглощается, а остающаяся часть проходит насквозь. Пусть векторы s, s' и s'' представляют собой значения потока энергии через единицу площади для лучей падающего, отраженного и проходящего, $\bar{s}$, $\bar{s}'$, $\bar{s}''$ — средние значения соответствующего потока за полный период, а Σ, Σ' и Σ'' — нормальные сечения пучков. Далее представим себе, что пространство, занятое светом, ограничено двумя фронтами, один из которых лежит в отраженном, а другой — в проходящем пучке, и тыловой поверхностью падающего пучка, причем все эти плоскости продвигаются вперед со скоростью c; тогда изменение электромагнитного количества движения будет дано векторным выражением

$$\frac{1}{c}(\Sigma'\bar{s}'+\Sigma''\bar{s}''-\Sigma\bar{s}),$$

а сила, действующая на пластинку, будет:

$$\frac{1}{c}(\Sigma\bar{s}-\Sigma'\bar{s}'-\Sigma''\bar{s}'').$$

Здесь следует отметить, что давление лучей было экспериментально обнаружено Лебедевым [1]) и Никольсом и Хэллом [2]) и что теоретические предсказания, касающиеся его величины, были проверены последними из упомянутых физиков с точностью до одного процента [10].

26. Теория электромагнитного количества движения, которая, как мы видели, оказалась столь полезной при рассмотрении пучков света, испускаемых, отражаемых или поглощаемых каким-либо телом, применима также к совершенно отличному случаю движущегося электрона. Мы можем поэтому, не опасаясь слишком резкого перехода, вернуться еще раз к некоторым вопросам, относящимся к тому, что мы называем динамикой электрона, и касающимся поля, вызываемого частичкой, и сил, которые эта частичка испытывает со стороны эфира. Таким путем мы приходим к важному вопросу об *электромагнитной массе* электронов.

Для начала я скажу несколько слов о поле системы электронов или зарядов, распределенных каким-либо образом в пространстве; пусть скорость их поступательного движения, направленная, скажем, по оси x, имеет величину w, меньшую скорости света c. Введем оси координат, движущиеся с системой; для упрощения введем обозначение

$$\frac{w}{c}=\beta. \tag{55}$$

Но мы уже видели, что поле переносится вместе с системой. То же самое можно сказать про потенциалы φ и $\mathbf{a}$, которые служат для определения поля; отсюда можно легко заключить [3]), что значения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

---

[1]) P. Lebedew, Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes, Ann. d. Phys. **6** (1901), стр. 433.

[2]) E. F. Nichols and G. F. Hull, The pressure due to radiation, Astrophys. Journ. **17** (1903), стр. 315 и Ann. Phys. **12** (1903), стр. 225.

[3]) Примечание **13**.

в определенной точке пространства даются выражениями

$$-w\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad -w\frac{\partial a}{\partial x}.$$

Подобным же образом

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=w^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}=w^2\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}.$$

Таким образом, уравнение (31) (стр. 43) принимает вид

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\rho, \tag{56}$$

а вместо (32) можно написать:

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}=-\beta\rho, \tag{57}$$

причем составляющие a_y и a_z обе равны нулю, что непосредственно видно из (36).

Сравнивая (56) и (57), заключаем, что

$$a_x=\beta\varphi,$$

так что нам нужно определить только скалярный потенциал.

Это можно сделать подходящей заменой независимых переменных. Определим новую переменную x' уравнением

$$x'=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}x; \tag{58}$$

тогда уравнение (56) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\rho, \tag{59}$$

т. е. превращается в известное уравнение Пуассона. Так как это уравнение появляется при определении поля покоящихся зарядов, задача тем самым сводится к обыкновенной электростатической. Отличием нашей задачи является только то, что значение φ в движущейся системе S не совпадает с потенциалом той же самой системы, когда она находится в покое; для его определения надо искать потенциал покоящейся системы, в которой все координаты, параллельные OX, изменились в отношении (58) [1]).

Этот результат можно выразить следующим образом. Пусть S' есть система, находящаяся в покое, — такая, которую мы получаем, увеличивая размеры S в направлении OX в отношении 1 к $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Будем говорить, что точка с координатами x, y, z в S и точка с координатами x', y, z в S' «соответствуют» друг другу; при этом предполагается, что заряды «соответствующих» элементов объема равны друг другу; тогда, если φ' есть потенциал в S', то скалярный потенциал в движущейся системе дается выражением

$$\varphi = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi'. \tag{60}$$

Пусть теперь наша движущаяся система состоит только из одного электрона; предположим, что он имеет форму шара радиуса R и что заряд e равномерно распределен по его поверхности. Соответствующая система S' есть удлиненный эллипсоид вращения, и заряд его, как оказывается, распределен соответственно закону распределения заряда на проводнике такой формы. Следовательно, поле движущейся сферической частички и всех величин, связанных с нею, можно найти при помощи обыкновенной теории заряженного эллипсоида, которая приводится во многих курсах. Я приведу здесь только те результаты, которые можно получить для наиболее важных величин.

Полная электрическая энергия дается выражением

$$U = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{3-\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right], \tag{61}$$

магнитная энергия

$$T = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right]. \tag{62}$$

Что касается электромагнитного количества движения, направление его совпадает с направлением движения; это

---

[1]) Примечание **14**.

легко вывести из (53), так как мы уже знаем, что общее направление потока энергии совпадает с направлением движения частички. Формула для величины электромагнитного количества движения, выведенная впервые Абрагамом, имеет вид

$$|G| = \frac{e^2}{16\pi Rc}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2}{\beta}\right]. \tag{63}$$

Все эти величины — U, T, $|G|$ — увеличиваются с увеличением скорости. Они обращаются в бесконечность для $\beta = 1$, т. е. тогда, когда скорость электрона делается равной скорости света[1]).

27. По нашим основным предположениям, каждый элемент объема электрона испытывает силу, вызываемую полем самой частички; при этом возникает вопрос, будем ли мы иметь какую-нибудь результирующую силу, действующую на электрон как на целое. Рассмотрение электромагнитного количества движения поможет нам выяснить этот вопрос.

Если скорость w постоянна по величине и направлению, как мы предполагали в предыдущем, вектор G тоже будет постоянным и результирующая сила будет равна нулю. Это — очень важное обстоятельство; оно показывает, что если на электрон не действуют никакие внешние силы, он будет — совершенно так же, как материальная точка — двигаться с постоянной скоростью, несмотря на присутствие окружающего эфира. Во всех других случаях, однако, скажется некоторое действие этой среды.

Необходимо заметить, что в случае переменной скорости вышеприведенные формулы для U, T и $|G|$, строго говоря, не имеют места. Впрочем, если изменение состояния среды настолько мало, что можно пренебречь им за промежуток времени $\frac{R}{c}$, можно к каждому моменту времени применить формулу (63) и пользоваться ею для определения изменения G — количества движения в единицу времени[2]). Так как результат зависит от ускорения элек-

[1]) Примечание **15**.

[2]) См. § 37.

трона, сила, с которой действует эфир, тоже определяется ускорением.

Рассмотрим сначала случай прямолинейного перемещения с переменной скоростью w. Направление вектора $\dot{G}$ совпадает с направлением движения, и величина его дается выражением

$$\frac{d\,|G|}{dt} = \frac{d\,|G|}{dw}\,\dot{w} = \frac{1}{c}\,\frac{d\,|G|}{d\beta}\,\dot{w}.$$

Полагая

$$\frac{d\,|G|}{dw} = \frac{1}{c}\,\frac{d\,|G|}{d\beta} = m', \tag{64}$$

мы заключаем, что возникает действующая на электрон сила, направление которой противоположно направлению его ускорения, а величина равна произведению ускорения на коэффициент m'.

Рассмотрим, далее, электрон, имеющий скорость $\boldsymbol{w}$, постоянную по величине, но переменную по направлению. Ускорение тогда нормально к траектории; здесь удобно пользоваться векторными уравнениями. Пусть $\boldsymbol{w}$ будет скорость, $\dot{\boldsymbol{w}}$ — ускорение; примем во внимание, что в этом случае величины $|G|$ и $|\boldsymbol{w}|$ находятся в постоянном отношении:

$$\frac{|G|}{|\boldsymbol{w}|} = \frac{|G|}{c\beta} = m''. \tag{65}$$

Имеем также:

$$G = m''\boldsymbol{w},$$

и сила, с которой действует эфир, равна

$$-\dot{G} = -m''\dot{\boldsymbol{w}}.$$

По направлению она противоположна нормальному ускорению $\dot{\boldsymbol{w}}$, а по величине равна произведению этого ускорения на коэффициент m''.

В наиболее общем случае ускорение j направлено не по траектории и не нормально к ней. Если мы разложим его на две составляющие, одна из которых, j', совпадает по направлению с направлением движения, а другая, j'', направлена под прямым углом к нему, мы получим для той силы, которую электрон испытывает со стороны собственного электромагнитного поля, следующее выражение (в векторных обозначениях)[1]):

$$-m'j'-m''j''. \tag{66}$$

28. Обычный способ истолкования этих формул станет для нас понятным, если мы предположим, что электрон имеет некоторую массу m_0 в обычном смысле этого слова, и что на него действует не только та сила, которая вызывается его собственным полем, но еще сила $\boldsymbol{K}$ другого рода. Общая сила равна

$$\boldsymbol{K}-m'j'-m''j'';$$

уравнение движения в векторном обозначении принимает вид

$$\boldsymbol{K}-m'j'-m''j''=m_0(j'+j''). \tag{67}$$

Вместо этого мы можем написать:

$$\boldsymbol{K}=(m_0+m')j'+(m_0+m'')j'',$$

откуда вытекает, что электрон движется так, как будто у него было *две* различные массы: m_0+m' и m_0+m'', причем первая из них появляется, когда мы имеем дело с ускорением по направлению движения, а вторая — когда мы рассматриваем нормальное ускорение. Измеряя силу $\boldsymbol{K}$ и ускорения j' и j'' в различных случаях, мы можем определить оба эти коэффициента. Мы будем их называть *эффективными* массами, m_0 — *материальной* массой, а m' и m'' — *электромагнитными* массами. Чтобы отличить друг от друга коэффициенты m' и m'', мы будем первый называть *продольной* электромагнитной массой, а второй — *поперечной* электромагнитной массой[2]).

---

[1]) Примечание **16**.

[2]) Понятие о (продольной) электромагнитной массе было впервые введено Дж. Дж. Томсоном в статье «On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies», Phil. Mag. (5), 11 (1881), стр. 227. Результаты его вычислений, впрочем, несколько отличаются от тех, к которым приводит современная электронная теория.

На основании вышесказанного можно найти следующие формулы для m' и m'':

$$m' = \frac{e^2}{8\pi R\beta^3 c^2}\left[\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right], \tag{68}$$

$$m'' = \frac{e^2}{16\pi R\beta^3 c^2}\left[-2\beta + (1+\beta^2)\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right], \tag{69}$$

или, если эти выражения развернуть в ряд:

$$m' = \frac{e^2}{4\pi R c^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4 + \ldots\right), \tag{70}$$

$$m'' = \frac{e^2}{8\pi R c^2}\left[\left(1+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\beta^4 + \ldots\right]. \tag{71}$$

Для малых скоростей обе массы имеют одно и то же значение:

$$m' = m'' = \frac{e^2}{6\pi R c^2}, \tag{72}$$

тогда как для больших скоростей продольная масса всегда больше поперечной. Обе массы увеличиваются с увеличением β; для $\beta = 1$, т. е. для скорости, равной скорости света, они обе обращаются в бесконечность.

Если мы временно ограничимся прямолинейным движением электрона, понятие электромагнитной массы можно будет вывести из понятия об электромагнитной энергии. В самом деле, эта энергия больше для движущегося электрона, чем для неподвижного. Следовательно, если при помощи силы K мы приведем частичку в движение, мы должны сообщить ей не только кинетическую энергию $\frac{1}{2}m_0 w^2$, но и добавочно еще ту часть электромагнитной энергии, которая обусловлена скоростью. Влияние поля скажется, следовательно, в том, что в данном случае потребуется больше энергии, чем если бы мы имели дело с обыкновенной материальной частичкой m_0; результат будет такой же, как если бы масса ее была больше, чем m_0.

Рассуждая подобным образом, мы легко можем проверить формулу (68). Если скорость изменяется очень мало, мы можем в каждый момент применять формулы (61) и (62). Так как общая энергия $T+U$ есть функция скорости w, скорость ее изменения дается выражением

$$\frac{d(T+U)}{dw}\dot{w}=\frac{d(T+U)}{d\beta}\frac{1}{c}\dot{w}. \tag{73}$$

Эта величина должна быть равна работе, произведенной в единицу времени движущей силой, или, вернее, той ее частью, которая требуется в связи с присутствием электромагнитного поля. Следовательно, деля (73) на w, мы получим величину этой части, и если затем мы разделим ее на ускорение $\dot{w}$, мы должны получить в результате продольную электромагнитную массу. Если при помощи формул (61) и (62) вычислить выражение

$$m'=\frac{1}{cw}\frac{d(T+U)}{d\beta}=\frac{1}{\beta c^2}\frac{d(T+U)}{d\beta},$$

в результате получится как раз значение (68).

29. Близкую аналогию с вопросом об электромагнитной массе представляет простая гидродинамическая проблема. Твердый, совершенно гладкий шар, движущийся со скоростью $\boldsymbol{w}$ в несжимаемой идеальной жидкости, которая простирается во все стороны на бесконечное расстояние, вызывает в этой жидкости состояние движения, характеризующееся кинетической энергией, для которой можно написать:

$$T=\frac{1}{2}a\boldsymbol{w}^2;$$

здесь a — постоянная, зависящая от радиуса шара и от плотности жидкости. Под влиянием внешней силы, приложенной к шару в направлении движения, его скорость изменится так, как будто, кроме его истинной массы m_0, он обладал еще кажущейся массой m', значение которой дается выражением

$$m'=\frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\frac{dT}{d|\boldsymbol{w}|}=a.$$

Мы видим, что эта формула соответствует последнему уравнению § 28.

Мы получили бы тот же результат, если бы сначала вычислили количество движения жидкости. Мы нашли бы:

$$\boldsymbol{G} = \alpha \boldsymbol{w};$$

из этого выражения мы можем также заключить, что поперечная кажущаяся масса имеет то же значение α, что и продольная. Это видно из уравнения

$$m'' = \frac{|\boldsymbol{G}|}{|\boldsymbol{w}|}.$$

30. Пусть мы имеем шар, движущийся в идеальной жидкости; если бы мы принуждены были ограничиваться в наших опытах измерением внешних сил, приложенных к телу, и вызываемых ими ускорений, мы могли бы определить эффективную массу $m_0 + m'$ (или $m_0 + m''$), но не могли бы найти значений m_0 и m' (или m'') в отдельности. Весьма важно, что при экспериментальном исследовании движения электрона мы, наоборот, можем пойти несколько далее. Этим мы обязаны тому факту, что электромагнитная масса не есть величина постоянная, а увеличивается со скоростью.

Предположим, что мы можем экспериментировать с двумя различными скоростями электрона и что таким путем мы можем найти отношение k между теми эффективными поперечными массами, которые получаются в этих двух случаях. Пусть $\varkappa$ — отношение между электромагнитными поперечными массами, которое мы вычислим по формуле (69). Сделать это, конечно, возможно. Тогда, обозначая индексами I и II величины, относящиеся к первому и второму случаям, получим формулы

$$\frac{m_0 + m''_{\mathrm{I}}}{m_0 + m''_{\mathrm{II}}} = k, \qquad \frac{m''_{\mathrm{I}}}{m''_{\mathrm{II}}} = \varkappa;$$

и отношение между истинной массой m_0 и электромагнитной массой m''_{I} будет дано выражением

$$\frac{m''_{\mathrm{I}}}{m_0} = \frac{\varkappa(k-1)}{\varkappa - k}.$$

Если бы k, полученное опытным путем, оказалось весьма мало отличным от отношения $\varkappa$, полученного по формуле (69), мы получили бы для m_0 гораздо меньшее значение, чем для m''_1; при k, в *точности* равном $\varkappa$, мы должны были бы даже положить $m_0 = 0$ [11].

Я говорил здесь о поперечной электромагнитной массе, так как только с ней мы будем иметь дело в тех опытах, на которых я сейчас остановлюсь.

31. Вы все знаете, что катодные лучи и β-лучи радиоактивных тел являются потоками отрицательных электронов и что каналовые лучи Гольдштейна и α-лучи являются подобными же потоками положительно заряженных частичек. Во всех этих случаях оказалось возможным определить отношение между численными значениями заряда частички и ее поперечной эффективной массы. Главный метод, при помощи которого это было осуществлено, основывается на измерении отклонения от прямолинейного распространения, которое испытывают одни и те же лучи под влиянием известных внешних электрических и магнитных сил.

Теория метода весьма проста. Если, во-первых, электрон с зарядом e и кажущейся массой m движется в электрическом поле $\mathbf{d}$ со скоростью w, перпендикулярной к линиям сил, ускорение дается выражением $\frac{e\mathbf{d}}{m}$; отсюда, если r есть радиус кривизны пути,

$$\frac{w^2}{r} = \frac{e\,|\mathbf{d}|}{m},$$

так что, если измерить $|\mathbf{d}|$ и r, мы можем вычислить значение

$$\frac{e}{mw^2}. \tag{74}$$

Во-вторых, рассмотрим электрон, движущийся в магнитном поле $\mathbf{h}$, и предположим, что скорость w перпендикулярна к магнитной силе. Тогда поле будет действовать на частичку с силой $\frac{ew\,|\mathbf{h}|}{c}$, как это видно из последнего члена в (23). Так как эта сила перпендикулярна к скорости, мы получим, обозначая через r' радиус кривизны пути:

$$\frac{w^2}{r'}=\frac{ew\,|h|}{cm}.$$

Поэтому, если мы определим $|h|$ и r', мы можем найти величину

$$\frac{e}{mw};$$

комбинируя это значение с (74), мы получим возможность найти как w, так и $\frac{e}{m}$.

32. Я не буду говорить о многочисленных определениях подобного рода, которые были проделаны различными физиками; скажу только несколько слов относительно важной работы Кауфмана [1]), касающейся β-лучей радия. Оказывается, что в этих лучах содержатся отрицательные электроны весьма различных скоростей, и поэтому представляется возможным исследовать вопрос, является ли $\frac{e}{m}$ функцией скорости или величиной постоянной. Опыты Кауфмана были поставлены таким образом, что можно было измерять электрическое и магнитное отклонения одних и тех же электронов, что давало возможность вычислить как w, так и $\frac{e}{m}$. При этом оказалось, что когда скорость w достигает значения от 0,5 до 0,9 скорости света и более, $\frac{e}{m}$ значительно уменьшается. Если мы предположим, что заряд одинаков для всех отрицательных электронов, образующих лучи, это уменьшение $\frac{e}{m}$ должно вызываться увеличением массы m. Это показывает, что, во всяком случае, влияние, оказываемое электромагнитной массой, весьма заметно. Оно должно даже в сильной степени превалировать. Действительно, числа Кауфмана не показывают ни следа влияния материальной массы m_0, так

---

[1]) W. Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons, Ann. Phys. 19 (1906), стр. 487.

как его отношение k кажущихся масс для двух различных скоростей (это отношение есть величина, обратная отношению соответствующих значений $\frac{e}{m}$) совпадает в пределах точности опытов с отношением $\varkappa$ электромагнитных масс, выведенным из формулы Абрагама (69) [12].

Конечно, при желании мы свободны приписать каждому электрону весьма малую материальную массу, например равную одной сотой доле электромагнитной массы, но в целях простоты будет лучше принять заключение—или, если мы предпочитаем другое выражение, гипотезу Кауфмана, — что у отрицательных электронов совсем нет никакой массы, кроме электромагнитной.

Это, несомненно, один из наиболее важных результатов современной физики; поэтому да будет мне позволено остановиться на нем еще некоторое время и указать два других толкования, которые можно ему дать. Мы можем сказать, что в случае движущегося отрицательного электрона энергия в обычной форме $\frac{1}{2} m_0 w^2$ отсутствует, а есть только электромагнитная энергия $T+U$, которую можно вычислить по формулам (61) и (62). Для больших скоростей эта энергия представляется весьма сложной функцией скорости, и только для скоростей, весьма малых по сравнению со скоростью света, та часть ее, которая зависит от движения, может быть выражена формулой $\frac{1}{2} m' w^2$, где значение m' дается формулой (72). Этот результат можно получить, разлагая $T+U$ в ряд, подобный (70) и (71).

Мы получим наш результат в другом замечательном виде, если в уравнении движения (67), которое для $m_0=0$ сводится к

$$K - m' j' - m'' j'' = 0,$$

мы придадим обоим последним членам их первоначальный смысл сил, вызываемых эфиром. Уравнение говорит нам, что *полная* сила, действующая на частичку, всегда равна нулю. Так, например, электрон, который помещен во внешнем электромагнитном поле, обладая некоторой начальной скоростью, будет двигаться таким образом, что сила, вызываемая внешним полем, будет в точности уравновешиваться силой, которая вызывается собственным полем электрона. Это равносильно утверждению, что сила, вызываемая результирующим полем, всегда равна нулю.

В конечном счете, благодаря нашему отрицанию у электрона материальной массы он много потерял в своей субстанциальности. Мы должны сохранить ее за ним как раз в такой мере, чтобы можно было говорить о силах, действующих на различные части электрона, и приписывать ему определенную форму и размеры. Все это следует считать за присущие ему свойства, в силу которых отдельные части электрона не могут быть оторваны друг от друга действующими на них электрическими силами (или, иначе говоря, их взаимными отталкиваниями).

33. В наших предыдущих рассуждениях мы приняли, что все выделяемые солями радия отрицательные электроны, которыми пользовался в своих опытах Кауфман, несут на себе один и тот же заряд. Теперь мы перейдем к широкому обобщению этой гипотезы.

Как известно, по закону электролиза Фарадея все одновалентные электролитические ионы несут на себе в точности один и тот же заряд; если его обозначить через e, то заряды двухвалентных, трехвалентных и т. д. ионов будут $2e$, $3e$ и т. д. Таким образом, возникло представление, что это e — скажем, заряд иона водорода — является наименьшим количеством электричества, находимым в физических явлениях, — атомом электричества, если можно так выразиться, который может встречаться только в целочисленных количествах. Экспериментальные исследования Дж. Дж. Томсона[1]) над зарядами, переносимыми ионами в проводящих газах, и некоторые теоретические выкладки относительно электронов, колеблющихся в теле, через которое проходит пучок света, сделали весьма вероятным предположение, что в этих случаях проявляется этот же самый заряд e, который и оказывается, так сказать, реальной

---

[1]) См. J. J. Thomson, Conduction of electricity through gases, а также The corpuscular theory of matter, London, 1907.

естественной единицей электричества, и что все заряженные частички, все электроны и ионы несут на себе один или несколько таких зарядов. Отрицательные электроны, которые образуют β-лучи и катодные лучи, являются, несомненно, простейшим типом таких заряженных частичек; есть серьезные основания предполагать, что их заряд равен одной единице электричества, т. е. заряду водородного иона [1]).

Оставляя в стороне вопрос о кратных зарядах и приписывая всем электронам и ионам, положительным или отрицательным, одно и то же количество электричества, мы можем сказать, что массы m различных частичек обратно пропорциональны значениям, найденным для $\frac{e}{m}$.

Для отрицательных электронов катодных лучей и β-лучей это значение (для малых скоростей) равно приближенно [2]) [13]:

$$1,77 \cdot 10^7 \, c\sqrt{4\pi}.$$

Для иона водорода соответствующее число может быть получено из электрохимического эквивалента этого газа. Таким путем найдено значение

$$9650 \cdot c\sqrt{4\pi},$$

которое приблизительно в 1800 раз меньше значения для свободного отрицательного электрона. Значит, масса отрицательного электрона должна составлять приблизительно $^1/_{1800}$ массы атома водорода.

---

1) Примечание **16***.

2) Я пишу это выражение в таком виде, чтобы показать, что число равно $1,77 \cdot 10^7$, если пользоваться обыкновенными электромагнитными единицами. Следует отметить, что измерения Симона на катодных лучах [Ann. Phys. Chem. **69** (1899), стр. 589] привели к значению $1,878 \cdot 10^7$ и что Кауфман, вычисляя свои результаты по формуле Абрагама, получил $1,823 \cdot 10^7$. Более поздние измерения Бестельмейера [Ann. Phys. **22** (1907), стр. 429] дали, однако, число $1,72 \cdot 10^7$. Число, приведенное в тексте, взято у Бухерера, который нашел 1,763 [Ann. Phys. **28** (1909), стр. 513], и Вольца, результат которого равен 1,767 [Ann. Phys. **30** (1909), стр. 273].

Особенно следует отметить, что значения для $\frac{e}{m}$, полученные для различных отрицательных электронов, приблизительно равны друг другу. Это является существенным подтверждением того взгляда, что все отрицательные электроны одинаковы. Напротив, наблюдаются большие различия между положительными электронами, каковы, например, электроны в каналовых лучах и в α-частичках радиоактивных веществ. Значения $\frac{e}{m}$ для этих лучей изменяются в широких пределах. Впрочем, все они того же порядка величины, как и значения для электролитических ионов. Следовательно, массы положительных электронов должны быть сравнимы с массами химических атомов. Мы можем поэтому представить себе, что электроны являются продуктом распада атомов, разделения атома на частички, заряженные положительно и отрицательно, причем первые обладают почти всей массой атома, а вторые — только весьма малой ее частью.

34. В последнее время неоднократно ставился такой вопрос. Раз мы пришли к представлению, что не существует никакой материальной массы, а есть только масса электромагнитная (для случая отрицательных электронов эта идея получила серьезную поддержку в опытах Кауфмана), нельзя ли распространить это представление и на положительные электроны и вообще на всю материю.

По этому вопросу об электромагнитной теории материи мы должны заметить следующее: если предположить, что атомы содержат отрицательные электроны, из которых один или несколько могут быть при известных обстоятельствах вырваны из атома (как это в действительности и бывает), и если часть атома, остающуюся после потери отрицательной частички, назвать положительным электроном, тогда, конечно, можно было бы сказать, что материя состоит из электронов. Но это были бы просто слова. Что нам в действительности надо знать, это то, можно ли вычислить массу положительного электрона из распределения его заряда таким же путем, каким мы определяем массу отрицательной частички. Я полагаю, что этот вопрос остается открытым; мы поступим правильно, если будем говорить о нем с некоторой осторожностью.

В более общем смысле я лично охотно готов принять электромагнитную теорию материи и сил, действующих между материальными частичками. Очень много доводов приводит к заключению, что мельчайшие частички материи всегда несут на себе электрические заряды и что эти последние не являются каким-то привходящим элементом, а имеют существенное значение. Мы придем, по моему мнению, к ненужному дуализму, если будем рассматривать, с одной стороны, эти заряды и, с другой стороны, все остальное в атоме как нечто совершенно различное по природе.

С другой стороны, я думаю, каждый физик склоняется к взгляду, что все силы, с которыми одни частички действуют на другие, все молекулярные взаимодействия и самое тяготение передаются каким-нибудь образом через эфир, так что и натяжение растянутой веревки и упругость стального стержня должны найти свое объяснение в том, что происходит в эфире между молекулами. И так как нам трудно было бы представить себе, чтобы одна и та же среда способна была передавать два или несколько видов действия при помощи совершенно различных механизмов, то можно считать, что все силы связаны более или менее тесно с теми силами, которые мы изучаем в электромагнетизме [14].

В настоящий момент, однако, природа этой связи нам совершенно не известна; мы должны продолжать говорить о силах разного рода, не будучи в состоянии объяснить их происхождение. Мы будем принуждены считать даже отрицательные электроны подверженными некоторым силам, способ действия которых для нас темен. Таковыми являются, например, силы, которые возвращают электроны весомого диэлектрика обратно в их положения равновесия, и силы, которые выступают на сцену, когда электрон, движущийся в куске металла, меняет направление своего движения при столкновении с атомом металла.

35. Универсальная единица электричества, о которой мы говорили, может быть вычислена, раз мы составим себе представление о массе химических атомов. Это было проделано вполне удовлетворительно и притом различными путями; мы не будем далеки от истины, если мы примем

$$1{,}5 \cdot 10^{-24}\ г$$

для массы атома водорода. Комбинируя это число с электрохимическим эквивалентом этого элемента, который в наших единицах равен $\frac{0{,}0001036}{c\sqrt{4\pi}}$, мы найдем для заряда иона водорода

$$1{,}5 \cdot 10^{-20}\, c\sqrt{4\pi}.$$

Это число должно также изображать заряд отрицательного электрона. Следовательно, так как значение $\frac{e}{m}$ (для малых скоростей) равно

$$1{,}77 \cdot 10^{7}\, c\sqrt{4\pi},$$

получаем:

$$m = 7 \cdot 10^{-28}\ г.$$

Но ведь это есть масса, даваемая формулой (72). Подставляя также значение e, получаем следующее значение для радиуса электрона:

$$R = 1{,}5 \cdot 10^{-13}\ см.$$

Мы можем сравнить это значение с теми приближенными величинами, которые даются в кинетической теории газов. Расстояние между соседними молекулами воздуха при атмосферном давлении, вероятно, порядка

$$3 \cdot 10^{-7}\ см,$$

для диаметра молекулы водорода можно принять

$$2 \cdot 10^{-8}\ см.$$

Вы видите, что, по сравнению с этими длинами, электрон имеет совершенно микроскопические размеры. Вероятно, он много меньше даже отдельного атома, и если этот последний содержит некоторое число отрицательных электронов, их можно уподобить шарикам, расположенным друг от друга на расстояниях, во много раз превышающих их диаметры.

36. Прежде чем закончить наше рассуждение об электромагнитной массе, я должен остановить ваше внимание на вопросе, будет ли в системе, состоящей из известного числа электронов, электромагнитная масса равна сумме электромагнитных масс отдельных частичек; другими словами, если система движется с общей поступательной скоростью, может ли электромагнитная энергия, поскольку она зависит от движения, быть разделена на отдельные части, каждая из которых относится к одному электрону, так что для малых скоростей вся энергия изображается суммой

$$\sum \frac{1}{2} m' v^2.$$

Это, конечно, будет иметь место в том случае, когда электроны расположены друг от друга так далеко, что их поля, можно сказать, друг на друга не накладываются. Если, наоборот, два электрона привести в непосредственное соприкосновение, общую энергию нельзя уже находить обычным сложением, по той простой причине, что энергия, получающаяся при наложении двух полей, будучи квадратичной функцией от $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$, не равна сумме энергий, которые имели бы место в каждом поле, взятом в отдельности.

Но мы должны помнить об исключительно малых размерах электронов. Ясно, что бóльшая часть электромагнитной энергии, принадлежащей частичке, обнаруживается в весьма малой части поля, лежащей в непосредственной близости от нее, на таком расстоянии от центра, которое является небольшим кратным радиуса. Поэтому очень легко представить себе, что данное число электронов будет рассеяно по такому обширному пространству, что эффективные части их полей будут лежать одна совершенно вне другой. В этом случае можно сказать, что система имеет электромагнитную массу, равную сумме масс отдельных электронов.

Приходится, однако, сталкиваться с такими важными случаями, когда мы не гарантированы в правильности этого утверждения. Чтобы пояснить это, я назову через F_1 часть поля электрона, которая лежит в непосредственной близости к частичке, и через F_2 ту часть поля, которая лежит дальше, причем границей раздела является сферическая поверхность, радиус которой довольно велик по сравнению с радиусом электрона. Тогда, если взять этот электрон отдельно от других, часть энергии E_1, содержащаяся в F_1, во много раз превышает энергию E_2, содержащуюся в F_2. Далее, если мы имеем N электронов, расположенных на таких расстояниях друг от друга, что их поля F_1 не накладываются друг на друга, мы должны будем сложить друг с другом количества энергии E_1. Количества E_2, напротив, нельзя просто складывать, так как более отдаленные части поля F_2 будут, конечно, покрывать, хотя бы отчасти, одни и те же части пространства S. Если в этом пространстве диэлектрические смещения или магнитные силы, вызываемые отдельными электронами, направлены так, что образуют друг с другом достаточно малые углы, поля F_2, все вместе, как бы слабы они ни были, легко могут вызвать результирующее поле заметной энергии. Такой пример мы имеем в электрическом поле заряженного проводника и в магнитном поле, окружающем проводник с током. Можно показать, что энергия этого магнитного поля во многих обычных случаях значительно больше, чем сумма всех количеств энергии, которую мы назвали E_1, — по крайней мере поскольку они зависят от движения электронов. Возможность этого легко уяснить, если представить себе крайний случай, когда в какой-нибудь точке пространства S магнитные силы, вызываемые всеми электронами, имеют в точности одно и то же направление. Тогда, если каждая из этих сил имеет величину $|\boldsymbol{h}|$, результирующая магнитная сила имеет величину $N|\boldsymbol{h}|$, так что магнитная энергия единицы объема делается равной $\frac{1}{2}N^2\boldsymbol{h}^2$. Эта величина пропорциональна квадрату числа N; мы предположим, что это число очень велико. С другой стороны, можно принять, что сумма величин E_1 пропорциональна только первой степени N.

Это отступление было необходимо, чтобы подчеркнуть связь между электромагнитной массой электронов и явлениями самоиндукции. При последних мы имеем дело с магнитной энергией, вызываемой взаимным перекрыванием слабых полей F_2. В явлении индукции можно с полным правом говорить об электромагнитной инерции тока, или об электромагнитной массе электронов, движущихся в нем, но должно помнить, что эта масса во много раз больше, чем сумма масс, которые мы приписываем отдельным частичкам. Эта большая величина вызывается (как и все явления тока) совместным действием бесчисленного количества электронов одного рода, движущихся в одном и том же направлении [1]).

37. Рассматривая электромагнитную массу электронов, мы исходили из выражения (66) для силы, с которой действует на электрон его собственное поле. Это выражение, однако, не вполне точно. Оно основывается на утверждении, что уравнение (63) применимо и к случаю неравномерного движения, а мы уже указывали, что это можно делать только в том случае, когда состояние движения изменяется весьма мало за то время, в течение которого электромагнитное возмущение пройдет расстояние, равное размерам электрона. Это равносильно тому, как если бы мы сказали, что если l есть одно из измерений электрона и τ — время, в продолжение которого состояние движения заметно изменится, величина

$$\frac{l}{c\tau} \tag{75}$$

должна быть весьма мала.

В действительности сила (66) является только первым членом ряда, в котором каждый член, по сравнению с предыдущим, — порядка величины (75).

В некоторых явлениях дает себя чувствовать и следующий член ряда; поэтому необходимо указать его значение. Довольно утомительные вычисления приводят к выражению

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathbf{v}}, \tag{76}$$

---

1) Примечание **17**.

где вектор $\boldsymbol{v}$ дважды дифференцирован по времени. Я могу указать между прочим, что эта формула имеет место для любого распределения электрического заряда e [1]).

Во многих случаях новую силу, представленную (76), можно назвать *сопротивлением* движению. Это станет видно, если вычислить работу силы за промежуток времени от $t=t_1$ до $t=t_2$. В результате имеем:

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\int\limits_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{v}})\,dt=\frac{e^2}{6\pi c^3}\,\Big|\,(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})\Big|_{t_1}^{t_2}-\frac{e^2}{6\pi c^3}\int\limits_{t_1}^{t_2}\dot{\boldsymbol{v}}^2\,dt.$$

Здесь первый член пропадает, если для случая периодического движения интегрирование распространить на целый период, а также и в том случае, когда в моменты t_1 и t_2 или скорость, или ускорение обращаются в нуль. Примеры последнего случая мы можем найти в тех явлениях, в которых электрон ударяется в весомое тело и от него отскакивает.

В тех случаях, когда вышеприведенная формула сводится к последнему члену, работа силы становится отрицательной, так что название «сопротивление» является как нельзя подходящим. Это подтверждается также той формой, которую наша формула принимает для электрона, находящегося в простом гармоническом движении. Так как скорость дается выражением

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\cos nt,$$

где n есть величина постоянная, мы можем написать

$$\ddot{\boldsymbol{v}}=-n^2\boldsymbol{v}$$

и вместо (76)

$$-\frac{n^2e^2}{6\pi c^3}\boldsymbol{v}, \tag{77}$$

так что в этом частном случае сила по направлению противоположна скорости и ей пропорциональна.

---

[1]) Примечание 18.

Работа (77) за полный период времени T равна

$$-\frac{n^2e^2}{6\pi c^3}\int\limits_{t_1}^{t_1+T}\boldsymbol{v}^2\,dt=-\frac{n^2e^2}{12\pi c^3}b^2T. \qquad (78)$$

38. Во всех случаях, в которых работа силы (76) отрицательна, энергия электрона (если только она не поддерживается при определенном значении действием какой-нибудь другой причины) должна уменьшаться, а энергия эфира должна увеличиваться. Это означает, что происходит постоянное *излучение* от частички во внешнее пространство — излучение, которое не может существовать, когда скорость постоянна и электрон просто несет с собой свое поле.

Чтобы составить себе ясное представление об излучении, будет полезно рассмотреть поле на весьма большом расстоянии от частички. Мы увидим, что если расстояние достаточно велико, поле излучения отпочковывается, если можно так выразиться, от рассмотренного нами ранее поля, которое движущаяся частичка переносит с собой.

Чтобы определить поле на большом расстоянии, мы можем воспользоваться нижеследующими формулами для скалярного и векторного потенциалов, справедливыми для всех точек, расстояние которых от электрона весьма велико по сравнению с его размерами:

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\left[r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)\right]},\qquad \boldsymbol{a}=\frac{e\,[\boldsymbol{v}]}{4\pi c\left[r\left(1-\frac{v_r}{c}\right)\right]}. \qquad (79)$$

Здесь квадратные скобки имеют значение, аналогичное тому, которое мы им придавали в общих уравнениях (35) и (36). Если нужно определить потенциал в точке P для времени t, нужно сначала найти положение M электрона, которое удовлетворяет тому условию, что, если оно будет достигнуто в момент времени t_0, более ранний, чем t, то

$$MP=c\,(t-t_0).$$

Расстояние MP обозначается через r; $[\boldsymbol{v}]$ означает скорость в положении M, а v_r — составляющую в направлении MP.

Эти формулы были выведены из (35) и (36); множитель $1-\frac{v_r}{c}$ в знаменателе показывает, впрочем, что задача не так проста, как это кажется на первый взгляд. Усложнение вызывается тем обстоятельством, что мы должны брать интеграл не по тому пространству, которое занимает электрон в тот *определенный момент времени, который мы обозначили через* t_0. Напротив, согласно смыслу (35) и (36), мы должны фиксировать наше внимание на различных частях электрона и выбрать для каждого из них, среди всех его последовательных положений, одно положение M', которое определяется условием, что если это положение достигнуто в момент времени t'_0, то

$$M'P = c(t - t'_0).$$

Время t'_0 слегка отличается для различных точек электрона, и поэтому нельзя сказать, что пространство, по которому мы должны интегрировать (и которое содержит все точки M'), совпадает с пространством, занятым электроном в какой-нибудь определенный момент времени [1]).

39. Оставляя в стороне эти довольно сложные вычисления, я перехожу к определению поля на весьма больших расстояниях. Формулы (33) и (34), которыми мы должны пользоваться для этой цели, потребуют от нас дифференцирования φ и $\mathfrak{a}$. При этом дифференцировании я опущу все члены, в которых встречаются в знаменателе квадраты и высшие степени расстояния r. Я буду поэтому считать, что множитель r в знаменателях (79) является величиной постоянной, так что в выражении для φ подлежит дифференцированию только $\mathfrak{v}_r$, а во второй формуле только $[\mathfrak{v}]$, если мы также пренебрежем членами, в которых составляющая скорости умножается на составляющую ускорения. Произведя все операции и обозначая через x, y, z координаты P (при этом точка M принята за начало

---

[1]) Примечание **19**.

координат) и через $\boldsymbol{j}$ ускорение электрона в положении M, я получаю [1]:

$$\boldsymbol{d}_x = \frac{e}{4\pi c^2 r}\left\{-j_x + \frac{x}{r} j_r\right\} \text{ и т. д.,} \tag{80}$$

$$\boldsymbol{h}_x = \frac{e}{4\pi c^2 r}\left\{j_y \frac{z}{r} - j_z \frac{y}{r}\right\} \text{ и т. д.} \tag{81}$$

Три формулы для $\boldsymbol{d}$ могут быть истолкованы следующим образом. Если ускорение $\boldsymbol{j}$ разложить на j_r в направлении MP и j_p в направлении, ему перпендикулярном, диэлектрическое смещение в P параллельно j_p, и его величина дается выражением

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r} j_p.$$

Чтобы увидеть, что означают уравнения для $\boldsymbol{h}$, мы можем ввести вектор $\boldsymbol{k}$ единичной длины в направлении от M к P. Так как составляющие этого вектора равны $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, имеем:

$$\boldsymbol{h} = \frac{e}{4\pi c^2 r}[\boldsymbol{jk}].$$

Величина $\boldsymbol{h}$ равна поэтому

$$\frac{e}{4\pi c^2 r} j_p$$

и по абсолютному значению совпадает с диэлектрическим смещением.

Далее, видно, что магнитная сила перпендикулярна как к прямой MP, так и к диэлектрическому смещению. Следовательно, вдоль MP имеется поток энергии. Легко видеть, что этот поток направлен от электрона и что его мощность дается выражением

$$\frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} j_p^2 = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} j^2 \sin^2 \vartheta,$$

где ϑ есть угол между MP и ускорением $\boldsymbol{j}$ [2].

---

[1] Примечание 20.

[2] Примечание 21.

Этот результат можно применить к любой точке сферической поверхности, описанной вокруг точки M, как центра, радиусом r. Общий поток энергии, направленный наружу через эту сферическую поверхность, дается выражением

$$\frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} j^2 \int \sin^2 \vartheta \, d\sigma = \frac{e^2}{6\pi c^3} j^2. \tag{82}$$

Основанием для моего прежнего утверждения, что на весьма больших расстояниях от электрона поле излучения превалирует над полем, рассмотренным в § 26, служит тот факт, что в последнем случае $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ уменьшаются пропорционально $\frac{1}{r^2}$, а поле излучения — только как $\frac{1}{r}$.

Мы можем резюмировать предыдущие рассуждения в виде следующего положения: электрон не излучает энергии, пока он находится в состоянии равномерного прямолинейного движения, но начинает излучать, как только его скорость изменяется или по величине, или по направлению [15].

40. Теория возникновения лучей Рентгена, впервые предложенная Вихертом и Стоксом и разработанная Дж. Дж. Томсоном [1]), представляет весьма интересный пример применения наших результатов. Согласно указанной теории эти лучи представляют собою быстрый и нерегулярный ряд резких электромагнитных импульсов; каждый из этих импульсов вызывается изменением скорости, которое электроны катодных лучей испытывают при столкновении с антикатодом [2]). Я не могу, однако, останавливаться на этом вопросе, так как мне нужно посвятить очень много времени рассмотрению излучения световых колебаний, с которыми мы будем иметь дело очень часто.

---

[1]) E. Wiechert, Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung, Abh. d. Phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. (1896), стр. 1; Über die Grundlagen der Elektrodynamik. Ann. Phys. Chem. **59** (1896), стр. 283; G. G. Stokes, On the nature of the Röntgen rays, Manch. Memoirs 4 (1897), Mem. 15; J. J. Thomson, A theory of the connexion between cathode and Röntgen rays, Phil. Mag. (5), **45** (1898), стр. 172.

[2]) Примечание **21***.

Если электрон находится в простом гармоническом движении, его скорость непрерывно изменяется, и, на основании вышесказанного, должно происходить непрерывное излучение энергии. Ясно также, что в каждой точке окружающего поля состояние меняется периодически, синхронно с самим электроном, так что мы получим излучение однородного света. Прежде чем входить в некоторые дальнейшие детали, я рассмотрю сначала общее количество энергии, излучаемое за полный период.

Возьмем за начало координат положение равновесия и положим, что колебание происходит вдоль оси OX, причем смещение в момент времени t дается выражением

$$x = a\cos(nt + p).$$

Тогда для ускорения имеем выражение

$$-an^2\cos(nt + p).$$

Если амплитуда a весьма мала, можно считать, что центр сферической поверхности, о которой мы говорили в предыдущем параграфе, лежит не в M, одном из положений электрона, а в начале координат O; под j мы можем понимать ускорение электрона в момент времени $t - \frac{r}{c}$, где r есть расстояние до O. Поэтому, на основании (82), поток энергии через сферическую поверхность в единицу времени будет

$$\frac{e^2}{6\pi c^3} a^2 n^4 \cos^2\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\}.$$

Интегрируя это выражение за целый период T, получаем

$$\frac{e^2}{12\pi c^3} a^2 n^4 T. \tag{83}$$

При этом, если амплитуда остается постоянной, на электрон должна действовать внешняя сила, равная по величине и противоположная по направлению сопротивлению (77). Работа этой силы, с обратным знаком, дается выражением (78). Так как амплитуда скорости равна амплитуде a элонгации, умноженной на n, работа силы в точности соответствует количеству излучаемой энергии (83) [1]).

41. В целях дальнейшего изучения поля электрона, совершающего простое гармоническое движение, мы должны вернуться к формуле (79). Сначала допустим только одно, что движение электрона не выходит из некоторого весьма малого объема S, одну из точек которого выберем за начало координат. Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ будут координаты электрона, $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\dot{\boldsymbol{y}}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$ — составляющие его скорости и $\ddot{\boldsymbol{x}}$, $\ddot{\boldsymbol{y}}$, $\ddot{\boldsymbol{z}}$ — составляющие его ускорения. Мы будем далее считать, что все эти величины являются бесконечно малыми первого порядка, и будем пренебрегать всеми членами, содержащими произведение каких-нибудь двух из них. Обозначим далее через x, y, z координаты точки P, для которой мы хотим определить поле, и через r_0 — ее расстояние от начала координат. Если теперь M есть положение электрона, которое мы имели в виду при нашем объяснении уравнений (79), расстояние $MP = r$ будет бесконечно мало отличаться от расстояния r_0, а время t_0 — бесконечно мало отличаться от времени $t - \frac{r_0}{c}$. Так как изменения положения и скорости электрона являются бесконечно малыми второго порядка, то мы можем считать, что M есть положение в момент времени $t - \frac{r_0}{c}$, а $\boldsymbol{v}$ есть скорость в этот момент. Далее

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{x}] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{y}] - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_0}\right)[\boldsymbol{z}],$$

потому что, как легко видеть, изменение расстояния между O и P, вызываемое смещением первой из этих точек по направлению к M, равно тому изменению, которое имело бы место, если бы O оставалось на месте, а точка P сместилась на расстояние $-\boldsymbol{x}$, $-\boldsymbol{y}$, $-\boldsymbol{z}$. Квадратные скобки теперь показывают, что значения величин относятся к моменту времени $t - \frac{r_0}{c}$; этот смысл сохраняется во всех дальнейших формулах.

1) Примечание **22**.

Подставляя вышеприведенное значение $\frac{1}{r}$ и принимая, что

$$\frac{1}{1-\frac{[v_r]}{c}}=1+\frac{[v_r]}{c},$$

где v_r можно рассматривать как составляющую по направлению OP, получаем для скалярного потенциала выражение

$$\varphi=\frac{e}{4\pi}\left\{\frac{1}{r_0}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_0}\right)[x]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_0}\right)[y]-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_0}\right)[z]+\frac{[v_r]}{cr_0}\right\}.$$

Во всем дальнейшем мы можем в наших рассуждениях опускать значок $_0$, так что r впредь будет означать расстояние от начала координат O до точки с координатами x, y, z. Что касается последнего члена, мы можем воспользоваться преобразованием

$$\frac{[v_r]}{c}=\frac{1}{c}\frac{x}{r}[v_x]+\frac{1}{c}\frac{y}{r}[v_y]+\frac{1}{c}\frac{z}{r}[v_z]=$$

$$=\frac{1}{c}\frac{x[\dot{x}]+y[\dot{y}]+z[\dot{z}]}{r}=-\left(\frac{\partial[x]}{\partial x}+\frac{\partial[y]}{\partial y}+\frac{\partial[z]}{\partial z}\right);$$

последний шаг этого преобразования будет ясен, если мы будем иметь в виду смысл выражения $\frac{\partial[x]}{\partial x}$ и т. д. Символ $[x]$ обозначает, что величина x берется в момент времени $t-\frac{r}{c}$, который мы будем временно обозначать через t'. Это время t' в свою очередь зависит от расстояния r, а последнее является функцией координат x, y, z внешней точки. Отсюда

$$\frac{\partial[x]}{\partial x}=\frac{\partial[x]}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=-[\dot{x}]\frac{1}{c}\frac{x}{r}\text{ и т. д.}$$

Окончательное выражение для скалярного потенциала получает вид

$$\varphi=\frac{e}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{[x]}{r}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{[y]}{r}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{[z]}{r}\right\}. \qquad (84)$$

Выражение для векторного потенциала имеет еще более простой вид, а именно

$$a = \frac{e[\mathfrak{v}]}{4\pi c r}. \tag{85}$$

Поле излучения, которое на больших расстояниях играет первенствующую роль и в котором мы находили выше поток энергии, определяется тремя последними членами выражения для φ и векторным потенциалом. На меньших расстояниях оно налагается на поле, которое определяется первым членом φ, — это как раз то поле, которое окружало бы электрон, если бы он был в покое.

42. Слегка изменяя условия, мы можем окончательно освободиться от электростатического поля. Допустим, что электрон совершает колебания внутри атома или молекулы материи, которую мы теперь будем называть *частичкой* и которая занимает небольшой объем S. Если частичка, как целое, не заряжена, она должна содержать, кроме нашего подвижного электрона, еще заряд $-e$ или в форме одного или нескольких электронов или распределенный каким-нибудь другим способом. Мы предположим, что этот добавочный заряд остается в покое и что если бы электрон e тоже был закреплен в определенном положении, которое мы примем за начало координат, внешнее поле вообще бы отсутствовало, по крайней мере на таких расстояниях, которые весьма велики по сравнению с размерами S. При таких допущениях неподвижный заряд $-e$ должен вызывать скалярный потенциал, равный по величине и противоположный по направлению первому члену в (84), так что, если мы рассмотрим поле всей частички, этот член зачеркнется. Наше допущение сводится к тому, что заряд $-e$ эквивалентен одному электрону в точке O, так что, если координаты электрона $+e$ суть x, y, z, все будет происходить так, как если бы у нас было два равных и противоположных заряда на небольшом расстоянии друг от друга. Иначе говоря, частичка электрически поляризована, и ее электрический момент определяется уравнением

$$\mathfrak{p} = e\mathfrak{r}, \tag{86}$$

где $\boldsymbol{r}$ есть вектор, проведенный от O к положению, занимаемому подвижным электроном. Составляющие $\boldsymbol{p}$ суть

$$\boldsymbol{p}_x = ex, \qquad \boldsymbol{p}_y = ey, \qquad \boldsymbol{p}_z = ez, \tag{87}$$

и из (84) и (85) мы находим следующие выражения для потенциалов поля, окружающего поляризованную частичку:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\boldsymbol{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\boldsymbol{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\boldsymbol{p}_z]}{r}\right\}, \tag{88}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{4\pi c r}. \tag{89}$$

Эти соотношения имеют место и в том случае, если поляризованная частичка представляет собою более сложную систему. Представим себе, что она содержит известное количество электронов, некоторая часть которых пусть будет подвижна. Мы можем найти потенциалы, если вычислим (84) и (85) для отдельных электронов и результаты сложим. Пользуясь для этой последней операции символом $\sum$ и помня, что

$$\sum e = 0, \tag{90}$$

мы опять придем к формулам (88) и (89), если определим момент частички формулой

$$\boldsymbol{p} = \sum e\boldsymbol{r}, \tag{91}$$

а его составляющие — выражениями

$$\boldsymbol{p}_x = \sum ex, \qquad \boldsymbol{p}_y = \sum ey, \qquad \boldsymbol{p}_z = \sum ez. \tag{92}$$

Нет даже необходимости в том, чтобы заряды были сосредоточены в отдельных электронах. Мы можем с таким же успехом считать, что они распределены непрерывно, но, конечно, так или иначе способны к движению или к флюктуации. Тогда суммы в последних формулах должны быть заменены интегралами. Мы будем иметь:

$$\int \rho\, dS = 0, \tag{93}$$

а для составляющих момента получаем

$$\boldsymbol{p}_x = \int \rho x\, dS, \qquad \boldsymbol{p}_y = \int \rho y\, dS, \qquad \boldsymbol{p}_z = \int \rho z\, dS, \tag{94}$$

причем интегрирование распространяется по всему объему S, занятому частичкой. Следует отметить, что в силу (90) и (93) векторы (91) и (94) не зависят от выбора точки O.

43. Формулы (88) и (89) показывают, что, когда момент $\boldsymbol{p}$ претерпевает изменения, частичка является центром излучения, и что она испускает правильные колебания, если $\boldsymbol{p}$ является периодической функцией времени.

Предположим для примера, что

$$\boldsymbol{p}_x = b\cos(nt + p), \quad \boldsymbol{p}_y = 0, \quad \boldsymbol{p}_z = 0,$$

где b, n и p суть постоянные величины. Тогда имеем

$$\frac{[\boldsymbol{p}_x]}{r} = \frac{b}{r}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\},$$

и поле легко определяется при помощи формул (88) и (89).

Я не буду выписывать общих формул, напишу только те, которые имеют место для значений r, весьма больших по сравнению с длиной волны; они получаются, если опустить все члены порядка $\frac{1}{r^2}$. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_x &= \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{r^2 - x^2}{r^2}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\},\\
\boldsymbol{d}_y &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{xy}{r^2}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\},\\
\boldsymbol{d}_z &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{xz}{r^2}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\},\\
\boldsymbol{h}_x &= 0,\\
\boldsymbol{h}_y &= \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{z}{r}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\},\\
\boldsymbol{h}_z &= -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cdot\frac{y}{r}\cos\left\{n\left(t - \frac{r}{c}\right) + p\right\};
\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

они отвечают уравнениям (80) и (81) [1].

[1]) Примечание 23.

Я должен добавить, что наши формулы для поля, окружающего частичку, поляризация которой изменяется периодически, совпадают с формулами Герца, дающими состояние поля около герцевского вибратора[1]).

44. Перейдем теперь к некоторым уравнениям, которыми придется пользоваться при рассмотрении влияния поступательного движения Земли на оптические явления. Они относятся к электромагнитным явлениям в системе тел, имеющих общее равномерное движение, скорость которого будем обозначать через $\boldsymbol{w}$; они выводятся из наших первоначальных уравнений путем замены переменных. В самом деле, весьма естественно относить явления в движущейся системе не к неподвижной системе координат, но к такой, которая связана с системой и перемещается вместе с нею; эти новые координаты обозначим через x', y', z'. Они даются выражениями:

$$x' = x - \boldsymbol{w}_x t, \qquad y' = y - \boldsymbol{w}_y t, \qquad z' = z - \boldsymbol{w}_z t. \tag{96}$$

Будет также полезно остановить наше внимание на скорости зарядов $\boldsymbol{u}$ относительно движущихся осей, так что в наших основных уравнениях мы должны положить

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}.$$

Оказывается, однако, что в тех случаях, когда скорость перемещения $\boldsymbol{w}$ настолько мала, что можно пренебречь ее квадратом $\boldsymbol{w}^2$, вернее, величиной $\frac{\boldsymbol{w}^2}{c^2}$, дифференциальные уравнения, отнесенные к движущейся системе координат, принимают почти ту же самую форму, как и первоначальные формулы, если вместо t ввести новую независимую переменную t' и если в то же самое время заменить диэлектрическое смещение и магнитную силу некоторыми другими векторами, которые мы будем обозначать $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$.

Переменная t' определяется уравнением

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{w}_x x' + \boldsymbol{w}_y y' + \boldsymbol{w}_z z'), \tag{97}$$

---

[1]) H. Hertz, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie, Ann. Phys. Chem. **36** (1888), стр. 1; Werke, т. II.

а векторы $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ — уравнениями:

$$\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{wh}], \tag{98}$$

$$\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{h} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{wd}]. \tag{99}$$

Мы можем считать, что время t' отличается от t тем, что оно отсчитывается от момента

$$\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{w}_x x' + \boldsymbol{w}_y y' + \boldsymbol{w}_z z');$$

последний изменяется от точки к точке. Для этой переменной поэтому весьма подходит название *местное* время, в отличие от *универсального* времени t.

Что касается векторов $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, они мало отличаются от $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, так как дробь $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$ весьма мала. Даже для движения Земли значение $|\boldsymbol{w}|$ составляет всего одну десятитысячную долю скорости света.

Пренебрегая, как только что было сказано, членами, содержащими квадрат $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$, мы получаем следующую систему преобразованных уравнений:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = \left\{1 - \frac{(\boldsymbol{wu})}{c^2}\right\}\rho, \tag{100}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h}' = 0, \tag{101}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = \frac{1}{c}(\dot{\boldsymbol{d}}' + \rho \boldsymbol{u}), \tag{102}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}'. \tag{103}$$

Штрих означает, что дифференцирование производится по t', а символы div и rot (а в следующем параграфе и grad) обозначают дифференцирование по x', y', z' совершенно так же, как раньше они обозначали дифференцирование по x, y, z. Так, например, $\operatorname{rot} \boldsymbol{h}'$ теперь представляет собою вектор с составляющими

$$\frac{\partial h'_z}{\partial y'} - \frac{\partial h'_y}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial h'_x}{\partial z'} - \frac{\partial h'_z}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial h'_y}{\partial x'} - \frac{\partial h'_x}{\partial y'}.$$

Вы видите, что эти формулы имеют почти — но не совсем — ту же форму, как и уравнения (17) — (20), причем они различаются в первом уравнении на член $\frac{(\boldsymbol{w}\boldsymbol{u})}{c^2}$ [1]) [16].

45. Исходя из новой системы уравнений, мы можем теперь повторить многое из того, что было сказано по поводу первоначальной системы. Для данного распределения и движения зарядов поле является вполне определенным, и здесь опять задача значительно упрощается путем введения двух потенциалов, скалярного и векторного. Они даются уравнениями:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} [\rho]\, dS \tag{104}$$

и

$$\boldsymbol{a}' = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} [\rho \boldsymbol{u}]\, dS. \tag{105}$$

Символы $[\rho]$ и $[\rho\boldsymbol{u}]$ требуют, однако, некоторых дополнительных объяснений. Если мы хотим вычислить значения φ' и $\boldsymbol{a}'$ для точки P и для момента, в который местное время для этой точки имеет определенное значение t', мы должны для каждого элемента dS, расположенного на расстоянии r от P, брать такие значения для ρ и $\rho\boldsymbol{u}$, какие они имеют в тот момент, когда местное время элемента равно

$$t' - \frac{r}{c}.$$

В конце концов мы получаем следующие формулы для определения поля посредством потенциалов [2]):

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}' - \operatorname{grad}\varphi' + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}'), \tag{106}$$

$$\boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}'. \tag{107}$$

Здесь опять замечается небольшое отличие по сравнению с (33) и (34). В (33) нет члена, соответствующего последнему члену в (106) [3]).

---

[1]) Примечание **24**. См. также примечание **72***.

[2]) Примечание **25**.

[3]) См., впрочем, примечание **72***.

Несмотря на два отмеченных отличия, имеется много разнообразных случаев, когда положение дела в неподвижной системе оказывается вполне аналогичным положению дела в той же самой системе, находящейся в поступательном движении. Я приведу два примера, представляющих некоторый интерес.

Прежде всего значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, обусловливаемые частичкой, движущейся со скоростью $\boldsymbol{w}$ и имеющей переменный электрический момент, даются формулами, подобными тем, которые мы нашли ранее для излучения неподвижной частички и которые я поэтому не считаю нужным выписывать.

Если момент частички, помещенной в начале координат, представляется выражениями:

$$\boldsymbol{p}_x = b\cos(nt' + p), \quad \boldsymbol{p}_y = 0, \quad \boldsymbol{p}_z = 0, \tag{108}$$

все, что нам нужно сделать, сводится к замене в (95) $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$, x, y, z, t через $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, x', y', z', t' [1]).

Чтобы выяснить смысл этого результата, я рассмотрю поле в точке, расположенной на положительной оси y'. Оно определяется выражениями:

$$\boldsymbol{d}'_x = \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

$$\boldsymbol{h}'_z = -\frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

причем все остальные составляющие равны нулю. Так как, пренебрегая членами второго порядка, мы можем написать

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}' - \frac{1}{c}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{h}'],$$

то вместо (98) имеем:

$$\boldsymbol{d}_x = \boldsymbol{d}'_x - \frac{\boldsymbol{w}_y}{c}\boldsymbol{h}'_z,$$

[1]) Примечание **26**.

откуда ясно, что диэлектрическое смещение принимает вид

$$d_x = \alpha \cos\left\{n\left(t' - \frac{y'}{c}\right) + p\right\},$$

где α есть некоторая постоянная величина.

Подставляя значения местного времени и заменяя y' выражением (96), получаем отсюда:

$$d_x = \alpha \cos\left\{n\left(1 + \frac{w_y}{c}\right)\left(t - \frac{y}{c}\right) + p\right\}.$$

Итак, мы видим, что в определенной точке пространства, т. е. для определенного значения y, частота колебаний дается выражением:

$$n\left(1 + \frac{w_y}{c}\right).$$

Если излучающая частичка имеет положительную скорость w_y, т. е. такую, которая направлена к рассматриваемой точке, частота больше, чем частота самой частички, которая, по (108), имеет прежнее значение n. Это — известное изменение частоты, которое, по принципу Допплера, вызывается движением источника света.

46. Наш второй пример относится к отражению света идеальным зеркалом, например изготовленным из совершенного проводника. Предположим, что лучи падают нормально, и начнем со случая неподвижного зеркала; в таком случае мы можем пользоваться первоначальными уравнениями. Пусть пучок света представлен уравнением (7), и пусть поверхность зеркала совпадает с плоскостью YOZ. Тогда отраженный пучок, который мы будем отличать значком (r), дается выражениями:

$$d_{y\,(r)} = -a\cos n\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad h_{z\,(r)} = a\cos n\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

В самом деле, эти значения удовлетворяют условию, что на поверхности зеркала диэлектрического смещения нет. Если мы положим $x = 0$, мы находим, действительно:

$$d_y + d_{y\,(r)} = 0.$$

Случай отражения от зеркала, движущегося со скоростью $\boldsymbol{w}_x$ в направлении оси OX, т. е. в направлении нормали, может быть разобран при помощи тех же самых формул, с одной только заменой величин x, t, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ на x', t', $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ [1]). Поэтому, если падающий пучок представляется теперь выражением

$$\boldsymbol{d}'_y = a\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right), \qquad \boldsymbol{h}'_z = a\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

для отраженного пучка получим:

$$\boldsymbol{d}'_{y\,(r)} = -a\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right), \qquad \boldsymbol{h}'_{z\,(r)} = a\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right).$$

Рассмотрим значения $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{h}_z$, $\boldsymbol{d}_{y\,(r)}$ и $\boldsymbol{h}_{z\,(r)}$ для этого случая. Так как единственная составляющая $\boldsymbol{w}$ есть $\boldsymbol{w}_x$, получаем:

$$\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}'_y + \frac{1}{c}\boldsymbol{w}_x\boldsymbol{h}'_z, \qquad \boldsymbol{h}_z = \boldsymbol{h}'_z + \frac{1}{c}\boldsymbol{w}_x\boldsymbol{d}'_y,$$

так что падающие лучи определяются выражениями:

$$\boldsymbol{d}_y = a\left(1 + \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_z = a\left(1 + \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' - \frac{x'}{c}\right),$$

а для отраженных лучей имеем:

$$\boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -a\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = a\left(1 - \frac{\boldsymbol{w}_x}{c}\right)\cos n\left(t' + \frac{x'}{c}\right).$$

Выразим теперь в этих формулах t' и x' через t и x. Значение местного времени

$$t' = t - \frac{\boldsymbol{w}_x x'}{c^2},$$

и

$$x' = x - \boldsymbol{w}_x t.$$

---

[1]) Примечание 27.

Отсюда

$$t' - \frac{x'}{c} = \left(1 + \frac{w_x}{c}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \left(1 - \frac{w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Формулы упрощаются, если положить

$$a\left(1 + \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{a}, \quad n\left(1 + \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{n}.$$

Продолжая пренебрегать квадратом $\frac{w_x}{c}$, получаем отсюда:

$$a\left(1 - \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right), \qquad n\left(1 - \frac{w_x}{c}\right) = \mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right),$$

так что окончательные формулы для падающих лучей принимают вид

$$\boldsymbol{d}_y = \mathrm{a}\cos\mathrm{n}\left(t - \frac{x}{c}\right), \ \boldsymbol{h}_z = \mathrm{a}\cos\mathrm{n}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

а для отраженных лучей

$$\boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -\mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\cos\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = \mathrm{a}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\cos\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Эти уравнения показывают, что при движении зеркала изменяются как частота, так и амплитуда отраженных лучей. Частота теперь имеет значение $\mathrm{n}\left(1 - \frac{2w_x}{c}\right)$, и она меньше, чем n, если зеркало удаляется от источника света. Эти изменения можно было бы предсказать на основании принципа Допплера. Что касается амплитуды, она изменяется совершенно в том же отношении, как и частота, так что интенсивность отраженного света уменьшается при движении зеркала в одном направлении и увеличивается при движении в другом.

Интересно проверить эти результаты, рассматривая энергию системы. Это легко сделать, если мы остановим наше внимание не на изменениях электромагнитной энергии, а на ее среднем значении, так что в каждой точке пучка w_e и w_m (§ 16) нужно рассматривать как постоянные. Пусть лучи занимают цилиндрический объем, образующие которого параллельны OX и нормальное сечение которого есть Σ. Пусть P будет плоскость, нормальная к OX и неподвижно закрепленная в эфире на некотором расстоянии перед зеркалом. Если $\mathfrak{w}_x$ положительно, так что зеркало удаляется, пространство между зеркалом и плоскостью P увеличивается на $\mathfrak{w}_x \Sigma$ в единицу времени, так что энергия, заключенная в этом пространстве, увеличивается на

$$(w_e + w_m)\, \mathfrak{w}_x \Sigma.$$

Далее, если p есть давление на зеркало, работа, произведенная полем, будет равна

$$p \mathfrak{w}_x \Sigma.$$

Следовательно, если S есть поток энергии по направлению к зеркалу через единицу площади плоскости P, мы должны иметь:

$$S\Sigma = (w_e + w_m)\, \mathfrak{w}_x \Sigma + p \mathfrak{w}_x \Sigma; \tag{109}$$

величины, входящие в это уравнение, можно легко вычислить.

В падающем пучке имеется поток энергии (§ 17)

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 c$$

по направлению к зеркалу, а в отраженном пучке — поток

$$\frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 \left(1 - \frac{2\mathfrak{w}_x}{c}\right)^2 c = \frac{1}{2}\, \mathrm{a}^2 \left(1 - \frac{4\mathfrak{w}_x}{c}\right) c$$

в противоположном направлении, так что

$$S = 2\mathrm{a}^2 \mathfrak{w}_x. \tag{110}$$

Что касается w_e, w_m и p, мы можем взять для них те значения, которые имели бы место, если бы зеркало было в покое, так как эти величины нужно умножить на $\mathfrak{w}_x$. Так как величина $w_e + w_m$ состоит из двух равных частей, одна из которых относится к падающему, а другая к отраженному свету [1]), то

$$w_e + w_m = a^2. \qquad (111)$$

Окончательно, на основании сказанного в § 25,

$$p = a^2. \qquad (112)$$

Значения (110), (111) и (112) действительно удовлетворяют условию (109).

47. Я закончу эту главу кратким обзором применений теории электронов к движению электричества в металлических телах. Во введении я уже упоминал об исследованиях Рике, Друде и Дж. Дж. Томсона. Теперь я хочу обратить ваше внимание главным образом на взгляды, высказанные вторым из названных физиков.

По его теории каждый металл содержит большое число свободных электронов; допускается, что они принимают участие в тепловом движении обыкновенных атомов и молекул. Далее, известная теорема кинетической теории материи, по которой при данной температуре средняя кинетическая энергия для частичек разного рода имеет одно и то же значение, приводит к заключению, что средняя кинетическая энергия электрона равна энергии молекулы газа, взятого при той же температуре. Хотя скорость, необходимая для этого, должна иметь довольно большое значение, все же электроны не могут за короткий промежуток времени уйти на далекое расстояние от своего первоначального положения. Им препятствуют столкновения с атомами самого металла.

Для простоты мы примем только один род свободных электронов, предполагая, что электроны другого знака связаны с весомой материей. Если теперь на металл не действует никакая электрическая сила, частички движутся во все стороны одинаково; переноса электричества в каком-нибудь определенном направлении не происходит. Все это изменяется, как только мы приложим какую-нибудь электрическую силу. Скорости электронов в одну сторону увеличиваются, в другую уменьшаются, так что возникает

[1]) Примечание 28.

электрический ток, силу которого можно вычислить на основании теоретических соображений. Формула, к которой мы таким образом приходим, содержит, конечно, электрическую силу, число N электронов в единице объема, заряд e и массу m каждого из них. Прежде всего можно найти силу, действующую на электрон; для этого электрическую силу нужно умножить на e. Затем, деля на m, получаем скорость, которую электрон приобретает в единицу времени. Скорости, приобретенные электронами, будут, далее, зависеть от того промежутка времени, в течение которого эти электроны без помехи подвергались действию электрической силы; за этот промежуток мы примем промежуток времени между двумя последовательными столкновениями с атомом металла. Если l есть расстояние, пробегаемое электроном между двумя столкновениями, u — скорость электрона, то величина этого промежутка времени будет $\frac{l}{u}$; электрическая сила за это время произведет некоторую скорость, которая, как мы можем принять, теряется при следующем столкновении.

Этих соображений достаточно для объяснения формулы

$$\sigma = \frac{e^2 N l}{2mu}, \tag{113}$$

которую Друде вывел для электропроводности металла; мы должны в ней понимать под u среднюю скорость электронов в их неправильном тепловом движении, а под l — среднюю длину их свободного пути. Но, как я уже говорил, мы предполагаем, что средняя кинетическая энергия электрона, для которой мы можем написать $\frac{1}{2}mu^2$, равна средней кинетической энергии молекулы газа. Эта последняя пропорциональна абсолютной температуре T и может поэтому быть дана выражением

$$\alpha T,$$

где α есть универсальная постоянная. При этих обозначениях (113) принимает вид

$$\sigma = \frac{e^2 N l u}{4\alpha T}. \tag{114}$$

48. Чтобы показать вам всю красоту теории Друде, я должен сказать несколько слов также и о теплопроводности. Ее можно вычислить по способу, весьма напоминающему тот, при помощи которого она вычисляется в кинетической теории газов. В самом деле, металлический стержень, концы которого поддерживаются при различной температуре, можно уподобить столбу газа, находящемуся, например, в вертикальном положении и нагретому сверху сильнее, чем снизу. Процесс, посредством которого газ проводит тепло, заключается, как вы знаете, в том, что происходит нечто вроде диффузии между верхней частью столба, где мы имеем бóльшие скорости молекул, и нижней, где скорости меньше; величина этой диффузии и интенсивность потока тепла, который возникает в результате, зависит от среднего расстояния, на которое молекула может продвинуться в промежутке между двумя столкновениями. В теории металлов Друде перенос тепла осуществляется точно таким же способом. Переносчиками тепла от более горячих к менее горячим частям тела являются тут свободные электроны, и длина их свободного пути ограничена не взаимными столкновениями, как в случае газа, а столкновениями с атомами металла, которые мы, в силу их большой массы, можем считать неподвижными. Развивая эти идеи, Друде находит для коэффициента теплопроводности:

$$k = \frac{1}{3} \alpha N l u. \tag{115}$$

49. Представляется весьма интересным сравнить эти две проводимости, тепловую и электрическую. Деля (115) на (114), получаем:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T. \tag{116}$$

Это выражение показывает, что искомое отношение должно быть одинаковым для всех металлов. В первом приближении это действительно имеет место.

Итак, мы видим, что Друде сумел объяснить тот важный факт, что, как правило, металлы, обладающие большей теплопроводностью, являются в то же время лучшими проводниками электричества.

Углубляясь несколько более в детали, я могу указать два важных способа проверки уравнения (116).

Во-первых, измерения Егера и Диссельгорста [1]) показ ли, что отношение двух проводимостей $\frac{k}{\sigma}$ изменяется иблизительно пропорционально абсолютной температуре, ичем отношение между значениями $\frac{k}{\sigma}$ для температур 0° и 18° для различных металлов изменяется от 1,25 1,12, тогда как отношение между абсолютными темпетурами равно 1,28.

Во-вторых, правую часть равенства (116) можно вычить при помощи числовых данных, взятых из других ений [2]). Чтобы в этом убедиться, возьмем количество орода, равное его электрохимическому эквиваленту, и дположим, что это количество занимает, при темперае T, объем в один кубический сантиметр. Соответствую давление, которое мы обозначим через p, может быть ко вычислено.

Мы уже видели, что заряд e, который входит в фору (116), можно считать равным заряду атома водорода ектролитическом растворе. Поэтому число атомов в одном ктрохимическом эквиваленте водорода равно $\frac{1}{e}$. Так как екулы газа двухатомны, число молекул равно $\frac{1}{2e}$, и ная кинетическая энергия их поступательного движения на

$$\frac{\alpha T}{2e}$$

кубический сантиметр.

По основным формулам кинетической теории газов даие на единицу площади численно равно двум третям

[1]) W. Jaeger und H. Diesselhorst, Wärmeleitung, Elektsleitung, Wärmekapazität und Thermokraft einiger Metalle. ngsber. Berlin, 1899, стр. 719.

[2]) См. M. Reinganum, Theoretische Bestimmung des Vernisses von Wärme- und Elektrizitätsleitung der Metalle aus der eschen Elektronentheorie, Ann. Phys. 2 (1900), стр. 398.

этой величины, так что

$$p = \frac{aT}{3e}.$$

Уравнение (116) поэтому принимает вид

$$\frac{k}{\sigma} = 12\frac{p^2}{T},$$

или

$$p = \sqrt{\frac{1}{12}\frac{k}{\sigma}T}. \tag{117}$$

Это соотношение между проводимостями металла и другими величинами, выведенное из явлений, которые на первый взгляд не имеют ничего общего ни с теплопроводностью, ни с электропроводностью, оказалось в весьма удовлетворительном согласии с произведенными измерениями.

Так как электрохимический эквивалент водорода равен в наших единицах

$$\frac{0{,}000104}{c\sqrt{4\pi}},$$

а масса кубического сантиметра этого газа при 0° и давлении 76 *см* равна 0,0000896 *г*, для температуры 18° ($T = 273 + 18°$) находим:

$$p = \frac{12{,}5 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}}. \tag{118}$$

С другой стороны, выражая σ в обычных электромагнитных единицах, Егер и Диссельгорст нашли для серебра при 18°

$$\frac{k}{\sigma} = 686 \cdot 10^8.$$

В наших единицах это выражение равно

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{686 \cdot 10^8}{4\pi c^2};$$

подставляя его в правую часть уравнения (117), получаем

$$\frac{12{,}9 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}},$$

о весьма близко согласуется с только что полученным ачением для p.

50. Я должен добавить, однако, что численное совпание становится несколько хуже, если мы вместо формул руде для проводимостей возьмем уравнения, к которым пришел путем вычислений, по моему мнению, несколько лее строгих, чем его вычисления. Принимая во внимае, что электроны в куске металла имеют неодинаковые орости, и основываясь на законе Максвелла для распределения скоростей между частичками, я получаю вместо (114) (115)[1]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\frac{e^2 l N u}{\alpha T} \tag{119}$$

$$k = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\alpha N l u. \tag{120}$$

этих уравнениях u есть такая величина, что ее квадрат вен средней величине квадратов скоростей, которыми ектроны обладают в своем тепловом движении, а l представляет некоторую среднюю длину свободного пути.

Отношение проводимостей теперь приобретает вид

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T;$$

о попрежнему пропорционально абсолютной температуре, составляет только две трети друдевского значения. силу этого мы должны заменить (117) уравнением

$$p = \sqrt{\frac{1}{8}\,\frac{k}{\sigma}\,T},$$

авая часть которого, в примере § 49, имеет значение

$$\frac{15{,}8 \cdot 10^5}{c\sqrt{4\pi}}.$$

о чувствительно отличается от (118).

Если формулам (114) и (115) предпочесть формулы (119) (120), как, по моему мнению, мы и обязаны поступить,

[1]) Примечание 29.

точное совпадение предыдущего параграфа должно приписать простой случайности. Несмотря на это, даже найденная нами степень согласия позволяет с уверенностью утверждать, что в теории Друде положено хорошее начало в деле уразумения электрических и термических свойств металлов [1]). Особенно важно отметить, что в наших вычислениях мы все время основываемся на представлении, что заряды свободных электронов в металле равны зарядам ионов водорода [17].

---

1) Но не более, чем именно «начало». Эта теория должна быть значительно развита, чтобы объяснить изменения в электропроводности при низких температурах, которые были обнаружены Каммерлинг-Оннесом.

Другой важный вопрос — это вопрос о той доле, которую свободные электроны вносят в удельную теплоту металлов (1915).

ГЛАВА II

ИСПУСКАНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ТЕПЛА

51. Содержанием моих ближайших двух лекций будет испускание и поглощение тепла и, в особенности, лучеиспускание так называемого абсолютно черного тела, рассматриваемое с точки зрения зависимости этих явлений от температуры и длины волны. Сначала я напомню вам важные теоретические законы, найденные Кирхгофом, Больцманом и Вином в результате приложения принципов термодинамики. После этого нам предстоит разобрать, в какой степени теория электронов может дать нам ключ к пониманию механизма этих явлений.

Мы должны начать с точного определения понятий: «поглощательная» и «испускательная» способность тела.

Пусть ω и ω' будут две бесконечно малые площадки, нормальные к прямой r, соединяющей их центры, и пусть M будет тело при температуре T, расположенное так, что на него может падать пучок лучей, идущих через ω' и ω. Допустим, что этот пучок состоит из однородных лучей с длиной волны λ, плоско поляризованных, причем электрические колебания пусть имеют определенное направление h, перпендикулярное к прямой r. Часть падающих лучей будет отражаться от передней поверхности тела, часть из них проникнет внутрь тела, и из этих лучей часть опять-таки выйдет из тела — или прямо, или после одного, а то и нескольких внутренних отражений. Во всяком случае, если тело M не является вполне прозрачным, оно задержит в себе некоторое количество энергии; эта энергия обратится в тепло, так как мы исключаем из нашего рассмотрения все другие возможные изменения.

Коэффициент поглощения A определяется как дробь, показывающая, какая часть падающей энергии превращается внутри тела M в тепло.

С другой стороны, известная часть всего излучения, испускаемого M, пройдет наружу через вышеупомянутые два элемента ω и ω'. Мы разложим это излучение на лучи различной длины волны и остановим наше внимание на тех длинах волн, которые лежат в пределах от λ до $\lambda + d\lambda$, бесконечно близких друг к другу. Далее, мы разложим электрические колебания этих лучей на составляющую вдоль прямой h, о которой я только что говорил, и на вторую составляющую, перпендикулярную как к ней, так и к направлению самого луча. Легко показать, что количество энергии, испускаемое телом в единицу времени через два элемента поверхности, — поскольку оно относится к вышеуказанному интервалу длин волн и к колебаниям, происходящим в направлении h, — пропорционально ω, ω', $d\lambda$ и обратно пропорционально квадрату r. Его можно поэтому представить выражением

$$\frac{E\omega\omega' \, d\lambda}{r^2}. \tag{121}$$

Коэффициент E называется *испускательной способностью* тела M. Это есть величина, зависящая от природы тела M, от его положения по отношению к прямой r, длины волны λ, температуры T и направления h, которое мы выбрали для колебаний.

Исходя из термодинамического принципа, что в системе тел, имеющих одну и ту же температуру, взаимные излучения не нарушают равновесия, и пользуясь рассуждением, которое я здесь повторять не буду, Кирхгоф[1]) находит, что отношение

$$\frac{E}{A}$$

---

[1]) G. Kirchhoff, Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht, Ann. Phys. Chem. **109** (1860), стр. 275.

испускательной и поглощательной способностей тела не зависит ни от направления, которое мы выбрали для h, ни от положения и особенностей тела M. Оно не изменится, если тело M переменит свое положение или если мы его заменим совершенно другим телом той же температуры. Отношение между испускательной и поглощательной способностями есть функция только температуры и длины волны.

52. Я укажу вам теперь два других толкования этой функции. Во-первых, следуя Кирхгофу, мы можем представить себе *абсолютно черное* тело, или, как мы будем говорить, просто *черное* тело, т. е. такое, которое способно задерживать внутри себя всю падающую на него энергию. Коэффициент поглощения такого тела равен поэтому 1; если обозначить его испускательную способность через E_b, причем символы A и E относятся к любому другому телу, получим:

$$\frac{E}{A} = E_b. \tag{122}$$

Мы можем отметить попутно, что по закону Кирхгофа все черные тела, какова бы ни была их природа, обладают одной и той же испускательной способностью.

Уравнение (122) выражает первое из тех двух толкований функции $\frac{E}{A}$, о которых я упоминал. Нам станет ясным другое толкование, если мы обратим наше внимание на состояние, которое существует в эфире по соседству с излучающими телами.

Рассмотрим некоторый объем, свободный от всякой весомой материи и окруженный со всех сторон абсолютно черной оболочкой, которая поддерживается при определенной температуре T. Эфир внутри этого объема во всех направлениях пронизывается тепловыми лучами. Пусть ω будет элементарная площадка, расположенная в некоторой точке P объема и ориентированная как угодно. Рассмотрим количество энергии, которое проходит через этот элемент в единицу времени в направлении нормали n к элементу, или, вернее, в направлениях, лежащих внутри бесконечно малого конуса с телесным углом ε, причем ось конуса совпадает с нормалью n. Мы всегда будем говорить только о длинах волн, лежащих между λ и $\lambda+d\lambda$, и об электрических колебаниях, происходящих в определенном направлении h. Последнее означает, что все колебания лучей, лежащих внутри конуса, разлагаются на составляющие по прямым h и k, перпендикулярным как друг к другу, так и к оси конуса, и что мы будем рассматривать только те составляющие, которые соответствуют первому из этих направлений.

Пусть P' будет точка нормали n, лежащая на расстоянии r от точки P, и пусть в P' помещен нормально к r элемент поверхности, величина которого дается выражением

$$\omega' = r^2\varepsilon. \tag{123}$$

Ясно, что вместо того, чтобы говорить о лучах, направление которых лежит внутри конуса ε, мы можем с таким же правом говорить о лучах, распространяющихся через элементы ω и ω'.

Таким образом величина, которую мы хотим определить, есть поток энергии через две малые площадки, исходящий из части оболочки позади ω. В силу формулы (121) он дается выражением

$$\frac{E_b\omega\omega'\,d\lambda}{r^2},$$

которое мы можем, по формуле (123), заменить следующим:

$$E_b\omega\varepsilon\,d\lambda. \tag{124}$$

Теперь уже нам не нужно больше рассматривать элемент ω'; нам надлежит думать только об элементе ω и конусе ε.

Самое замечательное в нашем результате — это то, что он совершенно не зависит от положения точки P, направления элемента ω и направлений h и k, на которые мы разложили колебания. Поле излучения внутри эфира поистине изотропно, т. е. колебания распространяются во все стороны совершенно одинаково и электрические колебания происходят с одинаковой интенсивностью во всех возможных направлениях.

Вычислим теперь количество энергии в единице объема этого поля излучения. Для пучка лучей определенного направления количество энергии, переносимое в единицу времени через площадку ω, нормальную к лучам, равно тому количеству энергии, которое в тот же самый момент времени заключено в цилиндре, образующая которого параллельна лучам и основание которого есть ω, а высота равна скорости света c; это количество энергии равно энергии единицы объема, взятой $c\omega$ раз. Отсюда энергию единицы объема, относящуюся к лучам, для которых имеет место уравнение (124), можно найти, разделив это выражение на $c\omega$; получаем:

$$\frac{E_b}{c}\,\varepsilon\,d\lambda.$$

Мы должны помнить, что все время рассматривали только те лучи, направления которых лежат внутри конуса ε, и только такие составляющие их колебаний, которые имеют направление h. Если мы хотим включить в наше рассмотрение все лучи, каково бы ни было их собственное направление и направление их колебаний, мы должны произвести следующие два изменения. Во-первых, мы должны это выражение умножить на 2, так как колебания направления k имеют ту же интенсивность, что и те колебания, которые мы только что рассматривали; во-вторых, мы должны ε заменить через 4π, так как лучи, направления которых лежат внутри всевозможных конусов с равными телесными углами, обладают одинаковой энергией. В конце концов получаем для количества энергии, имеющегося в единице объема нашего поля излучения, или для «плотности» энергии (поскольку она относится к лучам длины волны, лежащей в пределах λ и $\lambda+d\lambda$), следующее выражение:

$$\frac{8\pi}{c}E_b\,d\lambda.$$

Напишем это в таком виде:

$$F(\lambda,\ T)\,d\lambda;$$

тогда, если мы примем во внимание также соотношение (122), получаем:

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c} E_b = \frac{8\pi}{c} \frac{E}{A}. \tag{125}$$

Это уравнение, которое дает связь между $\frac{E}{A}$ и плотностью энергии, раскрывает нам смысл того второго толкования, которое может быть придано выражению $\frac{E}{A}$.

53. Можно сказать еще несколько слов относительно состояния излучения, характеризуемого функцией $F(\lambda, T)$. Для такого состояния вовсе не необходимо, чтобы стенки оболочки были абсолютно черными. С таким же правом можно предположить, что они с внутренней стороны являются абсолютно отражающими и что источник излучения помещен где-то между ними. И он тоже может не быть абсолютно черным. Какова бы ни была природа тела, если только оно будет поддерживаться при раз навсегда выбранной температуре T, оно всегда может быть в равновесии с состоянием излучения, при котором каждый элемент объема содержит именно такое количество энергии, для которого мы только что вывели выражение (125). Мы можем добавить, что оно не только будет в равновесии с этим состоянием, но само будет его вызывать, при единственном условии, что тело обладает хоть какою-нибудь испускательной способностью, — как бы мала она ни была, — для всех лучей, длины волн которых входят в излучение черного тела при той же температуре. Если это условие выполнено, излучение в эфире не будет зависеть от природы вещества, которое это излучение вызывает, — оно будет функцией одной только температуры.

54. Уже Кирхгоф обратил особое внимание на важное значение функции $F(\lambda, T)$, которая должна быть независимой от специфических особенностей тела. И действительно, задача определения этой функции представляет в современной теоретической физике выдающийся интерес.

Больцман[1]) и Вин[2]) подошли к решению этого вопроса настолько, насколько это можно сделать, основываясь на одних только принципах термодинамики в сочетании с самыми общими результатами электромагнитной теории и оставляя в стороне всякие теоретические представления о природе излучающей и поглощающей материи.

Закон Больцмана говорит, каким образом приходящаяся на единицу объема полная энергия излучения, о которой мы говорили, — я имею в виду энергию для лучей всех длин волн, вместе взятых, — каким образом эта энергия зависит от температуры. Она пропорциональна четвертой степени *абсолютной* температуры; этот результат был, как эмпирическое правило, установлен уже Стефаном.

В своем доказательстве Больцман опирается на факт, что давление излучения равно той величине, которую мы вычислили ранее.

Рассмотрим замкнутую оболочку, абсолютно отражающую внутри и содержащую тело M, которое тем или иным способом получает или отдает тепло. Остальная часть объема содержит только эфир; предполагается, что стенки подвижны, так что заключенный в оболочке объем можно подвергать изменению.

Система, которую мы получили таким путем, во многих отношениях напоминает газ, заключенный в сосуде переменной емкости. Она является носителем определенной энергии; подобно газу, она производит давление на стенки; только в этом случае мы имеем дело не со столкновениями движущихся молекул, а с давлением излучения. Если стенки раздвигаются, система затрачивает на это движение некоторую работу. Если температура должна при этом оставаться постоянной, необходим приток тепла; температура понижается при расширении, если процесс

---

[1]) L. Boltzmann, Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie, Ann. Phys. Chem. **22** (1884), стр. 291.

[2]) W. Wien, Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz des Wärmetheorie, Berlin. Sitzungsber. 1893, стр. 55.

адиабатен. Вы легко можете видеть, что можно заставить систему проделать цикл процессов, два из которых являются изотермическими, а два — адиабатными; к ним можно приложить хорошо известный закон Карно.

Я не буду придумывать такого цикла, но произведу небольшое вычисление, которое приведет нас к тому же результату. Во всех случаях, когда состояние системы определяется температурой T и объемом v и когда единственная сила, вызываемая системой, есть нормальное давление p, равномерно распределенное по поверхности, существует простое термодинамическое соотношение, при помощи которого мы можем кое-что узнать о внутренней энергии ε. Если мы возьмем за независимые переменные v и T, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p. \tag{126}$$

Его можно применить к нашей оболочке, заполненной лучами, так же, как к газу; в некотором отношении случай излучения является даже более простым. Причина этого заключается в том, что плотность энергии зависит только от температуры, так что при изотермическом расширении новая часть, которая добавляется к объему, немедленно заполняется количеством энергии, пропорциональным этому объему. Энергия, содержащаяся в объеме, который уже был занят излучением, остается без изменения; то же самое можно сказать и про энергию, содержащуюся внутри тела M. Чтобы убедиться в этом, мы должны иметь в виду, что, согласно § 21, давление равно одной трети электромагнитной энергии на единицу объема, так что на тело все время действует одно и то же давление, и так как температура тоже остается постоянной, тело вообще не претерпевает никаких изменений.

Обозначим через K электромагнитную энергию на единицу объема; эту энергию можно представить следующим образом (так как мы должны брать энергию для всех длин волн):

$$K = \int_0^\infty F(\lambda, T)\, d\lambda,$$

Тогда мы будем иметь

$$p = \frac{1}{3} K$$

и

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = K,$$

так как, если объем увеличивается на dv, энергия увеличивается на $K dv$. Подставляя в формулу (126), получаем:

$$K = \frac{1}{3} T \frac{dK}{dT} - \frac{1}{3} K,$$

$$4K = T \frac{dK}{dT},$$

$$\frac{dK}{K} = 4 \frac{dT}{T},$$

откуда интегрированием получаем:

$$K = CT^4,$$

где C есть некоторая постоянная. Полная энергия единицы объема, или, как мы можем сказать на основании (125), полная испускательная способность черного тела, должна быть пропорциональна четвертой степени температуры.

