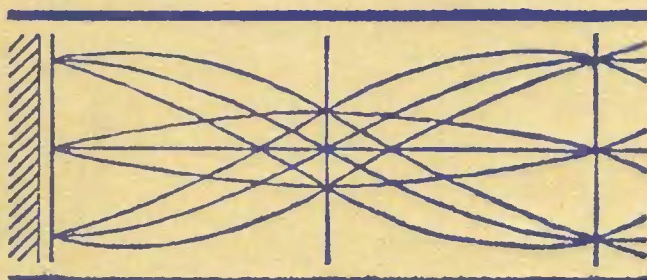

Дж. Поусон

**ФИЗИКА
ПУЧКОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ
ЧАСТИЦ**



The International Series of Monographs on Physics

General Editors

W. Marshall

D. H. Wilkinson

**THE PHYSICS OF
CHARGED-PARTICLE
BEAMS**

by

J.D. LAWSON

Clarendon Press Oxford 1977

Дж. Лоусон

ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Перевод с английского

канд. физ.-мат. наук

А.В. АГАФОНОВА

под редакцией

д-ра физ.-мат. наук, профессора

А.А. КОЛОМЕНСКОГО

В монографии известного английского физика-теоретика Дж. Лоусона сделана попытка охватить с единой точки зрения все многообразие пучков заряженных частиц, что отличает ее от немногочисленных переводных книг по физике пучков, посвященных, как правило, узкоспециальным приложениям. В ней ясно и четко излагаются фундаментальные физические идеи и представления и показывается, как они преломляются в различных областях физики.

Книга предназначена многочисленным специалистам, занимающимся различными применениями пучков заряженных частиц, физикой плазмы, техникой СВЧ, ускорителями и т.п. Для аспирантов и студентов она может служить хорошим пособием по современной физике пучков заряженных частиц и смежным проблемам.

Редакция литературы по физике

1704040000

Л $\frac{20409-056}{041(01)-80}$ 56 - 80

Originally published in English
under the title of THE PHYSICS OF
CHARGED PARTICLE BEAMS

© Oxford University Press, 1977

© Перевод на русский язык, "Мир", 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Пучки заряженных частиц принадлежат к числу наиболее часто встречающихся объектов в современной науке и технике. Применения их настолько разнообразны, что охватывают практически все области, включая физику атомного ядра и элементарных частиц, физику плазмы (в том числе проблему управляемого термоядерного синтеза) и твердого тела, генерацию волн СВЧ и накачку лазеров, а также практические применения в медицине, обработке металлов, дефектоскопии, пищевой промышленности, электронных приборах и т.д. По всем этим направлениям, представляющим большой интерес благодаря своей научной и практической важности, публикуется значительное количество теоретических и экспериментальных работ. В то же время до сих пор не обращалось достаточного внимания на выработку единого взгляда на свойства пучков, проявляющиеся в указанных областях, хотя по отдельным из них имеются специальные обзоры и монографии. Более того, специалисты, занимающиеся различными направлениями физики пучков, не всегда могут найти общий язык из-за применяемых ими различных способов описания явлений и отсутствия разработанных аналогий. Поэтому естественно возникла необходимость систематизации и теоретического осмысления основных достижений физики пучков.

Эту цель в основном преследует и в большой степени выполняет предлагаемая книга, написанная Дж. Лоусоном, известным английским специалистом в области физики плазмы и ускорителей заряженных частиц. Она вышла в серии "The International Series of Monographs on Physics", которая включает фундаментальные монографии, знакомящие читателя с наиболее актуальными и важными разделами физики. Книга Дж. Лоусона посвящена изложению и обобщению результатов исследований по физике пучков заряженных частиц. Материал в ней рассматривается не только на основе исследований, ведущихся непосредственно в данной области, автор использует также результаты и таких дисциплин, послуживших фундаментом физики пучков заряженных частиц, как электронная и ионная оптика, теория ускорителей заряженных частиц и физика плазмы.

Систематизация пучков заряженных частиц в книге проводится

в первую очередь с точки зрения основных физических свойств пучков на основе понятий, характерных для оптики пучков, классической и статистической механики и физики плазмы. Общей формулировке задачи предшествует живое изложение основных физических идей и рассмотрение простых примеров с упором на понимание физики происходящих явлений с минимальным привлечением математики. Более сложное математическое рассмотрение и углубление физических представлений проводится тогда, когда это необходимо для получения количественных характеристик. Кроме того, в каждом случае автор прослеживает связь данного явления с его аналогами, имеющими место в других разделах физики. Для более глубокого знакомства с данным вопросом и его практическими применениями в книге выделены специальные консультационные разделы; в них кратко излагаются и комментируются результаты соответствующих работ, на которые даются ссылки. Такой несколько необычный стиль изложения позволяет показать, как из основных физических идей формируются следствия, необходимые при исследовании различных конкретных ситуаций.

Монография разбита на шесть глав. В небольшой гл. 1, несущей вводный характер, дается план построения книги, сформулировано понятие пучка заряженных частиц, которое в некоторых случаях не так тривиально, как это кажется на первый взгляд, и рассмотрены основные применения пучков.

Глава 2, одна из основных, посвящена изложению важных представлений оптики пучков заряженных частиц и описанию движения частиц в фокусирующих системах. В параксиальном приближении рассмотрены способы и возможности формирования пучков различными системами линз, имеющими одну или две плоскости симметрии, а также элементы "одночастичной" теории ускорителей, включающие движение частиц во внешних (постоянных или переменных в пространстве и во времени) магнитных полях без учета влияния собственных полей пучка.

В гл. 3 рассматриваются свойства ламинарных пучков, распространяющихся во внешних электрических и магнитных полях или без них и обладающих собственными полями. Эта глава ценна в методическом плане, поскольку в ней дана четкая классификация различных типов пучков заряженных частиц и их основные свойства. Ламинарное приближение представляет собой определенную идеализацию, но позволяет сравнительно просто подойти к описанию свойств реальных пучков. В ряде случаев удается достичь достаточно хорошего качественного и количественного согласия с экспериментом.

В гл. 4 исследуются свойства неламинарных пучков в гораздо более общем случае (в отсутствие столкновений частиц). Большое внимание уделено физическому смыслу теоремы Лиувилля и ее

следствий, использованию понятия эмиттанса для описания реальных пучков, обладающих собственными полями. В качестве примеров рассмотрены системы с линейными и нелинейными собственными силами, сфокусированные пучки, имеющие конечную температуру, кольцевые пучки и цилиндрические слои частиц. Сформулированы основные понятия более общего подхода к описанию пучков заряженных частиц на основе кинетического уравнения Власова.

Небольшая по объему глава 5 посвящена исследованию свойств пучков частиц, взаимодействующих между собой посредством столкновений, и пучков с диссипацией энергии частиц, вызываемой излучением. Сюда относятся такие процессы, как рассеяние пучка частиц в плазме и на остаточном газе в камере ускорителя, рассеяние частиц на частицах самого пучка в электронном микроскопе и электронном накопителе, охлаждение пучков тяжелых частиц электронными пучками. Кроме того, здесь рассматриваются радиационные эффекты в электронных синхротронах и накопителях, а также процессы в релятивистском электронном пучке, стабилизированном излучением.

В гл. 6, занимающей по объему примерно треть книги и являющейся одной из наиболее интересных, приведена классификация различных типов волн и неустойчивостей, возбуждаемых в потоках заряженных частиц. С единой точки зрения рассмотрены волны в неограниченной плазме, продольные и поперечные волны в системах конечных размеров как для слаботочных, так и для сильноточных пучков, обладающих большими собственными полями. Это позволило в значительной степени охватить важную и интересную область "пучковых" неустойчивостей. Основное внимание уделено, как и в предыдущих главах, подробному изложению физики неустойчивостей на той стадии, когда их можно считать линейными. Нелинейная стадия и распад неустойчивостей обсуждаются только качественно. В каждом случае вычислены пороги и инкременты неустойчивостей, обсуждается их практическое применение в различных областях физики и техники.

Книга Дж. Лоусона — обстоятельная монография, посвященная физике как слаботочных, так и сильноточных пучков заряженных частиц, последние из которых характеризуются сильными собственными электрическими и магнитными полями. Книга не свободна от недостатков, естественных при таком большом объеме материала, в том смысле, что не все ее разделы изложены равноценно, но ее достоинства несомненны. К ним следует отнести также и тщательно подобранную библиографию, насчитывающую более 300 ссылок. Как пишет сам автор в предисловии, эта библиография недостаточно отражает тот фундаментальный вклад

в науку о пучках заряженных частиц, который был сделан советскими авторами и который Дж. Лоусон не раз отмечает в тексте книги. В некоторых местах мы поместили примечания, которые касаются этой стороны вопроса. При переводе нами были замечены и устранены некоторые опечатки и неточности (в формулах).

Разумеется, настоящая монография не может заменить руководств и пособий, посвященных физике и технике специфических типов пучков. Однако важным является то, что она вырабатывает у читателя систематический взгляд на физику пучков, дает ему солидную теоретическую базу и приучает самостоятельно ориентироваться в сложных вопросах, касающихся поведения различных пучков. Книга будет полезна и интересна многочисленным специалистам, в частности в таких областях, как электронная и ионная оптика, физика плазмы, ускорители, генераторы СВЧ и т.п. Особую пользу она принесет студентам и аспирантам, позволив им быстро войти в курс современного состояния физики пучков заряженных частиц и обогатив их теми физическими идеями, которые составляют основу книги.

А.А. Коломенский

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мне очень приятно сделать краткое введение к русскому изданию моей монографии и добавить некоторые замечания к тем, что были приведены в предисловии к английскому изданию. Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что я попытался изложить материал с единой точки зрения с акцентом на физические представления и связь между аналогичными проблемами в различных областях физики. Более тщательное и подробное изложение отдельных тем специалисты могут найти в других книгах.

Мои собственные интересы были связаны главным образом с ускорителями частиц, и именно в этой области я в наибольшей мере сознаю вклад ученых из Советского Союза. В предисловии к английскому изданию я отметил свое особое отношение к академику Г.И.Будкеру, и мне хотелось бы посвятить русское издание книги его памяти. Г.И.Будкер хорошо представлял себе богатство физики пучков частиц, и я попытался отразить в книге все это разнообразие.

Наконец, я хотел бы выразить признательность проф. А.А.Коломенскому за инициативу, проявленную при переводе книги, и за большой труд по его редактированию.

Дж. Лоусон

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги дать общий конспективный обзор большого разнообразия пучков заряженных частиц, которые исследовались в связи с их широким применением в различных практических устройствах. Классификация пучков проводится не по их приложениям, а по существенным физическим свойствам и связана с лежащими в их основе принципами оптики, классической и статистической механики, а также физики плазмы. Таким образом удается свести воедино различные точки зрения и сравнить понятия, которые возникают в связи с различными приложениями.

В книге нет формул и зависимостей, предназначенных для непосредственного использования разработчиками аппаратуры, и не обсуждаются численные методы. Ее назначение состоит скорее в том, чтобы дать формулировку основных идей и показать, как задачи, относящиеся к конкретной области их приложения, связаны с задачами в других областях. Информацию о более подробном изложении вопросов и практических приложениях можно найти в литературе, на которую даны ссылки и которая обсуждается в специальных разделах книги. Эти разделы обозначены буквой Л. Например, Л.1 - 3 обозначает раздел, в котором обсуждается литература, относящаяся к §§ 1 - 3 данной главы.

Хотя отдельным темам, таким, как электронная оптика, СВЧ-устройства, ускорители заряженных частиц и физика плазмы, посвящено много книг, данная монография, возможно, является единственной в том смысле, что материал, относящийся ко всем этим областям, рассмотрен в ней с единой точки зрения. В связи с этим мне пришлось усвоить и переосмыслить многое из того, с чем я был не знаком. Настоящая книга своим появлением во многом обязана помощи, которую оказали мне в данной работе мои коллеги, не пожалевшие своего времени ни на обсуждения, ни на ознакомление с рукописью в ее первоначальных вариантах.

В такой широкой области, которой посвящена данная книга, сложным всегда является вопрос о приоритете и первоисточниках. Статьи, на которые лучше всего было бы сослаться, но с которыми автор не был знаком, остались неупомнутыми. В частности, я

сознаю, что исследователи из Советского Союза могут почувствовать, что их очень значительный вклад в эти области отражен в значительно меньшей степени, чем вклад ученых из Западной Европы и США. Это снова связано с тем, что автор выбирал знакомые ему работы, а не наиболее соответствующие положению вещей. (Стоит заметить, по-видимому, что мой собственный интерес к пучкам в большой степени был вызван замечательной статьей Будкера [45], в которой содержались семена того, что развилось позже.)