55. Переходя теперь к закону Вина, я прежде всего покажу, в каком виде он может быть представлен, если мы будем пользоваться законом Больцмана. Вину не удалось определить вид функции $F(\lambda, T)$; этого действительно нельзя сделать при помощи одних только термодинамических рассуждений и электромагнитных принципов; но он показал нам, каким образом, если вид функции известен для какой-нибудь одной температуры, его можно отсюда определить для всякой другой температуры.

Это можно выразить следующим образом. Если T и T' суть две различные температуры, λ и λ' — две длины волны, такие, что

$$\lambda : \lambda' = T' : T, \tag{127}$$

мы получим

$$F(\lambda,\ T) : F(\lambda',\ T') = \lambda'^5 : \lambda^5. \tag{128}$$

Если мы представим этот результат в виде

$$F(\lambda',\ T') = \frac{T'^5}{T^5} F\left(\frac{T'}{T}\lambda',\ T\right),$$

мы увидим, что действительно $F(\lambda', T')$ может быть определена для всех значений λ', если мы знаем $F(\lambda, T)$ для всех значений λ.

Из (127) и (128) можно также вывести, что если, меняя λ и T, мы будем оставлять произведение λT постоянным, функция $\lambda^5 F(\lambda, T)$ тоже должна оставаться неизменной. Поэтому это последнее выражение должно быть какой-то функцией $f(\lambda T)$ от произведения длины волны и температуры, так что наша первоначальная функция должна иметь вид

$$F(\lambda,\ T) = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T). \tag{129}$$

Соотношение между видами функции $F(\lambda, T)$ для различных температур выводится чрезвычайно изящно. Если для определенной температуры T мы изобразим значения $F(\lambda, T)$ графически, откладывая по оси абсцисс λ, а по оси ординат F, мы получим некоторую кривую, которую можно считать кривой распределения энергии в спектре черного тела температуры T. Из нее мы можем получить соответствующую кривую для температуры T', изменяя все абсциссы в отношении T' к T, а ординаты — в отношении T^5 к T'^5.

Вид этой кривой был определен с достаточной степенью точности измерениями Луммера и Прингсгейма [1]). Представление о ней можно получить по рис. 2. На этой кривой видно, что, как и следовало ожидать, интенсивность мала для очень длинных и для очень коротких волн, достигая максимума для определенной длины волны, которая на рисунке изображается отрезком OA и которую мы назовем λ_m. Пусть теперь кривая будет претерпевать

[1]) O. Lummer u. E. Pringsheim, Die Strahlung eines schwarzen Körpers zwischen 100 und 1300° C, Ann. Phys. Chem. **63** (1897), стр. 395; Die Verteilung der Energie im Spektrum des schwarzen Körpers, Verh. d. deutschen phys. Ges. **1** (1899), стр. 23.

изменения того вида, о котором я только что говорил; тогда этот максимум будет сдвинут направо, если T' меньше, чем T, и налево в противоположном случае, так как значение λ_m согласно (127) обратно пропорционально температуре. По этой причине закон Вина часто называют законом смещения (Verschiebungsgesetz).

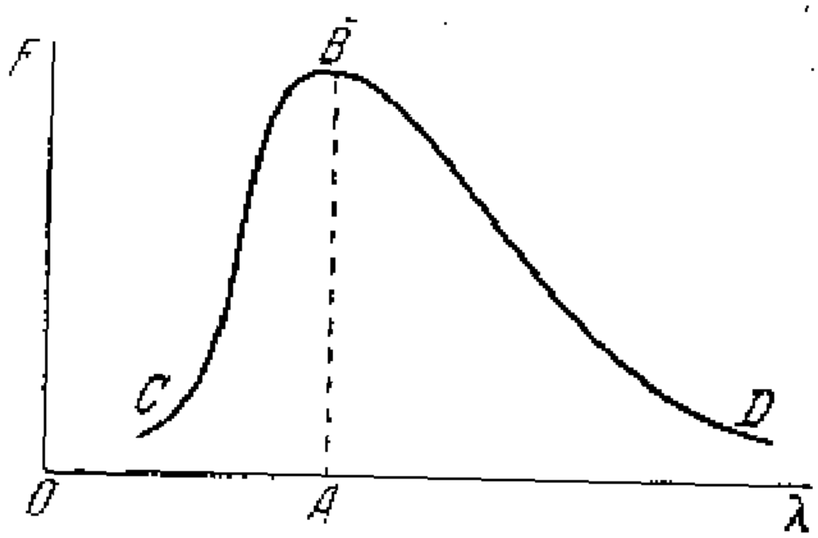

Рис. 2.

Этой кривой можно также воспользоваться, чтобы показать, что закон Больцмана включен в формулы (127) и (128). Значение K дается полной площадью, заключенной между кривой и осью абсцисс, и эта площадь изменяется в отношении T^4 к T'^4, когда абсциссы и ординаты изменяются так, как это было указано выше.

56. Подробное рассмотрение теоретических выводов, при помощи которых Вин пришел к своему закону, отняло бы у нас слишком много времени. Так же как и в рассуждениях Больцмана, мы можем и здесь отличать две части, одна из которых основывается на уравнениях электромагнитного поля, а другая имеет чисто термодинамический характер.

Мы видели выше, что для каждой температуры T имеется некоторое вполне определенное состояние излучения в эфире, которое обладает свойством быть в равновесии с весомыми телами температуры T. Для краткости я буду называть это состояние *естественным состоянием* излучения для температуры T. Оно характеризуется определенным количеством энергии в единице объема K, пропорциональным T^4. Этим количеством можно поэтому пользоваться вместо самого T для определения состояния эфира. Когда мы впредь будем говорить о естественном состоянии излучения с плотностью энергии K, мы будем в точности знать, что эти слова означают.

Полная энергия распределена в этом естественном состоянии по различным длинам волн определенным образом;

это распределение выражается функцией $F(\lambda, T)$. Мы можем, конечно, представить себе другие состояния с той же плотностью энергии K, но с иным распределением энергии по длинам волн, чем в естественном состоянии; так, например, энергия длинных волн может быть несколько меньше, а энергия коротких волн несколько больше, чем это имело бы место в естественном состоянии.

Вин рассматривает случай замкнутой оболочки, абсолютно отражающей внутри и содержащей только эфир. Он предполагает, что этот эфир является носителем естественного состояния излучения A, с плотностью энергии K. Это излучение могло быть образовано телом температуры T, временно помещенным внутри оболочки и затем каким-нибудь образом оттуда удаленным. Конечно, такая операция потребовала бы сверхчеловеческой экспериментальной ловкости и исключительной быстроты, но мы все же можем предположить, что она была проведена успешно. Если мы затем предоставим сосуд самому себе, излучение, заключенное в нем, будет существовать вечно, так как лучи будут все вновь и вновь отражаться от стенок, без изменения длины волны и интенсивности.

Теперь Вин производит мысленный эксперимент, который может изменить положение вещей. Этот эксперимент заключается в том, что стенки приводятся в слабое движение, в результате которого внутренний объем увеличивается или уменьшается. Мы уже видели (§ 46), что отодвигание зеркала, на которое нормально падает пучок лучей, сказывается на отраженных лучах двояким образом: понижается их частота, так что длина волны увеличивается, и уменьшается амплитуда. То же самое будет иметь место, хотя и в меньшей степени, если лучи падают не нормально, но под углом; легко вычислить эффект и в этом случае.

Чтобы остановиться на каком-нибудь определенном случае, предположим, что стенки нашего сосуда раздвигаются. Тогда, при каждом отражении луча света, уменьшается его амплитуда и увеличивается длина волны, так что по истечении некоторого промежутка времени мы получим новое состояние излучения B, отличающееся от первоначального энергией в единице объема и распределением энергии по длинам волн. Значение плотности энергии будет некоторое K', — меньшее, чем первоначальное значение K, — и распределение по длинам волн будет несколько изменено в пользу более длинных волн.

Конечно, K' может принимать различные значения, так как расширение, при помощи которого получено новое состояние, может быть разной величины. Так как, однако, изменение амплитуд тесно связано с соответствующим изменением длины волны, ясно, что распределение энергии по длинам волн должно быть совершенно определенным, если известно K', так что Вин мог его вычислить. Его результат может быть выражен следующим образом [1]. Если

$$\varphi(\lambda)\, d\lambda \tag{130}$$

есть та часть первоначальной энергии единицы объема, которая принадлежит лучам с длинами волн между λ и $\lambda + d\lambda$, то количество энергии, соответствующее тому же самому интервалу в новом состоянии B, дается выражением

$$\sqrt[4]{\left(\frac{K'}{K}\right)^5} \cdot \varphi\left(\sqrt[4]{\frac{K'}{K}} \cdot \lambda\right) d\lambda. \tag{131}$$

57. Я думаю, что мне удалось дать вам достаточно ясную картину одной части доказательства закона Вина. Что касается второй части, термодинамической, ее целью является показать, что новое состояние B, которому соответствует плотность энергии K', не может отличаться от *естественного* состояния излучения с тем же самым K', что оно само должно быть поэтому естественным состоянием. Если бы это было не так, мы могли бы поместить наш сосуд с состоянием B рядом с другим сосудом, содержащим излучение, в естественном состоянии A' с той же самой плотностью K', причем оба состояния вначале должны быть разделены друг от друга стенками обоих сосудов. Затем мы могли бы проделать в этих стенках отверстие и немедленно его закрыть очень тонкой пластинкой какого-

[1] Примечание **30**.

нибудь прозрачного вещества. Такая пластинка пропустит часть падающих на нее лучей, причем, в силу общеизвестных явлений интерференции, коэффициент пропускания для лучей различной длины волны будет различен. Допустим, что он будет для длинных волн несколько больше, чем для коротких; допустим также, что в состоянии B по сравнению с состоянием A' имеется больше длинных волн и меньше коротких. Тогда легко видеть, что в первые моменты после того, как установлено сообщение между обоими сосудами, от B к A' перейдет больше энергии, чем в обратном направлении, так что количества энергии в обоих состояниях уже не будут равны друг другу. Можно показать, что это противоречит второму закону термодинамики.

Мы должны поэтому заключить, что при помощи выражения (131) можно вычислить распределение энергии в *естественном* состоянии, характеризуемом K', если из (130) известно распределение для естественного состояния, характеризуемого K. Так как оба состояния естественны, мы получим, если соответствующие им температуры обозначим через T и T', выражение

$$K : K' = T^4 : T'^4.$$

Поэтому (131) преобразуется в

$$\frac{T'^5}{T^5}\varphi\left(\frac{T'}{T}\lambda\right)d\lambda,$$

что и приводит к закону Вина в той форме, в которой я его вам дал выше.

58. Хотя Больцман и Вин добились крупных успехов в определении функции $F(\lambda, T)$, точная форма кривой рис. 2 все еще остается неизвестной, и так как средства термодинамики уже исчерпаны, мы можем надеяться достигнуть результата только в том случае, если нам удастся составить себе некоторое правильное мысленное представление о тех процессах, которые проявляются в явлениях излучения и поглощения.

Важное значение этой задачи будет понятно из следующих соображений. Для определения кривой рис. 2

необходимо по меньшей мере две постоянных. Если через λ_m обозначить абсциссу OA, которой соответствует максимальная ордината, по закону Вина получаем:

$$\lambda_m = \frac{a}{T},$$

и если, как и прежде, K обозначает полную площадь, заключенную между кривой и осью абсцисс, будем иметь:

$$K = bT^4.$$

Первая из этих постоянных (a) определяет, для данной температуры T, положение точки A, а вторая (b) относится к значениям ординат, так как, чем они больше, тем больше будет и площадь K. Так вот, если состояние излучения вызывается весомым телом, значения этих постоянных должны определяться чем-то связанным с самим строением этого тела, и эти величины могут иметь то общее значение, о котором мы говорили, только в том случае, если что-то общее есть у всех весомых тел. Если мы хотим вполне разобраться в форме и размерах кривой, мы должны открыть эти общие черты в строении всей весомой материи.

59. Я буду говорить о трех теориях, при помощи которых задача была решена по крайней мере частично, и начну с той, которая идет дальше всего. Она была разработана Планком [1]) и приводит к определенной формуле для функции $F(\lambda, T)$ в (129), а именно:

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}, \tag{132}$$

где ε есть основание натуральных логарифмов, а h и k являются двумя универсальными физическими константами.

Теория Планка основана на предположении, что в каждом весомом теле содержится громадное число электромаг-

---

[1]) M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge, Ann Phys. 1 (1900), стр. 69; Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum, Ann. Phys. 4 (1901), стр. 553; Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität, там же, стр 564. См также его книгу: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, 1906.

нитных вибраторов, или, как он их называет, «резонаторов», каждый из которых обладает собственным периодом. Если какое-нибудь тело заключено в абсолютно отражающую оболочку, о которой мы так часто говорили, то будет существовать некоторое состояние равновесия, с одной стороны, между резонаторами и излучением в эфире, а с другой стороны, между резонаторами и обыкновенным тепловым движением молекул и атомов, из которых состоит весомая материя. Первое из этих состояний равновесия можно рассмотреть при помощи электромагнитных уравнений; чтобы понять второе, можно попытаться набросать картину обмена энергии между резонаторами и обыкновенными частичками. Планк, впрочем, не следовал этому пути, который привел бы нас к весьма серьезным трудностям; он пришел к своей формуле путем рассуждений совершенно другого рода.

В одной из своих статей он выводит эту формулу, рассматривая, какое распределение энергии между двумя родами частичек — молекулами и резонаторами — следует считать наиболее вероятным. Конечно, нужно точно установить смысл полученного им выражения, прежде чем класть его в основу теории. Я должен воздержаться от объяснения того смысла, который ему придавал Планк. Есть, впрочем, в его теории один пункт, на котором я должен на короткое время остановиться. Планк принужден допустить, что поглощение и отдача энергии резонаторами происходит не плавно, бесконечно малыми количествами, а, наоборот, некоторыми порциями определенной конечной величины. Для резонаторов различной частоты принимаются порции различной величины. Величина порций энергии, которые мы должны мысленно представлять себе, когда говорим о резонаторе частоты n, определяется выражением

$$\frac{hn}{2\pi}.$$

Таким именно путем вводится в уравнения постоянная h.

Что касается постоянной k, она имеет весьма простое физическое значение. По кинетической теории газов средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы одинакова для всех газов, взятых при одной температуре. Эта средняя энергия пропорциональна T, и если мы ее выразим через $\frac{3}{2}kT$, величина k будет как раз той постоянной, которая появляется в формуле (132).

Закон Планка находится в прекрасном согласии с экспериментальными результатами Луммера и Прингсгейма, а это очень важно, так как благодаря этому мы получаем возможность вывести из измерений излучения среднюю кинетическую энергию молекулы, которая в свою очередь приводит нас к величине массы атомов в абсолютной мере. Так как числа, полученные таким путем [1]), оказываются того же порядка величины, как полученные другими способами, ясно, что в этой теории, несомненно, заключается значительная доля истины. Конечно, она ни в какой мере не послужила для того, чтобы раскрыть механизм явлений; следует также признать, что весьма трудно найти оправдание для такого представления о распределении энергии порциями конечной величины, которые даже не равны друг другу, но меняются от резонатора к резонатору [2]) [18].

60. Я остановлюсь несколько дольше на второй теории [3]), так как она является применением теории электронов и потому непосредственно относится к моему предмету. До известной степени, по моему мнению, ее можно считать удовлетворительной, но она обладает одним большим недостатком — тем, что ограничивается областью длинных волн. Прошу разрешить мне рассказать вам в качестве введения, путем каких рассуждений я пришел к этой теории.

Известно, что оптические свойства весомых тел, вообще говоря, нельзя вывести из их электрических свойств количественно с достаточной точностью. Правда, например,

---

[1]) Примечание **31**.

[2]) После того как это было написано, «квантовая» теория Планка получила широкое развитие. Она теперь занимает выдающееся место во многих отделах теоретической физики (1915).

[3]) L o r e n t z, On the emission and absorption by metals of rays of heat of great wave-lengths, Amsterdam Proc., 1902—1903, стр. 666.

теоретическое указание Максвелла (оно имеется уже в его «Трактате»), что хорошие проводники электричества должны быть непрозрачными для света, подтверждается тем фактом, что металлы пропускают свет весьма мало; но если мы сравним оптические константы какого-нибудь металла — одной из таких констант является коэффициент поглощения металла — с формулами электромагнитной теории света и если при этом для проводимости примем обычные значения, которые получаются при измерениях с электрическим током, мы получим весьма большое несогласие. Как это несогласие, так и расхождение между показателем преломления диэлектриков и корнем квадратным из их диэлектрической постоянной показывают, что для весьма быстрых световых колебаний начинают играть роль такие обстоятельства, которые не оказывают влияния в наших опытах с постоянными токами или переменными токами малой частоты.

Если эта мысль правильна, то можно надеяться, что совпадение будет лучше, если рассматривать эти «оптические» свойства, как мы попрежнему будем их называть, не для световых лучей, а для инфракрасных лучей наибольших известных нам длин волн.

И вот классические измерения поглощения, произведенные Гагеном и Рубенсом [1]), блестяще подтвердили это предположение. Эти физики показали, что поглощение лучей длины волны между 8 и 25 микронами можно вычислить со значительной степенью точности из данных об их проводимости [2]). Отсюда мы можем сделать такое заключение: для того чтобы получить теорию поглощения в случае этих длинных волн, нужно только понять природу обыкновенного тока проводимости. Мало того, если таким путем нам удастся составить себе картину поглощения, мы получим при этом также возможность заглянуть глубже внутрь того механизма, посредством которого происходит испускание металлом лучей. Действительно, универсальность закона Кирхгофа ясно показывает, что те причины, которые

---

[1]) E. Hagen u. H. Rubens, Über Beziehungen des Reflexions und Emissionsvermögens der Metalle zu ihrem elektrischen Leitvermögen, Ann. Phys. **11** (1903), стр. 873.

[2]) Примечание **32**.

вызывают поглощение тепла, и те, которые вызывают его излучение, должны находиться в тесной связи друг с другом. Поэтому, раз мы составим себе правильное представление об обыкновенном токе проводимости, то можно надеяться, что нам удастся объяснить поглощение и испускательную способность металла и вычислить отношение между этими величинами, т. е. нашу универсальную функцию $F(\lambda, T)$. Впрочем, мы можем надеяться на успех только в том случае, если ограничимся длинными волнами.

Но мы уже видели, что весьма удовлетворительное представление о природе тока проводимости было разработано Друде. Мы должны поэтому постараться получить такую теорию поглощения и излучения металлов, которая основывается на установленных им общих принципах и в которой просто предполагается, что металл содержит весьма большое число свободных электронов, движущихся с такими скоростями, что их средняя кинетическая энергия равна αT.

61. При этом мы, насколько возможно, упростим все условия задачи. Мы будем рассматривать металлическую пластинку, толщина которой Δ весьма мала, так что можно принять поглощение пропорциональным этой толщине и пренебрегать при исследовании испускания тем поглощением, которое лучи, исходящие из задней части пластинки, испытывают, проходя через слой, лежащий на ее передней стороне. Мы ограничимся также лучами, направление которых нормально к пластинке или образует с нормалью бесконечно малый угол. Эти предположения значительно упростят наши вычисления, не умаляя общности окончательного результата. Если закон Кирхгофа справедлив, то значение, которое мы получим для отношения поглощательной и испускательной способностей, должно иметь место для всех тел и для всех направлений лучей.

Вычисление поглощения производится весьма простым способом. На основании обычных формул электромагнитного поля находим для коэффициента поглощения [1])

$$A = \frac{\sigma}{c}\Delta,$$

[1]) Примечание 33.

и здесь нам остается только подставить значение σ из теории Друде. Пользуясь формулой (119), находим:

$$A=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\frac{e^2lNu}{\alpha cT}\Delta. \tag{133}$$

62. Возникает вопрос, каким образом кусок металла, в котором свободные электроны движутся во всевозможных направлениях, может быть источником излучения. Ответ заключается в выводах одной из предыдущих лекций. Мы знаем, что электрон может стать центром испускания энергии только в том случае, когда изменяется его скорость. Причину излучения следует искать поэтому в столкновениях электрона с атомами металла, причем электрон отскакивает в новом направлении; таким образом испускание тепловых лучей в рассматриваемом нами случае весьма напоминает возникновение лучей Рентгена, как его объясняют теории Вихерта и Дж. Дж. Томсона.

Математические выкладки, необходимые для определения эффектов столкновений электронов с атомами, довольно сложны, в особенности потому, что мы должны разлагать полное излучение на отдельные части, соответствующие различным длинам волн. Я дам поэтому только общее понятие о ходе вычислений.

Я должен заметить с самого начала, что разложение, о котором я только что говорил, должно быть произведено на основании теоремы Фурье и что продолжительность столкновения следует считать бесконечно малой по сравнению с периодом колебания рассматриваемых лучей. То же самое допущение мы сделаем также по отношению ко всему промежутку времени между двумя последовательными ударами электрона. Правильность этого допущения подтверждена опытами Гагена и Рубенса. Легко видеть, что проводимость металла может быть выражена формулой (119) только в том случае, если электрическая сила действует на тело или непрерывно, или по крайней мере в течение такого промежутка времени, за который электрон может испытать весьма большое число столкновений. Поэтому результат, полученный Гагеном и Рубенсом, а именно, что поглощение соответствует величине проводимости, доказывает, что за промежуток времени, в течение которого электрическая сила имеет одно направление, — иначе говоря, за половину периода, — происходит весьма большое число отдельных столкновений.

63. В § 51 мы рассматривали излучение, распространяющееся от тела M через две бесконечно малые площадки ω и ω'. Предположим теперь, что первая из этих площадок расположена на передней поверхности тонкой металлической пластинки, и займемся вопросом об излучении, которое исходит из соответствующей части пластинки $\omega\Delta$ и направлено к элементу площади ω'. Будем считать, что этот элемент расположен параллельно ω в точке P на прямой, проведенной нормально к пластинке из центра O элемента ω. Для начала мы примем во внимание только электрические колебания, происходящие в некотором направлении h, перпендикулярном к OP.

Возьмем за начало координат точку O, причем ось z направим по OP, ось x — по направлению h; расстояние OP обозначим через r. На основании сказанного в § 39 отдельный электрон, движущийся в рассматриваемой части пластинки со скоростью v, вызовет в точке P диэлектрическое смещение, первая составляющая которого дается выражением

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r}\frac{dv_x}{dt},$$

если мы возьмем значение производной для соответственно выбранного момента.

На основании нашего допущения о толщине пластинки этот момент времени для всех электронов части $\omega\Delta$ может быть представлен выражением $t-\frac{r}{c}$, где t есть момент времени, для которого мы хотим знать состояние в точке P. Мы можем поэтому написать для первой составляющей диэлектрического смещения в P

$$d_x = -\frac{1}{4\pi c^2 r}\left(\sum e\frac{dv_x}{dt}\right)_{t-\frac{r}{c}}. \qquad (134)$$

димости, доказывает, что за промежуток времени, в течение которого электрическая сила имеет одно направление, — иначе говоря, за половину периода, — происходит весьма большое число отдельных столкновений.

63. В § 51 мы рассматривали излучение, распространяющееся от тела M через две бесконечно малые площадки ω и ω'. Предположим теперь, что первая из этих площадок расположена на передней поверхности тонкой металлической пластинки, и займемся вопросом об излучении, которое исходит из соответствующей части пластинки $\omega\Delta$ и направлено к элементу площади ω'. Будем считать, что этот элемент расположен параллельно ω в точке P на прямой, проведенной нормально к пластинке из центра O элемента ω. Для начала мы примем во внимание только электрические колебания, происходящие в некотором направлении h, перпендикулярном к OP.

Возьмем за начало координат точку O, причем ось z направим по OP, ось x — по направлению h; расстояние OP обозначим через r. На основании сказанного в § 39 отдельный электрон, движущийся в рассматриваемой части пластинки со скоростью $\mathfrak{v}$, вызовет в точке P диэлектрическое смещение, первая составляющая которого дается выражением

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt},$$

если мы возьмем значение производной для соответственно выбранного момента.

На основании нашего допущения о толщине пластинки этот момент времени для всех электронов части $\omega\Delta$ может быть представлен выражением $t-\frac{r}{c}$, где t есть момент времени, для которого мы хотим знать состояние в точке P. Мы можем поэтому написать для первой составляющей диэлектрического смещения в P

$$\mathfrak{d}_x = -\frac{1}{4\pi c^2 r}\left(\sum e\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt}\right)_{t-\frac{r}{c}}. \tag{134}$$

Поток энергии через ω' в единицу времени будет:

$$c d_x^2 \omega'.$$

Так как движение электронов между атомами металла является в высшей степени неправильным, мы получим для ряда быстро сменяющих друг друга моментов времени большое число столкновений, при которых изменения скорости будут отличаться друг от друга в весьма широких пределах. Эта неправильность отразится и на состоянии в точке P, обусловленном всеми этими столкновениями. Несмотря на это, мы должны постараться извлечь из относящихся к этому состоянию формул такие выводы, которые относились бы к величинам, наблюдаемым в действительных опытах.

Такие выводы можно получить, если рассматривать *средние* значения переменных, вычисленные для достаточно больших промежутков времени. Допустим, что такой промежуток времени простирается от $t=0$ до $t=\vartheta$. Если среднее значение d_x^2 обозначить через $\overline{d_x^2}$, то для потока энергии через ω' (поток этот доступен нашим наблюдениям) мы получим выражение

$$c\overline{d_x^2}\omega' = c\omega' \frac{1}{\vartheta}\int_0^\vartheta d_x^2\, dt. \tag{135}$$

64. Введение этого большого промежутка времени является весьма полезным также и при применении теоремы Фурье. Каким бы путем ни изменялась от одного момента времени к другому величина d_x, мы всегда можем разложить ее в ряд по формуле

$$d_x = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \sin\frac{s\pi t}{\vartheta}, \tag{136}$$

где s есть целое положительное число и каждый из коэффициентов a_s определяется выражением

$$a_s = \frac{2}{\vartheta}\int_0^\vartheta \sin\frac{s\pi t}{\vartheta}\, d_x\, dt. \tag{137}$$

Из (136) вытекает, что частота, соответствующая члену с индексом s, определяется формулой

$$n = \frac{s\pi}{\vartheta};$$

соответствующая длина волны дается выражением

$$\lambda = \frac{2\pi c}{n} = \frac{2c\vartheta}{s}. \tag{138}$$

Так как интервал ϑ весьма велик, значения λ, относящиеся к малым значениям s, тоже велики; впрочем, нам не придется говорить об этих весьма длинных волнах, так как можно ожидать, что они будут составлять только незначительную часть всего излучения. Длины волн, с которыми мы будем иметь дело, будут иметь своим верхним пределом некоторую длину волны λ_0; поэтому, если только промежуток времени ϑ (который мы можем выбрать сколь угодно большим) достаточно велик, они будут соответствовать весьма большим значениям числа s. Далее, если λ_s и λ_{s+1} суть две последовательные длины волны, получим:

$$\frac{\lambda_s - \lambda_{s+1}}{\lambda_s} = 1 - \frac{s}{s+1} = \frac{1}{s+1},$$

что является весьма малым числом. Мы видим, таким образом, что длины волн, соответствующие последовательным членам нашего ряда, убывают чрезвычайно медленно. Это значит, что при разложении излучения, представляемого формулой (136), в спектр мы получим весьма большое число линий, расположенных очень близко друг к другу. Увеличивая величину промежутка времени ϑ и значение s, соответствующее интересующей нас части спектра, можно уменьшать расстояние между отдельными линиями до бесконечности. Таким именно путем мы можем вывести из наших формул самый факт существования сплошного спектра и относящиеся к нему законы.

Пусть λ и $\lambda + d\lambda$ будут две длины волны, про которые можно сказать, что они, с физической точки зрения, лежат друг к другу бесконечно близко. Если в нужной степени увеличивать ϑ, то часть спектра, соответствующая $d\lambda$, будет содержать большое число спектральных линий, а именно

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda^2}\,d\lambda.$$

Это станет ясным, если, написав (138) в виде

$$s=\frac{2c\vartheta}{\lambda},$$

мы заметим, что число линий равно числу целых чисел, лежащих в пределах

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda+d\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{2c\vartheta}{\lambda};$$

за это число мы можем взять разность

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

так как в силу нашего допущения эта разность много больше чем единица.

Мы должны теперь подставить значение (136) в уравнение (135). Легко видеть, что произведение двух членов в ряде для d_x дает нуль, если произвести интегрирование по времени в пределах от нуля до ϑ. Далее,

$$\int\limits_0^{\vartheta}\sin^2\frac{s\pi t}{\vartheta}\,dt=\frac{1}{2}\,\vartheta,$$

и (135) приобретает вид

$$c\overline{d_x^2}\,\omega'=\frac{1}{2}\,c\omega'\sum_{s=1}^{s=\infty}a_s^2. \tag{139}$$

Это есть выражение для полного потока энергии через ω'. Чтобы найти ту часть этого потока, которая соответствует длинам волн в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, нам нужно только заметить, что $\frac{2c\vartheta}{\lambda^2}\,d\lambda$ спектральным линиям, лежащим внутри этого интервала, можно приписать одинаковую интенсивность [1]).

[1]) Примечание 34.

Другими словами, можно принять, что величина a_s имеет для каждой из них одно и то же значение, так что в сумму в выражении (139) они привносят следующую величину:

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda^2} a_s^2 \, d\lambda.$$

Следовательно, та часть потока энергии, которая относится к интервалу длин волн $d\lambda$, дается выражением

$$\frac{c^2\vartheta\omega'}{\lambda^2} a_s^2 \, d\lambda. \qquad (140)$$

Если теперь нам удастся вычислить a_s^2, мы тем самым решим нашу задачу.

65. Нижеследующие математические выкладки являются несколько более строгими, чем те, которые приведены в моей статье по этому вопросу. Дело в том, что я введу теперь для распределения скоростей между электронами закон Максвелла и приму во внимание, что свободные пути имеют различную длину. В то же время я введу упрощение, которым я обязан Ланжевену [1]; благодаря ему мы будем в состоянии представить существо наших вычислений в очень сжатом виде.

На основании (134) и (137) мы видим, что

$$a_s = -\frac{1}{2\pi\vartheta c^2 r} \sum \left\{ e \int\limits_0^\vartheta \sin\frac{s\pi t}{\vartheta} \frac{d\,[v_x]}{dt}\, dt \right\}. \qquad (141)$$

Здесь квадратные скобки указывают, что значение v_x берется для момента времени $t - \frac{r}{c}$.

Смысл этого уравнения заключается в том, что мы должны прежде всего для одного определенного электрона вычислить интеграл, принимая во внимание все значения ускорения за промежуток времени от $-\frac{r}{c}$ до $\vartheta - \frac{r}{c}$.

---

[1]) См. сделанный Ланжевеном перевод моей статьи в книге H. Abraham et P. Langevin, Les quantités élémentaires d'électricité, ions, électrons, corpuscules, Paris (1905), 1, стр. 507

После этого нам надлежит взять сумму всех значений, полученных таким путем для всех свободных электронов, которые содержатся в части пластинки $\omega\Delta$.

Интегрируя по частям, мы, имея в виду, что $\sin\frac{s\pi t}{\vartheta}$ пропадает на пределах, находим, что

$$a_s = \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r}\sum\left\{\int_0^\vartheta [v_x]\cos\frac{s\pi t}{\vartheta}\,dt\right\}; \tag{142}$$

иначе, понимая под v_x значение в момент времени t, можем написать также:

$$a_s = \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r}\sum\left\{\int_{-\frac{r}{c}}^{\vartheta-\frac{r}{c}} v_x\cos\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right)dt\right\}.$$

Догадавшись воспользоваться приемом интегрирования по частям, мы сводим нашу задачу к другой, гораздо более простой. Если бы мы вычисляли интеграл (141) непосредственно, мы должны были бы особо учесть те промежутки времени, в течение которых электрон подвергается действию силы, заставляющей его отскакивать от атома, с которым он сталкивается; действительно, электрон обладает ускорением только в течение этих промежутков времени. С другой стороны, интеграл (142) состоит из частей, которые относятся не только к моментам столкновений, но также и ко всем промежуточным интервалам. Если мы примем, что продолжительность столкновения много меньше, чем промежуток времени между двумя последовательными столкновениями электрона, мы можем смело ограничиться только теми промежутками, которые соответствуют свободным пробегам между этими соударениями.

Пока электрон пробегает один из этих свободных путей, его скорость имеет постоянную величину v_x. Мы можем также пренебречь изменением множителя

$$\cos\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

так как, по предположению, время между двумя столкновениями гораздо меньше, чем период колебания, соответствующего s. Поэтому та часть a_s, которая соответствует одному электрону и времени, в течение которого он пробегает один из своих свободных путей, дается выражением

$$\frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r}\tau v_x \cos\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

где под τ мы понимаем время пробега по этому пути. В последнем множителе мы можем взять за t значение, соответствующее середине промежутка τ.

Теперь мы должны принять во внимание все отдельные пробеги всех электронов за время ϑ. Если мы обозначим сумму, относящуюся ко всем этим свободным пробегам, через S, то получим:

$$a_s = \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r} S\left\{\tau v_x \cos\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right)\right\}. \tag{143}$$

66. Нам нужно теперь определить квадрат суммы S. Это сделать довольно легко, так как произведения двух членов

$$\tau v_x \cos\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

взятые все вместе, дадут нуль независимо от того, чему они соответствуют: двум различным свободным путям одного и того же электрона или двум путям, описываемым различными электронами. Действительно, скорости двух электронов совершенно не зависят друг от друга; то же относится и к скоростям одного определенного электрона в два момента времени, между которыми он испытал одно или несколько столкновений [1]). А так как положительные и отрицательные значения v_x распределены между членами (143) вполне случайно, то положительные и отрицательные знаки в произведении двух членов будут одинаково вероятны.

---

[1]) Примечание 35.

Итак, мы видим, что нам остается только вычислить сумму квадратов отдельных членов, так что получаем:

$$a_s^2 = \frac{s^2e^2}{4\vartheta^4c^4r^2} S\left\{\tau^2 v_x^2 \cos^2\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right)\right\}.$$

Далее, так как неправильное движение электронов происходит в различных направлениях с одной и той же интенсивностью, мы можем v_s^2 заменить через $\frac{1}{3}v^2$. Поэтому, обозначая длину свободного пути $\tau|v|$ буквой l, получаем:

$$a_s^2 = \frac{s^2e^2}{12\vartheta^4c^4r^2} S\left\{l^2 \cos^2\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right)\right\}.$$

В том громадном числе членов, из которых состоит сумма, длина l имеет весьма различные значения; поэтому, чтобы произвести суммирование, мы можем начать с рассмотрения только таких членов, в которых она имеет некоторое определенное значение. В этих членах, тоже очень многочисленных, угол

$$\frac{s\pi}{\vartheta}\left(t+\frac{r}{c}\right)$$

приобретает значения, которые распределены в интервале от нуля до $s\pi$ по закону случайности. Квадрат косинуса можно поэтому заменить его средним значением $\frac{1}{2}$, так что

$$a_s^2 = \frac{s^2e^2}{24\vartheta^4c^4r^2} S(l^2). \tag{144}$$

67. Так как атомы металла предполагаются неподвижными, скорость электрона при столкновении не меняется. Мы можем поэтому остановиться на некоторой определенной группе электронов, которые движутся по своим ломаным траекториям с определенной скоростью u. За время ϑ одна какая-нибудь из этих частичек успевает пробежать по большому числу свободных путей; если l_m есть средняя длина пути, это число равно

$$\frac{u\vartheta}{l_m}.$$

Можно показать[1]), что число пробегов, длина которых лежит в пределах от l до $l+dl$, равно

$$\frac{u\vartheta}{l_m^2}\varepsilon^{-\frac{l}{l_m}}dl,$$

так что

$$\frac{u\vartheta}{l_m^2}l^2\varepsilon^{-\frac{l}{l_m}}dl$$

представляет собой часть суммы $S(l^2)$, привносимую этими отрезками пути. Интегрируя по l от нуля до ∞, получаем для значения $S(l^2)$, поскольку оно вызывается одним электроном:

$$2\vartheta u l_m. \qquad (145)$$

Общее число электронов, находящихся в рассматриваемой части металлической пластинки, равно $N\omega\Delta$, и по закону Максвелла из них

$$4\pi N\omega\Delta\sqrt{\frac{q^3}{\pi^3}}\varepsilon^{-qu^2}u^2\,du \qquad (146)$$

имеют скорости от u до $u+du$, причем постоянная q связана со скоростью u_m, квадрат которой равен среднему значению u^2, выражением

$$q=\frac{3}{2u_m^2}.$$

Чтобы найти полное значение $S(l^2)$, мы должны перемножить (145) и (146) и проинтегрировать произведение от $u=0$ до $u=\infty$. Предполагая, что l_m имеет одно и то же значение для всех значений u[2]), получаем:

$$S(l^2)=\frac{4\vartheta}{\sqrt{\pi q}}l_m N\omega\Delta=4\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\vartheta l_m N u_m\omega\Delta.$$

В конце концов уравнение (144) можно написать так:

$$a_\lambda^2=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\frac{s^2e^2l_mNu_m}{6\vartheta^3c^4r^2}\omega\Delta,$$

---

[1]) Примечание 36.
[2]) Примечание 37.

а выражение (140) для излучения через элемент ω' приобретает вид

$$\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{s^2 e^2 l_m N u_m}{6\vartheta^2 c^2 r^2 \lambda^2} \omega\omega' \Delta \, d\lambda,$$

или в силу (138), если вместо l_m, u_m мы напишем просто l, u:

$$\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2 l N u}{r^2 \lambda^4} \omega\omega' \Delta \, d\lambda.$$

Это есть выражение для энергии, излучаемой в единицу времени, поскольку она обусловлена длинами волн от λ до $\lambda + d\lambda$ и составляющими колебаний по направлению h. Следовательно, величина, которую мы вычислили, есть та самая величина, которая представлена в выражении (121); сравнивая оба выражения, получаем для испускательной способности пластинки:

$$E = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2 l N u}{\lambda^4} \Delta. \qquad (147)$$

68. Нам нужно теперь комбинировать эту величину с выведенным нами выше значением (133) для поглощения. Если закон Кирхгофа имеет место, отношение $\frac{E}{A}$ не должно зависеть от тех величин, которые отличают одну металлическую пластинку от другой. Мы видели, что это действительно так, так как число электронов в единице объема N, средняя длина их свободных путей l и толщина пластинки Δ в отношение не входят. Мы действительно получаем для $\frac{E}{A}$ и для $F(\lambda, T)$ значения, которые не зависят от индивидуальных свойств рассматриваемого весомого тела. Я должен, впрочем, повторить, что все наши рассуждения справедливы только по отношению к длинным волнам.

Пользуясь формулами (125), (133) и (147), получаем:

$$F(\lambda, T) = \frac{16\pi\alpha T}{3\lambda^4}\,[1]. \qquad (148)$$

---

[1] Эта формула принадлежит лорду Рэлею [Phil. Mag. 49 (1900), стр. 539]. См. § 69.

Весьма замечательно, что эта функция имеет тот же вид, что и в уравнении (129), и что наш результат находится в точном согласии с результатом Планка. Это легко видеть, если предположить, что произведение λT в (132) имеет весьма большое значение, так что показатель степени весьма мал. Тогда мы можем положить:

$$\varepsilon^{\frac{ch}{k\lambda T}} = 1 + \frac{ch}{k\lambda T},$$

и выражение (132) превращается в

$$F(\lambda,\ T) = \frac{8\pi k T}{\lambda^4}\ [^{19}].$$

Это выражение совпадает с (148), так как наш коэффициент α соответствует $\frac{3}{2} k$ в обозначениях Планка. Как уже было установлено, средняя кинетическая энергия молекулы газа равна $\frac{3}{2} kT$, а мы обозначили ее через αT [1]).

69. Совершенно другая теория излучения черного тела была предложена Рэлеем и Джинсом [2]). Она основана на теореме так называемой эквипартиции (равномерного распределения) энергии; теорема эта имеет большое значение в кинетической теории газов и вообще в молекулярных теориях. В ее наиболее простой форме она была открыта Максвеллом в 1860 г.; впоследствии она была значительно расширена Больцманом, а Джинс подверг ее подробному рассмотрению в своей книге по кинетической теории газов.

Максвелла привели к этой теореме его теоретические исследования, касающиеся движения систем, состоящих из большого числа молекул. Если бы мы могли выделять из массы газа отдельные молекулы, мы нашли бы, что они движутся с весьма разнообразными скоростями и обладают весьма различными кинетическими энергиями. Средняя кинетическая энергия поступательного движения, взятая для достаточно большого числа молекул, будет, однако,

---

[1]) Примечание **38**.

[2]) J. H. Jeans, On the partition of energy between matter and aether, Phil. Mag. (6), **10** (1905), стр. 91.

в прилегающих друг к другу частях газа иметь одно и то же значение, если температура везде одна и та же, так что можно сказать, что эти участки находятся в равновесии. Это будет справедливо и в том случае, если газ находится под действием внешних сил, — например, силы тяжести, благодаря которой плотность изменяется от точки к точке. Точно так же, если у нас есть смесь двух газов, можно показать, что средняя кинетическая энергия молекулы для обеих составляющих имеет одно и то же значение, и мы можем совершенно уверенно утверждать, что и для газов, которые не смешаны, но помещены отдельно, это равенство средних кинетических энергий молекулы тоже является условием для температурного равновесия.

Можно выразить это положение иначе, если сказать, что кинетическую энергию газа в той части, которая обусловлена поступательным движением молекул, можно вычислить, если приписать каждой молекуле некоторое вполне определенное количество энергии, независимое от природы газа. Это количество энергии пропорционально абсолютной температуре T; поэтому его можно представить, как я уже неоднократно и делал, в виде αT, где α есть универсальная постоянная.

Мы можем дать этому результату и другое выражение. Предположим, что молекулы газа представляют собой идеально упругие и твердые гладкие шары; тогда единственный род движения, с которым мы имеем дело в этих вопросах, это — движение поступательное; положение частичек может поэтому быть определено координатами их центров x, y, z. Если N есть число молекул, для определения конфигурации всей системы потребуется $3N$ координат, или, как часто говорят, система имеет $3N$ степеней свободы. Каждой степени свободы, или каждой координате x, y или z, соответствуют определенная скорость $\dot{x}$, $\dot{y}$ или $\dot{z}$ и кинетическая энергия $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$. Полную энергию газа можно вычислить, если для кинетической энергии, соответствующей каждой степени свободы, принять $\frac{1}{3}\alpha T$. Множитель $\frac{1}{3}$ вводится здесь потому, что полная кинетическая энергия молекулы, среднее значение которой есть αT, является суммой величин $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$, соответствующих ее трем степеням свободы.

70. Этих замечаний достаточно, чтобы уяснить себе, что следует понимать под словами «эквипартиция» или «равномерное распределение» энергии в менее простых случаях. Конфигурация любого тела, т. е. положения тех мельчайших частичек, из которых оно, по предположению, построено, всегда может быть определена, каковы бы ни были связи между этими частичками, при помощи некоторого числа координат p в том обобщенном смысле, в каком этот термин употребляется Лагранжем; эти координаты часто могут быть выбраны таким образом, что кинетическая энергия равна сумме членов, каждый из которых пропорционален квадрату одной из скоростей $\dot{p}$, так что можно сказать, что она состоит из частей, соответствующих различным степеням свободы системы. Теорема равномерного распределения энергии говорит нам, что если температура есть T, кинетическую энергию системы, имеющей весьма большое число степеней свободы, как это имеет место для всех тел, мы найдем, если каждой степени свободы припишем кинетическую энергию, равную $\frac{1}{3}\alpha T$.

Следует отметить, что таким путем можно вычислить только кинетическую энергию. Если мы хотим узнать полную энергию, мы должны добавить ее потенциальную часть. Но есть, впрочем, один случай, — он как раз является для нас особенно важным, — в котором величина потенциальной энергии тоже может быть определена весьма простым способом.

Рассмотрим систему, способную созершать малые колебания около положения устойчивого равновесия, и пусть координаты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ равны нулю в этом положении, так что они измеряют смещение системы от этого положения равновесия. Эти координаты могут быть выбраны таким образом, что не только кинетическая энергия является суммой некоторого числа членов, каждый из которых содержит квадрат скорости $\dot{p}$, — это требование мы уже ставили ранее, — но что, кроме этого, и потенциальная энергия выражается такого же вида суммой членов ap^2, где a есть некоторая постоянная величина.

Наиболее общее движение системы слагается из колебаний, которые мы назовем главными, или фундаментальными. Колебания этого вида отличаются тем характерным свойством, что при первом фундаментальном колебании переменной является одна координата p_1, при втором — одна p_2 и т. д., причем переменная координата в каждом случае является простой гармонической функцией времени t и обладает частотой, которая, вообще говоря, различна для различных фундаментальных колебаний. Основным свойством этих главных колебаний является то, что в каждом из них среднее значение потенциальной энергии за полный период или за промежуток времени, который весьма велик по сравнению с периодом, равно среднему значению кинетической энергии. Далее, если система совершает одновременно несколько главных колебаний, полную энергию мы найдем, если сложим значения энергии, которыми система обладала бы в каждом из главных колебаний в отдельности [1]).

71. Предположим теперь, что такая система с весьма большим числом степеней свободы соединена с обыкновенной системой молекул, например с газом, так что она может быть приведена в движение силами, с которыми на нее действуют молекулы, и в свою очередь может отдавать молекулам часть своей колебательной энергии. Тогда может установиться состояние равновесия между тепловым движением молекул и колебательным движением системы. Мы можем даже говорить про колебания системы, как про ее тепловое движение, и можем утверждать, что система обладает определенной температурой — такой же, какой обладает система молекул, с которой она находится в равновесии.

---

1) Примечание **39**.

Теорема равномерного распределения энергии требует, чтобы, каким бы путем колеблющаяся система ни получала или теряла энергию, кинетическая энергия для каждой из ее координат была равна $\frac{1}{3}\alpha T$. Сумма кинетической и потенциальной энергии должна быть равна $\frac{2}{3}\alpha T$ для каждого из фундаментальных колебаний, и задача определения полной энергии является в конце концов весьма простой. Нам не нужно даже уточнять выбор координат, которыми определяется конфигурация системы. Все, что нам нужно знать, — это число фундаментальных колебаний; умножая это число на $\frac{2}{3}\alpha T$, мы получим энергию системы, соответствующую температуре T.

72. Очень счастливой была мысль Джинса применить этот метод к проблеме излучения. Он дает нам возможность вычислить энергию излучения эфира для некоторой температуры T, не заботясь о механизме излучения и поглощения и не вводя в рассмотрение даже весомого тела. Единственный возникающий здесь вопрос касается числа степеней свободы для некоторого объема эфира. Для удобства ограничим этот объем идеально отражающими стенками и на первый раз вообразим себе две такие стенки в виде двух безграничных параллельных плоскостей, расположенных на расстоянии q друг от друга. Эфир между ними может быть носителем стоячих волн, которые мы можем сравнить с волнами, существующими в органной трубе; мы можем представить себе, что они возникают в результате наложения систем поступательно движущихся волн.

Условие для идеально отражающей поверхности заключается в том, что поток энергии Пойнтинга должен быть к ней касателен. Так будет, например, в том случае, когда поверхность является идеальным проводником, так как при этом тангенциальные составляющие электрической силы равны нулю. Допустим, что обе пограничные плоскости именно таковы. Если они нормальны к оси x и их уравнения суть $x=0$ и $x=q$, условие для электрической силы может быть выполнено, если между плоскостями имеют место два ряда поступательных волн, выражаемых уравнением (7) и уравнениями § 46. Полное диэлектрическое смещение

$$d_y = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) - a\cos n\left(t + \frac{x}{c}\right) = 2a\sin nt\sin\frac{nx}{c}$$

будет равно нулю для $x = 0$ и для $x = q$, если $\frac{nq}{c}$ есть кратное π, или, что то же самое, если расстояние q есть кратное половины длины волны. Поэтому возможными колебательными движениями будут такие, у которых длины волн будут равны $2q$, q, $\frac{2}{3}q$ и т. д.

73. Рассмотрим теперь колебания, которые могут происходить в эфире, заключенном в ящик, стенки которого изнутри являются идеально отражающими и который имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Пусть оси координат будут параллельны ребрам, длины которых пусть будут q_1, q_2, q_3.

Мы можем представить себе *восемь* таких прямых, что косинусы углов их направления будут иметь одинаковую абсолютную величину, но все возможные алгебраические знаки; в самом деле, обозначая через μ_1, μ_2, μ_3 абсолютные значения косинусов, мы получим восемь комбинаций

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3),\ (-\mu_1, \mu_2, \mu_3),\ (\mu_1, -\mu_2, \mu_3),\ (\mu_1, \mu_2, -\mu_3),$$
$$(\mu_1, -\mu_2, -\mu_3),\ (-\mu_1, \mu_2, -\mu_3),\ (-\mu_1, -\mu_2, \mu_3),$$
$$(-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3). \tag{149}$$

Если пучок параллельных лучей, идущий внутри прямоугольного ящика, направлен по одной из этих прямых, отражение на стенках даст ряд пучков, параллельных другим семи прямым, и если величины μ_1, μ_2, μ_3 и длина волны λ выбраны соответственным образом, пограничные условия на стенках могут быть удовлетворены наложением восьми систем поступательных волн, распространяющихся в указанных восьми направлениях. Чтобы выразить условие, которому должны удовлетворять μ_1, μ_2, μ_3, λ, вообразим три прямые P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3, параллельные стенкам ящика и соединяющие точки двух противоположных сторон, так что

$$P_1Q_1=q_1, \qquad P_2Q_2=q_2, \qquad P_3Q_3=q_3.$$

В системе поступательных волн, распространяющихся в направлении, определяемом величинами μ_1, μ_2, μ_3, разность фаз между P_1 и Q_1 измеряется расстоянием $\mu_1 q_1$, разность фаз между P_2 и Q_2 — расстоянием $\mu_2 q_2$, а между P_3 и Q_3 — расстоянием $\mu_3 q_3$. Условие для μ_1, μ_2, μ_3, λ сводится к тому[1]), что каждый из этих трех отрезков должен быть кратным $\frac{1}{2}\lambda$. Поэтому, если мы положим:

$$\frac{2\mu_1 q_1}{\lambda}=k_1, \qquad \frac{2\mu_2 q_2}{\lambda}=k_2, \qquad \frac{2\mu_3 q_3}{\lambda}=k_3, \tag{150}$$

k_1, k_2, k_3 должны быть целыми положительными числами.

Принимая во внимание соотношение

$$\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1,$$

мы имеем:

$$\frac{k_1^2}{q_1^2}+\frac{k_2^2}{q_2^2}+\frac{k_3^2}{q_3^2}=\frac{4}{\lambda^2}. \tag{151}$$

Таким образом, мы видим, что для любых трех целых чисел k_1, k_2 и k_3 имеется соответствующий ряд стоячих волн. Длина волны дается выражением (151), а косинусы углов направления нормалей к поступательным волнам (их нам предстоит комбинировать) — выражениями (149) и (150). Так как эти поступательные волны могут быть поляризованы[2]) двояко, каждый ряд чисел k_1, k_2, k_3 приведет нас к *двум* фундаментальным колебаниям эфира в прямоугольном ящике, и энергия, соответствующая каждой комбинации (k_1, k_2, k_3), будет не $\frac{2}{3}\alpha T$, а $\frac{4}{3}\alpha T$.

Предметом нашего исследования является количество энергии в эфире, поскольку оно соответствует колебаниям,

[1]) Примечание **40**.
[2]) Примечание **41**.

длины волн которых лежат в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$. Это количество энергии равно

$$\nu\cdot\frac{4}{3}aT,$$

где ν есть число комбинаций положительных целых чисел k_1, k_2, k_3, для которых значение λ, даваемое (151), лежит между λ и $\lambda+d\lambda$.

74. Число ν легко определить, если мы ограничимся (а это, конечно, мы вправе сделать) длинами волн, весьма малыми по сравнению с размерами ящика q_1, q_2, q_3.

Примем k_1, k_2, k_3 за прямоугольные координаты точки. Тогда (151) представляет собой уравнение эллипсоида с полуосями

$$\frac{2q_1}{\lambda},\qquad \frac{2q_2}{\lambda},\qquad \frac{2q_3}{\lambda}. \tag{152}$$

Заменяя λ через $\lambda+d\lambda$, мы получим второй эллипсоид, и ν будет число точек (k_1, k_2, k_3), лежащих между этими двумя поверхностями, соответственные полуоси которых отличаются на величины

$$\frac{2q_1}{\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad \frac{2q_2}{\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad \frac{2q_3}{\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{153}$$

В силу допущения, сделанного нами относительно длин волн, выражения (152) представляют собой весьма большие числа, и мы можем даже предположить, что, несмотря на малость $d\lambda$, числа (153) тоже весьма велики. Это означает, что все размеры эллипсоидального слоя, включая толщину, весьма велики по сравнению с единицей длины.

Число точек, координаты которых даются целыми числами и которые лежат в части пространства, размеры которого много больше, чем единица длины, можно приравнять к числу, выражающему объем этой части пространства. Следует помнить, что мы имеем дело только с положительными значениями k_1, k_2, k_3; тогда мы найдем, что ν равно одной восьмой численного значения объема эллипсоидального слоя. Отсюда имеем:

$$\nu=\frac{4\pi q_1q_2q_3}{\lambda^4}\,d\lambda,$$

а для энергии, которую мы должны были вычислить, получаем:

$$\nu \cdot \frac{4}{3} aT = \frac{16\pi a T q_1 q_2 q_3}{3\lambda^4} d\lambda.$$

Это и есть энергия, содержащаяся в объеме, занятом нашим прямоугольным ящиком. Деля на $q_1 q_2 q_3$, получаем для энергии излучения на единицу объема эфира, поскольку это излучение вызвано колебаниями длин волн, лежащих в пределах от λ до $\lambda + d\lambda$, следующее выражение:

$$\frac{16\pi a T}{3\lambda^4} d\lambda.$$

Этот результат в точности совпадает с (148).

75. Теория излучения, приведенная в §§ 60—68, ограничивается системами, содержащими свободные электроны, и относится только к случаю весьма длинных волн. Необходимо особое рассмотрение вопроса, как распространить ее на такие тела, как, например, кусок стекла, где мы вряд ли можем допустить наличие свободных электронов, а также на более короткие волны. Если мы примем законы Больцмана и Вина и будем считать доказанным, что кривая, подобная рис. 2, действительно выражает состояние излучения, которое может быть в равновесии с весомым телом данной температуры, мы должны постараться дать объяснение этой форме кривой и найти причину постоянства произведения $\lambda_m T$. Если это нам удастся, мы можем надеяться обнаружить, каким образом значение этой постоянной определяется некоторой числовой величиной, одинаковой для весомых тел.

Теория этих явлений принимает совершенно другой облик, если мы будем смотреть на закон равномерного распределения энергии как на правило без исключений, рассматривая в то же самое время эфир как непрерывную среду, не обладающую молекулярной структурой. Мы можем сказать тогда, что совершенно так же, как любое другое непрерывное распределение материи (вроде, скажем, однородной струны), конечная часть эфира будет иметь бесконечное число степеней свободы; в эфире, заключенном в прямоугольный ящик, о котором мы говорили, не будет верхнего предела для частот фундаментальных колебаний.

Напротив, число степеней свободы весомого тела есть, несомненно, конечная величина, если мельчайшие частички, из которых оно состоит, рассматривать как твердые. Поэтому, как это заметил Джинс, теория равномерного распределения энергии требует, чтобы в системе, состоящей из весомого тела и эфира, как бы велика ни была часть пространства, занятая телом, часть полной энергии, заключающаяся в нем по достижении равновесия, должна быть ничтожно мала. В самом деле, по теории Джинса формула (148) должна иметь место для *всех* длин волн, так что для данной температуры мы получим бесконечную величину, если при вычислении общего количества энергии выражение это интегрировать вплоть до предела $\lambda = 0$. Это означает, что если эфир получит конечное количество энергии, — например такое, какое может быть запасено в теле конечных размеров, — температура эфира не сможет заметно повыситься, так как энергия тратится на возбуждение исключительно малой электромагнитной «ряби».

Чтобы примирить эти результаты с наблюденными фактами, Джинс подчеркивает, что испускание лучей, длины волн которых лежат ниже известного предела, должно происходить весьма медленно — настолько медленно, что настоящее равновесие в наших опытах никогда не может быть достигнуто. При этих обстоятельствах легко можно себе представить, что, хотя с течением времени вся энергия тела рассеется, все же можно достигнуть некоторого состояния, при котором не будет заметных изменений и при котором, следовательно, мы будем иметь нечто вроде состояния равновесия.

76. Заключения Джинса являются, конечно, весьма существенными и заслуживают тщательного рассмотрения. Представляются три пути, которыми, казалось бы, можно их избежать. Во-первых, можно представить себе, что и число степеней свободы весомого тела тоже бесконечно или по причине изменяемости мельчайших частичек, или вследствие содержания эфира в теле; но это представление привело бы нас к противоречию с опытом, так как потребовало бы такого значения удельной теплоты, которое сильно превышало бы то, к которому мы приходим, принимая во внимание только поступательное движение молекул. Во-вторых, мы можем вообразить, что эфир имеет такое строение, вследствие которого конечный участок его будет иметь конечное число степеней свободы. Наконец, мы можем вообще отказаться от закона равномерного распределения энергии (эквипартиции) как общего закона. Но тогда нам придется объяснять, почему этот закон оказывается правильным для случая достаточно больших длин волн.

Если мы присоединимся к взглядам Джинса, возникают вопросы такой же степени важности и не менее сложные. Весьма трудно представить себе, что, устанавливая законы Больцмана и Вина, которые так блестяще подтверждаются на опыте, физики были на совершенно ложном пути. Необходимо поэтому выяснить, по какой причине эти состояния «равновесия», о которых я говорил, подчиняются законам термодинамики; а тогда нам опять придется доискиваться, каково физическое значение постоянной[1] $\lambda_m T$.

В заключение я замечу, что закон равномерного распределения энергии, который для системы молекул может быть выведен из принципов статистической механики, не может в настоящее время считаться доказанным для систем, содержащих эфир[2].

---

[1]) Примечание **42**.

[2]) Примечание **42***.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЯ ЗЕЕМАНА

77. Явление магнитного вращения плоскости поляризации, открытое Фарадеем в 1845 г., было первым доказательством внутренней связи между оптическими и электромагнитными явлениями. Долгое время это явление оставалось единственным примером оптического действия, производимого магнитным полем, но в 1877 г. Керр показал, что поляризация лучей, отраженных от железного зеркала, изменяется при намагничивании металла, а в 1896 г. Зееман [1]) обнаружил влияние магнитного поля на излучение света: если источник света, дающий одну или несколько резких спектральных линий, поместить между полюсами сильного электромагнита, каждая линия расщепляется на некоторое число составляющих, взаимное расстояние которых определяется силой внешнего магнитного поля.

Разбирая эти магнитооптические явления (теории явления Керра я, впрочем, касаться не буду), я возьму сначала наиболее простой случай. Это — явление Зеемана в том виде, в каком оно обнаружилось в первых опытах, а именно как расщепление первоначальной спектральной линии на три

---

[1]) P. Zeeman, Over den invloed eener magnetisatie op den aard van het door een stof uitgezonden licht, Zittingsversl. Amsterdam **5** (1896), стр. 181, 242 [переведено в Phil. Mag. (5), **43** (1897), стр. 226]; Doublets and triplets in the Spectrum produced by external magnetic forces, Phil. Mag. (5), **44** (1897), стр. 55, 255; Measurements concerning radiation phenomena in the magnetic field — там же **45** (1898), стр. 197. См. также: Zeeman, Researches in magneto-optics, London, 1913.

или две составляющие; число это зависит от направления испускания лучей.

78. Я дам вам сначала то элементарное объяснение расщепления линий, которое получается из теории электронов и при помощи которого оказалось возможным даже предсказать некоторые подробности этого явления.

Мы уже знаем, что по современным взглядам [20] излучение света вызывается колебательными движениями электрических зарядов, содержащихся в атомах весомых тел, — например, пламени натровой горелки или светящегося газа пустотной трубки. Распределение этих зарядов и их колебания могут быть весьма сложными, но, если мы хотим объяснить появление одной спектральной линии, мы можем удовлетвориться весьма простой гипотезой. Пусть в каждом атоме (или молекуле) содержится только один электрон, имеющий некоторое определенное положение равновесия, к которому он возвращается действием «упругой» силы, как мы ее будем называть, всякий раз, как он по той или иной причине испытал смещение. Нужно думать, что эта упругая сила вызывается другими частичками в атоме; однако природа ее для нас совершенно темна. Предположим только, что она пропорциональна смещению. По этой гипотезе, которую нужно принять, если мы желаем получить простые гармонические колебания, составляющие упругой силы, которая возникает при смещении из положения равновесия, могут быть представлены выражениями

$$-f\xi, \quad -f\eta, \quad -f\zeta,$$

где f есть некоторая положительная постоянная, определяемая свойствами атома, а ξ, η, ζ — составляющие смещения.

Если m есть масса подвижного электрона, получаем уравнения движения

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -f\xi, \quad m\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f\eta, \quad m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\zeta.$$

Общее решение этих уравнений есть

$$\xi = a\cos(n_0t + p), \quad \eta = a'\cos(n_0t + p'),$$
$$\zeta = a''\cos(n_0t + p''), \tag{154}$$

где a, a', a'', p, p', p'' суть произвольные постоянные, а частота n_0 колебаний определяется выражением

$$n_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}. \tag{155}$$

Рассмотрим, далее, влияние внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Оно дает силу

$$\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \tag{156}$$

где e обозначает заряд электрона, а $\boldsymbol{v}$ — его скорость. Если магнитная сила $\boldsymbol{H}$ параллельна оси OZ, составляющие (156) будут:

$$\frac{eH_z}{c}\frac{d\eta}{dt}, \quad -\frac{eH_z}{c}\frac{d\xi}{dt}, \quad 0.$$

Тогда уравнения движения приобретают следующий вид:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -f\xi + \frac{eH_z}{c}\frac{d\eta}{dt}, \tag{157}$$

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f\eta - \frac{eH_z}{c}\frac{d\xi}{dt}, \tag{158}$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\zeta. \tag{159}$$

79. Последнее уравнение показывает, что магнитное поле не влияет на колебания в направлении OZ; этого следовало ожидать, так как сила (156) равна нулю, если направление $\boldsymbol{v}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{H}$. Здесь попрежнему окажется применимым частное решение (154). Что касается двух уравнений (157) и (158), они допускают два частных решения, выражаемых формулами

$$\xi = a_1\cos(n_1t + p_1), \quad \eta = -a_1\sin(n_1t + p_1) \tag{160}$$

и

$$\xi = a_2\cos(n_2t + p_2), \quad \eta = a_2\sin(n_2t + p_2), \tag{161}$$

в которых частоты n_1 и n_2 определяются выражениями

$$n_1^2 - \frac{eH_z}{mc}n_1 = n_0^2 \tag{162}$$

и

$$n_2^2 + \frac{eH_z}{mc} n_2 = n_0^2; \tag{163}$$

здесь a_1, a_2, p_1 и p_2 суть произвольные постоянные.

Комбинируя (154), (160) и (161), получаем решение, которое содержит шесть постоянных и является поэтому общим решением.

Два решения (160) и (161) представляют круговые колебания, происходящие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и направленные в противоположные стороны. Частота n_1 одного из них больше (если eH_z положительно), а частота другого — меньше, чем частота первоначального колебания n_0. Легко уяснить себе возможность таких круговых колебаний при помощи весьма простого рассуждения. Если электрон описывает круговую орбиту с радиусом r в плоскости, нормальной H_z, и в направлении, противоположном тому, которое соответствует этой силе, то в добавление к упругой силе fr появится электромагнитная сила

$$\frac{e\,|\mathbf{v}|\,H_z}{c},$$

направленная к центру. Так как обе силы являются постоянными, то действительно может описываться круговая орбита, и мы получаем, применяя известный закон центростремительной силы, выражение

$$fr + \frac{e\,|\mathbf{v}|\,H_z}{c} = \frac{mv^2}{r},$$

или, так как $|\mathbf{v}| = nr$,

$$f + \frac{enH_z}{c} = mn^2,$$

откуда непосредственно следует (162). Уравнение (163) можно получить совершенно таким же путем.

Во всех тех случаях, которые осуществляются на самом деле, изменение частоты оказывается весьма малым по сравнению с самой частотой. Это показывает, что даже в наиболее мощных полях $\frac{eH_z}{mc}$ весьма мало по сравнению с n_0. Поэтому (162) и (163) можно заменить выражениями

$$n_1 = n_0 + \frac{eH_z}{2mc}, \qquad n_2 = n_0 - \frac{eH_z}{2mc}. \qquad (164)$$

Точки спектра, соответствующие этим частотам, лежат на равных весьма малых расстояниях направо и налево от первоначальной линии.

80. Рассмотрим теперь природу света, испускаемого колеблющимся электроном. Полное излучение слагается из отдельных частей соответственно полученным нами частным решениям; мы их будем рассматривать каждое в отдельности.

Исследуя (§§ 39—41) излучение электрона, мы видели, что если такая частичка колеблется около точки O вдоль прямой линии L, диэлектрическое смещение в удаленной точке P направлено перпендикулярно OP, в плоскости LOP, и что для данного расстояния OP его амплитуда пропорциональна синусу угла LOP. Излучение будет равно нулю вдоль прямой, по которой направлены колебания, и будет иметь наибольшую величину вдоль прямых, перпендикулярных ей; далее, свет будет вдоль каждой прямой, проведенной из O, плоско-поляризован.

Что касается круговых колебаний, таких, какие выражаются формулой (160), их действие является результирующим тех прямолинейных колебаний вдоль OX и OY, на которые это круговое колебание может быть разложено. Нам нужно рассматривать только то состояние, которое устанавливается или в плоскости этого движения, или вдоль прямой, проходящей через центр, под прямым углом к плоскости. В удаленной точке плоскости P свет, приходящий от вращающегося электрона, является плоско-поляризованным, так как электрические колебания лежат в плоскости круговой орбиты и перпендикулярны OP; если, например, P расположено на OY, колебание вдоль этой прямой не произведет никакого действия, и мы получим только то поле, которое вызывается движением вдоль OX.

Но в точке на оси круговой орбиты, т. е. на OZ, поле вызывается обеими составляющими (160), так как первая составляющая вызывает электрическое колебание, параллельное OX, а вторая — параллельное OY. Непосредственно видно, что между этими колебаниями имеется такая же разность фаз, как и между самими составляющими (160), т. е. разность в четверть периода, и что амплитуды их равны друг другу. Свет, испускаемый вдоль OZ, является поэтому поляризованным по кругу, и направление диэлектрического смещения вращается в ту же сторону, как электроны в своем круговом движении. Формулы (160) показывают, что для наблюдателя, помещенного на положительной части оси OZ, вращение электрона происходит в направлении часовой стрелки. Отсюда можно заключить, что лучи, испускаемые вдоль положительной оси при движении (160), поляризованы по кругу вправо.

Подобные же рассуждения можно применить к тому движению частички, которое соответствует выражению (161). Излучение, даваемое им в упомянутом направлении, является поляризованным по кругу влево. Если, далее, принять во внимание, что частота лучей в каждом случае равна частоте порождающего их движения, можно вывести следующее заключение, которое было всецело подтверждено опытами Зеемана [1]).

Пусть источник света помещен в магнитное поле, линии сил которого идут в горизонтальном направлении; будем исследовать с помощью спектроскопа или решетки свет, исходящий в горизонтальном направлении под прямым углом к линиям сил. Тогда мы увидим триплет, средняя линия которого находится на месте первоначальной линии. Каждая линия образована плоско-поляризованным светом, причем электрические колебания горизонтальны для средней линии и вертикальны для двух внешних.

Если, однако, у электромагнита, которым мы будем пользоваться, полюсные наконечники просверлены вдоль оси, и мы будем с его помощью исследовать свет, который идет вдоль линий сил, мы увидим только дублет, соответствующий положению наружных линий триплета. Обе его линии образованы светом, поляризованным по кругу,

---

[1]) Примечание **43**.

причем в одном случае мы имеем правополяризованный луч, а в другом — левополяризованный.

81. Когда Зееман подтвердил все эти рассуждения, у него оказались в руках все данные, чтобы получить еще два весьма замечательных результата. Во-первых, он нашел, что когда свет распространялся в направлении, совпадающем с направлением магнитной силы, т. е., если $\boldsymbol{H}_z$ положительно, вдоль оси OZ, то составляющая дублета с меньшей частотой колебаний вдоль оси была поляризована по кругу вправо. Это доказывает, что для положительных значений $\boldsymbol{H}_z$ первая из частот, даваемых уравнением (164), имеет меньшее значение. Поэтому заряд электрона, движению которого приписывается излучение, должен быть отрицательным. Это совпадает с общим результатом других исследований, по которым отрицательные заряды вообще обладают большей подвижностью, чем положительные.

Другой результат относится к вопросу об отношении между численными значениями электрического заряда и массы подвижных электронов. Это отношение можно вычислить при помощи формулы (164), если только измерить силу магнитного поля и расстояние между двумя составляющими; из последнего мы можем вывести величину $n_1 - n_0$; число, полученное Зееманом из промеров расстояния между составляющими линий D натрия, или, вернее, расширения этих линий, составляющие которых частично налагались друг на друга, было одним из первых опубликованных в печати значений $\frac{e}{m}$. Порядок величины его сходится с порядком величины чисел, полученных для отрицательных электронов катодных лучей и β-лучей.

К сожалению, удовлетворение, вызванное этим успехом теории электронов при объяснении новых явлений, оказалось непродолжительным. Очень скоро было обнаружено, что многие спектральные линии расщепляются не на три составляющие, а на большее число — четыре, шесть и даже больше [1]), и до настоящего времени мы не имеем еще

---

[1]) В позднейших исследованиях наблюдалось расщепление даже на 17 составляющих.

вполне удовлетворительного объяснения этих более сложных форм явления Зеемана [21].

Все, что я поэтому могу сделать, — это высказать несколько предположений относительно тех путей, которые могли бы привести к объяснению этих явлений.

82. Прежде чем приступить к этому, я позволю себе вкратце коснуться некоторых важных результатов, которые были получены при рассмотрении распределения спектральных линий в отсутствии магнитного поля. В спектрах многих элементов линии располагаются в серии таким образом, что для каждой серии частоты всех линий, принадлежащих к этой серии, могуть быть выражены одной математической формулой. Первая такая формула была дана Бальмером [1]) для спектра водорода. После него другие физики установили еще несколько уравнений для других спектров; здесь следует отметить Ридберга [2]), Кайзера и Рунге [3]).

Для наших целей будет достаточно привести лишь несколько примеров.

В спектре натрия были обнаружены три серии двойных линий; их называют так: главная серия, первая побочная, или диффузная, серия, вторая побочная, или резкая, серия. Иначе можно сказать, что каждая из трех серий распадается на две серии одиночных линий, из которых одна состоит из более преломляемых линий дублетов, а другая — из менее преломляемых.

Частоты этих шести серий, выраженные в числах n, где n есть число длин волн, укладывающихся в сантиметре длины, были представлены Ридбергом при помощи следующих формул.

---

[1]) J. J. Balmer, Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs, Ann. Phys. Chem. **25** (1885), стр. 80.

[2]) J. R. Rydberg, Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques, Svenska Vetensk. Akad. Handl. **23** (1889), № 11; La distribution des raies spectrales, Rapports prés. au Congrés de physique, 1900, **2**, стр. 200.

[3]) H. Kayser u. C. Runge, Über die Spektren der Alkalien, Ann. Phys. Chem. **41** (1890), стр. 302; Über die Spektra der Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe, там же, **43** (1891), стр. 385.

Главная серия I:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\sigma)^2} - \frac{1}{(m+\mu_1)^2}. \tag{165}$$

Главная серия II:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\sigma)^2} - \frac{1}{(m+\mu_2)^2}. \tag{166}$$

Первая побочная (диффузная) серия I:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\mu_1)^2} - \frac{1}{(m+\delta)^2}. \tag{167}$$

Первая побочная (диффузная) серия II:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\mu_2)^2} - \frac{1}{(m+\delta)^2}. \tag{168}$$

Вторая побочная (резкая) серия I:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\mu_1)^2} - \frac{1}{(m+\sigma)^2}. \tag{169}$$

Вторая побочная (резкая) серия II:

$$\frac{n}{N_0} = \frac{1}{(1+\mu_2)^2} - \frac{1}{(m+\sigma)^2}. \tag{170}$$

В этих уравнениях N_0, μ_1, μ_2, δ и σ суть постоянные, имеющие следующие значения:

$$N_0 = 109\,675,$$

$$\mu_1 = 1{,}1171, \quad \mu_2 = 1{,}1163, \quad \delta = 0{,}9884, \quad \sigma = 0{,}6498.$$

Подставляя для m последовательные целые числа, получим частоты последовательных линий в каждой серии. Если при этом мы получим для n отрицательное число $-n'$, это значит, что мы имеем линию частоты n'.

83. Я хочу особенно обратить ваше внимание на следующие замечательные результаты, которые вытекают из вышеприведенных формул.

1. Если увеличивать m, n тоже будет увеличиваться, стремясь, однако, к некоторому конечному пределу, соот-

ветствующему $m = \infty$; этот предел для разных серий дается выражением

$$\frac{N_0}{(1+\sigma)^2}, \quad \frac{N_0}{(1+\mu_1)^2} \text{ и т. д.}$$

Отдельные линии сёрий расположены не на одинаковых расстояниях друг от друга; по мере продвижения к ультрафиолетовой части спектра линии все более и более сгущаются, — серия, если так можно выразиться, обнаруживает неспособность перешагнуть за крайнее положение, даваемое одним из вышеприведенных чисел.

Что касается общего числа наблюденных линий, оно изменяется от одной серии к другой. Если вышеприведенные формулы (или другие уравнения того же рода) выражают нечто соответствующее действительности, нужно считать, что число линий бесконечно велико.

2. Частоты дублета первой побочной серии (I, II) получаются, если в (167) и (168) подставлять для m одно и то же число. Эти частоты отличаются на величину

$$\frac{N_0}{(1+\mu_2)^2} - \frac{N_0}{(1+\mu_1)^2}$$

при каком угодно m. То же значение для разности получается, если мы вычислим частоты дублета второй побочной серии (I, II). Поэтому, если расстояние между двумя линиями измерять разностью их частот, интервал между двумя составляющими имеет одно и то же значение для всех дублетов первой и второй побочных серий.

Иначе обстоит дело с дублетами главной серии (I, II). Расстояние между двумя составляющими дается выражением

$$\frac{N_0}{(m+\mu_2)^2} - \frac{N_0}{(m+\mu_1)^2},$$

которое уменьшается с увеличением m и приближается к пределу нуль для $m = \infty$.

В связи с этим следует отметить, что предельная частота имеет для членов I и II главной серии одно и то же значение $\frac{N_0}{(1+\sigma)^2}$.

3. Связь между различными сериями заключается не только в этом. Формулы показывают, что для обеих побочных серий (I, II) предельные частоты одинаково суть $\frac{N_0}{(1+\mu_1)^2}$ и $\frac{N_0}{(1+\mu_2)^2}$. Наконец, еще одно важное замечание: если в (165) и (166) положить $m=1$, мы получим те же самые значения частот, которые получили бы из (169) и (170), подставляя то же значение m. Дублет с этими частотами можно поэтому считать первым в главной серии и одновременно с этим первым во второй побочной серии.

Мы можем, далее, сказать, что главная серия I и резкая серия I, взятые в целом, соответствуют друг другу, так как обе характеризуются постоянными μ_1 и σ, и что подобное же соотношение существует между главной серией II и резкой серией II. В связи с этим следует заметить, что более преломляемые линии главных дублетов соответствуют менее преломляемым линиям резких дублетов и наоборот. Если, например, μ_1 больше чем μ_2, первая постоянная даст большее значение частоты в главной серии и меньшее значение во второй побочной серии.

4. Подобные же результаты были получены и для других щелочных металлов, в спектре которых тоже видны серии дублетов, а также для магния, кальция, стронция, цинка, кадмия и ртути, но только в спектрах последних металлов серии состоят не из дублетов, а из триплетов. Поэтому в этом случае к схеме, приведенной в формулах (165)—(170), мы должны добавить следующие члены:

главную серию III:

$$\frac{n}{N_0}=\frac{1}{(1+\sigma)^2}-\frac{1}{(m+\mu_3)^2},$$

первую побочную серию III:

$$\frac{n}{N_0}=\frac{1}{(1+\mu_3)^2}-\frac{1}{(m+\delta)^2},$$

вторую побочную серию III:

$$\frac{n}{N_0}=\frac{1}{(1+\mu_3)^2}-\frac{1}{(m+\sigma)^2}.$$

Впрочем, даже и эта схема оказывается неполной. В спектре ртути, например, имеется некоторое число добавочных линий, расположенных очень близко к тем линиям, о которых мы только что говорили; их часто поэтому называют спутниками.

Эти спутники в свою очередь тоже обнаруживают некоторые замечательные закономерности. Они встречаются в главной побочной серии (I, II, III), но не встречаются во второй побочной серии. В каждом триплете первой серии имеются три спутника, сопровождающие первую линию триплета, два спутника, относящиеся ко второй линии, и один, относящийся к третьей, так что триплет в действительности представляет собой группу из девяти линий.

Что касается главной серии последних названных мною элементов, то я добавил их только в целях соблюдения аналогии. Главных серий триплетов здесь еще не наблюдалось.

84. Только для небольшого числа химических элементов удалось разложить систему их спектральных линий — или по крайней мере большую их часть — на серии того типа, которые мы только что рассматривали. В спектрах таких элементов, как золото, медь и железо, были открыты некоторые изолированные серии, но в большинстве линий до сих пор еще не удалось разобраться. Несмотря на это, нельзя отрицать, что мы сильно подвинулись вперед в понимании спектров, которые на первый взгляд представляются ужасающе запутанными. Не может быть сомнения в том, что линии одной и той же серии действительно как-то связаны друг с другом, имея одну общую причину, и что существует большое сходство и между теми движениями, которые вызывают различные серии.

Весьма замечательным представляется также то, что элементы, подобные по своим химическим свойствам, обнаруживают близкое строение в своих спектрах. Все металлы, в спектрах которых линии комбинируются в дублеты, являются одновалентными, тогда как вышеприведенные серии триплетов принадлежат двухвалентным элементам. Пожалуй, наиболее замечательным из всего является то обстоятельство, что Ридбергу удалось выразить все серии, каким бы элементам они ни принадлежали, при помощи формул, в которые входит одно и то же число N_0. Это равенство — точное или приближенное — значения постоянной в формулах для различных элементов должно, очевидно, иметь своей причиной соответственную одинаковость свойств тех мельчайших частичек, из которых состоят эти элементы, но в настоящее время мы совершенно не можем составить себе представления о природе этого сходства свойств [1]) или о физическом значении промежутка времени, соответствующего [2]) $\frac{1}{N_0}$.

85. Исследование явления Зеемана для большого числа спектральных линий, которому в последние годы посвятили себя многие физики, полностью подтвердило гипотезу о внутренней, тесной связи между различными спектральными линиями одного и того же вещества; эти опыты дали богатый материал для будущих исследований, но при настоящем положении теории мы можем истолковать его далеко не полностью.

Прежде чем сказать несколько слов о полученных результатах, я должен еще раз обратиться к элементарной теории триплетов и к формулам (164), которые мы из нее вывели. Эти уравнения показывают, что если бы все спектральные линии расщеплялись согласно элементарной теории и если бы во всех случаях отношение $\frac{e}{m}$ имело одно и то же значение, мы всегда получали бы триплеты с одинаковой разностью частот между их составляющими. Для сокращения буду называть это *одинаковым* расщеплением линий.

Но вот измерения Рунге и Пашена [3]) и других физиков привели к весьма замечательному результату. Мы знаем,

[1]) Некоторые авторы пытались установить формулы, которые выражали бы закон распределения спектральных линий по сериям еще точнее, чем формулы Ридберга. См., напр., W. Ritz, Ann. Phys. **12** (1903), стр. 264, и E. E. Mogendorff, Amsterdam Proc. **9** (1906), стр. 434.

[2]) См., впрочем, N. Bohr, Phil. Mag. **26** (1913), стр. 1 (1915).

[3]) C. Runge, Über den Zeeman-Effekt der Serienlinien, Phys. Zeitschr. **3** (1902), стр. 441; C. Runge u. F. Paschen, Über die Strahlung des Quecksilbers im magnetischen Felde, Anhang z. d. Abhandl. Akad. Berlin, 1902, стр. 1.

правда, большое число спектральных линий, которые расщепляются на более чем три составляющие; при этом даже те триплеты, которые наблюдались на деле, не являются одинаковыми в вышеприведенном смысле, но все линии, составляющие серию, т. е. все линии, которые могут быть представлены одной и той же формулой, расщепляются совершенно одинаковым образом и в точности на одну и ту же величину. Повидимому, относительно общности этого закона не возникает никаких сомнений.

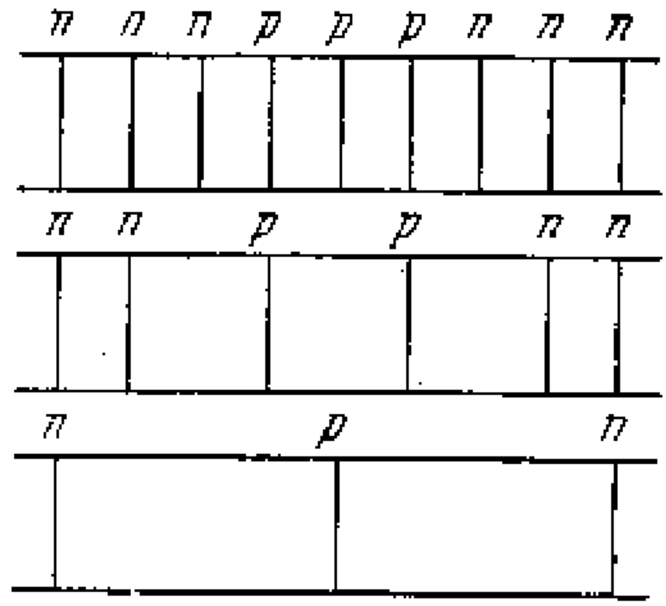

Рис. 3.

В тех сериях, которые состоят из триплетов или дублетов, способ расщепления линий, вообще говоря, различен для линий одного и того же триплета или дублета, но в каждом триплете или дублете повторяется один и тот же способ расщепления согласно тому закону, который мы только что упоминали. Так, в каждом триплете второй побочной серии ртути менее преломляемая линия расщепляется на девять составляющих, средняя линия — на шесть, а наиболее преломляемая линия — на три. Эти расщепления показаны на рис. 3, на котором буквы p и n означают, что электрические колебания линии параллельны или перпендикулярны линиям сил.

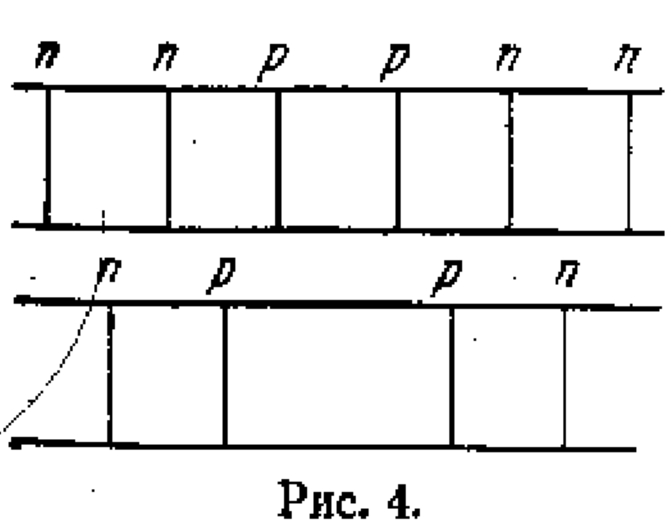

Рис. 4.

Одинаковое расщепление обнаруживается не только в различных линиях одной и той же серии, но также и в соответствующих сериях различных элементов. Так, например, линии натрия D_1 и D_2, которые образуют первый член главной серии, превращаются в квадруплет (квадруплет Корню) и в секступлет (рис. 4), и первые члены главной серии меди и серебра дают точно такое же расщепление.

86. Из всего этого вы видите, что эти явления представляются весьма сложными и что мы имели бы безнадежную путаницу, если бы не тот закон, о котором я только что вам говорил, — закон, раскрывающийся нам при расщеплении линий одной и той же серии или различных соответствующих друг другу серий. И это не единственный случай, в котором можно обнаружить связь между явлением Зеемана для различных линий. На рис. 3 мы видим другую, не менее замечательную закономерность. Оказывается, что расстояния, представленные на этом рисунке, являются кратными одного и того же числа; то же самое можно сказать про ряд смещений, обнаруженных Рунге и Пашеном в спектре ртути. Подобное же замечание относится и к случаю, изображенному на рис. 4 [1]).

Я должен также заметить, что интересная связь между главными и вторыми побочными сериями, о которой я уже говорил, прекрасно подтверждается наблюдениями над явлением Зеемана. Более преломляемые составляющие дублетов одной из этих серий расщепляются совершенно таким же образом, как менее преломляемые составляющие дублетов другой серии.

Наконец, не следует забывать и о том, что хотя весьма большое число линий обнаруживает очень сложное явление Зеемана, — в особенности это относится к тем сериям, о которых мы говорили, — все же имеется большое число линий, которые под действием магнитного поля превращаются в триплеты. Так, в работе Пурвиса было обнаружено не менее пятидесяти случаев такого рода в спектре палладия. Я должен, однако, добавить, что гораздо большее число линий этого элемента расщепляется иным образом.

87. Мы уже упоминали, что первое численное значение отношения $\frac{e}{m}$, найденное Зееманом, имеет тот же порядок величины, что и те значения, которые были получены для электронов катодных лучей и β-лучей радия. Позднейшие

---

1) По этому вопросу о соизмеримости магнитных разложений в различных случаях см. C. Runge, Über die Zerlegung von Spektrallinien im magnetischen Felde, Phys. Zeitschrift 8 (1907), стр. 232.

измерения показали, однако, что расстояние между составляющими в различных триплетах имеет различную величину и что поэтому, если во всех случаях принять одну и ту же формулу (164), будут получаться различные значения $\frac{e}{m}$. Хотя некоторые триплеты и дают значение $\frac{e}{m}$, равное тому числу, которое получается для свободных отрицательных электронов, все же в большинстве случаев результат получается другой. Это можно приписать или действительному различию между значениями $\frac{e}{m}$, или несовершенству элементарной теории. Я думаю, что многое говорит в пользу последней альтернативы. После всего сказанного выше мы не можем слишком доверять формуле (164); с другой стороны, имеются веские причины верить в тождество всех отрицательных электронов.

88. Если бы позволило время, было бы чрезвычайно интересно рассмотреть некоторые гипотезы, которые были предложены для объяснения структуры спектров и более сложных форм явления Зеемана. Не может быть двух мнений как относительно важности этой проблемы, так, я думаю, и относительно направления, в котором мы должны ожидать ее разрешения. Свойство спектральных линий изменяться под действием магнитных сил, несомненно, показывает, что испускание света есть электромагнитное явление, вызываемое движением электричества в светящихся частичках (мы пришли к этому представлению на основании других соображений), и наша задача будет заключаться в том, чтобы объяснить наблюдаемые явления, делая подходящие предположения относительно распределения зарядов и относительно сил, определяющих колебания этих зарядов.

Хотя и было предложено много остроумных гипотез относительно строения лучеиспускающих частичек, мы, к сожалению, все же весьма далеки от удовлетворительного решения этого вопроса. Я должен поэтому ограничиться некоторыми общими соображениями относительно теории явления Зеемана и остановлюсь только на одном примере, который может послужить для их иллюстрации.

89. Прежде всего мы можем оставить нашу первоначальную гипотезу о единственном движущемся электроне и заменить ее более общими представлениями о строении и свойствах излучающих частичек. Пусть каждая из них представляет собой материальную систему, способную совершать малые колебания около некоторого положения устойчивого равновесия, и пусть конфигурация этой системы определяется некоторым числом обобщенных координат p_1, $p_2, \ldots, p_\mu$. Предположим, что последние выбраны таким образом, что обращаются в нуль в положении равновесия, и что потенциальная и кинетическая энергии выражаются в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(f_1p_1^2+f_2p_2^2+\ldots+f_\mu p_\mu^2),$$

$$\frac{1}{2}(m_1\dot{p}_1^2+m_2\dot{p}_2^2+\ldots+m_\mu\dot{p}_\mu^2).$$

Тогда уравнения движения Лагранжа изобразятся в таком виде:

$$m_1\ddot{p}_1=-f_1p_1,\ m_2\ddot{p}_2=-f_2p_2,\ \ldots,\ m_\mu\ddot{p}_\mu=-f_\mu p_\mu. \quad (171)$$

Так как в каждую из этих формул входит только одна координата, то изменения какой-нибудь координаты происходят совершенно независимо от изменений других координат, так что каждое уравнение определяет одно из фундаментальных колебаний системы. Частоты фундаментальных колебаний и положения соответствующих спектральных линий даются выражениями

$$n_1=\sqrt{\frac{f_1}{m_1}},\quad n_2=\sqrt{\frac{f_2}{m_2}},\ \ldots,\quad n_\mu=\sqrt{\frac{f_\mu}{m_\mu}}. \quad (172)$$

Мы введем теперь внешнюю магнитную силу $\boldsymbol{H}$, которую, конечно, можно считать одинаковой во всех точках нашей малой материальной системы. Чтобы заставить эту силу влиять на колебания, мы допустим, что все части системы обладают электрическими зарядами, жестко с ними связанными, так что положение зарядов определяется координатами p.