В книге отсутствует авторский указатель и, что следует подчеркнуть, не делается каких-либо попыток отметить отдельного автора любой значительной работы. Нередко оказывается более полезным, когда ссылаются на поздние обзоры или монографии, в которых обсуждаются ранее выполненные работы. Во многих случаях в качестве примеров цитируются отдельные работы, однако это отнюдь не означает, что до них не было ранее вышедших или более поздних работ. В список литературы включены только те работы, на которые автор ссылается в тексте книги.

Выбор материала, естественно, отражает мои собственные суждения о том, что является наиболее интересным и важным. Я буду признателен читателям за указания на любые опечатки и ошибки. Конечно, было бы слишком самонадеянно считать, что в книге не останется ни смысловых, ни типографских ошибок.

Написание книги заняло несколько лет, в течение которых задача ее окончания казалась иногда неразрешимой. Я особенно обязан сэру Д. Уилкинсону, по предложению которого я взялся за написание настоящей монографии, и д-ру Стаффорду, директору Лаборатории высоких энергий им. Резерфорда, за их неизменную поддержку в течение всего времени, когда я трудился над выполнением этой задачи.

По всем материалам, касающимся ускорителей заряженных частиц, значительная помощь была получена мною от д-ра Хируорда. При рассмотрении ряда вопросов, особенно физических основ предмета, я воспользовался его разрешением ознакомиться с большим рукописным материалом, общие положения которого я использовал. Кроме того, за этим последовало критическое прочтение соответствующих частей рукописи. Д-р Мартин Райзер сделал много подробных замечаний на различных этапах моей работы над книгой, особенно по поводу гл. 2, а также по ряду вопросов, рассматриваемых в последующих главах, в частности относительно свойств релятивистских кольцевых пучков. Д-р Кларк помог прояснить ряд фундаментальных задач, затронутых в гл. 6, и сделал ценные замечания, касающиеся изложения материала. Много полезных предложений внес д-р Чао, прочитавший первые

черновые наброски глав 2 - 4. Д-р Сахерер помог мне при написании разделов, посвященных неустойчивостям сгруппированных пучков, особенно разд. 5.4 гл. 6. Большинство графиков, приведенных в гл. 6, воспроизводилось с отпечатков дисперсионных зависимостей, частично же эти графики сделаны в виде набросков с таких оттисков. Составлением плана и организацией этой работы занимался д-р Ньюмен. Кроме того, по отдельным вопросам мне помогали либо в форме обсуждений, либо непосредственно при решении конкретных задач, либо критическим прочтением части рукописи следующие лица: д-р Коннор, д-р Деви, д-р Лашмор-Девис, г-н Дональд, д-р Хоукс, д-р Лапостоль, д-р Дж.Ласлет, г-н Реддиш, д-р Тейлор и д-р Тейсс. Многие другие также помогли мне в написании отдельных разделов. По библиографии я получил полную сочувствия помощь от г-жи Марш и ее сотрудников из библиотеки Лаборатории им. Резерфорда.

Приношу свою официальную благодарность "Норс-Холланд Паб-лишинг Компани" за разрешение воспроизвести рис. 2.6 и 4.9, которые были подготовлены для журнала "Nuclear Instruments and Methods", **139**, 17 (1976), и д-ру Сахереру за фотографию, воспроизведенную на вклейке в начале книги,¹⁾ которая была опубликована в его работе [256]. Каких-либо других рисунков непосредственно не воспроизводилось, а в тех случаях, когда для приготовления рисунков использовались уже опубликованные, выражалась признательность в соответствующих местах.

Лаборатория высоких энергий
им. Резерфорда,
Чилтон,
апрель 1977

Дж.Д. Лоисон

¹⁾ Ради удобства мы поместили эту фотографию в гл. 6 (см. рис. 6.27), в которой даются на нее ссылки. — *Прим. ред.*

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Краткие замечания о принятых обозначениях даны в § 4 гл. 1. Ниже приведен список наиболее часто используемых символов. Обозначения, используемые только на протяжении нескольких страниц, определяются там же, и в общий список не включены. По возможности в списке обозначений указаны разделы, в которых встречается данный символ или номер выражения, с помощью которого дается его определение.

Индексы имеют различные значения в разных местах книги, и их смысл можно найти в соответствующем контексте. Исключение составляет индекс L , который (за исключением использования его в Ω_L) обозначает, что величина измерена в системе координат, вращающейся с ларморовской частотой. Замечания, касающиеся использования символа r , обсуждаются в § 4 гл. 1. Пояснения в тексте позволяют не путать его с радиальной переменной, обозначаемой иногда индексами a , b или 0 (как в разд. 4.1 гл. 3)

ЛАТИНСКИЕ БУКВЫ

- A Вектор-потенциал
- A Амплитуда в обозначении переменных фаза - амплитуда (разд. 3.2 гл. 4)
- A Приведенный радиус пучка, $a(\beta\gamma)^{1/2}$ (разд. 3.7 гл. 4)
- A Атомная масса (гл. 5)
- a Радиус цилиндрического пучка
- a Большая полуось эллиптического поперечного сечения пучка или радиус вдоль оси x
- a Амплитуда нормальной моды (с различными индексами) (разд. 3.7 гл. 6)

- B Магнитная индукция (часто неточно называемая "полем")
- B Яркость
- b Радиус камеры, окружающей пучок
- b Малая полуось эллиптического поперечного сечения пучка или радиус вдоль оси y

- C Длина замкнутой орбиты в ускорителе (разд. 8.3 гл. 2)
 C Параметр, характеризующий влияние пространственного заряда, в теории лампы бегущей волны (разд. 3.9 гл. 6)
 C_c Коэффициент хроматической аберрации (разд. 2.9 гл. 2)
 C_s Коэффициент сферической аберрации (разд. 2.8 гл. 2)
 c Скорость света
 c Постоянная связи в теории связанных мод
- D Глубина бесстолкновительного скин-слоя
- E Напряженность электрического поля
- F Сила
 $F()$ Функция распределения (аргумент и нормировка определяются в тексте)
 f Фокусное расстояние линзы
 f Коэффициент зарядовой нейтрализации пучка
 $f()$ Функция распределения [другой вариант функции $F()$]
- H Гамильтониан
 h Номер гармоники (§ 8 гл. 2)
 h Постоянная Планка
- I Ток
 I_A Ток Альвена (§ 1 гл. 3)
 I_B Ток пучка (разд. 3.9 гл. 6)
 I_C Ток, протекающий в цепи (разд. 3.9 гл. 6)
 i Плотность тока
 i_c Плотность тока на катоде
- K Обобщенный первеанс [выражение (3.30)]
 K Постоянная связи (разд. 3.7 гл. 6)
 k Волновое число
 k Первеанс (разд. 2.2 гл. 3)
 k Постоянная Больцмана
- L Лагранжиан
 L_0 Радиационная длина, м [выражение (5.10)]
 L $\ln(\theta_{\max}/\theta_{\min})$ для частиц пучка (§ 10 гл. 5)
 L_0 Характерная длина при распространении пучка в трубе с проводящими стенками [выражение (6.90)]
 L_1 Величина, аналогичная L_0 , но для случая конечного импеданса стенок [выражение (6.93)]

- M** Матрица преобразования [с соответствующими индексами; см. замечание после выражения (2.31)]
- m** Элемент матрицы (с двумя индексами)
- m₀** Масса покоя частицы
- m*** Эффективная масса частицы (разд. 7.4 гл. 2)
- N** Число частиц на единице длины пучка
- N_A** Число Авогадро
- N_s** Число частиц, приходящихся на единицу площади плоского пучка
- n** Показатель поля при рассмотрении бетатронных колебаний (разд. 5.3 гл. 2; в разд. 8.4 гл. 4 показатели магнитного и электрического полей обозначены через n_M и n_E)
- n** Плотность числа частиц
- n** Азимутальный номер моды (разд. 3.5 гл. 6)
- n₀** Невозмущенная плотность числа частиц
- P** Канонический импульс
- p** Импульс
- P_θ, P_φ** Составляющие канонического и механического моментов импульса относительно оси
- p** Давление или составляющие тензора давления
- Q** Нормализованная частота бетатронных колебаний (разд. 5.3 гл. 2)
- q** Заряд частицы
- R** Приведенная переменная, соответствующая текущей радиальной координате, $r(\beta\gamma)^{1/2}$ (разд. 2.2 гл. 2)
- R** Характерный радиус (определение см. в тексте)
- R₀** Радиус равновесной орбиты (разд. 5.3 гл. 2)
- r** Радиальная переменная
- r₀** Классический радиус частицы (§ 4 гл. 1)
- S** Энтропия
- S** Расстояние, измеряемое в единицах радиационной длины (гл. 5)
- s** Координата, отсчитываемая вдоль криволинейной оси пучка
- T** Температура (всегда в комбинации kT , где k — постоянная Больцмана)
- T** Значение величины k_r , удовлетворяющее характеристическому уравнению (разд. 3.3 гл. 6)

- t Время (независимая переменная)
- U Плотность энергии в волне
- U Параметр ускорителя, используемый при анализе продольной устойчивости пучка [выражение (6.96)]
- U Ступенчатая функция Хевисайда
- U_{\perp} Параметр ускорителя, используемый при анализе поперечной устойчивости пучка [выражение (6.164)]
- u_0 Фундаментальное решение уравнения (2.30)
- V Напряжение
- V Скорость частицы (§ 5 гл. 5)
- V, V_{\perp} Параметры ускорителя (те же самые обозначения, что и для U, U_{\perp})
- \tilde{V}_k, \tilde{V}_B Кинетическое напряжение [выражение (6.126)]
- V_B Напряжение с учетом релятивистской поправки (разд. 3.9 гл. 6)
- v Скорость частицы (часто используется вместо βc в нерелятивистских расчетах)
- v_0 Фундаментальное решение уравнения (2.30)
- W Вронскиан (разд. 2.2 гл. 2)
- W Мощность
- W, W_1 Переменные, связанные с орбитальным каноническим импульсом в теории ускорителей (разд. 8.2 гл. 2 и 3.5 гл. 6)
- W Функция действия (§ 6 гл. 3)
- w Величина, связанная с переменными фаза - амплитуда (разд. 3.2 гл. 4)
- w Параметр рассеяния [выражение (5.14)]
- w Напряженность вихря (§ 6 гл. 3)
- X Приведенная переменная, $x(\beta\gamma)^{1/2}$
- X Расстояние в поперечном направлении, измеряемое в единицах радиационной длины (гл. 5)
- Z Атомный номер
- Z Комплексная функция (разд. 3.6 гл. 6)
- Z_a, Z_b Импеданс на границе пучка и импеданс стенки камеры (разд. 3.4 гл. 6)
- Z_B Импеданс пучка [выражение (6.139)]
- Z_C Импеданс цепи
- Z_l Характеристический импеданс радиальной передающей линии [выражение (6.70)]

Z_0	Импеданс свободного пространства [$Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$]
Z_{\parallel}	Параллельный импеданс [выражение (6.110)]
Z_{\perp}	Поперечный импеданс [выражение (6.171)]

ГРЕЧЕСКИЕ БУКВЫ

α	Угол, под которым луч пересекает ось (разд. 2.8 гл. 2)
α	Коэффициент расширения орбит (разд. 7.4 гл. 2)
α_f	Постоянная тонкой структуры
$\alpha_p(s)$	Функция расширения орбит (разд. 7.4 гл. 2)
$\alpha_s, \alpha_x, \alpha_y$	Декременты затухания колебаний в электронном синхротроне
β	Отношение скорости частицы к скорости света
β_a	Значение β на границе пучка $r = a$
β_w	Отношение фазовой скорости волны к скорости света.
β_0	Отношение скорости установившейся компоненты пучка к скорости света (разд. 2.5 гл. 6)
β_0	Амплитудная функция структуры (разд. 3.4 гл. 4)
Γ	См. табл. 2.1
γ	Отношение энергии частицы к $m_0c^2, (1 - \beta^2)^{-1/2}$
γ_a	Значение величины γ на границе пучка $r = a$
γ_w	Значение величины γ , соответствующее частице, движущейся с фазовой скоростью волны [выражение (6.2)]
δ	Дельта-функция Дирака
ϵ	Эмиттанс (разд. 3.1 гл. 4)
ϵ_0	Диэлектрическая проницаемость свободного пространства, $10^{-9}/36\pi$
ϵ_n	Нормализованный эмиттанс (разд. 3.2 гл. 4)
$\bar{\epsilon}$	Среднеквадратичный эмиттанс (разд. 3.8 гл. 4)
ϵ_1, ϵ_2	Коэффициенты, характеризующие изображения в стенках камеры (разд. 5.3 гл. 4)
η	Параметр структуры ускорителя [выражение (2.145)]
θ	Угловая координата
θ	Угол рассеяния (гл. 5)
κ	Константа, определяющая фокусирующую силу
κ	Диэлектрическая проницаемость
κ	Тензор диэлектрической проницаемости
Λ	См. табл. 2.1