Как только система придет в колебательное движение, на заряды начинают действовать силы, вызываемые внешним магнитным полем. Эти действия могут быть математически описаны путем введения в уравнения некоторых сил в обобщенном смысле этого слова. Обозначая эти силы через P_1, P_2, ..., P_μ, получим вместо (171):

$$m_1\ddot{p}_1 = -f_1 p_1 + P_1 \text{ и т. д.}$$

Без знания строения колеблющейся системы и распределения ее зарядов не представляется, конечно, возможным полностью определить P_1, P_2, ... Можно показать, однако, что выражения для этих величин должны иметь вид

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= c_{12}\dot{p}_2 + c_{13}\dot{p}_3 + \ldots + c_{1\mu}\dot{p}_\mu, \\ P_2 &= c_{21}\dot{p}_1 + c_{23}\dot{p}_3 + \ldots + c_{2\mu}\dot{p}_\mu \end{aligned}\right\} \qquad (173)$$

и т. д., где постоянные c пропорциональны интенсивности магнитного поля[1]). Между этими коэффициентами имеют место следующие соотношения:

$$c_{21} = -c_{12}, \quad c_{32} = -c_{23} \text{ и т. д.} \qquad (174)$$

Все это легко доказать, если мы вспомним основное выражение $\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]$ для действия поля на движущийся заряд. Составляющие этого действия по осям координат являются линейными и однородными функциями составляющих скорости $\boldsymbol{v}$. Следовательно, все прямоугольные составляющие сил, действующих на колеблющуюся частичку, должны быть такими же функциями $\dot{p}_1$, $\dot{p}_2$, ..., $\dot{p}_\mu$, так как скорость в какой-нибудь точке системы является линейной и однородной функцией этих величин. То же должно иметь место по отношению к лагранжевым силам P_1, P_2, ..., P_μ, так как они являются линейными и однородными функциями прямоугольных составляющих сил.

Чтобы найти соотношения между коэффициентами c, нам нужно заметить только, что работа добавочных сил P_1, P_2 и т. д. равна нулю, так как сила, с которой магнитное

---

[1]) Примечание **44**.

поле действует на движущийся заряд, всегда перпендикулярна направлению движения. Условие

$$P_1\dot{p}_1+P_2\dot{p}_2+\ldots+P_\mu\dot{p}_\mu=0,$$

к которому мы приходим таким путем, лежит в основе уравнений (174); благодаря ему в первом уравнении (173) отсутствует член с $\dot{p}_1$, во втором — член с $\dot{p}_2$ и т. д.

90. Уравнения движения

$$m_1\ddot{p}_1+f_1p_1=c_{12}\dot{p}_2+c_{13}\dot{p}_3+\ldots+c_{1\mu}\dot{p}_\mu,$$

$$m_2\ddot{p}_2+f_2p_2=c_{21}\dot{p}_1+c_{23}\dot{p}_3+\ldots+c_{2\mu}\dot{p}_\mu$$

и т. д. решаются общеизвестным приемом. Полагая

$$p_1=q_1e^{int},\ p_2=q_2e^{int},\ \ldots,\ p_\mu=q_\mu e^{int}, \tag{175}$$

где n, q_1, q_2, ..., q_μ суть постоянные, мы получаем μ уравнений

$$\left.\begin{aligned}(f_1-m_1n^2)\,q_1-inc_{12}q_2-inc_{13}q_3-\ldots-inc_{1\mu}q_\mu=0,\\ -inc_{21}q_1+(f_2-m_2n^2)\,q_2-inc_{23}q_3-\ldots-inc_{2\mu}q_\mu=0\end{aligned}\right\} \tag{176}$$

и т. д. Если из этих уравнений исключить величины

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_\mu,$$

в результате получается уравнение, которое определяет коэффициент n. В силу соотношений (174) и малости членов, содержащих c_{12}, c_{13} и т. д., можно показать, что это уравнение содержит только n^2 и что оно дает μ действительных положительных значений этой величины. Следовательно, имеется μ таких положительных чисел n'_1, n'_2, ..., которыми результирующее уравнение удовлетворяется:

$$n=\pm n'_1,\quad n=\pm n'_2,\ \ldots,\quad n=\pm n'_\mu.$$

Для каждого из этих значений n можно из (176) вывести отношение между q_1, q_2, ..., q_μ. Наконец, если мы возьмем действительные части выражений (175), мы получим μ фундаментальных колебаний с частотами

$$n'_1,\ n'_2,\ \ldots,\ n'_\mu.$$

Отсюда легко видеть, что, если мы не зададимся никакими особыми соотношениями между постоянными, входящими в нашу задачу, мы не получим ни намека на явление Зеемана. В отсутствии магнитного поля мы имели μ спектральных линий, соответствующих частотам $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$. Действие поля сказывается в том, что они заменяются слегка отличными значениями $n'_1, n'_2, \ldots, n'_\mu$, так что линии немного смещаются в ту или другую сторону, не испытывая при этом никакого расщепления на три или более составляющих [1]).

91. Можно без всяких вычислений прийти к тем условиям, которые необходимы для объяснения наличия явления Зеемана. Для этого представим себе источник света, помещенный в магнитное поле и дающий в спектре вместо первоначальной спектральной линии триплет. Составляющие этого триплета без сомнения вызываются тремя фундаментальными движениями, имеющими место внутри излучающих частичек, причем эти движения должны отличаться друг от друга, так как в противном случае их частоты имели бы одно и то же значение. Будем теперь уменьшать силу поля. Вследствие этого составляющие будут приближаться друг к другу, может быть, настолько, что мы уже не будем в состоянии их различать, но три различных движения от этого не перестанут существовать. Разница в том, что теперь их частоты будут отличаться друг от друга меньше, чем это имело место в сильном поле. Постепенно ослабляя поле, мы в конце концов придем к тому, что поля не будет вовсе, но даже и тогда все же будут существовать три различных движения. Они попрежнему будут отличаться друг от друга, но частоты их сделаются равными.

Как мы видим, необходимым условием для появления магнитного триплета является то, что в отсутствии магнитного поля три частоты, $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$, соответствующие трем различным степеням свободы, должны быть равны друг другу, или, короче, должны существовать три *эквивалентные* степени свободы. Тогда магнитное поле, которое

---

[1]) Примечание 45.

слегка изменяет все частоты, вызывает небольшое различие между тремя частотами, которые вначале были равны. Мы можем выразить это же самое другими словами, а именно, что в триплет может быть обращена только такая спектральная линия, которая состоит из трех совпадающих линий, так как магнитное поле не образует новых линий, но только изменяет положение линий, существующих уже ранее.

92. Эти заключения, которые можно распространить на квадруплеты, квинтуплеты и т. д., полностью подтверждаются математической теорией. Если первоначально

$$n_1 = n_2 = n_3,$$

мы получим под действием магнитного поля три составляющие

$$n_1 \text{ и } n_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} + \frac{c_{23}^2}{m_2 m_3} + \frac{c_{31}^2}{m_3 m_1}}, \tag{177}$$

указывающие на существование симметричного триплета, в котором средняя линия имеет положение первоначальной спектральной линии. Подобным же образом можно показать, что мы будем наблюдать квадруплет, квинтуплет и т. д. в зависимости от того, сколько эквивалентных степеней свободы имеет система: четыре, пять или больше. Оказалось, что все эти более сложные формы расщепления спектральной линии симметричны по отношению к первоначальной линии, так что, если число составляющих есть число нечетное, положение средней линии всегда совпадает с положением первоначальной линии [1]).

93. Наличие известного числа эквивалентных степеней свободы не есть единственное условие, которому мы должны подчинить излучающие частички. Тот факт, что магнитные составляющие спектральных линий имеют такую же резкость, что и первоначальные линии, требует дополнительной гипотезы. Это легко понять, если мы на время вернемся к выражению (177). В этом выражении коэффициенты c_{12}, c_{23}, c_{31} являются линейными и однородными функциями составляющих $\boldsymbol{H}_x$, $\boldsymbol{H}_y$, $\boldsymbol{H}_z$ внешнего магнитного поля.

---

[1]) Примечание **46.**

Поэтому расстояние между внешними составляющими триплета и средней составляющей дается выражением вида

$$\sqrt{q_{11}H_x^2+q_{22}H_y^2+q_{33}H_z^2+2q_{12}H_xH_y+2q_{23}H_yH_z+2q_{31}H_zH_x}, \tag{178}$$

в котором q_{11}, q_{22}, ..., q_{12}, ... — постоянные, зависящие от природы колеблющейся частички. Если, не изменяя направления поля, удвоить его интенсивность, расстояние между линиями увеличится в том же отношении. До сих пор наша формула совпадает с результатами опыта [1].

Рассмотрим теперь влияние изменения направления магнитного поля при неизменной его интенсивности $|H|$. Изменяя направление поля на противоположное, мы тем самым дадим другие значения величинам H_x, H_y, H_z, а также и выражению (178). Ясно, что если мы, оставив поле неизменным, повернем вместо этого излучающую частичку, произойдет такое же изменение. Поэтому, если в источнике света заключается большое число частичек, имеющих самую различную ориентацию, расстояние (178) будет в известных пределах изменяться, так что внешние линии наблюдаемого триплета, вызываемые излучением всех частичек, вместе взятых, должны быть более или менее размытыми.

Так как весьма трудно допустить, чтобы частички светящегося газа, находящегося в магнитном поле, удерживались в определенном положении, единственный возможный путь для объяснения триплетов с резкими внешними составляющими заключается в том, чтобы сделать определенное предположение [2]) относительно коэффициентов в (178), а именно, допустить, что квадратичная функция имеет вид

$$q_{11}(H_x^2+H_y^2+H_z^2)=q_{11}H^2.$$

В этом случае влияние магнитного поля на частоты не зависит от того, как магнитная сила направлена по отношению к частичке. Поскольку дело касается этого влияния, частичку можно тогда назвать изотропной.

---

[1]) Примечание **47**.

[2]) См., впрочем, примечание **64**.

Простой механизм, который мы приняли в элементарной теории явления Зеемана, очевидно, удовлетворяет тем условиям, к которым приводят предыдущие рассуждения. В самом деле, если мы имеем всего один электрон, который может смещаться из своего положения равновесия во всех направлениях, и если сила, которая возвращает его в это положение, не зависит от направления смещения, то он изотропен как раз в том смысле, какой мы только что имели в виду. В то же время он обладает тремя степенями свободы соответственно смещениям в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

94. Теперь возникает вопрос, можем ли мы вообразить другие, более сложные системы, которые удовлетворяли бы условиям, необходимым для получения магнитных квадруплетов, квинтуплетов и т. д. В качестве примера системы такого рода я могу указать на ту модель, при помощи которой А. А. Робб [1]) объяснил появление квинтуплета. Для этой цели он принимает, что излучающая частичка содержит два подвижных электрона; положения равновесия обоих электронов совпадают друг с другом; они притягиваются к этому положению упругими силами, пропорциональными смещению; коэффициенты пропорциональности одинаковы для обоих электронов. Заряды и массы тоже принимаются одинаковыми. Робб не говорит о взаимодействии электронов, но вводит известные связи между их положениями и движениями. Если $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ суть два вектора, проведенных из положения равновесия к двум электронам, и $\boldsymbol{r}_{12}$ — вектор, проведенный от первого электрона ко второму, эти связи выразятся уравнениями:

$$\boldsymbol{r}_{12}^2 = k(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2),$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{12}^2 = k(\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_2^2),$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{12}^2 = k(\ddot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \ddot{\boldsymbol{r}}_2^2),$$

где k — некоторая постоянная. Совершенно ясно, что во всех этих предположениях нет ничего, что выделяло бы

---

[1]) A. A. Robb, Beiträge zur Theorie des Zeeman-Effektes, Ann. Phys. 15 (1904), стр. 107.

среди других какое-нибудь определенное направление в пространстве. В силу этого же пять различных частот, которые обнаруживаются под действием магнитной силы, не зависят от направления этой силы, и может существовать большое число систем описанного типа, которые дают квинтуплет с резкими линиями.

Робб разработал свою теорию гораздо дальше, чем это может показаться из тех немногих слов, которые я сказал по этому поводу; она безусловно весьма остроумна. Но все же его гипотеза о связях между двумя электронами кажется мне очень искусственной, и я боюсь, что он дал нам лишь отдаленное изображение того, что происходит на самом деле.

95. То же самое следует сказать про гипотезу, которую выставлял много лет тому назад я сам. Уяснив себе, что колеблющиеся частички должны быть изотропными, я рассмотрел движения таких систем, которые заведомо обладают этим свойством, а именно: движения равномерно заряженных сферических слоев, обладающих упругостью того или иного рода и колеблющихся в магнитном поле. При помощи сферических функций легко определить различные фундаментальные движения, соответствующие, если так можно выразиться, различным тонам слоя; я нашел, что каждый из этих тонов может возникать как следствие нескольких фундаментальных колебаний, так что мы можем действительно сказать, что каждая спектральная линия (если колебания могут вызывать свет) состоит из известного числа совпадающих линий, причем это число увеличивается по мере того, как мы переходим к более высоким тонам слоя. Вычисление влияния внешнего магнитного поля подтвердило предсказание общей теории; если некоторая частота может быть осуществлена тремя, пятью или семью независимыми способами, соответствующая ей спектральная линия расщепляется на 3, 5 или 7 составляющих.

Но по целому ряду причин эту теорию колеблющихся сферических слоев вряд ли можно рассматривать как нечто большее, чем иллюстрацию общей динамической проблемы; нельзя сказать, чтобы она дала нам удовлетворительное представление о процессе излучения. Во-первых, если бы ряд тонов слоя вызывал ряд последовательных членов в спектральной серии, то число составляющих, на которые эта линия расщепляется в магнитном поле, должно было бы возрастать по мере продвижения к более преломляемому концу спектра. Это находится в противоречии с результатами позднейших опытов, которые, как я уже упоминал, показали, что все линии одной серии расщепляются совершенно одинаковым образом.

Во-вторых, я обнаружил, что сферические слои, колеблющиеся в более высоких тонах, являются весьма плохими излучателями. В колебаниях этого вида поверхность слоя делится узловыми линиями на участки, колеблющиеся в различных фазах, так что с двух сторон узловой линии колебания находятся в противоположных фазах. Колебания, исходящие из этих участков, необходимо должны вследствие интерференции в значительной степени взаимно уничтожаться [22].

96. В свете современных знаний возникает еще третье, весьма серьезное возражение. Хотя расщепление составляющих в явлении Зеемана не является в точности таким, каким оно должно было бы быть, если бы отношение $\frac{e}{m}$ в формуле (164) имело значение, выведенное из опытов с катодными лучами, все же оно, по крайней мере по порядку величины, совпадает с тем значением, которое мы получили бы в этом случае. Поэтому, если мы обозначим через $\left(\frac{e}{m}\right)_c$ отношение, полученное из наблюдений над катодными лучами, и если мы воспользуемся символом $(=)$ для обозначения того, что мы имеем две величины одного и того же порядка, мы получим для расстояния между двумя «магнитными» составляющими общую формулу

$$\delta_n (=) \left(\frac{e}{m}\right)_c \frac{|\boldsymbol{H}|}{c}. \tag{179}$$

С другой стороны, теория колеблющихся слоев приводит к уравнению вида

$$\delta_n (=) \frac{e_s}{m_s} \frac{|\boldsymbol{H}|}{c}, \tag{180}$$

где e_s есть заряд, а m_s — масса слоя.

Из (179) и (180) мы можем заключить, что

$$\frac{e_s}{m_s} (=) \left(\frac{e}{m}\right)_c.$$

Это уравнение показывает, что свойства заряженной сферической поверхности не могут слишком сильно отличаться от свойств свободного электрона. Поэтому, раз мы знаем, что масса m_c такого электрона является чисто электромагнитной, мы должны допустить, что и масса слоя m_s имеет тот же характер. Но это приводит нас к затруднению, когда мы подходим к рассмотрению частот колебаний. Относительные движения частей слоя зависят отчасти от электрических взаимодействий между этими частями; если предположить даже, что они определяются ими всецело, т. е. если не существует никакой «упругости» другого рода, длины волн, соответствующие различным тонам (как я их назвал), будут в силу вышеприведенного предположения относительно массы весьма малы; они будут того же порядка малости, что и радиус R_s. Они будут еще меньше, если существует еще добавочная упругость. И так как радиус R_s, разумеется, должен быть гораздо меньше длины световой волны, то нет никакой надежды, чтобы нам удалось свести процесс испускания света к упругим колебаниям шаров с такими зарядами и радиусами, какие требуются порядком величины явления Зеемана.

97. Ясно, каким образом можно избежать только что указанного затруднения. Мы должны приписать излучение не упругим колебаниям при деформации электронного слоя, но таким колебаниям, при которых они перемещаются на некоторое небольшое расстояние как целое. Движения такого рода могут возникать в атоме, содержащем известное число отрицательных электронов; при этом последние должны быть расположены таким образом, чтобы находиться в состоянии устойчивого равновесия под влиянием сил своего взаимодействия и тех сил, которые вызываются положительными зарядами в атоме. Эта картина весьма напоминает то представление, которое было в больших подробностях разработано Дж. Дж. Томсоном [1]) и по которому атом состоит из положительного заряда, равномерно распределенного по объему сферы, и из известного числа отрицательных электронов, находящихся внутри этого шара и расположенных в определенные геометрические конфигурации [[23]].

В дальнейшем будет удобно давать имя «электрон» только этим отрицательным частичкам, или, как их называет Томсон, «корпускулам».

Если атом как целое является незаряженным, общий положительный заряд шара должен быть равен сумме зарядов отрицательных электронов; мы можем, впрочем, представить себе и такие случаи, когда это условие не будет соблюдено.

Интересно исследовать размеры, которые следует приписать такой системе. Пусть взаимные расстояния электронов будут того же порядка величины, как некоторый отрезок l, и пусть e будет заряд каждого электрона. Тогда отталкивание между двумя электронами будет порядка $\frac{e^2}{4\pi l^2}$, а изменение, которое эта сила испытывает при весьма малом смещении δ одной из корпускул, порядка

$$\frac{e^2\delta}{4\pi l^3}.$$

Можно рассматривать это изменение как некоторую добавочную силу, которая начинает действовать благодаря смещению δ. Мы исключим из рассмотрения такие случаи, в которых добавочные силы вызываются большим количеством электронов, действующих в одном и том же направлении, а также и такие, в которых добавочные силы, вызываемые отрицательными электронами, компенсируются или сильно превышаются силами, обусловленными положительными зарядами; тогда порядок величины общей силы, которая тянет электрон назад к его положению равновесия, дается вышеприведенным выражением.

---

[1]) J. J. Thomson, The corpuscular theory of matter, London, 1907, гл. 6 и 7.

Я буду предполагать, что электроны обладают тем же самым радиусом R, зарядом e и массой m, как свободные отрицательные электроны; длины волн, соответствующие их колебаниям, я обозначу через λ. Но по предыдущему для частоты мы имеем:

$$n^2 (=) \frac{e^2}{4\pi m l^3},$$

или в силу (72):

$$n^2 (=) \frac{3}{2} \frac{Rc^2}{l^3}.$$

Но

$$n = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

так что

$$l (=) \sqrt[3]{\frac{3R\lambda^2}{8\pi^2}}.$$

Полагая $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ *см* и вводя значение R (§ 35) получаем уравнение

$$l (=) 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ см} (=) 1{,}6 \cdot 10^5 R.$$

Это значит, что электроны должны быть расположены на таких расстояниях друг от друга, которые гораздо больше их собственных размеров, так что атом сравнительно с отдельными электронами весьма велик. Несмотря на это, он весьма мал по сравнению с длиной волны, так как по вышеприведенным данным мы имеем:

$$l (=) 5 \cdot 10^{-4} \lambda.$$

Одним из последствий большого значения, получающегося для $l : R$, является то, что электромагнитные поля электронов не накладываются друг на друга в заметной степени. Это — очень важное обстоятельство, так как в силу его мы можем приписать каждому электрону ту электромагнитную массу, которой он обладал бы, если бы был совершенно свободным.

Величина, которую мы получили для l, — того же порядка, как и те приближенные значения, которые приписываются молекулярным размерам. Мы можем поэтому надеяться, что не сойдем с правильного пути, если продолжим нашу попытку объяснить возникновение света колебаниями электронов под действием *электрических* сил.

98. Легко видеть, что несколько собранных вместе отрицательных электронов никак не могут образовать устойчивой системы, если они не будут связаны какими-нибудь внешними силами. Такое действие предусмотрено в модели Дж. Дж. Томсона, где мы имеем положительную сферу, притягивающую электроны к центру O; мы должны предположить, что она распространяется *за* электроны, так как иначе не было бы настоящего статического равновесия. Как уже сказано, я буду пользоваться таким же представлением, но несколько отойду от идей Томсона, поскольку я не буду рассматривать плотность ρ как величину, постоянную по всей сфере; я, напротив, буду принимать ее за некоторую неизвестную функцию расстояния r до центра. Как мы увидим, большая общность, достигаемая таким путем, представит некоторый интерес. С небольшими изменениями наши формулы могут быть применены и к случаю, когда электроны притягиваются к центру O вообще некоторой силой $f(r)$ неизвестного происхождения, так как любое поле сил, симметричное относительно центра O, может быть заменено электрическим полем, образующимся внутри сферы, в которой плотность является соответственным образом подобранной функцией от r.

Я, впрочем, буду предполагать, что плотность ρ положительна для всех слоев сферы и что она уменьшается по мере удаления от центра.

Как известно, на основании исследований в области α-лучей радиоактивных тел и каналовых лучей физики пришли к выводу, что положительное электричество всегда связано с массой атома[1]). В соответствии с этим выводом мы примем, что в положительной сфере сосредоточена почти вся масса атома, причем ввиду больших размеров этой массы по сравнению с массой отрицательных электронов шар остается неподвижным, в то время как электроны внутри него движутся. Вопрос о том, является ли

---

[1]) См., впрочем, примечание **64**.

масса положительного шара материальной или электромагнитной, мы оставим в стороне. Конечно, последнюю возможность нужно откинуть, если мы приложим к положительному электричеству формулу вроде той, которую мы раньше прилагали к электромагнитной массе электрона; ввиду большого радиуса шара масса, вычисленная по формуле, будет представлять собой лишь незначительную часть массы отрицательных электронов. Может, впрочем, быть и так, что часть заряда будет сосредоточена в большом числе небольших частичек, находящихся на неизменных расстояниях; в этом случае полная электромагнитная масса положительных зарядов может достигать весьма значительной величины.

99. Прежде чем переходить к частному случаю, следует сделать еще несколько замечаний.

Во-первых, атом, который содержит N подвижных отрицательных электронов, будет иметь $3N$ степеней свободы. Следовательно, если его колебаниями объяснять существование одной или нескольких спектральных серий, число электронов должно быть весьма велико. Оно должно даже было бы быть бесконечным, если серия действительно состоит из бесконечного числа линий, как это вытекает из уравнений Ридберга. Однако, так как эти формулы только приближенные и ввиду того, что фактически мы наблюдаем только конечное число линий, я думаю, что это соображение не помешает нам приписать испускание света атомам, содержащим конечное, хотя, вероятно, и весьма большое, число отрицательных электронов.

Во-вторых, мы введем условие, что колеблющаяся система должна быть изотропна. Истинной изотропии, т. е. полной одинаковости свойств во всех направлениях, никоим образом нельзя достигнуть при конечном числе отдельных частичек. Это обстоятельство не вызовет никаких недоразумений только в том случае, если мы ограничимся объяснением существования триплетов, так как в этом случае нам будет достаточно, чтобы свойства были одинаковы по *трем* взаимно перпендикулярным направлениям. Можно легко представить себе для различного числа корпускул ряд расположений, обладающих изотропией такого ограниченного вида, при том условии, однако, что число корпускул будет не меньше четырех. Электроны могут быть расположены в вершинах какого-либо правильного многогранника или нескольких таких многогранников, центры которых совпадают с центром положительного шара и относительное расположение которых отличается достаточной правильностью.

Наше последнее замечание будет относиться к излучению атома. Когда мы рассматривали излучение одного электрона, мы нашли, что оно определяется ускорением. Отсюда можно заключить, что излучение, вызываемое в удаленной точке атомом, в котором содержится несколько одинаково колеблющихся электронов и размеры которого весьма малы по сравнению с длиной волны, является тождественным с тем, которое имело бы место при наличии только одного электрона, движущегося с ускорением, равным сумме всех отдельных ускорений. В некоторых случаях — в особенности они легко могут встретиться в системах, представляющих весьма правильную геометрическую конфигурацию, — это результирующее ускорение равно нулю, так что вообще не наблюдается сколько-нибудь заметного излучения или в лучшем случае наблюдается весьма малое остаточное излучение, вызываемое тем обстоятельством, что расстояние различных электронов от рассматриваемой внешней точки не в точности одинаково; тогда мы должны складывать ускорения, относящиеся не к одному и тому же моменту, а к нескольким различным моментам времени. Колебания, отличающиеся этой особенностью, могут быть названы неэффективными.

100. Мы займемся теперь одним частным случаем — самым простым, какой можно себе представить, — а именно случаем четырех одинаковых электронов A, B, C, D, которые, разумеется, находятся в состоянии равновесия и расположены в вершинах правильного тетраэдра, центр которого совпадает с центром O положительного шара[1]).

[1]) Явление Зеемана в такой системе было уже рассмотрено Дж. Дж. Томсоном, который, впрочем, предполагал, что положительно заряженный шар имеет равномерную объемную плотность.

Легко определить фундаментальные колебания такой системы [1]). Чтобы получить простые формулы для частот, я представляю себе, что через A, B, C, D проходит сферическая поверхность; я обозначу через ρ значение плотности положительного заряда на этой поверхности и через ρ_0 — среднюю плотность внутри нее.

Я введу, далее, некоторый коэффициент ω, который может быть мерилом для явления Зеемана в тех случаях, когда оно имеется налицо. Мы будем заниматься только триплетами; тогда значение ω таково: действительную величину расстояния составляющих можно найти, если умножить на ω расстояние, которое получается для того же значения $\frac{e}{m}$ из элементарной теории.

При первом фундаментальном колебании все четыре электрона совершают одинаковые колебания вдоль прямых OA, OB, OC, OD таким образом, что в каждый момент времени они находятся на равных расстояниях от центра O. Частота такого движения, которое является неэффективным и на которое магнитное поле не действует, определяется выражением

$$n^2 = -\frac{\rho e}{m};$$

эта формула дает для n действительное значение, так как ρ положительно, а e отрицательно.

Другие фундаментальные колебания можно представить себе лучше всего, если за оси координат выбрать прямые, соединяющие средние точки противолежащих ребер тетраэдра, и остановиться на двух таких ребрах, например на тех, которые перпендикулярны OX. Пусть это будут ребра AB и CD, причем x положительно для первого и отрицательно для второго.

Корпускулы могут колебаться таким образом, что в каждый момент времени смещение любой из них из положения равновесия можно рассматривать как слагающееся из составляющей p, параллельной OX, и составляющей, ей перпендикулярной, которая для A и B направлена

[1]) Примечание 48.

вдоль AB, а для C и D — вдоль CD. Будем называть составляющую p положительной или отрицательной, смотря по ее направлению, которое может совпадать с направлением OX или быть ему противоположным, и будем придавать поперечному смещению положительный знак, если оно направлено от OX, и отрицательный знак, если оно направлено к этой прямой; тогда получаем для всех электронов

$$p = a \cos nt,$$

для поперечного смещения точек A и B

$$g = sp,$$

и для точек C и D

$$-g = -sp,$$

причем постоянная s определяется уравнением

$$s = \nu\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + 2\nu^2}, \tag{181}$$

где

$$\nu = \frac{2\rho - \rho_0}{8(\rho - \rho_0)}. \tag{182}$$

Двойной знак в (181) показывает, что мы имеем *два* колебания рассматриваемого рода. Частоты их неодинаковы; для них имеем формулу

$$n^2 = -\frac{e}{12m}\left\{6\rho - \rho_0 \pm 4(\rho - \rho_0)\sqrt{2(1 + 2\nu^2)}\right\}; \tag{183}$$

они оба являются эффективными в смысле их излучения в силу того ускорения, которое имеется у электронов в направлении OX. Система вызовет поэтому в спектре две линии L_1 и L_2.

Далее, очевидно без дальнейших объяснений, что в добавление к этим двум колебаниям, которые связаны, если можно так выразиться, с направлением OX, имеются подобные же колебания, связанные совершенно таким же образом с OY и OZ, так что L_1 и L_2 являются тройными линиями, которые в магнитном поле могут расщепиться на три составляющие. Для L_1 расстояние между внешними составляющими и средней линией определяется выражением

$$\omega = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{6\nu}{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}\right], \tag{184}$$

а для L_2 имеем:

$$\omega = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{6\nu}{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}\right]. \tag{185}$$

Кроме того, можно показать, что составляющие этих триплетов поляризованы совершенно так же, как это вытекает из элементарной теории; излучение вдоль линий сил опять состоит из двух поляризованных по кругу лучей различных частот; колебания в одном луче правые, а в другом — левые.

Следующее движение, на которое я должен теперь обратить ваше внимание, можно описать как закручивание системы вокруг одной из осей OX, OY или OZ. Первый из этих видов характеризуется малыми вращениями прямых AB и CD вокруг оси OX, причем направление вращения для каждой из этих прямых изменяется периодически и в каждый данный момент времени для указанных двух прямых вращение направлено в противоположные стороны. Ввиду того, что такое вращение вокруг OZ может быть разложено на вращение вокруг OX и вокруг OY, эти движения образуют только два фундаментальных колебания. Они являются неэффективными и их частота, которая дается формулой

$$n^2 = -\frac{1}{4}\frac{p_0 e}{m}, \tag{186}$$

не изменяется в магнитном поле.

Мы нашли теперь в общей сложности девять фундаментальных колебаний. Остаются вращения вокруг одной из осей OX, OY, OZ, но они производятся не теми внутренними силами, существование которых мы наперед приняли, и не могут быть названы колебаниями около положения равновесия.

101. Следует отметить, что (186) всегда дает действительное значение для n и что обе частоты, определяемые

(183), тоже являются действительными, если только значение ρ больше чем $\frac{4}{7}\rho_0$. Когда это условие соблюдено, первоначальное состояние системы есть состояние устойчивого равновесия.

Если мы примем гипотезу Дж. Дж. Томсона об однородно заряженном шаре, получаем $\rho=\rho_0$. В этом случае мы можем вместо (183), (184) и (185)[1]) написать:

$$n^2 = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0 e}{m} \text{ или } -\frac{1}{3}\frac{\rho_0 e}{m},$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \text{ или } 1.$$

102. Другие случаи, когда некоторое определенное число электронов расположено внутри положительного шара в правильной геометрической конфигурации, могут быть разобраны подобным же образом, хотя для большого числа частичек вычисления становятся весьма утомительными. Насколько я вижу, направление мыслей, которому мы следуем, не обещает нам возможности объяснить квадруплеты или квинтуплеты, так что в конце концов наш успех вряд ли можно назвать значительным. Главный интерес только что изложенной теории заключается в том, что она дает возможность объяснения таких магнитных триплетов, в которых расстояние между составляющими отличается от расстояния, получающегося в элементарной теории; на это указывает получение для ω величин, отличных от единицы. По нашим формулам ω может иметь даже отрицательное значение. В вышеприведенных примерах это имеет тот смысл, что в лучах, направленных вдоль линий сил, круговая поляризация внешних составляющих дублета может иметь знак, противоположный тому, который она имела бы по элементарной теории[2]).

Замечательно то, что отрицательные электроны могут, оказывается, производить явление Зеемана такого вида, что элементарная теория должна была бы приписать его существованию легкоподвижных положительных частичек.

---

[1]) Примечание 49.
[2]) Примечание 50.

103. Вскоре после открытия Зеемана некоторые физики указали, что, как и магнитное вращение плоскости поляризации, новое явление наводит на мысль о каком-то вращении вокруг линий сил, происходящем в магнитном поле. Несомненно, в пользу этой теории можно сказать очень многое. Если, однако, понимать под этим скрытые вращения, которые, по некоторым теориям, имеются в эфире, заполняющем магнитное поле (таким вращениям эти теории и должны приписать все действия магнитного поля), тогда развитие этого представления будет лежать за пределами теории электронов в том виде, как я ее излагаю, так как в этой теории мы принимаем за основу без всяких дальнейших обсуждений свойства эфира, которые нашли выражение в наших основных уравнениях. Имеется, однако, вращение другого рода, к которому мы в наших попытках объяснить явление Зеемана, может быть, можем прибегнуть.

Рассмотрим промежуток времени, в течение которого магнитное поле устанавливается в некоторой части эфира. Во время изменения магнитного поля $\boldsymbol{H}$ возникают электрические силы $\boldsymbol{d}$, распределение и величина которых определяются нашими основными уравнениями (2) и (5). Это те силы, которые вызывают индукционный ток, появляющийся в металлической проволоке; их можно считать модернизированными силами В. Вебера, которыми он объяснял явления диамагнетизма; это объяснение можно без труда изложить заново на языке теории электронов. Я рассмотрю теперь вращение, вызываемое этими силами в системе отрицательных электронов, с которой мы имели дело в предыдущих параграфах. При этом я введу предположение, что положительно заряженная сфера обладает такой большой массой, что ее можно считать неподвижной; я буду прилагать к системе отрицательных электронов законы, имеющие место для твердых тел; это не приведет к заметной ошибке, если время, в течение которого устанавливается магнитное поле, весьма велико по сравнению с периодами колебаний отдельных электронов.

104. Я опять ограничусь такими распределениями электронов, которые являются изотропными по отношению к трем взаимно перпендикулярным направлениям. Тогда, если провести оси координат через центр O в произвольном направлении и распространить суммирование на все отрицательные электроны системы, мы получим:

$$\sum x = \sum y = \sum z = 0.$$

Равным образом момент инерции будет иметь одинаковое значение по отношению к любой оси, проведенной через O. Мы можем написать для него выражение

$$Q = 2mK,$$

если

$$\left.\begin{aligned} &K = \sum x^2 = \sum y^2 = \sum z^2. \\ &\text{Мы имеем еще:} \\ &\sum xy = \sum yz = \sum zx = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (187)$$

Сила, действующая на один из электронов, дается выражениями

$$e\boldsymbol{d}_x, \quad e\boldsymbol{d}_y, \quad e\boldsymbol{d}_z;$$

поэтому для составляющих результирующей пары по отношению к точке O мы найдем:

$$e\sum(y\boldsymbol{d}_z - z\boldsymbol{d}_y), \quad e\sum(z\boldsymbol{d}_x - x\boldsymbol{d}_z), \quad e\sum(x\boldsymbol{d}_y - y\boldsymbol{d}_x). \qquad (188)$$

Под $\boldsymbol{d}$ мы будем разуметь электрическую силу, вызываемую причинами, лежащими вне системы. Ввиду малых размеров этой системы примем, что эта сила на всем протяжении системы будет иметь почти постоянное значение; тогда, обозначая через $\boldsymbol{d}_0$ электрическую силу в центре, мы можем написать:

$$\boldsymbol{d}_x = \boldsymbol{d}_{0x} + x\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial y} + z\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{d}_y = \boldsymbol{d}_{0y} + x\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial y} + z\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{d}_z = \boldsymbol{d}_{0z} + x\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial y} + z\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial z}.$$

Подставляя эти значения в выражения (188) и имея в виду уравнения (187), получаем:

$$eK\left(\frac{\partial d_z}{\partial y}-\frac{\partial d_y}{\partial z}\right),\quad eK\left(\frac{\partial d_x}{\partial z}-\frac{\partial d_z}{\partial x}\right),\quad eK\left(\frac{\partial d_y}{\partial x}-\frac{\partial d_x}{\partial y}\right),$$

или в силу основного уравнения (5)

$$-\frac{e}{c}K\dot{h}_x,\qquad -\frac{e}{c}K\dot{h}_y,\qquad -\frac{e}{c}K\dot{h}_z.$$

Чтобы найти составляющие углового ускорения, мы должны разделить эти выражения на $Q=2mK$. В результате имеем:

$$-\frac{e}{2mc}\dot{h}_x,\qquad -\frac{e}{2mc}\dot{h}_y,\qquad -\frac{e}{2mc}\dot{h}_z,$$

откуда сразу видно, что после того, как установилось некоторое поле $\boldsymbol{H}$, система, которая вначале была в покое, приобретает вращательную скорость

$$\boldsymbol{k}=-\frac{e}{2mc}\boldsymbol{H}. \tag{189}$$

Ось вращения совпадает по направлению с магнитным полем, и если e отрицательно, направление вращения совпадает с направлением поля. Интересно, что скорость вращения не зависит от распределения электронов и что частота вращения, т. е. число обращений за время 2π, равна изменению частоты, которое мы вычислили по элементарной теории явления Зеемана.

Такое же вращение получилось бы и в том случае, если бы после того, как поле установилось, система была внесена в него посредством поступательного перемещения извне. Раз начавшись, вращение будет продолжаться в течение всего времени, пока поле будет поддерживаться постоянным; его скорость может изменяться только вследствие вызываемого им излучения; изменение это будет происходить медленно[1]).

105. Мы обратим теперь наше внимание на те малые колебания, которые могут иметь место в системе во время

---

[1]) Примечание **51**.

ее вращения. Для этого мы введем оси координат, имеющие неподвижное положение в системе, и будем различать между движением по отношению к этим осям — относительным движением — и движением по отношению к осям, неподвижным в пространстве, которое мы можем назвать абсолютным.

Пусть $\boldsymbol{v}$ будет абсолютная скорость некоторого электрона, $\boldsymbol{q}$ — абсолютное ускорение, $\boldsymbol{q}_1$ — та его часть, которая вызывается внутренними силами системы, и $\boldsymbol{q}_2$ — часть, вызываемая магнитным полем. Мы получим тогда для ускорения $\boldsymbol{q}'$ относительного движения, если пренебрежем членами, зависящими от квадрата угловой скорости $\boldsymbol{k}$ и, следовательно, от квадрата магнитной силы $\boldsymbol{H}$, выражение

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} - 2[\boldsymbol{kv}] = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 - 2[\boldsymbol{kv}],$$

или в силу (189)

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{Hv}].$$

На основании того, что

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{vH}],$$

получаем [1]):

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}_1.$$

Это показывает, что относительное движение определяется исключительно внутренними силами системы; оно идентично с тем движением, которое могло бы иметь место в системе, не имеющей вращения и свободной от влияния магнитного поля. Это можно выразить так, что в системе, вращающейся с вычисленной нами скоростью, нет *внутреннего* явления Зеемана; при этом слово «внутреннее» вводится по той причине, что, как я сейчас покажу, во внешнем излучении явление Зеемана все же остается. Это действие вызывается той же самой причиной, которая приводит к исчезновению внутреннего действия, а именно вращением частичек.

106. Мы уже видели (§ 99), что частичка, которая содержит некоторое число одинаково колеблющихся элек-

---

[1]) Примечание 52.

тронов и размеры которой весьма малы по сравнению с длиной волны, будет излучать совершенно таким же образом, как и одиночный электрон того же рода, который движется с ускорениями $\sum \ddot{x}$, $\sum \ddot{y}$, $\sum \ddot{z}$; здесь знак суммы распространяется на все отдельные электроны и x, y, z суть координаты последних по отношению к осям, неподвижным в пространстве. Ускорения будут иметь эти значения, если координаты эквивалентного электрона, как его можно назвать, даются в каждый момент времени значениями $\sum x$, $\sum y$, $\sum z$.

Чтобы применить эту теорему к нашей задаче, я опять приму центр положительного шара за начало координат и проведу ось OZ в направлении внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Пусть OX и OY будут неподвижны в пространстве, OX' и OY' — оси, вращающиеся вместе с системой, k — положительная или отрицательная скорость вращения вокруг OZ; так как угол между OX и OX' можно принять равным kt, мы можем положить:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos kt - y' \sin kt, \\ y &= x' \sin kt + y' \cos kt. \end{aligned}\right\} \tag{190}$$

Если теперь x'_0, y'_0, z'_0 суть координаты одного из отрицательных электронов в его положении равновесия, а $\alpha \cos(nt+f)$, $\beta \cos(nt+g)$, $\gamma \cos(nt+h)$ представляют собой смещения электрона из этого положения, вызываемые внутренними колебаниями и отнесенные к подвижным осям, то получим для этой частички

$$x' = x'_0 + \alpha \cos(nt+f), \qquad y' = y'_0 + \beta \cos(nt+g). \tag{191}$$

Постоянные α, β, f, g (и γ, h) будут иметь различные значения для разных электронов, но частота n у всех этих корпускул будет одна и та же и будет равна частоте излучения в отсутствие магнитного поля.

Подставляя значения (191) в выражения (190) и беря сумму для всех корпускул, мы найдем координаты x, y для эквивалентного электрона. Так как $\sum x'_0 = \sum y'_0 = 0$, результат можно представить в виде

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2,$$

где

$$x_1 = A\cos\{(n+k)t+\varphi\}, \quad y_1 = A\sin\{(n+k)t+\varphi\},$$

$$x_2 = B\cos\{(n-k)t+\psi\}, \quad y_2 = -B\sin\{(n-k)t+\psi\},$$

причем A, B, φ и ψ суть постоянные. Эти формулы показывают, что, не касаясь колебания в направлении OZ, на которое ни поле, ни вращение не оказывают никакого влияния, мы можем разложить движение эквивалентного электрона на два круговых движения в противоположных направлениях с частотами $n+k$ и $n-k$. И так как в силу (189) k дается уравнением

$$k = -\frac{e}{2mc}|H|,$$

то явление Зеемана в излучении, исходящем от вращающейся частички, в точности соответствует тому, которое мы вычислили раньше на основании элементарной теории для невращающейся частички.

107. В этом последнем видоизменении теории имеется один или два пункта, которые следует отметить особо.

Во-первых, мы можем представить себе, что система электронов внутри положительной сферы обладает фундаментальными колебаниями различного периода, образуя тем самым спектральную серию. Вследствие вращения, вызываемого полем, все эти линии превратятся в одинаковые триплеты, так что мы нашли теперь случай, в котором все линии серии расщепляются одинаковым способом, как это и имеет место в действительности. Я должен добавить, что согласно развиваемому нами взгляду явление Зеемана вызывается *комбинацией* внутренних колебаний с частотой n и вращения с частотой k.

Это приводит к одному еще более общему замечанию. Известно, что в акустических явлениях два тона с частотами n_1 и n_2 часто сопровождаются так называемыми комбинационными тонами с частотами n_1+n_2 и n_1-n_2. Нечто подобное происходит и в других случаях, в которых движение или какое-нибудь другое явление обнаруживает в одно и то же время двоякую периодичность; в самом деле, в силу этих периодичностей в математические выражения войдут такие члены, как $\cos n_1t$ и $\cos n_2t$, а раз в формулах окажутся произведения двух величин, имеющих два различных периода, то простая тригонометрическая формула

$$\cos n_1t \cos n_2t = \frac{1}{2}\cos(n_1 + n_2)t + \frac{1}{2}\cos(n_1 - n_2)t$$

приведет нас к двум новым частотам $n_1 + n_2$ и $n_1 - n_2$. И действительно, в предыдущем параграфе частоты $n + k$ и $n - k$ появились именно таким путем.

Много лет назад В. А. Юлиус заметил, что можно прийти к пониманию некоторых закономерностей в спектрах элементов, если предположить, что линии вызываются комбинационными тонами, причем это слово разумеется в том широком смысле, который может быть ему придан на основании вышесказанного. Если, например, мы имеем два фундаментальных колебания с частотами n_1 и n_2, или, короче, с двумя «тонами» n_1 и n_2, и если каждый из них входит в комбинацию с серией тонов, так что появляются вторичные тоны с частотами, равными разностям между вызывающими их тонами, мы получим серию пар, в которой составляющие каждой пары находятся на расстоянии $n_1 - n_2$ друг от друга.

В связи с этим следует также отметить, что в формуле Ридберга каждая частота представляется как разность двух основных частот.

Было бы, конечно, преждевременно придавать большое значение подобного рода рассуждениям. Однако, принимая во внимание тот факт, что все линии одной серии испытывают одинаковое магнитное расщепление, трудно удержаться от мысли, что все фундаментальные колебания, относящиеся к одной серии, каким-то образом комбинируются с одним или несколькими периодическими явлениями, происходящими в магнитном поле, как в том примере, который мы разобрали, они комбинировались с вращением частичек.

Я должен добавить, что самая форма уравнений Ридберга, в которых каждая частота представляется в виде разности двух «термов», естественным образом приводит к мысли, что под влиянием магнитного поля один или оба этих терма изменяют свое значение или, вернее, заменяются целым рядом слегка различных термов, каждому из которых соответствует отдельная магнитная составляющая. Представим себе, что для всех линий некоторой серии та часть величины $\frac{n}{N_0}$, которая является для них общей, — например, часть $\frac{1}{(1+\mu_1)^2}$ во второй побочной серии I (§ 82), — претерпевает одинаковое изменение, а другая часть $\frac{1}{(m+\sigma)^2}$ остается неизменной; ясно, что этим самым одинаковый характер явления Зеемана для всех членов серии получит свое полное объяснение.

108. Во-вторых, важно отметить, что для полного уничтожения внутреннего явления Зеемана скорость частички как целого должна иметь как раз то значение, какое мы для нее нашли в § 104.

Для других значений k, которые могли бы, например, появиться, если бы вращающаяся частичка имела момент инерции, отличный от того, который мы принимали раньше, q' получило бы другое значение, чем q_1, так что на относительное движение электронов по отношению к вращающимся осям магнитная сила оказывала бы некоторое действие. В таком случае, чтобы найти явление Зеемана в том виде, в каком оно проявляется в излучении, мы должны будем комбинировать внутренние движения с вращением по способу, показанному в § 106; в результате получим, очевидно, разложение первоначальных спектральных линий на большее, чем три, число составляющих.

На первый взгляд этот результат представляется весьма обещающим, но необходимо признать, что весьма трудно указать какое-либо основание для существования момента инерции, отличного от того значения, которым мы пользовались в § 104; было бы также весьма трудно примирить результаты с правилом Рунге относительно кратного расщепления линий.

109. Вышеизложенная теория вращающихся и излучающих частичек дает повод к некоторым возражениям. Наряду с двумя случаями, упомянутыми в § 104, следует, вероятно, признать возможным еще и третий. В трубке Гейслера или пламени мельчайшие частички, без сомнения, непрерывно соединяются и распадаются; поэтому нельзя быть уверенным в том, что излучающий атом находился в свободном состоянии в момент возникновения магнитного поля. Но в атомах, соединившихся с другими частичками, подвижность электронов, возможно, уменьшена настолько, что поле не может привести их во вращательное движение, а так как нет никакой причины, чтобы они начали вращаться в тот момент, когда атомы могли освободиться, то мы можем себе представить, что в магнитном поле имеются свободные атомы, не обладающие вращением.

Другое затруднение, которое возникает также в некоторых вопросах теории магнетизма, вытекает из того факта, что вращающаяся частичка, заряд которой распределен не вполне равномерно, необходимо должна по истечении некоторого промежутка времени потерять свою энергию путем излучения, вызываемого самим вращением. Весьма вероятно, что промежуток времени, потребный для заметного уменьшения вращения, будет весьма продолжителен. Точное определение его потребовало бы, однако, довольно сложных вычислений [24].

110. Вы видите из всех этих рассуждений, что в объяснении сложных форм явления Зеемана мы, пожалуй, потерпели неудачу. При таком положении вещей представляется интересным, что некоторые заключения, касающиеся поляризации излучения, можно вывести из общих принципов независимо от какой-либо частной теории. Для этого мы обратимся к рассмотрению того, что может быть названо отраженным изображением электромагнитной системы.

Пусть S есть система, состоящая из движущихся электронов и материальных частичек, причем движение первых сопровождается электромагнитным полем в окружающем систему эфире. Возьмем вторую систему S', которую можно назвать изображением S по отношению к плоскости V, определив ее следующим образом. Каждой частичке или электрону — вообще каждому заряженному элементу объема S — соответствует такая же частичка, электрон или элемент в объеме S'; два любых соответственных элемента в двух системах движутся таким образом, что положения их в каждый данный момент времени оказываются симметричными по отношению к плоскости V; далее, если P и P' являются соответствующими точками, вектор, выражающий диэлектрическое смещение в P', является зеркальным изображением соответствующего смещения в P; магнитные же силы в S и S' выражаются векторами, один из которых является *обращенным изображением* другого. При некоторых допущениях относительно сил, действующих между электронами и другими частичками, — допущениях, которые представляются достаточно общими и охватывающими все действительные случаи, — можно показать, что такая система S' является вполне возможной, если только S действительно существует.

Мы применим это рассуждение к обычному опыту, посредством которого демонстрируется явление Зеемана; мы остановимся на случае, когда лучи распространяются вдоль линий сил, и расположим плоскость V параллельно этим линиям. Имеется много положений плоскости, удовлетворяющих этому условию, но ясно, что, какое бы из них мы ни выбрали, изображение электромагнита всегда будет обладать одними и теми же свойствами. То же самое можно сказать и про источник света, поскольку его свойства доступны нашим наблюдениям; поэтому и излучение тоже должно быть одинаково во всех системах, которые могут быть получены, если строить изображение нашего опыта по отношению к плоскостям, параллельным линиям сил. Отсюда мы можем непосредственно заключить, что в свете, испускаемом вдоль линий сил, никак не может быть и следа эллиптической или прямолинейной поляризации; он должен быть или неполяризованным, или поляризованным по кругу — частично или полностью. Это заключение имеет место также для любой части излучения, которая характеризуется определенной частотой и находится поэтому в определенной части спектра.

Рассуждая подобным же образом, мы можем предсказать, что при излучении перпендикулярно линиям сил никоим образом не может существовать иной поляризации — частичной или полной — кроме плоской, и плоскость поляризации должна быть параллельна или перпендикулярна линиям сил.

Наконец, ввиду того, что изображение магнитного поля по отношению к плоскости, о которой мы говорили, есть поле, направленное в противоположную сторону, состояние излучения должно переходить в его изображение при изменении направления магнитного поля. В каждой точке спектра круговая поляризация изменит свое направление в один и тот же момент времени.

ГЛАВА IV

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ТЕЛЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ МОЛЕКУЛ. ТЕОРИЯ ОБРАТНОГО ЯВЛЕНИЯ ЗЕЕМАНА

111. В предыдущих рассуждениях мы имели в виду влияние магнитного поля на свет, *испускаемый* источником. Соответствующее влияние сказывается и на поглощении, как это было показано в одном из первых же опытов Зеемана. Он нашел, что темные линии, которые появляются в спектре лучей белого света, пропущенных через натровое пламя, изменяются совершенно таким же образом, как и линии испускания светящихся паров, когда пламя помещено во внешнее магнитное поле. Мы легко можем понять это обратное явление, если вспомним тесную связь между испусканием и поглощением света. Согласно известному закону резонанса тело, частички которого могут совершать свободные колебания некоторых определенных периодов, должно обладать способностью поглощать падающий на него извне свет тех же самых периодов. Поэтому, если в натровом пламени под влиянием магнитного поля образуются вместо одного три периода свободных колебаний, мы можем ожидать, что пламя обнаружит в сплошном спектре три линии поглощения, соответствующие этим периодам, и что вообще, если нам нужно знать, какой свет испускается телом при известных обстоятельствах, нам достаточно исследовать *поглощение* проходящего через него пучка света.

Фохт[1]) разработал в высшей степени интересную теорию, построенную на этой основе. Ее преимущество заключается в том, что она является применимой также к телам настолько большой плотности, что между соседними молекулами уже наблюдается некоторое взаимодействие; этот случай при рассмотрении испускания света представляет значительные трудности.

Теория Фохта первоначально была изложена не на языке теории электронов; первый его метод принадлежит именно к тем упомянутым мной раньше методам, в которых делается попытка описать явления при помощи соответственно подобранных дифференциальных уравнений, причем автор не беспокоится о механизме, лежащем в их основе. Для того, однако, чтобы не удаляться от основного предмета этих лекций, я выведу уравнения Фохта или, вернее, ряд формул, им эквивалентных, применяя принципы теории электронов к распространению света в весомом теле, рассматриваемом как система молекул.

Эти формулы представляют некоторый интерес также потому, что при помощи их мы можем разобрать ряд других вопросов, относящихся к скорости распространения и поглощения света различных частот. Будет правильно, если мы начнем именно с некоторых из этих вопросов, отложив на некоторое время рассмотрение вопроса о действии магнитного поля.

112. Представим себе тело, состоящее из очень большого числа молекул и атомов, или «частичек», как я буду называть их, причем каждая частичка содержит некоторое количество электронов; все эти электроны или часть их приводятся в колебание падающим на них пучком света. Между электронами и внутри них будет находиться некоторое электромагнитное поле, которое можно определить при помощи наших основных уравнений, если известно распределение и движение зарядов; а вычислив поле, будет

---

[1]) W. Voigt, Ann. Phys. Chem. **67** (1899), стр. 345; **68** (1899), стр. 352, 604; **69** (1899), стр. 290; Ann. Phys. **1** (1900), стр. 376, 389; **6** (1901), стр. 784; см. также его книгу: Magneto- und Elektrooptik, Leipzig, 1908.

возможно определить и его действие на подвижные электроны и составить уравнение движения для каждого из них.

Но такой метод, в котором предметом наших исследований должны являться движения индивидуальных электронов и поле в их непосредственной близости и даже внутри них, оказывается совершенно неприменимым, когда, как это, например, имеет место в газообразных телах и жидкостях, частички распределены в пространстве в высшей степени неправильно. Мы не можем и думать о том, чтобы проследить путь каждого электрона или определить во всех подробностях поле в пространстве между молекулами. Мы должны поэтому прибегнуть к другому методу. К счастью, для решения этой задачи у нас есть простой способ, вполне достаточный для разбора того, что мы наблюдаем на деле; способ этот напрашивается сам собой, по самой природе явления.

В наших опытах, в которых мы всегда имеем дело с очень большим количеством частичек, мы не можем исследовать ни движения отдельного электрона, ни поля, им образуемого; наши органы чувств воспринимают только суммарное действие, вызываемое ими. Можно надеяться, что те неправильности, о которых я говорил, в суммарном действии исчезнут и что это действие мы будем в состоянии объяснить, если с самого начала обратим наше внимание не на все эти неправильности, а на некоторые *средние* значения. Перейду теперь к их определению.

113. Пусть P — какая-нибудь точка тела, S — шар, описанный вокруг нее, как центра, φ — одна из скалярных или векторных величин, встречающихся в наших основных уравнениях. Тогда среднее значение φ в точке P, которое я буду обозначать через $\overline{\varphi}$, будет дано выражением

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{S}\int \varphi \, dS,$$

в котором S обозначает объем шара, по которому производится интегрирование. Элементы dS должны быть взяты бесконечно малыми в математическом смысле этого слова, так что даже один электрон делится на много элементов. Что касается шара S, его не следует выбирать ни слишком большим, ни слишком малым. Так как наша цель заключается в том, чтобы освободиться от неправильностей в распределении φ, в шаре должно содержаться весьма большое число частичек. С другой стороны, мы должны быть осторожны и не пропустить тех изменений от точки к точке, которые могут наблюдаться в действительности. Радиус шара должен быть поэтому настолько малым, чтобы состояние тела, поскольку оно является доступным при наших средствах наблюдения, можно было считать одинаковым по всему шару. В тех задачах, с которыми мы будем иметь дело, это означает, что радиус должен быть мал по сравнению с длиной волны. К счастью, молекулярные расстояния настолько малы по сравнению даже с самыми короткими длинами волн, что оба условия могут выполняться одновременно.

114. Среднее значение $\overline{\varphi}$, взятое для точки P, в общем случае является функцией координат этой точки; если φ само зависит от времени, $\overline{\varphi}$ тоже будет от него зависеть. Из нашего определения мы легко можем вывести соотношения

$$\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}, \ldots, \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}=\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t},$$

при помощи которых просто осуществляется переход от наших основных уравнений к соответствующим формулам для средних значений. Конечно, средние значения величин в правой и левой частях уравнений должны быть равны друг другу, так что нам остается только заменить $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ и т. д. их средними значениями.

Окончательные формулы, а именно

$$\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{h}}=\frac{1}{c}(\dot{\overline{\boldsymbol{d}}}+\overline{\rho\boldsymbol{v}})$$

и

$$\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{d}}=-\frac{1}{c}\dot{\overline{h}},$$

можно рассматривать как общие электромагнитные уравнения для весомого тела; их можно сравнить с теми, о которых я говорил в § 4. Чтобы сделать это сходство особенно ярким, я положу

$$\bar{d} = E$$

и

$$\bar{h} = H.$$

Остается рассмотреть только член $\overline{\rho v}$. По нашему определению средних значений мы имеем для составляющих этого вектора, если x, y, z являются координатами элемента движущихся зарядов в момент времени t,

$$\overline{\rho v_x} = \frac{1}{S}\int \rho v_x\, dS = \frac{1}{S}\int \rho \frac{dx}{dt}\, dS \quad \text{и т. д.},$$

или, если мы предположим, что поверхность шара не пересекает ни одного электрона:

$$\overline{\rho v_x} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{S}\int \rho x\, dS\right] \quad \text{и т. д.}$$

Мы видели ранее, что $\int \rho x\, dS$, $\int \rho y\, dS$, $\int \rho z\, dS$ являются составляющими электрического момента части тела, на которую распространено интегрирование. Поэтому $\frac{1}{S}\int \rho x\, dS$ и два соответствующих выражения для y и z являются составляющими электрического момента тела на единицу объема[1]).

Мы обозначим этот момент, или, как можно сказать иначе, электрическую поляризацию тела, через $\boldsymbol{P}$. Тогда

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{P}}$$

и

$$\dot{\bar{\boldsymbol{d}}} + \overline{\rho \boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{P}}.$$

Вводим дальнейшее упрощение, полагая

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}; \tag{192}$$

---

[1]) Примечание 53.

тогда мы приходим к уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{D}}, \tag{193}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{H}}, \tag{194}$$

которые имеют в точности ту же форму, как те, о которых мы говорили в § 4. Если угодно, можно назвать теперь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ электрической силой и диэлектрическим смещением, $\dot{\boldsymbol{D}}$ — током смещения. Это в точности совпадает с обычной терминологией; только при нашем определении этих векторов легко проследить постепенное развитие нашего основного предположения, что система состоит из эфира и частичек с их электронами. Так, $\boldsymbol{E}$ есть средняя сила, действующая на покоящийся заряд. Полное диэлектрическое смещение $\boldsymbol{D}$ состоит из двух частей, из которых одна, $\boldsymbol{E}$, относится к эфиру, а другая, $\boldsymbol{P}$, — к частичкам. Соответственно этому мы различаем две части в токе $\dot{\boldsymbol{D}}$: первая, $\dot{\boldsymbol{E}}$, есть средний ток смещения в эфире, а вторая — средний конвекционный ток $\rho\boldsymbol{v}$.

115. Чтобы дополнить нашу систему уравнений, мы должны теперь исследовать соотношение между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, или, вернее, между $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{E}$. Его можно найти, рассматривая, каким образом возникает или изменяется электрический момент частички.

Допустим, что каждая частичка содержит только один подвижный электрон с зарядом e и массой m, и обозначим через ξ, η, ζ расстояния, на которые он смещается из своего положения равновесия по направлениям осей координат. Составляющие электрического момента отдельной частички суть

$$\boldsymbol{p}_x = e\xi, \qquad \boldsymbol{p}_y = e\eta, \qquad \boldsymbol{p}_z = e\zeta;$$

обозначая через N число частичек в единице объема, имеем:

$$\boldsymbol{P}_x = Ne\xi, \qquad \boldsymbol{P}_y = Ne\eta, \qquad \boldsymbol{P}_z = Ne\zeta, \tag{195}$$

если частички имеют правильное геометрическое расположение. Если, наоборот, они расположены неправильно, так что значения смещений ξ, η, ζ резко изменяются от одной частички к другой, мы можем пользоваться теми же уравнениями, но тогда мы должны под ξ, η, ζ понимать средние значения, взятые для всех частичек, расположенных в пространстве, бесконечно малом в физическом смысле этого слова. То же относится к другим величинам, встречающимся в уравнениях, которые мы установим для движения электронов.

116. Значения ξ, η, ζ, а следовательно, и значения P_x, P_y, P_z зависят от сил, действующих на подвижные электроны. Эти силы могут быть четырех разных видов.

Во-первых, может существовать некоторая упругая сила, которая возвращает электрон обратно в его положение равновесия, если он из него выведен. Мы предположим, что эта сила направлена к указанному положению равновесия и пропорциональна смещению. Обозначая через f некоторую положительную постоянную, которая зависит от строения и свойств частички, мы напишем для составляющих этой упругой силы:

$$-f\xi, \quad -f\eta, \quad -f\zeta. \tag{196}$$

Вторая сила есть сопротивление движению электрона. Мы принуждены ввести действие подобного рода, так как без него мы не могли бы объяснить поглощение света, которое является одним из главных предметов нашего исследования. Следуя примеру, данному Гельмгольцем в его теории аномальной дисперсии, с которой настоящее исследование имеет много общего, я приму, что сопротивление пропорционально скорости электрона и направлено в сторону, противоположную последней. Поэтому, если g есть новая положительная постоянная, составляющие второй силы суть

$$-g\frac{d\xi}{dt}, \quad -g\frac{d\eta}{dt}, \quad -g\frac{d\zeta}{dt}. \tag{197}$$

Мы еще вернемся к этому вопросу ниже.

117. Нам предстоит, далее, рассмотреть силу, действующую на электрон, принимая во внимание электромагнитное поле эфира. На первый взгляд может показаться, что это действие должно быть выражено членом $e\boldsymbol{E}$.

Ближайшее рассмотрение показывает, однако, что следует сюда добавить член вида aeP, где a есть постоянная величина, значение которой несколько меньше, чем $\frac{1}{3}$. Я не буду останавливаться на несколько длинных вычислениях, которые требуются для определения этой добавочной силы. Чтобы объяснить, каким образом эта сила появляется, я должен только напомнить вам известный вывод, при помощи которого Кельвин когда-то установил различие между магнитной силой и магнитной индукцией. Он определил эти величины как силы, действующие на единичный полюс, который помещается внутри бесконечно малых полостей различной формы, окружающих рассматриваемую точку. Магнитно-поляризованные части тела, лежащие вне полости, в большей или меньшей степени поворачиваются своими полюсами по направлению к ней и вызывают, таким образом, на ее стенках некоторое распределение магнетизма, причем действие его на полюс, лежащий внутри, зависит, как оказывается, от формы полости.

В нашей задаче мы можем поступать совершенно так же, как Кельвин. Общие уравнения (33)—(36) показывают, что электромагнитное поле состоит из частей, производимых отдельными частичками системы, и если некоторые из них мы удалим, а движение электронов в остающихся частичках останется при этом без изменения, часть поля будет уничтожена. Мы должны, далее, принять во внимание, что каждая составляющая $\mathfrak{d}$ или $\mathfrak{h}$, принадлежащая к тому полю, которое производят частички, получается путем сложения соответствующих величин тех отдельных полей, которые производятся каждой отдельной частичкой. В тех случаях, когда прерывность молекулярного строения не проявляется в заметной степени, сумма может быть заменена интегралом. Если нам нужно знать поле, которое в точке A производится частью тела, кратчайшее расстояние которого от A весьма велико по сравнению со взаимными расстояниями соседних частичек, мы можем заменить действительное состояние в этой части тела таким, при котором поляризованная материя распределена равномерно.

Все эти рассуждения можно приложить также к намагниченным частичкам, которые нам приходится рассматривать в теории Кельвина, хотя эти случаи и представляют известные различия, так как формулы § 42 для поля, производимого переменным электрическим моментом, менее просты, чем те формулы, которые определяют действие постоянного молекулярного магнита. Эти формулы, впрочем, становятся очень похожими друг на друга, если точка, для которой требуется вычислить поле частички, лежит от нее на расстоянии, весьма малом по сравнению с длиной волны. В этом случае можно с достаточным приближением считать поле электростатическим — таким, каким оно было бы, если бы электрический момент не изменялся с течением времени.

Положим, что мы хотим определить действие на электрон, содержащийся внутри частицы A. Вокруг этой частицы мы проведем замкнутую поверхность σ, размеры которой бесконечно малы в физическом смысле этого слова; допустим на время, что все остальные частички, которые находились внутри этой поверхности, удалены из нее. Положение вещей является тогда в точности аналогичным случаю магнита, в котором сделана полость. На поверхности установится некоторое распределение электричества, вызываемое поляризацией внешней части тела; силу $\boldsymbol{E}'$, с которой этот поверхностный заряд будет действовать на единичный заряд в точке A, нужно добавить к силе $\boldsymbol{E}$, которая фигурирует в (194).

Если теперь удаленные нами частички возвратить на их место, их электрические моменты вызовут в частичке A третью силу $\boldsymbol{E}''$; общую электрическую силу, которая будет действовать на находящийся в точке A движущийся электрон, можно выразить в виде суммы

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E}''.$$

Ясно, что результат не может зависеть от формы полости σ, которую мы ввели только для того, чтобы произвести наши вычисления. Эти вычисления принимают самый простой вид, когда σ имеет сферическую форму. Тогда вычисление силы E' приводит к результату [1])

$$E' = \frac{1}{3} P.$$

Задача определения силы E'' несколько труднее. Я не буду сейчас на ней останавливаться подробно; скажу только, что для системы частичек, имеющих правильное кубическое расположение [2]),

$$E'' = 0;$$

этот результат можно с известной степенью точности применить вообще к изотропным телам, например к стеклу, жидкостям и газам. Впрочем, для них он является не вполне правильным и должен быть в общем случае заменен выражением

$$E'' = sP,$$

где s есть величина, постоянная для каждого тела; точное определение ее встречает, однако, некоторые затруднения. Полагая

$$a = \frac{1}{3} + s,$$

мы находим для электрической силы, действующей на электрон, выражение

$$E + aP.$$

118. Последняя сила, которую мы должны ввести, выступает на сцену при магнитооптических явлениях; она вызывается внешним магнитным полем, которое мы будем обозначать символом $\mathfrak{H}$, чтобы отличить ее от периодически изменяющейся магнитной силы H, вызываемой самими электрическими колебаниями [3]) и входящей в уравнения (193) и (194).

В последующем изложении мы будем предполагать, что внешнее поле $\mathfrak{H}$ имеет направление, совпадающее с осью OZ. Тогда его действие на колеблющийся электрон,

---

[1]) Примечание 54.
[2]) Примечание 55.
[3]) Примечание 56.

которое в общем случае представляется выражением

$$\frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}],$$

имеет составляющие

$$\frac{e\mathfrak{H}}{c}\frac{d\eta}{dt}, \quad -\frac{e\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi}{dt}, \quad 0,$$

где $\mathfrak{H}$ написано вместо $\mathfrak{H}_z$.

Суммируя все, что было сказано про различные силы, мы получаем для уравнений движения подвижного электрона, содержащегося в частичке, выражения

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= e(E_x + aP_x) - f\xi - g\frac{d\xi}{dt} + \frac{e\mathfrak{H}}{c}\frac{d\eta}{dt},\\
m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= e(E_y + aP_y) - f\eta - g\frac{d\eta}{dt} - \frac{e\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi}{dt},\\
m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= e(E_z + aP_z) - f\zeta - g\frac{d\zeta}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad (198)$$

119. Для наших целей окажется более удобной другая форма этих уравнений.

Во-первых, вместо смещений подвижного электрона мы введем составляющие электрической поляризации $\boldsymbol{P}$. Принимая во внимание соотношения (195), деля формулы (198) на e и полагая

$$\frac{m}{Ne^2} = m', \qquad \frac{f}{Ne^2} = f', \qquad \frac{g}{Ne^2} = g', \quad (199)$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned}
m'\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} &= E_x + aP_x - f'P_x - g'\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\mathfrak{H}}{cNe}\frac{\partial P_y}{\partial t},\\
m'\frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} &= E_y + aP_y - f'P_y - g'\frac{\partial P_y}{\partial t} - \frac{\mathfrak{H}}{cNe}\frac{\partial P_x}{\partial t},\\
m'\frac{\partial^2 P_z}{\partial t^2} &= E_z + aP_z - f'P_z - g'\frac{\partial P_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Эти уравнения можно преобразовать еще далее; для этого мы при нашем исследовании распространения простых гармонических колебаний воспользуемся известным методом, а именно, представим зависимые переменные в уравнениях посредством некоторых экспоненциальных выражений с мнимыми показателями степени; при этом действительные части этих выражений, к которым в конце концов приходится обращаться, и дают решение этой системы.

Пусть ε будет основание натуральных логарифмов и пусть все зависимые переменные содержат время только через посредство множителя

$$\varepsilon^{int},$$

так что n является частотой колебаний. Если при этом ввести для краткости

$$\alpha = f' - a - m'n^2, \tag{201}$$

$$\beta = ng', \tag{202}$$

$$\gamma = \frac{n\mathfrak{H}}{cNe}, \tag{203}$$

причем все эти величины являются *действительными*, формулы (200) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_x &= (\alpha + i\beta)\boldsymbol{P}_x - i\gamma\boldsymbol{P}_y, \\ \boldsymbol{E}_y &= (\alpha + i\beta)\boldsymbol{P}_y + i\gamma\boldsymbol{P}_x, \\ \boldsymbol{E}_z &= (\alpha + i\beta)\boldsymbol{P}_z. \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

Так как $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}$, то эти уравнения выражают соотношение между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, которое мы должны добавить к общим формулам (193) и (194).

120. Прежде чем подойти к решению нашей системы уравнений, полезно войти в некоторые детали, которые касаются причины, вызывающей поглощение. Так, мы допустили существование сопротивления, пропорционального скорости электрона; оно выражается членами $-g\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $-g\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $-g\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ в (198) и членами $i\beta\boldsymbol{P}_x$, $i\beta\boldsymbol{P}_y$, $i\beta\boldsymbol{P}_z$ в (204). Но следует заметить, что в наших основных уравнениях о сопротивлении такого рода нет и речи; как мы видели ранее, электрон может двигаться через эфир вечно с неуменьшающейся скоростью. В наших соображениях мы до сих пор встречались только с одной силой, которую можно определить как сопротивление, а именно с силой

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\dddot{v}, \tag{205}$$

которая пропорциональна скорости изменения ускорения. В случае простых гармонических колебаний составляющие этой силы могут быть представлены в виде (197) со следующим значением коэффициента:

$$g=\frac{e^2n^2}{6\pi c^3}. \tag{206}$$

Некоторые числовые данные, которые я приведу позже, показывают, однако, что эта сила (205) слишком мала, чтобы ею можно было объяснить то поглощение, которое во многих случаях наблюдается в действительности [1]). Мы должны поэтому искать какое-нибудь другое объяснение.

Я в свое время нашел такое объяснение в допущении, что внутри весомой частички колебания, производимые падающими световыми волнами, не могут происходить без всякой помехи вечно. Можно легко себе представить, что частички газообразного тела претерпевают при своих взаимных столкновениях такие сильные сотрясения, что всякое правильное колебание, в них начавшееся, превращается после толчка в неправильное движение, которое мы называем теплотой. На поднятие температуры, получающееся таким образом, должна быть затрачена часть энергии падающего света, так что имеет место действительное поглощение света. Ясно также, что накопление в частичке колебательной энергии, которое иначе при полном соответствии между периодом колеблющихся электронов и периодом световой волны никогда не пришло бы к концу, теперь будет благодаря этому возмущающему влиянию столкновений удерживаться в известных границах — совсем так, как это имело бы место при сопротивлении в обычном смысле этого слова.

Разрабатывая эту мысль, мы придем к заключению, что мы можем попрежнему пользоваться теми формулами,

---

[1]) Примечание **56** *.

которые были нами установлены раньше, если только будем теперь разуметь под g[1]) величину

$$g = \frac{2m}{\tau}, \tag{207}$$

где τ означает среднюю продолжительность промежутка времени, в течение которого колебания частички происходят без помехи. Так как мы можем пользоваться такими же формулами, как если бы мы имели дело с действительным сопротивлением, представляется удобным продолжать пользоваться этим термином и говорить о сопротивлении, возникающем вследствие столкновений и растущем при уменьшении промежутка времени τ.

Согласно этому представлению промежуток τ в газообразных телах должен быть равен среднему промежутку времени, протекающему между двумя последовательными столкновениями молекулы. К несчастью, оказалось, что величина τ, выведенная из экспериментальных данных, оказывается меньше, чем промежуток времени между двумя столкновениями. Отсюда мы должны заключить, что в самой молекуле имеются причины, по которым правильность колебаний нарушается раньше, чем это имело бы место при молекулярных столкновениях. Поэтому мы не можем утверждать, что удовлетворительно осветили явления поглощения; его истинная причина все еще остается неизвестной.

121. Оставив на некоторое время в стороне явления, вызываемые магнитным полем, мы перейдем теперь к рассмотрению распространения света в случае, когда $\mathfrak{H} = 0$, $\gamma = 0$. Предположим сначала, что нет вообще никакого сопротивления, так что β тоже равно нулю. Тогда формулы (204) можно написать так:

$$\boldsymbol{E} = a\boldsymbol{P},$$

откуда выводим:

$$\boldsymbol{D} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{E}. \tag{208}$$

---

[1]) Примечание **57**.

Пусть свет распространяется в направлении OZ, так что составляющие $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$ представляются выражениями, содержащими множитель

$$e^{in(t-qz)}, \tag{209}$$

где q — постоянная величина. Так как тогда все производные по x и y пропадают, мы получаем из (193) и (194):

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t},$$

или

$$qH_y=\frac{1}{c}D_x, \quad qE_x=\frac{1}{c}H_y,$$

откуда

$$D_x=c^2q^2E_x.$$

Сопоставляя это выражение с (208), получаем:

$$c^2q^2=1+\frac{1}{a}. \tag{210}$$

Предполагая, что $1+\frac{1}{a}$ есть величина положительная, мы получаем действительное значение и для q. Действительная часть (209) есть

$$\cos n(t-qz),$$

откуда видно, что скорость распространения имеет величину

$$v=\frac{1}{q}.$$

Ее поэтому можно вычислить при помощи уравнения (210), вместо которого можно написать:

$$\mu^2=1+\frac{1}{a},$$

если

$$\mu=\frac{c}{v}$$

есть показатель преломления.

Следует отметить, что наш результат совпадает с известным законом Максвелла, согласно которому показатель преломления тела равен корню квадратному из его диэлектрической постоянной. В самом деле, уравнение (208) показывает, что отношение между диэлектрическим смещением $\boldsymbol{D}$ и электрической силой $\boldsymbol{E}$ дается выражением $1+\frac{1}{\alpha}$; поэтому именно эта величина играет роль диэлектрической постоянной уравнений Максвелла.

122. В одном отношении, однако, теория электронов позволила нам пойти дальше Максвелла. Вы видите из уравнений (201), что для данной системы α не является величиной постоянной, а изменяется с частотой n. Поэтому наши формулы заключают в себе объяснение дисперсии света, т. е. того факта, что разные лучи света обладают различными показателями преломления.

Эта теория весьма напоминает то объяснение, которое было предложено разными физиками, разрабатывавшими волновую теорию света в ее первоначальной форме, когда эфир рассматривался как упругое тело. Зелльмейер, Кеттелер, Буссинеск и Гельмгольц показали, что скорость света должна зависеть от периода колебаний, раз тело состоит из малых частичек, которые приводятся в колебание силами падающего пучка света и подвержены внутримолекулярным силам такого рода, что могут совершать свободные колебания с некоторым определенным периодом. Амплитуда вынужденных колебаний этих частичек, которая является одной из величин, определяющих скорость распространения, будет в значительной степени зависеть от относительной величины их собственного периода колебаний и периода падающего на них света. Развиваемая здесь теория распространения света в системе молекул основана на тех же принципах, как и это старое объяснение дисперсии, и единственное различие заключается в том, что мы неизменно пользовались терминами электромагнитной теории и что малые частички Зелльмейера теперь превратились в наши электроны.

Если мы представим себе, что какая-нибудь одна молекула отрывается от тела и вследствие этого перестает быть подвержена каким бы то ни было внешним влияниям, и если мы не будем принимать во внимание сопротивление, которое мы представили при помощи коэффициента g, то уравнения движения (198) приобретают более простую форму:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-f\xi, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2}=-f\eta, \qquad m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=f\zeta,$$

откуда видно, что электрон может совершать свободные колебания частоты n_0, определяемой выражением

$$n_0=\sqrt{\frac{f}{m}}.$$

Вводя это выражение и пользуясь (199), мы можем, полагая $a=\frac{1}{3}$, написать вместо (201):

$$\alpha=m'(n_0^2-n^2)-\frac{1}{3}=\frac{m}{Ne^2}(n_0^2-n^2)-\frac{1}{3}. \tag{211}$$

Показатель преломления определяется поэтому выражением

$$\mu^2-1=\frac{1}{\frac{m}{Ne^2}(n_0^2-n^2)-\frac{1}{3}}. \tag{212}$$

Значение μ, выведенное из этой формулы, больше чем единица, если частота n настолько меньше частоты свободных колебаний n_0, что знаменатель имеет положительное значение; если это условие удовлетворяется, мы можем заключить далее, что μ увеличивается с частотой. Это совпадает с ходом дисперсии, наблюдаемым в прозрачных телах; нужно только сделать еще предположение, что в этих телах частота n_0 соответствует лучам ультрафиолетовой части спектра.

123. В качестве одного из дальнейших приложений наших результатов мы можем взять старую задачу о связи между показателем преломления прозрачного тела и его плотностью ρ. Как известно, Лаплас вывел из теоретических соображений, основанных на волновой теории в том ее виде, какой она имела в те времена, что, когда плотность тела меняется, выражение

$$\frac{\mu^2-1}{\rho} \tag{213}$$

должно оставаться постоянным. В очень многих случаях наблюдаемые изменения рефракции совсем не следуют этому закону; было найдено, что гораздо лучшее совпадение получается в том случае, если правило Лапласа заменить эмпирической формулой

$$\frac{\mu-1}{\rho} = \text{const}. \tag{214}$$

Электромагнитная теория света приводит к новому соотношению. В самом деле, немного видоизменяя (212), приходим к уравнению

$$\frac{m}{Ne^2}(n_0^2 - n^2) = \frac{\mu^2+2}{3(\mu^2-1)}.$$

Для данного тела и данного значения n выражение

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}$$

должно быть поэтому пропорционально числу молекул в единице объема и, следовательно, плотности тела.

Этот результат был найден Лоренцом [1]) в Копенгагене за несколько времени до того, как я вывел его из электромагнитной теории света, что, конечно, является любопытным случаем совпадения.

124. В известном смысле эта формула имеет гораздо бо́льшую давность. Полагая в (201) $n=0$ и, как прежде, $a=\frac{1}{3}$, мы получаем для случая очень медленных колебаний, или для постоянного поля,

$$a = f' - \frac{1}{3} = \frac{f}{Ne^2} - \frac{1}{3}.$$

---

[1]) L. Lorenz, Über die Refraktionskonstante, Ann. Phys. Chem. **11** (1880), стр. 70.

Соответствующее значение отношения $1+\frac{1}{\alpha}$ между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ имеет вид

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\frac{f}{Ne^2} - \frac{1}{3}}.$$

Это выражение и является поэтому значением диэлектрической постоянной для нашей системы молекул, что могло бы быть получено и прямым вычислением.

Последняя формула показывает, что при изменении N значение

$$\frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)N}$$

остается постоянным. Поэтому соотношение между диэлектрической постоянной и плотностью ρ имеет вид

$$\frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)\rho} = \text{const};$$

эта формула соответствует формуле, данной значительно ранее Клаузиусом и Моссотти. Подставляя в нее значение Максвелла

$$\varepsilon = \mu^2, \tag{215}$$

получаем соотношение

$$\frac{\mu^2 - 1}{(\mu^2 + 2)\rho} = \text{const}. \tag{216}$$

Этим путем, однако, мы получаем доказательство формулы только для случая весьма медленных колебаний, к которым применим закон Максвелла (215), тогда как наши предшествующие рассуждения показывают, что она имеет место для любого значения n, т. е. для любой длины волны.

125. Сравним теперь наши формулы с результатами опыта. Я могу, конечно, упомянуть только об очень немногих. Я рассмотрю сначала изменения рефракции газа, вызываемые изменением давления, а затем то изменение рефракции, которое происходит при переходе тела из жидкого состояния в газообразное. В обоих случаях я буду сравнивать результаты наших формул с теми результатами, которые могут быть выведены из эмпирической формулы (214). Что касается закона Лапласа, о нем мы можем больше не говорить, так как во всех случаях он приводит к гораздо менее удовлетворительным результатам, чем любая из двух других формул.

Показатель преломления воздуха вплоть до очень больших плотностей был в свое время со значительной точностью измерен Магри [1]). Некоторые из его результатов приведены в нижеследующей таблице; там же приведены значения

$$\frac{2}{3}\frac{\mu-1}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{\mu^2-1}{(\mu^2+2)\rho}.$$

Температура	Плотность	Показатель преломления	$\frac{2}{3}\frac{\mu-1}{\rho}\cdot 10^7$	$\frac{\mu^2-1}{(\mu^2+2)\rho}\cdot 10^7$
0°	1	1,0002929	1953	1953
14,6	14,84	1,004338	1949	1947
14,3	42,13	1,01241	1964	1959
14,4	69,24	1,02044	1968	1961
14,5	96,16	1,02842	1970	1961
14,5	123,04	1,03633	1969	1956
14,8	149,53	1,04421	1971	1956
14,9	176,27	1,05213	1972	1953

Вы видите, что формула (216) дает несколько лучшее совпадение, чем эмпирическое соотношение (214).

Различие между формулами выступает еще ярче, если мы сравним показатель преломления пара с тем значением, которое мы можем при помощи формул (214) и (216) вывести из показателя преломления жидкости. В нижеследующей небольшой табличке, относящейся к натриевому свету, показатель преломления для жидкости дан для 15°, а для пара — для 0° и 760 *мм*. Это значит, что наблюденные значения для μ были приведены к той плотности, которую пар имел бы при 0° и атмосферном давлении, если бы он следовал законам Бойля и Гэй-Люссака. Это приведение

---

[1]) L. Magri, Der Brechungsindex der Luft in seiner Beziehung zu ihrer Dichte, Phys. Zeitschr. 6 (1905), стр. 629.

можно проделать как при помощи (214), так и при помощи (216), так как обе формулы оказываются одинаково приложимыми для тех небольших изменений, о которых идет речь.

	Жидкость		Пар			
	плотность	показатель преломления	плотность	показатель преломления		
				набл.	вычисл. по (214)	вычисл. по (216)
Вода	0,9991	1,3337	0,000809	1,000250	1,000270	1,000250
Сернистый углерод . .	1,2709	1,6320	0,00341	1,00148	1,00170	1,00144
Этиловый эфир . . .	0,7200	1,3558	0,00332	1,00152	1,00164	1,00151

Другими измерепиями, при помощи которых можно судить о применимости той или другой формулы, являются измерения показателя преломления различных тел при разных температурах или при разных давлениях. Как общее правило, ни (214), ни (216) не воспроизводят этих измерений с достаточной точностью, причем разногласие между наблюденными и измеренными значениями в обоих случаях оказывается одного порядка величины и обычно имеет разные знаки. В большинстве случаев наша формула приводит к таким изменениям рефракции, которые несколько превышают значения, полученные на опыте; кроме того, расхождения увеличиваются при переходе к большим значениям n.

Причину этого расхождения, несомненно, следует искать отчасти в том обстоятельстве, что член a в уравнении (201) не равен в точности одной трети, а отчасти в тех изменениях, которые имеют место внутри самих частичек при нагревании или сжатии тела. Эти изменения могут вызвать изменение коэффициентов f и f'.

126. С предыдущим вопросом тесно связана задача о вычислении рефракции смеси из рефракций отдельных составляющих. Тем же путем, который привел нас к уравнению (212), но только при предположении, что система содержит два или более вида молекул, перемешанных друг с другом, можно прийти к следующей формуле[1]), в которой r_1, r_2, ... суть значения

$$\frac{\mu^2-1}{(\mu^2+2)\rho} \tag{217}$$

для каждого из смешиваемых веществ, взятых в отдельности, а m_1, m_2, ... суть массы этих веществ в единице массы смеси:

$$\frac{\mu^2-1}{(\mu^2+2)\rho}=m_1r_1+m_2r_2+\ldots \tag{218}$$

Оказывается, что это уравнение пригодно для разных жидких смесей в качестве грубого приближения. То же самое можно сказать про подобное же уравнение, которым часто пользуются для вычисления величины $\frac{\mu-1}{\rho}$.

127. Весьма важно, что эти формулы для смесей могут во многих случаях служить также для вычисления рефракции химических соединений по рефракции составляющих элементов. Рассмотрим соединение, состоящее из элементов ε_1, ε_2, ...; обозначим через p_1, p_2, ... их атомные веса, через q_1, q_2, ... числа разнородных атомов, содержащихся в молекуле, а через

$$P=q_1p_1+q_2p_2+\ldots$$

молекулярный вес соединения. Тогда количества ε_1, ε_2, ... в единице массы будут иметь значения

$$m_1=\frac{q_1p_1}{P}, \qquad m_2=\frac{q_2p_2}{P}, \ldots,$$

и (218) приобретает вид

$$P\frac{\mu^2-1}{(\mu^2+2)\rho}=q_1p_1r_1+q_2p_2r_2+\ldots \tag{219}$$

Поэтому, если для каждого элемента мы назовем произведение из постоянной (217) на его атомный вес p атомной

[1]) Примечание **58**.

рефракцией и если мы будем понимать под молекулярной рефракцией соединения произведение из соответствующего ему значения (217) на молекулярный вес P, мы приходим к простому правилу: для того чтобы найти молекулярную рефракцию соединения, достаточно перемножить атомные рефракции каждого элемента на число его атомов в молекуле и результаты сложить. Многие физики и химики, определявшие рефракцию для различных соединений, в особенности органических, действительно нашли это правило приближенно верным.

128. Общий смысл этого результата совершенно ясен. Когда мы находим, что некоторая величина, определяющая рефракцию соединения, состоит из ряда частей, каждая из которых относится к одному элементу, мы можем заключить, что каждый элемент оказывает свое особое влияние на распространение света, которое не нарушается влиянием других элементов. На языке нашей теории это значит, что носителями электрических колебаний, происходящих в пучке света, поскольку они имеют место в весомой материи, являются отдельные атомы, причем движения внутри одного атома являются в большей или меньшей степени независимыми от движений, происходящих в других атомах той же самой молекулы.

Мы можем предположить, например, что в каждом атоме содержится один подвижный электрон, который, будучи смещен из положения равновесия, возвращается назад под действием упругой силы, возникающей в самом атоме и определяемой поэтому свойствами самого атома. Если мы станем на эту точку зрения, не представляет труда видоизменить уравнения для распространения света так, что они станут приложимыми к системе многоатомных молекул.

129. Обозначим величины, относящиеся к различным атомам одной молекулы, значками 1, 2, ..., k. Пусть e_1, e_2, ... будут заряды подвижных электронов в первом, втором и т. д. атоме, m_1, m_2, ... — их массы, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ... — составляющие их смещений из положений равновесия, f_1, f_2, ... — коэффициенты, определяющие величину упругих сил. Тогда, если не принимать во внимание сопротивлений и если нет внешнего магнитного поля, для каждой молекулы получится не одна система уравнений вида

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=e(E_x+aP_x)-f\xi \text{ и т. д.}$$

(которую можно получить из (198), если положить $g=0$, $\mathfrak{H}=0$), но k систем вида

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2}&=e_1(E_x+aP_x)-f_1\xi_1 \text{ и т. д.,}\\ m_2\frac{d^2\xi_2}{dt^2}&=e_2(E_x+aP_x)-f_2\xi_2 \text{ и т. д.}\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}\right\}\tag{220}$$

Полная электрическая поляризация P тела будет теперь равна сумме электрических моментов, вызываемых отдельными атомами; ее составляющие суть:

$$\left.\begin{aligned} P_x&=N(e_1\xi_1+e_2\xi_2+\ldots),\\ P_y&=N(e_1\eta_1+e_2\eta_2+\ldots),\\ P_z&=N(e_1\zeta_1+e_2\zeta_2+\ldots).\end{aligned}\right\}\tag{221}$$

Для определенного значения частоты n мы можем вывести из (220), (221) и (192) соотношение между E и D. Сопоставляя его с уравнениями (193) и (194), получаем для показателя преломления μ [1]) следующую формулу, соответствующую (212), но являющуюся более общей:

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}=\frac{Ne_1^2}{3(f_1-m_1n^2)}+\frac{Ne_2^2}{3(f_2-m_2n^2)}+\ldots\tag{222}$$

Таким образом, мы видим, что в согласии с нашими новыми допущениями $\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}$ остается пропорциональным N и, следовательно, плотности тела. Затем, если обозначить через μ_1, μ_2, ... показатели преломления для тех случаев, когда в единице объема нашей системы содержится

---

1) Примечание 59.

только N атомов группы 1 или N атомов группы 2, получится:

$$\frac{\mu_1^2-1}{\mu_1^2+2}=\frac{Ne_1^2}{3(f_1-m_1n^2)},\qquad \frac{\mu_2^2-1}{\mu_2^2+2}=\frac{Ne_2^2}{3(f_2-m_2n^2)},\ \ldots$$

Следовательно, (222) можно переписать так:

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}=\frac{\mu_1^2-1}{\mu_1^2+2}+\frac{\mu_2^2-1}{\mu_2^2+2}+\ldots,$$

что является только несколько другим видом соотношения (219).

130. Вряд ли нужно особо указывать, что сделанные нами допущения являются в лучшем случае грубыми приближениями к действительному положению вещей. Мы предположили, что действия, порождающие упругую силу, которая возвращает содержащийся в атоме подвижный электрон в его положение равновесия, ограничиваются этим самым атомом. Но, конечно, между соседними атомами во всяком случае существует взаимодействие, связанное со смещениями их электронов и имеющее электрическую природу; могут быть также и другие взаимодействия, природа которых в настоящее время для нас совершенно темна. По этим причинам мы должны ожидать бóльших или меньших отклонений от закона молекулярной рефракции — отклонений, которые когда-нибудь помогут нам сделать известные заключения относительно структуры молекул.