- Λ $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм для заряженного газа (§ 6 гл. 5)
 λ Длина волны
 λ_D Дебаевский радиус экранирования [выражение (4.88)]
 λ $\lambda/2\pi$
 μ $2 \cos \mu$ — след матрицы преобразования [выражение (2.133)]
 μ Увеличение оптической системы (разд. 2.3 гл. 2)
 μ_0 Магнитная проницаемость свободного пространства, $4\pi \cdot 10^{-7}$
 ν Параметр Будкера (§ 1 гл. 3)
 ν_y Параметр Будкера для цилиндрического токового слоя (разд. 5.4 гл. 4)
 ξ $x + jy$
 ξ Хроматичность [выражение (2.139)]
 ρ Плотность, кг/м^3 (гл. 5); безразмерная радиальная переменная (разд. 4.2 гл. 3); возмущение радиуса пучка (разд. 3.1 гл. 3 и 4.7 гл. 6)
 σ Сечение рассеяния; дисперсия гауссова распределения; проводимость
 τ Время релаксации (§ 6 гл. 5)
 Γ См. табл. 2.1
 Φ_0 Фаза в переменных фаза — амплитуда (разд. 3.2 гл. 4)
 φ Потенциал (разд. 2.2 гл. 2)
 Φ_0 Потенциал, соответствующий массе покоя частицы, $-m_0 c^2/q$ (разд. 2.2 гл. 2)
 ϕ фаза синхротронных колебаний (разд. 8.2 гл. 2)
 χ фазовый параметр в эффекте "голова — хвост" (разд. 5.4 гл. 6)
 Ψ Магнитный поток (разд. 2.1 гл. 2)
 Ψ_0 Поток, пронизывающий площадь внутри орбиты при $\theta = 0$ (разд. 2.1 гл. 2)
 ψ Переменная, связанная с переменными фаза — амплитуда (разд. 3.2 гл. 4)
 Ω Телесный угол (гл. 5)
 Ω_L Ларморовская частота (разд. 2.1 гл. 2)
 Ω_s Частота синхротронных колебаний

ω	Угловая частота (часто называется просто "частотой")
ω_0	Частота вращения частицы по орбите (разд. 5.3 гл. 2)
ω_c	Циклотронная частота (разд. 2.1 гл. 2)
ω_f	Частота вращения системы координат (разд. 2.2 гл. 2)
ω_g	Частота напряжения, приложенного к ускоряющему промежутку (разд. 8.2 гл. 2)
ω_p	Плазменная частота [разд. 2.2 гл. 6; см. также выражение (6.42)]
ω_{p^*}	Редуцированная плазменная частота (разд. 3.3 гл. 6)
ω_s^q	Синхронная частота в ускорителе (разд. 8.2 гл. 2)

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Вводные замечания

Пучки заряженных частиц широко применяются в научной, промышленной и даже бытовой аппаратуре. Физические свойства таких пучков изучались специалистами в самых различных областях, нередко в разное время и по поводу довольно различных случаев. Так, основные требования к сфокусированному пучку в электронном микроскопе отличаются от требований, предъявляемых к протонному пучку в циклотроне или электронному пучку в малощумящей лампе бегущей волны. Тем не менее можно показать, что пучки несмотря на различия функций и внешних проявлений в широком множестве приложений, имеют много общих свойств. Иногда это затеняется различиями в способах описания и обозначениях.

В данной монографии подчеркивается единство пучков, используемых в различных приложениях, и проводится их классификация по физическим свойствам, а не по приложениям. В книге охвачен широкий диапазон тем, и поэтому в большинстве из них подробности опущены. Отправную точку для более детального изучения дают тщательно подобранные ссылки.

При рассмотрении различных вопросов в книге принят синтетический подход; вначале рассматриваются простые примеры, а затем постепенно вводятся усложнения. Там, где это возможно, мы используем простейшие методы, а более сложные методы вводятся только по необходимости. Для решающего задачу специалиста такой подход может оказаться не столь удобным, как применение исходной общей формулировки, из которой примеры следуют как частные случаи. Тем не менее он позволяет более живо представить себе существенные физические идеи, которые образуют систему концептуальных строительных блоков, приносящих пользу при обдумывании ситуаций и для понимания их внутренних ограничений.

§ 2. Понятие пучка

Бесполезно пытаться дать точное определение пучка; существует разумное соглашение о том, что подразумевается под этим понятием, хотя, как мы увидим ниже, нет четкой границы между тем, что следует понимать под пучком высокой интенсивности и что —

под бесстолкновительной плазмой с весьма специальной функцией распределения частиц по скоростям.

Во многих случаях пучок имеет цилиндрическую форму (иногда с изменяющимся по длине поперечным сечением) и состоит из заряженных частиц, движущихся в направлении, примерно параллельном оси цилиндра. Ось пучка может быть искривленной, если он проходит через поперечное электрическое или магнитное поле. В некоторых случаях присутствует фон "нейтрализующих" частиц, заряд которых противоположен по знаку заряду частиц с направленным движением, а скорость дрейфа мала или равна нулю. Другая встречающаяся форма пучка — это плоский или ленточный пучок с очень большими поперечными размерами в одном направлении и относительно малыми в другом. Часто можно считать, что параметры таких пучков не зависят от одной из координат, и таким образом можно упростить их описание. Кроме того, пучок может иметь форму полого цилиндра¹⁾. Если толщина пучка мала по сравнению с радиусом, то такой пучок иногда можно рассматривать как "свернутый" ленточный пучок.

При определении понятия пучка утверждалось, что частица движется "примерно параллельно" оси. Здесь уместно задать вопрос о том, не является ли это слишком сильным ограничением. Очевидно, совсем недостаточно ограничиться утверждением, что частицы одного знака заряда имеют результирующую скорость дрейфа, направленную вдоль цилиндра; ток в тлеющем разряде не есть пучок. Лучше было бы сказать, что в любой момент времени нет зарядов, движущихся в обратном направлении, хотя это все же произвольный критерий. В большинстве практических случаев частицы пучка движутся под малым углом к оси и, кроме того, разброс частиц по энергиям невелик; иногда он составляет несколько процентов, а часто гораздо меньше.

Движение частиц в пучке зависит как от внешних полей, так и от полей, создаваемых другими частицами пучка. Существуют два типа взаимодействия частиц. Первый тип не зависит от корпускулярной структуры пучка; характерным примером такого взаимодействия может служить сила "пространственного заряда", когда поля от большого числа частиц, складываясь, образуют сглаженное электрическое поле. Это поле заметно меняется лишь на расстояниях, больших по сравнению с расстоянием между частицами. Ко второму типу взаимодействия относятся существенно короткодействующие силы, описывающие столкновения отдельных частиц пучка или частиц пучка и неподвижных ионов или атомов. Способы описания этих двух типов взаимодействий довольно различные; мы будем в основном рассматривать первый тип взаимодействия.

¹⁾ Такие пучки будем называть трубчатыми. — *Прим. ред.*

В пучках очень малой плотности оба типа взаимодействия фактически отсутствуют и коллективное поведение проявляться не может. Свойства таких пучков можно найти, анализируя движение отдельных частиц во внешнем поле. Этот вопрос принадлежит оптике пучков заряженных частиц, которую мы рассмотрим в гл. 2.

Обычно оказывается, что кинетическая энергия частиц пучка превышает энергию, запасенную в любом из созданных ими коллективных полей. Поскольку эти энергии пропорциональны соответственно числу частиц и квадрату числа частиц, следовало бы ожидать, что, увеличивая количество частиц в пучке, можно неограниченно увеличивать отношение запасенных электрической и магнитной энергий, к кинетической энергии. Однако, как будет показано ниже, когда эти энергии становятся сравнимыми по величине, возникают достаточно большие поля, в которых частицы приобретают значительные поперечные скорости, так что пучок перестает существовать в рассмотренном выше смысле, и такую систему, по-видимому, правильнее всего рассматривать как плазму.

Понятие "плазма" разные авторы определяют по-разному; в этом можно убедиться, если изучить определения, приведенные в различных работах. Согласно одной из точек зрения, любая система заряженных частиц, в которой коллективное взаимодействие не мало по сравнению с влиянием внешних полей, является плазмой, так что большую часть пучков, рассматриваемых в данной книге, можно считать плазмой, хотя и сравнительно редкой. Противоположная точка зрения состоит в том, что плазма — это газ, образованный заряженными частицами, который, однако, обладает нейтральностью заряда и имеет характерные размеры, значительно превышающие дебаевский радиус экранирования. Обе точки зрения имеют хорошие основания, которые зависят скорее от области интересов исследователя. Связь между свойствами пучка и плазмы в обычном понимании становится особенно очевидной из рассмотрения, проведенного в гл. 6.

§ 3. Некоторые применения пучков заряженных частиц

Общая теория пучков развивается в последующих главах. В этих главах изучаются в широкой области параметров свойства разных типичных конфигураций пучков и присущие им ограничения. Кроме того, приводится ряд примеров конкретных приложений пучков, но не делается каких-либо попыток дать полный обзор работы, скажем, циклотронов, электронных микроскопов или ламп бегущей волны. Такое рассмотрение можно найти в более специализированных книгах и обзорах, на которые даны ссылки в соответствующих местах текста.

Однако, для того чтобы иметь некоторое представление о том огромном разнообразии путей, по которым в настоящее время используются пучки в научных исследованиях, промышленных процессах и в качестве составных частей приборов и других устройств, в данном параграфе дается краткий беглый обзор таких применений. Этот обзор имеет скорее иллюстративный, чем систематический характер. С дополнительными, более специализированными приложениями мы встретимся в следующих параграфах. Рассмотрим вначале применения, связанные с более фундаментальными науками, а затем более обычные и прямые приложения пучков.

Пучки, полученные в ускорителях частиц и накопительных кольцах, значительно расширили наше понимание физического мира, и для более глубокого исследования строения материи всегда требуется иметь частицы с еще более высокой энергией. Строение ядра было изучено и объяснено при менее экстремальных энергиях, и в области малых энергий все еще можно изучать подробные характеристики атомных процессов. Помимо собственно ядерных и атомных исследований, можно также изучать химические и структурные изменения материалов.

Ускоренные частицы не всегда используются непосредственно; вместо этого они могут создавать и другие частицы в какой-либо мишени. Таким образом получают нейтроны (обычно с помощью пучков электронов или дейтронов). Электроны рожают фотоны (рентгеновские лучи), а с помощью протонов достаточно высокой энергии можно получать мезоны. Кстати, некоторые установки создаются специально как "мезонные фабрики". Недавним достижением является использование ультрафиолетового синхротронного излучения, генерируемого пучками ультрарелятивистских электронов при их отклонении сильным магнитным полем.

Электронный микроскоп помог существенно развить наше понимание строения материалов, поверхностей и детальной структуры биологических объектов. Потребности в таком приборе стимулировали развитие электронной оптики, и основные представления о его работе и ограничениях были получены в 30-е годы. Однако с тех пор электронный микроскоп настолько сильно усовершенствовался, что сейчас выпускаются промышленностью и стали доступными весьма сложные и разнообразные варианты просвечивающих и сканирующих микроскопов. Коллективные пучковые эффекты в них малы, и в настоящее время ограничения главным образом обуславливаются такими факторами, как точность изготовления и наличие надежных пушек высокой яркости. Эта область продолжает очень активно развиваться.

Одним из последних достижений является использование тщательно сфокусированных электронных пучков для исследования поверхности материалов, а именно для электронного анализа микрообразцов. Тонкий пучок электронов с энергией в диапазоне 10 - 30 кэВ про-

никает в образец на глубину порядка 1 мкм, а идентификация материала проводится по анализу характерного рентгеновского излучения на поверхности или вблизи нее.

Свойства поверхности можно исследовать также методом рассеяния пучков ионов, имеющих небольшую энергию. В методе обратного рассеяния пучок протонов или ионов гелия фокусируется на исследуемом веществе, а атомное строение вещества определяется затем из анализа распределения по энергиям обратно рассеянных частиц. Энергия бомбардирующих частиц лежит в диапазоне 100 — 1000 кэВ. Этот метод хорошо подходит для анализа тонких образцов и изучения поверхностей.

Примером иного использования пучков для определения состава малых количеств вещества служит широко используемый в настоящее время метод масс-спектрокопии.