Важный результат в этом направлении уже получен Брюлем[1]). Он нашел, что двойная химическая связь между двумя атомами оказывает чрезвычайное влияние на рефракцию. Это влияние можно выразить, добавив в формуле (218) для каждой двойной связи член соответствующей величины.

Этот факт, подобно многим другим, показывает, что нашу теорию распространения света в весомых телах сле-

---

[1]) См., напр., J. W. Brühl, The development of spectro-chemistry, Proc. Royal Institution **18**, 1 (1906), стр. 122.

дует считать только первой попыткой в этом направлении. Я должен, впрочем, повторить, что, несомненно, действия, разыгрывающиеся в отдельных атомах, должны в значительной степени быть независимыми друг от друга. Если бы это было не так и если бы, напротив, упругую силу, действующую на электрон, следовало приписать не тому атому, к которому этот электрон относится, а всей молекуле в целом, то показатель преломления соединения определялся бы главным образом междуатомными связями, а не индивидуальными свойствами атомов, как это имеет место в действительности.

131. До сих пор мы говорили о *преломлении* света; теперь мы еще раз вернемся к теории *дисперсии* света и поставим себе вопрос, что можно узнать о дисперсии из общей формулы (222). Прежде всего следует заметить, что если s есть значение $\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}$, мы получим:

$$\mu^2=\frac{1+2s}{1-s},$$

а отсюда видно, что если s изменяется непрерывно от $-\frac{1}{2}$ до 1, μ^2 растет от нуля до ∞. Если s остается все время в этом интервале, как я на некоторое время допущу, μ изменяется в том же направлении, что и s, принимая значение 1 при $s=0$.

Последний случай мы имеем при $N=0$, т. е. когда вообще нет весомых частичек, так что распространение происходит в чистом эфире. Наличие электронов, к которым относятся различные члены в правой части уравнения (222), меняет это положение вещей. Каждый из этих электронов имеет свой собственный период свободных колебаний. Если частоты этих колебаний будут n_1, n_2 и т. д., мы получим:

$$n_1^2=\frac{f_1}{m_1}, \qquad n_2^2=\frac{f_2}{m_2}, \ldots$$

и

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}=\frac{Ne_1^2}{3m_1(n_1^2-n^2)}+\frac{Ne_2^2}{3m_2(n_2^2-n^2)}+\ldots \tag{223}$$

Мы видим, таким образом, что влияние колебаний на атомы зависит от того, лежит ли частота лучей, для которых мы хотим определить μ, ниже или выше частоты свободных колебаний. Каждая группа электронов стремится повысить величину

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}$$

и, следовательно, величину μ для всех частот, лежащих ниже ее собственной частоты, и понизить величину показателя преломления для всех частот, лежащих выше собственной частоты.

Каждый член (223) как функция n может быть изображен графически кривой вида, показанного на рис. 5, где OP соответствует в различных случаях n_1, n_2, ...; кривую для

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}$$

получаем, беря алгебраическую сумму ординат индивидуальных кривых L_1, L_2 и т. д.

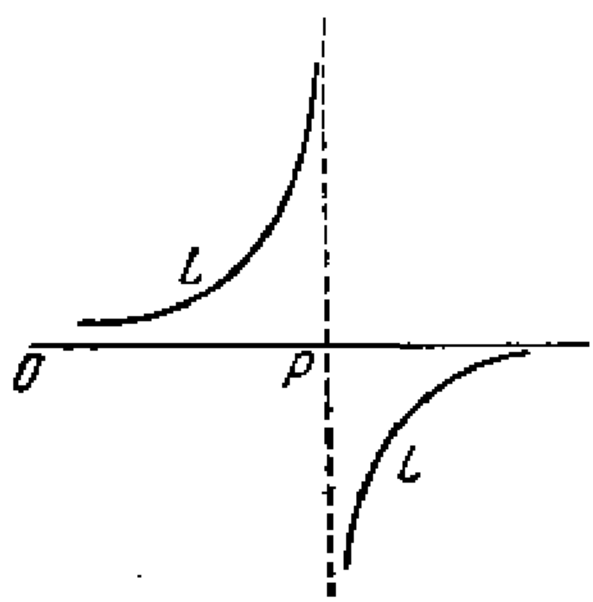

Рис. 5.

Вид результирующей кривой будет определяться значениями n_1, n_2 и т. д. или, как можно сказать иначе, положением в спектре линий, которые возникли бы при свободных колебаниях электронов и которые мы, забегая вперед, можем назвать спектральными линиями тела. Если при переходе слева направо мы пересекаем одну из таких линий, ордината соответствующей кривой делает внезапный скачок от $+\infty$ до $-\infty$. Конечно, все эти разрывности повторяются в результирующей кривой дисперсии, и около каждого из значений частоты n_1, n_2, ... будет находиться участок кривой, где s изменяется сначала от $+1$ до $+\infty$, а затем от $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$. Можно допустить, что эти участки, которые я буду называть разрывными частями кривой, имеют ширину, весьма малую по сравнению с шириной остающихся участков, которые я буду называть непрерывными участками спектра.

Так как все кривые L_1, L_2, ... поднимаются слева направо, ясно, что каждый непрерывный участок результирующей кривой должен иметь такой же ход. Это требование теории совпадает с ходом дисперсии, имеющим место во всех прозрачных телах.

Вопрос о том, будет ли для определенного значения частоты показатель преломления больше или меньше единицы, зависит от следующих причин. Если все спектральные линии тела лежат в ультрафиолетовой части спектра, показатель преломления будет больше единицы на всем протяжении инфракрасного и видимого спектра. В видимом спектре он может быть больше единицы даже при наличии одной или нескольких инфракрасных линий, если только имеются также и линии в ультрафиолетовой части и если их влияние, сказывающееся в повышении показателя преломления, превалирует над противоположным влиянием инфракрасной части. Во всяком случае дисперсия света, наблюдаемая во всех прозрачных телах, требует для своего объяснения присутствия одной или нескольких линий в ультрафиолетовой части спектра.

132. Мы могли бы теперь приступить к сравнению наших формул дисперсии с измерениями показателя преломления, но я не буду касаться этого вопроса, так как мы не должны придавать слишком большого значения той частной форме, в которой мы выразили наши уравнения. Несколько изменяя те допущения, на которых она основана, мы могли бы найти уравнение несколько другого вида, хотя и совпадающее с (223) в основных чертах.

Из предшествующей теории вытекает, впрочем, одно обстоятельство, на которое я хотел бы обратить ваше внимание. Если бесконечно увеличивать частоту n, все члены в правой части (223) будут стремиться к пределу нуль; поэтому для весьма больших частот мы в пределе получим $s = 0$ и $\mu = 1$ по той простой причине, что электроны не могут следовать за электрическими силами, частота изменений которых много больше частоты их свободных колебаний. Это замечание представляется весьма важным, так как оно объясняет, почему лучи Рентгена, проходящие через весомое тело, не испытывают при этом преломления [25]. Эти лучи, которые, правда, не представляют собой правильных колебаний, вызываются, по всей вероятности, быстро сменяющимися электромагнитными возмущениями весьма малой продолжительности [1]).

133. До сих пор мы говорили только о непрерывных участках кривой дисперсии. В каждом из ее разрывных участков, как мы их назвали, правая часть (223) принимает значения от $+1$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$. Эти значения приводят к отрицательным значениям для μ^2 и к мнимым значениям для самого μ; это указывает на то, что волны соответствующих частот не могут распространяться в теле таким же образом, как те волны, частоты которых соответствуют какой-нибудь точке в непрерывных участках кривой.

Нам нет, впрочем, надобности продолжать обсуждение смысла наших формул для этого случая, так как для частот, лежащих весьма близко к n_1, n_2, ..., нельзя более пренебрегать сопротивлением колебаниям и вызываемым им поглощением. Мы должны поэтому вернуться к вопросу о поглощении света. Чтобы не слишком усложнять наше рассмотрение, я остановлюсь на нашем первоначальном допущении, что в каждой частичке содержится только *один* подвижный электрон.

Если в уравнениях (204) коэффициент сопротивления β имеет некоторое определенное значение и если нет внешнего магнитного поля, мы можем написать:

$$\boldsymbol{E} = (\alpha + i\beta)\,\boldsymbol{P}.$$

Это дает:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \left(1 + \frac{1}{\alpha + i\beta}\right)\boldsymbol{E}.$$

С другой стороны, уравнения, выведенные в § 121 из (193) и (194), остаются без изменения, так что мы вместо

---

1) Примечание **21***.

(210) находим:

$$c^2q^2 = 1 + \frac{1}{\alpha + i\beta}. \tag{224}$$

Постоянная q в выражении (209) теперь становится комплексной величиной. Удобно выразить ее в виде

$$q = \frac{1}{v} - i\,\frac{k}{n}, \tag{225}$$

где v и k являются действительными величинами. Тогда (209) приобретает вид

$$e^{-kz + in\left(t - \frac{z}{v}\right)},$$

и если, чтобы найти выражения для колебаний, мы возьмем действительные части комплексных величин, при помощи которых были представлены вначале зависимые переменные E_x и т. д., мы приходим к выражению вида

$$e^{-kz}\cos n\left(t - \frac{z}{v} + p\right), \tag{226}$$

где p — некоторая постоянная. Смысл первого множителя заключается в том, что амплитуда колебаний в направлении распространения света непрерывно уменьшается. Значение поглощения зависит от коэффициента k, который я буду называть показателем *поглощения*. С другой стороны, второй множитель в (226) показывает, что v есть скорость, с которой распространяется фаза колебаний; отношение $\frac{c}{v}$, для которого я напишу μ, будет правильно назвать *показателем преломления*.

Подставляя (225) в (224) и отделяя мнимую часть от действительной, получаем следующие уравнения для определения v (или μ) и k [1]:

$$2\mu^2 = \sqrt{1 + \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + 1, \tag{227}$$

$$2\,\frac{c^2k^2}{n^2} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - 1. \tag{228}$$

---

[1]) Примечание 60.

134. Разбор этих формул, который в общем случае оказывается довольно сложным, можно значительно упростить, если сделать допущение, что β гораздо больше единицы.

Это оказывается в большинстве случаев верным, так как почти во всех телах поглощение в слое, толщина которого равна длине волны в воздухе, т. е. $\frac{2\pi c}{n}$, весьма мало даже для таких частот, для которых поглощение является наиболее сильным. В силу (226) амплитуда уменьшается в отношении

$$1 : e^{-\frac{2\pi c k}{n}},$$

когда пучок проходит расстояние $\frac{2\pi c}{n}$. Поэтому для тех тел, о которых идет речь,

$$\frac{ck}{n}$$

должно быть весьма малым числом. Если мы теперь будем рассматривать частоту, для которой $\alpha = 0$, (228) приобретает вид

$$2\,\frac{c^2k^2}{n^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} - 1.$$

Если это должно быть весьма малой величиной, β должно быть большим числом.

Пользуясь этим обстоятельством, мы находим следующие приближенные уравнения [1]):

$$\mu = 1 + \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \tag{229}$$

$$k = \frac{n}{2c} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{230}$$

Для данного значения β дробь

$$\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

---

[1]) Примечание **61.**

достигает наибольшего значения $\frac{1}{\beta}$ при $\alpha = 0$. Для $\alpha = \pm \beta$ оно падает до половины своего максимального значения и для $\alpha = \pm \nu\beta$ равно $\frac{1}{(\nu^2+1)\beta}$. Если мы будем понимать под ν некоторое не слишком большое число, например, 3 или 6, можно сказать, что поглощение мало по сравнению с его максимальным значением для α, лежащих вне интервала от $-\nu\beta$ до $+\nu\beta$.

135. Мы последовательно наблюдаем эти различные случаи, если продвигаемся по спектру; при этом, несмотря на большую величину, которую мы приняли для β, переход от $-\nu\beta$ к $+\nu\beta$ может иметь место на протяжении очень узкого спектрального участка. Если мы предположим, что это так, можно принять множитель $\frac{n}{2c}$ в (230) и множитель n в (202) за величины постоянные. Кроме того, в силу (201), если n'_0 есть частота, для которой $\alpha = 0$, мы можем написать для любого другого значения α внутри рассматриваемого интервала:

$$\alpha = -2m'n'_0(n - n'_0). \tag{231}$$

Частоту, соответствующую $\alpha = 0$, я обозначил через n'_0, так как ее значение

$$n'_0 = \sqrt{\frac{f' - a}{m'}}$$

отличается от частоты

$$n_0 = \sqrt{\frac{f'}{m'}}$$

спектральной линии изолированной молекулы, о которой мы говорили ранее. Мы можем считать эти две величины совпадающими только в том случае, когда можно пренебречь коэффициентом a.

Явления, которые система молекул вызывает в спектре проходящего через нее белого света, заключаются в следующем. Имеется полоса поглощения, в которой наиболее темное место соответствует

$$n = n'_0.$$

Распределение света симметрично по обе стороны этой точки. Так как у полосы нет резких краев, мы не можем приписать ей определенной ширины; мы можем, впрочем, сказать, что она расположена между точками, где $\alpha = -\nu\beta$ и $\alpha = \nu\beta$, причем ν есть сравнительно небольшое число. Измеряемая разностью частот «полуширина» может быть, как это легко видеть из (231), представлена выражением

$$\frac{\nu\beta}{2m'n'_0}.$$

Мы можем еще сделать интересное замечание относительно интенсивности поглощения. Оказывается, что максимальное значение показателя поглощения равно

$$\frac{n}{2c\beta};$$

формулы (202), (199) и (207) показывают, таким образом, что максимум тем больше, чем меньше сопротивление или чем больше промежуток времени τ, в течение которого колебания электронов остаются невозмущенными. Этот результат, который на первый взгляд представляется странным, становится легко понятным, если мы примем во внимание, что колебания, которые возникают в частичке, можно сказать, благодаря резонансу с падающим светом, раньше или позже будут превращены в неправильное тепловое движение. Легко может случиться, что полное количество тепла, развиваемое в единицу времени, оказывается больше, когда колебательная энергия запасается в течение долгого промежутка времени и затем внезапно испытывает превращение, и, напротив, меньше в том случае, когда возмущения происходят через более короткие промежутки.

В другом смысле, однако, можно сказать, что поглощение увеличивается при увеличении сопротивления g или при уменьшении промежутка времени τ. Изменение такого рода не только увеличит ширину линии поглощения, оно повысит также общее поглощение, т. е. количество энергии (для всех длин волн), отнимаемое у падающего пучка [1]).

[1]) Примечание 62.

Наблюдения действительно показывают, что узкие линии поглощения имеют, как общее правило, в середине бо́льшую интенсивность, чем широкие.

136. Кривая *FGH* на рис. 6 дает ход показателя поглощения как функции частоты. Другая кривая *ABCDE* относится к показателю преломления; она соответствует формуле (229). Показатель μ, который на больших расстояниях по обе стороны от *P* равен единице [26], поднимается до максимума *QB* и затем падает до минимума *RD*. Положение максимума определяется условием $\alpha = \beta$, или

$$n = n_0' - \frac{\beta}{2m'n_0'},$$

положение минимума — условием $\alpha = -\beta$, или

$$n = n_0' + \frac{\beta}{2m'n_0'},$$

причем соответствующие значения μ равны

$$1 + \frac{1}{4\beta} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{4\beta}.$$

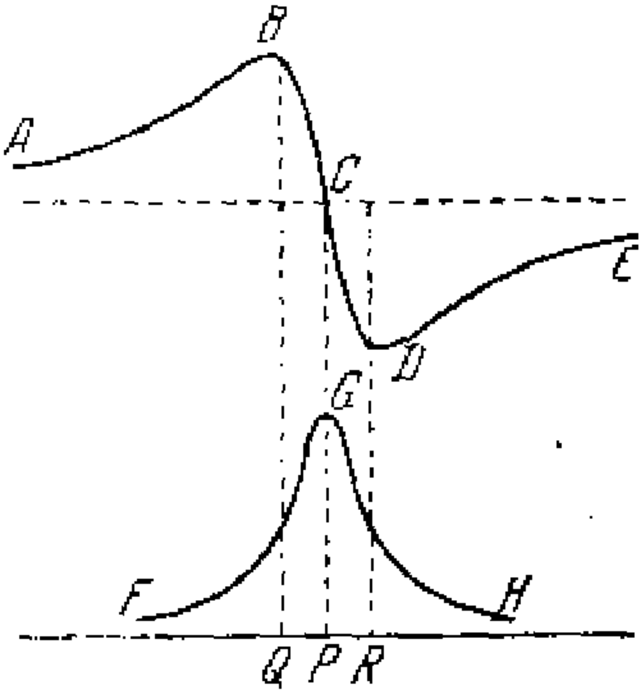

Рис. 6.

Максимум и минимум находятся в тех местах спектра, где показатель поглощения равен половине своего максимального значения.

В кривой *ABCDE* мы уже узнаем известную кривую так называемой аномальной дисперсии. Добавлю следующее: если бы мы предположили, как в § 128, что частички системы состоят не из одного, а из нескольких атомов и каждый содержит по подвижному электрону, и если бы мы допустили, что каждый электрон встречает сопротивление, мы получили бы в конце концов кривую дисперсии, в которой часть кривой вида *ABCDE* повторяется в соседстве каждого свободного колебания. Эти участки кривой стали бы на место разрывных участков, которые существовали в кривой для функции (223).

137. Влияние внешнего магнитного поля на распространение света в направлении линий сил можно исследовать при помощи вычислений, весьма напоминающих предшествующие выкладки. Нам предстоит опять пользоваться уравнениями (192), (193) и (194), только теперь мы должны сопоставлять их с формулами (204). Так как в этих последних сила $\mathfrak{H}$, по предположению, направлена по OZ, пучок света, идущий вдоль линий сил, можно представить выражениями, содержащими множитель (209). Мы приходим опять к уравнению

$$D_x = c^2q^2E_x,$$

к которому мы должны теперь добавить соответствующую формулу

$$D_y = c^2q^2E_y;$$

у нас не было повода рассматривать ее в предыдущем случае. Пользуясь (192), получаем:

$$P_x = (c^2q^2 - 1)\,E_x, \quad P_y = (c^2q^2 - 1)\,E_y,$$

и первое и второе уравнения (204) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{1}{c^2q^2-1} - (\alpha + i\beta)\right\} P_x &= -\,i\gamma P_y, \\ \left\{\frac{1}{c^2q^2-1} - (\alpha + i\beta)\right\} P_y &= +\,i\gamma P_x, \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

откуда видно, что

$$P_y = \pm\, iP_x. \tag{233}$$

Таким образом, соответственно двойному знаку мы получаем *два* решения. Чтобы найти их смысл, мы должны вспомнить, что если две переменные величины даются действительными частями выражений

$$a\varepsilon^{i\,(nt+p)} \quad \text{и} \quad ar\varepsilon^{i\,(nt+p+2\pi s)}, \tag{234}$$

т. е. если они представляются выражениями

$$a\cos(nt + p) \quad \text{и} \quad ar\cos(nt + p + 2\pi s),$$

число r определяет отношение максимальных значений, или амплитуд, тогда как s есть разность фаз, выраженная в периодах. Так как $re^{2\pi is}$, т. е. отношение между выражениями (234), становится равным $\pm i$ при

$$r = 1, \quad s = \pm\frac{1}{4},$$

уравнение (233) показывает, что $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$ имеют одинаковые амплитуды и что между их изменениями по времени имеется разность фаз в четверть периода. То же самое можно сказать про смещения ξ и η отдельных подвижных электронов, так как эти величины пропорциональны $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$. Отсюда мы можем заключить, что каждый электрон движется с постоянной скоростью по круговой орбите, плоскость которой нормальна OZ, причем движение направлено в одну сторону при решении, соответствующем верхнему знаку, и в противоположную сторону при другом решении.

Подобным же образом и вектор $\boldsymbol{P}$ равномерно вращается в плоскости, нормальной к OZ, причем то же самое относится также и к векторам $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$. Каждое из наших решений представляет поэтому пучок лучей, поляризованных по кругу; легко видеть, что, когда действительная часть q имеет положительный знак (так что свет распространяется в сторону положительных z), верхние знаки в наших формулах относятся к правому лучу, а нижние знаки — к левому.

Если мы теперь подставим значение (233) в одну из формул (232), мы получим следующее значение для коэффициента q:

$$c^2q^2 = 1 + \frac{1}{\alpha \pm \gamma + i\beta}, \tag{235}$$

откуда по введении величины (225) можно вычислить показатель поглощения и скорость v или показатель преломления μ.

138. Нет необходимости выписывать выражения для этих величин. Сравнивая (235) с нашим прежним уравнением (224), мы видим непосредственно, что единственное различие между этими двумя выражениями заключается в том, что α теперь заменено через $\alpha \pm \gamma$. Но в некотором узком участке спектра γ можно принять за величину постоянную; поэтому, если мы будем пользоваться поляризованными по кругу правыми лучами, значения k и μ, которые соответствуют определенному значению α, будут совпадать с теми значениями, которые мы получали для величины $\alpha+\gamma$ в отсутствии магнитного поля. В силу соотношения (231) мы можем выразить то же самое иначе, а именно: по соседству с частотой n'_0 величины μ и k для частоты n принимают под действием магнитной силы $\mathfrak{H}$ те же значения, которые они имели бы без магнитного поля для частоты, равной

$$n-\frac{\gamma}{2m'n'_0}.$$

Кривая поглощения для правого луча получается поэтому путем смещения кривой FGH рис. 6 на расстояние

$$\frac{\gamma}{2m'n'_0}, \tag{236}$$

причем смещение происходит в сторону увеличения частот, если это выражение положительно, и в противоположном направлении, если оно отрицательно. Для левого луча мы получаем такое же смещение в противоположном направлении.

Ясно, что в этом заключается объяснение существования обратного явления Зеемана. Если пучок неполяризованных лучей, который мы можем разложить на два пучка, правый и левый, пропустить через пламя, мы получим в его спектре обе полосы поглощения, о которых мы говорили. Если расстояние (236) достаточно велико по сравнению с шириной области поглощения, мы увидим, что темная полоса действительно разделится на две составляющие. Особенно интересно, что смещение (236), для которого на основании (203) и (199) мы можем написать:

$$\frac{n'_0\mathfrak{H}}{cNe}:\frac{2mn'_0}{Ne^2}=\frac{e\mathfrak{H}}{2mc},$$

в точности совпадает с тем значением, которое мы нашли в элементарной теории прямого явления Зеемана. Равным образом и знак явления в данном случае совпадает с полученным раньше. Когда мы рассматривали излучение в направлении магнитных линий сил, мы нашли, что если e отрицательно, свет той составляющей, которая соответствует большей частоте, поляризован по кругу влево. Изложенные здесь исследования показывают, что для такого света, если опять e считать отрицательным, полоса поглощения смещена в сторону больших частот.

139. Распространение света в направлении, перпендикулярном линиям сил, можно исследовать подобным же образом. Если ось OX совпадает с направлением распространения, причем ось OZ указывает, как и раньше, направление поля, и если мы примем, что в выражениях для составляющих $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{H}$ содержится множитель

$$e^{-kx+in\left(t-\frac{x}{v}\right)},$$

k опять будет обозначать показатель поглощения, а v—скорость распространения.

Нетрудно видеть теперь, что эти величины магнитным полем ни в коей мере не изменяются, если электрические колебания пучка параллельны линиям сил, так как в этом случае нам надлежит рассматривать только последнее из уравнений (204) совместно с соотношениями

$$\boldsymbol{D}_z = \boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{P}_z,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}_y}{\partial t},$$

которые входят в (192)—(194). Так как ни одна из этих формул не содержит внешней силы $\mathfrak{H}$, мы можем сразу заключить, что магнитное поле не оказывает влияния на электрические колебания, происходящие вдоль линий сил.

Что касается колебаний, происходящих перпендикулярно линиям сил, я должен обратить внимание на любопытное обстоятельство. Так как переменные векторы являются периодическими функциями времени и зависят только от одной координаты x, условие

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}} = 0,$$

которое является следствием (193), требует, чтобы

$$D_x = 0. \tag{237}$$

Это можно выразить иначе так: электрические колебания не имеют продольной составляющей, если понимать под словами «электрические колебания» периодические изменения вектора $\boldsymbol{D}$. Но наш результат никоим образом не исключает отличных от нуля значений $\boldsymbol{E}_x$ и $\boldsymbol{P}_x$, так что, если термин «электрические колебания» прилагается к изменениям электрической силы $\boldsymbol{E}$ или поляризации $\boldsymbol{P}$, колебания не могут быть названы поперечными.

Формула (237) имеет большое значение для решения нашей задачи. Переписывая ее в виде

$$E_x + P_x = 0,$$

мы можем вывести из (204) в сочетании с (192)

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{i\gamma}{1+\alpha+i\beta} P_y, \\ D_y &= \frac{(1+\alpha+i\beta)^2-\gamma^2}{(1+\alpha+i\beta)(\alpha+i\beta)-\gamma^2} E_y. \end{aligned}\right\} \tag{238}$$

Условие

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2},$$

которое вытекает из (193) и (194), будет поэтому соблюдаться в том случае, если

$$\left(\frac{1}{v} - i\,\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{(1+\alpha+i\beta)^2-\gamma^2}{(1+\alpha+i\beta)(\alpha+i\beta)-\gamma^2}. \tag{239}$$

Это и есть то уравнение, при помощи которого можно вычислить скорость распространения и показатель поглощения. Одновременно мы можем из (238) получить величину отношения $\boldsymbol{P}_x$ к $\boldsymbol{P}_y$. Если для этого отношения мы получим комплексное значение $r\varepsilon^{2\pi i s}$ (§ 137), так что

$$P_x = r\varepsilon^{2\pi i s} P_y,$$

амплитуды $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$ будут относиться друг к другу, как r к 1; между периодическими изменениями двух составляющих создается разность фаз, измеряемая величиной s. Величины r и s определяют также отношения амплитуд и разность фаз тех колебаний, которые происходят вдоль OX и OY и на которые может быть разложено движение подвижного электрона. Вообще говоря, в рассматриваемом случае путь, описываемый каждым электроном, представляет собой эллипс, расположенный в плоскости, нормальной к линиям сил. Так как r и s изменяются с частотой, вид и ориентация эллипса будут зависеть от качества света, проходящего через пламя.

140. Чтобы найти положение линий поглощения в спектре, мы должны были бы определить k при помощи уравнения (239) и искать те значения частоты, которые обращают k в максимум. Если в знаменателе последней дроби в (239) освободиться от мнимых величин, уравнение принимает вид

$$\left(\frac{1}{v}-i\,\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{c^3}\,\frac{A-Bi}{Q},$$

и мы получаем:

$$k^2=\frac{n^2}{2c^2}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{Q}. \tag{240}$$

Обсуждение этого результата в общем виде приводит к формулам, которые настолько сложны, что вряд ли пригодны практически. К счастью, в тех случаях, которые нам предстоит рассмотреть, те частоты, для которых k имеет максимум, получаются с достаточной степенью точности, если искать минимум знаменателя Q. Дальнейшее упрощение заключается в том, что при нахождении минимума мы опять можем считать α единственной переменной величиной, так как величины β и γ в той узкой части спектра, которой мы ограничиваем наше рассмотрение, не изменяются заметно. Но знаменатель можно представить следующим образом [1]):

$$Q=\{\alpha(1+\alpha)+\beta^2-\gamma^2\}^2+\beta^2(1+4\gamma^2);$$

---

[1]) Примечание 63.

отсюда непосредственно следует, что искомые величины даются уравнением

$$\alpha(1+\alpha)=\gamma^2-\beta^2.$$

Я буду предполагать, что

$$\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}>0,$$

так что уравнение имеет два действительных корня:

$$\alpha=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}}. \tag{241}$$

Соответственно им получаем:

$$A=4\beta^2\gamma^2, \quad B=\frac{1}{2}\beta\left(1+4\gamma^2\pm\sqrt{4\gamma^2-4\beta^2+1}\right),$$

$$Q=\beta^2(1+4\gamma^2),$$

$$re^{2\pi i s}=\frac{P_x}{P_y}=\frac{i\gamma}{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\gamma^2-\beta^2+\frac{1}{4}}+i\beta}. \tag{242}$$

141. Эти результаты принимают весьма простой вид, если, как это обычно и имеет место (§ 134), β велико по сравнению с единицей, а магнитное поле настолько сильно, что при распространении света вдоль линий сил расстояния, на которые раздвигаются составляющие первоначальной линии поглощения, во много раз превышают их собственную ширину. Отсюда вытекает требование (§ 138), чтобы γ было во много раз больше, чем β. Вместо (241) мы можем поэтому написать приближенное выражение

$$\alpha=\pm\gamma, \tag{243}$$

которое показывает, что получаются две линии поглощения, лежащие как раз в тех местах спектра, где мы получали линии при распространении света вдоль линий сил, т. е. расположенные так, как этого требует элементарная теория прямого явления Зеемана.

Мы можем теперь при вычислении коэффициента поглощения заменить B через $2\beta\gamma^2$, а Q через $4\beta^2\gamma^2$. Так как

$$\sqrt{A^2+B^2}-A=\frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}+A},$$

мы получаем для обеих линий:

$$k = \frac{n}{4\beta c}, \tag{244}$$

т. е. как раз половинное значение показателя поглощения, соответствующего $\alpha = 0$, при отсутствии магнитного поля.

Наконец, выражение (242) имеет значение $\pm i$, так что мы можем вывести следующее заключение.

Если через поглощающее тело проходит в направлении OX пучок лучей, электрические колебания которых первоначально были параллельны OY, величина поглощения определяется выражением (244), когда частота задается одним из значений (243). Электроны внутри молекул будут описывать круговые орбиты в плоскостях, параллельных OX и OY, причем направление их движения соответствует направлению магнитной силы, когда $\alpha = +\gamma$, и не соответствует ему, когда $\alpha = -\gamma$.

Следует отметить, что в случае, разобранном в § 138, в согласии с нашим настоящим результатом мы получили максимальное поглощение в точке $\alpha = +\gamma$, если круговое движение имело первое из только что названных нами направлений, и в точке $\alpha = -\gamma$ во втором случае.

142. Фохт вывел из своих уравнений другое весьма замечательное заключение. Когда пучок лучей идет под прямым углом к линиям сил и состоит из электрических колебаний, перпендикулярных этим линиям, те две линии поглощения, на которые расщепляется одиночная первоначальная линия, вообще говоря, расположены на неравных расстояниях от главной линии и имеют неодинаковые интенсивности в противоположность составляющим дублета при поперечном явлении Зеемана, которые неизменно обладают этой симметрией. Это следует непосредственно из того обстоятельства, что функции A, B и Q содержат не только четные, но и нечетные степени α, так что явления по обе стороны точки спектра, где $\alpha = 0$, оказываются несимметричными.

В некоторых опытах, предпринятых Зееманом для проверки этих теоретических предсказаний, была действительно обнаружена некоторая весьма слабая дисимметрия.

Если это действительно та самая дисимметрия, к которой Фохт пришел путем своих вычислений, это явление представляется в высшей степени интересным, так как на основании его мы можем вывести, что газ, в котором оно обнаруживается, обладает в середине полосы поглощением, которое мы можем назвать *металлическим*. В самом деле, та особенность, на которую Фохт обратил внимание, может проявиться только в том случае, если коэффициент β не на много больше единицы, а это приводит к поглощению, весьма заметному даже для толщины в одну длину волны (§ 134) [1].

143. Я должен теперь обратить ваше внимание на тесную внутреннюю связь между явлением Зеемана и явлением вращения плоскости поляризации, открытым Фарадеем. Возвращаясь к случаю распространения света вдоль линий сил, мы можем взять за исходный пункт наш прежний результат (§§ 137, 138), что простейшими решениями нашей системы уравнений являются такие, которые представляют пучок поляризованных по кругу лучей, правых или левых, и что формулы для этих двух случаев можно получить, если в уравнениях, имеющих место в отсутствии магнитного поля, заменить α или через $\alpha+\gamma$, или через $\alpha-\gamma$. Это правильно не только для формул коэффициента поглощения, но также и для формул, которые определяют скорость распространения. Поэтому, если для левого луча эту скорость обозначить буквой v_1, а для правого — буквой v_2, мы получим [ср. уравнение (229)]:

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{c}+\frac{\alpha-\gamma}{2c\left[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\right]},$$

$$\frac{1}{v_2}=\frac{1}{c}+\frac{\alpha+\gamma}{2c\left[(\alpha+\gamma)^2+\beta^2\right]}.$$

Для определенной частоты n эти величины не равны друг другу. То же самое относится и к соответствующим величинам коэффициента поглощения, так что под влиянием магнитного поля система приобретает различную прозрачность для указанных двух родов круговых лучей. Но для упрощения мы сейчас оставим это различие без рассмо-

[1] Примечание **64**.

трения и будем говорить только о тех явлениях, которые вызываются различием в скоростях распространения. Вы знаете, что во всех случаях, когда скорость распространения для двух родов круговых лучей имеет различное значение, плоскость поляризации прямолинейно-поляризованного пучка будет по мере продвижения волны поворачиваться; угол вращения на единицу длины дается выражением

$$\omega = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right), \tag{245}$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\omega = \frac{n}{4c} \left[\frac{\alpha + \gamma}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha - \gamma}{(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2} \right]. \tag{246}$$

Направление вращения зависит от алгебраического знака этого выражения. Когда $\mathfrak{H}$ положительно, т. е. когда направление магнитной силы совпадает с направлением пучка лучей, положительный знак ω означает, что направление вращения соответствует направлению магнитной силы.

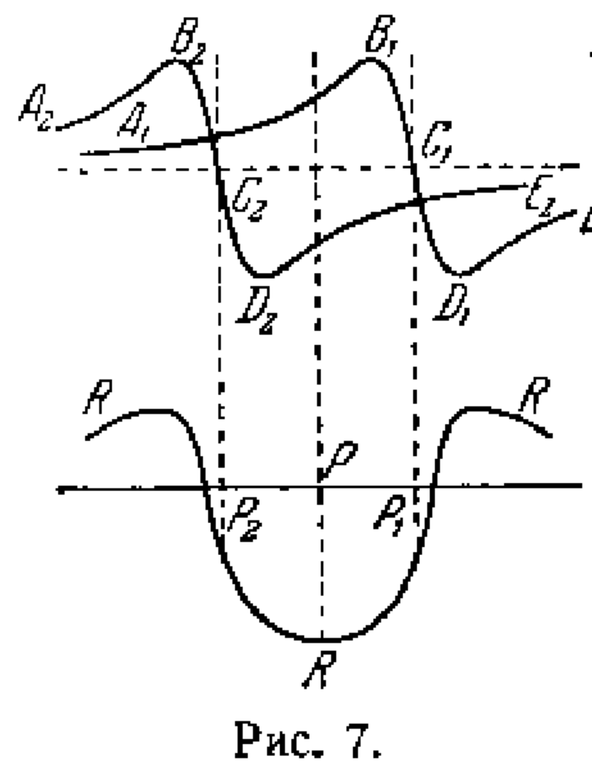

Рис. 7.

Основные черты явления, поскольку оно зависит от частоты, выступают особенно ясно, если мы воспользуемся графическим изображением. На рис. 6 мы провели кривую, дающую показатель преломления как функцию частоты и показывающую его изменение при переходе от коротких волн к длинным. Эта кривая, которая относится к телу, не находящемуся под действием магнитной силы, может служить также для представления величины $\frac{1}{v}$. Если же тело помещено в магнитное поле, кривые для $\frac{1}{v_1}$ и $\frac{1}{v_2}$ получаются простым смещением кривой рис. 6 направо или налево на расстояние, равное $\frac{e\mathfrak{H}}{2mc}$ (см. § 138). Таким путем мы получаем две кривые $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A_2B_2C_2D_2E_2$ (рис. 7) которые прямо дают нам представление об угле вращения ω, так как по (245) этот угол пропорционален алгебраической разности между соответствующими ординатами. Его можно поэтому изобразить посредством кривой RR.

При помощи этого построения выявляются два интересных результата. Во-первых, в узкой части спектра, в непосредственной близости от первоначальной линии поглощения, вращение плоскости поляризации дважды меняет свой знак; во-вторых, в силу того, что μ или $\frac{1}{v}$ могут в некоторых точках принимать весьма большие значения, угол вращения тоже может достигать довольно значительной величины.

Макалузо и Корбино [1]), которые первые обнаружили это явление в натриевом пламени, получали вращения до 270°. Результат их опытов получил непосредственное объяснение на основании теории, которая была уже ранее разработана Фохтом. Несколькими годами позже Зееман [2]) и Халло [3]) весьма тщательно исследовали это явление и снова нашли удовлетворительное совпадение опыта с теорией Фохта [27].

144. Явление Фарадея известно уже давно; поэтому в вышеприведенных результатах могло вызвать удивление только одно, а именно, что вращение в натриевом пламени гораздо больше, чем во всех исследованных когда бы то ни было прозрачных телах. Другое магнитооптическое явление, предсказанное Фохтом, является совершенно новым. Оно заключается в двойном лучепреломлении, которое наблюдается тогда, когда через тело со свойствами, которые мы рассматривали в настоящей главе, пучок света проходит под прямым углом к линиям сил. Для такого пучка мы должны различать электрические колебания, происходящие перпендикулярно и параллельно линиям сил. В первом случае скорость распространения дается уравнением (239), во втором — уравнениями (224) и (225) или,

---

[1]) D. Macaluso et O. M. Corbino, Comptes Rendus **127** (1898), стр. 548.

[2]) P. Zeeman, Amsterdam Proc. **5** (1902), стр. 41; Arch. néerl. (2), **7** (1902), стр. 465.

[3]) J. J. Hallo, Arch. néerl. (2), **10** (1905), стр. 148.

как мы можем тоже сказать, уравнением (239), если в нем положить $\gamma = 0$. Разница между двумя значениями и дает то, что я подразумевал под словами «двойное лучепреломление». Его можно вычислить на основании наших формул, поскольку известны α, β, γ, но я не буду тратить времени на эти вычисления. Замечу только, что результат остается прежним, когда направление поля меняет знак; это непосредственно следует из (239), так как в это выражение входит только квадрат величин γ и, следовательно, квадрат $\mathfrak{H}$.

Фохт и Вихерт проверили эти предсказания экспериментально, а Геест[1]) тщательно измерил магнитное двойное лучепреломление в натриевом пламени.

145. Пользуясь теорией, развиваемой в этой главе, мы можем из экспериментальных данных вывести некоторые интересные заключения относительно поглощающих (или излучающих) частичек. Некоторые измерения позволяют нам вычислить относительные значения трех величин α, β, γ; другие измерения могут служить для определения их абсолютных значений.

Положим, например, что мы измерим расстояние между средней и внешними составляющими триплета Зеемана; мы знаем, что для частоты n, относящейся к одной из этих последних линий, α и γ имеют одинаковые значения. Заменим γ его значением из (203), а α — значением из (231), в котором мы теперь пренебрежем различием между n_0' и n_0 (§ 135), так что

$$\alpha = 2m'n_0(n_0 - n) = \frac{2mn_0(n_0 - n)}{Ne^2}. \qquad (247)$$

Тогда равенство этих величин приведет нас к нашему старому уравнению

$$n_0 - n = \frac{e\mathfrak{H}}{2mc},$$

при помощи которого можно определить отношение $\frac{e}{m}$.

Мы могли бы найти величину отношения α к β, если бы в нашем распоряжении были количественные определения

---

[1]) J. Geest, Arch. néerl. (2), 10 (1905), стр. 291.

поглощения для обыкновенного случая поглощения в отсутствии магнитного поля. Если бы, например, мы знали, что в некоторой точке полосы поглощения показатель поглощения k в $\varkappa$ раз меньше, чем в середине полосы, отношение ν между α и β можно было бы вычислить по формуле (§ 134)

$$\varkappa = 1 + \nu^2. \tag{248}$$

Распределение интенсивности было определено при помощи болометрических или других подобных измерений для широких полос, наблюдаемых в углекислоте и других газах, но мы не можем сказать, каково оно будет в узких полосах, получаемых, например, в натриевом пламени. Все, что мы можем сделать, — это составить себе приблизительное представление о величине отношения ν между α и β для края полосы. Если мы примем, например, что здесь $\varkappa$ равно 10 или 20, то можем из соотношения (248) вычислить ν; подставляем это значение в уравнение

$$\alpha = \nu\beta,$$

для которого в силу (247), (202) и (199) мы можем написать:

$$2m(n_0 - n) = \nu g;$$

тогда получаем:

$$g = \frac{2m(n_0 - n)}{\nu}.$$

Эта формула принимает интересный вид, если воспользоваться соотношением (207); она превращается в

$$\tau = \frac{\nu}{n_0 - n}.$$

Это выражение показывает, что из ширины полосы можно вывести величину промежутка времени, в течение которого колебания частички происходят без возмущений.

В опыте Халло линии D имели ширину около 1 единицы Онгстрёма, откуда можно заключить, что значение τ лежит в пределах от $12 \cdot 10^{-12}$ до $24 \cdot 10^{-12}$ сек. Первое число получается, если положить $\nu = 3$ ($\varkappa = 10$), а второе — при $\nu = 6$ ($\varkappa = 37$). Так как промежуток времени между двумя последовательными столкновениями молекулы, вероятно, порядка 10^{-10} сек., мы видим, что τ получается несколько меньше, чем этот промежуток, как уже было упомянуто в § 120.

После того, как мы нашли отношения между величинами α, β, γ, мы можем попробовать вычислить абсолютные значения этих коэффициентов. Для этого мы могли бы воспользоваться абсолютными значениями коэффициента поглощения, если бы они были известны. Мы можем также обратиться, как указали Халло и Геест, к вращению плоскости поляризации или к магнитному двойному лучепреломлению. Если отношения между α, β, γ даны, эти три величины могут быть выведены из формулы (246) или из разности между значением v по формуле (239) и соответствующим значением для $\mathfrak{H} = 0$.

Далее, когда α известно для некоторой точки спектра по соседству с точкой n_0, т. е. когда известно значение (247), то, если затем ввести значения $\frac{e}{m}$ и e, можно вывести заключение о количестве поглощающих (излучающих) частичек в единице объема. Таким путем мы получаем для натриевого пламени в опытах Халло число

$$N = 4 \cdot 10^{14},$$

соответствующее плотности пара натрия около 10^{-8}. По всей вероятности, это значение гораздо меньше действительного значения плотности пара в пламени; вероятно, это различие нужно отнести на счет того обстоятельства, что в явлении поглощения принимают участие только некоторые частички, находящиеся в каком-то особенном состоянии и составляющие лишь малую часть общего числа частиц [28].

Едва ли стоит добавлять, что на все эти заключения следует смотреть с некоторой долей недоверия. По правде сказать, теория поглощения и испускания света в весомых телах находится в настоящий момент еще в младенческом возрасте. Если бы мы склонились к тому, чтобы примириться с ней и удовлетвориться уже полученными результатами, наша иллюзия рассеялась бы весьма скоро; нам стоило бы только вспомнить про исследования Вуда относительно оптических свойств паров натрия; эти опыты показывают, что молекула натрия должна обладать удивительной сложностью; то же следует заключить из опытов над смещением спектральных линий под влиянием давления — открытие Гемфриса и Молера. Теорией в ее современном состоянии оно объяснено быть не может [1]).

[1]) Примечание **64**.

ГЛАВА V

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ [29]

146. Электромагнитные и оптические явления в системах, имеющих поступательное движение, — а такими в силу годичного движения Земли являются все тела на Земле, — представляют большой интерес не только по себе, но также и потому, что они дают нам возможность проверить различные теории электричества. Электронная теория была развита отчасти со специальной целью охватить и эти явления. По этой причине я посвящу последнюю часть моих лекций некоторым вопросам, относящимся к распространению света в движущихся телах, и в первую очередь астрономической аберрации света.

Прежде чем детально останавливаться на попытках объяснить влияние движения Земли на кажущееся положение звезд, будет правильно установить общий метод, которым можно было бы пользоваться в задачах, касающихся распространения волн и световых лучей. Этот метод заключается в применении известного принципа Гюйгенса.

Будем рассматривать какую угодно прозрачную среду, движущуюся тем или иным способом, и будем относить это движение и распространение света в среде к трем прямоугольным осям координат, которым мы можем тоже приписать некоторое движение. Предположим, что наши диаграммы, которые должны представлять последовательные положения световых волн, жестко связаны с осями, так что эти последние на диаграммах имеют неподвижное положение.

Пусть σ (рис. 8) будет фронт волны в момент времени t; попробуем определить положение σ', которое он займет через бесконечно малый промежуток времени dt. Для этого мы должны рассматривать каждую точку P поверхности σ как центр колебаний и построить вокруг него элементарную волну, которая образуется за время dt, т. е. такую бесконечно малую поверхность, до которой доходит в момент $t+dt$ возмущение, вышедшее из P в момент времени t. Огибающая всех этих элементарных волн будет представлять собой новое положение фронта волны; непрерывно повторяя это построение, мы можем шаг за шагом проследить распространение волны.

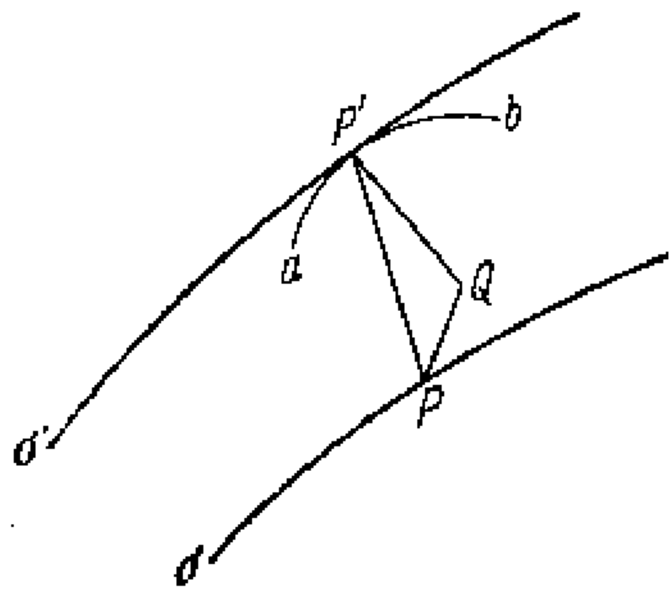

Рис. 8.

Одновременно с этим мы узнаем и ход световых лучей. Прямая, проведенная из центра колебаний P одной из элементарных волн в точку P' — точку касания элементарной волны с огибающей σ', является элементом луча; каждый новый шаг при построении волны даст нам также новый элемент луча.

Едва ли стоит напоминать здесь физический смысл определяемых таким образом прямых. Лучи указывают, каким образом пучки можно ограничивать сбоку. Если, например, свет пропускается через отверстие в непрозрачном экране, возмущение позади экрана ограничивается той частью пространства, в которую могут проникнуть лучи, проведенные через точки отверстия. Следует помнить, впрочем, что это является верным только в том случае, если мы будем пренебрегать явлениями диффракции, а это дозволительно, когда размеры отверстия весьма велики по сравнению с длиной волны.

Если мы хотим особо подчеркнуть, что в вышеприведеняых построениях мы имели в виду *относительное* движение света по отношению к осям координат или по отношению к какой-нибудь другой, неподвижно с ними связанной системе, мы можем говорить об *относительных* световых лучах.

Что касается элементарных волн, от размеров и формы которых зависят все явления, они определяются в каждом случае оптическими свойствами и состоянием движения среды.

147. Мы теперь достаточно подготовлены к тому, чтобы рассмотреть две теории аберрации света, предложенные Френелем и Стоксом. При этом мы ограничимся годичной аберрацией, так что вращение нашей планеты вокруг ее оси будет оставлено нами без рассмотрения. В целях еще большего упрощения задачи мы заменим годичное движение Земли равномерным поступательным движением по прямой.

Теория Стокса [1]) покоится на предположении, что окружающий Землю эфир при перемещении этого тела приводится в движение и что в каждой точке поверхности земного шара скорость эфира в точности равна скорости Земли. Согласно этой гипотезе приборы в любой обсерватории находятся в покое по отношению к окружающему эфиру. Ясно, что при таких обстоятельствах то направление, в котором наблюдается какое-нибудь небесное тело, должно зависеть именно от того направления волн, которое они имеют непосредственно перед тем, как войти в прибор. Но в силу предполагаемого движения эфира это направление может отличаться от направления волн на некотором расстоянии от поверхности Земли; в этом и заключается причина того, почему видимое положение звезды будет отличаться от действительного.

Чтобы определить поворот волн, мы применим намеченный нами общий метод, пользуясь системой координат, движущейся вместе с Землей. Обозначим через g скорость, с которой эфир движется сквозь нашу модель; эта скорость равна нулю на поверхности Земли, если нет скольжения, и равна и противоположна скорости Земли на значительном от нее расстоянии. Это распределение движений является стационарным, а потому и относительная скорость

---

[1]) G. G. Stokes, On the aberration of light, Phil. Mag. (3), **27** (1845), стр. 9; Mathematical and physical papers **1**, стр. 134.

эфира не зависит от времени. Мы будем, далее, пренебрегать влиянием воздуха на распространение света, — известно, что это влияние очень слабо.

Если бы эфир был неподвижен по отношению к осям, световые волны двигались бы с определенной скоростью c; каждая элементарная волна представляла бы собой сферическую поверхность радиуса $c\,dt$ с центром в точке P, являющейся источником излучения. Для движущегося эфира все это изменится. Элементарная волна попрежнему останется сферической поверхностью с радиусом $c\,dt$, так как можно считать, что в бесконечно малом объеме, в котором она образуется, эфир имеет везде одну и ту же скорость, но при дальнейшем распространении сферическая поверхность увлекается движением среды совершенно таким же образом, каким ветер увлекает звуковые волны или течение реки увлекает волны на поверхности воды. Центр элементарной волны, образовавшейся вокруг точки P (рис. 8), будет поэтому расположен не в точке P, а в другой точке Q и именно в такой, куда в момент времени $t+dt$ дойдет частичка эфира, которая в момент времени t была в точке P. Если скорость эфира g будет изменяться на поверхности волны от точки к точке, фронт волны кроме того повернется на некоторый угол.

Для нашей цели будет достаточно рассмотреть такую малую часть волны, какая попадает при наблюдениях в прибор. Участок волны таких размеров можно принять за плоскость; можно также допустить, что скорость эфира в различных точках этого участка является линейной функцией координат. Следовательно, центры сферических поверхностей лежат на плоскости, и в силу того, что сферы одинаковы, часть нового фронта волны σ', о которой идет речь, представляет собой плоскость, имеющую то же направление, так что угол поворота волны равен углу поворота плоскости σ, которая увлекается вперед движением среды.

Расположим ось OX по направлению нормали N к фронту волны σ и проведем ее в направлении распространения. Тогда легко видеть, что косинусы углов направления [1])

---

[1]) Примечание **65**.

нормали N' к новому фронту волны пропорциональны выражениям

$$1-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}dt.$$

Мы можем выразить этот результат иначе, говоря, что направление нормали N' может быть получено, если единичный вектор, расположенный по направлению N, сложить с вектором, составляющие которого суть:

$$-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}dt. \tag{249}$$

Такой вектор, который позволяет определить изменение направления, для чего его приходится складывать с единичным вектором, имеющим первоначальное направление, может быть назван *вектором отклонения*.

Мы до сих пор не упоминали про одно допущение, которое в теории Стокса играет видную роль. Стокс предполагает, что движение эфира является *невихревым*, иными словами, что оно имеет потенциал скоростей. В силу этого мы имеем:

$$\frac{\partial g_x}{\partial y}=\frac{\partial g_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z}=\frac{\partial g_z}{\partial x},$$

так что составляющие (249) вектора отклонения могут быть представлены выражениями

$$-\frac{\partial g_x}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_y}{\partial x}dt, \quad -\frac{\partial g_z}{\partial x}dt,$$

а самый вектор будет иметь значение

$$-\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}dt. \tag{250}$$

148. Так как скорость Земли $\mathbf{w}$ представляет только одну десятитысячную скорости света, все члены нашей формулы, содержащие множитель $\frac{|\mathbf{w}|}{c}$, весьма малы. Таковы же будут и члены, содержащие множитель $\frac{|\mathbf{g}|}{v}$, если $\mathbf{g}$ есть одно из значений скорости материи или эфира, а v — одно из значений скорости света, с которым мы в данном случае имеем дело. Мы будем называть члены такого рода величинами первого порядка малости и в большинстве случаев будем пренебрегать членами второго порядка малости, т. е. теми, которые пропорциональны

$$\frac{w^2}{c^2} \text{ или } \frac{g^2}{v^2}.$$

Если мы поступим таким образом, вычисление полного угла, на который повернутся световые волны, продвигающиеся по направлению к Земле, и который является величиной первого порядка, значительно упростится. Нам нужно только составить сумму всех векторов отклонения, даваемых выражением (250) и относящихся к последовательным элементам времени; результирующий вектор будет полным вектором отклонения, т. е. вектором, который мы должны сложить с единичным вектором, направленным по первоначальной нормали к волнам, чтобы получить окончательное направление нормали. Так как (рис. 8)

$$dt = \frac{QP'}{c},$$

(250) превращается в

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot QP';$$

здесь мы можем заменить QP' элементом $PP' = ds$ луча, так как отношение $\frac{PP'}{QP'}$ отличается от единицы на величину порядка $\frac{|\mathbf{g}|}{c}$, и множитель $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$ тоже является величиной того же порядка малости. Наконец, мы можем заменить $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$ через $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}$, так как угол между ds и осью OX, которая совпадает с нормалью к волне, является величиной порядка $\frac{|\mathbf{g}|}{c}$. Вектор отклонения, соответствующий элементу ds, можно поэтому представить выражением

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s}\, ds,$$

в котором исчезла всякая зависимость от осей координат; если луч распространяется от точки A к точке B, для полного отклоняющего вектора получаем выражение

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{A}^{B}\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s}\,ds=\frac{1}{c}(\boldsymbol{g}_A-\boldsymbol{g}_B),$$

где $\boldsymbol{g}_A$ и $\boldsymbol{g}_B$ являются относительными скоростями эфира в точках A и B.

Пусть теперь точка A будет весьма удалена от Земли, а точка B лежит непосредственно на ее поверхности. Тогда при отсутствии скольжения мы получаем $\boldsymbol{g}_B=0$, тогда как $\boldsymbol{g}_A$ равно и противоположно скорости $\boldsymbol{w}$ Земли. Вектор отклонения оказывается равным

$$-\frac{\boldsymbol{w}}{c},$$

и мы можем вывести следующее заключение:

Чтобы найти окончательное направление нормали к волне (в направлении распространения), мы должны провести вектор, равный скорости света c, в направлении первоначальной нормали к волне в точке A и сложить его с вектором, равным по величине и противоположным по направлению скорости Земли. Если принять во внимание, что нормаль в точке A совпадает с действительным направлением света, идущего от звезды, то ясно, что наш результат совпадает с обычным объяснением аберрации, которое приводится в учебниках астрономии и подтверждается наблюдениями.

149. К сожалению, изложенная теория Стокса встречает значительные трудности: два допущения, которые мы были принуждены принять, а именно, что движение эфира является невихревым и что на поверхности Земли нет скольжения, с трудом могут быть совмещены друг с другом. Эта возможность и совсем отпадает, как только мы примем, что эфир является несжимаемым. В самом деле, по известной гидродинамической теореме мы знаем, что, когда шар, погруженный в неограниченную несжимаемую среду, имеет заданное поступательное движение, движение среды будет вполне определено, если будет поставлено требование, чтобы существовал потенциал скоростей и чтобы в каждой точке поверхности скорость среды и скорость шара имели равные по величине составляющие в направлении нормали. В единственном движении, которое удовлетворяет обоим этим условиям, на поверхности имеется значительное скольжение, причем максимальное значение относительной скорости достигает полуторного значения скорости поступательного движения шара [1]). Это показывает, что для несжимаемой среды никак не может существовать невихревого движения среды без наличия скольжения; мы должны были бы сразу отказаться от теории Стокса, если бы мы были уверены в несжимаемости эфира.

Но эти рассуждения теряют силу, если допустить возможность изменения плотности эфира; Планк [2]) заметил, что можно устранить противоречие между двумя гипотезами теории Стокса, если только предположить, что эфир конденсируется около небесных тел, как если бы он был подвержен силе тяжести и обладал в большей или меньшей степени свойствами газа. Мы не можем совершенно уничтожить скольжения на поверхности, но мы можем сделать его сколь угодно малым, предполагая достаточную степень конденсации. Если нас не испугает предположение, что около Земли эфир сгущен до плотности, в e^{11} раз большей, чем плотность в межзвездном пространстве, мы можем вообразить такое положение, при котором максимальная скорость скольжения составляет не более полупроцента скорости движения Земли, а этого, конечно, было бы вполне достаточно для объяснения аберрации в пределах экспериментальных ошибок [3]).

В этой области физики, в которой нельзя двигаться вперед без гипотез, и если даже они на первый взгляд представляются несколько странными, мы не должны быть

---

[1]) Примечание **66**.

[2]) См. Lorentz, Stokes's theory of aberration in the supposition of a variable density of the aether, Amsterdam Proceedings 1898—1899, стр. 443 (Abhandlungen über theoretische Physik **1**, стр. 454).

[3]) Примечание **67**.

расточительными и отказываться слишком поспешно от новых идей; поэтому предложение Планка сослужило хорошую службу. И все же я утверждаю, что это представление о чрезвычайно конденсированном эфире, да еще, по необходимости, соединенное с гипотезой, что такая конденсация не изменяет ни в малейшей степени скорости света, — это представление нельзя назвать вполне удовлетворительным. Я уверен, что сам Планк будет склонен предпочесть неизменяемый и неподвижный эфир Френеля, если только окажется возможным показать, что это представление может привести нас к пониманию наблюдаемых явлений.

150. Теория Френеля, основной принцип которой уже вошел в теорию, развитую в предыдущих главах, относится к 1818 г. Она впервые была формулирована в письме к Араго [1]), в котором прямо указано, что эфир нужно представлять себе как среду, не принимающую ни малейшего участия в движении Земли. К этому Френель добавляет одну в высшей степени важную гипотезу относительно распространения света в движущейся прозрачной весомой материи.

Я уверен, что все охотно согласятся, что оптическое явление, которое происходит в неподвижной системе, может протекать совершенно таким же образом и после того, как мы придадим системе равномерное поступательное движение, с тем условием, однако, что это движение мы сообщим *всему*, что принадлежит к этой системе. Поэтому, если все, что содержится в столбе воды или в куске стекла, испытает поступательное движение, которое мы сообщим этим веществам, распространение света в этих веществах будет происходить всегда совершенно одинаковым образом независимо от того, имеется поступательное движение или нет. Иное, однако, будет в том случае, если в стекле или воде будет содержаться нечто такое, чего мы не можем привести в движение.

Как я сказал, Френель высказал предположение, что эфир не следует за движением Земли. Единственный способ,

[1]) Письмо Френеля к Араго. Sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique. Ann. de chim. et de phys. **9** (1818), стр. 57 (Oeuvres complètes de Fresnel **2**, стр. 627).

которым можно себе объяснить это, заключается в представлении, что Земля во всей своей массе пронизана эфиром и является для него совершенно проницаемой. Если мы не убоялись приписать такие свойства телу, имеющему размеры нашей планеты, то подавно мы должны приписать их телам гораздо меньших размеров. Мы должны ожидать, что, когда через трубку течет вода, в ней нет потока эфира, а потому, поскольку пучок света распространяется частью через воду, а частью через эфир, световые волны эфиром будут как бы тормозиться и потому не достигнут полной скорости потока воды. По гипотезе Френеля, мы найдем скорость, которой обладают лучи по отношению к стенкам трубки, или — что то же самое — по отношению к эфиру, если прибавим к скорости, с которой свет распространялся бы в неподвижной воде, не всю скорость потока, а только некоторую ее часть, а именно $1-\frac{1}{\mu^2}$; здесь μ есть показатель преломления неподвижной воды. Френель прилагает этот же коэффициент и ко всем другим изотропным прозрачным веществам. Если μ мало отличается от единицы, как это имеет место в газах, наш коэффициент тоже оказывается малым; световые волны едва увлекаются потоком воздуха, так как в воздухе распространение света происходит почти исключительно по содержащемуся в нем эфиру. Если мы хотим, чтобы коэффициент Френеля был близок к единице, т. е. чтобы световые волны приобретали почти полную скорость весомой материи, мы должны взять тело с бо́льшим коэффициентом преломления.

151. Я должен добавить два замечания. Во-первых, вместо того, чтобы рассматривать скорость относительно эфира, мы можем с таким же правом рассматривать скорость относительно весомой материи. Если через воду, текущую по трубе направо со скоростью w, идет пучок лучей, распространяющихся в том же направлении, скорость распространения относительно эфира может быть представлена выражением

$$v+\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)w,$$

где v означает скорость света в неподвижной воде. Скорость света относительно воды может быть получена из этого выражения, если из него вычесть w; она равна

$$v - \frac{1}{\mu^2} w. \tag{251}$$

Можно считать, что она слагается из скорости v и некоторой части скорости эфира относительно весомой материи, определяемой дробью $\frac{1}{\mu^2}$; в нашем примере эта скорость направлена в левую сторону.

Во-вторых, вышеприведенная формулировка гипотезы Френеля должна быть распространена на случай таких сред, в которых скорость света зависит от частоты. Когда тело находится в движении, мы должны различать частоту колебаний в определенной неподвижной точке эфира и ту частоту, с которой электромагнитное состояние изменяется в точке, движущейся вместе с весомой материей. Если, пользуясь осями координат, неподвижными по отношению к эфиру, мы выразим значения возмущений при помощи формул, в которые входят выражения вида

$$\cos n\left(t - \frac{x}{u} + p\right), \tag{252}$$

то n будет обозначать первую из этих частот, которую можно назвать *истинной*, или *абсолютной*. Ко второй, *относительной* частоте мы можем перейти, вводя в это выражение координату по отношению к началу, движущемуся вместе с весомой материей. Если эту координату обозначить через x' и если материя движется в направлении OX со скоростью w, имеем:

$$x = x' + wt,$$

так что (252) приобретает вид

$$\cos n\left(t - \frac{w}{u} t - \frac{x'}{u} + p\right).$$

Коэффициент при t в этом выражении

$$n' = n\left(1 - \frac{w}{u}\right)$$

представляет собой относительную частоту; то обстоятельство, что она не совпадает с n, согласуется с принципом Допплера.

Гипотезу Френеля можно теперь выразить более точно следующим образом: если нам нужно узнать скорость распространения света в движущейся весомой материи, мы должны фиксировать наше внимание на *относительной* частоте n' колебаний, понимая под v и μ в выражении (251) величины, относящиеся к световым колебаниям, которые проходят через неподвижное тело и имеют частоту n'.

152. Я должен теперь показать, что теория Френеля действительно объясняет наблюдаемые явления. В кратких словах эти явления заключаются в следующем. Во-первых, мы имеем аберрацию света, о которой я уже говорил. Далее, было найдено, что астроном, определивший кажущееся направление лучей, идущих от звезды, и их кажущуюся частоту, может на основании этих данных предсказать, пользуясь обычными законами оптики и не обращая внимания на движение Земли, все результаты любых опытов над отражением, преломлением, диффракцией и интерференцией, которые могут быть проделаны с этими лучами. Наконец, все оптические явления, которые могут быть воспроизведены при помощи земных источников света, оказываются абсолютно независимыми от движения Земли. Если, поворачивая весь прибор, включая сюда и источник света, мы изменим направление лучей по отношению к направлению поступательного движения Земли, то никаких изменений мы никогда не заметим.

Следует отметить, что все это можно было бы объяснить непосредственно и без всяких математических формул при помощи теории Стокса, если бы только можно было примирить друг с другом два ее основных допущения. Становясь на точку зрения Френеля, нам приходится прибегать к кое-каким вычислениям; но они приведут нас ко вполне удовлетворительному объяснению всех перечисленных явлений с той оговоркой, впрочем, что мы должны будем ограничиться явлениями первого порядка малости.

153. Начнем опять с рассмотрения распространения фронта волны, на этот раз внутри весомого прозрачного тела; пусть его свойства могут изменяться от точки к точке, но пусть оно везде будет изотропным. Для данной частоты скорость света в неподвижном теле будет иметь в каждой точке определенное значение v, которое связано с показателем преломления μ соотношением

$$\mu = \frac{c}{v}.$$

Как и раньше, мы будем пользоваться осями координат, связанными с Землей; если мы изобразим продвижение волн графически, то нужно представлять себе, что чертеж также движется вместе с Землей; тогда эфир будет течь сквозь нее со скоростью, которую мы опять обозначим через $\mathbf{g}$. Эта скорость имеет теперь во всех точках одинаковое направление и одинаковую величину, будучи в каждом месте равной по величине и противоположной по направлению скорости Земли.

Пусть σ, как и прежде, представляет собой положение фронта волны (см. рис. 8, стр. 248) в момент времени t, а σ' — положение фронта волны в момент времени $t + dt$, причем эта последняя поверхность является огибающей всех элементарных волн, которые успели образоваться за промежуток времени dt. Если бы эфир в нашем случае оставался в покое, каждая элементарная волна представляла бы собой сферу с радиусом $v\,dt$; ее геометрический центр совпадал бы с центром колебаний. В действительности, на основании того, что было сказано о гипотезе Френеля, геометрический центр сферы, радиус которой будет попрежнему $v\,dt$, окажется смещенным по отношению к центру колебаний на некоторое расстояние, причем величина смещения дается вектором $\frac{1}{\mu^2}\mathbf{g}\,dt$.

Рассмотрим бесконечно малый треугольник, вершины которого расположены в точке P фронта волны σ, являющейся источником элементарной волны, в точке Q, являющейся ее геометрическим центром, и в точке P', где элементарная волна касается нового фронта волны σ'. Как только что было упомянуто, сторона PQ есть вектор $\frac{1}{\mu^2}\mathbf{g}\,dt$.

Сторона QP', являющаяся радиусом сферы, нормальна к σ' и в пределе к σ. Ее длина равна $v\,dt$. Что касается стороны PP', это есть элемент относительного луча. Следуя общепринятому обозначению, мы назовем величину $\frac{PP'}{dt}$ скоростью луча, так что, если ее обозначить через v', получаем выражение

$$PP' = v'\,dt.$$

Отсюда ясно, что если угол между относительным лучом и скоростью g обозначить через ϑ,

$$v^2 = v'^2 - 2\frac{|g|}{\mu^2}v'\cos\vartheta + \frac{g^2}{\mu^4},$$

откуда можно получить, пренебрегая величинами третьего порядка малости, т. е. порядка $\frac{|g|^3}{v^3}$, следующее выражение:

$$v' = v + \frac{|g|}{\mu^2}\cos\vartheta - \frac{g^2}{2v\mu^4}\sin^2\vartheta. \tag{253}$$

Мы должны будем особенно заняться обратной величиной этого количества. С той же степенью приближения она дается выражением

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{v}\left\{1 - \frac{|g|}{v\mu^2}\cos\vartheta + \frac{g^2}{2v^2\mu^4}(1+\cos^2\vartheta)\right\}. \tag{254}$$

Мы имеем, далее, простое правило, при помощи которого можем перейти от направления волновой нормали к направлению относительного луча и наоборот. Вектор PP' является суммой векторов PQ и QP'. Поэтому, деля все три вектора на dt, получаем следующее положение: если вектор, направленный по нормали к волне и имеющий величину v, сложить с вектором $\frac{g}{\mu^2}$, результирующий вектор будет иметь направление относительного луча; и обратно, если вектор величины v', имеющий направление луча, сложить с вектором $-\frac{|g|}{\mu^2}$, мы найдем направление нормали к волне.

Чтобы вполне уяснить себе смысл этих положений, мы должны помнить, что в каждой точке среды относительный луч и волна могут иметь всевозможные направления. Вышеприведенный результат относится ко всем случаям.

154. Эти предварительные рассуждения дают нам возможность доказать красивую теорему, что, если пренебречь величинами второго порядка, движение Земли не оказывает никакого влияния на ход относительных лучей. Мы видели, каким образом принцип Гюйгенса, определяя последовательные положения σ, σ', σ'', ... фронта волны, дает нам в то же время ряд последовательных элементов относительного луча PP', $P'P''$, $P''P'''$, ... Если назвать центр колебаний элементарной волны и ту точку, где эта волна касается огибающей, *сопряженными* точками, можно сказать, что луч проходит через ряд сопряженных точек, следующих одна за другой через бесконечно малые расстояния. Мы можем теперь провести между двумя последовательными положениями фронта волны большое число бесконечно малых отрезков прямых, часть которых будет соединять между собой сопряженные точки, а часть не будет, и для каждого из таких отрезков мы можем вычислить значение

$$\frac{ds}{v'}, \tag{255}$$

принимая за v' величину, относящуюся к элементу луча с направлением ds. Легко видеть, что это выражение (255) имеет одно и то же значение для всех отрезков, соединяющих сопряженные точки, и большее значение для всех других отрезков. В самом деле, в силу определения v' это значение в первом случае равно тому времени dt, за которое свет успеет пройти из первого положения фронта волны во второе; что касается отрезка ds, проведенного между точкой P первого фронта волны и точкой Q второго (причем точка Q не является сопряженной с точкой P), его конец Q лежит вне элементарной волны, построенной при точке P, так как новый фронт волны имеет меньшую кривизну, чем элементарная волна, и должен лежать целиком вне ее, за исключением точки касания. Поэтому для отрезка PQ выражение (255) должно иметь значение, превышающее то, которое оно имело бы, если бы Q лежало на поверхности элементарной волны.

Пусть теперь A и B будут две точки относительного луча s, лежащие на конечном расстоянии друг от друга, и пусть s' будет другая кривая, соединяющая эти точки. Если между A и B мы построим ряд фронтов волны на бесконечно малых расстояниях друг от друга, кривая s разобьется на элементы, каждый из которых соединяет две сопряженные точки, тогда как этим свойством могут обладать не все элементы отрезка s'. Отсюда мы можем вывести, что интеграл

$$\int \frac{ds}{v'}, \tag{256}$$

взятый по s, будет иметь меньшую величину, чем соответствующий интеграл для кривой s'. Таким образом, ясно, что ход относительного луча между двумя заданными точками A и B определяется тем свойством, что на этом пути интеграл (256) имеет наименьшее значение по сравнению с любой другой кривой, проведенной между этими точками.

Подставляя в интеграл значение (254), получаем, пренебрегая членами второго порядка:

$$\int_A^B \frac{ds}{v'} = \int_A^B \frac{ds}{v} - \int_A^B \frac{|\boldsymbol{g}| \cos\vartheta}{\mu^2 v^2}\, ds; \tag{257}$$

так как $\mu v = c$, то здесь мы можем заменить последний член выражением

$$\frac{1}{c^2}\int_A^B \boldsymbol{g}_s ds = \frac{1}{c^2}(AB)_g\,|\boldsymbol{g}|,$$

если под $(AB)_g$ понимать проекцию отрезка траектории AB на направление скорости $\boldsymbol{g}$, вполне определяемую положением крайних точек A и B. Последний член в (257) является поэтому одинаковым для всех путей, соединяющих A и B, и условие минимума требует просто, чтобы первый член

$$\int_A^B \frac{ds}{v}$$

имел минимальное значение. В этом члене нет, впрочем, ничего, что зависело бы от скорости g; поэтому путь луча, для которого он имеет минимальное значение, тоже не зависит от этой скорости, что и требовалось доказать.

При этом доказательстве мы не вводили никаких предположений относительно того способа, каким v и μ изменяются от точки к точке. Поэтому наше доказательство применимо к любому распределению изотропной прозрачной материи и даже к тем крайним случаям, когда на некоторой поверхности имеется внезапное изменение свойств. Следовательно, для относительных лучей закон преломления сохраняет ту же формулировку, что и для неподвижных тел (в этом случае слово «относительный» может быть опущено). Я должен добавить, что последнее положение может быть доказано и независимо, путем непосредственного применения принципа Гюйгенса к преломлению на поверхности, и что случай отражения лучей может быть разобран таким же способом и с таким же результатом.

155. Чтобы объяснить явление аберрации, достаточно только комбинировать вышеприведенные результаты. Пусть P будет точка на некотором расстоянии от Земли; мы представим себе, что она неподвижно связана с Землей и лежит сейчас же за атмосферой в свободном эфире. В этой точке свет, идущий от какой-нибудь звезды, будет состоять из волн, нормаль к которым имеет определенное направление N, противоположное тому направлению, по которому в действительности звезда расположена. Эти волны обладают также определенной относительной частотой, которая, вообще говоря, отличается от истинной или абсолютной частоты, повинуясь правилу Допплера.

В точке P мы имеем $v = c$, $\mu = 1$. Поэтому, если нам нужно найти направление относительного луча s в этой точке, мы должны вектор c, направленный по нормали к волне N, сложить с вектором g, представляющим скорость эфира по отношению к Земле; этот вектор g должен поэтому быть равен по величине и противоположен по направлению скорости Земли. Это построение, очевидно, приводит к направлению относительного луча, совпадающему с кажущимся направлением лучей, которое дается элементарной теорией аберрации. Мы можем считать поэтому, что мы объясним это явление, если нам удастся показать, что результат наблюдений, произведенных на поверхности нашей планеты, таков, что астроном (который не думает о том, что Земля движется) будет считать, что свет обладает именно той частотой n, которую он видит, и выведет из этих наблюдений заключение, что лучи доходят до атмосферы по направлению s. Но это так и есть на самом деле, потому что, как мы видели, распространение относительных лучей от P и далее в точности совпадает с тем, какое имели бы абсолютные лучи, если бы Земля была неподвижна и если бы истинная частота имела значение n.

В частности, мы можем заметить, что если в этом последнем случае путь лучей загородить при помощи соответственным образом расположенных экранов с малыми отверстиями, луч света может все-таки пройти через эти отверстия, если экраны будут двигаться вместе с Землей. Далее, если на Земле, находящейся в покое, абсолютные лучи собираются в фокусе телескопа, относительные лучи тоже соберутся в эту же точку, производя в ней действительное сгущение света. Что это действительно так, можно сразу видеть, если при помощи теоремы § 153 определить вид фронтов волны по соседству с фокусом. Оказывается, что схождение относительных лучей к одной точке неизбежно вызывает стягивание фронта волн около этой точки [1].

Объяснение того факта, что движение Земли не оказывает никакого влияния ни на какие оптические явления, производимые земными источниками света, настолько просто, что может быть выражено в нескольких словах. Достаточно заметить, что в опытах по интерференции разности фаз остаются без изменения. Это следует непосредственно из нашей формулы (257) для того промежутка времени, в течение которого относительный луч проходит некоторый отрезок пути. Если два относительных луча, выходящих из точки A, встречаются в точке B, промежутки времени,

---

[1] Примечание 68.

потребные им для этого, даются выражениями

$$\int_A^B \frac{ds_1}{v} + \frac{1}{c^2}(AB)_g\,|\boldsymbol{g}|$$

и

$$\int_A^B \frac{ds_2}{v} + \frac{1}{c^2}(AB)_g\,|\boldsymbol{g}|,$$

где интегралы относятся к указанным двум путям. Так как последние члены тождественны, мы находим, что разность между двумя временами прихода равна

$$\int_A^B \frac{ds_1}{v} - \int_A^B \frac{ds_2}{v}.$$

Так как эта величина не зависит от движения Земли, результат интерференции тоже будет независим от этого движения; это заключение можно распространить на *все* оптические явления, так как в свете принципа Гюйгенса мы можем все такие явления рассматривать как случаи интерференции.

Следует, впрочем, заметить, что положение светлых и темных полос интерференции определяется разностями фаз, *выраженными в периодах колебаний*, так что вышеприведенные заключения законны лишь в том случае, если движение Земли не сказывается на самих периодах колебаний частичек источника света. Это условие будет соблюдено, если ни действующие на них упругие силы, ни массы их не претерпят изменений. Тогда во всех опытах, производящихся на движущейся Земле, относительная частота в любой точке нашего прибора будет равна той частоте, которую мы получили бы, если бы могли произвести подобный опыт на планете, не имеющей поступательного движения.

156. Коэффициент Френеля $1 - \frac{1}{\mu^2}$, всю важность которого мы теперь должны были оценить, может быть выведен из той теории, по которой в пучке света, проходящем через весомое тело, происходит колебательное движение электрических зарядов. К сожалению, если мы предположим, что эти заряды сосредоточены в отдельных электронах, мы столкнемся при выводах с теми затруднениями, которые присущи почти всем молекулярным теориям; истинная причина частичного увлечения световых волн материей, находящейся в движении, выступает вследствие этого с недостаточной ясностью. По этой причине я рассмотрю сначала идеальный случай, а именно, когда заряды распределены по телу непрерывно. В этом предварительном рассмотрении я разъясню то затруднение, с которым мы теперь встречаемся и которое заключается в том, что мы должны представить себе четыре различные среды, проникающие друг через друга совершенно свободно, так что они могут занимать одно и то же место пространства, а именно: 1) эфир, 2) положительное и отрицательное электричество, 3) весомую материю.

В целях упрощения я введу предположение, что из положения равновесия в весомом теле может быть смещено электричество только одного знака, а электричество другого знака неподвижно связано с материей и не имеет никакого другого движения, кроме общего поступательного движения всей системы. Я обозначу через ρ объемную плотность подвижного заряда, а через ρ' — неподвижного. Так как все тело как целое остается незаряженным, мы получим для состояния равновесия

$$\rho+\rho'=0; \tag{258}$$

это выражение останется справедливым и в том случае, если один из зарядов совершает колебания, — он только не должен при этом сгущаться или разрежаться.

В нашей теории мы оставим открытым вопрос о том, какое из двух электричеств, положительное или отрицательное, может испытывать смещение внутри тела.

157. Примем, что движущийся заряд имеет некоторую массу и притягивается назад к положению равновесия упругой силой, противоположной смещению и ему пропорциональной; пусть q будет смещение, $-fq$ — упругая сила, m — масса; обе последние величины отнесены к единице объема.

Уравнения, которыми мы должны пользоваться при решении предложенной задачи, были уже приведены в § 11. Вводя координаты, неподвижно связанные с эфиром, получаем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = \rho + \rho', \tag{259}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{260}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}, \tag{261}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c}(\dot{\boldsymbol{d}} + \rho\boldsymbol{v} + \rho'\boldsymbol{v}'), \tag{262}$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ обозначают скорости двух родов электричества, так что $\rho\boldsymbol{v} + \rho'\boldsymbol{v}'$ представляет ток конвекции.

К этим формулам мы должны добавить уравнение движения колеблющегося электрического заряда. Если его ускорение обозначить через $\boldsymbol{j}$, мы получим:

$$m\boldsymbol{j} = -f\boldsymbol{q} + \rho\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]. \tag{263}$$

158. Рассмотрим сначала вкратце распространение электрических колебаний в неподвижном теле. Можно ограничиться случаем, когда мы имеем смещение $\boldsymbol{q}_y$ подвижного заряда в направлении OY наряду с диэлектрическим смещением $\boldsymbol{d}_y$ эфира, имеющим то же направление, и магнитную силу $\boldsymbol{h}_z$, параллельную OZ; пусть все эти величины будут функциями только x и t. Так как соотношение (258) не нарушается, уравнения (259) и (260) оказываются при этих допущениях удовлетворенными и (261) и (262) сводятся к следующим выражениям:

$$\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial t}, \tag{264}$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t}\right). \tag{265}$$

В конце концов уравнение движения приобретает вид

$$m\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}_y}{\partial t^2} = -f\boldsymbol{q}_y + \rho\boldsymbol{d}_y. \tag{266}$$

Решение этих уравнений можно получить, если положить

$$\boldsymbol{d}_y = a\cos n\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

откуда при помощи (264) и (266) имеем:

$$\boldsymbol{h}_z = \frac{c}{v}\boldsymbol{d}_y, \qquad \boldsymbol{q}_y = \frac{\rho}{f - mn^2}\boldsymbol{d}_y. \tag{267}$$

Подставляя эти значения в (265), получаем следующую формулу для определения скорости распространения v:

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{\rho^2}{f - mn^2} + 1. \tag{268}$$

159. Когда тело обладает равномерным поступательным движением со скоростью w в направлении OX, мы можем попрежнему удовлетворить уравнениям соответственно подобранными величинами $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{h}_z$, $\boldsymbol{q}_y$, но здесь будут необходимы некоторые изменения. Первое из этих изменений относится к току конвекции. Его составляющая в направлении OX попрежнему остается равной нулю, так как положительное и отрицательное электричество при поступательном движении тела переносятся вместе, но, если мы, как и ранее, будем пользоваться осями координат, неподвижно связанными с эфиром, конвекционный ток параллельно OY уже нельзя будет представлять выражением $\rho\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t}$. Правильное выражение для этого тока можно найти следующим образом. Если определенная точка колеблющегося заряда в момент времени t имеет координату x, то в момент времени $t + dt$ ее координата будет $x + w\,dt$, так что приращение ее смещения $\boldsymbol{q}_y$ дается выражением

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t}dt + w\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial x}dt,$$

а скорость в направлении OY будет

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t} + w\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial x},$$

или, в другом обозначении,

$$\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right),$$

где скобки обозначают производную для точки, движущейся вместе с телом. Ток конвекции можно поэтому представить следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right).$$

Ясно, что ускорение равно

$$\left(\frac{\partial^2 q_y}{\partial t^2}\right)$$

и что для любой величины φ, зависящей от координат и от времени, следует различать две производные: $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$, точно так же, как мы это делали и для q_y. Первое из этих выражений есть частная производная от φ, когда φ рассматривается как функция от t и от «абсолютных» координат, т. е. координат по отношению к осям, неподвижно связанным с эфиром; второй символ нужно применять, когда за независимые переменные принимаются время и «относительные» координаты, т. е. координаты по отношению к осям, движущимся вместе с телом. Соотношение между этими двумя величинами всегда дается формулой

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+w\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{269}$$

Что касается производных по x, y, z, то значение всех их не зависит от того, что мы будем понимать под x, y, z: абсолютные или относительные координаты.

Второе изменение, которое мы должны произвести, вызывается последним членом в (23). В силу того, что заряд ρ имеет скорость w по направлению OX, на него будет действовать сила

$$-\frac{\rho}{c}wh_z,$$

параллельная OY; эту силу следует добавить к правой части уравнения движения.

В силу принятых нами допущений $\rho+\rho'$ во время колебаний попрежнему равно нулю, и (259) и (260) оказываются удовлетворенными. Уравнение (264) можно оставить без изменения, но (265) и (266) должны быть заменены выражениями

$$-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\left\{\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t}\right\}$$

и

$$m\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}_y}{\partial t}\right)=-f\boldsymbol{q}_y+\rho\boldsymbol{d}_y-\frac{w}{c}\rho\boldsymbol{h}_z.$$

Эти три формулы несколько упрощаются, если принять за независимые переменные время и относительные координаты и если одновременно положить:

$$\boldsymbol{d}_y-\frac{w}{c}\boldsymbol{h}_z=\boldsymbol{d}'_y.$$

Применяя соотношение (269) к $\boldsymbol{d}_y$ и $\boldsymbol{h}_z$, получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{d}'_y}{\partial x}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial t}\right),$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\left\{\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}_y}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial \boldsymbol{d}'_y}{\partial t}\right)-w\frac{\partial \boldsymbol{d}'_y}{\partial x}+\frac{w}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial t}\right)\right\},$$

$$m\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}_y}{\partial t^2}\right)=-f\boldsymbol{q}_y+\rho\boldsymbol{d}'_y.$$

Первое и третье из этих уравнений имеют ту же форму, что и (264) и (266). Поэтому, если мы положим:

$$\boldsymbol{d}'_y=a\cos n\left(t-\frac{x}{v'}\right), \tag{270}$$

понимая под x относительную координату, получаем, соответственно (267):

$$\boldsymbol{h}_z=\frac{c}{v'}\boldsymbol{d}'_y,\quad \boldsymbol{q}_y=\frac{\rho}{f-mn^2}\boldsymbol{d}'_y,$$

вследствие чего второе уравнение превращается в

$$\frac{c^2}{v'^2}=\frac{\rho^2}{f-mn^2}+1+2\frac{w}{v'}.$$

Сравнивая это выражение с (268), мы видим, что для определенного значения частоты n можно написать:

$$\frac{c^2}{v'^2}=\frac{c^2}{v^2}+2\,\frac{w}{v'}.$$

Так как мы все время пренебрегаем величинами второго порядка, можно в последнем члене заменить v' через v. Таким образом, мы получим:

$$\frac{c}{v'}=\frac{c}{v}+\frac{w}{c},$$

$$v'=v-\frac{wv^2}{c^2}=v-\frac{w}{\mu^2},$$

если μ есть показатель преломления для неподвижного тела.

Нужно помнить, что в (270) x обозначает относительную координату. Поэтому n есть относительная частота и v' — скорость распространения относительно весомой материи. Скорость света по отношению к эфиру будет

$$v'+w=v+\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)w$$

в соответствии с гипотезой Френеля.

160. Я должен теперь показать вам, каким образом тот же результат можно вывести из теории электронов. Для этого мы могли бы повторить по отношению к движущейся системе все то, что было сказано в главе IV относительно распространения света в системе молекул. Мы придем, однако, к нашей цели более кратким путем, если будем сравнивать явления в движущейся системе с теми явлениями, которые происходят в той же самой системе, когда она неподвижна.

При этом сравнении мы должны пользоваться теми допущениями, которые были приняты в главе IV.

При отсутствии поступательного движения задачу можно формулировать следующим образом. В молекулах тела имеются электрические моменты $\boldsymbol{p}$, изменяющиеся как от одной молекулы к другой, так и с течением времени. Благодаря этому моменту каждая молекула окружена электромагнитным полем, которое определяется потенциалами (§ 42):

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{4\pi c r};$$

здесь x, y, z суть координаты рассматриваемой точки, r — ее расстояние от молекулы; квадратные скобки напоминают нам, что мы имеем дело с запаздывающими потенциалами. Электрическая сила $\boldsymbol{d}$ и магнитная сила $\boldsymbol{h}$ даются нижеследующими формулами, которые могут быть выведены из (33) и (34):

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{\boldsymbol{p}}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[p_z]}{r}\right\}, \tag{271}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{\boldsymbol{p}}]\right\}. \tag{272}$$

После сложения полей, производимых всеми молекулами тела, мы должны добавить еще одно поле, а именно то, которое вызывается внешними причинами и которое я буду обозначать через $\boldsymbol{d}_0$, $\boldsymbol{h}_0$. Оно удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{d}_0 &= 0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{h}_0 &= 0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{h}_0 &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{d}}_0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{d}_0 &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}_0. \end{aligned}\right\} \tag{273}$$

Наконец, нам остается рассмотреть уравнения движения электронов, которые при своем смещении дают электрические моменты $\boldsymbol{p}$. Пусть в каждой молекуле содержится только один подвижный электрон e, смещение которого $\boldsymbol{q}$ вызывает электрический момент

$$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{q}. \tag{274}$$

Если символ $\sum$ относится к сумме полей всех окружающих частичек и если $-fq$ есть упругая сила, $-g\dot{q}$ — сопротивление движению, уравнение движения будет:

$$m\ddot{q} = e\sum d + ed_0 - fq - g\dot{q}. \tag{275}$$

161. В теории движения системы, обладающей скоростью $\boldsymbol{w}$, мы можем с большой выгодой воспользоваться преобразованиями, которые мы применяли ранее в § 44.

Принимая за независимые переменные координаты x', y', z' по отношению к осям, движущимся вместе с системой, и «местное» время

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{w}_x x' + \boldsymbol{w}_y y' + \boldsymbol{w}_z z'), \tag{276}$$

мы получаем уравнения (104)—(107) для векторов $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, которые теперь становятся на место $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$. Новые формулы, правда, имеют не совсем ту форму, что (33)—(36), и член $\frac{1}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}')$, который вызывает это различие, нельзя опускать [1]), так как он первого порядка малости по отношению к $\frac{|\boldsymbol{w}|}{c}$, но все же, несмотря на это, оказывается, что поле, вызываемое электрическим моментом, определяется формулами [2])

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{\boldsymbol{p}}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$\boldsymbol{h}' = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{\boldsymbol{p}}]\right\},$$

которые в точности соответствуют (271) и (272).

Едва ли нужно напоминать, что символы grad и rot имеют тот смысл, который был им придан в § 44, и что если нам нужно вычислить $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ для точки (x', y', z'), лежащей на расстоянии r от поляризованной частички, для того момента времени, в который местное время в этой точке имеет данное определенное значение t', мы должны

---

[1]) См., впрочем, примечание **72***.

[2]) См. примечание **26**.

принять за $\boldsymbol{p}$, $\dot{\boldsymbol{p}}$, $\ddot{\boldsymbol{p}}$ значения для того момента времени, когда местное время частички равно $t' - \frac{r}{c}$.

Поле, вызываемое причинами, лежащими вне тела, опять-таки подчиняется основным уравнениям для свободного эфира. При наших новых переменных эти уравнения приобретают вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}'_0 = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h}'_0 = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}'_0 = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{d}}'_0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{d}'_0 = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{h}}'_0;$$

это будет ясно, если в (100)—(103) положить ρ равным нулю. Эти уравнения по форме тождественны с (273).

В уравнение движения электрона должно теперь входить выражение для электромагнитной силы $\frac{1}{c}[\boldsymbol{wh}]$, обусловленной поступательным движением $\boldsymbol{w}$, так что для полной силы, действующей на единицу заряда, нужно написать:

$$\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{wh}].$$

Но это как раз тот вектор, который мы обозначили через $\boldsymbol{d}'$. Следовательно, если мы допустим, что упругая сила, определяемая коэффициентом f, и сопротивление, измеряемое величиной g, при поступательном движении не изменяются, мы можем написать уравнение движения следующим образом:

$$m\ddot{q} = e\sum \boldsymbol{d}' + e\boldsymbol{d}'_0 - fq - g\dot{q},$$

где знак $\sum$ имеет тот же смысл, что и в (275).

Следует заметить, что соотношение (274) остается справедливым и теперь и что в определенной точке движущейся системы производные по t и по t' равны друг другу. В силу этого мы можем принять, что значки в вышеприведенном уравнении означают частное дифференцирование по t'. В том же смысле следует понимать их и в предыдущих формулах.

162. Из всего вышесказанного вытекает, что при введении новых переменных все уравнения в нашей задаче опять принимают тот вид, который они имели, когда не было никакого поступательного движения. Это сразу приводит нас к следующему заключению.

Если в неподвижной системе может существовать такое состояние, в котором $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{p}$ суть известные функции x, y, z, t, то в движущейся системе могут происходить такие явления, в которых векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{p}'$ являются такими же функциями относительных координат x', y', z' и местного времени t'.

Эту теорему можно распространить на средние значения $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ или $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, на электрический момент $\boldsymbol{P}$ единицы объема и также на вектор $\boldsymbol{D}$, который мы ввели в § 114; в параллель ему нужно будет ввести соответственно определенный вектор для движущейся системы. Если для одной системы мы положим

$$\overline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E},\ \overline{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},$$

а для другой

$$\overline{\boldsymbol{d}'} = \boldsymbol{E}',\ \overline{\boldsymbol{h}'} = \boldsymbol{H}',\ \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P},$$

мы получим в результате, что для каждого состояния, в котором $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ являются некоторыми функциями x, y, z, t, имеется соответствующее состояние движущейся системы, характеризующееся величинами $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, которые точно таким же образом связаны с x', y', z', t'.

163. Непосредственным следствием этой общей теоремы является значение коэффициента Френеля. Предположим, что световые волны распространяются в каком-нибудь прозрачном весовом теле, не обладающем поступательным движением; при этом составляющие $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ даются выражениями вида

$$a \cos n\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} + p\right),$$

где α, β, γ суть направляющие косинусы нормали к волне, а v — скорость распространения. Тогда соответственно этому мы можем наблюдать в этом же теле, если оно находится в движении, такие явления, которые тоже могут быть описаны, как распространение световых волн, и которые могут быть представлены выражениями вида

$$a \cos n \left(t' - \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{v} + p\right),$$

или в силу (276)

$$a \cos n \left(t - \frac{\mathfrak{w}_x x' + \mathfrak{w}_y y' + \mathfrak{w}_z z'}{c^2} - \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma z'}{v} + p\right).$$

Если мы положим здесь

$$\frac{\alpha}{v} + \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2} = \frac{\alpha'}{v'}, \quad \frac{\beta}{v} + \frac{\mathfrak{w}_y}{c^2} = \frac{\beta'}{v'}, \quad \frac{\gamma}{v} + \frac{\mathfrak{w}_z}{c^2} = \frac{\gamma'}{v'}, \qquad (277)$$

при условии

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \qquad (278)$$

формула приобретает вид

$$a \cos n \left(t - \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{v'} + p\right);$$

она показывает, во-первых, что v' есть скорость распространения по отношению к движущемуся телу и, во-вторых, что n есть частота в какой-нибудь точке, движущейся вместе с телом. Поэтому, если мы возьмем v и v' для одного и того же значения n, мы можем быть уверены в том, что в этих двух случаях мы сравниваем скорость распространения для одинаковых относительных частот.

Пренебрегая квадратом величины $\mathfrak{w}$, легко находим из (277) и (278):

$$\frac{1}{v'^2} = \frac{1}{v^2} + 2\,\frac{\alpha \mathfrak{w}_x + \beta \mathfrak{w}_y + \gamma \mathfrak{w}_z}{c^2 v} = \frac{1}{v^2} + 2\,\frac{\mathfrak{w}_n}{c^2 v},$$

где $\mathfrak{w}_n$ есть составляющая скорости перемещения вдоль нормали к волне. Можно заметить, что, так как α', β', γ' отличаются от α, β, γ только величинами порядка $\frac{\mathfrak{w}}{c}$, мы можем за нормаль взять нормаль в движущейся системе.

Далее:

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{v} + \frac{w_n}{c^2},$$

$$v' = v - \frac{v^2}{c^2} w_n = v - \frac{w_n}{\mu^2},$$

так что мы опять пришли к нашему прежнему результату.

164. Гипотеза, выдвинутая Френелем, была подтверждена наблюдениями Физо над распространением света в движущейся воде [1]) и с большей доказательностью — тщательными исследованиями Майкельсона и Морлея по тому же вопросу [2]).

В этих опытах вода протекала в двух противоположных направлениях по двум параллельным трубам, расположенным рядом и закрытым с обоих концов стеклянными пластинками; два интерферирующих пучка лучей пропускались через эти трубы таким образом, что во время всего своего пути один из них был направлен по течению воды, а другой — против течения.

Чтобы вычислить изменение разности фаз, вызываемое движением жидкости, необходимо знать скорость распространения света по отношению к неподвижным частям прибора [3]). Если T есть период колебаний в источнике света, на основании предыдущей теории мы получаем следующее выражение для искомой скорости:

$$\frac{c}{\mu} \pm w\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \mp \frac{w}{\mu} T \frac{d\mu}{dT}.$$

Здесь скорость потока воды обозначена через w; мы должны брать верхний или нижний знак, смотря по тому, как идет свет: по течению воды или в противоположном направлении.

---

[1]) H. Fizeau, Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur, Comptes Rendus **33** (1851), стр. 349; Ann. d. Phys. u. Chem. Erg. **3** (1853), стр. 457.

[2]) A. A. Michelson and E. W. Morley, Influence of motion of the medium on the velocity of light, Amer. Journ. of Science (3), **31** (1886), стр. 377.

[3]) Примечание **69**.

Я должен добавить, что Майкельсон и Морлей, сравнивая результаты своих опытов с теорией, опустили последний член, зависящий от дисперсии жидкости. Если его принять во внимание, совпадение становится несколько хуже; но так как этот член оказывает только очень малое влияние, оно все же в достаточной степени удовлетворительно [1]).

165. Найдя коэффициент Френеля, мы можем применить его, как уже было показано в §§ 152—155, к различным явлениям. Во многих вопросах, однако, рассуждение можно вести также на основании теоремы соответственных состояний, не прибегая к этому коэффициенту.

Если, например, в некоторых частях пространства неподвижной системы как электрические, так и магнитные силы все время равны нулю, соответствующее состояние в движущейся системе будет характеризоваться тем, что в тех же частях пространства будут отсутствовать векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, что влечет за собой отсутствие векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$. Поэтому светлые и темные места геометрически должны быть распределены в обеих системах одинаково; нужно только сравнение производить каждый раз для равных относительных частот.

Интересный пример дает нам цилиндрический пучок света. Образующие его граничной поверхности, т. е. относительные лучи, могут в обеих системах итти одинаковым образом даже при наличии отражения и преломления, так что поступательное движение не оказывает никакого влияния на законы отражения и преломления относительных лучей. Равным образом оно не может изменить положения той точки, где лучи собираются в фокусе при помощи зеркала [2]) или линзы; этот принцип показывает также, что положение темных полос в интерференционных опытах не должно измениться.

Необходимое для этих заключений условие, а именно, что относительные частоты в обоих случаях должны быть одинаковы, будет удовлетворяться, если источник света

---

[1]) Примечание **69***.
[2]) Примечание **70**.

будет закреплен неподвижно по отношению к остальным приборам, оставаясь в покое или двигаясь поступательно одновременно со всей системой приборов.

166. Необходимо отметить, что вышеприведенные результаты никоим образом не ограничиваются изотропными телами. Легко включить в наше рассмотрение и кристаллы. Для этого нужно себе представить или что частицы расположены некоторым правильным образом, или что наблюдается отсутствие изотропности в структуре отдельных молекул, проявляющееся в том, что упругие силы оказываются неодинаковыми при различном направлении смещения электронов; последнее допущение повлекло бы за собой требование, чтобы составляющие упругой силы были выражены посредством

$$-(f_{11}q_x+f_{12}q_y+f_{13}q_z),$$
$$-(f_{21}q_x+f_{22}q_y+f_{23}q_z),$$
$$-(f_{31}q_x+f_{32}q_y+f_{33}q_z),$$

причем $f_{21}=f_{12}$, $f_{32}=f_{23}$, $f_{13}=f_{31}$; для доказательства же теоремы соответственных состояний нужно было бы принять, что коэфициенты при поступательном движении системы остаются неизменными.

Мы могли бы показать, что в явлениях двойного лучепреломления ход относительных лучей не изменяется при движении Земли; после этого можно было бы перейти к рассмотрению того, какое изменение претерпевает коэффициент Френеля в случае кристаллических тел. Результат может быть выражен следующим образом:

Если для относительного луча определенного направления s значения скорости этого луча в неподвижном и движущемся кристалле обозначить через u и u', то

$$u'=u-\frac{u^2}{c^2}\mathfrak{w}_s,$$

где $\mathfrak{w}_s$ есть составляющая скорости поступательного движения в направлении луча [1]).

[1]) Примечание **71.**

167. До сих пор мы все время пренебрегали членами второго порядка малости по отношению к $\frac{[\mathfrak{w}]}{c}$; действительно, почти ни в одном из опытов, произведенных в надежде обнаружить влияние движения Земли на оптические явления, было невозможно обнаружить действия, пропорциональные $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$. Есть, однако, несколько исключений и притом весьма важных, так как они привели к ряду трудных задач; одна из них и до настоящего времени не получила еще вполне удовлетворительного решения [1]).

Нам предстоит прежде всего говорить о знаменитом опыте, произведенном Майкельсоном [2]) в 1881 г. и повторенном им в больших размерах в сотрудничестве с Морлеем [3]) в 1887 г. Это очень смелый опыт; Майкельсон заставляет интерферировать два световых луча, после того как они прошли пути значительной длины в двух взаимно перпендикулярных направлениях. На рис. 9 показана общая схема прибора. Луч, идущий от источника света, при помощи поставленной под углом 45° стеклянной пластинки расщепляется на два луча: проходящий PA и отраженный PB. Отразившись от зеркал A и B, эти лучи опять возвращаются к пластинке P; теперь отраженная часть первого луча и проходящая часть второго интерферируют и дают систему светлых и темных полос, которую можно наблюдать в трубу, помещенную вдоль прямой PC.

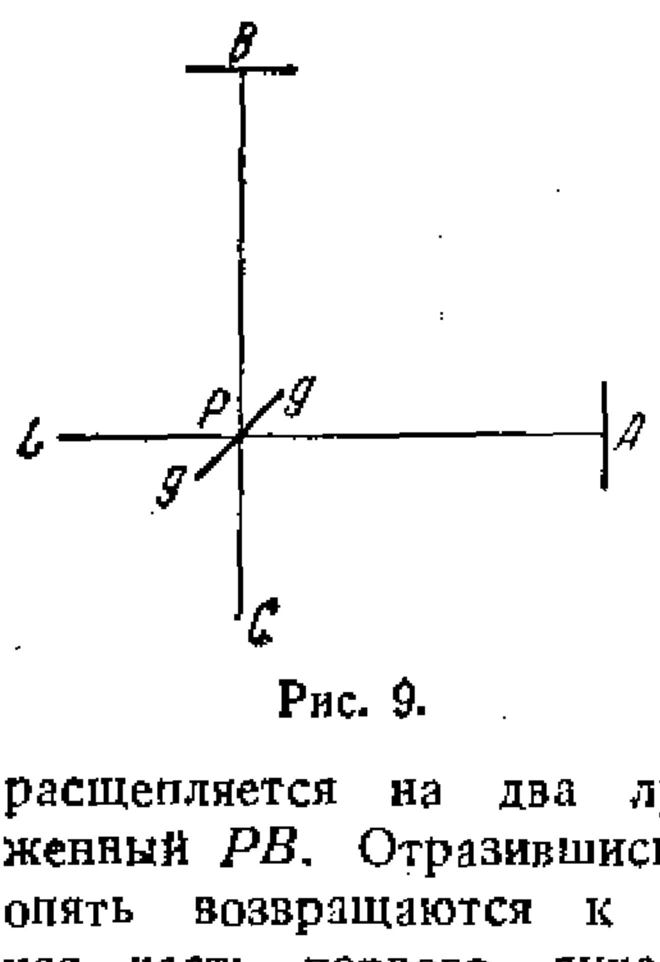

Рис. 9.

1) См., впрочем, примечание **72***.

2) A. A. Michelson, The relative motion of the earth and the luminiferous ether, Amer. Journ. of Science (3), **22** (1881), стр. 20.

3) A. A. Michelson and E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3), **34** (1887), стр. 333.

Основная идея опыта заключается в том, что если эфир остается в покое, поступательное движение прибора необходимо должно вызвать появление разности фаз, — правда, второго порядка малости. В самом деле, если система имеет поступательное движение в направлении PA или AP и если длину PA обозначить через L, промежуток времени, в течение которого луч света пройдет в одном направлении, будет $\frac{L}{c+|\boldsymbol{w}|}$, а в другом $\frac{L}{c-|\boldsymbol{w}|}$. Для полного времени пробега получаем:

$$\frac{2Lc}{c^2-w^2},$$

или с точностью до величин второго порядка

$$\frac{2L}{c}\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right), \tag{279}$$

так что лучи, которые пройдут путь PA в том и другом направлении, испытают отставание по фазе, измеряемое величиной

$$\frac{2Lw^2}{c^3}.$$

В другом пучке будет наблюдаться подобное же отставание по фазе, хотя и несколько меньшей величины. Чтобы путем элементарных рассуждений получить этот результат, достаточно принять во внимание, что некоторый луч этого пучка, если даже он вернется, как я это буду предполагать, в ту же самую точку пластинки P, попадет при этом уже в другую точку эфира, так как за тот промежуток времени, в течение которого свет прошел от P в B и обратно, упомянутая точка пластинки переместилась со скоростью $\boldsymbol{w}$ в направлении движения Земли на некоторое расстояние, скажем, PP'. Если Q есть та точка эфира, в которой луч света встречает зеркало B, мы можем сказать с достаточным приближением, что точки P, Q, P' являются вершинами равнобедренного треугольника, высота которого есть L (так как отрезки PA и PB в приборе равны друг другу), а основание равно $\frac{2L|\boldsymbol{w}|}{c}$. Сумма сторон PQ и QP' имеет величину

$$2\sqrt{L^2+\frac{L^2w^2}{c^2}},$$

так что мы можем написать, что время пробега второго луча равно

$$\frac{2L}{c}\left(1+\frac{w^2}{2c^2}\right). \tag{280}$$

Отсюда вытекает, что вследствие движения между двумя лучами создается разность фаз

$$\frac{Lw^2}{c^3},$$

которая при длине L в несколько метров может составить заметную долю периода колебаний.

К такому же заключению можно прийти несколько более строгим путем на основании общей формулы (254). Время, в течение которого относительный луч проходит некоторый путь s, дается выражением

$$\int\frac{ds}{v}-|g|\int\frac{\cos\vartheta}{v^2\mu^2}ds+\frac{1}{2}g^2\int\frac{1+\cos^2\vartheta}{v^3\mu^4}ds.$$

Здесь первый член дает то время, которое потребовалось бы, если бы система была в покое; второй член в разбираемой нами задаче имеет одинаковые значения для двух путей, начинающихся и кончающихся в одних и тех же точках; остается только третий член, который, пользуясь нашими теперешними обозначениями и полагая $\mu=1$, мы напишем следующим образом:

$$\frac{w^2}{2c^3}\int(1+\cos^2\vartheta)\,ds. \tag{281}$$

За пути, по которым должен быть взят этот интеграл, можно принять отрезки прямых, начерченные на рис. 9 [1]). На основании того, что было сказано, $\cos^2\vartheta$ становится

[1]) Примечание **72.**

равным единице вдоль PAP и имеет значение 0 в любой точке PBP. Поэтому наше последнее выражение действительно приобретает те два значения, которые даются формулами (279) и (280).

Разность фаз, вызываемая движением Земли, получит противоположный знак, если мы повернем прибор и этим достигнем того, что путь первого луча станет перпендикулярен поступательному движению, а путь второго луча — ему параллелен. Поэтому, если явления протекают в согласии с вышеприведенной теорией, такой поворот должен вызвать изменение разности фаз, равное

$$\frac{2Lw^2}{c^3}, \tag{282}$$

и соответствующее смещение интерференционных полос.

В первоначальном приборе Майкельсона длина L была, пожалуй, слишком мала, чтобы можно было заметить искомый эффект, но в более поздних опытах, проделанных вместе с Морлеем, путь лучей был значительно увеличен. Лучи испытывали многократное отражение от зеркал, расположенных соответственным образом по обе стороны пластинки P; эти зеркала, равно как и другие части прибора, в том числе источник света и зрительная труба, были установлены на каменной плите, которая плавала в бассейне с ртутью. Каждый луч при последовательных своих прохождениях шел почти по одному и тому же пути, так что можно было принять $\cos^2\vartheta$ за величину, постоянную на всем пути прохождения луча. Если $\cos^2\vartheta$ имеет для наших двух пучков вначале значения 1 и 0, а затем, после поворота на 90°, значения 0 и 1, изменение в разности фаз может быть найдено на основании (281); его можно выразить также и через (282), если под $2L$ понимать всю длину пути одного из лучей. Так как эта длина доходила до 22 *м*, значение (282) равно 0,4 периода колебания желтого света; поэтому можно было бы ожидать заметного смещения полос. Однако на деле ни в одном случае не наблюдалось ни малейшего смещения, которое можно было бы приписать вышеобъясненной причине. Такой же результат был получен впоследствии Морлеем и

Миллером [1]), которые пришли к заключению, что если и есть какое-нибудь действие того рода, которого мы ожидали, оно меньше одной сотой доли вычисленного значения.

168. Чтобы объяснить это отсутствие всякого влияния поступательного движения Земли, я попробовал предложить гипотезу, которая была высказана также Фиц-Джеральдом, а именно, что твердое тело, движущееся сквозь эфир, испытывает небольшое изменение своих размеров порядка $\frac{w^2}{c^2}$. Допустим, что два отрезка внутри весомого тела, из которых один параллелен движению, а другой ему перпендикулярен и которые в неподвижном теле имеют одинаковую длину, во время движения относятся друг к другу, как

$$\frac{L_2}{L_1} = 1 + \frac{w^2}{2c^2}; \tag{283}$$

этим самым будет вполне объяснен отрицательный результат всех опытов. В самом деле, эти изменения в длине повлекут за собой такое изменение фаз интерферирующих лучей, которое равносильно тому, что луч, распространяющийся в направлении движения Земли, ускорится на величину

$$\frac{Lw^2}{c^3};$$

это ускорение в точности компенсирует то изменение в фазе, которое мы рассматривали в предыдущих параграфах.

Эта гипотеза, несомненно, представляется на первый взгляд несколько странной, но нам трудно обойтись без нее, если мы будем настаивать на представлении о неподвижном эфире. Я думаю, мы можем даже утверждать, что при этом допущении опыт Майкельсона *доказывает* существование указанного изменения размеров тела и что это заключение не менее законно, чем те выводы, которые мы делаем относительно теплового расширения или изме-

---

[1]) E. W. Morley and D. C. Miller, Report of an experiment to detect the Fitz-Gerald — Lorentz effect, Phil. Mag. (6), 9 (1905), стр. 680.

нения показателя преломления, — выводы, которые в ряде случаев даются на основании наблюдений над положением интерференционных полос.

169. Некоторые физики развивали мысль, что, подобно обыкновенным механическим натяжениям, и те сокращения или растяжения, о которых сейчас идет речь, тоже могут вызвать в теле двойное лучепреломление; Рэлей и Брэс пытались поэтому обнаружить двойное лучепреломление, вызываемое движением Земли. Но здесь все попытки оказались тщетными: не удалось найти никаких следов подобного рода влияния.

Имея в виду этот вопрос о двойном лучепреломлении, а также и по другим причинам, представляется своевременным перейти к рассмотрению электромагнитных явлений в движущейся системе и притом не только для скоростей, весьма малых по сравнению со скоростью света c, как мы это делали раньше, но и для любой скорости поступательного движения, меньшей c. Хотя формулы получают в этом случае несколько более сложный вид, мы можем применить к этой задаче в точности те же методы, которыми мы пользовались ранее.

Нашей задачей будет опять свести, поскольку это по крайней мере окажется возможным, уравнения для движущейся системы к тому виду обычных формул, которые имеют место для неподвижной системы. Оказывается, что необходимые для этого преобразования могут оставаться до некоторой степени неопределенными; в наши формулы будет входить некоторый численный коэффициент l, относительно которого мы сделаем предварительное допущение, что он является функцией скорости поступательного движения w и что он равен единице для $w = 0$ и отличается от единицы на величину порядка $\frac{w^2}{c^2}$ для малых значений отношения $\frac{w}{c}$.

Если x, y, z являются координатами точки по отношению к осям, неподвижным в эфире, или, как мы будем говорить, «абсолютными» координатами, и если поступательное движение происходит в направлении OX, координаты по отношению к осям, движущимся вместе с системой и совпадающим с неподвижными осями в момент времени $t=0$, будут иметь значения

$$x_r = x - wt, \qquad y_r = y, \qquad z_r = z. \tag{284}$$

Введем теперь вместо x_r, y_r, z_r новые независимые переменные, отличающиеся от этих «относительных» координат некоторыми множителями, которые для всей системы имеют постоянное значение. Полагая

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2, \tag{285}$$

я определяю новые переменные уравнениями [1])

$$x' = klx_r, \quad y' = ly_r, \quad z' = lz_r, \tag{286}$$

или

$$x' = kl(x - wt), \quad y' = ly, \quad z' = lz; \tag{287}$$

сюда я прибавлю в качестве нашей четвертой независимой переменной

$$t' = \frac{l}{k} t - kl \frac{w}{c^2}(x - wt) = kl\left(t - \frac{w}{c^2} x\right). \tag{288}$$

Мы опять будем понимать под $\boldsymbol{u}$ скорость относительно подвижных осей, так что составляющие абсолютной скорости могут быть представлены так:

$$\boldsymbol{u}_x + w, \quad \boldsymbol{u}_y, \quad \boldsymbol{u}_z;$$

введем, далее, новый вектор $\boldsymbol{u}'$ с составляющими

$$\boldsymbol{u}'_x = k^2 \boldsymbol{u}_x, \quad \boldsymbol{u}'_y = k\boldsymbol{u}_y, \quad \boldsymbol{u}'_z = k\boldsymbol{u}_z. \tag{289}$$

Положим подобным же образом

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\rho \tag{290}$$

[1]) Примечание **72***.

и введем два новых вектора $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, определяемых уравнениями

$$\left.\begin{aligned} d'_x &= \frac{1}{l^2}d_x,\quad d'_y = \frac{k}{l^2}\left(d_y - \frac{w}{c}h_z\right), \\ & \qquad\qquad d'_z = \frac{k}{l^2}\left(d_z + \frac{w}{c}h_y\right), \\ h'_x &= \frac{1}{l^2}h_x,\quad h'_y = \frac{k}{l^2}\left(h_y + \frac{w}{c}d_z\right), \\ & \qquad\qquad h'_z = \frac{k}{l^2}\left(h_z - \frac{w}{c}d_y\right). \end{aligned}\right\} \tag{291}$$

Тогда основные уравнения принимают вид [1])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \boldsymbol{d}' &= \left(1 - \frac{w u'_x}{c^2}\right)\rho', \\ \operatorname{div}' \boldsymbol{h}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{h}' &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{d}'}{\partial t'} + \rho'\boldsymbol{u}'\right), \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{d}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t'}. \end{aligned}\right\} \tag{292}$$

Смысл символов div′, rot′ и grad′ (последним мы будем пользоваться в дальнейшем) тот же, который мы раньше придавали div, rot, grad с тем единственным различием, что производные по x, y, z, взятые при постоянном t, заменены производными x', y', z' (при постоянном t') [2]).

Что касается силы $\boldsymbol{f}$, с которой эфир действует на единицу электрического заряда, ее составляющие даются выражениями

$$\left.\begin{aligned} f_x &= l^2 d'_x + l^2\cdot\frac{1}{c}(u'_y h'_z - u'_z h'_y) + l^2\frac{w}{c^2}(u'_y d'_y + u'_z d'_z), \\ f_y &= \frac{l^2}{k}d'_y + \frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(u'_z h'_x - u'_x h'_z) - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}u'_x d'_y, \\ f_z &= \frac{l^2}{k}d'_z + \frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(u'_x h'_y - u'_y h'_x) - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}u'_x d'_z. \end{aligned}\right\} \tag{293}$$

---

[1]) Примечание 73.

[2]) В статье «Über das Doppler'sche Princip», опубликованной в 1887 г. (Gött. Nachr., стр. 41) и, к моему сожалению, остававшейся до последнего времени вне моего внимания, Фохт приме-

Поле, образуемое системой электронов, можно и здесь определить через посредство скалярного потенциала φ' и вектор-потенциала $\boldsymbol{a}'$. Если эти последние даются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} &= -\rho', \\ \Delta'\boldsymbol{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}'}{\partial t'^2} &= -\frac{1}{c}\rho'\boldsymbol{u}', \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

в которых символ Δ' обозначает

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

получаем [1]:

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\varphi' + \frac{w}{c}\operatorname{grad}' a'_x, \tag{295}$$

$$\boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}' \boldsymbol{a}'. \tag{296}$$

Аналогия между этими преобразованиями и теми, которыми мы пользовались раньше, бросается в глаза. Вышеприведенные формулы переходят в формулы §§ 44 и 45 при отбрасывании всех членов порядка выше первого по отношению к $\frac{w}{c}$, причем как k, так и l принимают значение 1. В настоящей более общей теории за местное время следует принять переменную t', определяемую уравнением (288).

Особенно интересно, что окончательные формулы (292) и (294)—(296) имеют в точности тот же самый вид, что и те, которые были нами выведены для малых значений w. Различие по сравнению с уравнениями для неподвижной системы заключается в тех же чертах, которые отмечены нами в §§ 44 и 45; но что касается самого вида уравнений, то введение больших скоростей поступательного движения не влечет за собой никаких новых усложнений.

нил к уравнениям вида (6) (§ 3 этой книги) преобразование, эквивалентное формулам (287) и (288). Идея такого преобразования, которым мы пользовались выше (и в § 44), могла бы быть поэтому заимствована от Фохта; в его статье содержится доказательство того, что преобразование это не изменяет вида уравнений для свободного эфира.

[1]) Примечание **74**.

170. Задача значительно упрощается при переходе к электростатической системе, т. е. к системе электронов, не имеющих никакого другого движения, кроме общего поступательного движения w. В этом случае $a' = 0$ и, следовательно, $h' = 0$. Скалярный потенциал φ', вектор d' и электрическая сила f определяются выражениями

$$\Delta'\varphi' = -\rho', \tag{297}$$

$$d' = -\operatorname{grad}'\varphi', \tag{298}$$

$$f_x = l^2 d'_x, \qquad f_y = \frac{l^2}{k} d'_y, \qquad f_z = -\frac{l^2}{k} d'_z.$$

Эти уравнения допускают простую интерпретацию. Сравним подвижную систему S, положение точек которой определяется относительными координатами x_r, y_r, z_r, с системой S_0, которая не обладает поступательным движением; при этом каждая точка с координатами x', y', z' в этой системе соответствует точке с координатами x_r, y_r, z_r в системе S, так что на основании (286) S переходит в S_0, если ее размеры, параллельные оси OX, умножить на kl, а размеры, параллельные оси OY и оси OZ, — на l. Тогда, если dS и dS' являются соответствующими элементами объема, получим:

$$dS' = kl^3\, dS, \tag{299}$$

так что, если мы предположим, что соответствующие элементы объема имеют одинаковые заряды, плотность в какой-нибудь точке S_0 будет дана величиной ρ', которая определяется уравнением (290).

Отсюда следует, что уравнение, определяющее скалярный потенциал в S_0, имеет тот же вид, что и уравнение (297), которое мы получили для φ', и что поэтому эта последняя величина в какой-нибудь точке P системы S имеет то же самое значение, что обыкновенный скалярный потенциал в соответствующей точке P_0 системы S_0. Уравнение (298) говорит нам далее, что то же относится и к вектору d' в точке P и к диэлектрическому смещению в точке P_0. Но, чтобы найти составляющие электрической силы в S, мы должны умножить значения этих составляющих d'

на $l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}$, тогда как в системе S_0 составляющие электрической силы даются непосредственно составляющими диэлектрического смещения. Поэтому между этими значениями электрических сил имеет место соотношение, которое лучше всего может быть выражено посредством формулы

$$F(S) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) F(S_0), \tag{300}$$

где в скобки заключены коэффициенты, на которые мы должны умножить составляющие силы в S_0, чтобы получить составляющие силы в S. Так как соответствующие элементы заряжены одинаково, то же соотношение имеет место по отношению к силам, действующим на соответствующие электроны.

Следует заметить, что соответствующие электроны наших двух систем занимают соответствующие части пространства и что заряды являются одинаковыми, но сами электроны геометрически друг другу не подобны; если электроны в системе S имеют сферическую форму, электроны в S_0 представляются удлиненными эллипсоидами.

Будем также помнить, что потенциал в точке P_0 системы S и, следовательно, величину φ' в соответствующей точке P системы S можно вычислить при помощи формулы

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho' \, dS'}{r'}, \tag{301}$$

где через r' мы обозначили расстояние между точкой Q_0 элемента dS' и точкой P_0. Интегрирование должно распространяться по всем элементам системы S_0, в которых имеется заряд.

Сравнение движущейся системы с неподвижной нам весьма пригодится в последующей части этой главы; поэтому будет полезно установить раз навсегда, что, если мы говорим про S и S_0, мы всегда подразумеваем две системы с вышеописанными свойствами, причем индекс 0 всегда будет обозначать неподвижную систему.

171. Имея в виду последующие рассуждения, будет полезно изложить вышеприведенные положения еще в несколько ином виде. Оставим временно в стороне воображаемую систему S_0 и сосредоточим наше внимание на системе S, которая в действительности одна нас и интересует. Для этой системы мы можем вывести, что мы уже и делали, величины x', y', z'; мы можем даже пользоваться ими для определения положения точки, так как они связаны определенным образом с величинами x_r, y_r, z_r. Назовем их *эффективными* координатами и назовем *эффективным* расстоянием между двумя точками с эффективными координатами x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2 выражение

$$r' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2}.$$

Если dx_r, dy_r, dz_r суть бесконечно малые приращения относительных координат, соответствующие приращения эффективных координат будут:

$$dx' = kl\,dx_r, \qquad dy' = l\,dy_r, \qquad dz' = l\,dz_r;$$

параллелепипед с ребрами dx, dy, dz будет, конечно, вполне определен этими приращениями dx', dy', dz'. Если вместо обычной единицы объема мы выберем единицу, в kl^3 раз меньшую, объем параллелепипеда будет выражаться произведением $dx'dy'dz'$; элемент любой формы, который в обычных единицах дается величиной dS, будет при новых единицах измерения иметь объем

$$dS' = kl^3\,dS. \tag{302}$$

Этот объем совпадает с объемом dS' в уравнении (299) но символ получил теперь другое значение. Так как я уже несколько раз пользовался термином «эффективный», я теперь — только в целях единообразия, не придавая никакого более глубокого значения этим словам, — буду называть dS' «эффективным» элементом объема. Мы будем также говорить, что какая-нибудь точка внутри dS принадлежит в то же время и эффективному элементу dS'.

Наконец, если заряд $\rho\,dS$ элемента dS разделить на численное значение эффективного элемента dS', получится величина ρ', даваемая уравнением (290). По этой причине будет, пожалуй, целесообразно называть ρ' эффективной плотностью заряда.

Теперь будет ясно, что операции, входящие в символ в правой части уравнения (301), могут быть описаны в терминах, относящихся только к действительной системе, причем знаменатель r' является эффективным расстоянием между точкой эффективного элемента dS' и точкой P, для которой мы должны вычислить φ'. Когда мы определим этот потенциал, его частные производные по эффективным координатам, взятые с обратным знаком, будут представлять собой составляющие вектора $\mathfrak{d}'$.

Делать различие между эффективными и «истинными» координатами, между эффективными и «истинными» элементами объема имеет смысл только для движущихся систем; раз $\mathfrak{w}=0$, мы сейчас же получим:

$$x'=x_r=x,\;\; y'=y_r=y,\;\; z'=z_r=z,\quad dS'=dS,\; \rho'=\rho$$

и т. д. Но как раз и силу этих равенств мы и в случае неподвижной системы можем говорить про эффективные координаты, эффективную плотность и т. д.; мы только не должны забывать, что в этом случае эти величины совпадают с истинными координатами, истинной плотностью и т. д. Равным образом мы можем всегда говорить про вектор $\mathfrak{d}'$, помня, что он при отсутствии поступательного движения совпадает с вектором $\mathfrak{d}$.

Я остановился несколько подробнее на этих вопросах терминологии, так как в сложных задачах надлежащий выбор обозначений имеет большое значение. Установленная нами терминология позволяет нам в кратких словах сконцентрировать то, что было сказано в предыдущих параграфах про системы S и S_0, а именно: в двух электростатических системах, из которых одна движется, а другая находится в покое и в которых эффективная плотность электрических зарядов является одной и той же функцией эффективных координат, вектор $\mathfrak{d}'$ будет иметь в соответствующих точках одинаковое значение, и силы будут связаны друг с другом соотношением (300).

172. После этого отступления вернемся к той гипотезе, при помощи которой я пытался объяснить результат майкельсоновского опыта. Мы поймем возможность постулируемого изменения размеров, если будем помнить, что форма твердого тела зависит от сил, действующих между его молекулами, и что, по всей вероятности, эти силы передаются через окружающий эфир способом, более или менее похожим на распространение через эту среду электромагнитных действий. Стоя на этой точке зрения, естественно предположить, что, подобно электромагнитным силам, молекулярные притяжении и отталкивания тоже получают некоторое изменение при сообщении телу поступательного движения; в результате весьма легко может последовать изменение размеров тела.

Весьма замечательно, что мы придем в точности к такой величине изменения, которую мы постулировали в § 168, если распространим на молекулярные взаимодействия результат, полученный для электрических сил, т. е. если при сравнении двух систем молекул S и S_0, в которых частички обладают одинаковыми эффективными координатами, мы примем, что и на молекулярные силы можно распространить соотношение (300).

В самом деле, согласно этому уравнению при $\boldsymbol{F}(S_0)=0$ $\boldsymbol{F}(S)$ тоже равно нулю, так что если в системе S_0 каждая молекула находится в равновесии под действием сил, испытываемых ею со стороны других молекул, то же самое будет справедливо и для системы S. Поэтому, считая доказанным, что может существовать только одно положение равновесия частичек, мы можем утверждать, что в движущейся системе S молекулы сами собой примут то расположение, которое согласно (286) соответствует расположению в S_0.

Так как x', y', z' суть истинные координаты системы S_0, а x_r, y_r, z_r являются относительными координатами в S, изменение размеров в различных направлениях дается коэффициентами в выражении (286); два отрезка прямых, о которых мы говорили в § 168, будут относиться друг к другу, как

$$\frac{L_2}{L_1}=k=\frac{c}{\sqrt{c^2-w^2}};$$

это выражение совпадает со значением (283), если пренебречь величинами порядка выше второго.

173. Интересно теперь разобрать вопрос, следует ли из наших допущений, что тела, размеры и форма которых в большей или меньшей степени зависят от их молекулярных движений, будут подвержены таким же изменениям размеров. Предварительно я рассмотрю систему точек, обладающих наряду с общим поступательным движением $\boldsymbol{w}$ некоторыми скоростями $\boldsymbol{u}$. Для каждой из них координаты x_r, y_r, z_r являются определенными функциями времени t; далее,

$$\frac{dx_r}{dt}=u_x,\qquad \frac{dy_r}{dt}=u_y,\qquad \frac{dz_r}{dt}=u_z.$$

Но мы можем также сказать, что эффективные координаты каждой точки x', y', z' являются функциями местного времени t', которое я буду в дальнейшем также называть эффективным временем; мы можем выразить производные от x', y', z' по t' через производные от x_r, y_r, z_r по t. При этом я буду предполагать, что скорости u_x, u_y, u_z настолько малы, что можно пренебречь членами порядка $\frac{|u|}{c}$ по сравнению с теми, которые будут написаны далее. Тогда в результате получаем [1]):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx'}{dt'}=k^2\frac{dx_r}{dt}, &&\frac{dy'}{dt'}=k\frac{dy_r}{dt}, &&\frac{dz'}{dt'}=k\frac{dz_r}{dt},\\
&\frac{d^2x'}{dt'^2}=\frac{k^3}{l}\frac{d^2x_r}{dt^2}, &&\frac{d^2y'}{dt'^2}=\frac{k^2}{l}\frac{d^2y_r}{dt^2}, &&\frac{d^2z'}{dt'^2}=\frac{k^2}{l}\frac{d^2z_r}{dt^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(303)$$

Первый ряд уравнений показывает, что

$$\frac{dx'}{dt'},\quad \frac{dy'}{dt'},\quad \frac{dz'}{dt'}$$

являются составляющими вектора $\boldsymbol{u}'$, который был нами определен в § 169, а из второго ряда вытекает, что, если мы имеем две системы точек S и S_0, движущиеся таким образом, что в обеих системах эффективные координаты

---

[1]) Примечание **75**.

являются одинаковыми функциями эффективного времени, мы получим для ускорений j следующее соотношение:

$$j(\mathrm{S}) = \left(\frac{l}{k^3},\ \frac{l}{k^2},\ \frac{l}{k^2}\right) j(\mathrm{S}_0). \tag{304}$$

Эта формула, в которой обозначения приняты те же, что и в (300), непосредственно следует из (303), так как составляющие ускорения в системе S_0 суть

$$\frac{d^2x'}{dt'^2},\quad \frac{d^2y'}{dt'^2},\quad \frac{d^2z'}{dt'^2},$$

а в системе S —

$$\frac{d^2x_r}{dt^2},\quad \frac{d^2y_r}{dt^2},\quad \frac{d^2z_r}{dt^2}.$$

174 [1]. Остается применить эти рассуждения к телу, в котором происходят молекулярные движения. При обыкновенной температуре скорости этих движений малы по сравнению со скоростью света, так что приближения, которыми мы пользовались в вышеприведенных формулах, повидимому, являются законными. На том же основании мы можем считать, что взаимодействия между молекулами не зависят от скоростей u и определяются исключительно относительными положениями и поступательной скоростью w.

Пусть S и S_0 будут две системы молекул, движущиеся таким образом, что эффективные координаты обеих систем являются одинаковыми функциями эффективного времени. Остановим наше внимание на тех положениях, которые две соответствующие частички P и P_0 занимают в определенный момент времени,— скажем, это будет t' по эффективному времени. Положим, что мы хотим узнать, каковы будут в тот же момент времени положения соседних частичек в S_0, которые настолько близки к P_0, что могут оказывать на нее заметное влияние; тогда нам нужно только рассмотреть значения их координат x', y', z' для того же самого значения t' эффективного времени, которое в данном случае совпадает с истинным. В движущейся системе S

[1]) Подробнее о разных вопросах, разбираемых в этом параграфе, см. примечание 75*.

дело обстоит иначе. Здесь те моменты, для которых эффективное (т. е. теперь местное) время имеет определенное значение $\underline{t}'$ для различных точек, *не совпадают* друг с другом; это значительно усложнило бы сравнение S и S_0, если бы мы не имели дела со сравнительно медленными молекулярными движениями, — упрощение, к которому мы уже прибегали. При этих условиях мы можем, я думаю, преодолеть это препятствие. Если Δ обозначает расстояние между двумя близлежащими молекулами P и Q, интервал времени между моментами, когда эффективное время в P и Q принимает выбранное значение $\underline{t}'$, будет порядка $\frac{w\Delta}{c^2}$, как это вытекает из (288). Изменения, которые относительные координаты Q испытывают по отношению к P за такой промежуток времени, порядка величины $\frac{w\,|\,u\,|\,\Delta}{c^2}$, или, по сравнению с Δ, порядка $\frac{w\,|\,u\,|}{c^2}$. Соответствующие изменения составляющих силы, действующей между P и Q, того же порядка малости по сравнению с самой силой; ими поэтому можно пренебречь, так как $\frac{|\,u\,|}{c}$ весьма мало. Другими словами, когда мы будем искать силу, действующую на молекулу P, мы можем считать одновременными положения, занимаемые окружающими частичками в те моменты времени, когда их местные времена имеют значения $\underline{t}'$. В силу нашего предположения относительные координаты в этих положениях связаны с x', y', z', т. е. с соответствующими координатами в S_0, отношениями, определяемыми (286), так что можно сказать, что внутри небольшого участка, содержащего P и действующие на него молекулы, размеры тела изменяются таким образом, как мы уже неоднократно указывали. Отсюда мы заключаем, что силы, действующие на соответствующие частички в S и S_0, подчиняются соотношению (300).

С другой стороны, мы имеем соотношение (304), связывающее ускорения. Если бы в (304) и (300) мы имели тело с одним и тем же отношением, мы могли бы сделать следующее заключение: если состояние движения в S_0

является возможным, так что для каждой частички сила, действующая на нее, равна произведению из массы на ускорение, и если в обеих системах частичка имеет одну и ту же массу, то состояние движения в первой системе, соответствующее состоянию движения во второй системе, тоже является возможным.

На самом деле, однако, отношения в (304) и (300) не равны друг другу. Вышеприведенные соображения не могут поэтому привести нас к теореме соответствующих состояний в S и S_0, если только мы не откажемся от равенства масс в этих системах. Я думаю, что мы не должны бояться этого шага. Мы видели, что масса свободного электрона является функцией скорости, так что, если частичка уже обладает скоростью $\mathfrak{w}$ (эта скорость есть поступательная скорость того тела, к которому эта частичка принадлежит), то сила, потребная для изменения скорости, будет вследствие этого иметь другое значение; вы помните, далее, что нам пришлось также ввести различие между продольной и поперечной массой. После того как мы уже распространили на молекулярные взаимодействия правило, выведенное для электрических сил, с нашей стороны не будет слишком смелым шагом вообразить себе, что и массы молекул могут испытывать изменение при поступательном движении, или даже представить себе две массы: одну m' (продольную), к которой мы должны прибегать при рассмотрении ускорений параллельно OX, и другую m'' (поперечную), которая выступает на сцену, когда мы имеем дело с ускорением, направленным или по OY, или по OZ.

Деля друг на друга отношения (300) и (304), мы видим, что если m_0 есть масса неподвижной молекулы, в формулах

$$m' = \left(l^2 : \frac{l}{k^3}\right) m_0, \qquad m'' = \left(\frac{l^2}{k} : \frac{l}{k^2}\right) m_0$$

или

$$m' = k^3 l m_0, \qquad m'' = k l m_0 \tag{305}$$

содержатся допущения, необходимые для установления такой теоремы: в двух системах S и S_0 могут происходить молекулярные движения такого рода, что в обоих случаях эффективные координаты молекул являются одинаковыми функциями эффективного времени[1]).

Если теперь молекулы S_0, совершая свое неправильное движение, все время остаются внутри поверхности, имеющей постоянное положение, молекулы в S тоже будут все время заключены в соответствующую поверхность, т. е. в такую поверхность, которая определяется таким же уравнением относительно x', y', z'. Поэтому размеры ограничивающей поверхности как при наличии молекулярных движений, так и без них испытывают одинаковые изменения.

Этот результат может быть распространен на тела, размер и форма которых частью определяются внешними силами, как, например, давлением со стороны прилежащих молекул, при том условии, однако, что эти силы изменяются так же, как силы взаимодействия между частичками самого тела.

175. Мы подготовлены теперь к теореме, касающейся соответственных состояний; при электромагнитных колебаниях она подобна теореме § 162, но имеет более широкое значение. К введенным ранее допущениям я добавлю два новых, а именно: 1) что упругие силы, управляющие колебательными движениями электронов, подчиняются соотношению (300) и 2) что продольная и поперечная массы электронов m' и m'' отличаются от массы m_0 для неподвижных электронов и связаны с ней соотношениями (305). Теорема заключается в том, что в двух системах S и S_0, из которых одна находится в движении, а другая неподвижна, могут существовать такие движения, что не только эффективные координаты, определяющие положения молекул, являются в обоих случаях одной и той же функцией эффективного времени (так что поступательное движение связано с изменением размеров, о котором мы говорили), но что это же самое правило имеет место и для эффективных координат отдельных электронов. Мало того, оказывается, что составляющие векторов $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$ получают в обеих системах S и S_0 одинаковое выражение через x', y', z', t'.

---

[1]) Примечание **75***.

При доказательстве мы будем считать, что смещения электронов из их положений равновесия и скорости колебаний являются малыми величинами, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Мы не будем также принимать во внимание сопротивление, которое стремится вызвать затухание колебаний.

Пусть M и M_0 будут две соответствующие частички в системах S и S_0; вычислим для этих частичек при определенном значении эффективного времени, например $\underline{t'}$, значение вектора $\boldsymbol{p}'$, составляющие которого суть

$$\boldsymbol{p}'_x = \sum ex', \quad \boldsymbol{p}'_y = \sum ey', \quad \boldsymbol{p}'_z = \sum ez', \tag{306}$$

а суммы распространены на все электроны рассматриваемой частички. Если мы предположим, что положения и движения электронов таковы, как это требуется по условиям теоремы, окажется, что вектор $\boldsymbol{p}'$ имеет одинаковое значение как для M, так и для M_0. Для последней частички $\boldsymbol{p}'$ представляет собой, очевидно, электрический момент для заданного времени. Что касается частички M, следует заметить, что если мы вычислим суммы для заданного момента эффективного времени $\underline{t'}$ для каждого электрона, значения x', y', z' в суммах не будут, строго говоря, представлять координаты, которые различные электроны будут иметь в один и тот же момент. В силу того, однако, что величина скорости колебаний весьма мала, мы можем упростить смысл сумм, понимая под x', y', z' эффективные координаты нескольких электронов, какими они являются в один и тот же момент времени, именно в тот момент, когда эффективное время, взятое для определенной точки молекулы, которую можно назвать ее центром, принимает определенное частное значение $\underline{t'}$. Так как составляющие момента в точке M в этот момент времени можно представить выражениями

$$\boldsymbol{p}_x = \sum ex_r, \quad \boldsymbol{p}_y = \sum ey_r, \quad \boldsymbol{p}_z = \sum ez_r. \tag{307}$$

мы тогда получим в силу (286)

$$\boldsymbol{p}'_x = kl\boldsymbol{p}_x, \quad \boldsymbol{p}'_y = l\boldsymbol{p}_y, \quad \boldsymbol{p}'_z = l\boldsymbol{p}_z.$$

Можно показать, что значения потенциалов φ' и $\boldsymbol{a}'$, о которых мы говорили в § 169, даются уравнениями, подобными (35) и (36):

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r'} [\rho'] \, dS',$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r'} [\rho' \boldsymbol{u}'] \, dS',$$

где r' есть эффективное расстояние между рассматриваемой точкой P и какой-нибудь точкой эффективного элемента dS'. Квадратные скобки обозначают, что если мы хотим определить φ' и $\boldsymbol{a}'$ для значения эффективного времени t', мы должны под ρ' и $\boldsymbol{u}'$ понимать значения этих величин в dS' в эффективный момент времени $t' - \frac{r'}{c}$.

При помощи этих формул легко показать, что электромагнитное поле, производимое молекулой, определяется весьма просто при помощи вектора $\boldsymbol{p}'$, который можно назвать эффективным моментом. Окончательные формулы, имеющие тот же вид, что и наши прежние уравнения (271) и (272), будут[1]:

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \frac{[\boldsymbol{p}']}{r'} + \\ + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{[\boldsymbol{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{[\boldsymbol{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{[\boldsymbol{p}'_z]}{r'} \right\}, \quad (308)$$

$$\boldsymbol{h}' = \frac{1}{4\pi c} \operatorname{rot}' \left\{ \frac{1}{r'} [\dot{\boldsymbol{p}}'] \right\};$$

здесь r' есть эффективное расстояние между центром молекулы и рассматриваемой точкой (x', y', z'). Квадратные скобки обозначают, что, если мы хотим узнать значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ для того момента времени, в который местное время, относящееся к этой точке, имеет значение t', мы должны взять значения $\boldsymbol{p}'_x$, $\boldsymbol{p}'_y$, $\boldsymbol{p}'_z$ для того момента, когда местное время центра молекулы равно

$$t' - \frac{r'}{c}.$$

---

[1]) Примечание **76**.

Точка обозначает дифференцирование по t'; эти уравнения относятся в одинаковой мере как к системе S_0, так и к S.

176. Остановим теперь наше внимание на какой-нибудь молекуле M тела S и том единственном подвижном электроне, который согласно нашему предположению в ней содержится. Поле, образуемое в M всеми другими молекулами тела, может быть представлено выражениями $\sum \boldsymbol{d}'$ и $\sum \boldsymbol{h}'$ (см. § 160), но к ним мы должны добавить еще поле, вызываемое причинами, лежащими вне тела, и представляемое уравнениями

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{div}' \boldsymbol{d}_0' = 0,\\
&\operatorname{div}' \boldsymbol{h}_0' = 0,\\
&\operatorname{rot}' \boldsymbol{h}_0' = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{d}}_0',\\
&\operatorname{rot}' \boldsymbol{d}_0' = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{h}}_0',
\end{aligned}\right\}\tag{309}$$

которые легко получить, если в формуле (292) положить $\rho' = 0$.

Найдя полные значения $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, можно воспользоваться уравнениями (293), которые, впрочем, можно заменить следующими выражениями:

$$\boldsymbol{f}_x = l^2 \boldsymbol{d}_x', \qquad \boldsymbol{f}_y = \frac{l^2}{k}\boldsymbol{d}_y', \qquad \boldsymbol{f}_z = \frac{l^2}{k} d_z'. \tag{310}$$

В самом деле, поскольку векторы $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$ вызываются колебаниями в других молекулах тела, они пропорциональны амплитудам, так что можно пренебречь всеми членами, в которых их составляющие умножаются на $\boldsymbol{u}_x'$, $\boldsymbol{u}_y'$ или $\boldsymbol{u}_z'$. Соответствующие члены с составляющими $\boldsymbol{d}_0'$ и $\boldsymbol{h}_0'$ тоже могут быть опущены, если интенсивность внешнего поля достаточно мала, как это может быть, например, в том случае, когда поле вызывается колебаниями весьма малой амплитуды в источнике света.

Возвращаясь к сравнению наших двух систем, мы можем достичь нашей цели в нескольких словах. На основании того, что мы знаем об ускорениях, и того, что мы допустили относительно масс, ясно, что состояние, которое мы представили себе, может существовать в обеих системах — как в S, так и в S_0, если все силы, действующие на электроны, удовлетворяют условию (300). Для упругих сил мы это допустили; для электрических сил мы можем это вывести из уравнений (310), (308) и (309). Так как эффективные моменты являются одинаковыми функциями t' в соответствующих частичках систем S и S_0, векторы $\sum \mathbf{d}'$ тоже будут для соответствующих точек обладать этим свойством; мы можем предположить, что это же будет иметь место и по отношению к вектору $\mathbf{d}'_0$, так как одна и та же совокупность уравнений (309) служит для определения как его, так и $\mathbf{h}'_0$ в той и другой системе. Так как составляющие силы, действующие на единицу заряда, даются $\mathbf{d}'_x$, $\mathbf{d}'_y$, $\mathbf{d}'_z$ для S_0 и формулами (310) для S, условие (300) оказывается действительно выполненным.

177. На основании обобщенной теоремы о соответственных состояниях мы можем прийти теперь к тем же заключениям, которые мы вывели из ее более узкой формулировки (§ 165). Следует, однако, обратить внимание на разницу частот между соответствующими колебаниями в S и S_0. Если для определенных значений эффективных координат, т. е. в определенной точке системы, какая-нибудь величина изменяется по закону $\cos nt'$, n будет обозначать частоту в неподвижной системе, ибо здесь t' — истинное время, но для движущейся системы мы получим:

$$\cos nt' = \cos n\left(\frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x_r\right),$$

так что здесь частота в определенной точке системы имеет значение

$$\frac{l}{k}n.$$

Замечательно, что когда источник света является частью системы, участвуя в ее поступательном движении со скоростью w, то действиями, происходящими в излучающих частичках, будет вызываться как раз эта частота, если эти действия таковы, что для неподвижного источника света частота имела бы значение n. Во всяком случае, это оказывается верным, если мы сделаем естественное предположение, что в источнике света массы электронов и упругие силы, действующие на них, изменяются по тому же самому закону, как в теле, через которое свет проходит. Тогда мы можем утверждать, что и в источнике света эффективные координаты электронов могут быть одинаковыми функциями эффективного времени независимо от того, движется ли источник света или находится в покое. Если в обоих случаях колебания могут быть представлены формулами, содержащими множитель nt', частота будет иметь значения n для неподвижного источника света и $\frac{l}{k}n$ для движущегося. Это показывает, что во всех опытах, производимых с земными источниками света, все явления будут в точности соответствовать тем явлениям, которые мы наблюдали бы, если бы пользовались тем же источником света на неподвижной планете; ни ход относительных лучей, ни положение интерференционных полос, ни вообще распределение света и темноты не изменятся.

Нечто иное мы получаем при пользовании небесным источником света. В этом случае относительная частота n в какой-нибудь точке нашего прибора равна частоте источника света, измененной согласно принципу Допплера (такого изменения, однако, не будет при пользовании солнечным светом, так как расстояние от Солнца до Земли можно считать постоянным); явления будут соответствовать тем, которые происходят в неподвижной системе с частотой $\frac{k}{l}n$. Поэтому в среде, обладающей дисперсией, пути относительных лучей, наблюдаемых для линий D натрия в спектре Солнца и в спектре натриевого пламени, не будут совпадать в точности. Если, предполагая, что Солнце неподвижно по отношению к эфиру, мы обозначим через n относительную частоту в первом случае, во втором она будет иметь значение $\frac{l}{k}n$. Едва ли следует добавлять, что этот вопрос представляет чисто теоретический интерес, так как ни в одном явлении, поддающемся точному наблюдению, нельзя заметить изменения частоты порядка $\frac{w^2}{c^2}$.

Далее, следует отметить, что если мы предполагаем путем опыта обнаружить какое-нибудь влияние поступательного движения Земли и для этого вращаем наш прибор или повторяем наши наблюдения через несколько часов, в течение которых прибор вследствие суточного движения Земли повертывается на некоторый угол, мы имеем при этом дело с одной и той же относительной частотой (каков бы ни был источник света). Эта постоянная частота ν будет соответствовать определенной частоте $\frac{k}{l}\nu$ в неподвижной системе; вращение прибора не произведет никакого эффекта, как и в том случае, если бы мы поворачивали наши приборы на теле, находящемся в покое, и пользовались при этом светом частоты $\frac{k}{l}\nu$.

Но, может быть, я уделяю слишком много времени этим тонким вопросам. Следует только особенно подчеркнуть, что наша теорема объясняет, почему Рэлею и Брэсу не удалось обнаружить двойного лучепреломления. Пучок света, в опытах последнего из названных физиков воспринимаемый наблюдателем, состоял из двух частей; оба эти пучка распространялись рядом, были одинаково поляризованы и имели одинаковую интенсивность, несмотря на то, что они проходили через различные среды. Ясно, что раз такое тождество двух пучков наблюдается в неподвижной системе, оно по нашей теореме должно наблюдаться также и в соответственном состоянии движущейся системы.

178. При сравнении двух электрических систем S и S_0 (§ 171) мы установили, что в обеих системах эффективная плотность заряда должна быть одной и той же функцией эффективных координат; это необходимо влечет за собой следствие, что электроны в двух системах имеют неодинаковую форму. В выкладках § 175 мы, однако, не делали такого предположения, ограничиваясь теми двумя допущениями, которые приведены в начале упомянутого параграфа. В самом деле, рассматривая движение электронов, мы имеем дело только с их зарядами, их массами и действующими на них упругими силами; все остальные подробности для наших окончательных результатов не имеют значения. Следовательно, мы можем с таким же правом предположить, что электроны не меняют своей формы и величины, когда тело приводится в движение (хотя размеры самого тела и изменяются при этом вышеописанным способом); нужно только, чтобы необходимые соотношения между упругими силами и массами электронов до того, как тело приведено в движение, и после этого остались одинаковыми.

Для теории, которая пытается объяснить явление при помощи этих мельчайших частичек, простейшим является тот путь, при котором электроны признаются совершенно неизменяемыми, как, скажем, абсолютно твердые шарики с равномерно распределенным поверхностным зарядом. Это представление было разработано Абрагамом; на нем основаны многие формулы, приведенные в главе I. К несчастью, это представление расходится с нашей теоремой соответственных состояний. По этой теореме, как видно на основании (305), продольная и поперечная массы электрона относятся, как

$$\frac{m'}{m''}=k^2=\frac{c^2}{c^2-w^2},$$

или, с точностью до величин второго порядка,

$$\frac{m'}{m''}=1+\frac{w^2}{c^2},$$

тогда как на основании формул (68) и (69) мы получили бы с той же степенью приближения:

$$\frac{m'}{m''}=1+\frac{4}{5}\frac{w^2}{c^2}.$$

179. Это обстоятельство и заставило меня заняться вопросом, что произойдет с теорией, если предполагать, что электроны подвержены таким же деформациям, как и тела, в которых они содержатся. При таком предположении получается правильное значение отношений между величинами m_0, m', m'', если только приписать значение 1 коэфпорядка величины. Но, насколько мы можем судить в настоящий момент, факты противоречат нашей гипотезе [1]).

По этой гипотезе продольная и поперечная массы электрона должны иметь значения

$$m' = k^3 m_0, \qquad m'' = k m_0,$$

или, если мы положим

$$\frac{w}{c} = \beta,$$

$$m' = (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} m_0, \qquad m'' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} m_0. \quad (313)$$

При увеличении β эти величины возрастают быстрее, чем те, которые были нами найдены раньше для сферического электрона. Поэтому определение $\frac{e}{m''}$ для больших скоростей, которыми обладают β-лучи, дает возможность решить, которая из теорий верна. Кауфман, который уже в 1901 г. [2]) заключил на основании своих исследований по этому вопросу, что величина $\frac{e}{m}$ возрастает весьма заметно, так что массе электрона можно приписать чисто электромагнитное происхождение, повторил свои опыты с чрезвычайной тщательностью и со специальной целью проверить мою гипотезу [3]). Его новые числа совпадают в пределах экспериментальных погрешностей с формулами Абрагама, но расходятся со вторым уравнением (313), так что они решительно противоречат тому представлению о сжимаемом электроне, которое я пытался разработать [4]). Все же, несмотря на то, что, по всей вероятности, нам придется отбросить всю эту гипотезу целиком, стоит, по моему мнению, вникнуть в нее несколько ближе. После этого будет полезно рассмотреть

---

[1]) В настоящее время (1915) этого сказать уже нельзя.

[2]) W. Kaufmann, Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1901, стр. 143; Über die elektromagnetische Masse des Elektrons, там же, 1902, стр 291; 1903, стр. 90.

[3]) Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons, Ann. Phys. **19** (1906), стр. 487.

[4]) См., впрочем, примечание **86**.

откуда выводим, пользуясь формулами (64) и (65):

$$m' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \frac{d(kl/w)}{dw}, \quad m'' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl,$$

или

$$m' = \frac{d(kl/w)}{dw} m_0, \quad m'' = klm_0. \tag{312}$$

Последняя формула совпадает со вторым уравнением (305), так что остается одно условие, что значение m' должно быть равно тому, которое было получено при помощи первого из этих уравнений. Отсюда

$$\frac{d(kl/w)}{dw} = k^3 l,$$

и в силу того, что

$$\frac{d(kw)}{dw} = k^3,$$

получаем:

$$\frac{dl}{dw} = 0, \quad l = \text{const}.$$

Эта постоянная должна равняться единице, так как мы знаем, что $l = 1$ для $w = 0$.

Мы приходим, таким образом, к уточнению гипотезы, предложенной для объяснения результата опыта Майкельсона, а именно: мы должны принять, что движущиеся тела испытывают только сокращение в направлении движения, причем это сокращение определяется коэффициентом k. Сами электроны принимают вид сплюснутых эллипсоидов вращения, которые в предельном случае — при скорости, равной скорости света, — превращаются в круговые диски радиуса R, расположенные нормально к направлению движения.

Все это представилось бы весьма заманчивым, так как дало бы нам возможность предсказать, что никакой опыт, произведенный с земными источниками света, не мог бы обнаружить влияния движения Земли, даже в том случае, если бы он был достаточно чувствителен для открытия явлений не только второго порядка, но вообще любого порядка величины. Но, насколько мы можем судить в настоящий момент, факты противоречат нашей гипотезе [1]).

По этой гипотезе продольная и поперечная массы электрона должны иметь значения

$$m' = k^3 m_0, \qquad m'' = k m_0,$$

или, если мы положим

$$\frac{w}{c} = \beta,$$

$$m' = (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} m_0, \qquad m'' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} m_0. \quad (313)$$

При увеличении β эти величины возрастают быстрее, чем те, которые были нами найдены раньше для сферического электрона. Поэтому определение $\frac{e}{m''}$ для больших скоростей, которыми обладают β-лучи, дает возможность решить, которая из теорий верна. Кауфман, который уже в 1901 г. [2]) заключил на основании своих исследований по этому вопросу, что величина $\frac{e}{m}$ возрастает весьма заметно, так что массе электрона можно приписать чисто электромагнитное происхождение, повторил свои опыты с чрезвычайной тщательностью и со специальной целью проверить мою гипотезу [3]). Его новые числа совпадают в пределах экспериментальных погрешностей с формулами Абрагама, но расходятся со вторым уравнением (313), так что они решительно противоречат тому представлению о сжимаемом электроне, которое я пытался разработать [4]). Все же, несмотря на то, что, по всей вероятности, нам придется отбросить всю эту гипотезу целиком, стоит, по моему мнению, вникнуть в нее несколько ближе. После этого будет полезно рассмотреть

---

[1]) В настоящее время (1915) этого сказать уже нельзя.

[2]) W. Kaufmann, Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1901, стр. 143; Über die elektromagnetische Masse des Elektrons, там же, 1902, стр 291; 1903, стр. 90.

[3]) Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons, Ann. Phys. **19** (1906), стр. 487.

[4]) См., впрочем, примечание **86**.

изменение этой гипотезы, предложенное Бухерером и Ланжевеном.

180. В предшествующем определении массы деформируемого электрона мы пользовались электромагнитным количеством движения, но не касались вопроса об энергии. Это было сделано Абрагамом [1]), который нашел, что наряду с обычной электромагнитной энергией электрон должен обладать энергией другого рода, количество которой уменьшается, когда частичка приходит в движение; что это положение правильно, становится ясно, если мы рассмотрим прямолинейное движение электрона, обладающего переменной скоростью. Имеем следующие выражения для массы:

$$m' = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} k^3 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

и для работы движущей силы за элемент времени dt:

$$\frac{e^2}{6\pi c^2 R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \dot{w}w\, dt, \tag{314}$$

а для электромагнитной энергии [2]):

$$\frac{e^2}{6\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{e^2}{24\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{315}$$

Приращение первого члена за время dt в точности равно выражению (314).

Отсюда следует, что должна существовать другая энергия E и притом в таком количестве, что, будучи прибавлена ко второму члену (315), она даст в сумме постоянную величину; это количество энергии определяется поэтому выражением

$$E = \frac{e^2}{24\pi R}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C, \tag{316}$$

где C есть некоторая постоянная.

---

[1]) M. Abraham, Die Grundhypothesen der Elektronentheorie, Phys. Zeitschrift 5 (1904), стр. 576.

[2]) Примечание 78.

181. Пуанкаре [1]) первый заметил — и этим в значительной степени способствовал разъяснению природы этой новой энергии и механизма «сокращения», — что электрон будет находиться в равновесии как в первоначальной, так и в сжатой форме, если ему будут присущи свойства весьма тонкого, идеально гибкого и растяжимого слоя, все части которого втягиваются внутрь нормальным напряжением, имеющим интенсивность

$$S=\frac{e^2}{32\pi^2R^4}$$

на единицу площади и сохраняющим это значение при какой угодно степени сжатия.

Значение S было выбрано таким, что, пока электрон остается в покое и имеет поэтому вид шара радиуса R, внутренняя сила в точности уравновешивает электромагнитное натяжение снаружи, вызываемое окружающим полем [2]). И вот — в этом и заключается сущность замечания Пуанкаре — электрон, деформированный вышеуказанным образом, будет попрежнему оставаться в равновесии под соединенным действием напряжения S и электромагнитных сил.

Чтобы показать это, обратим наше внимание на составляющие внутреннего напряжения, действующего на элемент поверхности слоя; можно найти их, если умножить S на проекции элемента на плоскости yz, zx, xy. Но при деформации эти проекции умножаются на множители $1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$, откуда видно, что составляющие напряжения изменяются в том же самом отношении, как и составляющие электромагнитной силы [см. (300)], так что равновесие будет сохраняться попрежнему. При устойчивом равновесии электрон необходимо получит соответствующую конфигурацию; электромагнитные силы, с которыми эфир действует на его поверхность, изменяются вследствие движения согласно нашим формулам; наряду с этим на элемент поверхности

---

[1]) H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **21** (1906), стр. 129.

[2]) Примечание **79**.

действуют внутренние силы, которые при движении не изменяются; под влиянием совокупности этих сил электрон и принимает форму сплюснутого эллипсоида.

Соответственно внутренним напряжениям должна существовать некоторая потенциальная энергия U; вышеприведенный результат накладывает условие, чтобы эта энергия была равна выражению (316). В самом деле, если v есть объем эллипсоида, мы, очевидно, можем написать:

$$U = Sv + \text{const} = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4} v + \text{const},$$

вследствие чего получаем:

$$v = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

182. Абрагам [1]) выдвинул возражение, что я не показал, что электрон, принявший благодаря движению эллипсоидальную форму, будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Замечание вполне справедливое, но я не думаю, чтобы следовало отбросить гипотезу именно по *этой* причине. Доводы Абрагама доказывают только то, что электромагнитные действия и напряжения, о которых я говорил, являются не единственными силами, определяющими конфигурацию электрона.

Если бы они действительно были единственными силами, каждой задаче, касающейся относительного движения частей движущегося эллипсоидального электрона, соответствовала бы другая задача, касающаяся сферического неподвижного электрона, так как силы обоего рода удовлетворяли бы условию (300). Но легко видеть, что при совместном действии напряжений в окружающем поле и постоянного внутреннего напряжения S сферический слой будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, поскольку дело касается изменения объема, но по отношению к изменению формы [2]) это равновесие будет неустойчивым. Это же будет верно и по отношению к движущемуся и

---

[1]) A b r a h a m, цит. выше, стр. 578.

[2]) Примечание **80**.

сплюснутому слою. В последнем случае будет даже наблюдаться неустойчивость ориентации, так как при небольшом повороте электрон будет соответствовать [в том смысле, как это указано в (286)] не первопачальной сфере, но сфере, слегка деформированной.

Несмотря на все это, было бы, по моему мнению, вполне законно придерживаться гипотезы деформируемых электронов, если бы таким путем мы могли действительно продвинуться вперед в понимании явлений. При теоретических рассуждениях о строении этих мельчайших частичек мы не должны забывать, что может быть много таких возможностей, которых мы сейчас не можем себе и представить; весьма вероятно, что имеются другие внутренние силы, служащие для придания системе устойчивости; наконец, возможно, что мы вообще стоим на ложном пути, когда пытаемся применить к отдельным частям электрона наше обычное понятие силы.

Если мы не пожелаем принять специального механизма, предложенного Пуанкаре, мы станем перед следующей альтернативой. Или мы должны смотреть на сферический электрон как на такую материальную систему, между отдельными частями которой действуют отдельные силы, обеспечивающие постоянство его формы и размеров, или же мы просто должны принять это постоянство за некоторый факт, не подлежащий дальнейшему обсуждению. В первом случае форма, размеры и ориентация движущегося эллипсоида тоже будут под действием системы сил поддерживаться постоянными; необходимо при этом, чтобы все они обладали свойством, выражаемым (300). Во втором случае мы должны удовлетвориться простым допущением, без всякого дальнейшего обсуждения, что движущийся электрон имеет эллипсоидальную форму с малой осью по направлению поступательного движения.

183. Я должен коснуться также другого вопроса, связанного с предыдущим. Вычисляя в § 179 массы m' и m'', мы ввели допущение, что для любого момента времени значение электромагнитного количества движения соответствует при стационарном движении той скорости, которая существует в этот момент. В частности, при применении формулы (311) мы молчаливо предполагали, что при криволинейном движении короткая ось электрона все время направлена по касательной к траектории и что при изменении скорости одновременно изменяется также и отношение осей эллипсоида.

Строго говоря, для наших результатов не представляется совершенно необходимым, чтобы ориентация и форма электрона в точности и моментально следовали за изменениями направления и скорости его поступательного движения; можно допустить некоторое запаздывание. Во всяком случае, ясно одно: если мы хотим пользоваться величинами m' и m'' в оптических явлениях, что мы уже и делали, время запаздывания должно быть мало по сравнению с периодом колебания света.

Если мы остановимся на последней альтернативе предыдущего параграфа, мы можем просто принять за данное, что вообще нет никакого запаздывания. Но, если мы предпочтем первую альтернативу, мы уже не можем действовать таким упрощенным способом. Если форма и ориентация электронов определяются силами, мы не можем быть уверены в том, что в каждый данный момент времени имеется состояние равновесия. Даже при постоянном равномерном поступательном движении могут существовать небольшие колебания как размеров, так и ориентации частички, а при переменном режиме, т. е. когда скорость поступательного движения изменяется или по величине, или по направлению, нельзя просто отрицать возможности того запаздывания, о котором мы только что говорили. Здесь мы имеем аналогию с чечевицей маятника, на которую действует переменная сила; известно, что маятник не следует за изменениями этой силы мгновенно. Если, однако, колебания силы происходят весьма медленно по сравнению с собственными колебаниями маятника, можно утверждать с некоторым приближением, что запаздывания не происходит. Подобным же образом можно предполагать, что и электрон находится в каждый момент времени в состоянии равновесия, соответствующем его скорости, если сила меняется в течение промежутка времени, который гораздо больше периода колебаний, могущих происходить под влиянием выравнивающих сил. Если эти колебания происходят гораздо быстрее, чем световые колебания, значения (313) для масс m' и m'' можно вполне надежно применять к электронам тела, через которое проходит световой пучок, и с еще большим правом к свободным электронам, которые отклоняются от своей траектории действием магнитного или электрического поля.

Мы почти ничего не знаем о структуре электрона, а потому, конечно, нельзя еще составить себе никакого представления о периоде его свободных колебаний; но, вероятно, мы будем не слишком далеки от истины, если предположим, что этот период соответствует длине волны такой приблизительно величины, какую имеет диаметр электрона.

Из этих соображений следует, что из идеи о деформируемости электронов вытекает ряд новых проблем. Одной из таких проблем может явиться вопрос о вращении этих частичек. Электрон начинает вращаться, как только магнитная сила, которая на него действует, претерпевает изменение; представляется необходимым составить себе хоть приблизительное понятие об особенностях этого движения, которое может сообщаться в таких случаях нашим сплюснутым эллипсоидам.

184. Как уже было отмечено в § 178, можно составить себе некоторое представление об изменении внутренних сил и, значит, размеров тела (этого вопроса мы касались неоднократно), не распространяя соответственного допущения на самые электроны; поэтому естественно возникает вопрос, не можем ли мы получить удовлетворительную теорию, просто принимая существование твердых сферических электронов. Мы могли бы пойти по этому пути, если бы можно было показать, что разногласие между значениями $\frac{m'}{m''}$, о котором говорилось в конце § 178, не оказывает заметного влияния на наблюдаемые явления. Рассмотрение этого вопроса опять приводит нас к вопросу о двойном лучепреломлении, о котором мы уже говорили.

Простой взгляд на формулу, которой мы пользовались в главе IV при рассмотрении распространения света в системе молекул, убедит нас, что единственным членом, содержащим массу электрона в уравнении (201), является член $m'n^2 = \frac{mn^2}{Ne^2}$. Мало того, если мы ограничимся случаем идеально прозрачных тел (не находящихся под действием внешней магнитной силы) и оставим без внимания сопротивление, испытываемое колебаниями, этот член будет также единственным таким, в который входит частота. Отсюда следует, что все зависит от произведения mn^2 и что изменение m, например в отношении 1 к α, будет равноценно изменению n в отношении 1 к $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Допустим теперь на короткое время, что обе массы электронов, не будучи в точности равны выражениям (313) по крайней мере пропорциональны им, так что, скажем,

$$m' = \alpha k^3 m_0, \qquad m'' = \alpha k m_0, \tag{317}$$

где коэффициент α является некоторой функцией скорости поступательного движения w; он равен единице для $w = 0$ и отличается от единицы на величину второго порядка при малом w. Тогда явления в движущейся системе S и в неподвижной S_0 будут соответствовать друг другу так, как было объяснено выше, если только масса электронов в системе S_0 будет не m_0, а αm_0. Если рассматриваемое тело первоначально было изотропным, изменение массы электронов m_0 до αm_0, конечно, не превратит его в двоякопреломляющее. Отсюда следует, что и движущееся тело, электроны которого обладают массами (317), тоже не будут обладать двойным лучепреломлением. Преломление в нем должно быть обычным, и мы можем быть уверены, что практически все явления в тех опытах, в которых источник света движется вместе с телом, должны протекать совершенно таким же образом, как если бы оно было в покое. Правда, при этом должна появиться разница, эквивалентная той, которая была бы вызвана изменением массы электрона с m_0 до αm_0 или изменением частоты на соответствующую величину (второго порядка), но, конечно, это обстоятельство не может произвести заметного действия.

Рассмотрим, далее, тот случай, когда отношение продольной и поперечной массы электрона равно не k^2, а другой величине. Пусть эти массы будут:

$$m' = h'm_0, \qquad m'' = h''m_0,$$

где h' и h'' суть множители, обладающие теми же свойствами, что и вышеприведенный коэффициент a. Тогда все явления в теле S соответствуют явлениям в теле S_0, в котором массы электронов по отношению к ускорениям, параллельным OX, имеют значения

$$\frac{h'}{k^3} m_0,$$

а по отношению к ускорениям в перпендикулярных к нему направлениях — значения

$$\frac{h''}{k} m_0.$$

В таком теле, без сомнения, должно обнаруживаться двойное лучепреломление; то же самое можно сказать и про соответствующее ему движущееся тело S. Если бы, например, луч света распространялся в направлении, перпендикулярном OX, скажем, вдоль оси OY, скорость распространения имела бы различные значения, смотря по тому, как направлены колебания: параллельно OX или OZ. Если частоту световых колебаний в этом случае обозначить через n, скорость распространения этих колебаний будет такова, как если бы (по теореме, изложенной в начале этого параграфа) частота тех колебаний, которые происходят в одном направлении, имела значение

$$h'^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{3}{2}} n,$$

а в другом

$$h''^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} n,$$

причем в обоих случаях масса имеет одно и то же значение m_0.

185. Для сферического электрона имеем согласно формулам (70) и (71), пренебрегая членами третьего и высших порядков:

$$h' = 1 + \frac{6}{5}\beta^2, \qquad h'' = 1 + \frac{2}{5}\beta^2,$$

и, так как

$$k = 1 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

получаем выражения

$$\left(1 - \frac{3}{20}\beta^2\right)n \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{1}{20}\beta^2\right)n,$$

разность между которыми составляет

$$\frac{1}{10}\beta^2 n = 10^{-9}\,n,$$

так как скорость Земли равна одной десятитысячной скорости света. Пользуясь желтым светом, получим, что для воды изменение показателя преломления, вызываемое этим изменением частот, будет порядка $2 \cdot 10^{-11}$; такова, следовательно, будет ожидаемая разность между двумя главными показателями преломления в опыте по двойному лучепреломлению.

Едва ли стоит особо указывать, что наблюдения Рэлея [1]) и Брэса [2]) производились таким образом, что двойное лучепреломление, при котором одно из главных направлений колебаний было бы параллельно движению Земли, можно было бы обнаружить на опыте. Как я уже упоминал, результаты получались неизменно отрицательные, хотя чувствительность метода Брэса была настолько велика, что разность главных показателей преломления уже порядка 10^{-12} не могла бы ускользнуть от его внимания. А это составляет приблизительно одну двадцатую часть той величины, которую мы только что вычислили.

---

[1]) Rayleigh, Does motion through the aether cause double refraction? Phil. Mag. (6), **4** (1902), стр. 678.

[2]) D. B. Brace, On double refraction in matter moving through the aether, Phil. Mag. (6), **7** (1904), стр. 317.

Правда, мы основывали наши вычисления на некоторых допущениях, которые можно было бы изменить, и сам Брэс в своих вычислениях шел другим путем. Все же, я думаю, мы можем с уверенностью заключить, что примирить результат его наблюдений с представлением о твердых сферических электронах было бы чрезвычайно трудно.

Следует добавить, что, если бы мы приняли это представление, потребовалось бы также произвести некоторые изменения в соображениях, касающихся молекулярных движений в движущейся системе.

186. Мы видели в § 184, что противоречия с результатами Брэса не будет, если отношение продольной массы к поперечной будет равно k^2. Отсюда возникает вопрос, нельзя ли получить это отношение, не прибегая к допущению, что l равно единице, — это допущение ведь было началом всех наших затруднений. К сожалению, этот путь для нас закрыт, так как уравнение

$$\frac{d(klw)}{dw} : kl = k^2$$

удовлетворяется только при постоянном значении l. По этой причине оптические опыты не позволяют нам присоединиться к предположению Бухерера [1]) и Ланжевена [2]), что движущийся электрон, превращаясь в эллипсоид такой формы и ориентации, как было предположено мной, сохраняет, однако, не первоначальный экваториальный радиус, а первоначальный объем. Это допущение, очевидно, равносильно тому, что $l = k^{-\frac{1}{3}}$, так что размеры электрона изменяются вследствие этого в отношении $k^{-\frac{2}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$. Пользуясь этим значением l, получаем следующие

---

[1]) A. H. Bucherer, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, Leipzig, 1904, стр. 57, 58.

[2]) P. Langevin, La physique des électrons, Revue générale des sciences pures et appliquées, **16** (1905), стр. 257.

значения электромагнитных масс:

$$m' = (1 - \beta^2)^{-\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \beta^2\right) m_0, \tag{318}$$

$$m'' = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{3}} m_0,$$

и для их отношения имеем

$$\frac{m'}{m''} = \frac{1 - \frac{1}{3}\beta^2}{1 - \beta^2} \qquad \text{вместо} \qquad k^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

Если мы к этой гипотезе применим такие же выкладки, как и в случае твердых сфер, мы придем к двойному лучепреломлению даже несколько большей величины, так что противоречие с опытом Брэса попрежнему остается в силе.

Следует пожалеть, что это так, так как новое допущение имеет несомненные преимущества по сравнению с моим первоначальным представлением [1]). Оно находится в достаточном согласии с результатами опытов Кауфмана; самая мысль о постоянстве объема действительно весьма проста. Если мы последуем ему, нам уже не нужно будет принимать существование какой-то другой энергии, помимо электромагнитной, как это было в § 180. Это подтверждается величиной электромагнитной энергии [2])

$$\frac{e^2}{8\pi R} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$$

и выражением для работы силы

$$\frac{e^2}{6\pi R c^2} = (1 - \beta^2)^{-\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \beta^2\right) w\dot{w}\, dt,$$

---

[1]) Теперь (1915), имея в виду принцип относительности, я уже не могу этого утверждать.

[2]) Примечание 81.

получающимся из (318) для случая, когда электрон движется прямолинейно с переменной скоростью. Величина работы равна приращению величины энергии за время dt.

187. Интересно теперь опять вернуться к гипотезе $l=1$ в сочетании с формулой (305) для масс (принимая как факт влияние движения на массы, выражаемое этими уравнениями) и рассмотреть те уравнения распространения света в движущихся прозрачных телах, к которым эта гипотеза приводит. Мы видели, что векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{p}'$ представляют собой одинаковые функции x', y', z', t' как в движущейся системе S, так и в покоящейся S_0. То же должно быть справедливым по отношению к другим векторам, выводимым из предыдущих, а именно: 1) к вектору $\boldsymbol{E}'$, который мы определяем как среднее значение $\overline{\boldsymbol{d}'}$ вектора $\boldsymbol{d}'$, взятое в системе S_0 для сферического объема, бесконечно малого в физическом смысле слова, с центром в рассматриваемой точке, а в системе S — для объема, соответствующего этой сфере; 2) к среднему значению $\overline{\boldsymbol{h}'}$, которое мы определяем совершенно таким же образом и которое будем обозначать через $\boldsymbol{H}'$; 3) к вектору

$$\boldsymbol{P}' = N\boldsymbol{p}', \tag{319}$$

где для обеих систем мы понимаем под N число молекул, содержащихся в единице объема системы S_0, и 4) к вектору $\boldsymbol{D}'$, определяемому уравнением

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P}'. \tag{320}$$

Так как все эти векторы могут быть как в S_0, так и в S представлены одинаковыми функциями x', y', z', t', уравнения, определяющие их, тоже должны быть таковы, что могут быть написаны в виде, одинаковом для обеих систем.

Но x', y', z', t' в системе S_0 являются истинными координатами и истинным временем, вследствие чего вышеприведенные векторы совпадают с теми, которые мы прежде обозначали через $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{D}$. Так как мы знаем, что они удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{321}$$

то мы можем быть уверены, что в движущейся системе

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \boldsymbol{D}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \boldsymbol{H}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{H}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{rot}' \boldsymbol{E}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t'}, \end{aligned}\right\} \tag{322}$$

где символы div′ и rot′ нужно понимать так, как это было объяснено в § 169.

К (321) нужно добавить соотношение между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, а к (322) — соответствующее соотношение между $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{D}'$, так что, если написать:

$$\boldsymbol{D} = F(\boldsymbol{E}), \tag{323}$$

мы получим также:

$$\boldsymbol{D}' = F(\boldsymbol{E}'). \tag{324}$$

Здесь символ F следует понимать в весьма широком смысле; изображаемые им уравнения могут иметь любой вид в зависимости от особенностей рассматриваемого тела. Если в первую формулу входят, как это вполне может быть [1]), производные по t, во второй формуле мы найдем соответствующие производные по t'.

Полагая $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$ и подобным же образом $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}'$, получаем уравнения для свободного эфира. Впрочем, эти

---

[1]) Примечание **82**.

последние для системы S_0 могут быть оставлены в виде

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial t}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{325}$$

так как нет необходимости рассматривать средние значения там, где нет молекул; для системы S можем написать:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}' \boldsymbol{d}' = 0, \\ &\operatorname{div}' \boldsymbol{h}' = 0, \\ &\operatorname{rot}' \boldsymbol{h}' = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}'}{\partial t'}, \\ &\operatorname{rot}' \boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t'}. \end{aligned}\right\} \tag{326}$$

Так как эфир не принимает участия в поступательном движении со скоростью $\mathfrak{w}$, последние две системы уравнений относятся к совершенно одинаковым явлениям. Одна из этих систем выведена из другой при помощи чисто математических преобразований, причем единственное различие между ними заключается в том, что в (325) электромагнитное поле относится к осям, неподвижным относительно эфира, и к «истинному» времени, а в (326) — к подвижным осям и к «местному» времени и что в обоих случаях оно описывается при помощи различных векторов. Напротив, те явления, к которым относятся уравнения (321), (323) и (322), (324), не могут быть названы тождественными, хотя они и соответствуют друг другу.

188. В дальнейших рассуждениях мы можем пойти по тому пути, по которому часто идет теоретическая физика. Мы можем освободиться от лесов, при помощи которых была построена система уравнений, и, не заботясь больше о теории электронов и тех затруднениях, к которым она нас привела, можем постулировать вышеприведенные уравнения как сжатое и, насколько нам известно, точное описание явлений. С этой точки зрения векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ в одной системе и $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{D}'$ в другой являются просто «некоторыми» векторами, о смысле которых мне будет достаточно сказать ровно столько, сколько представляется необходимым, чтобы однозначно определить для каждого случая их направление и величину.

Основания, по которым эти уравнения напрашиваются сами собой, заключаются в следующем: 1) формулы (321) в сочетании с соответствующими допущениями, касающимися соотношений между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, могут служить для объяснения оптических явлений в прозрачных телах, обладающих или не обладающих двойным лучепреломлением; 2) тождественный вид уравнений (321), (323) и (322), (324) объясняет неудачу всех попыток обнаружения влияния движения Земли при помощи опытов с земными источниками света, и 3) уравнения (322), (324) дают правильное значение коэффициента Френеля.

189. Выражения «эффективные координаты», «эффективное время» и т. д., которыми мы пользовались для облегчения терминологии, подготовили нас к весьма интересной интерпретации вышеприведенных результатов, которой мы обязаны Эйнштейну [1]. Представим себе, что наблюдатель, которого мы будем называть A_0 и которому мы припишем неподвижное положение в эфире, занимается изучением явлений, происходящих в неподвижной системе S_0. Мы предположим, что он снабжен масштабом и часами, — даже, для его удобства, скажем, целым рядом часов, помещенных в различных точках S_0 и сверенных друг с другом с абсолютной точностью. Обладая такими средствами, он будет в состоянии определить координаты x, y, z для любой точки и время t для любого момента; изучая электромагнитное поле по его проявлениям в различных точках пространства и в различные моменты времени, он придет к уравнениям (321), (323).

---

[1]) См. Ann. d. Phys. **17** (1905), стр. 891; **18** (1905), стр. 639; **20** (1906), стр. 627; **21** (1906), стр. 583; **23** (1907), стр. 197, 371; простое изложение теории Эйнштейна: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4** (1908), стр. 411.

Пусть A — второй наблюдатель, задача которого состоит в том, чтобы изучать явления в системе S, и который сам движется через эфир со скоростью w, не подозревая ни о своем движении, ни о движении системы S.

Пусть этот наблюдатель пользуется тем же самым масштабом (или его точной копией), которым пользовался наблюдатель A_0, причем этот масштаб тем или иным путем приобрел скорость w, прежде чем попал к нему в руки. Тогда на основании нашего допущения относительно размеров движущихся тел деления шкалы, вообще говоря, будут иметь другую длину, чем раньше, и будут претерпевать изменения также при поворотах масштаба; это изменение будет происходить по следующему закону: в положениях, которые в системах S_0 и S являются соответственными, проекции линейки на плоскость YOZ являются одинаковыми, но проекции на OX относятся друг к другу, как k к единице. Ясно, что, так как наблюдатель ничего не знает об этих изменениях, он не будет в состоянии измерить истинные относительные координаты x_r точек системы. Его отсчеты дадут ему только значения эффективных координат x' и, конечно, y' и z', которые для $l=1$ равны y_r, z_r. Значит, полагаясь на показания своего масштаба, он не сможет определить истинную форму тела. Он будет принимать за сферу то, что в действительности является эллипсоидом; его кубический сантиметр будет не истинным кубическим сантиметром, а параллелепипедом, в k раз меньшим. В этом параллелепипеде, однако, содержится некоторое количество материи, которое при отсутствии движения занимало бы объем кубического сантиметра, так что если A подсчитывает молекулы в *своем* кубическом сантиметре, он получит то же число N, как и A_0. Наконец, его единица массы будет та же самая, что и для неподвижного покоящегося наблюдателя, если каждый из них примет за единицу массы массу воды, заключенной в тех объемах, который каждый из наблюдателей *принимает* за кубический сантиметр.

Так же обстоит дело у наблюдателя A и с часами. Если мы допустим, что силы в часовом механизме подвержены изменениям, определяемым (300), ход двух одинаковых часов в системах S_0 и S будет таков, что эффективные координаты подвижных частей в обеих системах будут одинаковыми функциями эффективного времени. Если поэтому стрелка часов системы S_0 вернется в первоначальное положение по истечении некоторого промежутка времени Θ, стрелка часов системы S тоже вернется в свое исходное положение через промежуток Θ эффективного времени t'. Таким образом, часы в системе S будут показывать ход эффективного времени; помимо ведения A, его часы будут итти в k раз медленнее, чем часы A_0.

190. Из сказанного следует, что если движущийся наблюдатель будет измерять скорость света, заставляя луч света пройти сначала путь от точки P к точке Q и потом обратно, он получит значение c. Это можно доказать для любого направления прямой PQ [1]); достаточно будет, однако, если мы докажем это для случая, когда прямая или параллельна OX, или ей перпендикулярна. Если L есть расстояние между P и Q, измеренное наблюдателем A, тогда в первом случае истинная величина расстояния есть $\frac{L}{k}$, и так как обе точки движутся через эфир со скоростью w, время, потребное для прохождения этого расстояния лучом света, равно

$$\frac{L}{k}\left(\frac{1}{c+w}+\frac{1}{c-w}\right)=\frac{2cL}{k(c^2-w^2)}=\frac{2kL}{c}. \qquad (327)$$

Во втором случае луч света должен пройти по двум сторонам равнобедренного треугольника (см. § 167), высота которого равна L, а половина основания относится к боковой стороне, как w к c. Длина стороны равна поэтому

$$\frac{L}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}=kL;$$

время, потребное лучу света, чтобы вернуться к исходной точке, опять дается выражением (327). Так как часы A идут в k раз медленнее, они отметят промежуток

---

[1]) Примечание 83.

времени $\frac{2L}{c}$, так что наблюдатель должен будет заключить, что скорость лучей равна c.

Предположим теперь, что у него в распоряжении имеется несколько часов, помещенных в различных точках его системы, и что он каждые устанавливает со всей возможной точностью. Чтобы сверить часы, помещенные в точках P и Q, на определенном измеренном расстоянии друг от друга, он может пустить оптический сигнал из P в тот момент, когда первые часы показывают время $t' = 0$, и установить вторые часы так, чтобы они по приходе сигнала показывали время $\frac{L}{c}$, отмечая таким образом время прохождения света между этими точками, которое, по его суждению, равно $\frac{L}{c}$.

Предположим, что P лежит в начале координат, а Q — на положительной стороне оси x; пусть, далее, на каких-нибудь часах, находящихся в покое и, следовательно, отмечающих истинное время, отмечается нулевой момент сигнала. Тогда вследствие различного хода движущихся и неподвижных часов мы будем получать для часов в точке P все время значение

$$t' = \frac{1}{k} t.$$

В момент прихода сигнала истинное время будет

$$\frac{L}{k(c-w)},$$

так как это есть промежуток времени, потребный для того, чтобы свет мог пройти расстояние между точками P и Q, которые движутся со скоростью w и истинное расстояние между которыми равно $\frac{L}{k}$.

Но так как в этот момент часы в точке Q показывают время $\frac{L}{c}$, в любой другой истинный момент времени они будут показывать:

$$t' = \frac{L}{c} + \frac{1}{k}\left[t - \frac{L}{k(c-w)}\right],$$

или, так как $L = x'$,

$$t' = \frac{1}{k}t - \frac{w}{c^2}x'.$$

Это выражение в точности совпадает с (288); отсюда мы видим, что, когда часы сверены при помощи оптических сигналов, они все будут показывать свое местное время t', т. е. время, соответствующее их положению.