В масс-спектрометре исследуемое вещество ионизуется, и из этих ионов формируется пучок, который затем проходит через такие отклоняющие поля, в которых частицы с разным отношением заряда к массе переносятся в различные физические положения. Принцип работы таких приборов прост. Сейчас разработаны специальные конструкции, которые в большом количестве выпускаются промышленностью.

Близкое отношение к масс-спектрометру имеет сепаратор изотопов — более крупномасштабный прибор для разделения макроскопических количеств изотопов. Классическим примером его использования является разделение изотопов урана для создания первых образцов атомного оружия.

В широко используемом активационном анализе с помощью нейтронов иногда также полезно применять пучки заряженных частиц, имеющих энергию в несколько десятков МэВ.

До сих пор мы рассматривали различные прямые применения пучков в приборах. Некоторые из них уже нашли применение в промышленности, например поиск вакуумных течей с помощью масс-спектрометра, настроенного на обнаружение вытекающего гелия. Другие обычные приложения заключаются в использовании электронных пучков для генерации рентгеновских лучей, предназначенных для радиографии, лечения новообразований и для уничтожения микроорганизмов. Более непосредственным образом электронные пучки широко применяются сейчас для сварки и вакуумной плавки металлов в чистых условиях.

С помощью пучков протонов, дейтронов или α -частиц с энергией в диапазоне несколько десятков МэВ можно создавать радиоактивные изотопы. Этот способ может дополнять тот, с помощью которого получают изотопы при нейтронном облучении в реакторах.

Наиболее широкое распространение, разумеется, получило применение электронных пучков в бытовых телевизионных приемниках. Здесь пучок используется как источник света с промежуточным звеном из

люминофоров разных типов. Конструирование электронно-оптических фокусирующих и отклоняющих систем для телевизионных трубок является сейчас высокоспециализированной областью; помимо точности и надежности важным свойством таких систем является легкость изготовления. Конструкции телевизионных трубок близки к тем, что применяются в электронно-лучевых осциллографах. Последние разработаны раньше телевизионных и широко применяются как для обычных измерений, так и в исследовательских целях. Осциллограф сыграл важную роль в развитии современной электронной техники. Явление газовой фокусировки, встречавшееся в ранних конструкциях "мягких" трубок, представляет, вероятно, лишь исторический интерес; однако физика этого процесса довольно интересна, и мы вкратце ее рассмотрим.

В некоторых из упомянутых до сих пор приложениях, например в экспериментах по рассеянию пучка, выведенного из ускорителя, пучок используется непосредственно. В других приложениях его роль состоит в образовании некоторых других физических явлений, таких, как рентгеновское излучение, тепло или свет. Важным классом приборов этого второго типа являются лампы СВЧ, предназначенные для генерации и усиления мощности в микроволновом диапазоне. В них пучок взаимодействует с полями по всей своей длине, а не локализованно, как в мишени. Исследования в данной области активно развивались в течение 1940 - 1960 гг. В настоящее время интерес к этим исследованиям пропал, поскольку они получили довольно исчерпывающее понимание, и в результате было разработано несколько важных типов приборов. (Некоторые из них были заменены твердотельными приборами).

Непрерывное взаимодействие пучков с ВЧ-полем характерно также для многих ускорителей частиц и проявляется с особой очевидностью в линейных ускорителях. В таких ускорителях, питаемых от лампы СВЧ, элементы схемы в лампе и ускорителе можно рассматривать как разновидность "трансформатора", извлекающего энергию из низковольтного сильноточного пучка и передающего ее в ускоритель на образование высоковольтного слаботочного пучка.

В течение последних лет в связи с идеями коллективных ускорителей частиц и исследованиями по термоядерному синтезу были получены пучки частиц очень большой интенсивности. Поскольку ни коллективные ускорители, ни термоядерные реакторы, еще не осуществлены на практике, очевидно, следует ожидать, что эта область будет непрерывно развиваться. Именно в таких устройствах используются пучки, коллективные эффекты в которых играют особенно важную роль. Интенсивные кольцевые электронные пучки изучались в связи с разработкой ускорителей ионов с применением электронных колец. Ускорение ионов в таких ускорителях было получено, но, как и в других методах коллективного ускорения, надо

еще показать потенциальные возможности практического осуществления этих приборов.

В исследованиях по термоядерному синтезу в связи с проектом "Астрон" (в настоящее время эти работы прерваны) и разработкой аналогичных устройств изучены релятивистские электронные пучки, имеющие форму цилиндрического слоя. Разрабатывается технология получения протонных и дейтронных пучков очень высокой мощности, с током в десятки ампер и с энергией в десятки кэВ, предназначенных для инъекции в системы магнитного удержания с целью нагрева плазмы и инициирования реакции синтеза. (Для этого требуется нейтрализовать пучок после его формирования путем перезарядки и затем вновь "ободать" частицы, проникшие в область магнитного поля, поскольку иначе удержать их невозможно). В другом методе, основанном на нагреве и последующем сжатии мишени, содержащей дейтерий и тритий, необходимы электронные или ионные пучки огромной импульсной мощности (многие тераватты) в надежде, что "инерциальное удержание" обеспечит получение чистого выигрыша энергии в реакции синтеза. Ниже мы встретимся с другими предложениями, относящимися к данной области исследований.

Для того чтобы понять и более четко объяснить свойства волн в различных конфигурациях пучка и плазмы, с более общей точки зрения физики плазмы изучались в широком диапазоне параметров взаимодействия пучок - плазма и пучок - пучок. В данной широко разрабатываемой области исследований электронные пучки изучаются в тесной связи с тем, что обычно называется физикой плазмы, поскольку мы одновременно имеем дело и с пучком, и с плазмой. Кроме того, в обоих случаях методы рассмотрения волн и неустойчивостей весьма аналогичны. Соответствующая теория, очевидно, имеет некоторое отношение к астрофизическим явлениям, например солнечным вспышкам, хотя детальное сравнение является довольно трудным.

Запускаемые в космос искусственные спутники Земли приводятся в движение ионными двигателями, которые выпускают струю тяжелых ионов с таким же количеством электронов для сохранения нейтральности заряда спутника. Солнечный ветер, хотя и не является пучком в смысле определения, данного в § 2, но вследствие струйного течения обладает по крайней мере некоторыми его свойствами. Следует упомянуть пояса ван Аллена, хотя они не являются пучками, а скорее особой формой бесстолкновительной плазмы. О ливнях космических лучей вряд ли можно сказать, что они образуют пучок, однако интересно отметить, что на некоторые из основных свойств сильноточных нейтрализованных релятивистских пучков впервые было указано в статье Альвена [1], посвященной исследованию потоков космических лучей. Он ввел важное понятие характерного тока, который впоследствии был назван его именем.