Это доказательство легко можно распространить на случаи, когда прямая, соединяющая два места наблюдения, направлена любым иным образом [1]).

191. Важно не упускать из виду, что, проделывая все вышеописанные манипуляции, наблюдатель все время остается в полном неведении относительно того, что его система (и он сам вместе с нею) движется через эфир и что показания его часов и масштабов неверны.

Продолжая свои исследования, он может теперь предпринять изучение электромагнитных явлений в своей системе совершенно таким же образом, как наблюдатель A_0 сделал это в своей системе. Мы можем предсказать, каковы будут его результаты, так как мы знаем эти явления на основании нашей теоремы соответственных состояний. Из последней мы можем заключить, что если движущийся наблюдатель будет определять скорости и ускорения как функции своих эффективных координат и своего эффективного времени, если он будет выводить величину сил по тому ускорению, которое они сообщают единице массы, и если он будет измерять электрические заряды обычным путем на основании тех электростатических взаимодействий, которые они друг на друга оказывают, его единица электричества совпадет с единицей электричества, выбранной наблюдателем A_0. Напротив, определенная им плотность заряда будет не истинная плотность ρ, а та величина, которую мы назвали эффективной плотностью ρ'. Далее, если он будет определять силу, действующую на единицу заряда в какой-нибудь точке электромагнитного поля, он получит

---

[1]) Примечание **84**.

вектор d'[1]. Подобным же образом ему придется заняться вектором h'; продолжая свое изучение, он рано или поздно придет к установлению уравнений, определяющих поле, а именно к формулам (326) для свободного эфира и к формулам (322), (324) для весомого тела.

Он может прийти к последнему результату различными путями. Может быть, он удовлетворится той мыслью, что D' есть известный вектор, который он впервые имел случай ввести, занимаясь заряженным конденсатором. Или, если он будет развивать теорию электронов, он установит понятие об электрическом моменте частички, составляющие которого он естественно обозначит через $\sum ex'$, $\sum ey'$, $\sum ez'$, так что то, что он называет моментом, в действительности является вектором p' в наших уравнениях (306). Введя его, движущийся наблюдатель определит P' и D' по формулам (319) и (320).

Мы можем резюмировать эти соображения следующим образом: если A_0 и A будут делать отчеты о своих наблюдениях и выведенных из них заключениях, то при сравнении окажется, что эти отчеты совершенно тождественны.

192. Следует обратить особое внимание на замечательную обратимость, на которую указал Эйнштейн. До сих пор исследованиями явлений в неподвижной системе занимался только A_0, тогда как A ограничивался системой S. Предположим теперь, что каждый наблюдатель способен видеть ту систему, в которой находится другой наблюдатель, и изучать происходящие в ней явления. Тогда A_0 будет находиться в том положении, в котором, как мы все время воображали, находимся мы сами (хотя, строго говоря, в силу движения Земли мы находимся в положении A); изучая электромагнитное поле в S, он будет приведен к тому, чтобы ввести новые переменные x', y', z', d', h' и т. д.; таким образом, он установит уравнения (326) и (322), (324). Обратимость заключается в том, что если наблюдатель A начнет совершенно таким же способом

---

[1]) Примечание 85.

описывать поле неподвижной системы, он опишет его вполне точно.

Чтобы убедиться в этом, мы вернемся к уравнениям (287) и (288), которые на основании нашего предположения, что l равно 1, принимают вид

$$x' = k(x - wt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = k\left(t - \frac{w}{c^2}x\right). \tag{328}$$

Пусть P будет точка, принадлежащая к системе S_0; остановим наше внимание на ее координате x' по отношению к подвижным осям системы S, для двух определенных значений местного времени t' и $t' + \Delta t'$. Так как x для этой точки P есть величина постоянная, получаем на основании последнего из вышеприведенных уравнений:

$$\Delta t = \frac{1}{k}\Delta t',$$

а из первого:

$$\Delta x' = -kw\,\Delta t = -w\,\Delta t'.$$

Основываясь на своих наблюдениях, наблюдатель A поэтому припишет системе S_0 скорость w в направлении, противоположном положительному направлению оси x'.

Наблюдатель A_0 в своей теории электромагнитного поля в системе S изменил координаты x, y, z и время t на переменные (328), электромагнитные векторы $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ — на векторы $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$ с составляющими

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d}'_x &= \boldsymbol{d}_x, & \boldsymbol{d}'_y &= k\left(\boldsymbol{d}_y - \frac{w}{c}\boldsymbol{h}_z\right), & \boldsymbol{d}'_z &= k\left(\boldsymbol{d}_z + \frac{w}{c}\boldsymbol{h}_y\right),\\ \boldsymbol{h}'_x &= \boldsymbol{h}_x, & \boldsymbol{h}'_y &= k\left(\boldsymbol{h}_y + \frac{w}{c}\boldsymbol{d}_z\right), & \boldsymbol{h}'_z &= k\left(\boldsymbol{h}_z - \frac{w}{c}\boldsymbol{d}_y\right), \end{aligned}\right\} \tag{329}$$

векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{D}$ — на векторы $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{D}'$. Совершенно так же наблюдатель A введет вместо величин x', y', z', t', $\boldsymbol{d}'$ и т. д., относящихся к его системе, некоторые новые величины, которые мы будем обозначать двумя штрихами и которыми он будет пользоваться в своей теории системы S_0.

Он определит эти новые величины посредством уравнений, аналогичных (328) и (329), заменяя w через $-w$, что, впрочем, не окажет никакого влияния на постоянную k. Его преобразования будут поэтому иметь следующий вид:

$$x''=k(x'+wt'),\ y''=y',\ z''=z',\ t''=k\left(t'+\frac{w}{c^2}x'\right), \tag{330}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{d}''_x&=\boldsymbol{d}'_x,\ \ \boldsymbol{d}''_y=k\left(\boldsymbol{d}'_y+\frac{w}{c}\boldsymbol{h}'_z\right),\ \boldsymbol{d}''_z=k\left(\boldsymbol{d}'_z-\frac{w}{c}\boldsymbol{h}'_y\right),\\ \boldsymbol{h}''_x&=\boldsymbol{h}'_x,\ \ \boldsymbol{h}''_y=k\left(\boldsymbol{h}'_y-\frac{w}{c}\boldsymbol{d}'_z\right),\ \boldsymbol{h}''_z=k\left(\boldsymbol{h}'_z+\frac{w}{c}\boldsymbol{d}'_y\right).\end{aligned}\right\} \tag{331}$$

Если он, далее, даст векторам $\boldsymbol{E}''$, $\boldsymbol{H}''$, $\boldsymbol{D}''$ определение, подобное тому, которое A_0 дал векторам $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, он придет в конце концов для системы S_0 к следующим уравнениям, соответствующим (326), (322) и (324): для эфира

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}''\boldsymbol{d}''=0,\\ &\operatorname{div}''\boldsymbol{h}''=0,\\ &\operatorname{rot}''\boldsymbol{h}''=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{d}''}{\partial t''},\\ &\operatorname{rot}''\boldsymbol{d}''=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{h}''}{\partial t''},\end{aligned}\right\} \tag{332}$$

а для весомого тела

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}''\boldsymbol{D}''=0,\\ &\operatorname{div}''\boldsymbol{H}''=0,\\ &\operatorname{rot}''\boldsymbol{H}''=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}''}{\partial t''},\\ &\operatorname{rot}''\boldsymbol{E}''=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}''}{\partial t''},\end{aligned}\right\} \tag{333}$$

$$\boldsymbol{D}''=F(\boldsymbol{E}''). \tag{334}$$

Символы div″ и rot″ не требуют дальнейших пояснений.

193. Остается показать, что в этих формулах содержится *точное* описание явлений, происходящих в системе S_0.

Доказательство очень просто, так как при ближайшем рассмотрении оказывается, что уравнения совпадают с теми, которыми для той же цели пользовался A_0.

В самом деле, если мы решим уравнения (328) относительно x, y, z, t и (329) относительно $\mathbf{d}_x$, $\mathbf{d}_y$, $\mathbf{d}_z$, $\mathbf{h}_x$, $\mathbf{h}_y$, $\mathbf{h}_z$, мы получим значения, в точности совпадающие с (330) и (331), так что

$$x'' = x, \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = t,$$
$$\mathbf{d}'' = \mathbf{d}, \quad \mathbf{h}'' = \mathbf{h},$$

чем и доказывается тождественность систем уравнений (322) и (325). Что касается уравнений (333), (334) и (321), (323), то единственное различие между двумя системами уравнений заключается в том, что в одну систему входят векторы $\mathbf{E}''$ и $\mathbf{D}''$, а в другую — векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Если рассматривать эти четыре величины только как «известные» векторы (представляемые символами, выбор которых не имеет значения), это сходство внешнего вида, а также то, что в свободном эфире $\mathbf{E}'' = \mathbf{E}$, $\mathbf{D}'' = \mathbf{D}$, $\mathbf{H}'' = \mathbf{H}$ (ведь для этой среды $\mathbf{E}'' = \mathbf{D}'' = \mathbf{d}''$, $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{d}$, $\mathbf{H}'' = \mathbf{h}''$, $\mathbf{H} = \mathbf{h}$) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы мы могли заключить, что явления в системе S_0 могут быть описаны при помощи уравнений (333), (334) столь же правильно, как и при помощи уравнений (321), (323).

Мы можем пойти еще дальше и предположить, что движущийся и неподвижный наблюдатели — или, вернее, теоретики, в которых они теперь превращаются, — устанавливают теорию электронов и молекул. A_0 определил $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ как средние значения $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$, а для других векторов он пользовался уравнениями

$$\mathbf{p}'_x = \sum ex', \quad \mathbf{p}'_y = \sum ey', \quad \mathbf{p}'_z = \sum ez',$$
$$\mathbf{P}' = N\mathbf{p}',$$
$$\mathbf{D}' = \mathbf{E}' + \mathbf{P}'.$$

Подобным же образом A определит $\mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}''$ как средние значения векторов $\mathbf{d}''$ и $\mathbf{h}''$, так что эти векторы сделаются равными средним значениям $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, т. е. $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Для каждой молекулы он положит

$$\boldsymbol{p}_x'' = \sum ex'',\ \boldsymbol{p}_y'' = \sum ey'',\ \boldsymbol{p}_z'' = \sum ez'',$$

и далее

$$\boldsymbol{P}'' = N\boldsymbol{p}'',$$

$$\boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{E}'' + \boldsymbol{P}''.$$

Сравнивая эти формулы с (307) (где мы можем написать $\boldsymbol{p}_x = \sum ex$ и т. д.) и с уравнениями $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ и помня, что $x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$, мы видим, что действительно

$$\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{P}'' = \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{D}'' = \boldsymbol{D}.$$

194. На основании вышесказанного должно быть ясно, что впечатления, получаемые обоими наблюдателями A и A_0, должны быть во всех отношениях одинаковыми. Нельзя решить, какая из систем является неподвижной по отношению к эфиру, а какая движется; не будет никаких оснований предпочесть измерения длин и времени, произведенные в одной системе, измерениям, произведенным в другой системе, или говорить, что какая-нибудь одна из этих систем обладает «истинным» временем или «истинной» длиной. Эйнштейн обратил особое внимание на это обстоятельство в своей теории, в которой он исходит из того, что он называет принципом относительности, т. е. принципом, на основании которого уравнения, при помощи которых могут быть описаны физические явления, не изменяют своего вида при переходе от одной системы координат к другой, имеющей равномерное прямолинейное движение по отношению к первоначальной системе.

Я не могу касаться здесь многочисленных и в высшей степени интересных применений, которые Эйнштейн вывел из своего принципа. Его результаты, касающиеся электромагнитных и оптических явлений (приводящие к тем же противоречиям с результатами Кауфмана, о которых мы говорили в § 179 [1]), в основных чертах совпадают с теми результатами, которые мы получили на предыдущих страницах, причем главное различие заключается в том, что

[1]) Примечание 86.

Эйнштейн просто постулирует то, что мы старались, с некоторыми затруднениями и не всегда вполне удовлетворительно, вывести из основных уравнений электромагнитного поля. При этом он, конечно, требует от нас, чтобы мы заранее верили, что отрицательный результат опытов, подобных опытам Майкельсона, Рэлея и Брэса, является не случайной компенсацией противоположных эффектов, но выражением общего и основного принципа.

Я полагаю, что все же можно кое-что сказать в пользу и того способа, которым я старался изложить свою теорию. Эфир, который может являться носителем электромагнитного поля, его энергии и его колебаний, я должен поневоле рассматривать как нечто обладающее известной субстанциальностью, как бы отличен он ни был от обычной материи. С этой точки зрения представляется естественным не вводить с самого начала предположения, что совершенно безразлично, движется тело через эфир или нет, и измерять расстояния и промежутки времени при помощи масштабов и часов, имеющих относительно эфира неподвижное положение.

Было бы несправедливо не добавить, что наряду с захватывающей смелостью своего отправного пункта теория Эйнштейна имеет еще и другое значительное преимущество по сравнению с моей теорией. В самом деле, мне не удалось получить уравнения, отнесенные к подвижным осям, в *точно* такой же форме, что и уравнения для неподвижной системы, Эйнштейн же выполнил это при помощи системы новых переменных, весьма, впрочем, мало отличающихся от тех, которые были введены мной. Я не пользовался этими подстановками только по той причине, что формулы представляются довольно сложными и имеют несколько искусственный вид, если только не выводить их из самого принципа относительности[1]).

---

[1]) См., впрочем, примечание 72*.

1. (Стр. 25.) Уравнение (4) эквивалентно трем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial t}.$$

Вычитая производную второго из этих уравнений по z из производной третьего уравнения по y, получаем:[1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial z}\right)-\Delta \boldsymbol{h}_x=\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial z}\right), \quad (I)$$

или, принимая во внимание (3) и (5),

$$\Delta \boldsymbol{h}_x=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{h}_x}{\partial t^2}.$$

Подобным же образом получаются соответственные формулы для $\boldsymbol{h}_y$, $\boldsymbol{h}_z$ и для составляющих $\boldsymbol{d}$.

Следует отметить, что величина

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial x}\right),$$

получаемая при вышеприведенных преобразованиях, является составляющей по оси OX вихря $\operatorname{rot} \boldsymbol{h}$, или, как мы можем иначе сказать, величины $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{h}$, и что выражение в левой части уравнения (I) является составляющей по оси OX вектора

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{h}-\Delta \boldsymbol{h}.$$

---

[1] Нумерация формул в этом добавлении ведется курсивом.

Вообще, обозначая через $\boldsymbol{A}$ любой вектор, мы можем написать:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}. \tag{2}$$

Эта теорема дает нам возможность исключить $\boldsymbol{d}$ из основных уравнений, пользуясь обозначениями векторного анализа. В самом деле, из (4) мы можем вывести:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}},$$

или, так как

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{d},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{h} - \Delta\boldsymbol{h} = \frac{1}{c}\;\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{d},$$

т. е. на основании (3) и (5)

$$\Delta\boldsymbol{h} = \frac{1}{c^2}\;\frac{\partial^2\boldsymbol{h}}{\partial t^2}.$$

Подобным же образом, рассматривая вектор $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{d}$, можно получить уравнение

$$\Delta\boldsymbol{d} = \frac{1}{c^2}\;\frac{\partial^2\boldsymbol{d}}{\partial t^2}.$$

2. (Стр. 39.) Определения § 2 приводят к общей формуле

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0.$$

Отсюда, по уравнению (19)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{c} = \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{d}} + \rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{3}$$

т. е. полный ток, который состоит из тока смещения $\dot{\boldsymbol{d}}$ и тока конвекции $\rho\boldsymbol{v}$, имеет соленоидальное распределение. Чтобы показать, что это положение является справедливым независимо от того, удовлетворяется ли условие, о котором говорится в тексте, или нет, мы фиксируем наше внимание на элементе заряженного вещества, который в момент времени t находится в точке (x, y, z) и поэтому в момент времени $t + dt$ расположен в точке $(x + \boldsymbol{v}_x\,dt,\ y + \boldsymbol{v}_y\,dt,\ z + \boldsymbol{v}_z\,dt)$. По известной теореме теории бесконечно малых деформаций элемент объема, первоначально равный dS, будет в конце промежутка времени dt иметь значение

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{v}_z}{\partial z}\right)dt\right\}dS. \tag{4}$$

С другой стороны, так как время изменилось на величину dt, а координаты — на $v_x\,dt$, $v_y\,dt$, $v_z\,dt$, плотность заряда, прежде равная ρ, теперь будет:

$$\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) dt.$$

Произведение из этого выражения на (4) должно быть равно первоначальному заряду элемента $\rho\,dS$, так что получим:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{5}$$

на основании чего, принимая во внимание (17), сразу приходим к уравнению (3).

3. (Стр. 40.) Метод исключения в точности подобен тому, которым мы пользовались в примечании **1**. Из (20) и (19) можем вывести:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{h}},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}} + \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v});$$

или, пользуясь (2):

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{d} - \Delta\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{h}),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{h} - \Delta\boldsymbol{h} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{d}) + \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\rho\boldsymbol{v});$$

подставляя величины $\operatorname{div}\boldsymbol{d}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{h}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{h}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{d}$ из (17), (19), (18) и (20), мы получаем формулы (24) и (25).

4. (Стр. 42.) Нижеследующие соображения показывают, что функция (30) не только удовлетворяет дифференциальному уравнению (29) (это можно было бы проверить непосредственным дифференцированием), но при известных условиях является его единственным решением; рассуждения эти заимствованы из статьи Кирхгофа по теории световых лучей [1]).

Они основаны на теореме Грина и на том положении, что если r есть расстояние от неподвижной точки, а F — некоторая произвольная функция, то величина

$$\chi = \frac{1}{r} F\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$$

---

[1]) Kirchhoff, Ann. d. Phys. u. Chem. 18 (1883), стр. 663.

обладает свойством, которое дается уравнением

$$\Delta\chi = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \qquad (б)$$

Это следует непосредственно из формулы

$$\Delta\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial\chi}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2},$$

которая является справедливой для любой функции от r, не содержащей координат явно; в силу этой формулы выражение (б) принимает вид

$$\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2(r\chi)}{\partial t^2}.$$

Известно, что решениями этого уравнения являются:

$$r\chi = F\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad \text{и} \quad r\chi = F\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Пусть σ будет поверхность, ограничивающая некоторый объем S, на всем протяжении которого ψ удовлетворяет уравнению (29); пусть P будет та точка объема S, для которой нам нужно определить значение функции, dS — элемент объема, расположенный на расстоянии r от P, Σ — малая сферическая поверхность с центром в точке P, n и N — нормали к σ и Σ, проведенные в обоих случаях наружу.

Введем вспомогательное выражение

$$\chi = \frac{1}{r}\,F\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

где F есть функция, точное определение которой будет дано далее; рассмотрим интеграл

$$J = \int (\psi\,\Delta\chi - \chi\,\Delta\psi)\,dS,$$

который берется по объему между σ и Σ.

Во-первых, мы имеем по теореме Грина:

$$J = \int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma - \int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\partial\Sigma,$$

и, во-вторых, в силу (29) и (б):

$$J = -\int \chi\omega\,dS + \frac{1}{c^2}\int\left(\psi\,\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \chi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dS =$$

$$= -\int \chi\omega\,dS + \frac{1}{c^2}\,\frac{d}{dt}\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS.$$

Отсюда, комбинируя эти результаты, получаем:

$$-\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)d\Sigma=-\int\chi\omega\,dS-\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma+$$
$$+\frac{1}{c^2}\,\frac{d}{dt}\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях t. Умножив его на dt, мы можем поэтому проинтегрировать его между произвольными пределами t_1 и t_2, в результате чего получается:

$$\left.\begin{aligned}&-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)d\Sigma=-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\chi\omega\,dS-\\&-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma+\frac{1}{c^2}\left|\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS\right|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Выбирая соответствующим образом функцию F, которая до сих пор оставалась неопределенной, мы можем получить из этого уравнения решение нашей задачи.

Допустим, что $F(\varepsilon)$ отличается от нуля только для тех значений ε, которые лежат между нулем и некоторой положительной величиной δ, причем эта последняя пусть настолько мала, что мы можем пренебречь изменениями любых других величин, встречающихся в нашей задаче, которые происходят за промежуток времени ε. Что касается самой функции F, мы предположим, что ее значения между $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=\delta$ настолько велики, что

$$\int_0^\delta F(\varepsilon)\,d\varepsilon=1.$$

Так как для определенного значения r

$$\int_{t_1}^{t_2}F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt=\int_{t_1+\frac{r}{c}}^{t_2+\frac{r}{c}}F(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

то ясно, что из вышеприведенных предположений

$$\left.\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt = 1\\ \text{и}\qquad &\\ &\int_{t_1}^{t_2} \chi F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt = \chi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)},\end{aligned}\right\}\qquad (8)$$

если под χ понимать одну из функций t, с которыми мы имеем дело, а под t_1 и t_2 — значения t, удовлетворяющие условиям

$$t_1+\frac{r}{c}<0 \quad \text{и} \quad t_2+\frac{r}{c}>\delta.$$

Мы сейчас увидим, что при разборе формулы (*7*) формула (*8*) даст нам возможность поступить так, что значения ψ и ω будут соответствовать вполне определенным моментам.

Пусть t_2 имеет определенное положительное значение, а t_1 — определенное отрицательное, настолько большое, что даже для точек, наиболее удаленных от P, $t_1+\frac{r}{c}<0$. Тогда все значения χ, входящие в последний член (*7*), равны нулю. То же относится и к значениям $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, входящим в этот член. В самом деле,

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{1}{r}F'\left(t+\frac{r}{c}\right);$$

но это выражение пропадает для $t=t_1$ и $t=t_2$, так как $F'(\varepsilon)$, подобно самому $F(\varepsilon)$, пропадает для всех значений ε, лежащих вне интервала $(0, \delta)$. Отсюда видно, что последний член в правой части уравнения (*7*) равен нулю.

Член, содержащий ω, можно написать так:

$$-\int\frac{1}{r}\,dS\int_{t_1}^{t_2}\omega F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt,$$

где

$$\int_{t_1}^{t_2}\omega F\left(t+\frac{r}{c}\right)dt$$

относится к некоторому определенному элементу объема dS, расположенному на расстоянии r от P. Отсюда в силу (8)

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int \chi\omega\, dS = -\int \frac{1}{r}\,\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, dS.$$

Путем подобных рассуждений находим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \chi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma = \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} d\sigma.$$

Мы должны, далее, рассмотреть интеграл, содержащий $\frac{\partial\chi}{\partial n}$. Так как эта производная равна

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) F\left(t+\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, F'\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \frac{\partial\chi}{\partial n}\, d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi F\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma +$$

$$+\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma.$$

Первый интеграл равен

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \psi F\left(t+\frac{r}{c}\right) dt = \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, d\sigma,$$

а второе выражение можно проинтегрировать по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) d\sigma = \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \psi F'\left(t+\frac{r}{c}\right) dt =$$

$$= \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \left|\psi F\left(t+\frac{r}{c}\right)\right|_{t_1}^{t_2} - \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\psi}{\partial t} F\left(t+\frac{r}{c}\right) dt =$$

$$= -\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\, d\sigma,$$

так как и $F\left(t_1+\frac{r}{c}\right)$ и $F\left(t_2+\frac{r}{c}\right)$ равны нулю.

Комбинируя эти результаты, получаем для правой части (7):

$$-\int \frac{1}{r}\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}dS+\int\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}+\frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\right\}d\sigma.$$

Предположим теперь, что радиус R сферы Σ стремится к нулю. Вследствие этого первый интеграл в нашем последнем выражении должен быть распространен только на область в самом непосредственном соседстве точки P. Остальные члены остаются без изменения, но для левой части уравнения (7) мы должны принять ее предельное значение при $\lim R=0$.

Так как интеграл по сфере имеет тот же вид, как только что рассмотренный нами интеграл по поверхности σ, мы можем написать:

$$-\int_{t_1}^{t_2}dt\int\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)d\Sigma=$$
$$=\int\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}-\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}+\frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial N}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\right\}d\Sigma,$$

или, ввиду того, что нормаль N имеет направление r и на сфере $r=R$,

$$\int\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}+\frac{1}{R^2}\psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}+\frac{1}{cR}\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}\right\}d\Sigma.$$

Далее, когда R стремится к нулю, интеграл, содержащий $\frac{1}{R}$, пропадает, так что наше выражение сводится к

$$\frac{1}{R^2}\int\psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}d\Sigma. \qquad (9)$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 будут экстремальные значения $\psi_{\left(t=-\frac{R}{c}\right)}$ на поверхности сферы. Тогда (9) заключено в пределах

$$4\pi\psi_1 \quad \text{и} \quad 4\pi\psi_2.$$

Но как ψ_1, так и ψ_2 имеют пределом значение ψ в точке P для момента времени $t=0$; назовем это значение $\psi_{P\,(t=0)}$. Ясно, что пределом (9) является:

$$4\pi\psi_{P\,(t=0)},$$

и уравнение (7) в конце концов получает вид

$$\psi_{P\,(t=0)} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\,\omega_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\psi_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)} + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\dot{\psi}_{\left(t=-\frac{r}{c}\right)}\right\}d\sigma.$$

Этим выражением определяется значение ψ в выбранной точке P в момент времени $t=0$. Но мы свободны в выборе этого момента; поэтому наша формула может служить для вычисления значения ψ_P в любой момент t. Для этого нам достаточно заменить значения ω, ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ и $\dot{\psi}$ в правой части величинами, относящимися к моменту времени $t-\frac{r}{c}$. Обозначая эти последние величины при помощи квадратных скобок и опуская индекс P, получаем:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{[\omega]}{r}\,dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right] - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)[\psi] + \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,[\dot{\psi}]\right\}d\sigma. \qquad (10)$$

Формула (30), приведенная в тексте, получена в предположении, что поверхность σ удаляется во все стороны на бесконечное расстояние, благодаря чему во многих случаях интеграл по поверхности делается равным нулю. Мы можем, например, допустить, что в удаленных областях пространства функция ψ была равна нулю до некоторого определенного момента времени t_0. Время $t-\frac{r}{c}$, к которому относятся величины $[\psi]$, $\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]$, $[\dot{\psi}]$, при увеличении r всегда оказывается меньшим t_0, так что в конце концов величины в квадратных скобках превращаются в нуль.

5. (Стр. 43.) Пусть составляющие вектора $\boldsymbol{A}$ суть непрерывные функции координат (см. § 7) и пусть он сам распределен соленоидально, так что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0; \qquad (11)$$

мы всегда можем подобрать второй вектор $\boldsymbol{B}$ так, чтобы было:

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}.$$

Для этого будет достаточно положить, что

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}{r} \, dS.$$

В самом деле, мы находим отсюда, пользуясь уравнением (*2*) примечания 1 и данным выше уравнением (*11*), что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}}{r} \, dS = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta \boldsymbol{A}}{r} \, dS,$$

а это равно $\boldsymbol{A}$ на основании теоремы Пуассона.

При этом мы пользовались следующей теоремой: если ω непрерывно, потенциальную функцию вида

$$\int \frac{\omega}{r} \, dS$$

можно дифференцировать по одной из координат, просто беря производную ω под знаком интеграла по соответствующей координате элемента dS.

Далее, уравнение (18) показывает, что магнитная сила $\boldsymbol{h}$ распределена соленоидально. Поэтому мы всегда можем подобрать вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы было:

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \qquad (12)$$

После этого мы можем написать уравнение (20) следующим образом:

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}\right) = 0;$$

это выражение показывает, что вектор

$$\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}}$$

должен быть градиентом некоторой скалярной функции $-\varphi$, так что

$$\boldsymbol{d} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{a}} - \operatorname{grad} \varphi. \qquad (13)$$

Следует, впрочем, заметить, что вектор $\boldsymbol{a}$ и скалярная функция φ остаются при этом методе вычисления до некоторой степени неопределенными (хотя в каждом отдельном случае $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{d}$

имеют определенные значения). Понимая под $\boldsymbol{a}_0$ и φ_0 некоторые частные значения их, мы можем представить другие значения, которые тоже будут пригодны в качестве решения, следующим образом:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 - \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c} \chi,$$

где χ есть некоторая скалярная функция. Мы определим ее, подчиняя $\boldsymbol{a}$ и φ условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = -\frac{1}{c} \dot{\varphi}, \tag{14}$$

которое всегда может быть выполнено, так как оно ведет к уравнению

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}_0 + \frac{1}{c} \dot{\varphi}_0,$$

а последнее может быть удовлетворено соответствующим подбором значения χ.

Дифференциальные уравнения (31) и (32) непосредственно следуют из (17) и (19), если в эти выражения подставить значения (*13*) и (*12*). В самом деле, (17) принимает вид

$$-\frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{a}} - \Delta\varphi = \rho,$$

т. е. в силу (*14*)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = -\rho,$$

а (19) приобретает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} + \frac{1}{c} \rho \boldsymbol{v},$$

или (см. примечание **1**)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} + \frac{1}{c} \rho \boldsymbol{v},$$

которое в силу (*14*) можно написать в таком виде:

$$\Delta \boldsymbol{a} - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{c} \rho \boldsymbol{v}.$$

6. (Стр. 45.) Наше решение не имеет общего характера, так как оно получено в предположении, что интеграл по поверхности в (*10*) (примечание **4**) пропадает, когда поверхность σ отодвигается в бесконечность. Следует, впрочем, заметить, что всякое другое решение можно привести к виду:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{[\omega]}{r} dS + \psi',$$

где ψ' есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta\psi' - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi}' = 0.$$

На языке той физической задачи, которой мы сейчас занимаемся, это значит, что электромагнитное поле, определяемое уравнениями (33) — (36) (мы можем *приписать* его электронам), не является единственно возможным; мы всегда можем добавить поле, удовлетворяющее во всех точках пространства уравнениям (2) — (5) для свободного эфира. Но добавочные члены такого рода исключаются вследствие допущения, сделанного в тексте.

Конечно, такое состояние, для которого имеют место формулы (2) — (5), может существовать в ограниченной части пространства; хорошим примером является пучок плоско-поляризованного света, представляемый уравнениями (7). Такой пучок, однако, должен быть приписан колебаниям удаленных электронов, и если мы хотим включить источник света, то ясно, что мы должны обратиться к уравнениям, подобным (33) — (36).

7. (Стр. 46.) Пусть центр электрона движется вдоль оси OX. Тогда ясно, что $\mathbf{a}_y = 0$, $\mathbf{a}_z = 0$ и что φ и $\mathbf{a}_x$ можно рассматривать как функции t, x и расстояния r от начала координат. В самом деле, φ и $\mathbf{a}_x$ должны иметь постоянное значение по окружности, осью которой является OX.

Полагая

$$\varphi = f_1(t, r, x), \qquad \mathbf{a}_x = f_2(t, r, x),$$

получаем:

$$\mathbf{d}_x = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{a}}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r},$$

$$\mathbf{d}_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{y}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad \mathbf{d}_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{z}{r}\frac{\partial f_1}{\partial r}.$$

Значит, можно рассматривать $\mathbf{d}$, как результирующую двух векторов, из которых один направлен по OX и имеет величину $-\frac{1}{c}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial x}$, а другой — по r и равен $-\frac{\partial f_1}{\partial r}$.

Составляющие магнитной силы равны

$$\mathbf{h}_x = \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z} = 0,$$

$$\mathbf{h}_y = \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x} = \frac{z}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r},$$

$$\mathbf{h}_z = \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y} = -\frac{y}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r},$$

так что $\boldsymbol{h}$ направлено под прямым углом как к OX, так и к прямой r.

То, что говорится в тексте про электрические и магнитные линии сил, является непосредственным следствием этих результатов.

8. (Стр. 48.) При выводе уравнения энергии мы будем исходить из формулы (23). Работа силы, с которой эфир действует на заряд элемента dS в течение промежутка времени dt, выражается скалярным произведением силы $\boldsymbol{f}\rho\, dS$ на путь $\boldsymbol{v}\,dt$. Отсюда интеграл

$$A = \int \rho\,(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS$$

выражает полную работу, производимую эфиром за единицу времени; эта работа, однако, зависит исключительно от первой части вектора (23), так как вторая часть $\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]$ перпендикулярна скорости $\boldsymbol{v}$. Следовательно,

$$A = \int \rho\,(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\,dS = \int \rho\,(\boldsymbol{d}\boldsymbol{v})\,dS = \int (\boldsymbol{d}\rho\boldsymbol{v})\,dS,$$

и, если взять значение $\rho\boldsymbol{v}$ из уравнения (19),

$$A = c\int (\boldsymbol{d}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h})\,dS - \int (\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{d}})\,dS. \qquad (15)$$

Развертывая первый интеграл и располагая его члены в другом порядке, получаем:

$$\int \left\{\left(d_z\frac{\partial h_y}{\partial x} - d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(d_x\frac{\partial h_z}{\partial y} - d_z\frac{\partial h_x}{\partial y}\right) + \left(d_y\frac{\partial h_x}{\partial z} - d_x\frac{\partial h_y}{\partial z}\right)\right\}dS; \qquad (16)$$

здесь каждый член можно проинтегрировать по частям. Поэтому, обозначая через α, β, γ углы, которые нормаль n к поверхности σ образует с положительными осями, имеем:

$$\int d_z\frac{\partial h_y}{\partial x}\,dS = \int d_z h_y\cos\alpha\,d\sigma - \int h_y\frac{\partial d_z}{\partial x}\,dS,$$

$$\int d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\,dS = \int d_y h_z\cos\alpha\,d\sigma - \int h_z\frac{\partial d_y}{\partial x}\,dS,$$

$$\int\left(d_z\frac{\partial h_y}{\partial x} - d_y\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)dS =$$
$$= -\int [\boldsymbol{d}\boldsymbol{h}]_x\cos\alpha\,d\sigma + \int\left(h_z\frac{\partial d_y}{\partial x} - h_y\frac{\partial d_z}{\partial x}\right)dS,$$

где $[\boldsymbol{dh}]_x$ обозначает первую составляющую векторного произведения $[\boldsymbol{dh}]$.

Преобразуя остальные члены (*16*) подобным же образом, получаем для первого интеграла (*15*) выражение

$$\int (\boldsymbol{d}\operatorname{rot}\boldsymbol{h})\,dS =$$

$$= -\int \{[\boldsymbol{dh}]_x \cos\alpha + [\boldsymbol{dh}]_y \cos\beta + [\boldsymbol{dh}]_z \cos\gamma\}\,d\sigma +$$

$$+\int (\boldsymbol{h}\operatorname{rot}\boldsymbol{d})\,dS = -\int [\boldsymbol{dh}]_n\,d\sigma + \int (\boldsymbol{h}\operatorname{rot}\boldsymbol{d})\,dS. \qquad (17)$$

Формулу (37) теперь легко можно получить, если принять во внимание:

а) что в силу (20) последний член (*17*) можно заменить выражением

$$-\frac{1}{c}\int (\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{h}})\,dS;$$

б) что

$$(\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{d}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{d}^2)}{\partial t}, \quad (\boldsymbol{h}\dot{\boldsymbol{h}}) = \frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{h}^2)}{\partial t}.$$

Мы можем заметить, между прочим, что уравнение (*17*) выражает общую теорему. Обозначая через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ любые два вектора и через σ поверхность, ограничивающую объем S, мы всегда имеем:

$$\int (\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B})\,dS = -\int [\boldsymbol{AB}]_n\,d\sigma + \int (\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A})\,dS.$$

9. (Стр. 53). Вывод формулы для $\boldsymbol{F}$ во многом напоминает вывод уравнения энергии. Вместо (43) мы можем написать:

$$\boldsymbol{F} = \int \left\{\rho\boldsymbol{d} + \frac{1}{c}[\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]\right\} dS;$$

здесь в силу (17) и (19) мы можем заменить ρ через $\operatorname{div}\boldsymbol{d}$ и $\rho\boldsymbol{v}$ через $c\operatorname{rot}\boldsymbol{h} - \dot{\boldsymbol{d}}$. Отсюда

$$\boldsymbol{F} = \int \left\{\operatorname{div}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d} + [\operatorname{rot}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}] - \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{h}]\right\} dS.$$

Но

$$[\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{h}] = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{dh}] - [\boldsymbol{d}\dot{\boldsymbol{h}}] = \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{dh}] - c(\operatorname{rot}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}],$$

так что, если мы определим часть F_2 результирующей силы посредством формулы

$$F_2 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int [dh]\,dS = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int s\,dS = -\frac{1}{c^2}\int \dot{s}\,dS,$$

для остающейся части мы получим выражение

$$F_1 = \int \{\operatorname{div} d \cdot d + [\operatorname{rot} h \cdot h] + [\operatorname{rot} d \cdot d]\}\,dS.$$

Оставляя временно без рассмотрения член, зависящий от магнитной силы, получим для составляющей силы F_1 по оси OX

$$\int \left\{\left(\frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{\partial d_y}{\partial y} + \frac{\partial d_z}{\partial z}\right) d_x + \left(\frac{\partial d_x}{\partial z} - \frac{\partial d_z}{\partial x}\right) d_z - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} - \frac{\partial d_x}{\partial y}\right) d_y \right\} dS = \int \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(d_x^2 - d_y^2 - d_z^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(d_x d_y) + \frac{\partial}{\partial z}(d_x d_z) \right\} dS = \int \left\{ \frac{1}{2}(d_x^2 - d_y^2 - d_z^2)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + d_x d_y \cos\beta + d_x d_z \cos\gamma \right\} d\sigma = \int \frac{1}{2}\{2d_x d_n - d^2\cos\alpha\}\,d\sigma.$$

Другая часть силы F_1, которая зависит от h, приводит к результату такого же вида; причина заключается в том, что F_1 становится симметричным по отношению к d и h при добавлении члена $\operatorname{div} h\, h$, который в силу (18) равен нулю.

10. (Стр. 57.) Напряжение, которое действует в элементе поверхности, имеющем любое направление и любое положение в пространстве, можно вычислить при помощи формул (48); если взять среднее значение за долгий промежуток времени, окажется, что это напряжение направлено под прямым углом к элементу. Другими словами, если мы направим ось x нормально к элементу и обозначим через $(\overline{d_x^2})$ и т. д. рассматриваемые средние значения, получим нормальное давление величиной

$$p = \frac{1}{2}\left\{(\overline{d_y^2}) + (\overline{d_z^2}) - (\overline{d_x^2})\right\} + \frac{1}{2}\left\{(\overline{h_y^2}) + (\overline{h_z^2}) - (\overline{h_x^2})\right\}. \qquad (18)$$

Применим теперь к двум частным случаям результат, полученный в § 19. Во-первых, мы можем принять за σ замкнутую поверхность, полностью лежащую внутри оболочки. Так как (см. § 20, б) $F = 0$ и в среднем $F_2 = 0$, то давления p, действующие на поверхности, должны друг друга уничтожать. Отсюда вытекает как следствие, что p должно быть постоянно во всем эфире.

Далее, рассматривая плоскую цилиндрическую коробку, содержащую элемент стенки (рис. 1, стр. 56), мы можем показать, что p действительно есть давление, испытываемое стенками.

Так как давление p одинаково во всех точках, мы можем с полным правом заменить его средним из тех значений, которые выражение (*18*) принимает при определенных направлениях OX, OY, OZ в различных точках пространства. Отсюда, если эти средние значения обозначать при помощи горизонтальной черточки, получаем:

$$p = \frac{1}{2}\left\{\overline{(\overline{d_y^2})} + \overline{(\overline{d_z^2})} - \overline{(\overline{d_x^2})}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\overline{(\overline{h_y^2})} + \overline{(\overline{h_z^2})} - \overline{(\overline{h_x^2})}\right\}.$$

Легко видеть, однако, что порядок обеих операций по вычислению средних значений — по времени и по пространству — можно переставить местами и что в рассматриваемом нами стационарном состоянии средние значения, которые мы обозначали $\overline{d_x^2}$ и т. д., от времени не зависят, так что, вычислив их, нам уже не нужно брать средние значения по времени. Поэтому наша формула получает вид

$$p = \frac{1}{2}(\overline{d_y^2} + \overline{d_z^2} - \overline{d_x^2}) + \frac{1}{2}(\overline{h_y^2} + \overline{h_z^2} - \overline{h_x^2}).$$

11. (Стр. 58.) Формулу (51) можно получить, если в преобразованиях примечания **9** опустить все члены, содержащие ρ. Мы можем, однако, поступать также и следующим образом.

Результирующая сила в направлении x, поскольку она вызывается электрическим полем, дается интегралом по поверхности

$$\frac{1}{2}\int\left\{2d_x d_n - d^2\cos\alpha\right\}d\sigma,$$

вместо которого мы можем написать (см. конец примечания **9**) составляющую по оси OX выражения

$$\int\left\{\operatorname{div}\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{d} + [\operatorname{rot}\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{d}]\right\}dS;$$

к нему мы должны добавить подобное же выражение, зависящее от магнитного поля. Но так как $\operatorname{div}\boldsymbol{h} = 0$ и, по принятому нами допущению, $\operatorname{div}\boldsymbol{d} = 0$, то мы имеем отсюда:

$$\boldsymbol{F}_1 = \int\{[\operatorname{rot}\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{h}] + [\operatorname{rot}\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{d}]\}\,dS,$$

или, если мы воспользуемся уравнениями (4) и (5),

$$F_1 = \frac{1}{c}\int \{[\dot{d}h] - [\dot{h}d]\}\, dS = \frac{1}{c}\int \{[\dot{d}h] + [d\dot{h}]\}\, dS =$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial t}[dh]\, dS = \frac{1}{c^2}\int \dot{s}\, dS.$$

12. (Стр. 60.) Пусть u, v, w будут составляющие скорости эфира в точке (x, y, z) в момент времени t. Тогда, по известной теореме, ускорение в направлении x дается выражением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

так что, если μ есть плотность, а X — сила, действующая на элемент dS в направлении x, получим:

$$X = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dS.$$

При весьма малых u, v, w мы можем пренебречь членами $u\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д. и прибавить член $u\frac{\partial \mu}{\partial t}$ тоже второго порядка малости, потому что в случае медленного движения изменение плотности в единицу времени весьма мало. Следовательно,

$$X = \frac{\partial}{\partial t}(\mu u\, dS),$$

что является математическим выражением положения, приведенного в тексте.

13. (Стр. 65.) Значение скалярного потенциала в точке эфира x, y, z в момент времени t пусть равно φ; такое же значение он будет иметь в момент времени $t + dt$ в точке с координатами $x + w\,dt$, y, z. Так как потенциал для этих новых значений независимых переменных может быть представлен выражением

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} w\, dt,$$

получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} w\, dt = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -w\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Рассуждая подобным же образом по отношению к функции $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -w \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = w^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

14. (Стр. 67.) Пусть S' будет система, находящаяся в покое; возьмем две точки, которые назовем соответственными; одна из них пусть относится к движущейся системе S и имеет координаты x, y, z, а другая — к системе S' и имеет координаты x', y, z, причем x и x', конечно, связаны друг с другом соотношением (58). Тогда соответствующие элементы объема dS и dS' относятся друг к другу, как x и x', так что

$$dS' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} dS,$$

и если они обладают одинаковыми зарядами, плотность ρ' в dS' должна быть связана с плотностью ρ в dS следующим соотношением:

$$\rho' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \rho.$$

Уравнение Пуассона, которое определяет скалярный потенциал φ' в неподвижной системе, может быть поэтому написано так:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = -\rho' = -(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \rho;$$

сравнивая его с (59), мы видим, что в соответствующих точках

$$\varphi' = (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad \varphi = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi'. \qquad (19)$$

Величины, относящиеся к движущейся системе S, можно теперь выразить как функции от величин, относящихся к S'.

Прежде всего, мы имеем в силу (58) и (*19*):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1-\beta^2)^{-1} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi'}{\partial z}.$$

Далее, на основании (33) и (34) и так как

$$a_x = \beta\varphi, \qquad a_y = 0, \qquad a_z = 0,$$

$$\dot{a}_x = -w\frac{\partial a_x}{\partial x} = -\beta^2 c\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

имеем.

$$d_x = -\frac{1}{c}\dot{a}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -(1-\beta^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$d_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad d_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$h_x = 0, \qquad h_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} = \beta\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad h_z = -\frac{\partial a_x}{\partial y} = -\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Электрическая энергия дается поэтому выражением

$$U = \frac{1}{2}\int\left\{(1-\beta^2)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dS =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left\{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right]\right\}dS', \tag{20}$$

а для магнитной энергии имеем:

$$T = \frac{1}{2}\beta^2\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dS =$$

$$= \frac{1}{2}\beta^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS'. \tag{21}$$

Наконец, для составляющих потока энергии получаем:

$$s_x = c\,(d_y h_z - d_z h_y) = c\beta\,(1-\beta^2)^{-1}\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$s_y = c\,(d_z h_x - d_x h_z) = -c\beta\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

$$s_z = c\,(d_x h_y - d_y h_x) = -c\beta\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

а для составляющих электромагнитного количества движения:

$$\left.\begin{aligned}
G_x &= \frac{1}{c}\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS',\\
G_y &= -\frac{1}{c}\beta\int\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}dS',\\
G_z &= -\frac{1}{c}\beta\int\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}dS'.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

15. (Стр. 68.) Заряд, равномерно распределенный по поверхности шара, можно рассматривать как предельный случай заряда объемной плотности, равномерно распределенного по бесконечно тонкому сферическому слою постоянной толщины. Когда движущаяся система S является таким шаром, неподвижная система S', о которой мы говорили в предыдущем примечании, представляет собой удлиненный эллипсоид вращения, полуось которого a и экваториальный радиус b имеют значения

$$a=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}R, \qquad b=R; \qquad (23)$$

этот эллипсоид несет на себе заряд, равномерно распределенный по бесконечно тонкому слою, ограниченному этим эллипсоидом и другим, который ему подобен и подобно ему расположен относительно центра. Полный заряд следует принять равным e, заряду шара, так как мы предположили, что соответствующие элементы объема в S и S' несут одинаковые заряды.

Поместим начало координат в центр эллипсоида; пусть OX' совпадает с осью вращения и пусть x', y, z будут координаты некоторой внешней точки P. Если под λ мы будем понимать положительный корень уравнения

$$\frac{x'^2}{p^2+\lambda}+\frac{y^2+z^2}{\lambda}=1, \qquad (24)$$

где

$$p^2=a^2-b^2,$$

то потенциал в точке P равен

$$\varphi'=\frac{e}{8\pi p}\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p}.$$

Следует заметить, что для данного значения λ уравнение (24) является уравнением эллипсоида вращения, конфокального с данным; поэтому эквипотенциальные поверхности являются именно такими эллипсоидами. Сама заряженная поверхность характеризуется значением $\lambda=b^2$; λ растет от этого значения до ∞

при перемещении наружу. На заряженной поверхности потенциал равен

$$\varphi_0' = \frac{e}{8\pi p} \log \frac{a+p}{a-p}$$

и имеет то же значение во всех внутренних точках. Интегралы, которые мы получили в предыдущем примечании, нужно поэтому распространять только на внешнюю часть пространства.

При наших вычислениях мы воспользуемся теоремой, что интеграл

$$\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS'$$

равен электрической энергии $\frac{1}{2}e\varphi_0'$ заряженного эллипсоида. Отсюда, полагая

$$J_1 = \int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 dS', \qquad J_2 = \int\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2\right\}dS',$$

получаем:

$$J_1 + J_2 = \frac{e^2}{8\pi p}\log\frac{a+p}{a-p}. \tag{25}$$

Чтобы найти интеграл J_1, мы разделим плоскость $X'OY$ на бесконечно малые участки, проведя систему эллипсов

$$\frac{x'^2}{p^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}=1 \tag{26}$$

и систему гипербол

$$\frac{x'^2}{p^2-\mu}-\frac{y^2}{\mu}=1, \tag{27}$$

где μ имеет значения от нуля до p^2. Ограничиваясь той частью плоскости, где x' и y имеют положительные значения, получаем для координат точки пересечения эллипсов и гипербол (26)—(27)

$$x' = \frac{1}{p}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}, \qquad y = \frac{1}{p}\sqrt{\lambda\mu}; \tag{28}$$

площадь элемента, ограниченного эллипсами λ, $\lambda+d\lambda$ и гиперболами μ, $\mu+d\mu$, при этом оказывается равной

$$d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial\lambda}, & \frac{\partial x'}{\partial\mu} \\ \frac{\partial y}{\partial\lambda}, & \frac{\partial y}{\partial\mu} \end{vmatrix} d\lambda\, d\mu = \frac{1}{4}\,\frac{\lambda+\mu}{\sqrt{\lambda\mu(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}}\,d\lambda\, d\mu.$$

Примем теперь за величину dS' в нашем интеграле элемент того тороида, который получается при вращении этого элемента плоскости вокруг OX', так что

$$dS' = 2\pi y\, d\sigma = \frac{\pi(\lambda+\mu)}{2p\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}}\, d\lambda\, d\mu.$$

Так как φ' зависит только от λ, имеем:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x'};$$

величина последнего множителя в этом выражении имеет для всех частей тороида значение, выводимое из (26) при постоянном y:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'} = \frac{2\lambda^2(p^2+\lambda)\,x'}{\lambda^2 x'^2 + (p^2+\lambda)^2 y^2},$$

или в силу (28):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x'} = \frac{2\lambda}{(\lambda+\mu)\,p}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}.$$

Из этих результатов следует, что для нахождения J_1 мы должны проинтегрировать выражение

$$\frac{2\pi\lambda^2}{p^3(\lambda+\mu)}\sqrt{(p^2+\lambda)(p^2-\mu)}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}\right)^2 d\lambda\, d\mu.$$

Если мы примем за пределы μ величины нуль и p^2, а b^2 и ∞ — за пределы λ, мы найдем ту часть J_1, которая вызывается полем в положительной части плоскости yz; мы должны поэтому этот результат удвоить.

На основании того, что

$$\int\frac{\sqrt{p^2-\mu}}{\lambda+\mu}\,d\mu = 2\sqrt{p^2-\mu} - \sqrt{p^2+\lambda}\,\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+\sqrt{p^2-\mu}}{\sqrt{p^2+\lambda}-\sqrt{p^2-\mu}},$$

$$\int_0^{p^2}\frac{\sqrt{p^2-\mu}}{\lambda+\mu}\,d\mu = -2p + \sqrt{p^2+\lambda}\,\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p},$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{d\lambda}\right)^2 = \frac{e^2}{64\pi^2\lambda^2(p^2+\lambda)},$$

окончательный результат может быть представлен так:

$$J_1 = \frac{e^2}{16\pi p^3}\int_{b^2}^{\infty}\left\{\log\frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p} - \frac{2p}{\sqrt{p^2+\lambda}}\right\}d\lambda.$$

Неопределенный интеграл равен

$$\lambda \log \frac{\sqrt{p^2+\lambda}+p}{\sqrt{p^2+\lambda}-p}-2p\sqrt{p^2+\lambda},$$

и так как это выражение для $\lambda=\infty$ пропадает, а для $\lambda=b^2$ равно

$$b^2 \log \frac{a+p}{a-p}-2ap,$$

интеграл J_1 получает значение

$$J_1=\frac{e^2}{16\pi p^3}\left\{2ap-b^2\log\frac{a+p}{a-p}\right\}.$$

В рассматриваемой задаче a и b даются (*23*), так что

$$p=R\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$J_1=\frac{e^2}{16\pi R\beta^3}(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}\left[2\beta(1-\beta^2)^{-1}-\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right],$$

$$J_2=\frac{e^2}{16\pi R\beta^3}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\left[-2\beta+(1+\beta^2)\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right].$$

Подставляя эти величины в формулы (*20*), (*21*) и (*22*), получаем уравнения (61), (62) и (63).

16. (Стр. 70.) Так как электромагнитное количество движения $\boldsymbol{G}$ и скорость $\boldsymbol{w}$ имеют одинаковое направление, мы можем написать

$$\boldsymbol{G}=\alpha\boldsymbol{w},$$

где α есть отношение между значениями $|\boldsymbol{G}|$ и $|\boldsymbol{w}|$. Это отношение есть функция $|\boldsymbol{w}|$.

Дифференцируя по t, получаем:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=-\alpha\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{w}=-\alpha\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}-\frac{d\alpha}{d|\boldsymbol{w}|}\frac{d|\boldsymbol{w}|}{dt}\boldsymbol{w}.$$

Но

$$\boldsymbol{w}\frac{d|\boldsymbol{w}|}{dt}=|\boldsymbol{w}|\boldsymbol{j}', \qquad \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'',$$

так что

$$\boldsymbol{F}=-\alpha(\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'')-|\boldsymbol{w}|\frac{d\alpha}{d|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}'=-\frac{d}{d|\boldsymbol{w}|}\{\alpha|\boldsymbol{w}|\}\boldsymbol{j}'-\alpha\boldsymbol{j}''=$$

$$=-\frac{d|\boldsymbol{G}|}{d|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}'-\frac{|\boldsymbol{G}|}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{j}''=-m'\boldsymbol{j}'-m''\boldsymbol{j}'',$$

16.* (Стр. 78.) [1915] В последнее время были проделаны весьма интересные опыты, в особенности Эренгафтом [1]) и Милликеном [2]); благодаря этим опытам оказалось возможным измерить малые электрические заряды на мельчайших металлических частичках или каплях жидкости.

Известно, что скорость v, которую приобретает небольшое тело при своем падении через газ, определяется тем правилом, что сопротивление движению в конце концов становится равным весу частички G. Для медленного движения сопротивление пропорционально скорости, так что мы можем написать:

$$G = \mu v,$$

где μ есть коэффициент, который для сферической частички может быть выражен через ее радиус и коэффициент вязкости окружающего газа.

Подобное же уравнение имеет место, когда на частичку действует вертикальная электрическая сила E. Пусть e — заряд частички и пусть сила E имеет положительное значение, когда она направлена вниз. Тогда скорость падения будет определена выражением

$$G + eE = \mu v'.$$

Если eE отрицательно, эта скорость может быть сделана много меньше, чем v.

Ясно, что, измеряя v и v', мы можем определить отношение между eE и G; отсюда можно узнать e, если известны E и G.

Милликен получил для e такие значения, которые можно рассматривать как кратные некоторого «элементарного» заряда. Эренгафт, напротив, пришел к заключению, что в некоторых случаях заряды не являются кратными какого-либо элементарного заряда и могут даже быть меньше его.

Этот вопрос нельзя считать разъясненным окончательно [30].

17. (Стр. 84.) Возьмем простой случай бесконечно длинного круглого металлического цилиндра радиуса a_1, окруженного коаксиальной трубой с внутренним радиусом a_2. Когда ток i проходит вдоль внутреннего стержня и возвращается по наружной трубе, магнитная энергия, поскольку она содержится в пространстве между двумя проводниками, равна

$$\frac{i^2}{4\pi c^2}\log\frac{a_2}{a_1}$$

---

1) F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungsber. (IIa), **123** (1914), стр. 53.

2) R. A. Millikan, Phys. Zeitschr. **11** (1910), стр. 1097.

на единицу длины; это выражение — порядка величины

$$\frac{i^2}{4\pi c^2}, \tag{29}$$

если $\frac{a_2}{a_1}$ — не слишком большое число.

С другой стороны, если эти два проводника содержат на единицу длины N_1 и N_2 электронов, движущихся со скоростями v_1 и v_2, сумма тех количеств энергии, которые соответствовали бы движению каждого из них в отдельности, будет:

$$\frac{1}{2}m(N_1v_1^2+N_2v_2^2)=\frac{e^2}{12\pi Rc^2}(N_1v_1^2+N_2v_2^2),$$

если допустить, что массы частичек имеют исключительно электромагнитное происхождение.

Так как ток равен

$$i=eN_1v_1=eN_2v_2,$$

мы можем наше последнее выражение написать так:

$$\frac{i^2}{12\pi Rc^3}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right). \tag{30}$$

В опытах по самоиндукции никогда не было обнаружено эффекта, которого нельзя было бы объяснить обычными формулами. Поэтому в обычных случаях значение (*30*) должно быть много меньше, чем (*29*), откуда можно заключить, что N_1R и N_2R являются большими числами.

18. (Стр. 85.) В нижеследующем доказательстве формулы (76) мы ограничимся случаем электрона, который имеет прямолинейное поступательное движение параллельно OX с переменной скоростью v. Пусть Q будет определенная точка этого электрона и P — точка эфира, находящаяся внутри объема, занятого частичкой в тот момент времени t, для которого мы хотим вычислить силу. Пусть x', y', z' будут координаты точки P и x, y, z — координаты точки Q в момент времени t.

Среди ряда последовательных положений, занимаемых Q, есть одно такое Q_e, что действие, исходящее из него в тот момент, как Q пришло в эту точку, и распространяющееся наружу со скоростью света c, придет в точку P в момент времени t. Если мы обозначим через $t-\tau$ время, в которое достигается это «эффективное» положение, как мы его можем назвать, мы получим для координат Q_e:

$$x_e=x-v\tau+\frac{1}{2}\dot{v}\tau^2-\frac{1}{6}\ddot{v}\tau^3+\ldots, \tag{31}$$

$$y_e=y,\quad z_e=z,$$

и, так как Q_eP должно быть равно $c\tau$,

$$(x_e - x')^2 + (y_e - y')^2 + (z_e - z')^2 = c^2\tau^2. \qquad (32)$$

При помощи этих соотношений x_e и τ могут быть выражены через x, y, z. Полагая, что $QP = r$, так что

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

и считая v, $\dot{v}$, $\ddot{v}$, ... настолько малыми, что можно пренебречь членами, содержащими квадраты этих величин, мы можем подставить в (31) $\tau = \frac{r}{c}$, вследствие чего получаем:

$$x_e = x - \frac{v}{c} r + \frac{\dot{v}}{2c^2} r^2 - \frac{\ddot{v}}{6c^3} r^3 + \ldots \qquad (33)$$

Подставляя это значение в (32), имеем:

$$\tau = \frac{r}{c} - \frac{v}{c^2}(x - x') + \frac{\dot{v}}{2c^3}(x - x') r - \frac{\ddot{v}}{6c^4}(x - x') r^2 - \ldots$$

Из (33) следует, что точки Q, которые в момент времени t расположены в элементе $dx\,dy\,dz$, имеют эффективное положение в элементе $dx_e\,dy\,dz$, где

$$dx_e = \left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{2c^3}(x - x') r + \ldots\right\} dx.$$

Следовательно, каждому элементу dS электрона в том положении, которое он занимает в момент времени t, соответствует элемент объема

$$dS_e = \left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{2c^3}(x - x') r + \ldots\right\} dS,$$

в котором плотность ρ в момент времени $t - \tau$ была равна той плотности, которая существовала в элементе dS в момент t, причем скорость этого заряда

$$v - \dot{v}\tau + \frac{1}{2}\ddot{v}\tau^2 - \ldots,$$

или, с достаточной степенью приближения,

$$v - \frac{\dot{v}}{c} r + \frac{\ddot{v}}{2c^2} r^2 - \ldots \qquad (34)$$

Расстояние элемента dS_e от точки P дается выражением

$$c\tau = r\left\{1 - \frac{v}{c}\frac{x - x'}{r} + \frac{\dot{v}}{2c^2}(x - x') - \frac{\ddot{v}}{6c^3}(x - x') r + \ldots\right\}.$$

так что частное $\frac{dS}{r}$ в уравнении (35) нужно заменить через

$$\frac{dS_e}{c\tau}=\left[1+\frac{\dot v}{2c^2}(x-x')-\frac{\ddot v}{3c^3}(x-x')r+\ldots\right]\frac{dS}{r}.$$

Множитель в квадратных скобках можно опустить в выражении для первой составляющей вектор-потенциала; здесь, впрочем, мы должны заменить v выражением (*34*). Таким путем находим:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int\rho\left[1+\frac{\dot v}{2c^2}(x-x')-\frac{\ddot v}{3c^3}(x-x')r+\ldots\right]\frac{dS}{r},$$

$$a_x=\frac{1}{4\pi c}\int\rho\left(v-\frac{\dot v}{c}r+\frac{\ddot v}{2c^2}r^2-\ldots\right)\frac{dS}{r},$$

причем интегрирование производится по всему объему, занимаемому электроном в момент времени t.

Перейдем теперь к вычислению электрической силы f в точке P. Следует прежде всего заметить, что мы можем обойтись без рассмотрения члена $\frac{1}{c}[vh]$ в (23), так как магнитная сила h сама пропорциональна v. Отсюда, по (33), составляющая f по оси x, которой мы можем ограничиться, равна

$$f_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x'}-\frac{1}{c}\dot a_x.$$

Так как дифференцирование может быть произведено под знаком интеграла, получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{1}{4\pi}\int\rho\frac{x-x'}{r^3}dS+\frac{\dot v}{8\pi c^2}\int\rho\left\{-\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\}dS+$$
$$+\frac{\ddot v}{12\pi c^3}\int\rho\,dS+\ldots,$$

$$\dot a_x=\frac{\dot v}{4\pi c}\int\frac{\rho}{r}dS-\frac{\ddot v}{4\pi c^2}\int\rho\,dS+\ldots,$$

и, так как $\int\rho\,dS=e$,

$$f_x=\frac{1}{4\pi}\int\rho\frac{x'-x}{r^3}dS-\frac{\dot v}{8\pi c^2}\int\rho\left\{\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\}dS+\frac{\ddot v}{6\pi c^3}e. \quad (35)$$

Чтобы найти результирующую силу, мы должны умножить это выражение на $\rho'\,dS'$, где dS' есть элемент объема в точке P, и ρ' — плотность в этой точке; далее, мы должны проинтегрировать это выражение по dS'. Первый член в (35) нам дает нуль, а последний

$$\frac{e^2\ddot{v}}{6\pi c^3}$$

в согласии с выражением (76); эти результаты не зависят от формы электрона и от распределения его заряда. Что касается среднего члена в (35), он приводит к выражению для силы

$$-\frac{\dot{v}}{8\pi c^2}\int \rho'\, dS' \int \rho\left\{\frac{1}{r}+\frac{(x-x')^2}{r^3}\right\} dS.$$

В случае сферического электрона, заряд которого распределен симметрично вокруг центра, мы можем вместо $(x-x')^2$ написать $\frac{1}{3}r^2$ и таким образом получим:

$$-\frac{\dot{v}}{6\pi c^2}\int \rho'\, dS' \int \frac{\rho}{r}\, dS. \tag{36}$$

Если заряд распределен по поверхности, интеграл $\int \frac{\rho}{r}\, dS$ имеет значение $\frac{e}{R}$ во всех точках, где плотность ρ' отлична от нуля. Поэтому (36) превращается в

$$-\frac{e\dot{v}}{6\pi Rc^2}\int \rho'\, dS' = -\frac{e^2\dot{v}}{6\pi Rc^2}$$

в согласии с выражением (72).

Вышеприведенные выкладки подтверждают также и то, что было сказано в § 37 про выражение результирующей силы в виде ряда, каждый член которого по отношению к предыдущему имеет порядок величины $\frac{R}{c\tau}$.

19. (Стр. 87.) Сосредоточим наше внимание на эффективном положении M (см. примечание **18**) определенной точки электрона, например его центра. Если M достигает этого положения в некоторый момент времени t_0, предшествующий моменту времени t, для которого мы хотим вычислить значение потенциала в отдаленной точке P, и если расстояние MP обозначить через r, мы имеем:

$$r = c\,(t - t_0). \tag{37}$$

Помещая M в начале координат, будем под x_P, y_P, z_P понимать координаты точки P.

Будем теперь искать эффективное положение (x_e, y_e, z_e) точки электрона, координаты которой в момент времени t_0 равны x, y, z. Это эффективное положение M' будет достигнуто в момент времени t_e, слегка отличающийся от t_0; если мы положим:

$$t_e = t_0 + \tau,$$

интервал τ будет весьма мал. Координаты x, y, z тоже малы; мы достигнем достаточного приближения, если в наших формулах будем пренебрегать всеми членами второго порядка малости по отношению к этим четырем величинам.

Условие, чтобы M' было эффективным положением рассматриваемой точки, выражается так:

$$M'P = c\,(t - t_e) = c\,(t - t_0 - \tau). \tag{38}$$

Но, если v есть скорость электрона в момент времени t_0, мы можем написать для координат точки M':

$$x_e = x + v_x\tau,\quad y_e = y + v_y\tau,\quad z_e = z + v_z\tau, \tag{39}$$

так что для (38) получаем:

$$(x_P - x - v_x\tau)^2 + (y_P - y - v_y\tau)^2 + (z_P - z - v_z\tau)^2 = c^2\,(t - t_0 - \tau)^2,$$

или в силу (37) и по той причине, что

$$\frac{x_P v_x + y_P v_y + z_P v_z}{r}$$

есть составляющая v_r вектора v по направлению MP,

$$2\,(x_P x + y_P y + z_P z) + 2v_r r\tau = 2cr\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{x_P x + y_P y + z_P z}{(c - v_r)\,r}. \tag{40}$$

Эффективные положения точек электрона, которые в момент времени t_0 лежат в элементе dS, находятся внутри элемента объема dS_e, величина которого равна произведению dS на функциональный определитель величин (39) по x, y, z. Этот определитель равен

$$1 + v_x\frac{\partial\tau}{\partial x} + v_y\frac{\partial\tau}{\partial y} + v_z\frac{\partial\tau}{\partial z},$$

или в силу (40)

$$1 + \frac{v_x x_P + v_y y_P + v_z z_P}{(c - v_r)\,r} = 1 + \frac{v_r}{c - v_r} = \frac{c}{c - v_r}.$$

Что касается расстояния r в знаменателях (35) и (36), мы можем для него принять длину MP; в последних двух формулах мы можем понимать под $\boldsymbol{v}$ скорость электрона в момент времени t_0. Вследствие этого общие уравнения приобретают вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r}\int \rho\, dS_e, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}}{4\pi c r}\int \rho\, dS_e;$$

это эквивалентно (79), так как

$$\int \rho\, dS_e = \frac{c}{c-\boldsymbol{v}_r}\int \rho\, dS = \frac{ce}{c-\boldsymbol{v}_r},$$

причем ρ есть значение плотности в момент времени t_0 в элементе dS.

20. (Стр. 88.) Так как поле определяется производными потенциалов, мы должны сначала определить эти потенциалы. При этом мы обозначим через x, y, z координаты удаленной точки P, для которой мы хотим знать значения $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$.

Если мы изменим на dt время t, для которого мы ищем φ и $\boldsymbol{a}$, оставляя x, y, z постоянными, эффективным положением электрона придется называть уже другое положение. Наряду с этим новое эффективное положение будет достигнуто в момент времени, слегка отличный от t_0; оно будет находиться от P на расстоянии, ином, чем r, причем эти два изменения связаны друг с другом формулой

$$dr = -\boldsymbol{v}_r\, dt_0;$$

смысл $\boldsymbol{v}_r$ был разъяснен в § 38.

Дифференцируя уравнение (37), получаем:

$$-\boldsymbol{v}_r\, dt_0 = c\,(dt - dt_0),$$

$$dt_0 = \frac{c}{c-\boldsymbol{v}_r}\, dt.$$

Отсюда видно, что при этом изменении переменных значение некоторой величины ψ, соответствующей моменту времени t_0, изменяется на

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] dt_0 = \frac{c}{c-\boldsymbol{v}_r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] dt,$$

так что мы можем написать:

$$\frac{d\,[\psi]}{dt} = \frac{c}{c-\boldsymbol{v}_r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right],$$

причем квадратные скобки имеют тот смысл, который был им придан раньше.

Применяя эти формулы к выражениям (79), мы предположим, что расстояние $r = MR$ значительно больше размеров электрона, так что в окончательных формулах для d и h мы можем пренебречь всеми членами порядка $\frac{1}{r^2}$. Поэтому мы можем принять за постоянные величины три косинуса в уравнении

$$v_r = v_x \cos(r, x) + v_y \cos(r, y) + v_z \cos(r, z);$$

в самом деле, их производные — порядка $\frac{1}{r}$, а в φ уже входит множитель $\frac{1}{r}$. Следовательно,

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = j_x \cos(r, x) + j_y \cos(r, y) + j_z \cos(r, z) = j_r,$$

и, так как множитель $\frac{1}{r}$ в φ можно принять за постоянную,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c\left[r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2\right]} \frac{d[v_r]}{dt} = \frac{e}{4\pi c\left[r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2\right]} [j_r].$$

Если, наконец, мы отбросим все члены второго порядка малости по отношению к скорости и ускорению электрона, мы придем к дальнейшему упрощению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c r} [j_r].$$

Подобным же образом можно найти из второго уравнения (79)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c r} [j].$$

Нам предстоит теперь вычислить производные по координатам. Рассмотрим сначала бесконечно малое перемещение P в некотором направлении h под прямым углом к MP. Так как расстояние MP при этом не изменится, а t все время остается постоянным, то как момент времени t_0, так и эффективное положение M тоже остаются неизменными. Так как мы опять можем пренебречь изменением направления r, мы приходим к заключению, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial h} = 0.$$

Производные по направлению r легко найти следующим способом. Если P смещается на отрезок dr вдоль продолженного направления MP, t увеличивается в то же самое время на величину $dt = \frac{dr}{c}$, причем эффективное положение электрона и время t_0 остаются без изменения, а так как при этом знаменатель r не подлежит дифференцированию, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dr + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dr}{c} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t}.$$

Комбинируя этот результат с предыдущим, получаем для любого направления k, как для скалярного, так и для векторного потенциала,

$$\frac{\partial}{\partial k} = \cos(r, k)\,\frac{\partial}{\partial r}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(r, x)\,\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos(r, y)\,\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos(r, z)\,\frac{\partial}{\partial r}.$$

При помощи этих соотношений можно без труда получить формулы (80) и (81).

21. (Стр. 88.) В формулах (80) каждая составляющая $\boldsymbol{d}$ представлена как разность двух членов. Члены с отрицательным знаком можно рассматривать как составляющие вектора

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r}\,\dot{\boldsymbol{j}},$$

а члены с положительным знаком — как составляющие вектора

$$\frac{e}{4\pi c^2 r}\,(\dot{j}_r);$$

мы пользуемся здесь скобками для обозначения того, что составляющая $\dot{j}_r$ сама должна быть рассматриваема как вектор. Придавая такой же смысл $(\dot{j}_p)$, так что

$$\dot{\boldsymbol{j}} = (\dot{j}_r) + (\dot{j}_p),$$

получаем:

$$\boldsymbol{d} = \frac{e}{4\pi c^2 r}\{-\dot{\boldsymbol{j}} + (\dot{j}_r)\} = -\frac{e}{4\pi c^2 r}\,(\dot{j}_p),$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{e}{4\pi c^2 r}\,[\dot{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{k}] = -[\boldsymbol{d}\boldsymbol{k}].$$

Магнитная сила поэтому оказывается перпендикулярной как $\boldsymbol{d}$, так и $\boldsymbol{k}$, а направление ее таково, что поток энергии $c\,[\boldsymbol{d}\boldsymbol{h}]$ направлен вдоль по $\boldsymbol{k}$ от электрона. Интенсивность потока равна $c\,|\boldsymbol{d}|\,|\boldsymbol{h}| = c\boldsymbol{d}^2$.

21*. (Стр. 89.) [1915] Опыты по диффракции рентгеновых лучей в кристаллах, впервые произведенные Лауэ, Книппингом и Фридрихом [1]) и после У. Г. и У. Л. Брэггами [2]), показали, что эти лучи по свойствам гораздо ближе к световым лучам, чем это принималось раньше, и единственное различие заключается в длине волны, которая для рентгеновых лучей — порядка 10^{-9} *см*. Часть рентгеновского излучения состоит из однородных лучей, характеризующих металл антикатода. Другая часть распределена равномерно по некоторому интервалу частот, и ее можно сравнить с белым светом [31].

22. (Стр. 91.) Интересным применением формулы сопротивления является вычисление затухания колебаний электрона, к которому мы сейчас и перейдем. Предположим, что на частичку действует упругая сила $-fq$, где q есть смещение из положения равновесия, а f — положительная постоянная. Движение в направлении OX определяется уравнением

$$m\ddot{q}_x = -fq_x + \frac{e^2}{6\pi c^3}\dddot{q}_x,$$

частное решение которого можно найти, взяв для q_x действительную часть

$$\varepsilon^{\alpha t},$$

где ε есть основание натуральных логарифмов, а α — комплексная постоянная, определяемая условием

$$m\alpha^2 = -f + \frac{e^2}{6\pi c^3}\alpha^3. \tag{41}$$

Если этот последний член оказывает только очень малое влияние, мы можем заменить в нем α значением, получаемым из уравнения

$$m\alpha^2 = -f.$$

Отсюда, полагая

$$\frac{f}{m} = n^2,$$

имеем:

$$\alpha = in - \frac{e^2n^2}{12\pi mc^3},$$

и, вводя две постоянные a и p,

$$q_x = a\varepsilon^{-\frac{e^2n^2}{12\pi mc^3}t}\cos(nt+p).$$

---

1) Friedrich, Knipping u. Laue, Ann. Phys. **41** (1913), стр. 971.

2) W. H. and W. L. Bragg, *X*-Rays and crystal structure, London, 1915.

Эта формула показывает, что за промежуток времени, равный

$$\tau = \frac{12\pi mc^3}{e^2 n^2},$$

амплитуда падает до $\frac{1}{e}$ своего первоначального значения.

Принимая за m значение (72) и обозначая через T период колебаний $\frac{2\pi}{n}$, а через λ — длину волны, получим:

$$\tau = \frac{\lambda}{2\pi^2 R} T.$$

Если мы подставим для R значение из § 35, получим для желтого света ($\lambda = 0{,}00006$ *см*):

$$\tau = 2 \cdot 10^7 T,$$

откуда видно, что затухание весьма мало и что мы были правы, когда говорили о малой величине последнего члена в (*41*).

Этот вопрос о затухании колебаний представляется важным потому, что чем меньше затухание, тем ближе свойства излучения к свойствам действительно однородного света. Мы можем составить себе представление о степени однородности, производя опыты над видимостью интерференционных полос для разных значений разности фаз; в самом деле, если эта разность постепенно возрастает, полосы могут оставаться видимыми в течение долгого времени только в том случае, если свет обладает высокой степенью однородности. Таким образом, малое затухание оказывается связанным с хорошей видимостью полос; это заключение легко понять, если принять во внимание, что интерференция становится нечеткой при большой разнице в интенсивности двух интерферирующих лучей. Это должно иметь место во всех тех случаях, когда амплитуда колебаний источника света заметно уменьшается за промежуток времени между моментами испускания интерферирующих лучей.

Вышеприведенные результаты удовлетворительно согласуются с опытами Луммера и Герке, которые получали при благоприятных условиях интерференцию при разности фаз до двух миллионов периодов. Подобные же результаты были получены также Бюиссоном и Фабри, которые изучали излучение гелия, криптона и неона в вакуумных трубках.

23. (Стр. 95.) При каждом последовательном дифференцировании по одной из координат выражения для $\frac{[p_x]}{r}$ мы должны дифференцировать как тригонометрическую функцию, так и стоящий перед ней множитель. Эти операции вводят множитель порядка $\frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ (если λ обозначает длину волны) и $\frac{1}{r}$. Но, так как r много больше, чем λ, мы можем ограничиться дифференцированием тригонометрической функции.

Так, например,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[p_x]}{r} = -\frac{nb}{4\pi c r}\cdot\frac{x}{r}\sin\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},$$

$$a_x = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[p_x]}{r} = -\frac{nb}{4\pi c r}\sin\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\},$$

$$d_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t} = \frac{n^2 b}{4\pi c^2 r}\left(-\frac{x^2}{r^2}+1\right)\cos\left\{n\left(t-\frac{r}{c}\right)+p\right\}.$$

Легко проверить при помощи выражений (95), что $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ направлены под прямым углом как друг к другу, так и к прямой r и что амплитуды их одинаковы. Формулы представляют систему плоско-поляризованных волн, амплитуда которых изменяется обратно пропорционально расстоянию r при передвижении вдоль прямой, проведенной из излучающей частички. Поток энергии изменяется пропорционально $\frac{1}{r^2}$.

24. (Стр. 98.) Рассматривая любую из зависимых переменных, например ψ, сначала как функцию x, y, z, t, а затем как функцию x', y', z', t', получаем следующие соотношения, вытекающие из (96) и из выражения

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(w_x x + w_y y + w_z z),$$

которым можно заменить (97), если пренебречь квадратом $\frac{w}{c}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'} - \frac{w_x}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y'} - \frac{w_y}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial z'} - \frac{w_z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t'} - w_x\frac{\partial\psi}{\partial x'} - w_y\frac{\partial\psi}{\partial y'} - w_z\frac{\partial\psi}{\partial z'}.$$

Благодаря этому уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial d_x}{\partial x'} + \frac{\partial d_y}{\partial y'} + \frac{\partial d_z}{\partial z'} - \frac{1}{c^2}\left[w_x\frac{\partial d_x}{\partial t'} + w_y\frac{\partial d_y}{\partial t'} + w_z\frac{\partial d_z}{\partial t'}\right] = \rho.$$

В членах с множителями w_x, w_y, w_z нам не нужно различать между производными по t', x', y', z' и по t, x, y, z, Отсюда и силу (19) мы можем написать для членов, заключенных в квадратные скобки:

$$cw_x\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)+cw_y\left(\frac{\partial h_x}{\partial z'}-\frac{\partial h_z}{\partial x'}\right)+cw_z\left(\frac{\partial h_y}{\partial x'}-\frac{\partial h_x}{\partial y'}\right)-(wv)\,\rho.$$

В последнем члене v можно заменить через u, так как мы все время пренебрегаем квадратом w; мы сразу придем к уравнению (100), если будем помнить, что

$$d_x+\frac{1}{c}(w_yh_z-w_zh_y)=d'_x \text{ и т. д.}$$

Преобразуем теперь первое из трех уравнений, на которые распадается (19), а именно:

$$\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\left(\rho v_x+\frac{\partial d_x}{\partial t}\right).$$

Оно принимает вид

$$\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{w_y}{c^2}\frac{\partial h_z}{\partial t'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}+\frac{w_z}{c^2}\frac{\partial h_y}{\partial t'}=$$

$$=\frac{1}{c}\left(\rho w_x+\rho u_x+\frac{\partial d_x}{\partial t'}-w_x\frac{\partial d_x}{\partial x'}-w_y\frac{\partial d_x}{\partial y'}-w_z\frac{\partial d_x}{\partial z'}\right),$$

или, если ρw_x заменить через

$$w_x\left(\frac{\partial d_x}{\partial x'}+\frac{\partial d_y}{\partial y'}+\frac{\partial d_z}{\partial z'}\right)$$

и переставить члены в другом порядке:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left\{h_z-\frac{1}{c}(w_xd_y-w_yd_x)\right\}-\frac{\partial}{\partial z'}\left\{h_y-\frac{1}{c}(w_zd_x-w_xd_z)\right\}=$$

$$=\frac{1}{c}\rho u_x+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{d_x+\frac{1}{c}(w_yh_z-w_zd_y)\right\}.$$

Это — первое из уравнений, заключающихся в (102).

25. (Стр. 98.) Заметим прежде всего, что потенциалы φ' и a' удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}=-\rho, \tag{42}$$

$$\Delta a'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a'}{\partial t'^2}=-\frac{1}{c}\rho u \tag{43}$$

(см. примечание 4), где Δ является теперь сокращенным обозначением для

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2};$$

потенциалы связаны друг с другом соотношением

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{w}\dot{\boldsymbol{a}}'). \tag{44}$$

Чтобы доказать последнюю формулу, мы будем исходить из выведенного в примечании 2 уравнения (5), которое можно выразить в новых переменных следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'}-\boldsymbol{w}_x\frac{\partial\rho}{\partial x'}-\boldsymbol{w}_y\frac{\partial\rho}{\partial y'}-\boldsymbol{w}_z\frac{\partial\rho}{\partial z'}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})-\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{w}\,\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t'}\right)=0,$$

или, если опять пренебречь квадратом $\boldsymbol{w}$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t'}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})-\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{w}\,\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t'}\right)=0. \tag{45}$$

Если в интеграле вида (104) или (105) множитель, на который умножается $\frac{1}{r}$, есть непрерывная функция местного времени t' и координат x', y', z' элемента dS, частные производные интеграла по t' или по координатам той точки, для которой он вычисляется, можно найти простым дифференцированием упомянутого множителя по t' или по x', y', z', причем производная опять берется для значения местного времени $t'-\frac{r}{c}$.

Согласно этому правилу

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t'}\right]dS,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}'=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})\right]dS,$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}'=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t'}\right]dS,$$

откуда заключаем, что

$$(\boldsymbol{w}\dot{\boldsymbol{a}}')=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}\left[\left(\boldsymbol{w}\,\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t'}\right)\right]dS.$$

В силу (45) эти выражения являются подтверждением уравнения (44); прямой подстановкой можно далее найти, что основные уравнения (100) — (103) удовлетворяются подстановкой (106) — (107) (см., впрочем, примечание 6). Так, например, мы имеем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{a}}' - \Delta\varphi' + \frac{1}{c} \Delta (\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}').$$

Но по (*44*)

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{a}}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{w}\ddot{\boldsymbol{a}}'),$$

так что предшествующее уравнение принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} - \Delta\varphi' - \frac{1}{c^3} (\boldsymbol{w}\ddot{\boldsymbol{a}}') + \frac{1}{c} \Delta (\boldsymbol{w}\boldsymbol{a}').$$

Два члена, содержащие $\boldsymbol{a}'$, равны

$$\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{w}\left\{\Delta\boldsymbol{a}' - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{a}}'\right\}\right),$$

и в силу (*42*) и (*43*) правая часть уравнения становится тождественной с уравнением (100).

Не составляет никакого труда проверить уравнения (101) и (103). Что касается уравнения (102), мы получаем из (107) (см. примечание 1):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}' = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}' - \Delta\boldsymbol{a}',$$

и, если воспользоваться уравнениями (*42*), (*43*) и (106),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h}' = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi}' + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} (\boldsymbol{w}\dot{\boldsymbol{a}}') + \frac{1}{c} \rho\boldsymbol{u} -$$
$$- \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{a}}' = \frac{1}{c} (\dot{\boldsymbol{d}}' + \rho\boldsymbol{u}).$$

26. (Стр. 99). Задачу можно свести к задаче определения поля уединенного движущегося электрона (см. §§ 38, 41, 42 и примечание **19**). Пусть P будет удаленная точка, для которой мы должны вычислить потенциалы φ' и $\boldsymbol{a}'$ в момент t' местного времени, а M — определенная точка электрона, например его центр, в ее эффективном положении, так что если t'_0 есть время (местное время для M), когда эта точка приходит в это эффективное положение, а r — длина отрезка MP,

$$r = c\,(t' - t'_0). \qquad (46)$$

Помещая начало координат в точке M, обозначим координаты точки P через x'_P, y'_P, z'_P, координаты некоторой точки электрона Q в момент времени t'_0 (местное время M) через x', y', z', координаты эффективного положения Q_e этой точки через x'_e, y'_e, z'_e; через $t'_0+\tau$ (местное время M) обозначим время, в которое это положение достигается, так что, по (97), местное время самой точки Q_e будет выражаться следующим образом:

$$t'_e = t'_0 + \tau - \frac{1}{c^2}(w_x x'_e + w_y y'_e + w_z z'_e).$$

Условие, чтобы Q_e было эффективным положением рассматриваемой точки, выражается уравнением, подобным (*46*), а именно:

$$Q_e P = c\,(t' - t'_e);$$

возводя обе части в квадрат, имеем:

$$(x'_P - x'_e)^2 + (y'_P - y'_e)^2 + (z'_P - z'_e)^2 =$$

$$= c^2 (t' - t'_0 - \tau)^2 + 2\,(t' - t'_0 - \tau)\,(w_x x'_e + w_y y'_e + w_z z'_e).$$

Так как промежуток времени τ весьма мал, мы можем написать:

$$x'_e = x' + u_x \tau,\quad y'_e = y' + u_y \tau,\quad z'_e = z' + u_z \tau,$$

откуда, если пренебречь членами второго порядка по отношению к x', y', z', τ и воспользоваться (*46*), имеем:

$$-(x'_P x' + y'_P y' + z'_P z') - r u_r \tau =$$

$$= -rc\tau + \frac{r}{c}(w_x x' + w_y y' + w_z z') + \frac{r}{c}(wu)\,\tau,$$

$$\tau = \frac{(x'_P x' + y'_P y' + z'_P z') + \frac{r}{c}(w_x x' + w_y y' + w_z z')}{r\,(c - u_r) - \frac{r}{c}(wu)}. \qquad (47)$$

Теперь u_r обозначает составляющую u по направлению MP, причем произведение ru_r заменяет собой выражение $x'_P u_x + y'_P u_y + z'_P u_z$.

Здесь мы опять должны различать между элементом электрона dS в его положении в момент времени t'_0 (местное время M) и элементом dS_e, в котором содержатся эффективные положения различных точек dS, причем отношение величин этих элементов дается функциональным определителем x'_e, y'_e, z'_e по отношению к x', y', z', т. е. посредством выражения

$$1 + u_x \frac{\partial\tau}{\partial x'} + u_y \frac{\partial\tau}{\partial y'} + u_z \frac{\partial\tau}{\partial z'}.$$

Мы оставим только члены первого порядка по отношению к u_x, u_y, u_z. При этом мы можем пренебречь в выражениях $\frac{\partial\tau}{\partial x'}$, $\frac{\partial\tau}{\partial y'}$, $\frac{\partial\tau}{\partial z'}$ членами, содержащими эти скорости, так что на основании (*47*) получаем для определителя:

$$1 + \frac{1}{cr}\left\{u_x\left(x'_P + \frac{rw_x}{c}\right) + u_y\left(y'_P + \frac{rw_y}{c}\right) + u_z\left(z'_P + \frac{rw_z}{c}\right)\right\} =$$

$$= 1 + \frac{u_r}{c} + \frac{1}{c^2}(uw).$$

В конце концов мы получаем следующие уравнения, подобные тем, которые были получены в примечании 19:

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi r}\left\{1 + \frac{[u_r]}{c} + \frac{1}{c^2}[(uw)]\right\},$$

$$a' = \frac{e\,[u]}{4\pi c r}. \qquad (48)$$

Если теперь положить:

$$\varphi' - \frac{1}{c}(wa') = (\varphi'),$$

получим:

$$(\varphi') = \frac{c}{4\pi r}\left\{1 + \frac{[u_r]}{c}\right\}, \qquad (49)$$

и в силу (106)

$$d' = -\frac{1}{c}\dot{a}' - \operatorname{grad}(\varphi'). \qquad (50)$$

Сравнивая формулы (*49*), (*48*), (*50*) и (107) с (79), (33) и (34) и помня, что при весьма малом v множитель $1 - \frac{v_r}{c}$ можно опустить во втором из уравнений (79) и заменить через $1 + \frac{v_r}{c}$ в числителе первого, мы видим, что все эти уравнения имеют совершенно одинаковую форму. Поэтому, если мы говорим о соответственных состояниях в том случае, когда зависимость d', h' от x', y', z', t' в движущейся системе имеет тот же вид, что зависимость d, h от x, y, z, t в неподвижной системе, мы можем вывести следующее заключение: поле, вызываемое в удаленных точках движущейся системы электроном с координатами x', y', z', которые являются некоторыми функциями t' (местного времени, относящегося к мгновенному положению электрона), соответствует полю, которое вызывается в системе, не обладающей поступательным движением, таким же электроном, координаты которого x, y, z являются такими же функциями t.

Конечно, эту теорему можно распространить на любое число электронов, так что мы можем применить ее к поляризованной частичке. Мы примем, что эта частичка настолько мала, что можно пренебречь различиями местного времени в ее различных точках. Тогда с одинаковым правом можно сказать, что координаты x', y', z' электрона, движущегося внутри частички, являются некоторыми функциями местного времени t', относящегося к мгновенному положению самого электрона, или же что они являются такими же функциями местного времени, относящегося к некоторой определенной точке частички, например к ее центру; получаем положение: поле, вызываемое в электрической системе электрическим моментом, составляющие которого являются некоторыми функциями t' (местное время центра частички), соответствует полю в системе без поступательного движения, составляющие электрического момента которой являются такими же самыми функциями t. Но в этом последнем случае поле определяется уравнениями (88) и (89). Поэтому мы получим для движущейся системы:

$$(\varphi') = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[p_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[p_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[p_z]}{r}\right\},$$

$$a' = \frac{[\dot{p}]}{4\pi c r},$$

а d' и h' найдем, пользуясь формулами (50) и (107).

Отсюда следует, что выражение для поля, относящегося к электрическому моменту, который выражается посредством (108), можно получить так, как это описано в тексте.

27. (Стр. 101). В неподвижной системе пограничные условия для идеально проводящего тела заключаются в том, что электрическая сила направлена под прямым углом к поверхности проводника. Это следует из непрерывности тангенциальной слагающей силы, а также из того правила, что в идеальном проводнике электрическая сила должна быть равна нулю, так как иначе наблюдался бы ток бесконечной силы.

Но в движущейся системе электрон, который находится в покое относительно этой системы, подвержен действию силы, которая по (23) дается выражением

$$d + \frac{1}{c}[wh].$$

Так как это выражение равно вектору $\boldsymbol{d}'$, определяемому через (98), $\boldsymbol{d}'$ играет в точности ту же роль, какую играет $\boldsymbol{d}$ в системе, не имеющей поступательного движения; вникая несколько глубже в явления в весомых телах, можно показать, что в движущейся системе $\boldsymbol{d}'$ должно быть нормально к поверхности идеального проводника. Далее, для свободного эфира уравнения, определяющие $\boldsymbol{d}'$ и $\boldsymbol{h}'$, если их отнести к движущимся осям и местному времени, совпадают по форме с теми, которые мы имели для $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$, когда мы пользовались осями, неподвижными в эфире. Это вытекает непосредственно из уравнений (100) — (103).

28. (Стр. 104). Так как $\boldsymbol{h}_z = \boldsymbol{d}_y$ и $\boldsymbol{h}_{z\,(r)} = -\boldsymbol{d}_{y\,(r)}$, имеем:

$$\boldsymbol{d}_y \boldsymbol{d}_{y\,(r)} = -\boldsymbol{h}_z \boldsymbol{h}_{z\,(r)}$$

и для энергии единицы объема получаем:

$$w_e + w_m = \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{d}_y + \boldsymbol{d}_{y\,(r)})^2 + (\boldsymbol{h}_z + \boldsymbol{h}_{z\,(r)})^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_y^2 + \boldsymbol{h}_z^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_{y\,(r)}^2 + \boldsymbol{h}_{z\,(r)}^2).$$

29. (Стр. 109). Задачи, относящиеся к движению бесчисленных электронов, находящихся в куске металла, лучше всего рассматривать статистическим методом, который Максвелл ввел в кинетическую теорию газов и который можно представить в простой геометрической форме, пока мы ограничиваемся одним поступательным движением частичек. В самом деле, ясно, что если мы построим диаграмму, в которой скорость каждого электрона будет представлена по величине и по направлению вектором OP, проведенным из определенной точки O, распределение концов этих векторов, или, как мы их назовем, точек скоростей, даст нам картину состояния движения электронов.

Если положения точек скоростей отнести к осям координат, параллельным тем, которые были выбраны в самом металле, координаты некоторой точки скоростей будут равны составляющим скорости соответствующих электронов, ξ, η, ζ.

Пусть $d\lambda$ будет элемент объема на нашей диаграмме, находящийся в точке (ξ, η, ζ), настолько малый, что мы можем пренебречь изменениями ξ, η, ζ при переходе от одной из точек элемента к другой, но в то же время настолько большой, что в нем содержится значительное количество точек скоростей. Тогда можно принять, что число этих точек пропорционально $d\lambda$. Представляя его посредством выражения

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \tag{51}$$

на единицу объема металла, мы можем сказать, что, со статистической точки зрения, функция f определяет движение роя электронов.

Ясно, что интеграл

$$\int f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda,$$

взятый по всему объему диаграммы, дает полное число электронов в единице объема; подобным же образом интеграл

$$\int \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda \tag{52}$$

выражает поток электронов через плоскость, нормальную OX, т. е. избыток электронов, проходящих через плоскость к положительной стороне, над числом электронов, которые идут в противоположном направлении, причем оба эти числа отнесены к единице площади и к единице времени. Это станет ясно, если рассмотреть сначала группу электронов, точки скоростей которых находятся в элементе $d\lambda$; можно считать, что эти точки движутся с одинаковыми скоростями: те из них, которые проходят через элемент $d\sigma$ в указанном направлении в промежуток времени между t и $t+dt$, находятся в начале этого промежутка времени в некотором цилиндре, основание которого равно $d\sigma$, а высота — $|\xi|\,dt$. Число этих частичек можно найти, если умножить объем цилиндра на число (*51*).

Отсюда, если $\int\limits_1$ обозначает интегрирование по той части диаграммы, которая расположена с положительной стороны плоскости $\eta\zeta$, а $\int\limits_2$ — интегрирование по другой части, число электронов, идущих в одну сторону, равно

$$d\sigma\, dt \int\limits_1 \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda,$$

а в другую —

$$d\sigma\, dt \int\limits_2 -\xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\lambda.$$

Выражение (*52*) есть разность этих чисел, деленная на $d\sigma\, dt$.

Если заряд всех электронов равен одной и той же величине e, избыток заряда, переносимого к положительной стороне, над зарядом, переносимым в противоположном направлении, дается выражением

$$J = e\int \xi f\, d\lambda; \tag{53}$$

легко видеть, что если через m мы обозначим массу электрона, а через

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

квадрат его скорости, получим, что разность между количествами энергии, переносимыми через плоскость в двух направлениях, равна

$$W = \frac{1}{2}\, m \int \xi r^2 f\, d\lambda. \tag{54}$$

Эти величины (53) и (54) являются поэтому выражениями для потока электричества и для потока тепла, распространяющихся в одном и том же направлении OX.

Функция f определяется уравнением, которое следует считать основной формулой всей теории; к ее выводу мы теперь и приступим в том предположении, что электроны находятся под действием силы, направленной по OX; эта сила сообщает им ускорение X, одинаковое для всех частичек, принадлежащих к какой-нибудь из рассматриваемых групп.

Остановим наше внимание на электронах, находящихся в момент времени t в элементе объема металла dS, причем их точки скоростей находятся в элементе диаграммы $d\lambda$. Если бы не происходило никаких столкновений этих электронов ни с другими электронами, ни с атомами металла, эти электроны оказались бы в момент времени $t + dt$ в элементе dS', равном dS и расположенном в точке $(x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt)$. В то же самое время их точки скоростей переместились бы в элемент $d\lambda'$, равный $d\lambda$ и расположенный в точке диаграммы $(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta)$, так что в результате

$$f(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta,\ x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt,\ t + dt)\, dS'\, d\lambda' =$$
$$= f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ x,\ y,\ z,\ t)\, dS\, d\lambda.$$

Столкновения, которые происходят за рассматриваемый промежуток времени, заставляют нас видоизменить это уравнение. Число электронов, образующих в момент времени $t + dt$ группу, относящуюся к элементам dS' и $d\lambda'$, не равно уже теперь числу электронов, которые в момент времени t принадлежали к группе $(dS,\ d\lambda)$, так как это последнее число должно быть уменьшено на число столкновений, которые рассматриваемая группа электронов претерпевает за промежуток времени dt, и увеличено на число столкновений, в результате которых в группу войдут такие электроны, которые раньше ей не принадлежали. Представляя эти числа выражениями $a\, dS\, d\lambda\, dt$ и $b\, dS\, d\lambda\, dt$, получаем, деля на $dS\, d\lambda = dS'\, d\lambda'$,

$$f(\xi + X\, dt,\ \eta,\ \zeta,\ x + \xi\, dt,\ y + \eta\, dt,\ z + \zeta\, dt,\ t + dt) =$$
$$= f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ x,\ y,\ z,\ t) + (b - a)\, dt,$$

или, так как функцию в левой части уравнения можно заменить выражением

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} X+\frac{\partial f}{\partial x} \xi+\frac{\partial f}{\partial y} \eta+\frac{\partial f}{\partial z} \zeta+\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt,$$

$$X \frac{\partial f}{\partial \xi}+\xi \frac{\partial f}{\partial x}+\eta \frac{\partial f}{\partial y}+\zeta \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}=b-a. \qquad (55)$$

Это и есть то общее уравнение, о котором мы говорили.

Теперь мы должны вычислить значения a и b. Мы упростим задачу, пренебрегая взаимными столкновениями электронов и рассматривая только их столкновения с атомами металла. Далее, мы будем рассматривать атомы и электроны как идеально упругие твердые шарики и будем приписывать атомам настолько большие массы, что их можно будет считать неподвижными.

Среди всех столкновений мы будем предварительно расcматривать только те, при которых прямая, соединяющая центры атома и электрона, имеет в момент столкновения направление, лежащее внутри определенного конуса бесконечно малого телесного угла $d\omega$. Если R есть сумма радиусов атома и электрона, а n есть число атомов в единице объема, число электронов в группе (*51*), которые испытывают столкновения только что описанного вида за промежуток времени dt, равно

$$nR^2 f(\xi, \eta, \zeta)\, r \cos\vartheta\, d\lambda\, d\omega\, dt. \qquad (56)$$

Здесь ϑ есть острый угол между линией центров и направлением скорости r.

Скорость электрона в конце столкновения находится по весьма простому правилу. Разложив первоначальную скорость на составляющие вдоль линии центров и под прямым углом к ней, мы должны только изменить знак первой составляющей на обратный. Отсюда новая точка скорости P', координаты которой я назову ξ', η', ζ', и первоначальная (ξ, η, ζ) лежат симметрично по обе стороны плоскости W, проходящей через O под прямым углом к оси конуса $d\omega$, и когда точка P принимает различные положения в элементе $d\lambda$, новая точка P' будет все время лежать в элементе $d\lambda'$, который является зеркальным изображением $d\lambda$ по отношению к плоскости W и равен поэтому $d\lambda$.

Это последнее замечание позволяет нам определить число b, поскольку оно определяется столкновениями, имеющими место при указанных условиях. Благодаря этим столкновениям точка скорости будет испытывать скачок от $d\lambda'$ к $d\lambda$; число этих «обращающих» встреч можно найти, изменяя соответственным образом выражение (*56*). Заменяя ξ, η, ζ через ξ', η', ζ', мы должны оставить множитель $r \cos\vartheta\, d\lambda$ без изменения, так как $d\lambda' = d\lambda$, $r' = r$ (если r' есть скорость с составляющими ξ', η', ζ') и прямая, соединяющая центры, образует с r и r' равные углы.

Поэтому мы получаем:

$$nR^2 f(\xi', \eta', \zeta')\, r \cos\vartheta\, d\lambda\, d\omega\, dt.$$

Вычитая (*56*) из этого выражения и интегрируя результат по всем направлениям оси конуса $d\omega$, которые наклонены под острым углом к направлению r, получим значение $(b-a)\, d\lambda\, dt$.

Когда сила, вызывающая ускорение X, имеет постоянную величину, зависящую только от координаты x, может иметь место устойчивое состояние, в котором функция f не содержит ни y, ни z. Для такого рода случаев, которые имеют место, например, тогда, когда концы цилиндрического стержня поддерживаются при различных температурах или когда к нему приложена параллельная его оси электрическая сила, основное уравнение (*55*) приобретает вид

$$nR^2 r \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos\vartheta\, d\omega = \\ = X\frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial f}{\partial x}. \qquad (57)$$

Выполняя интегрирование, мы должны оставить ξ, η, ζ без изменения, так что r сохраняет постоянное значение, но мы не должны забывать, что значения ξ', η', ζ' зависят от направления прямой, соединяющей центры. Обозначая через f, g, h углы между этой прямой (ее направление нужно выбирать так, чтобы она образовала с r острый угол) и осями, имеем:

$$\xi' = \xi - 2r\cos\vartheta\cos f,\quad \eta' = \eta - 2r\cos\vartheta\cos g, \\ \zeta' = \zeta - 2r\cos\vartheta\cos h.$$

Поскольку все точки металла находятся в одинаковом состоянии, электроны будут иметь во всех направлениях одинаковые скорости. Естественно принять для этого случая известное правило Максвелла, которое выражается следующим образом:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-hr^2}, \qquad (58)$$

где A и h суть некоторые постоянные.

Пользуясь формулами

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{h}},$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h\xi^2}\xi^2\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h^3}},$$

находим из (*58*), что число электронов в единице объема равно

$$N = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= AJ_1^3 = A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}}, \qquad (59)$$

а для суммы значений ξ^2, которую мы можем представить выражением $N\overline{\xi^2}$, если будем черточкой сверху обозначать средние значения, получаем:

$$N\overline{\xi^2} = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\xi^2\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= AJ_2J_1^2 = \frac{1}{2}A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^5}}.$$

Из этих результатов следует, что

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \frac{1}{2h}$$

и что среднее значение кинетической энергии электрона равно

$$\frac{3m}{4h}.$$

Но мы уже ввели предположение, что средняя кинетическая энергия равна αT. Поэтому

$$h = \frac{3m}{4\alpha T}; \qquad (60)$$

это уравнение совместно с (*59*) дает постоянные h и A в зависимости от температуры и числа частиц N в единице объема.

Ясно, что при наличии внешней силы или в том случае, когда концы металлического стержня поддерживаются при различных температурах, формула (*58*) уже не может иметь места. Но каково бы ни было новое состояние движения, мы всегда будем иметь в единице объема определенное число электронов N и определенное среднее значение квадратов их скоростей; придавая h и A такие значения, чтобы $\frac{3}{2h}$ было равно этому среднему квадратичному, а $A\sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}}$ — числу N, мы всегда можем написать:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A\varepsilon^{-hr^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta). \qquad (61)$$

где φ есть функция, которую нам предстоит определить. Для этого у нас есть основное уравнение (*57*) и, кроме того, условия

$$\int \varphi\, d\lambda = 0, \qquad \int \varphi r^2\, d\lambda = 0, \tag{62}$$

которые должны удовлетворяться ввиду того, что член $A\varepsilon^{-hr^2}$ был выбран так, чтобы приводить к существующим в действительности значениям N и $\overline{r^2}$.

Функция φ является математическим выражением изменения, вызываемого внешней силой или разностью температур в движении системы электронов. Можно показать, однако, что во всех действительных случаях это изменение чрезвычайно мало, так что величина φ всегда мала по сравнению с величиной $A\varepsilon^{-hr^2}$. На этом основании в правой части уравнения (*57*) мы можем заменить f через $A\varepsilon^{-hr^2}$. В левой части, напротив, мы должны пользоваться полным выражением функции (*61*), так как здесь, если опустить часть $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, мы получим нуль.

Уравнение поэтому приобретает вид

$$nR^2r\int\{\varphi(\xi', \eta', \zeta')-\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}\cos\vartheta\, d\omega =$$

$$=\left(-2hAX+\frac{dA}{dx}-r^2A\frac{dh}{dx}\right)\xi\varepsilon^{-hr^2}. \tag{63}$$

Попробуем решение

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)=\xi\chi(r), \tag{64}$$

где χ есть функция одного только r. Это допущение находится в согласии с условиями (*62*), так что нам остается рассмотреть только основное уравнение (*63*). Подставляя в него значение (*64*), получаем прежде всего:

$$\int\{\varphi(\xi', \eta', \zeta')-\varphi(\xi, \eta, \zeta)\}\cos\vartheta\, d\omega =$$

$$=\chi(r)\int(\xi'-\xi)\cos\vartheta\, d\omega=-2r\chi(r)\int\cos^2\vartheta\cos f\, d\omega.$$

Вообразим себе две прямые OP и OQ, проведенные из начала координат, — первая в направлении скорости (ξ, η, ζ), а вторая в том направлении, которое линия центров занимает в момент столкновения, причем угол $POQ=\vartheta$ острый. Обозначая через μ угол POX и через ψ угол между плоскостями POX и POQ, получаем:

$$\cos f = \cos\mu\cos\vartheta + \sin\mu\sin\vartheta\cos\psi,$$

$$\int \cos^2\vartheta\cos f\,d\omega =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\vartheta(\cos\mu\cos\vartheta + \sin\mu\sin\vartheta\cos\psi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi =$$

$$= 2\pi\cos\mu\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\pi\cos\mu = \frac{1}{2}\pi\frac{\xi}{r},$$

вследствие чего (*63*) принимает вид

$$-\pi nR^2\xi r\chi(r) = \left(-2hAX + \frac{dA}{dx} - r^2A\frac{dh}{dx}\right)\xi\varepsilon^{-hr^2};$$

это показывает, что (так как ξ при сокращении пропадает) наше допущение действительно приводит к решению задачи.

Если мы положим

$$\frac{1}{\pi nR^2} = l,$$

в результате имеем:

$$\chi(r) = l\left(2hAX - \frac{dA}{dx} + r^2A\frac{dh}{dx}\right)\frac{1}{r}\varepsilon^{-hr^2}. \tag{65}$$

В конце концов из (*53*) и (*54*) мы получаем для потоков электричества и тепла:

$$J = e\int \xi^2\chi(r)\,d\lambda,$$

$$W = \frac{1}{2}m\int \xi^2r^2\chi(r)\,d\lambda.$$

В этих формулах можно ξ^2 заменить через $\frac{1}{3}r^2$ и $d\lambda$ через $4\pi r^2\,dr$; интегрирование таким образом сводится к интегрированию по r от 0 до ∞. Подставляя, далее, (*65*) и принимая за новую переменную $s = r^2$, приходим к интегралам

$$\int\limits_0^\infty s\varepsilon^{-hs}\,ds,\quad \int\limits_0^\infty s^2\varepsilon^{-hs}\,ds \quad\text{и}\quad \int\limits_0^\infty s^3\varepsilon^{-hs}\,ds.$$

Значения их таковы:

$$\frac{1}{h^2},\quad \frac{2}{h^3}\quad\text{и}\quad \frac{6}{h^4},$$

так что для токов электричества и тепла имеем следующие выражения

$$J = \frac{2}{3}\pi el\left\{\frac{1}{h^2}\left(2hAX - \frac{dA}{dx}\right) + 2\,\frac{A}{h^3}\,\frac{dh}{dx}\right\},$$

$$W = \frac{2}{3}\pi ml\left\{\frac{1}{h^3}\left(2hAX - \frac{dA}{dx}\right) + 3\,\frac{A}{h^4}\,\frac{dh}{dx}\right\}.$$

Из первого уравнения легко найти коэффициент электропроводности (σ). Пусть цилиндрический стержень поддерживается на протяжении всей своей длины при одной температуре. Тогда $\frac{dh}{dx} = 0$, $\frac{dA}{dx} = 0$; при наличии электрической силы E, вызывающей ускорение

$$X = \frac{eE}{m},$$

получается электрический ток

$$J = \frac{4\pi lAe^2}{3hm}\,E.$$

Отсюда заключаем, что

$$\sigma = \frac{4\pi lAe^2}{3hm},$$

или, если воспользоваться соотношениями (*59*) и (*60*), вводя в то же самое время скорость u, квадрат которой равен средней квадратичной $\overline{r^2}$, так что $m = \frac{2\alpha T}{u^2}$, получим:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\frac{e^2 lNu}{\alpha T}.$$

Чтобы найти выражение для теплопроводности, рассмотрим стержень, на концах которого поддерживается некоторая разность температур; эти концы электрически изолированы, так что электричество не может ни войти в металл, ни выйти из него. При этих обстоятельствах неравномерное нагревание создаст разность потенциалов, которая будет увеличиваться до тех пор, пока вызываемая ею электрическая сила не уничтожит тока J. Окончательное состояние будет характеризоваться выражением

$$2hAX - \frac{dA}{dx} = -2\,\frac{A}{h}\,\frac{dh}{dx},$$

откуда

$$W = \frac{2}{3}\pi ml\,\frac{A}{h^4}\,\frac{dh}{dx} = -\frac{8\pi lA\alpha}{9h^4}\,\frac{dT}{dx};$$

здесь мы также пользовались соотношением *(60)*. Отсюда мы выводим значение для коэффициента теплопроводности

$$k = \frac{8\pi l A\alpha}{9h^2} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\alpha l N u.$$

Остается добавить, что величину l можно рассматривать как некоторую среднюю длину свободного пути.

30. (Стр. 123.) В качестве введения к выводу закона Вина мы применим рассуждение § 46 к случаю косого падения света. Пучок света, распространяющийся в направлении, которое лежит в плоскости XOZ и составляет угол ϑ с OX, может быть представлен выражением вида

$$a \cos n\left(t - \frac{x\cos\vartheta + z\sin\vartheta}{c} + p\right);$$

когда он падает на неподвижное зеркало, поверхность которого совпадает с плоскостью YOZ, для величин, относящихся к отраженному свету, мы будем иметь функции, содержащие множитель

$$\cos n\left(t + \frac{x\cos\vartheta - z\sin\vartheta}{c} + p\right).$$

Но когда зеркало имеет поступательную скорость w в направлении OX, то по теореме соответственных состояний (§ 45, примечание 26) состояние движения можно представить уравнениями, в которых вышеприведенные тригонометрические функции заменены выражениями

$$\cos n\left(t' - \frac{x'\cos\vartheta + z\sin\vartheta}{c} + p\right) \tag{66}$$

и

$$\cos n\left(t' + \frac{x'\cos\vartheta - z\sin\vartheta}{c} + p\right), \tag{67}$$

где

$$x' = x - wt \text{ и } t' = t - \frac{w}{c^2}\,x'.$$

Частоты лучей даются коэффициентами при t в *(66)* и *(67)*

$$n\left(1 + \frac{w}{c}\cos\vartheta\right) \text{ и } n\left(1 - \frac{w}{c}\cos\vartheta\right),$$

так что, если частота падающего луча равна

$$n\left(1 + \frac{w}{c}\cos\vartheta\right) = n,$$

то частота луча, отраженного от движущегося зеркала, дается выражением

$$n\left(1-\frac{2w}{c}\cos\vartheta\right).$$

Отсюда следует, что длина волны λ превращается в

$$\lambda\left(1+\frac{2w}{c}\cos\vartheta\right).$$

Мы должны также сказать несколько слов о давлении, которое оказывает на идеально отражающее зеркало пучок света, падающий на него под углом ϑ. Так как будет вполне достаточно узнать давление на зеркало, находящееся в покое, мы можем применить формулу, полученную в § 25. Так как свет отражается целиком, мы имеем $\overline{s''}=0$ и $|\overline{s'}|=|\overline{s}|$, причем эти последние векторы равны по величине произведению c на энергию i в единице объема падающего луча. Далее, если A есть площадь зеркала, имеем $\Sigma=\Sigma'=A\cos\vartheta$. Так как направление векторов $\overline{s}$ и $\overline{s'}$ совпадает с направлением лучей, легко видеть, что вектор $\overline{s}-\overline{s'}$ направлен к зеркалу по нормали. Результирующая сила дает поэтому нормальное давление, величина которого равна $2Ai\cos^2\vartheta$ или на единицу площади $2i\cos^2\vartheta$.

Возвращаясь теперь к доказательству закона Вина, рассмотрим цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем и не заключающий в себе весомой материи. Мы представим себе, что внутренность цилиндра пронизывается во всех направлениях световыми и тепловыми лучами; нашей задачей является рассмотреть изменения интенсивности и длины волн, которые вызываются движением поршня. Предположим, что этот последний является внутри идеально отражающим, тогда как стенки и дно цилиндра «идеально белые»; мы подразумеваем под этим, что они отражают лучи одинаково во всех направлениях, не производя никаких изменений в длине волны, никакого уменьшения интенсивности. Вводя эти допущения и предполагая, что поршень движется весьма медленно, мы тем самым обеспечиваем полную изотропность радиации.

Остановим наше внимание на лучах, длины волн которых в некоторый момент времени t заключены в промежутке от λ до $\lambda+d\lambda$; обозначим через $\psi(\lambda)\,d\lambda$ энергию этих лучей, или, как мы будем говорить, группы $(\lambda,\ \lambda+d\lambda)$, — энергию, приходящуюся на единицу объема. Если A есть площадь поршня, а h — его высота над дном цилиндра, полная энергия рассматриваемой группы равна

$$J=Ah\psi(\lambda)\,d\lambda. \tag{68}$$

Можно найти дифференциальное уравнение, которое послужит для определения ψ как функции λ и t, рассматривая количества энергии, которые получаются и теряются этой группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

Прежде всего, такая потеря вызывается отражением части лучей от движущегося поршня, так как в каждом луче, который на него падает, изменяется длина волны, так что после отражения этот луч уже не относится больше к группе $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Чтобы вычислить потерю, мы заметим, что лучи, о которых мы говорим, распространяются совершенно одинаково по всем направлениям; отсюда, если мы ограничимся теми лучами, направление которых лежит внутри бесконечно узкого конуса с телесным углом $d\omega$, мы получим для энергии единицы объема:

$$\frac{1}{4\pi}\psi(\lambda)\,d\omega\,d\lambda;$$

для тех лучей, направление которых составляет с нормалью к поршню (проведенной наружу) угол от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, соответствующее значение равно

$$\frac{1}{2}\psi(\lambda)\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda.$$

За промежуток времени dt лучи попадают на поршень постольку, поскольку они в момент t находятся от поршня на расстоянии $c\cos\vartheta\,dt$, т. е. заполняют собой часть цилиндра объемом в $cA\cos\vartheta\,dt$, так что энергия, падающая на поршень, может быть представлена так:

$$\frac{1}{2}cA\psi(\lambda)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\lambda\,dt.$$

Интегрируя от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, получаем для энергии, потерянной группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$:

$$\frac{1}{4}cA\psi(\lambda)\,d\lambda\,dt. \tag{69}$$

С другой стороны, некоторое количество энергии добавляется к энергии группы, так как лучи, которые раньше имели другую длину волны, теперь вследствие отражения от движущегося поршня попадают в интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$.

Рассмотрим специально те лучи, направления которых до отражения заключаются внутри конуса $d\omega$, ось которого составляет угол $\vartheta\left(<\frac{1}{2}\pi\right)$ с нормалью к поршню. Если λ' есть длина их волны до отражения, она после отражения превратится в

$$\lambda = \left(1 + \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\lambda',$$

где w следует считать положительной, если поршень движется наружу. Отсюда, если новая длина волны лежит между λ и $\lambda + d\lambda$, первоначальная длина волны должна была лежать между λ' и $\lambda' + d\lambda'$, где

$$\lambda' = \left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\lambda,$$

$$d\lambda' = \left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)d\lambda.$$

Энергия этих лучей, заключенная в единице объема, равна

$$i = \frac{1}{4\pi}\psi(\lambda')\,d\omega\,d\lambda';$$

легко видеть при помощи рассуждения, подобного вышеприведенному, что энергия группы лучей, определяемой величинами $d\omega$, λ', $d\lambda'$, которая падает на поршень в течение промежутка времени dt, равна

$$cAi\cos\vartheta\,dt.$$

Часть этой энергии тратится на работу против движения поршня, и только остающаяся часть приобретается группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Так как давление, оказываемое на поршень лучами, о которых мы теперь говорим, равно

$$2Ai\cos^2\vartheta,$$

а работа его за время dt —

$$2wAi\cos^2\vartheta\,dt,$$

количество энергии, полученное группой $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, дается выражением

$$cAi\cos\vartheta\,dt - 2wAi\cos^2\vartheta\,dt. \qquad (70)$$

Так как мы систематически пренебрегаем квадратом скорости w, заменим i во втором члене величиной

$$\frac{1}{4\pi}\psi(\lambda)\,d\omega\,d\lambda,$$

а в первом члене, ввиду того, что

$$\psi(\lambda') = \psi(\lambda) - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\cdot\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},$$

выражением

$$\frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\psi(\lambda')\,d\omega\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\left(1 - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\right)\psi(\lambda) - \frac{2w}{c}\cos\vartheta\cdot\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}d\omega\,d\lambda.$$

Вследствие этого выражение (*70*) приобретает вид

$$\frac{cA}{4\pi}\left[\cos\vartheta\cdot\psi(\lambda)-\frac{2w}{c}\cos^2\vartheta\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}\right]d\omega\, d\lambda\, dt.$$

Распространяя интеграл этого выражения по $d\omega$ на все направления лучей, для которых $\vartheta<\frac{1}{2}\pi$, находим энергию, которая относится к группе $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ и которую нужно вычесть из выражения (*69*).

Так как

$$\int\cos\vartheta\, d\omega=\pi,\qquad \int\cos^2\vartheta\, d\omega=\frac{2}{3}\pi,$$

в результате интегрирования получаем:

$$\frac{1}{4}cA\left[\psi(\lambda)-\frac{4w}{3c}\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}\right]d\lambda\, dt;$$

для изменения заключенной внутри цилиндра энергии, которая относится к длинам волн от λ до $\lambda+d\lambda$, получаем выражение

$$\frac{dJ}{dt}=-\frac{1}{3}wA\left\{2\psi(\lambda)+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\}d\lambda.$$

Но так как $\frac{dh}{dt}=w$, из (*68*) мы видим, что

$$\frac{dJ}{dt}=wA\psi(\lambda)\, d\lambda+Ah\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\lambda,$$

так что

$$w\psi+h\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{2}{3}w\psi-\frac{1}{3}w\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},$$

или, если положить

$$\frac{w}{3h}=k,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-k\left(5\psi+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right). \tag{71}$$

При помощи этого дифференциального уравнения мы можем вычислить то изменение в распределении энергии по длинам волн, которое вносится движением поршня. Чтобы представить это уравнение в таком виде, из которого был бы яснее виден его смысл, мы сначала выведем из него скорость изменения полной энергии в единице объема:

$$K=\int_0^\infty\psi\, d\lambda.$$

Для этого нам достаточно только умножить (*71*) на $d\lambda$ и проинтегрировать каждый член от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Так как

$$\int_0^\infty \frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\lambda = \frac{dK}{dt}$$

и

$$\int_0^\infty \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\, d\lambda = |\lambda\psi|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} - \int_0^\infty \psi\, d\lambda = -\int_0^\infty \psi\, d\lambda = -K,$$

мы получаем:

$$\frac{dK}{dt} = -4kK, \quad \frac{d\log K}{dt} = -4k.$$

При выводе этого уравнения я предполагал, что для $\lambda = \infty$ произведение $\lambda\psi$ стремится к пределу, равному нулю.

Когда скорость w задана для каждого момента времени, то и k и K являются определенными функциями времени. Мы можем поэтому взять эту величину в качестве независимой переменной вместо t. Полагая

$$\log K = \xi$$

и рассматривая ψ как функцию от этой величины и от

$$\log\lambda = \eta,$$

находим из (*71*), разделив на $-k\psi$,

$$4\frac{\partial\log\psi}{\partial\xi} = 5 + \frac{\partial\log\psi}{\partial\eta}.$$

Это выражение упрощается еще больше, если мы вместо ξ и η введем в качестве независимых переменных

$$\xi' = \xi \text{ и } \eta' = \xi + 4\eta.$$

Уравнение тогда приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\log\psi - \frac{5}{4}\xi'\right) = 0,$$

откуда видно, что выражение

$$\log\psi - \frac{5}{4}\xi' = \log\left(\psi K^{-\frac{5}{4}}\right),$$

и следовательно,

$$\psi K^{-\frac{5}{4}}$$

само должно быть функцией одного η'. Но

$$\eta' = \xi + 4\eta = 4 \log (\lambda K^{\frac{1}{4}}),$$

так что $\psi K^{-\frac{5}{4}}$ может быть тоже представлено как функция $\lambda K^{\frac{1}{4}}$.

Отсюда видно, что решением нашего уравнения является выражение:

$$K^{-\frac{5}{4}} \psi (\lambda, K) = F (\lambda K^{\frac{1}{4}}); \tag{72}$$

здесь мы особо указали, что ψ есть функция λ и K; функция F остается неопределенной.

Если при движении поршня K достигнет значения K', мы получим для любой длины волны выражение, подобное (72):

$$K'^{-\frac{5}{4}} \psi (\lambda, K') = F (\lambda K'^{\frac{1}{4}}).$$

Если заменить λ через $\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda$, правые части обоих уравнений будут одинаковы, так что

$$\psi (\lambda, K') = \left(\frac{K'}{K}\right)^{\frac{5}{4}} \psi \left(\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda, K\right).$$

Отсюда, если в первоначальном состоянии распределение энергии дается функцией $\varphi (\lambda)$, т. е. для всех λ

$$\psi (\lambda, K) = \varphi (\lambda),$$

для соответствующей функции окончательного состояния получаем:

$$\varphi (\lambda, K') = \left(\frac{K'}{K}\right)^{\frac{5}{4}} \varphi \left(\left\{\frac{K'}{K}\right\}^{\frac{1}{4}} \lambda\right).$$

31. (Стр. 127.) Планк получил в единицах CGS

$$a = 2{,}02 \cdot 10^{-16}$$

(так что средняя кинетическая энергия молекулы равна $2{,}02 \cdot 10^{-16}\, T$ эргов), для массы атома водорода —

$$1{,}6 \cdot 10^{-24}\, г$$

и для универсальной единицы электричества, выраженной в тех единицах, которыми мы пользовались:

$$1{,}6 \cdot 10^{-20}\, c \sqrt{4\pi}.$$

(См. § 35.)

32. (Стр. 128.) В своих первых опытах Гаген и Рубенс выводили поглощение металла из его отражательной способности; они нашли, что для $\lambda = 12\mu, 8\mu$ и даже для $\lambda = 4\mu$ результаты в точности совпадали с теми значениями, которые можно вычислить из проводимости. В позднейших опытах с лучами длины волны 25,5 μ (остаточные лучи—Reststrahlen — флюорита), которые привели к тем же результатам, испускательная способность металла сравнивалась с испускательной способностью черного тела и коэффициент поглощения вычислялся при помощи наших формул (122) (стр. 113).

33. (Стр. 129.) Расположим ось OX под прямым углом к пластинке, так что на передней поверхности $x = 0$ и $x = \Delta$ на задней; далее, пусть a будет амплитуда электрических колебаний падающего луча, причем уравнение этого луча пусть будет:

$$d_y = a\cos n\left(t - \frac{x}{c} + p\right).$$

Можно считать, что электрическая сила E_y внутри тонкой пластинки во всех точках имеет одну и ту же интенсивность. Она вызывает ток проводимости

$$J_y = \sigma E_y$$

и диэлектрическое смещение в эфире, содержащемся в металле. Изменения этого смещения не вызывают, однако, никакого термического эффекта; поэтому выделяемое тепло будет соответствовать работе силы E_y лишь постольку, поскольку он вызывает ток J_y. Величина этой работы в единицу времени и на единицу объема равна

$$J_y E_y = \sigma E_y^2,$$

так что тепло, выделяемое в участке пластинки, приходящемся на единицу ее площади, равно

$$\sigma E_y^2 \Delta.$$

На передней поверхности F_y равно напряжению поля в эфире вне металла (в силу непрерывности тангенциальной слагающей электрической силы), т. е. равно $d_y + d_{y(r)}$, где $d_{y(r)}$ относится к отраженному пучку. Но так как амплитуда $d_{y(r)}$ пропорциональна Δ и так как мы будем пренебрегать членами, содержащими Δ^2, мы можем член $d_{y(r)}$ опустить. Таким путем находим для выделенного тепла

$$\sigma a^2 \Delta \cos^2(nt + p),$$

а для его среднего значения за время, охватывающее много периодов:

$$\frac{1}{2}\sigma a^2 \Delta.$$

Коэффициент поглощения A можно найти, разделив это выражение на количество энергии $\frac{1}{2}a^2c$, которое падает за единицу времени на рассматриваемую часть пластинки.

34. (Стр. 134.) Это подтверждается окончательной формулой для $a_в^2$ (стр. 139), по которой эта величина пропорциональна s^2, а следовательно, $\frac{1}{\lambda^2}$.

35. (Стр. 137.) Мы легко увидим правильность этого, если будем рассматривать и атомы металла и электроны как идеально упругие шарики и допустим, что атомы неподвижны. Опишем вокруг центра O одного из атомов сферу, радиус которой R равен сумме радиусов атома и электрона, и проведем прямую OP в направлении, противоположном тому, по которому электрон сталкивается с атомом. Тогда положение той точки сферы Q, где находится центр электрона в момент столкновения, можно определить при помощи угла $POQ = \vartheta$ и угла φ между плоскостью POQ и некоторой постоянной плоскостью, проведенной через OP. Вероятность того, что при столкновении этот угол лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ и от φ до $\varphi + d\varphi$, определяется выражением

$$\frac{1}{\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \tag{73}$$

где ϑ принимает значения от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, а φ — от 0 до 2π.

Направление, в котором отскакивает электрон, определим точкой S, в которой радиус, параллельный этому направлению, пересекает поверхность сферы. Полярные координаты этой точки суть $\vartheta' = 2\vartheta$ и $\varphi' = \varphi$; если эти углы изменяются в пределах от ϑ' до $\vartheta' + d\vartheta'$ и от φ' до $\varphi' + d\varphi'$, точка S занимает все возможные положения на элементе сферы

$$d\sigma = R^2 \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'.$$

Но вместо выражения (73) мы можем написать

$$\frac{1}{4\pi} \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi',$$

так что вероятность того, что точка S лежит на элементе $d\sigma$, равна

$$\frac{d\sigma}{4\pi R^2}.$$

Так как эта величина не зависит от положения $d\sigma$ на поверхности сферы, мы заключаем, что после столкновения все направления скорости электрона представляются одинаково вероятными.

36. (Стр. 139.) Рассмотрим отдельный электрон, который в момент времени t занимает положение P, и определим, чему равно расстояние $PQ = l$, которое он пробегает, пока не столкнется с атомом. Если какой-нибудь электрон испытывает за некоторый промежуток времени N столкновений, мы можем сказать, что мы N раз его бросили на атомы и столько же раз определили длину его свободного пути. Но так как атомы расположены весьма неправильным образом, мы можем с таким же успехом проделать этот опыт с N различными электронами, движущимися в одном направлении с общей скоростью u. Поэтому мы перейдем к рассмотрению именно такой группы и будем искать число N' содержащихся в ней электронов, которые, пройдя расстояние l, не испытали еще столкновений с атомом; это число, очевидно, является некоторой функцией l. За время dt некоторая часть этих электронов испытает нарушение своего прямолинейного движения; эта часть пропорциональна как N', так и dt, или, что равносильно последнему, расстоянию $dl = u\,dt$; поэтому мы можем написать, что она равна

$$\beta N' dl, \tag{74}$$

где β — некоторая постоянная. Отсюда за время прохождения расстояния dl число N' изменяется на

$$dN' = -\beta N' dl,$$

так что мы получаем:

$$N' = N\varepsilon^{-\beta l},$$

так как $N' = N$ для $l = 0$.

Выражение (74), которое теперь приобретает вид

$$\beta N\varepsilon^{-\beta l} dl, \tag{75}$$

дает нам число электронов, у которых длина свободных путей лежит между l и $l + dl$. Сумма их свободных путей равна

$$\beta N l\varepsilon^{-\beta l} dl;$$

мы найдем сумму всех свободных путей, если проинтегрируем от $l = 0$ до $l = \infty$. Деля на N, получим величину среднего свободного пути:

$$l_m = \beta \int_0^\infty l\varepsilon^{-\beta l} dl = \frac{1}{\beta}.$$

На этом основании число (75) свободных путей, длины которых лежат в пределах от l до $l + dl$, равно

$$\frac{1}{l_m} N\varepsilon^{-\frac{l}{l_m}} dl,$$

или, так как

$$N = \frac{u\vartheta}{l_m},$$

равно величине

$$\frac{u\vartheta}{l_m^2} \varepsilon^{-\frac{l}{l_m}} dl.$$

37. (Стр. 139.) С этим случаем мы встречаемся тогда, когда атомы и электроны являются твердыми упругими шариками, причем атомы неподвижны; в самом деле, ясно, что электрон будет тогда и при разных скоростях двигаться по одинаковым зигзагообразным путям. Другие предположения привели бы к значению l_m, зависящему от скорости u, но тогда мы должны были бы также ввести изменение в формулу для электропроводности, приведенную в § 50. Окончательная формула для $\frac{E}{A}$, по всей вероятности, осталась бы без изменения.

38. (Стр. 141.) Следует заметить, что числа, приведенные в примечании **31**, можно считать выведенными на основании формулы (148), если при их вычислении мы будем пользоваться только той частью кривой излучения, которая соответствует длинным волнам.

39. (Стр. 144.) На основании вышесказанного потенциальная и кинетическая энергии могут быть представлены выражениями такого вида:

$$U = \frac{1}{2} a_1 p_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} a_n p_n^2,$$

$$T = \frac{1}{2} b_1 \dot{p}_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} b_n \dot{p}_n^2,$$

откуда непосредственно видно, что нужно только сложить количества энергии, относящиеся к каждому из n основных видов колебания. Так как для малых колебаний коэффициенты a и b можно считать постоянными, каждый вид колебаний определяется уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}\right) = -\frac{\partial U}{\partial p_k},$$

или

$$b_k \ddot{p}_k = -a_k p_k,$$

общее решение которого таково:

$$p_k = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\, t + \beta\right),$$

где α и β суть постоянные.

Это движение обладает потенциальной энергией

$$\frac{1}{2}\ a_k\ p_k^2 = \frac{1}{2}\ a_k\ \alpha^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\,t + \beta\right)$$

и кинетической энергией

$$\frac{1}{2}\ b_k\ \dot{p}_k^2 = \frac{1}{2}\,a_k\ \alpha^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{a_k}{b_k}}\,t + \beta\right);$$

среднее значение как той, так и другой равно

$$\frac{1}{4}\,a_k\alpha^2.$$

40. (Стр. 147.) Принимая три ребра параллелепипеда за оси координат и обозначая через f, g, h направляющие косинусы электрических колебаний пучка, распространяющегося в направлении (μ_1, μ_2, μ_3), мы можем представить этот пучок при помощи формул

$$d_x = fa \cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right),$$

$$d_y = ga \cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right),$$

$$d_z = ha \cos n\left(t - \frac{\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z}{c} + p\right).$$

Если мы представим семь других пучков такими же формулами, с теми же постоянными a и p, подставляя вместо μ_1, μ_2, μ_3 значения из (149) и заменяя f, g, h соответственно через

$$\begin{array}{ccc} f,\ -g,\ -h; & -f,\ g,\ -h; & -f,\ -g,\ h; \\ f,\ \ g,\ -h; & -f,\ g,\ \ h; & f\ -g,\ h; \\ & -f,\ -g,\ -h, & \end{array}$$

мы получим полные выражения для d_x, d_y, d_z:

$$\left.\begin{aligned} d_x &= -8fa \cos\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n\,(t+p), \\ d_y &= -8ga \sin\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n\,(t+p), \\ d_z &= -8ha \sin\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\cos n\,(t+p). \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

При таком виде этих выражений условие, что d нормально к стенкам, удовлетворяется на плоскостях XOY, YOZ, ZOX, так как, например, на первой плоскости $z=0$, и, следовательно, $d_x=0$, $d_y=0$.

То же условие должно также удовлетворяться на противоположных сторонах параллелепипеда. Отсюда вытекает требование, что если q_1, q_2, q_3 имеют то значение, о котором говорилось в тексте,

$$\sin\frac{n\mu_1 q_1}{c}=0,\quad \sin\frac{n\mu_2 q_2}{c}=0,\quad \sin\frac{n\mu_3 q_3}{c}=0.$$

Поэтому

$$\frac{n\mu_1 q_1}{c},\quad \frac{n\mu_2 q_2}{c},\quad \frac{n\mu_3 q_3}{c}$$

должны быть кратными π и, так как $\dfrac{n}{c}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$,

$$\frac{2\mu_1 q_1}{\lambda},\quad \frac{2\mu_2 q_2}{\lambda},\quad \frac{2\mu_3 q_3}{\lambda}$$

должны быть целыми числами.

41. (Стр. 147.) Пусть одно из этих состояний — скажем, состояние A — определяется формулой (76) предыдущего примечания, в которой f, g, h относятся к любому направлению, образующему прямой угол с направлением (μ_1, μ_2, μ_3); тогда состояние A', в котором направление поляризации перпендикулярно направлению поляризации в A, представляется уравнениями того же вида (с другими постоянными a' и p'), в которых f, g, h заменены постоянными f', g', h', определяющими направление, перпендикулярное как (f, g, h), так и (μ_1, μ_2, μ_3).

Легко видеть, что любой другой вид движения, представляемый формулами, подобными (76), со значениями f, g, h, такими, что

$$\mu_1 f+\mu_2 g+\mu_3 h=0,$$

может быть разложен на два состояния типа A и A'. Полное электрическое поле будет поэтому состоять из большого числа полей A и A', каждое из которых имеет определенную амплитуду a и фазу p. Чтобы найти полную электрическую энергию, мы должны вычислить для каждого вида движения интеграл

$$\frac{1}{2}\int d^2\,dS$$

и для каждой комбинации двух видов движения интеграл

$$\int (dd')\,dS. \tag{77}$$

Но можно показать, что все интегралы последнего рода равны нулю. Для комбинации двух состояний, которые мы только что назвали A и A' (они характеризуются одинаковыми значениями μ_1, μ_2, μ_3 и частоты n), это легко видеть, если принять во внимание, что в интегралах

$$\int_0^{q_1} \cos^2 \frac{n\mu_1 x}{c}\, dx, \quad \int_0^{q_1} \sin^2 \frac{n\mu_1 x}{c}\, dx, \quad \int_0^{q_2} \cos^2 \frac{n\mu_2 y}{c}\, dy \text{ и т. д. } (78)$$

квадрат косинуса или синуса можно заменить $\frac{1}{2}$; для (77) мы получаем выражение

$$8(ff' + gg' + hh')\, aa' q_1 q_2 q_3 \cos n(t+p) \cos n(t+p'),$$

которое равно нулю, так как направления (f, g, h) и (f', g', h') взаимно перпендикулярны.

Во всяком другом случае по крайней мере один из коэффициентов $\frac{n\mu_1}{c}$, $\frac{n\mu_2}{c}$, $\frac{n\mu_3}{c}$ будет иметь различное значение в состояниях d и d'. Поэтому $\frac{n\mu_1}{c}$ может иметь значение k для одного состояния и значение k' для другого. Интегралы

$$\int_0^{q_1} \cos kx \cos k'x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2(k+k')} \sin(k+k')\, q_1 + \frac{1}{2(k-k')} \sin(k-k')\, q_1,$$

$$\int_0^{q_1} \sin kx \sin k'x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2(k+k')} \sin(k+k')\, q_1 + \frac{1}{2(k-k')} \sin(k-k')\, q_1$$

оба равны нулю, так как kq_1 и $k'q_1$ являются кратными π. Следовательно, каждый из трех интегралов

$$\int d_x d_x'\, dS \text{ и т. д.},$$

на которые может быть разложено выражение (77), обращается в нуль.

Легко видеть, что подобный же результат имеет место и для магнитной энергии. Достаточно заметить, что в том состоянии, которое выражается формулой (76), составляющие магнитной силы даются выражениями

$$h_x = 8f'a \sin\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

$$h_y = 8g'a \cos\frac{n\mu_1 x}{c}\sin\frac{n\mu_2 y}{c}\cos\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

$$h_z = 8h'a \cos\frac{n\mu_1 x}{c}\cos\frac{n\mu_2 y}{c}\sin\frac{n\mu_3 z}{c}\sin n(t+p),$$

где

$$f' = \mu_2 h - \mu_3 g, \quad g' = \mu_3 f - \mu_1 h, \quad h' = \mu_1 g - \mu_2 f$$

суть постоянные, определяющие направление, перпендикулярное как (μ_1, μ_2, μ_3), так и (f, g, h).

Если, далее, принять во внимание то, что было сказано про интегралы (78), можно найти, что в параллелепипеде содержится электрическая энергия

$$4(f^2+g^2+h^2)\,q_1q_2q_3a^2\cos^2 n(t+p) = 4q_1q_2q_3a^2\cos^2 n(t+p)$$

и магнитная энергия

$$4q_1q_2q_3a^2\sin^2 n(t+p);$$

среднее значение каждого из этих выражений равно

$$2q_1q_2q_3a^2.$$

42. (Стр. 151.) Целый ряд соображений убеждает в том, что весьма трудно прийти к формуле, отличной от формулы Рэлея, поскольку мы будем придерживаться общих принципов теории электронов, развиваемых в первой главе; с другой стороны, следует заметить, что теория Джинса, несомненно, находится в противоречии с известными из опыта фактами. Сравним, например, испускательную способность E_1 полированной серебряной пластинки при 15° С для желтого света с испускательной способностью E_2 черного тела при 1200° С, ограничиваясь направлением, нормальным к пластинке. Серебро отражает около 90% падающего света, так что коэффициент поглощения пластинки равен $\frac{1}{10}$, и по закону Кирхгофа $E_1 = \frac{1}{10}E_3$, если через E_3 обозначить испускательную способность черного тела при 15° С. По теории Джинса (см. § 74) испускательная способность черного тела для света данной длины волны должна быть пропорциональна абсолютной температуре, так что имеем: $E_3 = \frac{288}{1473}E_2 = \frac{1}{5}E_2$ и $E_1 = \frac{1}{50}E_2$.

Но при температуре 1200° С черное тело будет светиться весьма ярко, и если бы испускательная способность серебряной пластинки при 15° С была только в 50 раз меньше, пластинка, конечно, была бы видима в темноте.

Следует заметить, что мы основывали наши рассуждения на законе Кирхгофа, применимость которого Джинсом не отрицается. Действительно, существенным пунктом вышеприведенного доказательства было то, что при таких температурах, при которых черное тело обладает заметной испускательной способностью для рассматриваемых лучей, никак не может быть, чтобы для какого-нибудь другого тела был весьма мал *только один* из коэффициентов E или A. Можно было ожидать, что серебряная пластинка будет испускать значительное количество света, так как ее коэффициент поглощения указывает на то, что на самом деле обмен энергией между ее частичками и эфиром *не* очень мал.

Из фактов, подобных вышеприведенному, вытекает, что, если мы исключим случай весьма длинных волн, все тела испускают гораздо меньше света соответственно их коэффициенту поглощения, чем это следует из формулы Джинса. Единственное уравнение, удовлетворительно представляющее наблюдаемые явления, есть уравнение Планка; повидимому, необходимо допустить, что для коротких волн связь между материей и энергией осуществляется не свободными электронами, но частицами другого рода, подобными резонаторам Планка, к которым по каким-то причинам теорема равномерного распределения энергии неприложима. По всей вероятности, эти частицы должны быть таковы, что их колебания и действия, ими вызываемые, не могут быть должным образом описаны при помощи обыкновенных уравнений теории электронов; должны быть сделаны некоторые новые предположения, подобные гипотезе Планка о конечных элементах энергии.

Не следует, однако, думать, что все затруднения могут быть разъяснены таким путем. Пусть во многих, пусть даже в большинстве случаев резонаторы Планка имеют первенствующее значение; все же явления проводимости делают в высшей степени вероятным, что по крайней мере металлы содержат также свободные электроны, движение и излучение которых могут быть в точности описаны нашими формулами. Трудно усмотреть, каким образом формула, подобная формуле Планка, могла бы быть приложена к испусканию и поглощению, вызываемому такими частичками. Поэтому эта формула, повидимому, требует, чтобы свободные электроны, наверное существующие внутри металла, отличались полной неактивностью. Но это еще не все. Если мы правы в том, что приписываем испускание и поглощение металла двум различным агентам, а именно свободным электронам в случае длинных волн и (по основаниям, приведенным в § 60) резонаторам в случае коротких волн, то мы должны принять, что для промежуточных длин волн в явлениях принимают участие оба рода частичек. Тогда возникает вопрос, каким путем осуществляется равновесие при таких сложных обстоятельствах.

Следует добавить, что некоторые затруднения возникают даже в случае длинных волн. На эти затруднения обратил внимание Дж. Дж. Томсон [1]).

Я закончу это рассуждение замечанием об окончательном состоянии, требуемом по теории Джинса. Я беру на себя смелость утверждать, что невозможно составить себе ясное представление о таком состоянии, при котором энергия равномерно распределена по бесконечному количеству степеней свободы. Поэтому можно думать, что такое окончательное состояние вряд ли достигается в действительности; можно полагать, что энергия непрерывно стремится к равномерному распределению, не достигая его за конечный промежуток времени.

42*. (Стр. 151.) [1915] Позднейшие исследования показали, что, по всей вероятности, для систем, подчиняющихся обычным законам динамики и электромагнетизма, теорема равномерного распределения энергии имеет место. Удовлетворительная теория излучения требует поэтому глубокого изменения основных принципов. Пока же мы должны удовольствоваться гипотезой квантов Планка.

Мы не можем говорить здесь о том развитии, которое получила эта столь важная теория, но один результат нужно здесь отметить.

Планк находит, что средняя энергия резонатора, частота колебаний которого равна ν, дается выражением

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Если kT много больше $h\nu$, знаменатель можно заменить выражением

$$\frac{h\nu}{kT},$$

и наша формула приобретает вид

$$E = kT.$$

Это — то значение, которое требуется по теореме равномерного распределения энергии. Мы видим отсюда, что эта теорема применима только в том случае, если температура достаточно высока. Для более низких температур E меньше, чем kT,

---

[1]) J. J. Thomson, The corpuscular theory of matter, стр. 85.

и даже, если kT значительно меньше $h\nu$, мы можем написать:

$$\frac{E}{kT}=\frac{h\nu}{kT}\varepsilon^{-\frac{h\nu}{kT}};$$

эта величина весьма мала.

Предложенные Планком резонаторы являются «линейными» резонаторами: каждый из них состоит, например, из одного электрона, колеблющегося вдоль прямой линии. Если число степеней свободы вибратора больше, полная энергия тоже увеличивается, и мы, повидимому, можем установить, как общее правило, что система, способная совершать известное число основных колебаний, находясь в равновесии с телами при температуре T, берет на каждую из своих степеней свободы энергию E.

Мы можем приложить это правило и к случаю эфира, содержащегося в прямоугольном ящике, — случаю, который мы рассматривали в §§ 73 и 74 [1]).

Мы нашли (стр. 146—149) для числа основных колебаний, длины волн которых лежат в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, выражение

$$\frac{8\pi q_1q_2q_3}{\lambda^4}d\lambda.$$

Каждое из этих колебаний соответствует одной степени свободы, и мы поэтому должны умножить

$$E=\frac{h\nu}{\varepsilon^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

на это число. Заменяя ν через $\frac{c}{\lambda}$, получаем таким путем:

$$\frac{8\pi ch}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{ch}{k\lambda T}}-1}q_1q_2q_3\cdot d\lambda.$$

Если нам нужно узнать энергию единицы объема, нам остается только разделить на объем параллелепипеда $q_1q_2q_3$. Мы видим, что результат находится в согласии с формулой излучения Планка (132).

43. (Стр. 157.) В первых опытах Зеемана не удалось полностью разделить составляющие; было обнаружено только расширение линий, и заключения были выведены из этого расширения и из поляризации на краях линий.

44. (Стр. 169.) Для больших значений координат коэффициенты c могут быть их функциями. Их можно, впрочем, при-

---

1) P. Debye, Ann. Phys. 33 (1910), стр. 1427.

нимать за постоянные, если мы будем ограничиваться очень малыми колебаниями.

45. (Стр. 171.) В результате исключения $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ из уравнений (176) получаем:

$$\begin{vmatrix} f_1 - m_1 n^2, & -inc_{12}, & \ldots, & -inc_{1\mu} \\ -inc_{21}, & f_2 - m_2 n^2, & \ldots, & -inc_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ -inc_{\mu 1}, & -inc_{\mu 2}, & \ldots, & f_\mu - m_\mu n^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (79)$$

Раскладывая определитель, получаем, во-первых, главный член

$$\Pi = (f_1 - m_1 n^2)(f_2 - m_2 n^2) \ldots (f_\mu - m_\mu n^2),$$

а, во-вторых, члены, содержащие в виде множителей два из коэффициентов c. Так как эти коэффициенты весьма малы, мы можем пренебречь всеми остальными членами, которые содержат более двух множителей такого рода. Один из указанных членов получается, если заменить в главном члене два множителя $f_k - m_k n^2$ и $f_l - m_l n^2$ через $-inc_{kl} \cdot inc_{lk} = -n^2 c_{kl}^2$. Отсюда, обозначая через Π_{kl} произведение, которое остается, если опустить в Π множители $f_k - m_k n^2$ и $f_l - m_l n^2$, мы можем написать вместо (*79*):

$$\Pi - n^2 \sum_{kl} c_{kl}^2 \Pi_{kl} = 0; \qquad (80)$$

это уравнение может быть удовлетворено значениями n^2, весьма мало отличающимися от корней $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\mu^2$ уравнения

$$\Pi = 0,$$

определяемого выражением (172).

Итак, в числе корней будет один такой корень:

$$n^2 = n_k^2 + \delta, \qquad (81)$$

где δ весьма мало. В самом деле, если это значение подставить в (*80*), можно заменить n^2 через n_k^2 во всех произведениях Π_{kl}, и то же самое можно проделать с множителями первого члена Π за исключением только $f_k - m_k n^2$, вместо которого мы должны написать $-m_k\delta$. Таким путем Π превращается в

$$-m_k \delta \Pi_k (n_k^2);$$

здесь последний член обозначает произведение Π, если опустить указанный множитель и подставить $n^2 = n_k^2$ в остающихся множителях.

В сумме, входящей в *(80)*, только те члены отличны от нуля, в которые не входит множитель $f_k - m_k n^2$ (соответствующий частному значению, выбранному нами для k). Наше выражение поэтому принимает вид

$$-m_k \delta \Pi_k(n_k^2) - n_k^2 \sum_l c_{kl}^2 \Pi_{kl}(n_k^2) = 0,$$

откуда непосредственно получается значение δ.

Это значение может быть положительным или отрицательным, но, так как оно весьма мало, правая часть *(81)* во всяком случае положительна; она дает действительное значение для частоты:

$$n = n_k + \frac{\delta}{2n_k}.$$

46. (Стр. 172.) Уравнение *(79)* можно несколько упростить, если разделить горизонтальные строчки определителя на $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$ и т. д. и затем подобным же образом поступить с вертикальными столбцами. Полагая

$$\frac{c_{kl}}{\sqrt{m_k m_l}} = e_{kl}, \qquad (82)$$

так что

$$e_{kl} = -e_{lk}, \qquad (83)$$

и пользуясь (172), получаем:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1\mu} \\ -ine_{21}, & n_2^2 - n^2, & \ldots, & -ine_{2\mu} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -ine_{\mu 1}, & -ine_{\mu 2}, & \ldots, & n_\mu^2 - n^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (84)$$

Предположим теперь, что из частот некоторое количество k,— например первые k частот $n_1, n_2, \ldots$ — имеет общее значение ν; будем искать значение n, удовлетворяющее условию *(84)* и приблизительно равное ν. Когда n принимает значение такого рода, все элементы определителя за исключением $n_{k+1}^2 - n^2, \ldots, n_\mu^2 - n^2$ являются весьма малыми величинами. Поэтому значительно превалирует та часть, которая содержит эти $\mu - k$ элементов, а именно часть

$$(n_{k+1}^2 - n^2)\ldots(n_\mu^2 - n^2) \begin{vmatrix} n_1^2 - n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1k} \\ -ine_{21}, & n_2^2 - n^2, & \ldots, & -ine_{2k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -ine_{k1}, & -ine_{k2}, & \ldots & n_k^2 - n^2 \end{vmatrix}.$$

Ввиду этого мы заменим (*84*) выражением

$$\begin{vmatrix} n_1^2-n^2, & -ine_{12}, & \ldots, & -ine_{1k} \\ -ine_{21}, & n_2^2-n^2, & \ldots, & -ine_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -ine_{k1}, & -ine_{k2}, & \ldots, & n_k^2-n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Наконец, так как величины e весьма малы, мы заменим n через ν там, где оно умножается на e, так что получаем:

$$\begin{vmatrix} \nu^2-n^2, & -i\nu e_{12}, & \ldots, & -i\nu e_{1k} \\ -i\nu e_{21}, & \nu^2-n^2, & \ldots, & -i\nu e_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -i\nu e_{k1}, & -i\nu e_{k2}, & \ldots, & \nu^2-n^2 \end{vmatrix} = 0; \qquad (85)$$

это уравнение — степени k относительно n^2.

Далее, в силу соотношений (*83*) последний определитель не изменится при перемене знака во всех его элементах, содержащих e (это скажется только в том, что горизонтальные строчки сделаются равными первоначальным вертикальным столбцам). Отсюда, раскрывая определитель, видим, что уравнение может содержать только такие члены, в которые входит четное число этих элементов, и, следовательно, имеет вид

$$(\nu^2-n^2)^k + P_1(\nu^2-n^2)^{k-2} + P_2(\nu^2-n^2)^{k-4} + \ldots = 0, \qquad (86)$$

где P_1 составлено из членов, содержащих *два* множителя вида $i\nu e$, P_2 — из членов, содержащих *четыре* таких множителя, и т. д.

Отсюда следует, что коэффициенты P являются действительными величинами. Но мы можем пойти далее и доказать, что если рассматривать ν^2-n^2 как неизвестную величину, все корни уравнения (*85*) или (*86*) являются действительными.

Чтобы доказать это, мы заметим, что, имея в виду (*85*) и приняв за ν^2-n^2 один из его корней, мы можем удовлетворить уравнения

$$\begin{gathered} (\nu^2-n^2)x_1 - i\nu e_{12}x_2 - \ldots - i\nu e_{1k}x_k = 0, \\ -i\nu e_{21}x_1 + (\nu^2-n^2)x_2 - \ldots - i\nu e_{2k}x_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -i\nu e_{k1}x_1 - i\nu e_{k2}x_2 - \ldots + (\nu^2-n^2)x_k = 0 \end{gathered}$$

некоторыми значениями $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые в общем случае являются комплексными величинами. Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ будут их сопряженные величины. Тогда, умножая уравнения соответственно на $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ и складывая, получаем:

$$(\nu^2 - n^2) \sum_j x_j \overline{x}_j - \nu \sum_{jl} i\,(e_{jl} x_l \overline{x}_j + e_{lj} x_j \overline{x}_l) = 0. \qquad (87)$$

Полагая теперь

$$x_j = \xi_j + i\eta_j, \quad \overline{x}_j = \xi_j - i\eta_j, \quad x_l = \xi_l + i\eta_l, \quad \overline{x}_l = \xi_l - i\eta_l,$$

имеем:

$$x_j \overline{x}_j = \xi_j^2 + \eta_j^2,$$

и в силу (*83*)

$$i\,(e_{jl} x_l \overline{x}_j + e_{lj} x_j \overline{x}_l) = 2e_{jl}\,(\xi_l \eta_j - \xi_j \eta_l).$$

Обе суммы в (*87*) являются поэтому действительными и таким же должно быть выражение $\nu^2 - n^2$.

Мы должны теперь различать случаи четного и нечетного k. В первом случае (*86*) является уравнением степени $\frac{1}{2}k$, если рассматривать $(\nu^2 - n^2)^2$ как неизвестную величину, и, так как $\nu^2 - n^2$ должно быть действительным, все его корни положительны. Называя их $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \ldots$, получаем решение

$$n^2 - \nu^2 = \pm\alpha, \quad \pm\beta, \quad \pm\gamma, \ldots,$$

и отсюда

$$n = \nu \pm \frac{\alpha}{2\nu}, \quad \nu \pm \frac{\beta}{2\nu}, \quad \nu \pm \frac{\gamma}{2\nu}, \ldots \qquad (88)$$

— всего k значений частоты.

При нечетном k в уравнение (*86*) входит множитель $\nu^2 - n^2$, так что один из корней будет:

$$n = \nu,$$

соответственно первоначальной спектральной линии. Если мы разделим уравнение на $\nu^2 - n^2$, мы придем к первому случаю, так что теперь, кроме $n = \nu$, мы имеем $k - 1$ корней вида (*88*).

В частном случае трех эквивалентных степеней свободы уравнение (*86*) приобретает вид

$$(\nu^2 - n^2)^3 + (\nu^2 - n^2)\,\nu^2\,(e_{23}e_{32} + e_{31}e_{13} + e_{12}e_{21}) = 0;$$

для него будем иметь: $n^2 - \nu^2 = 0$ и

$$n^2 - \nu^2 = \pm\nu\sqrt{e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2},$$

откуда непосредственно следует (177), если заменить ν через n_1 и вместо e_{23}, e_{31}, e_{12} подставить их значения (*82*).

Доктору А. Паннекуку я обязан замечанием относительно распространения вышеприведенной теории на случаи более чем трех эквивалентных степеней свободы.

47. (Стр. 173.) Что расстояния между магнитными составляющими спектральной линии будут пропорциональны интенсивности магнитного поля (для данного направления поля), вытекает также из общего уравнения (86). Достаточно заметить, что каждая величина e пропорциональна $|\boldsymbol{H}|$. Поэтому P_1 пропорционально $\boldsymbol{H}^2$, P_2 пропорционально $\boldsymbol{H}^4$ и т. д. Значения $n^2-\nu^2$, которые удовлетворяют уравнению, изменяются пропорционально самому $|\boldsymbol{H}|$, и так как они весьма малы, то же относится и к $n-\nu$.

48. (Стр. 183.) В нижеследующей теории колебания системы четырех электронов мы будем обозначать через a ребро тетраэдра в положении равновесия, через l — расстояние от центра O до одного из ребер, через r — радиус описанной сферы и через ϑ — угол между радиусом, проведенным к одной из вершин, и ребром, оканчивающимся в этой вершине. Имеем:

$$\cos\vartheta=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad l=\frac{1}{4}a\sqrt{2},\quad r=\frac{1}{4}a\sqrt{6}.$$

В состоянии равновесия на один из электронов A действуют отталкивательные силы со стороны трех других электронов, каждая из которых равна

$$\frac{e^2}{4\pi a^2},$$

и сила, вызываемая положительным зарядом. Эта последняя сила такова, как если бы в точку O был помещен заряд $\mathrm{e}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0$. Отсюда получаем условие равновесия

$$\frac{3e^2}{4\pi a^2}\cos\vartheta+\frac{e\mathrm{e}}{4\pi r^2}=0,$$

или

$$\rho_0=-\frac{3e}{\pi a^3}.$$

Мы легко найдем частоту первого вида колебаний, если заметим, что при смещении всех электронов на расстояние $r+\delta$ от центра, где δ бесконечно мало, результирующая сила, действующая на один из них, останется равной нулю, если притяжение, вызываемое положительной сферой, останется эквивалентным притяжению заряда e, сосредоточенного в O. Но на самом деле получается некоторая притягательная результирующая сила, вызываемая притяжением положительного заряда, заключенного между сферическими поверхностями радиусов r и $r+\delta$. Так как этот заряд равен $4\pi r^2\rho\delta$ и сила, с которой он действует на один из электронов, равна $e\rho\delta$, получаем уравнение движения

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2}=e\rho\delta,$$

откуда вычисляется частота:

$$n^2=-\frac{e\rho}{m}.$$

Рассмотрим, далее, движение, которое в тексте описано как закручивание вокруг оси OX. Формулу для этого случая проще всего найти, если остановиться на потенциальной энергии системы. Когда ребра AB и CD повернуты вокруг OX на равные углы φ в противоположных направлениях, два из отрезков AC, AD, BC, BD получают значение

$$\sqrt{4l^2+a^2\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi-\varphi\right)}=a\left(1-\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{8}\varphi^2\right),$$

а два других —

$$a\left(1+\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{8}\varphi^2\right).$$

Потенциальная энергия, вызываемая взаимодействием частичек, равна поэтому

$$2\cdot\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^2}{a\left(1-\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{8}\varphi^2\right)}+\frac{e^2}{a\left(1+\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{8}\varphi^2\right)}\right\}=$$

$$=\frac{e^2}{\pi a}\left(1+\frac{3}{8}\varphi^2\right).$$

Ввиду того, что потенциальная энергия по отношению к положительной сфере осталась без изменения (так как каждый электрон сохранил свое расстояние от центра r), а кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2,$$

уравнение движения приобретает вид

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{3e^2}{8\pi a}\varphi^2=\text{const},$$

откуда для частоты получаем:

$$n^2=\frac{3e^2}{4\pi a^3m}=-\frac{\rho_0 e}{4m}.$$

Рассматривая колебания, которые даются в тексте уравнениями (181) и (182), мы можем считать, что система имеет только две степени свободы; ее конфигурация полностью определяется координатами p и g.

На этот раз мы будем применять общую теорию колеблющихся систем, исходя из формул для потенциальной энергии U и кинетической энергии T, выраженных как функции от $p, g, \dot{p}, \dot{g}$.

Если мы примем, что потенциальная энергия равна нулю у двух частиц, отстоящих друг от друга на расстоянии a, их потенциальная энергия на расстоянии $a+\delta a$ будет:

$$\frac{e^2}{4\pi(a+\delta a)}-\frac{e^2}{4\pi a}=\frac{e^2}{4\pi}\left\{-\frac{\delta a}{a^2}+\frac{(\delta a)^2}{a^3}\right\}.$$

Так как значение δa равно $2g$ для пары AB, $-2g$ для CD и $\frac{g^2}{a}$ для остальных пар, мы получим следующее выражение для взаимной потенциальной энергии четырех частичек:

$$\frac{e^2}{\pi a^3}g^2=-\frac{1}{3}e\rho_0 g^2. \tag{89}$$

Что касается u, потенциальной энергии частички по отношению к положительной сфере, мы можем написать для нее выражение $e(\varphi-\varphi_0)$, если потенциал, вызываемый сферой, имеет значение φ_0 для положения равновесия частички и значение φ для ее нового положения. Так как φ есть функция расстояния r от центра, то мы можем написать, обозначая через δr изменение величины r:

$$u=e\left\{\frac{d\varphi}{dr}\delta r+\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}(\delta r)^2\right\}.$$

Принимая во внимание, что по уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}=-\rho$$

и что электрическая сила $-\frac{d\varphi}{dr}$, действующая на электрон в его первоначальном положении, равна

$$\frac{e}{4\pi r^2}=\frac{1}{3}\rho_0 r,$$

получаем:

$$u=e\left\{-\frac{1}{3}\rho_0 r\delta r+\left(\frac{1}{3}\rho_0-\frac{1}{2}\rho\right)(\delta r)^2\right\}. \tag{90}$$

Если $A'B'$ есть смещенная прямая AB и E' — ее средняя точка, имеем:

$$OE' = l + p,\ E'A' = \frac{1}{2}a + g,$$

$$OA' = \sqrt{(l+p)^2 + \left(\frac{1}{2}a + g\right)^2}.$$

Отсюда для электрона A получаем:

$$\delta r = \frac{1}{2r}(2lp + ag) - \frac{1}{8r^3}(2lp + ag)^2 + \frac{1}{2r}(p^2 + g^2).$$

То же значение получится для B; меняя знаки p и g, получаем значения для C и D. Подстанляя в (*90*) и беря сумму четырех значений, получаем:

$$e\left\{\frac{1}{2}(\rho_0 - \rho)\frac{1}{r^2}(2lp + ag)^2 - \frac{2}{3}\rho_0(\rho^2 + g^2)\right\};$$

складывая с (*89*) и полагая затем

$$\alpha = -\frac{e\rho}{3m},\quad \beta = \frac{e(\rho_0 - \rho)\sqrt{2}}{3m},\quad \gamma = \frac{e(\rho_0 - 4\rho)}{6m},$$

имеем:

$$U = e\left\{\frac{1}{2}(\rho_0 - \rho)\frac{1}{r^2}(2lp + ag)^2 - \frac{1}{3}\rho_0(2p^2 + 3g^2)\right\} =$$

$$= 2m(\alpha p^2 + 2\beta pg + \gamma g^2).$$

Так как квадрат скорости равен для каждого электрона $\dot{p}^2 + \dot{g}^2$, имеем:

$$T = 2m(\dot{p}^2 + \dot{g}^2); \tag{91}$$

уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) + \frac{\partial U}{\partial p} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}}\right) + \frac{\partial U}{\partial g} = 0$$

принимают вид

$$\ddot{p} + \alpha p + \beta g = 0,\quad \ddot{g} + \beta p + \gamma g = 0.$$

Если мы положим:

$$p = k\cos nt,\quad g = sp,$$

постоянные n и s определятся уравнениями

$$-n^2 + (\alpha + \beta s) = 0,\quad -sn^2 + (\beta + \gamma s) = 0,$$

откуда легко вывести (181) и (183).

При вычислении влияния магнитного поля на колебания, к которым относится формула (183), мы можем положить, что три вида движения, соответствующие определенному значению s и в отсутствии магнитного поля имеющие одну и ту же же частоту, скажем n_0, являются единственным видом движения, который способна совершать система. Возвращаясь к формулам § 90, мы будем обозначать через p_1, p_2, p_3 три смещения, общие для всех электронов, встречающихся в трех видах движения, причем это смещение параллельно OX в первом виде движения, OY — во втором и OZ — в третьем. При этом следует иметь в виду, что теперешнее p_1 есть то, что мы в § 100 обозначили через p, и что в каждом случае смещения p соединяются с поперечными смещениями $g = \pm sp$.

Уравнение (91) дает для каждого вида движения:

$$T = 2m(1+s^2)\dot{p}^2,$$

так что коэффициенты m_1, m_2, m_3, введенные в § 89, имеют общее значение

$$m_0 = 4m(1+s^2). \tag{92}$$

Коэффициенты f_1, f_2, f_3 тоже равны друг другу, и если мы подставим

$$p_1 = q_1\varepsilon^{int},\ p_2 = q_2\varepsilon^{int},\ p_3 = q_3\varepsilon^{int}$$

[см. (175)], мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m_0(n_0^2-n^2)\,q_1 - in_0c_{12}q_2 - in_0c_{13}q_3 = 0,\\ -in_0c_{21}q_1 + m_0(n_0^2-n^2)\,q_2 - in_0c_{23}q_3 = 0,\\ -in_0c_{31}q_1 - in_0c_{32}q_2 + m_0(n_0^2-n^2)\,q_3 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

соответствующие (176); они дают для частот магнитного триплета [см. (177)]:

$$n_0 \text{ и } n_0 \pm \frac{1}{8m(1+s^2)}\sqrt{c_{23}^2 + c_{31}^2 + c_{12}^2}. \tag{94}$$

Остается определить коэффициенты c, для чего нам нужно вернуться к (173).

Выражение $P_1\delta p_1$ представляет работу, производимую при виртуальном смещении δp_1 электромагнитными силами, которые возникают при движении электронов в магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Следовательно, $c_{12}\dot{p}_2\delta p_1$ есть работа этих сил, поскольку они вызываются скоростями частичек в движении, определяемом $\dot{p}_2$. Вычислив эту работу, мы найдем и значение c_{12}.

Оказывается выгодным ввести прямолинейные координаты наших четырех частичек в их положениях равновесия. Если оси выбраны соответствующим образом, эти координаты таковы: для A: l, l, l; для B: $l, -l, -l$; для C: $-l, l, -l$ и для D: $-l, -l, l$.

Когда координата p_1 изменяется на δp_1, четыре частички испытывают смещение, равное δp_1, в направлении OX одновременно со смещениями $s\delta p_1$, направленными вдоль прямой AB для A и B и вдоль прямой CD для C и D. Принимая во внимание, что в случае положительного $s\delta p_1$ расстояние от OX увеличивается для A и B и уменьшается для C и D, и полагая $s' = s\sqrt{\frac{1}{2}}$, находим для прямоугольных составляющих смещения

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } A: & \delta p_1, & s'\delta p_1, & s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad B: & \delta p_1, & -s'\delta p_1, & -s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad C: & \delta p_1, & -s'\delta p_1, & s'\delta p_1, \\ \text{»} \quad D: & \delta p_1, & s'\delta p_1, & -s'\delta p_1. \end{array}\right\} \tag{95}$$

Если здесь вместо δp_1 мы напишем $\dot{p}_1$, мы получим составляющие скоростей, имеющиеся при движении $\dot{p}_1$. Подобным же образом составляющие скоростей в движении $\dot{p}_2$ суть:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } A: & s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad B: & -s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad C: & -s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & -s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad D: & s'\dot{p}_2, & \dot{p}_2, & -s'\dot{p}_2. \end{array}\right\} \tag{96}$$

Мы должны теперь остановить наше внимание на электромагнитных силах, вызываемых этими скоростями, и определить работу этих сил, соответствующую смещениям (95). Оказывается, что результат зависит только от составляющей H_z; поэтому мы будем с самого начала опускать все члены с H_x и H_y. Таким образом, мы напишем для составляющих электромагнитной силы, действующей на электрон:

$$\frac{e}{c}\mathfrak{v}_y H_z, \quad -\frac{e}{c}\mathfrak{v}_x H_z, \quad 0;$$

отсюда, подставляя $\mathfrak{v}_x$ и $\mathfrak{v}_y$ из (96), получаем следующие силы, действующие на частички в направлениях OX и OY:

$$\begin{array}{lll} \text{для } A: & \frac{e}{c} H_z\dot{p}_2, & -\frac{e}{c} H_z s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad B: & \frac{e}{c} H_z\dot{p}_2, & \frac{e}{c} H_z s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad C: & \frac{e}{c} H_z\dot{p}_2, & \frac{e}{c} H_z s'\dot{p}_2, \\ \text{»} \quad D: & \frac{e}{c} H_z\dot{p}_2, & -\frac{e}{c} H_z s'\dot{p}_2. \end{array}$$

Наконец, чтобы найти работу $c_{12}\dot{p}_2\delta p_1$, мы должны взять произведения этих величин и соответственных величин в первых двух столбцах (*95*) и результаты сложить. Это приводит к значению

$$c_{12}=4\frac{e}{c}H_z(1-s'^2)=4\frac{e}{c}H_z\left(1-\frac{1}{2}s^2\right);$$

подобным же образом имеем:

$$c_{23}=4\frac{e}{c}H_x\left(1-\frac{1}{2}s^2\right),\quad c_{31}=4\frac{e}{c}H_y\left(1-\frac{1}{2}s^2\right),$$

так что последний член в (*94*) получается равным

$$\pm\frac{e}{2cm}\,|H|\cdot\frac{1-\frac{1}{2}s^2}{1+s^2}.$$

Деля это выражение на соответствующий член в (164), находим:

$$\omega=\frac{1-\frac{1}{2}s^2}{1+s^2},\tag{97}$$

откуда легко вывести значения (184) и (185).

49. (Стр. 186.) Пусть $\rho-\rho_0$ стремится к пределу нуль с положительной стороны, так что по (182) $\nu=+\infty$. Принимая во внимание, что

$$4(\rho-\rho_0)\sqrt{2(1+2\nu^2)}=\frac{1}{2}(2\rho-\rho_0)\frac{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}{\nu}$$

и что предел

$$\frac{\sqrt{2(1+2\nu^2)}}{\nu}$$

равен 2, легко находим, что формулы (183)—(185) приводят к значениям, данным в тексте.

Тот же результат можно получить при предположении, что $\rho-\rho_0$ стремится к пределу нуль с отрицательной стороны.

Следует, однако, отметить, что, как это видно из (*97*), для одного из двух решений (именно для того, для которого $\omega=-\frac{1}{2}$) коэффициент s, определяемый (181), обращается в бесконечность; это указывает, что для данного решения $p=0$ (так как g должно быть конечным). Соответствующие колебания будут поэтому в предельном случае (§ 99) неэффективными, так как излучение вызывается колебаниями электронов в направлении OX.

50. (Стр. 186.) После того как мы нашли частоту n, мы можем вывести из уравнений (*93*) отношения между величинами q_1, q_2, q_3, которые определяют форму колебаний и природу испускаемого света. Введем некоторые сокращения, полагая

$$4\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}s^2\right)=\sigma, \tag{98}$$

так что

$$c_{23}=\sigma H_x, \quad c_{31}=\sigma H_y, \quad c_{12}=\sigma H_z;$$

для внешних линий триплета имеем на основании (*94*) и (*92*):

$$n^2-n_0^2=\pm\frac{n_0\sigma}{m_0}|H|, \tag{99}$$

где под $|H|$ понимается положительное число.

Если h есть единичный вектор, направление которого совпадает с направлением магнитной силы, уравнения (*93*) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \pm q_1+i(h_z q_2-h_y q_3)=0,\\ \pm q_2+i(h_x q_3-h_z q_1)=0,\\ \pm q_3+i(h_y q_1-h_x q_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Пусть

$$q_1=a_x+ib_x, \quad q_2=a_y+ib_y, \quad q_3=a_z+ib_z$$

будет система комплексных значений, удовлетворяющих этим условиям, и пусть a_x, b_x и т. д. будут составляющие некоторых векторов a и b.

Разделяя мнимую и действительную части выражения (*100*), получаем уравнения

$$\pm a-[bh]=0, \qquad \pm b+[ah]=0,$$

из которых видно, во-первых, что векторы a и b должны быть расположены под прямыми углами как к магнитному полю, так и друг к другу, и, во-вторых, что они должны быть равны по своей величине.

Теперь мы в состоянии определить природу света, испускаемого колеблющейся системой. Как мы уже нашли в § 39, излучение электрона зависит только от его ускорения. Отсюда мы заключаем, что, если мы имеем некоторое число одинаковых электронов, результирующее излучение будет таково же, как если бы мы имели одну частичку с таким же зарядом и ее смещение из положения равновесия было в каждый момент равно результирующей смещения отдельных электронов. В первом виде движения, рассмотренном нами выше, результирующее смещение, очевидно, равно $4p$ в направлении OX. Таким путем мы видим, что излучение, исходящее из тетраэдра, колеблющегося вышерассмотренным образом, равно излучению от одного электрона — «эквивалентного электрона», как мы его можем назвать, причем составляющие его смещения даются действительными частями выражений

$$4q_1\varepsilon^{int},\quad 4q_2\varepsilon^{int},\quad 4q_3\varepsilon^{int},$$

т. е. выражениями

$$\left.\begin{aligned} &4\boldsymbol{a}_x \cos nt - 4\boldsymbol{b}_x \sin nt, \\ &4\boldsymbol{a}_y \cos nt - 4\boldsymbol{b}_y \sin nt, \\ &4\boldsymbol{a}_z \cos nt - 4\boldsymbol{b}_z \sin nt. \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Движение эквивалентного электрона слагается поэтому из двух прямолинейных колебаний в направлениях векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с равными амплитудами $4|\boldsymbol{a}|$ и $4|\boldsymbol{b}|$ и с разностью фаз в четверть периода. Электрон движется поэтому с постоянной скоростью по кругу в плоскости, нормальной к магнитной силе; излучение будет в значительной степени такое же, что и по элементарной теории явления Зеемана.

Если мы в нашей формуле возьмем верхний знак, получим:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}\boldsymbol{h}],$$

откуда следует, что круговое движение, представляемое (*101*), направлено по часовой стрелке, если наблюдатель расположен с той стороны, куда направлены линии сил. Следовательно, в этом случае свет, испускаемый в направлений линий сил, поляризован по кругу вправо. Если мы возьмем нижний знак, получим левую поляризацию.

Далее, из уравнения (*99*) видно, что если σ положительно, частота больше для правой поляризации и меньше для левой, в противоположность тому, что мы имели в элементарной теории явления Зеемана. Обратное, впрочем, мы будем иметь для отрицательного σ. Так как заряд e отрицателен, из (*97*) и (*98*) следует, что σ и ω должны иметь разные знаки. Знак явления Зеемана будет поэтому такой же, какой мы получили из элементарной теории, или ему противоположный, смотря по тому, положительно или отрицательно ω.

51. (Стр. 189.) Когда частичка имеет поступательную скорость $\boldsymbol{v}$, силы, действующие на один из ее электронов, равны:

$$X = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_y\boldsymbol{H}_z - \boldsymbol{v}_z\boldsymbol{H}_y),\quad Y = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_z\boldsymbol{H}_x - \boldsymbol{v}_x\boldsymbol{H}_z),$$

$$Z = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}_x\boldsymbol{H}_y - \boldsymbol{v}_y\boldsymbol{H}_x).$$

Здесь, обозначая через x, y, z координаты электрона по отношению к центру частички и обозначая индексом 0 значения в этой точке, мы можем заменить $\boldsymbol{H}_x, \boldsymbol{H}_y, \boldsymbol{H}_z$ через

$$\boldsymbol{H}_{0x} + x\frac{\partial \boldsymbol{H}_x}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{H}_x}{\partial y} + z\frac{\partial \boldsymbol{H}_x}{\partial z} \text{ и т. д.} \qquad (102)$$

Подставляя это в выражения

$$\sum (yZ - zY) \text{ и т. д.}$$

для составляющих результирующей пары и пользуясь уравнениями § 104, находим:

$$\frac{e}{c}\left[v_x\frac{\partial H_y}{\partial y}\sum y^2 - v_y\frac{\partial H_x}{\partial y}\sum y^2 - \right.$$
$$\left. - v_z\frac{\partial H_x}{\partial z}\sum z^2 + v_x\frac{\partial H_z}{\partial z}\sum z^2\right] \text{ и т. д.}$$

или, так как

$$\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=-\frac{\partial H_x}{\partial x},$$

$$-\frac{eK}{c}\left(v_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial H_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) \text{ и т. д.}$$

Если поле постоянно и если в символе $\frac{dH}{dt}$ мы понимаем под H магнитную силу в точке, занимаемой частичкой в момент времени t, пара дается выражением

$$-\frac{eK}{c}\frac{dH}{dt},$$

и, так как момент инерции есть $2mK$, изменение угловой скорости k определяется выражением

$$\frac{dk}{dt}=-\frac{e}{2mc}\frac{dH}{dt}.$$

Отсюда, в том предположении, что частичка не вращалась, пока была вне поля, имеем:

$$k=-\frac{e}{2mc}H.$$

В этом вычислении мы не обращали внимания на электромагнитные силы, возникающие вследствие самого вращения. Поскольку магнитное поле можно считать однородным во всем объеме частички, эти силы не вызывают результирующей пары именно потому, что ось вращения параллельна линиям сил. Это видно из следующего. Если через r обозначить вектор, проведенный из центра к одному из электронов, получаем для линейной скорости этой частички

$$v=[kr],$$

а для электромагнитной силы, действующей на нее:

$$F=\frac{e}{c}[vH]=\frac{e}{c}\{(kH)r-(rH)k\}.$$

Момент этой силы по отношению к центру равен:

$$[\boldsymbol{rF}] = -\frac{e}{c}(\boldsymbol{rH})[\boldsymbol{rk}],$$

так что составляющие даются выражениями

$$-\frac{e}{c}(xH_x + yH_y + zH_z)(yk_z - zk_y) \text{ и т. д.} \qquad (103)$$

Отсюда находим для составляющих результирующего момента:

$$-\frac{e}{c}K(H_y k_z - H_z k_y) \text{ и т. д.,}$$

откуда видно, что этот момент равен нулю, когда $\boldsymbol{k}$ имеет направление $\boldsymbol{H}$.

Задача становится более сложной, если мы примем во внимание небольшие изменения магнитного поля от одной точки частички к другой. Я замечу только одно: если мы будем пользоваться значениями (*102*), мы должны прибавить к (*103*) члены третьего порядка по отношению к x, y, z, и что сумма этих членов во многих случаях пропадает, например, тогда, когда каждому электрону с координатами x, y, z соответствует другой электрон с координатами $-x$, $-y$, $-z$.

52. (Стр. 190.) Пусть $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}$ имеют то же значение, что и в предыдущем примечании, и пусть $\boldsymbol{v}$ будет абсолютная скорость электрона, $\boldsymbol{v}'$ — его относительная скорость по отношению к вращающейся частичке, так что

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{kr}] + \boldsymbol{v}'. \qquad (104)$$

Отсюда получаем для ускорения

$$\boldsymbol{q} = \dot{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{k}\dot{\boldsymbol{r}}] + \dot{\boldsymbol{v}}' = [\boldsymbol{kv}] + \dot{\boldsymbol{v}}'.$$

Изменение $\boldsymbol{v}'$ состоит из двух частей:

$$\dot{\boldsymbol{v}}' = [\boldsymbol{kv}'] + \boldsymbol{q}',$$

где вторая часть есть относительное ускорение, а первая — изменение, которое испытало бы $\boldsymbol{v}'$ в отсутствии такого ускорения; в этом случае $\boldsymbol{v}'$ просто будет вращаться вместе с частичкой. Так как в силу (*104*) мы можем написать:

$$[\boldsymbol{kv}'] = [\boldsymbol{kv}],$$

если пренебрежем квадратом $\boldsymbol{k}$, то мы приходим к формуле

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}' + 2[\boldsymbol{kv}].$$

53. (Стр. 202.) Здесь молчаливо подразумевалось, что ограничивающая сферический объем S поверхность σ не проходит

ни через одну частичку. Предположим, например, что молекулы поляризованы таким образом, что в каждой из них с правой стороны находится положительный электрон, а с левой — отрицательный; проведем OX в направлении направо. Тогда, если поверхность σ проходит всеми своими частями через пространство между частичками, интеграл $\int \rho x\, dS$ будет равен сумме электрических моментов, заключенных внутри поверхности частичек, и может быть с полным правом назван моментом части тела, заключенной внутри поверхности [см. уравнение (195)]. Если, напротив, поверхность проходит через молекулы, значение интеграла не будет просто зависеть от *целых* частичек, лежащих внутри объема S; при этом должно быть принято во внимание, что в добавление к этим последним поверхность σ заключает также некоторое количество отрицательных электронов с правой стороны и некоторое количество положительных электронов с левой. Даже если эти x добавочных электронов гораздо меньше, чем те x, которые принадлежат к целым частичкам, все же они могут привнести в интеграл значительную долю, так как разница между значениями x для положительной и отрицательной частиц сравнима с размерами самого объема S и поэтому значительно превышает соответствующую разницу для двух электронов в одной и той же частичке.

Нижеследующие замечания помогут, однако, рассеять все сомнения относительно справедливости соотношения

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \dot{\mathbf{P}}.$$

Когда молекулы расположены беспорядочно, как это имеет место в жидкостях и газах, некоторые из них (и даже некоторые электроны), конечно, пересекаются сферической поверхностью σ, которой мы пользовались при определении среднего значения $\overline{\varphi}$. Но в силу предположений, сделанных относительно размеров σ, этих пересеченных молекул будет гораздо меньше, чем молекул, полностью лежащих внутри поверхности, и если, вычисляя $\int \varphi\, dS$, мы опустим *части* молекул, заключенные внутри σ, это не приведет нас ни к какой ошибке; только функция φ должна обладать такими свойствами, что величина, привносимая одной из таких частей, немногим больше, чем то, что привносится одной из целых частичек.

Это условие является удовлетворенным при вычислении интеграла $\int \rho \mathbf{v}_x\, dS$, так как здесь нет никакой причины, почему скорости $\mathbf{v}$ могли бы иметь исключительные значения вблизи поверхности σ. Не изменяя значения интеграла, мы можем поэтому провести поверхность между частичками (слегка ее изменяя), и тогда мы можем быть уверены, что $\int \rho v_x dS = \frac{d}{dt}\int \rho x dS$ и что последний интеграл представляет полный электрический момент всех целых частичек в объеме S.

54. (Стр. 207.) Мы заметим прежде всего, что поле в непосредственном соседстве с поляризованной частичкой может быть определено по правилам электростатики, даже если электрический момент не постоянен. Возьмем, например, случай, рассмотренный в § 43. В примечании **23** мы установили, что на больших расстояниях члены, получающиеся при дифференцировании тригонометрических функций, гораздо больше, чем те члены, которые получаются при дифференцировании $\frac{1}{r}$. Эти последние, наоборот, превалируют, если мы ограничимся расстояниями, весьма малыми по сравнению с длиной волны; тогда [см. (88) и (89)] мы можем написать:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{p}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{p}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{a} = 0,$$

$$\boldsymbol{d} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \boldsymbol{h} = 0,$$

откуда вытекает, что поле идентично с электростатическим полем, которое мы имели бы, если бы $\boldsymbol{p}$ было постоянно.

Далее, следует заметить, что различие между средней электрической силой $\boldsymbol{E}$ и электрической силой, наблюдающейся в небольшой полости, зависит только от таких действий, которые происходят на весьма небольших расстояниях, так что мы можем оперировать с этим различием так, как если бы мы имели дело с электростатической системой.

Рассмотрим поэтому систему молекул с неизменными электрическими моментами и разберем некоторые подробности, касающиеся наблюдающейся в ней электрической силы.

Так как поле, производимое электронами, определяется выражениями

$$\Delta\varphi = -\rho,$$

$$\boldsymbol{d} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

мы имеем для средних значений:

$$\overline{\Delta\varphi} = -\overline{\rho},$$

$$\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{d}} = -\operatorname{grad}\overline{\varphi},$$

или, выражая то же словесно: средняя электрическая сила равна силе, которая была бы произведена зарядом, распределенным со средней, или, будем говорить, с «эффективной» плотностью $\overline{\rho}$.

В определении среднего значения $\bar{\varphi}$, приведенном в § 113, было ясно выражено, что объем S должен иметь сферическую форму. Легко видеть, однако, что мы можем придать ему какую угодно форму, лишь бы он был бесконечно мал в физическом смысле слова. Уравнение

$$\bar{\rho} S = \int \rho \, dS$$

поэтому, собственно говоря, означает, что для любого объема упомянутого рода эффективный заряд (понимая под этими словами произведение $\bar{\rho}$ и S) равен полному действительному заряду.

Рассмотрим теперь распределение эффективного заряда. В целях упрощения допустим, что молекула содержит два электрона, расположенных в точках A и B, с зарядами $-e$ и $+e$, и обозначим через $\mathbf{r}$ вектор AB. Таких векторов различной величины и направления будет столько, сколько имеется молекул. Если теперь длина этих векторов много больше, чем размеры электрона, мы можем пренебречь пересечениями ограничивающей поверхности объема S с самими электронами, но при этом будет большое число пересечений с прямыми AB. Этими пересечениями нельзя пренебрегать, так как для любой целой молекулы $\int \rho \, dS = 0$, тогда как каждое из упомянутых пересечений привносит в значение эффективного заряда внутри σ величину $-e$ или $+e$, смотря по тому, какой знак — положительный или отрицательный — имеет $\mathbf{r}_n$ (n есть внешняя нормаль к σ) (см. примечание 53). Значит, полный заряд внутри σ может быть представлен интегралом по поверхности. Чтобы найти ту часть его, которая соответствует элементу $d\sigma$ (бесконечно малому в физическом смысле слова), начнем с того, что остановим наше внимание на тех прямых AB, которые имеют некоторое определенное направление и некоторую определенную длину. Если начальные точки A распределены беспорядочно и если для рассматриваемой группы их число в единице объема равно ν, число пересечений с $d\sigma$ будет $\nu \mathbf{r}_n d\sigma$ при положительном $\mathbf{r}_n$ и $-\nu \mathbf{r}_n \, d\sigma$ при отрицательном $\mathbf{r}_n$. Поэтому часть, привносимая в заряд внутри σ, есть $-\nu e \mathbf{r}_n \, d\sigma$ в обоих случаях и вся доля, связанная с $d\sigma$, есть $-\sum \nu e \mathbf{r}_n \, d\sigma$, причем сумма распространяется на все группы прямых AB. Но $e\mathbf{r}$ есть электрический момент частички, $\nu e \mathbf{r}$ — момент выбранной группы на единицу объема и $\sum \nu e \mathbf{r}$ — полный момент единицы объема. Обозначая его через $\mathbf{P}$, получаем для вышеприведенного выражения $-\sum \nu e \mathbf{r}_n \, d\sigma$ значение $-\mathbf{P}_n$ и для эффективного заряда, заключенного внутри поверхности σ,

$$-\int \mathbf{P}_n \, d\sigma. \qquad (105)$$

Так как различие между $\boldsymbol{E}$ и электрической силой в полости зависит исключительно от состояния системы в непосредственной близости от рассматриваемой точки, мы можем теперь допустить, что поляризация $\boldsymbol{P}$ везде однородна. В этом случае интеграл (*105*) равен нулю для любой замкнутой поверхности, полностью лежащей внутри тела, так что можно сказать, что эффективный заряд сосредоточен на ограничивающей поверхности Σ. Его поверхностную плотность можно найти, если вычислить (*105*) для поверхности плоского цилиндра, основания которого являются сторонами элемента $d\Sigma$ и расстояние между которыми бесконечно мало по сравнению с размерами $d\Sigma$. Называя N нормаль к поверхности Σ, мы имеем на внешней плоскости $\boldsymbol{P}_n = 0$ (предполагая, что тело окружено эфиром), а на внутренней $\boldsymbol{P}_n = -\boldsymbol{P}_N$. Величина эффективного заряда, содержащегося в цилиндре, дается поэтому выражением $\boldsymbol{P}_N\, d\Sigma$; можно сказать, что заряд распределен по поверхности с плотностью $\boldsymbol{P}_N$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку A внутри тела. На основании сказанного электрическая сила $\boldsymbol{E}$ в этой точке производится зарядом $\boldsymbol{P}_N$ на ограничивающей поверхности Σ. Впрочем, если A находится в центре сферической полости, в этой точке будет наблюдаться добавочная электрическая сила $\boldsymbol{E}'$, производимая подобным же зарядом на стенках полости и, очевидно, имеющая направление $\boldsymbol{P}$. Величину этой силы можно найти следующим образом. Пусть a будет радиус сферы, $d\sigma$ — элемент поверхности, ϑ — угол между радиусом, проведенным к этому элементу, и поляризацией $\boldsymbol{P}$. Так как поверхностная плотность на $d\sigma$ равна $-|\boldsymbol{P}|\cos\vartheta$, получаем для силы, производимой в A,

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int |\boldsymbol{P}|\cos^2\vartheta\, d\sigma,$$

откуда

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{3}\boldsymbol{P}.$$

Наши предыдущие замечания показывают, что мы всегда можем пользоваться выражением

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}$$

для электрической силы в центре сферической полости, даже если поляризация тела изменяется от точки к точке и от одного момента времени к другому.

55. (Стр. 207.) В случае кубического расположения можно сказать, что все частички внутри сферы имеют один и тот же электрический момент $\boldsymbol{p}$. Принимая центр A сферы за начало координат, мы имеем для силы, производимой в направлении x

частичкой, расположенной в точке (x, y, z) на расстоянии r от центра,

$$\frac{p_x}{4\pi}\cdot\frac{3x^2-r^2}{r^5}, \quad \frac{p_y}{4\pi}\cdot\frac{3xy}{r^5}, \quad \frac{p_z}{4\pi}\cdot\frac{3xz}{r^5}.$$

Но суммы

$$\sum\frac{3x^2-r^2}{r^5}, \quad \sum\frac{3xy}{r^5}, \quad \sum\frac{3xz}{r^5}$$

равны нулю, если их распространить на все частички внутри сферы. Для второй и третьей сумм это следует непосредственно, если мы направим оси координат параллельно главным направлениям кубического распределения. Далее, при таком направлении осей

$$\sum\frac{3x^2-r^2}{r^5}=\sum\frac{3y^2-r^2}{r^5}=\sum\frac{3z^2-r^2}{r^5},$$

откуда видно, что каждое из этих выражений должно быть равно нулю, так как их сумма равна нулю.

56. (Стр. 207.) Следует отметить, что эта магнитная сила $\boldsymbol{H}$ вызывает силу

$$\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}],$$

действующую на электрон. Так как в пучке света $\boldsymbol{H}$, вообще говоря, того же порядка величины, что и электрическая сила $\boldsymbol{E}$ [см. уравнения (7)], эта сила имеет порядок величины $\frac{|\boldsymbol{v}|}{c}$ по сравнению с силой $e\boldsymbol{E}$. Поэтому ею можно пренебречь, так как амплитуды электронов чрезвычайно малы по сравнению с длиной волны, вследствие чего скорость колебания гораздо меньше, чем скорость распространения света.

56*. (Стр. 210.) [1915] Если подставить значение β [см. формулы (202) и (199)], соответствующее (206), в уравнение (230) (§ 134), которое определяет коэффициент поглощения, получится в точности тот же результат, который Рэлей[1]) нашел для поглощения света в газе. Это поглощение вызывается рассеянием лучей молекулами, так как содержащиеся внутри них электроны приводятся в колебание лучами падающего света и становятся поэтому центрами испускания. Так как энергия, излучаемая электроном, тесно связана с силой, даваемой (в § 40) уравнением (205), естественно, что величина поглощения будет определяться коэффициентом (206).

57. (Стр. 211.) Чтобы сравнить действие столкновений с действием сопротивления того рода, какой представлен выраже-

---

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. **47** (1899), стр. 375.

нием (197), мы рассмотрим сначала колебания, возникающие в изолированной частичке, электрон которой подвержен действию периодической электрической силы

$$F_x = p\cos nt \qquad (106)$$

и действию сил, определяемых выражениями (196) и (197). Уравнение движения

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eE_x - f\xi - g\frac{d\xi}{dt}$$

решается весьма легко, если, следуя методу, указанному в § 119, мы заменим (*106*) выражением

$$E_x = p\varepsilon^{int}.$$

Таким путем мы найдем для вынужденных колебаний:

$$\xi = \frac{pe}{f - mn^2 + ing}\,\varepsilon^{int} = \frac{pe}{m\,(n_0^2 - n^2) + ing}\,\varepsilon^{int}, \qquad (107)$$

где

$$n_0^2 = \frac{f}{m}.$$

Предположим сперва, что никакого истинного сопротивления нет, во что колебания электронов все время непрерывно нарушаются благодаря столкновениям, происходящим через неправильно чередующиеся интервалы. В этом случае движение каждой частички за промежуток времени от последнего столкновения вплоть до того момента времени t, для которого мы хотим вычислить ξ, определяется уравнением

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eE_x - f\xi,$$

общее решение которого будет:

$$\xi = \frac{pe}{m\,(n_0^2 - n^2)}\,\varepsilon^{int} + C_1\varepsilon^{in_0t} + C_2\varepsilon^{-in_0t}, \qquad (108)$$

где постоянные интегрирования C_1 и C_2 изменяются от одной частички к другой. Эти постоянные определяются значениями ξ и $\frac{d\xi}{dt}$, скажем $(\xi)_0$ и $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0$, непосредственно после последнего столкновения. Среди большого числа частичек мы можем выделить группу, все же достаточно многочисленную, для которой последнее столкновение произошло в определенный момент времени t_1. Допуская, что после столкновения все направления смещения и скорости являются одинаково вероятными, мы получим среднее значение ξ для этой группы, если в (*108*) определим C_1 и C_2 на основании условий, что для $t = t_1$ пропадают как ξ, так и $\frac{d\xi}{dt}$. В результате имеем:

$$\xi = \frac{pe}{m(n_0^2 - n^2)}\left\{\varepsilon^{int} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{n_0}\right)\varepsilon^{in_0(t-t_1)+int_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)\varepsilon^{-in_0(t-t_1)+int_1}\right\},$$

или, если положим: $t - t_1 = \vartheta$,

$$\xi = \frac{pe}{m(n_0^2 - n^2)}\varepsilon^{int}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{n_0}\right)\varepsilon^{i(n_0-n)\vartheta} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)\varepsilon^{-i(n_0+n)\vartheta}\right\}. \quad (109)$$

Это есть среднее значение ξ, взятое для определенного момента времени t и для тех частичек, для которых после последнего столкновения протекло время ϑ; мы получим выражение, которое можно будет сравнить с (*107*), если возьмем среднее значение выражения (*109*) для всех групп частичек, которые отличаются друг от друга величиной интервала ϑ.

Пусть N будет общее число рассматриваемых частичек и A — число столкновений, испытываемых ими в единицу времени, так что промежуток времени, упоминаемый в тексте, равен

$$\frac{N}{A} = \tau.$$

Так как столкновения следуют друг за другом совершенно нерегулярно, мы можем принять, что число частичек, для которых интервал ϑ лежит в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, равно

$$A\varepsilon^{-\frac{\vartheta}{\tau}}d\vartheta = \frac{N}{\tau}\varepsilon^{-\frac{\vartheta}{\tau}}d\vartheta; \quad (110)$$

к этому результату мы приходим путем рассуждений, подобных тем, которыми мы пользовались в примечании **36**.

Мы должны поэтому перемножить (*109*) и (*110*), проинтегрировать от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \infty$ и разделить на N. Таким путем мы получаем для окончательного среднего значения смещения

$$\xi = \frac{pe}{m\left(n_0^2 + \frac{1}{\tau^2} - n^2\right) + 2\frac{imn}{\tau}}\varepsilon^{int}.$$

Пренебрегая членом $\frac{1}{\tau^2}$ в знаменателе, мы видим, что под влиянием столкновений явление будет происходить совершенно так же, как если бы существовало сопротивление, определяемое выражением

$$g = \frac{2m}{\tau}.$$

58. (Стр. 219.) В случае смеси электрический момент $\boldsymbol{P}$ слагается из стольких отдельных частей $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, ..., сколько есть составляющих. Рассуждая, как в §§ 116—119, мы можем установить для каждой компоненты формулы, подобные (200), так что, если мы положим $a = \frac{1}{3}$, то получим для первой составляющей смеси [32]:

$$m_1' \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_1}{\partial t^2} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P} - f_1' \boldsymbol{P}_1,$$

для второй:

$$m_2' \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_2}{\partial t^2} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P} - f_2' \boldsymbol{P}_2,$$

и т. д. Отсюда, если все зависимые переменные изменяются по закону e^{int},

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}}{f_1' - m_1' n^2}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \frac{\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}}{f_2' - m_2' n^2}, \ \ldots$$

и если положим:

$$\frac{1}{f_1' - m_1' n^2} + \frac{1}{f_2' - m_2' n^2} + \ldots = \omega,$$

$$\boldsymbol{P} = \omega\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}\right).$$

Комбинируя это выражение с (192), получаем:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1 + \frac{2}{3}\omega}{1 - \frac{1}{3}\omega}\boldsymbol{E}.$$

Для показателя преломления имеем:

$$\mu^2 = \frac{1 + \frac{2}{3}\omega}{1 - \frac{1}{3}\omega},$$

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \frac{1}{3}\omega = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{f_1' - m_1' n^2} + \frac{1}{f_2' - m_2' n^2} + \ldots\right).$$

Но каждый член $\frac{1}{3(f' - m' n^2)}$ дает значение $\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2}$ для одной из компонент, плотность которой внутри смеси равна $m\rho$; это значение можно получить, если умножить постоянную r для рассматриваемой компоненты на плотность $m\rho$. Отсюда непосредственно получается уравнение (218).

59. (Стр. 221.) Если положить $a = \frac{1}{3}$, то на основании уравнений (220) смещения ξ_1, ξ_2, ... определяются выражениями

$$(f_1 - m_1 n^2)\,\xi_1 = e_1\left(\boldsymbol{E}_x + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_x\right) \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$Ne_1\xi_1 = \frac{Ne_1^2}{f_1 - m_1 n^2}\left(\boldsymbol{E}_x + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}_x\right) \text{ и т. д.}$$

Подобные же формулы можно написать и для $Ne_1\eta_1$, $Ne_1\zeta_1$ и т. д. Отсюда, суммируя:

$$\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{3}\boldsymbol{P}\right)\left\{\frac{Ne_1^2}{f_1 - m_1 n^2} + \frac{Ne_2^2}{f_2 - m_2 n^2} + \ldots\right\},$$

откуда легко получается формула (222).

60. (Стр. 227.) Прямой результат подстановки есть

$$\left(\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2 k^2}{n^2}\right) - i\,\frac{2c^2 k}{vn} = 1 + \frac{1}{\alpha + i\beta} = 1 + \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

откуда получается:

$$\mu^2 - \frac{c^2 k^2}{n^2} = 1 + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$2\mu\,\frac{ck}{n} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

а отсюда легко выводятся уравнения (227) и (228).

61. (Стр. 228.) Выражение $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$, рассматриваемое как функция α, имеет максимальное значение $\frac{1}{2\beta}$ при $\alpha=\beta$; оно поэтому весьма мало при больших β. Из этого следует, что даже наибольшие значения $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}$ имеют порядок величины $\frac{1}{\beta}$, так что мы можем разложить корень квадратный в (227) и (228) по восходящим степеням этой величины. Отсюда, если мы будем пренебрегать членами порядка $\frac{1}{\beta^3}$, получим:

$$\sqrt{1+\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}}=1+\frac{1}{2}\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{8}\frac{(2\alpha+1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2};$$

это выражение можно заменить следующим:

$$1+\frac{1}{2}\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

так как величина $\frac{4\alpha+1}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$ никогда не может быть порядка выше, чем $\frac{1}{\beta^3}$. Окончательно

$$\mu^2=1+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

$$\frac{c^2k^2}{n^2}=\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}. \tag{111}$$

Поэтому, если мы в μ отбросим члены порядка $\frac{1}{\beta^2}$, а в k — порядка $\frac{1}{\beta^{3/2}}$, мы придем к формулам (229) и (230). В самом деле, если нам нужно знать k с такой степенью точности, мы можем опустить в k^2 и в $\frac{c^2k^2}{n^2}$ величины порядка $\frac{1}{\beta^3}$, как мы это сделали в (*111*).

62. (Стр. 230.) Если $J\,dn$ есть интенсивность падающего света, поскольку она относится к частотам, лежащим между n и $n+dn$, количество света, поглощенное слоем толщины Δ, на который световые лучи падают в направлении нормали, дается интегралом

$$A=\int\left(1-e^{-2k\Delta}\right)J\,dn.$$

в котором мы учли, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Если полоса поглощения весьма узка, можно положить:

$$k = \frac{n_0'}{2c} \cdot \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

и в силу (231)

$$dn = -\frac{1}{2m' n_0'}\, d\alpha.$$

Далее, мы можем распространить интегрирование от $\alpha = -\infty$ до $\alpha = +\infty$, принимая $\beta = n_0' g'$ и J за постоянные. Вычисление легко выполняется для тонкого слоя, для которого

$$1 - e^{-2k\Delta} = 2k\Delta - 2k^2\Delta^2.$$

Оказывается, что часть A, обусловленная первым членом, не зависит от g' и g. Но если оставить и второй член, A увеличивается с сопротивлением g.

63. (Стр. 237.) Это легко найти, если знаменатель (239) представить в виде

$$\{\alpha(1+\alpha) - \beta^2 - \gamma^2\} + i(1+2\alpha)\beta$$

и затем умножить на сопряженное комплексное выражение.

64. (Стр. 240.) Объяснение магнитоэлектрических явлений значительно облегчается, если предположить, что частички светящегося или поглощающего тела под действием магнитного поля определенным образом ориентируются. Основываясь на этом предположении, благодаря которому является возможным обойтись без условия изотропности частичек (§ 93), Фохт [1]) удачно объяснил многие наиболее сложные формы явления Зеемана; для этого оказалось достаточным предположить, что каждая частичка содержит два или более взаимно связанных электронов, движение которых определяется уравнениями, подобными нашим формулам § 90, причем теперь вместо обобщенных координат p нужно ввести прямоугольные координаты электронов. Полученную таким образом теорию следует, без сомнения, считать наилучшей из существующих в настоящее время, хотя природа связей все же остается неясной и хотя Фохт не делает никаких попыток показать, каким образом производятся магнитным полем действия, определяемые коэффициентами c.

Я должен также отметить великолепные явления, открытые Беккерелем [2]). В некоторых кристаллах, содержащих элементы

---

[1]) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. Leipzig. 1908.

[2]) J. Becquerel, Comptes rendus **142** (1906), стр. 775, 874, 1144; **143** (1906), стр. 769, 890, 962, 1133; **144** (1907), стр. 132, 420, 682, 1032, 1336.

эрбий и дидимий, наблюдается большое число полос поглощения, многие из которых настолько резки, особенно при низких температурах, получаемых при помощи жидкого воздуха или жидкого водорода[1]), что они в этом отношении уже сравнимы с линиями газообразных тел; эти линии обнаруживают замечательное разнообразие эффекта Зеемана и связанных с ним явлений. Конечно, в применении к этим кристаллам гипотеза изотропии частичек оказалась бы совершенно неуместной. Фохт и Беккерель удачно объяснили бо́льшую часть явлений, наблюдаемых на этих линиях, при помощи новой теории Фохта, о которой я только что упоминал.

В § 91 было показано, что можно надеяться получить истинное магнитное расщепление спектральной линии только в том случае, если первоначальная линия в действительности является сложной, т. е. если в отсутствии магнитного поля уже имеется налицо две или более одинаковые частоты. Фохт обратил внимание на то обстоятельство, что подобные явления могут получиться и тогда, когда мы имеем две частоты, одинаковые не вполне, но только до некоторой степени; тогда эти явления могут протекать с той особенностью, что в расположении составляющих, появляющихся под действием магнитного поля, наблюдается более или менее резко выраженная дисимметрия. Подобного рода случаи встречаются в опытах Беккереля довольно часто; Фохт придерживается того мнения, что если не все, то многие случаи дисимметрии, наблюдаемой в изотропных телах (§ 142), можно толковать подобным же образом.

Представляется весьма интересным, что на некоторых линиях Беккереля явление Зеемана наблюдается со знаком, противоположным обычному эффекту (т. е. с обратным знаком круговой поляризации, обычно наблюдаемой при продольном эффекте); наблюдаемая при этом интенсивность эффекта равна, а то и превышает интенсивность эффекта в ранее наблюдавшихся случаях. Эти, а также другие подобные им явления, наблюдавшиеся на некоторых линиях в газообразных телах[2]), привели некоторых физиков к допущению о возможности колеблющихся положительных электронов, для которых значение $\frac{e}{m}$ было бы сравнимо или даже больше, чем значение, найденное для отрицательных электронов в катодных лучах. Но эти явления можно также объяснить, если представить себе, что в некоторых системах молекул под действием внешнего магнитного поля возникают перемещения электричества, которые в свою очередь могут

---

[1]) H. Kamerlingh Onnes and J. Becquerel, Amsterdam Proceedings **10** (1908), стр. 592.

[2]) J. Becquerel, Comptes rendus **146** (1908), стр. 683; A. Dufour, там же, стр. 118, 229, 634, 810; R. W. Wood, Phil. Mag. (6), **15** (1908), стр. 274.

вызвать внутри частичек поля, противоположные внешнему. Против этой последней гипотезы Беккерель, однако, выдвигает то возражение, что, подобно многим явлениям индуцированного намагничивания, рассматриваемые внутренние поля тоже, по всей вероятности, были бы связаны со значительными изменениями при нагревании или охлаждении тела, тогда как магнитное расщепление спектральных линий остается на большом интервале температур постоянным.

Возможность третьего объяснения — хотя я имею относительно него некоторые сомнения — подсказывается, может быть, выводами, полученными в § 102; я имею в виду обращение направления обычного эффекта, вызываемое особым расположением отрицательных электронов.

65. (Стр. 250.) Если x, y, z суть координаты частички среды в момент времени t, ее координаты в момент времени $t+dt$ будут равны

$$x' = x + g_x\,dt, \quad y' = y + g_y\,dt, \quad z' = z + g_z\,dt.$$

Здесь g_x, g_y, g_z можно рассматривать как линейные функция x, y, z, так что, например,

$$g_x = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z,$$

или, как мы можем также написать,

$$g_x = \alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta z'.$$

Частички, которые первоначально лежали в плоскости

$$x = a,$$

достигнут в конце рассматриваемого интервала плоскости

$$x' = a + (\alpha + \beta x' + \gamma y' + \delta z')\,dt.$$

Косинусы углов направления нормали к этой плоскости пропорциональны

$$1 - \beta\,dt, \quad -\gamma\,dt, \quad -\delta\,dt$$

или

$$1 - \frac{\partial g_x}{\partial x}\,dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial y}\,dt, \quad -\frac{\partial g_x}{\partial z}\,dt.$$

66. (Стр. 254.) Пусть шар радиуса R движется с постоянной скоростью w через несжимаемую среду; предположим, что движение этой последней невихревое. Тогда, если центр шара примем за начало координат, а траекторию — за ось x, потенциал скоростей дается выражением

$$\varphi = -\frac{1}{2} R^3 w \frac{x}{r^3},$$

откуда для составляющих скорости имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3x^2-r^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3xy}{r^5},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{2}R^3w\frac{3xz}{r^5}.$$

В точках пересечения поверхности с плоскостью YOZ эти величины делаются равными

$$-\frac{1}{2}w,\ 0,\ 0,$$

так что относительная скорость скольжения равна $-\frac{3}{2}w$.

67. (Стр. 254.) Вместо того, чтобы рассматривать равномерное поступательное движение Земли через эфир, мы можем с таким же правом представить себе, что планета неподвижна, а эфир обтекает ее, так что на бесконечном расстоянии он имеет постоянную скорость w_0 в направлении OZ.

Пусть эфир подчиняется закону Бойля и пусть он притягивается к Земле с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния r от центра. Тогда при отсутствии движения среды плотность k и давление p будут функциями r, определяемыми уравнением равновесия

$$-\frac{dp}{dr}=\frac{\omega k}{r^2}$$

и соотношением

$$k=\mu p,$$

где ω и μ суть постоянные.

Эти условия удовлетворяются при

$$\log k=\frac{\mu\omega}{r}+\log k_0,$$

где k_0 есть плотность на бесконечном расстоянии.

Может существовать такое состояние движения, при котором имеется потенциал скоростей φ и в котором плотность k имеет значение, данное в вышеприведенной формуле. В самом деле, если мы положим:

$$\varphi=z\left[a\left(\frac{\mu\omega}{2r}-1\right)+b\left(\frac{\mu\omega}{2r}+1\right)e^{-\frac{\mu\omega}{r}}\right]$$

(понимая под a и b постоянные и принимая центр сферы за начало координат), то составляющие скорости

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial (ku)}{\partial x} + \frac{\partial (kv)}{\partial y} + \frac{\partial (kw)}{\partial z} = 0.$$

Вид функции φ выбран, имея в виду остальные условия задачи, а именно:

$$\text{для } r = \infty: \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w_0,$$

и

$$\text{для } r = R \text{ (т. е. на поверхности Земли): } \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Эти условия приводят к уравнениям

$$-a + b = w_0,$$

$$a = \left(\frac{\mu^2\omega^2}{2R^2} + \frac{\mu\omega}{R} + 1\right) \varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}} b.$$

Вдоль пересечений поверхности планеты с плоскостью xy имеется скорость скольжения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\frac{\mu\omega}{2R} - 1\right) a + \left(\frac{\mu\omega}{2R} + 1\right) \varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}} b = \frac{\mu^3\omega^3}{4R^3} \varepsilon^{-\frac{\mu\omega}{R}} b.$$

Оказывается, что эта величина равна $0{,}011\, w_0$, если $\frac{\mu\omega}{R} = 10$ и $0{,}0056\, w_0$, если $\frac{\mu\omega}{R} = 11$. В этих случаях отношение между плотностью вблизи поверхности и на бесконечном расстоянии будет соответственно ε^{10} и ε^{11}.

68. (Стр. 264.) Пусть относительные лучи сходятся в точке O, которую мы примем за начало координат; определим форму волн построением, которое мы обсуждали в § 153. Мы должны сложить вектор в направлении относительного луча величины v' с вектором $-\frac{g}{\mu^2}$. Пренебрегая величинами второго порядка, мы можем также приравнять первый вектор v, т. е. скорости движения волны при неподвижной среде, и можем рассматривать эту скорость в непосредственном соседстве с точкой O как постоянную. Мало того, и второму вектору можно приписать постоянную величину, например, в направлении OX.

В точке (x, y, z) на расстоянии r от O составляющие первого вектора суть:

$$-\frac{x}{r} v, \ -\frac{y}{r} v, \ -\frac{z}{r} v,$$

а составляющие второго —

$$-\frac{|g|}{\mu^2},\ 0,\ 0,$$

так что составляющие результирующего вектора, который направлен под прямым углом к фронту волны, суть:

$$-\left\{\frac{x}{r}v+\frac{|g|}{\mu^2}\right\},\quad -\frac{y}{r}v,\quad -\frac{z}{r}v.$$

Поэтому уравнение поверхности, нормальной к результирующему вектору, таково:

$$vr+\frac{|g|}{\mu^2}x=C.$$

Это — уравнение эллипсоида, центр которого имеет координаты

$$-\frac{\alpha C}{v^2-\alpha^2},\ 0,\ 0,$$

если положить:

$$\alpha=\frac{|g|}{\mu^2};$$

полуоси эллипсоида направлены по координатным осям OX, OY, OZ и имеют длину

$$\frac{vC}{v^2-\alpha^2},\quad \frac{C}{\sqrt{v^2-\alpha^2}},\quad \frac{C}{\sqrt{v^2-\alpha^2}}.$$

Так как мы пренебрегаем квадратом α, мы можем сказать, что волны имеют сферическую форму. Их центр при уменьшении постоянной C приближается к точке O.

69. (Стр. 277.) Если n есть частота источника света, частота в определенной точке одной из трубок тоже будет n, так как последовательные волны употребляют равные времена для того, чтобы достигнуть этой точки. На этом основании луч света может быть представлен по отношению к неподвижным осям выражениями вида

$$a\cos n\left(t-\frac{x}{u}+p\right),$$

где u есть рассматриваемая скорость.

Преобразовывая это выражение для отнесения его к осям движущимся вместе с жидкостью, и ограничиваясь одним из двух случаев, указанных в тексте, мы должны положить:

$$x=x'+wt,$$

вследствие чего вышеприведенное выражение примет вид

$$a \cos n\left(t-\frac{w}{u}t-\frac{x'}{u}+p\right).$$

Таким образом, мы видим, что относительная частота равна

$$n'=n\left(1-\frac{w}{u}\right);$$

обозначая через μ показатель преломления для частоты n, мы можем написать вместо этого:

$$n'=n\left(1-\frac{\mu w}{c}\right),$$

так как u отличается от $\frac{c}{\mu}$ только на величину, пропорциональную w.

Показатель преломления, соответствующий частоте n', равен

$$\mu-\frac{\mu w}{c}n\frac{d\mu}{dn};$$

соответствующая скорость распространения

$$\frac{c}{\mu-\frac{\mu w}{c}n\frac{d\mu}{dn}}=\frac{c}{\mu}+\frac{w}{\mu}n\frac{d\mu}{dn}=\frac{c}{\mu}-\frac{w}{\mu}T\frac{d\mu}{dT}=\frac{c}{\mu}-\frac{w}{\mu}\lambda\frac{d\mu}{d\lambda},$$

если λ есть длина волны.

Это — та скорость, к которой мы должны добавить член $w\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)$.

В случае воды мы имеем для спектральной линии D

$$1-\frac{1}{\mu^2}=0{,}438$$

и

$$1-\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu}\lambda\frac{d\mu}{d\lambda}=0{,}451.$$

Если скорость относительно неподвижных частей прибора представить выражением

$$\frac{c}{\mu}\pm\varepsilon w,$$

$\varepsilon=0{,}434$ (с возможной ошибкой $\pm 0{,}02$) есть то значение, которое Майкельсон и Морлей вывели из своих опытов.

69*. (Стр. 278.) [1915] Повторяя опыт Физо, Зееман[1]) нашел, что смещения интерференционных колец для различных длин волн находятся в удовлетворительном согласии с формулой, приведенной в § 164. Это видно из нижеследующей таблички,

λ в $\text{Å} \cdot U$	Число наблюдений	$\Delta_{\text{эксп}}$	Δ_{Fr}	Δ_L
4500	6	$0{,}826 \pm 0{,}007$	0,786	0,825
4580	6	$0{,}808 \pm 0{,}005$	0,771	0,808
5461	9	$0{,}656 \pm 0{,}005$	0,637	0,660
6440	1	0,542	0,534	0,551
6870	10	$0{,}511 \pm 0{,}007$	0,500	0,513

в которой $\Delta_{\text{эксп}}$ обозначает наблюдаемое смещение, выраженное в частях расстояния между кольцами, Δ_L — смещение, вычисленное по формуле, и Δ_{Fr} — результат вычисления, если опустить член

$$\mp \frac{w}{\mu} T \frac{d\mu}{dT}.$$

Зееман добавляет, что вычисленные значения могли быть слегка искажены неточностями при измерении скорости потока и длины столба протекающей воды. Эти погрешности исключаются при нахождении отношения значений Δ для двух различных длин волн. Для длин волн 4500 и 6870 из опыта получается отношение, равное 1,616. По формуле оно оказывается равным 1,572, если опустить последний член, и 1,608, если принять его во внимание.

70. (Стр. 278.) Для случая зеркала это предложение может быть доказано весьма легко по способу, указанному в § 154. Если, предполагая, что зеркало — металлическое, мы захотим вывести этот же результат из теоремы соответственных состояний (§§ 162 и 165), мы должны сначала распространить теорему на поглощающие тела. Сделать это вполне возможно[2]).

71. (Стр. 279.) В неподвижном и движущемся кристаллах пучки параллельных лучей будут соответствовать друг другу, когда их боковые поверхности одинаковы, т. е. когда относительные лучи имеют одно и то же направление s. В обоих случаях мы можем рассматривать определенную прямую в этом направлении и написать уравнения для нарушения равновесия

---

[1]) Zeeman, Proc. Amsterdam Academy **17** (1914), стр. 445; **18** (1915), стр. 398.

[2]) См. H. B. A. Bockwinkel, Sur les phénomènes du rayonnement dans un système qui se meut d'une vitesse uniforme, par rapport á l'éther. Arch. néerl. (2) **14** (1908), стр. 1.

в различных точках этой прямой, отсчитывая расстояние s от неподвижной точки на этой прямой. Для неподвижного кристалла колебания могут быть представлены выражениями вида

$$a \cos n\left(t-\frac{s}{u}+p\right);$$

соответствующие выражения для второго случая имеют вид

$$a \cos n\left(t'-\frac{s}{u}+p\right),$$

или, так как вдоль рассматриваемой прямой

$$t'=t-\frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x x'+\mathfrak{w}_y y'+\mathfrak{w}_z z')=t-\frac{1}{c^2}\mathfrak{w}_s s,$$

$$a \cos n\left(t-\frac{\mathfrak{w}_s s}{c^2}-\frac{s}{u}+p\right),$$

откуда вытекает, что скорость u' луча по отношению к весомой материи определяется выражением

$$\frac{1}{u'}=\frac{1}{u}+\frac{\mathfrak{w}_s}{c^2}, \quad u'=u-\frac{u^2}{c^2}\mathfrak{w}_s.$$

72. (Стр. 282.) Строго говоря, следует принять во внимание, что в движущейся системе относительные лучи могут слегка отклоняться от этих прямых, так как теорема о неизменности их пути при перемещении была доказана только для того случая, когда мы пренебрегали членами второго порядка. Более подробное рассмотрение показывает, однако, что это обстоятельство не вызывает никаких ошибок [1]).

72*. (Стр. 286.) [1915] Если бы мне предстояло написать эту последнюю главу теперь, я, конечно, поставил бы на гораздо более видное место теорию относительности Эйнштейна (§ 189), с помощью которой теория электромагнитных явлений в движущихся системах получает такую простоту, какой мне достигнуть не удалось. Главная причина моей неудачи заключалась в том, что я всегда придерживался мысли, что только переменную t можно принимать за истинное время и что мое местное время t' должно рассматриваться не более как вспомогательная математическая величина. В теории Эйнштейна, напротив, t' играет ту же роль, что и t; если мы хотим описывать явления в зависимости от x', y', z', t', мы должны оперировать с этими переменными совершенно таким же образом, как мы оперировали

---

[1]) Lorentz, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux, Arch. néerl. 21 (1887), стр. 169—172. (Abhandlungen über theoretische Physik 1, стр. 389—392.)

бы с x, y, z, t. Если, например, точка находится в движении, ее координаты x, y, z за время dt испытывают некоторые изменения dx, dy, dz, и составляющие скорости $\boldsymbol{v}$ будут:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Но эти четыре изменения dx, dy, dz, dt вызовут соответственные изменения dx', dy', dz', dt' в новых переменных x', y', z', t', и в этой системе координат скорость $\boldsymbol{v}'$ будет определяться как вектор с составляющими

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \qquad (112)$$

Подстановка, которой пользуется Эйнштейн, получается как частный случай, если в (287) и (288) положим $l = 1$, что мы и сделаем вскоре (примечание 75* и § 179). Пока мы оставим этот множитель неопределенным.

Истинный смысл подстановок (287), (288) заключается в соотношении

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = l^2(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2), \qquad (113)$$

которое легко можно проверить, и из него мы можем вывести, что должно быть:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2, \qquad (114)$$

если

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \qquad (115)$$

Это можно истолковать следующим образом. Пусть возмущение, произведенное в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в момент времени $t = 0$, распространяется по всем направлениям со скоростью света c, так что в момент времени t оно достигает сферической поверхности (115). Тогда можно сказать, что в системе x', y', z', t' то же самое возмущение исходит в момент $t' = 0$ из точки $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ и достигает сферической поверхности (114) в момент t'. Так как радиус этой сферы равен ct', возмущение распространяется в системе x', y', z', t' с той же скоростью c, какую оно имело в системе x, y, z, t. Отсюда вытекает, что скорость света не изменяется при преобразовании (см. § 190).

Формулы (287) и (288) можно также получить, если искать *линейное* преобразование, удовлетворяющее условию (113) и притом такое, чтобы для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ мы имели $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $t' = 0$. Так как эти соотношения линейны, точка $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ будет в системе x, y, z, t обладать скоростью, постоянной по величине и направлению. Если оси x и x' выбраны в направлении этой скорости, мы приходим к уравнениям вида (287), (288).

В теории относительности нам постоянно придется иметь дело с соотношениями между соответственными величинами, которые приходится вводить, если мы хотим описывать одни и те же явления сначала в системе x, y, z, t, а затем в системе x', y', z', t'. Часть этих формул преобразования получается из основных предпосылок, другие должны быть подходящим образом выбраны; можно считать, что они определяют «соответственные величины», причем цель всегда заключается в том, чтобы прийти, если возможно, в обоих способах описания к уравнениям одинакового вида.

Формулы преобразования для скоростей найти нетрудно. Нужно только подставить в (*112*) значения

$$\left.\begin{aligned} &dx' = kl\,(dx - w\,dt), \quad dy' = l\,dy,\; dz' = l\,dz, \\ &dt' = kl\left(dt - \frac{w}{c^2}\,dx\right) \end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

и разделить на dt числитель и знаменатель дробей. Если положить:

$$\omega = k\left(1 - \frac{w}{c^2}\,v_x\right), \qquad (117)$$

то в результате получится:

$$v'_x = k\,\frac{v_x - w}{\omega}, \qquad v'_y = \frac{v_y}{\omega}, \qquad v'_z = \frac{v_z}{\omega}. \qquad (118)$$

Эти формулы совместно с (285) приводят к следующим соотношениям, которые нам пригодятся впоследствии:

$$(c^2 - v'^2)^{1/2} = \frac{(c^2 - v^2)^{1/2}}{\omega}, \qquad (119)$$

$$\omega = \frac{1}{k\left(1 + \dfrac{w}{c^2}\,v'_x\right)}. \qquad (120)$$

Чтобы не расходиться с обозначениями, которыми мы пользовались в тексте, положим теперь:

$$v_x = u_x + w, \qquad v_y = u_y, \qquad v_z = u_z.$$

Тогда мы находим:

$$v'_x = k\,\frac{u_x}{\omega}, \qquad v'_y = \frac{u_y}{\omega}, \qquad v'_z = \frac{u_z}{\omega}, \qquad (121)$$

откуда вытекает соотношение между скоростью $\boldsymbol{v}'$ и вектором $\boldsymbol{u}'$, которым мы пользуемся в тексте:

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{u}'}{k\omega}. \tag{122}$$

Наконец, мы можем вывести из (120) и (122):

$$\omega = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{w}{c^2} u'_x\right). \tag{123}$$

Мы можем добавить, что ω есть величина положительная, так как скорости w и v_x всегда меньше, чем c.

Рассмотрим, далее, формулу преобразования для той величины, которую можно назвать «материальным» элементом объема.

Пусть имеется весьма большое число точек, расположенных весьма близко друг к другу и движущихся таким образом, что их скорости являются непрерывными функциями координат. Остановим наше внимание на определенном значении t; пусть в этот момент x, y, z будут координаты одной из точек P_0 и $x + \mathbf{x}, y + \mathbf{y}, z + \mathbf{z}$ — координаты точки P, расположенной бесконечно близко к предыдущей. Если

$$\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'}, \overline{t'}$$

суть значения x', y', z', t', соответствующие x, y, z, t, мы можем написать, что значения, соответствующие $x + \mathbf{x}$, $y + \mathbf{y}$, $z + \mathbf{z}$, t, будут:

$$\overline{x'} + kl\mathbf{x}, \quad \overline{y'} + l\mathbf{y}, \quad \overline{z'} + l\mathbf{z}, \quad \overline{t'} - kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}. \tag{124}$$

Пользуясь системой x, y, z, t, мы можем остановить наше внимание на всех точках, лежащих одновременно, т. е. в данный момент времени t, в некотором элементе dS пространства x, y, z. Мы можем рассмотреть эти же самые точки после перехода к системе x', y', z', t'. Тогда мы должны будем считать однородными положения, относящиеся к определенному моменту времени t', например $\overline{t'}$; мы можем рассматривать элемент $\overline{dS'}$ в пространстве x', y', z', в котором находятся эти положения. То, что нам надо знать, — это отношение между dS и $\overline{dS'}$.

Чтобы его определить, мы должны заметить, что в (124) мы имеем координаты точки P в момент времени $\overline{t'} - kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}$. Отсюда мы перейдем к координатам в момент времени $\overline{t'}$, прибавляя расстояния, пройденные за время $kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}$. Мы можем для них написать:

$$kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}v'_x, \quad kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}v'_y, \quad kl\frac{w}{c^2}\mathbf{x}v'_z,$$

и так как x, y, z бесконечно малы, мы можем здесь понимать под v'_x, v'_y, v'_z скорости точки P_0 в момент времени $\overline{t'}$. Координаты различных точек P (имеющих различные значения x, y, z) в определенный момент времени $\overline{t'}$ даются поэтому выражениями

$$x' = \overline{x'} + kl\left(1 + \frac{wv'_x}{c^2}\right)x,$$

$$y' = \overline{y'} + kl\frac{wv'_y}{c^2}x + ly,$$

$$z' = \overline{z'} + kl\frac{wv'_z}{c^2}x + lz.$$

Эти уравнения выражают соотношения между координатами x, y, z точки элемента dS и координатами соответствующей точки элемента $\overline{dS'}$. В силу известной теоремы отношение между элементами дается выражением

$$\frac{\overline{dS'}}{dS} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x}, & \dfrac{\partial x'}{\partial y}, & \dfrac{\partial x'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial x}, & \dfrac{\partial y'}{\partial y}, & \dfrac{\partial y'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z'}{\partial x}, & \dfrac{\partial z'}{\partial y}, & \dfrac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix},$$

причем определитель берется с положительным знаком. Развертывая эту формулу и помня, что x, y, z бесконечно малы, находим, что определитель равен

$$kl^3\left(1 + \frac{wv'_x}{c^2}\right),$$

так что в силу (123)

$$\overline{dS'} = \frac{l^3}{\omega}\,dS.$$

Мы обозначим элемент $\overline{dS'}$ верхней чертой для отличия от элемента dS' в формуле (299).

Предположим теперь, что в точках, которые мы рассматривали, расположены одинаковые электрические заряды. Тогда мы можем сказать, что такой же заряд, который расположен в dS в момент времени t, находится в $\overline{dS'}$ в момент времени $\overline{t'}$, или, как мы теперь можем написать, t', и это останется верным, если мы, увеличивая число точек, перейдем к непрерывному распределению. Плотности ρ и $\overline{\rho'}$, которые при двух способах рассмотрения явлений должны быть приписаны электрическому заряду, будут поэтому обратно пропорциональны объемам dS и $\overline{dS'}$. Отсюда

$$\overline{\rho'} = \frac{\omega}{l^3}\rho. \tag{125}$$

Мы написали $\overline{\rho'}$ с верхней чертой, чтобы отличать эту плотность от величины ρ', определяемой (290). Эти две величины связаны друг с другом соотношением

$$\overline{\rho'} = k\omega\rho', \tag{126}$$

к которому мы можем добавить в силу (*122*) и (*126*):

$$\overline{\rho'}\boldsymbol{v}' = \rho'\boldsymbol{u}'. \tag{127}$$

Формулы преобразования для электрической и магнитной сил остаются в прежнем виде (291).

73. (Стр. 287.) [1915]. Можно показать, что в теории относительности основные уравнения (17)—(20) не изменяют своего вида при переходе к системе x', y', z', t'.

В силу (286) и (288) мы имеем нижеследующие общие соотношения между частными производными по x, y, z, t и по x', y', z', t':

$$\frac{\partial}{\partial x} = kl\frac{\partial}{\partial x'} - kl\frac{w}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = l\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = l\frac{\partial}{\partial z'}, \tag{128}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = kl\frac{\partial}{\partial t'} - klw\frac{\partial}{\partial x'}. \tag{129}$$

Уравнение (17) поэтому принимает вид

$$kl\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial y'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial z'} - kl\frac{w}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'} = \rho, \tag{130}$$

а первое из трех уравнений, заключенных в (19), — вид

$$l\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z'}\right) = \frac{kl}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'} - kl\frac{w}{c}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + \frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}_x. \tag{131}$$

Подставляя значение $\dfrac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial t'}$ из этой формулы в (*130*), находим:

$$kl\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_y}{\partial y'} + l\frac{\partial \boldsymbol{d}_z}{\partial z'} - l\frac{w}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial z'}\right) -$$
$$- kl\frac{w^2}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{d}_x}{\partial x'} = \left(1 - \frac{w\boldsymbol{v}_x}{c^2}\right)\rho = \frac{\omega}{k}\rho.$$

Отсюда, умножая на $\frac{k}{l^3}$ и принимая во внимание значения d'_x и т. д. и $\overline{\rho'}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial d'_x}{\partial x'}+\frac{\partial d'_y}{\partial y'}+\frac{\partial d'_z}{\partial z'}=\overline{\rho'}, \tag{132}$$

имеющее тот же вид, что и (17).

Если, с другой стороны, значение $\frac{\partial d_x}{\partial x'}$, взятое из (*130*), мы подставим в (*131*), то получим:

$$l\left(\frac{\partial h_z}{\partial y'}-\frac{\partial h_y}{\partial z'}\right)-\frac{lw}{c}\frac{\partial d_y}{\partial y'}-\frac{lw}{c}\frac{\partial d_z}{\partial z'}=$$

$$=\left(\frac{kl}{c}-\frac{klw^2}{c^3}\right)\frac{\partial d_x}{\partial t'}+\frac{1}{c}\rho u_x,$$

или, умножая на $\frac{k}{l^3}$:

$$\frac{\partial h'_z}{\partial y'}-\frac{\partial h'_y}{\partial z'}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial d'_x}{\partial t'}+\overline{\rho'}\mathfrak{v}'_x\right),$$

так как в силу (*121*) и (*125*)

$$\frac{k}{l^3}\rho u_x=\overline{\rho'}\mathfrak{v}'_x .$$

Мы нашли, таким образом, первое из уравнений, входящих в состав

$$\operatorname{rot}' h'=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial d'}{\partial t'}+\overline{\rho'}\mathfrak{v}'\right). \tag{133}$$

Остальные формулы получаются путем подобных же преобразований.

Что касается уравнений (292), приведенных в тексте, заметим только, что в (*132*) $\overline{\rho'}$ можно заменить через

$$\left(1-\frac{w\,u'_x}{c^2}\right)\rho',$$

вытекающее из (*126*) и (*123*), и что, имея в виду (*127*), мы можем в (*133*) заменить $\overline{\rho'}\mathfrak{v}'$ через $\rho' u'$.

74. (Стр. 288.) [1915] Так как в теории относительности основные уравнения в обеих системах x, y, z, t и x', y', z', t' имеют совершенно одинаковый вид, мы можем сразу применить к этой последней системе формулы, которые мы приводили в § 13. Мы можем поэтому определить скалярный потенциал $\overline{\varphi'}$ и вектор-потенциал $\boldsymbol{a}'$ посредством уравнений

$$\Delta'\overline{\varphi'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{\varphi'}}{\partial t'^2} = -\overline{\rho'}, \tag{134}$$

$$\Delta'\boldsymbol{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c}\overline{\rho'}\boldsymbol{v}' \tag{135}$$

и получим:

$$\boldsymbol{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{a}'}{\partial t'} - \operatorname{grad}'\varphi', \tag{136}$$

$$\boldsymbol{h}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}'. \tag{137}$$

Так как

$$\overline{\rho'}\boldsymbol{v}' = \rho'\boldsymbol{u}',$$

формулы (*135*) и (*137*) совпадают со вторым уравнением (294) и с (296).

Далее, заменяя в (*134*) $\overline{\rho'}$ через

$$\left(1 - \frac{w u_x'}{c^2}\right)\rho',$$

мы видим при сравнении с (294), что решением может быть

$$\overline{\varphi'} = \varphi' - \frac{w}{c}a_x'.$$

Вследствие этого (*136*) принимает вид (295).

75. (Стр. 294.) Первые три уравнения вытекают сразу из (*118*), если заменить ω через $\frac{1}{k}$, как мы это можем сделать в силу (*120*), так как $\frac{\boldsymbol{v}_x}{c}$ весьма мало. Значения $\frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2}$, $\frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2}$, $\frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2}$ получаются путем нового дифференцирования при помощи соотношения

$$\frac{dt'}{dt} = kl\left(1 - \frac{w\boldsymbol{v}_x}{c^2}\right),$$

выведенного из (*116*). Мы можем здесь заменить $\boldsymbol{v}_x$ через w, так что это выражение принимает вид

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{l}{k}.$$

75*. (Стр. 295 и 298.) [1915] Важное заключение можно вывести из уравнений (305), если исходить из основного предположения, что движение частички может быть описано при помощи уравнения вида

$$F = \dot{G}, \tag{138}$$

где под F подразумевается сила, действующая на частичку, а G есть некоторый вектор, а именно количество движения; направление вектора совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{v}$ и величина его G есть функция величины скорости v. В самом деле, мы можем вывести отсюда (см. § 27), что продольная масса m' и поперечная масса m'' даются выражениями

$$m' = \frac{dG}{dv}, \quad m'' = \frac{G}{v}. \tag{139}$$

Формулы (305) показывают, что

$$m' = k^2 m'' = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m'',$$

и мы поэтому получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dG}{dv} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \cdot \frac{G}{v},$$

откуда можно определить количество движения как функцию скорости.

Решение таково:

$$d \log G = \frac{c^2 dv}{(c^2 - v^2) v} = \frac{dv}{v} - \frac{dv}{2(c+v)} + \frac{dv}{2(c-v)},$$

$$\log G = \log v - \frac{1}{2} \log (c+v) - \frac{1}{2} \log (c-v) + \log C,$$

$$G = \frac{Cv}{(c^2 - v^2)^{1/2}},$$

где C есть постоянная интегрирования.

Подставляя в (139), получаем:

$$m' = \frac{Cc^2}{(c^2 - v^2)^{3/2}}, \quad m'' = \frac{C}{(c^2 - v^2)^{1/2}},$$

и для случая, рассмотренного в тексте:

$$m' = k^3 \frac{C}{c}, \quad m'' = k \frac{C}{c}.$$

Переходим теперь к пределу $v=0$; тогда k и l становятся равными единице, и мы заключаем, что

$$\frac{C}{c}=m_0,$$

$$m'=k^3m_0, \qquad m''=km_0.$$

Коэффициент l должен поэтому иметь значение 1 для всех значений скорости (см. § 179).

Что касается количества движения, мы можем написать для него:

$$\boldsymbol{G}=\frac{cm_0\boldsymbol{v}}{(c^2-\boldsymbol{v}^2)^{1/2}};$$

его составляющие будут:

$$G_x=\frac{cm_0\boldsymbol{v}_x}{(c^2-\boldsymbol{v}^2)^{1/2}}, \qquad G_y=\frac{cm_0\boldsymbol{v}_y}{(c^2-\boldsymbol{v}^2)^{1/2}}, \qquad G_z=\frac{cm_0\boldsymbol{v}_z}{(c^2-\boldsymbol{v}^2)^{1/2}}.$$

Теперь мы можем непосредственно написать формулы преобразования для количества движения.

В самом деле, пользуясь системой x', y', z', t', мы должны положить:

$$G'_x=\frac{cm_0\boldsymbol{v}'_x}{(c^2-\boldsymbol{v}'^2)^{1/2}}, \qquad G'_y=\frac{cm_0\boldsymbol{v}'_y}{(c^2-\boldsymbol{v}'^2)^{1/2}}, \qquad G'_z=\frac{cm_0\boldsymbol{v}'_z}{(c^2-\boldsymbol{v}'^2)^{1/2}};$$

эти величины могут быть выражены через G_x, G_y, G_z, если воспользоваться формулами (*118*) и (*119*).

В результате получаем:

$$G'_x=kG_x-\frac{kcwm_0}{(c^2-v^2)^{1/2}}, \qquad G'_y=G_y, \qquad G'_z=G_z. \qquad (140)$$

Этими формулами мы можем теперь воспользоваться для нахождения соотношения между силой $\boldsymbol{F}=\dot{\boldsymbol{G}}$ в системе x, y, z, t и силой в системе x', y', z', t', для которой мы можем написать:

$$\boldsymbol{F}'=\dot{\boldsymbol{G}}';$$

здесь штрих указывает, что дифференцирование производится по t'. Для этого мы обратим внимание на изменение величин (*140*), происходящее за промежуток времени dt. Между этими величинами мы имеем соотношения

$$dG'_x = k\,dG_x - \frac{kcwm_0v}{(c^2-v^2)^{3/2}}\,dv, \qquad dG'_y = dG_y, \qquad dG'_z = dG_z.$$

Если их разделить на уравнение

$$dt' = \omega\,dt,$$

которое получается из (*116*) и (*117*), мы имеем:

$$F'_x = \frac{k}{\omega}F_x - \frac{kc}{\omega}\,\frac{wm_0v}{(c^2-v^2)^{3/2}}\,\frac{dv}{dt}, \qquad F'_y = \frac{1}{\omega}F_y, \qquad F'_z = \frac{1}{\omega}F_z.$$

При движении частички, рассматриваемом в системе x, y, z, t, $\frac{m_0c^3}{(c^2-v^2)^{3/2}}$ есть продольная масса, а $\frac{dv}{dt}$ — продольное ускорение. Произведение этих величин есть составляющая силы F в направлении движения; умножая ее опять на v, мы получим скалярное произведение (vF). Последний член в первом из вышеприведенных уравнений поэтому может быть переписан так:

$$-\frac{k}{\omega}\cdot\frac{w}{c^2}(vF),$$

и формулы преобразования для сил принимают поэтому вид

$$F'_x = \frac{k}{\omega}\left\{F_x - \frac{w}{c^2}(vF)\right\}, \qquad F'_y = \frac{1}{\omega}F_y, \qquad F'_z = \frac{1}{\omega}F_z. \quad (141)$$

Мы теперь в состоянии формулировать условие, которое должно быть выполнено, если принцип относительности должен оказаться справедливым. При этом мы должны помнить, что физическая теория, которая сводит объяснение явлений к движению мельчайших частичек, состоит из двух частей: 1) из уравнения движения частичек (*138*) и 2) из законов, выражающих силы в зависимости от относительных положений частичек, их скоростей, электрических зарядов и пр. Принцип относительности требует, чтобы в обеих системах x, y, z, t и x', y', z', t' теория имела один и тот же вид. Для этого необходимо следующее: если мы при помощи вышеуказанных законов вычислим силы F из относительных положений и т. д. в системе x, y, z, t и таким же образом вычислим силы F' из относительных положений и т. д. в системе x', y', z', t', то составляющие F и F' должны удовлетворять соотношениям (*141*). Мы можем назвать это *общим законом сил*; поскольку он верен, мы можем быть уверены в том, что описание явлений будет в обеих системах совершенно одинаковым.

Есть один класс сил, относительно которых при настоящем состоянии науки мы можем сказать с уверенностью, что они подчиняются общему закону: это — силы, производимые электромагнитным полем. В самом деле, правило, определяющее действие такого поля на электрон, несущий заряд e, выражается формулой

$$F = ed + \frac{e}{c}[vh] \qquad (142)$$

в системе x, y, z, t и

$$F' = ed' + \frac{e}{c}[v'h'] \qquad (143)$$

в системе x', y', z', t'. Если в формулах (291) и (118) положить $l = 1$, можно из них вывести, что (142) и (143) удовлетворяют условиям (141).

При доказательстве этого мы ограничимся частным случаем одного электрона, неподвижного в системе x, y, z, t. Полагая $v = 0$, мы получаем из (117) и (118):

$$\omega = k, \qquad v'_x = -w, \qquad v'_y = 0, \qquad v'_z = 0,$$

так что (143) принимает вид

$$F'_x = ed'_x, \qquad F'_y = e\left(d'_y + \frac{w}{c}h'_z\right), \qquad F'_z = e\left(d'_z - \frac{w}{c}h'_y\right),$$

или, после подстановки значений (291),

$$F'_x = ed_x, \qquad F'_y = \frac{e}{k}d_y, \qquad F'_z = \frac{e}{k}d_z.$$

Те же значения получатся из (141), если положить:

$$v = 0, \qquad \omega = k, \qquad F = ed.$$

Для других классов естественных сил мы не можем положительно утверждать, что они подчиняются общему закону, но мы можем предположить, что это так, не входя в противоречие с установленными фактами.

Если мы примем эту гипотезу относительно молекулярных сил, мы сразу придем к заключению, к которому мы приходим в конце § 174. Здесь следует упомянуть, что притягательные или отталкивательные силы, зависящие только от расстояния, как оказывается, не подчиняются общему закону. Поэтому принцип относительности требует, чтобы силы, действующие между частичками, были несколько другого характера; их математическое выражение должно в общем случае содержать небольшие члены, зависящие от скорости движения. Кроме того, принцип накладывает условие, чтобы все силы распространялись со скоростью света.

Это можно видеть из следующего. Пусть действующее тело расположено в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0, y = 0, z = 0$ и пусть его скорость или его состояние изменяются в этот момент. Если t есть тот момент, в который влияние этого изменения начинает сказываться в некоторой удаленной точке x, y, z, скорость распространения s будет определяться выражением

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2t^2. \tag{144}$$

По принципу относительности скорость распространения должна иметь то же значение s в системе x', y', z', t'. Так как значения для исходного места и времени суть $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $t' = 0$, то мы должны иметь:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s^2t'^2,$$

если x', y', z', t' суть значения, соответствующие x, y, z, t в (*144*). Если эти два уравнения комбинировать с (*113*), т. е. с

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2,$$

получится:

$$s = c.$$

Эти соображения можно применить, например, к всеобщему тяготению. В теории относительности предполагается, что эта сила распространяется со скоростью света, и закон Ньютона изменяется введением некоторых добавочных членов, зависящих от движения. Они, впрочем, настолько малы, что было бы весьма затруднительно наблюдать то влияние, которое они могли бы оказывать на движение в солнечной системе.

Легко видеть, что вопрос о том, нуждаются ли силы в конечном промежутке времени для того, чтобы распространиться от одной частички к другой, теряет значение при отсутствии относительного движения. В этом случае теоретические рассуждения значительно упрощаются. Предположим, например, что все частички в системе x', y', z', t' неподвижны, так что они все имеют общую скорость $v_x = w$ в системе x, y, z, t. Тогда уравнение (*117*) превращается в $\omega = \frac{1}{k}$ и соотношения (*141*) принимают вид

$$F'_x = F_x, \qquad F'_y = kF_y, \qquad F'_z = kF_z,$$

совпадающий с (300). В самом деле, в этом последнем уравнении S_0 есть система, в которой координаты суть x', y', z', так что F (S_0) соответствует тому, что мы теперь называем F'.

Мы видим, таким образом, что уравнение (300) является частным случаем более общей формулы (*141*). Хотя, строго говоря, она применима только к системам, в которых нет относительного движения частей, все же ею можно пользоваться с достаточным приближением в вопросах, разбираемых в §§ 173—176.

76. (Стр. 300.) [1915] Те довольно длинные вычисления, при помощи которых были получены эти формулы и которые были добавлены в примечании к первому изданию, теперь, после того, что было сказано в примечании **75***, могут быть опущены. Значительно упрощены могут быть и рассуждения, развиваемые в этом параграфе и в следующем. Если допустить, что все силы, действующие на электроны, — например силы, возвращающие электроны в их положения равновесия, — подчиняются общему закону сил (примечание **75***), можно прямо заключить, что уравнения, определяющие движение электронов и поле $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$ в системе x', y', z', t', имеют тот же вид, как и те, которые описывают это движение и поле $\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$ в системе x, y, z, t. Иначе, пользуясь обозначениями текста, можно сказать, что движение электронов и значения $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{h}'$, выраженные через посредство x', y', z', t', могут быть одинаковыми в обеих системах S_0 и S. Это и есть та теорема соответственных состояний, которую нам нужно было вывести.

Что касается соображений, которые шаг за шагом привели к ней в §§ 175 и 176, мы можем сделать следующие замечания.

1. В первоначальной системе x, y, z, t электрический момент частички определяется уравнениями

$$\mathbf{p}_x=\sum ex, \qquad \mathbf{p}_y=\sum ey, \qquad \mathbf{p}_z=\sum ez,$$

причем координаты x, y, z различных электронов берутся для определенного значения t, так что мы имеем дело с одновременными положениями электронов. Я встретился с некоторыми затруднениями при соответствующем определении $\mathbf{p}'_x$, $\mathbf{p}'_y$, $\mathbf{p}'_z$ (§ 175), так как я не рассматривал t' как действительное «время» и придерживался мысли, что в системе x', y', z', t' одновременность попрежнему следует рассматривать как равенство значений t. Но в теории относительности t' играет в точности ту же роль, что и t; вследствие этого мы должны просто понимать под x', y', z' в формулах

$$\mathbf{p}'_x=\sum ex', \qquad \mathbf{p}'_y=\sum ey', \qquad \mathbf{p}'_z=\sum ez'$$

координаты электронов для одного и того же времени t'.

Поступая таким путем, мы можем написать непосредственно уравнения (308), в точности соответствующие (271) и (272). В самом деле, мы видели (примечание **72***), что основные уравнения не изменяются при подстановках, которыми пользуются в теории относительности. Отсюда ясно, что если в двух системах — x, y, z, t и x', y', z', t' — плотность электрического заряда (ρ или ρ') является одной и той же функцией координат и времени (причем заряды движутся одинаковым образом), то же самое будет верно относительно составляющих электрической и магнитной сил ($\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{h}$ или $\boldsymbol{d}'$, $\boldsymbol{h}'$).

2. Формулы преобразования для электрического момента могут быть получены следующим образом.

Пусть x, y, z будут координаты «центра» частички, $x+\boldsymbol{x}$, $y+\boldsymbol{y}$, $z+\boldsymbol{z}$ — координаты точки P, где находится электрон e, причем все эти координаты берутся для одного и того же времени. Тогда, если x', y', z', t' суть значения, соответствующие x, y, z, t (так что во второй системе x', y', z' есть положение центра в момент времени $\overline{t'}$), значения, соответствующие $x+\boldsymbol{x}$, $y+\boldsymbol{y}$, $z+\boldsymbol{z}$, будут:

$$x'+kl\boldsymbol{x}, \quad y'+l\boldsymbol{y}, \quad z'+l\boldsymbol{z}, \quad \overline{t'}-kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}.$$

Первые три выражения определяют место P для значения t', указываемого четвертым; чтобы найти координаты электрона в момент времени $\overline{t'}$, мы должны принять во внимание изменения координат за промежуток времени $kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}$. Отсюда, если принять $\boldsymbol{x}$ бесконечно малым, можно написать для относительных координат по отношению к центру значения, которыми они обладают в момент времени $\overline{t'}$:

$$kl\boldsymbol{x}+kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_x, \qquad l\boldsymbol{y}+kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_y, \qquad l\boldsymbol{z}+kl\frac{w}{c^2}\boldsymbol{x}v'_z,$$

где $\boldsymbol{v}'$ есть скорость центра, совпадающего с точкой 0 для случая, рассматриваемого в тексте.

Мы найдем значения p'_x, p'_y, p'_z, если, умножив на e, распространим суммы на все электроны частички. Отсюда

$$p'_x=klp_x, \qquad p'_y=lp_y, \qquad p'_z=lp_z,$$

что совпадает с формулами § 175.

77. (Стр. 306.) Пусть S будет движущаяся *электростатическая* система, S_0 — соответствующая ей неподвижная система. Имеем $\boldsymbol{a}'=0$, $\boldsymbol{h}'=0$; если φ' есть скалярный потенциал в S_0, уравнения (291) и (295) дают для каждой точки S:

$$\boldsymbol{d}_x=-l^2\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}, \quad \boldsymbol{d}_y-\frac{w}{c}\boldsymbol{h}_z=-\frac{l^2}{k}\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}, \quad \boldsymbol{d}_z+\frac{w}{c}\boldsymbol{h}_y=-\frac{l^2}{k}\frac{\partial\varphi'}{\partial z'},$$

$$\boldsymbol{h}_x=0, \qquad \boldsymbol{h}_y+\frac{w}{c}\boldsymbol{d}_z=0, \qquad \boldsymbol{h}_z-\frac{w}{c}\boldsymbol{d}_y=0,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} d_x &= -l^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, & d_y &= -kl^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, & d_z &= -kl^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}, \\ h_x &= 0, & h_y &= kl^2 \frac{w}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}, & h_z &= -kl^2 \frac{w}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}. \end{aligned}\right\} \qquad (145)$$

Отсюда мы получаем для первой составляющей потока энергии в S:

$$S_x = c\,(d_y h_z - d_z h_y) = k^2 l^4 w \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \right)^2 \right\},$$

и [на основании (53) и (302)] для первой составляющей электромагнитного количества движения, которым мы только и интересуемся,

$$G_x = \frac{k^2 l^4 w}{c^2} \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \right)^2 \right\} dS =$$

$$= \frac{klw}{c^2} \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right)^2 \right\} dS'.$$

Нам нужно поэтому только вычислить последний интеграл для поля сферы радиуса R и заряда e, не имеющей поступательного движения. Это — весьма простая задача. Мы можем заметить, что три интеграла

$$\int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right)^2 dS', \qquad \int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \right)^2 dS', \qquad \int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \right)^2 dS'$$

имеют одинаковую величину, так что каждый из них равен трети их суммы, т. е. двум третям энергии системы. Так как эта последняя равна $\frac{e^2}{8\pi R}$, мы получаем, что каждый интеграл равен

$$\frac{e^2}{12\pi R},$$

и

$$G_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\, klw.$$

Ясно, что

$$G_y = 0 \qquad \text{и} \qquad G_z = 0,$$

так что вообще

$$G = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\, kl\, w.$$

78. (Стр. 309.) Уравнения (*145*) приводят к нижеследующему значению электромагнитной энергии:

$$\frac{1}{2} l^4 \int \left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\}\right] dS =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{l}{k} \int \left[\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 + k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'}\right)^2\right\}\right] dS'. \qquad (146)$$

Полагая $l = 1$ и вспоминая, что каждый из интегралов

$$\int \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'}\right)^2 dS'$$

и т. д. равен

$$\frac{e^2}{12\pi R},$$

получаем:

$$\frac{e^2}{24\pi k R}\left[1 + 2k^2\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right)\right], \qquad (147)$$

который становится равным (315) при подстановке значения k.

79. (Стр. 310.) В самом деле, когда электрон неподвижен, электрическая сила в непосредственной его близости равна $E = \frac{e}{4\pi R^2}$. Так как она направлена под прямым углом к поверхности, имеется нормальное напряжение, равное

$$\frac{1}{2} E^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}. \qquad (148)$$

80. (Стр. 311.) Когда вследствие какой-либо возмущающей силы радиус сферы увеличивается, электрическое напряжение, действующее на его поверхности, уменьшается, как видно из (*148*). Так как, по предположению, внутреннее напряжение остается постоянным, оно будет стягивать точки сферы внутрь, так что первоначальный объем будет восстанавливаться.

Мы покажем теперь, что равновесие будет неустойчивым по отношению к изменению формы. Рассмотрим деформацию, при которой сфера превращается в растянутый эллипсоид вращения, причем величина каждого элемента поверхности остается без изменения и каждый элемент сохраняет свой заряд. Тогда можно показать, что внутри, в каждой точке оси, будет электрическая сила, направленная к центру, если заряд электрона отрицателен. Пусть эта сила равна q в точке, расположенной внутри поверхности и как раз под нею, на одном из концов оси P. По известной теореме, электрическая сила у самой поверхности снаружи, у того же конца оси, будет $q + \omega$, если через ω мы обозначим отрицательную поверхностную плотность эллипсоида, которая, по нашему предположению, равна поверхностной плотности первоначального шара. На элемент поверхности в точке P будут действовать два нормальных электрических напряжения: наружу $\frac{1}{2}(q+\omega)^2$ и внутрь $\frac{1}{2}q^2$; наряду с ними имеется постоянное внутреннее напряжение, которое должно быть равно $\frac{1}{2}\omega^2$, так как в первоначальном состоянии оно уравновешивает электрическое напряжение.

Так как и q и ω положительны, имеется результирующая сила $q\omega$, направленная наружу и стремящаяся еще больше растянуть эллипсоид.

Чтобы доказать то, что было сказано про внутреннюю электрическую силу, мы можем поступить следующим образом. Выберем точку A на полуоси OP и рассмотрим конус бесконечно малого телесного угла $d\varepsilon$, вершина которого находится в этой точке и который продолжен за нее в другую сторону. Пусть элемент $d\sigma_1$ в точке B_1 и элемент $d\sigma_2$ в точке B_2 будут элементы поверхности эллипсоида, определяемые пересечением с конусом, ϑ_1 и ϑ_2 — углы между прямой B_1B_2 и касательными плоскостями в конечных точках; пусть B_1 будет точка, ближайшая к A, так что угол B_1AP является острым углом. Тогда ввиду того, что

$$d\sigma_1 = \frac{AB_1^2 \cdot d\varepsilon}{\sin\vartheta_1}, \qquad d\sigma_2 = \frac{AB_2^2 \cdot d\varepsilon}{\sin\vartheta_2},$$

притяжения, испытываемые единицей положительного электричества в A со стороны двух элементов, будут равны

$$\frac{\omega\, d\varepsilon}{4\pi \sin\vartheta_1} \quad \text{и} \quad \frac{\omega\, d\varepsilon}{4\pi\sin\vartheta_2}.$$

Можно показать на основании геометрических соображений, что

$$\sin\vartheta_1 > \sin\vartheta_2,$$

откуда следует, что из двух притяжений второе больше, так что имеется остаточная сила в направлении AB_2. Подобный же результат можно получить для другого направления конуса; полная результирующая электрическая сила должна быть поэтому направлена к центру.

81. (Стр. 319.) Выражения (*146*) в примечании **78** показывают, что, если l отлично от единицы, значение (*147*), полученное для энергии, должно быть умножено на l. Согласно гипотезе Бухерера-Ланжевена $l = k^{-\frac{1}{3}}$, что и приводит к результату, упоминаемому в тексте.

Отсюда в силу (300) составляющие действительной силы в движущейся системе будут:

$$\frac{(x_2'-x_1')\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{1}{k}\,\frac{(y_2'-y_1')\,e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{1}{k}\,\frac{(z_2'-z_1')\,e^2}{4\pi r'^3},$$

и на основании (*154*) составляющие наблюденной силы опять будут иметь значения (*155*). Наблюдатель A заключит поэтому из своих опытов, что частички отталкиваются друг от друга с силой

$$\frac{e^2}{4\pi r'^2},$$

и он припишет каждой из них заряд e, равный истинному заряду.

Предположим, наконец, что заряд e помещен в электромагнитное поле, существующее в движущейся системе, в точке, которая принимает участие в движении. Тогда в силу (293) составляющие истинной силы, действующей на нее, равны

$$e\mathbf{d}'_x, \qquad \frac{1}{k}\,e\mathbf{d}'_y, \qquad \frac{1}{k}\,e\mathbf{d}'_z,$$

и мы можем заключить из (*154*), что составляющие наблюденной силы имеют значения

$$e\mathbf{d}'_x, \qquad e\mathbf{d}'_y, \qquad e\mathbf{d}'_z.$$

Отсюда ясно, что, как это было установлено в тексте, движущийся наблюдатель должен будет прийти к вектору $\mathbf{d}'$, если он будет определять силу, действующую на заряженную частичку.

86. (Стр. 332) [1915] Позднейшие опыты Бухерера [1]), Гупки [2]), Шефера и Неймана [3]) и, наконец, Ги и Лаванши [4]) подтвердили формулу (313) для поперечной электромагнитной массы, так что, по всей вероятности, единственное возражение, которое можно было бы выставить против гипотезы деформируемого электрона и принципа относительности, теперь отпадает.

---

[1]) A. H. Bucherer, Phys. Zeitschr. **9** (1908), стр. 755; Ber. d. deutschen Phys. Ges. **6** (1908), стр. 688.

[2]) E. Hupka, Ann. Phys. **31** (1910), стр. 169.

[3]) Cl. Schaefer und G. Neumann, Phys. Zeitschr. **14** (1913), стр. 1117.

[4]) Ch. E. Guye et Ch. Lavanchy, Comptes Rendus **161** (1915), стр. 52.

есть время, измеряемое как местное время в P, которое протекло между выходом и возвращением сигнала. С другой стороны, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ есть длина L, которую наблюдатель A приписывает расстоянию PQ, а $\frac{2L}{t'_2}$ — значение скорости света, которое он выводит из своего опыта. Уравнение (*152*) показывает, что это значение будет равно c.

84. (Стр. 327.) Достаточно указать, что, как это видно из (*153*) и (*149*), часы, показывающие местное время в Q, отметят время t'_1 в момент, когда сигнал приходит в Q, и что, по (*151*), это время t'_1 есть как раз $\frac{L}{c}$ [88].

85. (Стр. 328.) На основании сказанного в § 189 масса m, которую движущийся наблюдатель приписывает телу, будет той массой, которую это тело действительно имело бы, если бы оно находилось в покое. Но так как массы изменяются при поступательном движении так, как это указано в (305), действительная масса будет k^3m, если ускорение направлено по OX, и km, если оно направлено под прямым углом к этой оси. Пользуясь индексами (o) и (r) для обозначения действительных и наблюдаемых значений, мы можем поэтому написать:

$$m_{(r)} = (k^3,\ k,\ k)\, m_{(o)},$$

где множители, заключенные в скобки, относятся к ускорениям, параллельным осям OX, OY и OZ.

С другой стороны, из формул (303) вытекает, что для ускорений

$$j_{(r)} = \left(\frac{1}{k^3},\ \frac{1}{k^2},\ \frac{1}{k^2}\right) j_{(o)},$$

так что, если движущийся наблюдатель измеряет силы F как произведения из ускорения и массы, мы получим:

$$F_{(r)} = \left(1,\ \frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right) F_{(o)}. \qquad (154)$$

Пусть теперь две частички с одинаковыми действительными зарядами e расположены в двух точках движущейся системы; эффективные координаты их пусть будут x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2; эффективное расстояние их r'_1 дается первым уравнением § 171. Если бы эти частички имели соответствующие положения в неподвижной системе, составляющие силы, действующей на вторую из них, были бы:

$$\frac{(x'_2-x'_1)\, e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{(y'_2-y'_1)\, e^2}{4\pi r'^3}, \qquad \frac{(z'_2-z'_1)\, e^2}{4\pi r'^3}. \qquad (155)$$

[1] Термины «электрическая *сила*» и «магнитная *сила*» ныне заменены «электрической» и «магнитной *напряженностями*». Это относится ко всему последующему тексту.

[2] В предисловии уже было указано, что электронная теория представляет собой почти «единоличное творение» самого Лоренца. Для экспериментального обоснования теории особенно много сделала школа Дж. Дж. Томсона; ему же принадлежит первый подсчет величин «кажущейся» массы электрона. Термин «электрон» предложен в 1891 г. Джонстоном Стони. Вначале, как видно из текста настоящей книги, под этим названием разумелись как отрицательные, так и положительные элементарные заряды. Только значительно позже удалось получить отдельно положительные элементарные заряды с массой, равной массе электрона (а не протона); «позитрон» стал физической реальностью только в 1932 г., после работ Андерсона, Блэккета и Оккиалини (Nature, 1932, 1933).

[3] Теория электронов была создана в эпоху, чрезвычайно тяжелую для атомистики — в период «кризиса» в физике, когда реакционное отрицание гипотез вообще повлекло за собой неверие и в атомную теорию. Безусловно, успехи электронной теории сыграли немаловажную роль в дискредитации идеалистического течения и в возвращении атомным образам их былого обаяния; по времени эти успехи почти совпадают с открытием ультрамикроскопа, с трудами Перрена, Сведберга и др.

[4] Скромность Лоренца заставляет его и здесь умалчивать, что создателем теории неподвижного эфира является он сам. До него вопросами электродинамики (а, значит, и оптики) движущихся тел занимался только Г. Герц, стоявший на точке зрения увлечения эфира движущимся веществом. Нам известна только одна неопубликованная работа В. А. Михельсона (1893), также исходившая из представлений о неподвижном эфире. Выводы этой работы («световое трение») были помещены в «тезисах» при защите Михельсоном диссертации в 1894 г.

[5] Лоренц, говоря о магнитном действии токов конвекции, ограничивается указанием на труды Роулэнда. Вопрос о магнитном действии движущихся зарядов имеет длинную историю. После Роулэнда он связан с именем Рентгена, с ошибочными

опытами Кремье, с рядом других, менее значительных работ, и завершается классическими исследованиями нашего соотечественника А. А. Эйхенвальда.

[6] Так называемый «второй член лорентцовского выражения для силы», действующей на электрон, эквивалентен закону Ампера о действии магнитного поля на элемент тока. В электронной теории этот закон перестает быть непроверяемой гипотезой, а, напротив, ложится в основание действия магнитного поля на движущиеся заряды (в лучах α, β, катодных и пр.). Он играет большую роль в теории светового давления и во всех исследованиях явлений в движущихся телах.

[7] Как здесь, так и в примечании 4, автор развивает обычную теорию того, как уравнению (29) можно удовлетворить так называемыми запаздывающими потенциалами. В. Ритц первый указал (Ann. Chim. et Phys. (8), 13, стр. 145—275), что это решение не есть единственное и что уравнению (29) можно столь же хорошо удовлетворить системой «опережающих» потенциалов, которые не имеют того ясного физического смысла, как запаздывающие потенциалы. Лорентц глухо говорит об этом далее в § 14 и соответствующем примечании 6. См. также Einstein und Ritz, Phys. Zs. 10, стр. 323, 1900.

[8] Здесь и далее излагаются вывод и приложение теоремы Пойнтинга, но умалчивается о том, что создание понятия о потоке энергии принадлежит нашему соотечественнику Н. А. Умову. В соответствии с этим мы теперь называем и самую теорему теоремой Умова-Пойнтинга.

[9] В предыдущем параграфе, здесь и в примечании 9 Лорентц показывает, что максвелловы напряжения сохраняют свое значение, помимо статического поля, и в случае переменных полей; здесь они дополняются, однако, не приводимым к форме интеграла по поверхности членом F_2 (46). Это обстоятельство выяснено Лорентцом впервые. Сам Максвелл выводил световое давление более суммарно, без этого учета более тонких соотношений в переменном поле. Укажем еще для примера, что очень интересная диссертация А. И. Садовского о вращательных действиях света поневоле должна была базироваться на допущении, что действие максвелловых напряжений одинаково в статическом и динамическом полях.

[10] В изложении автора труды П. Н. Лебедева, с одной стороны, и Никольса и Хэлла, с другой, — поставлены на один уровень с некоторым даже предпочтением последних. Это — дань американскому самолюбию. На самом деле именно работы П. Н. Лебедева являются как первыми по времени, так и единственно безупречными по методу. Теории светового давления посвящены: а) классическая работа Д. А. Гольдгаммера (Ann. d. Phys. 4, стр. 847, 1901); б) основные математические изыскания Шварцшильда (Ber. Münch. Ak. 31, стр. 293, 1901) и Дебая

(Ann. d. Phys. **30**, стр. 100, 1909); в) интересные работы Пойнтинга и многие другие, в том числе — с электронной точки зрения — работы К. Н. Шапошникова и Т. П. Кравца. См. также предыдущее примечание. Далее, вопросы светового давления получили огромное значение для оценки явлений внутри звезд и в звездных атмосферах.

[11] Теория относительности показала, что не только электромагнитная, но и всякая масса одинаково зависит от скорости, что лишает рассуждения этого параграфа их значения.

[12] Точность работы Кауфмана здесь явно переоценена: в дальнейшем и абсолютные цифры и изменение $\frac{e}{m}$ со скоростью, даваемые им, оказались неверными. Впрочем, настоящее замечание относится более к § 179.

[13] В настоящее время наиболее точным значением для $\frac{e}{m}$ следует считать $1{,}7589 \cdot 10^7$; см. УФН, **45**, стр. 458 (1951), а также статью Дюмонда и Когена в Phys. Rev. **82**, стр. 55 (1951).

Вопрос о точной величине e ставился также в связи с попыткой Эддингтона постулировать для константы тонкого строения сначала точную величину 136, а потом 137, исходя из одних только теоретических соображений. Сводку данных о величине e см. также в цитированной статье Дюмонда и Когена.

[14] Вопросу о природе сил, действующих между молекулами, Лорентц отдает здесь так много внимания потому, что позже (§§ 168 и сл.) для него будет существенно предположение, что все молекулярные силы суть силы электромагнитного происхождения: в этом случае не понадобилось бы других добавочных гипотез для объяснения продольного сжатия движущихся тел. Открытие, с одной стороны, нейтронов, а с другой, — особых «ядерных» сил в значительной степени подрывает электромагнитную теорию материи.

[15] Как известно, именно теория излучения исторически оказалась наиболее уязвимой частью классической теории; в особенности выпукло это обстоятельство впервые проявляется в знаменитых работах Н. Бора (Phil. Mag., 1912), где для получения качественно и количественно правильного выражения для бальмеровской спектральной серии автор постулирует, что ускоренное движение электрона *не* сопровождается излучением.

[16] Сам автор в своем примечании 72* разъясняет ту роль, которую играет теория относительности в установлении основных уравнений, аналогичных уравнениям настоящего параграфа. Из ее принципов они вытекают с полной убедительностью, простотой и общностью, без помощи упрощающих допущений, которые автор делает здесь и далее.

[17] Представление об электронном газе именно в вопросе об отношении $\frac{k}{\sigma}$ встретило свое первое серьезное затруднение, за которым последовал ряд других. Только Зоммерфельду удалось преодолеть эти затруднения, применив к электронному газу вместо статистики Максвелла отличную от нее статистику Ферми. См., например, дополнительную статью «Волновая механика» к книге Зоммерфельда «Строение атома и спектральные серии».

[18] Хотя автор и снабжает этот параграф во втором издании подстрочным примечанием о важном значении, которое гипотеза Планка о квантах приобрела к этому времени (1915), текст параграфа исторически совершенно не отвечает той роли, которую теория квантов играла уже тогда в науке. Напомним, что уже в 1911 г. явилась необходимость обсуждения теории квантов на особом конгрессе (Сольвеевском, с обзорными докладами Планка, Нернста, Зоммерфельда, Эйнштейна). Здесь речь шла преимущественно о тепловых свойствах веществ. Труды конгресса изданы в 1914 г. Эйкеном, который прибавил обширный обзор работ в этой области в 1911 по 1913 г. включительно. Наконец, в 1912 и 1913 гг. появились знаменитые работы Н. Бора, положившие начало мощному расцвету квантовой теории спектров. Конечно, все эти успехи шли мимо старой, классической электронной теории и самым фактом своего существования выбивали у нее из-под ног почву.

[19] Неоднократно давались доказательства, что классическая теория *не* могла привести к формуле Планка. Напротив, Эйнштейну в 1916 г. (Phys. Zeitschr. 18, стр. 121, 1917) удалось показать, что последняя получается совершенно элементарно, если заранее принять существование квантов и выражение $h\nu$ для их величины.

[20] Это — взгляды, современные теории электронов Лорентца.

[21] В настоящее время достигнуто единство результатов для величин $\frac{e}{m}$, получаемых по методу отклонения лучей и по методу явления Зеемана. Лучшие измерения отличаются не больше чем в четвертом знаке. Объяснение мультиплетов легко дается квантовой теорией (см. следующее примечание).

[22] Блестящее подтверждение, которое электронная теория получила в первых опытах Зеемана, обязывает Лорентца итти навстречу всем трудностям, которые уготовили ему позднейшие исследования в этой области. И мы видим, какое громадное количество труда и остроумия он тратит на преодоление всех этих препятствий и как, несмотря на это, он относится ко всему сделанному с большой дозой скепсиса. Успех в области сложного эффекта Зеемана достигнут впервые применением квантовой теории. Достаточно сравнить такие две книги, как W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik (1908), с одной стороны, и Sommer-

feld, Atombau und Spektrallinien (1919), с другой, — чтобы оценить всю плодотворность введения сюда квантовых принципов, разрушающих старую теорию.

[23] Упоминаемая здесь модель атома, предложенная Дж. Дж. Томсоном, в свое время сыграла большую роль; она впервые постулировала или выводила расположение электронов в нескольких последовательных кольцах; при этом по мере усложнения должны были наблюдаться отношения, несомненно весьма напоминающие менделеевскую таблицу. Но Дж. Дж. Томсон предполагал наличие большого объемно-заряженного шара с расположенными внутри электронами. Опытами Резерфорда было доказано, что отклонение β-лучей в тонких пластинках не согласуется с этим воззрением и, напротив, находится в полном согласии с моделью атома, имеющей в центре малое по сравнению с размерами атома ядро. Такое же ядро лежит, как известно, и в основе теории Бора.

[24] Здесь автор указывает на серьезное затруднение старой теории при разъяснении явлений магнетизма: вращающиеся и движущиеся по замкнутым орбитам заряды совершают ускоренное движение и должны поэтому излучать. Как известно, квантовая теория Бора обходит это затруднение просто постулатом, что излучения при этом быть не должно...

[25] Теперь мы знаем, что рентгеновы лучи обладают свойством преломлении, чрезвычайно слабым, конечно; при этом показатель преломления меньше единицы, как это выходит из теории для области, лежащей выше самых высоких поглощаемых частот.

[26] Здесь приходится отметить несомненную ошибку автора: показатель μ стремится к единице только со стороны коротких волн; со стороны длинных волн он стремится к значению $1+\frac{1}{2\alpha}\left(=\sqrt{\varepsilon}\right)$.

[27] Вопрос о диссимметрии явления Зеемана получил особую важность, когда в 1912 г. Пашен и Бак открыли, что при весьма сильных полях расщепление линий имеет совсем иной характер, чем при слабых, а теория, данная Фохтом, предсказала, что в трудных для исследования полях средней величины нужно ожидать дисимметричного расщеплении. Дисимметрия действительно была обнаружена, но оказалась значительно большей, чем предсказанная Фохтом. Позднейшие прецизионные измерения Зеемана, Гмелина и др. показали, что в рамки квантовой теории явление хорошо укладывается. См., например, у Landé, Handb. d. Experimentalphys. XVII, стр. 160 и сл.

[28] Со времени Лорентца появилось немало исследований по вопросу о ширине спектральных линий. Как одно из наиболее подробных можно назвать исследование М. Л. Вейнгерова, сумевшего разделить явление поглощения на отдельные области,

в которых действуют как главная причина то лоренцовские столкновения, то чистое планковское рассеяние и т. д. (См. Труды ГОИ, вып. 63).

[29] Для читателя, знакомого с теорией относительности, бросается в глаза, какие мучительные усилия приходится делать адепту старой теории для истолкования экспериментальных результатов в ее терминах, и насколько теория явлений становится проще и естественнее с точки зрения принципа относительности. Но еще более поучительно, как много было сделано до Эйнштейна, в частности самим Лоренцом, для нахождения выражений, остающихся инвариантными при переходе от одной инерциальной системы к другой. Нехватало только физического толкования полученных выражений; для этого нужно было еще отказаться от понятия абсолютного времени, что и является делом Эйнштейна. Сам Лоренц в примечании 72* ясно оценивает значение нового строя мыслей последнего. Но этот строй не может быть приведен в единство со старыми идеями и образами и знаменует собой не эволюцию, а революцию в физике.

[30] Автор курьезным образом сближает здесь имена двух ярых антагонистов по вопросу об электроне. Незачем прибавлять, что позднейшее время отдало дань полного доверия Милликену, а утверждения Эренгафта о субэлектроне имели хождение только в Венской школе. Справедливость требует указать еще на тонкие и изящные опыты А. Ф. Иоффе.

[31] Необходимо упомянуть, что формулы, которыми пользовались Брэгги, одновременно были выведены нашим соотечественником Ю. В. Вульфом.

[32] Такое предположение часто делают в приложении к смесям, и оно до некоторой степени оправдывается опытом. Оно, однако, основано на произвольной гипотезе, что молекулы первой составляющей действуют только на молекулы той же составляющей и т. д. Об отступлениях от аддитивности рефракции см. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика.

[33] В формулах преобразования теории относительности

$$x' = k(x - wt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = k\left(t - \frac{wx}{c^2}\right)$$

множитель $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$ имеется одинаково в первой и четвертой. Отсюда следует, что в системе, движущейся относительно наблюдателя, масштабы длины и времени меняются одинаково в отношении $\frac{1}{k}$. Доказательством изменения длин служит опыт Майкельсона (именно для его объяснения Лоренц и предложил свою гипотезу «контракции»). Для изменения масштаба времени соответственный опыт был сделан только в 1938 г. Г. Айвсом и Стилуэллом (JOSA, 28, стр. 215), которые прецизионным образом измеряли допплеровское смещение спектральной линии, испускаемой каналовыми лучами, причем последние наблюдались как спереди, так и сзади (с помощью зеркала). По классической теории изменение периода при этом должно равняться $\pm T\frac{w}{c}$, а изменение длины волны $\Delta\lambda = \pm\lambda\frac{w}{c}$. По теории относительности соответственное изменение должно быть:

$$\Delta\lambda = \pm\frac{\lambda w}{kc}, \qquad \text{или} \qquad \Delta\lambda = \lambda\left[\pm\frac{w}{c} - \frac{1}{2}\frac{w^2}{c^2}\right],$$

т. е. должна наблюдаться небольшая дисимметрия смещения линии в том и в другом случаях. В опытах авторов она констатирована и оказалась вполне совпадающей по величине с предсказанием теории.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