§ 4. Обозначения и способ изложения

Поскольку наша цель состоит в едином рассмотрении широкой области явлений, мы постараемся использовать возможно более общие обозначения, применяя всюду, где это возможно, безразмерные характерные параметры. Во всех случаях, за исключением специально оговоренных, будем считать движение частиц релятивистским. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы обозначим через НР и УР соответственно. Теоретические формулировки по возможности представляют собой прямые и простые выкладки, а в тех случаях, когда это может принести пользу, приводятся необходимые сведения из теоретической механики и теории электромагнетизма.

Для анализа цилиндрических пучков будем применять как полярную цилиндрическую, так и декартову системы координат. В случае искривленной оси пучка координата z заменяется на s . В аксиально-симметричной системе, такой, как бетатрон, в которой ось пучка не является осью симметрии системы, может возникнуть недоразумение. Простейшей координатной системой является цилиндрическая, ось z которой направлена вдоль оси симметрии. Однако для сравнения с системами, не обладающими аксиальной симметрией и в которых свойства орбиты периодически меняются с θ , иногда удобно использовать координаты x, y, s . Чтобы обе эти системы были правыми, нужно так выбирать знаки, чтобы на оси пучка

$$\theta = -s/R. \quad (1.1)$$

В полярной системе координат θ имеет противоположный знак. Эти координатные системы показаны на рис. 1.1. Возникающее из-за

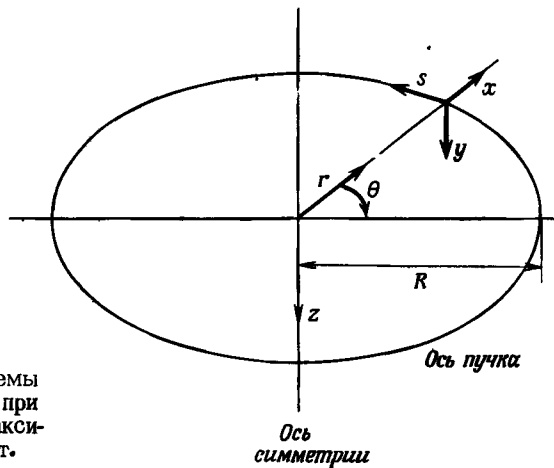


Рис. 1. 1. Различные системы координат, используемые при описании криволинейных аксиально-симметричных орбит.

этой двусмысленности недоразумение все же меньше того, которое имелось бы в полностью согласованной системе; последняя неизбежно оказалась бы противоположной той, которую используют в целом ряде приложений.

Полная энергия, кинетическая энергия, импульс и скорость частиц записываются через массу покоя m_0 и скорость света c соответственно следующим образом: $\gamma m_0 c^2$, $(\gamma - 1) m_0 c^2$, $\beta \gamma m_0 c$ и βc , где $\gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2$. Полезно заметить, что $d\gamma/d\beta = \beta \gamma^3$, а $d(\beta \gamma)/d\beta = \gamma^3$. В тех случаях, когда может возникнуть опасность двусмысленности, при m будем использовать более точный индекс; например, для электронов $m_0 = m_e$.

Всюду применяется система единиц СИ. Электрический заряд обозначается через q ; для положительного заряда это положительное число. (В некоторых книгах принято приписывать электрону положительный заряд e , так что $e = -q$). Другие обозначения электрических величин являются общепринятыми и приведены в списке обозначений.

Классический радиус частицы

$$r_0 = q^2 / 4\pi\epsilon_0 m_0 c^2 \quad (1.2)$$

представляет собой часто встречающийся параметр. Во избежание неоднозначности величина r_0 там, где необходимо ее уточнение, имеет тот же индекс, что и m . Например, для протонов

$$r_p = q^2 / 4\pi\epsilon_0 m_p c^2. \quad (1.3)$$

Индексы используются довольно часто; иногда они обозначают направление, например $\beta_z c$ — скорость в направлении оси z , в других случаях они обозначают положение, например $\beta_{\theta a} c$ — скорость частицы в θ -направлении в точке a на радиусе пучка. Символы \perp и \parallel обозначают направления, перпендикулярное и параллельное оси пучка соответственно.

Точкой и штрихом обозначаются соответственно дифференцирование по времени и относительно расстояния вдоль пучка.

Величина $\sqrt{-1}$ обозначается через j , а не через i ; это говорит о том, что для гармонических величин берется зависимость вида $\exp j(\omega t - kx)$. Некоторые авторы используют i как эквивалент $-j$, другие — как эквивалент j . Все эти обозначения встречаются при изучении волн в пучках, и применяются как система единиц СИ, так и гауссова. Экспоненциальный множитель часто будем опускать; там, где это может привести к недоразумению, его наличие будем обозначать тильдой, например \tilde{E}_0 означает $E_0 \exp j(\omega t - kx)$.

§ 5. Замечания по использованию основных физических теорий

Для изучения пучков требуется знание ряда разделов классической физики. В некоторых случаях предполагается, что читатель знаком с основами рассматриваемого вопроса, в других местах формулируются необходимые идеи и даются ссылки для более полного их изучения. Здесь мы кратко обсудим различные дисциплины, которые требуются для рассмотрения данного вопроса.

Большая часть работы требует относительно простого применения релятивистской динамики частиц в комбинации с классической теорией электромагнетизма в виде уравнений Максвелла. Предполагается, что читатель знаком с уравнениями Максвелла и простой релятивистской кинематикой. С другой стороны, в начале гл. 4, прежде чем ввести понятие фазового пространства и сформулировать теорему Лиувилля, приведено описание гамильтонова формализма из классической механики. Далее в этой же главе изложены некоторые из простейших разделов кинетической теории газов.

В гл. 2 используются хорошо известные понятия из оптики. Ряд результатов теории рассеяния частиц, по существу вытекающих из классической динамики, необходим для рассмотрения вопроса, изложенного в гл. 5. Нужно также иметь некоторые представления о простых формулах из квантовой теории рассеяния и теории излучения заряженных частиц.

В гл. 6 первые параграфы содержат материал, подробно изложенный во многих руководствах по физике плазмы, например вопросы распространения волн в плазме и затухание Ландау. Этот материал приводится частично в общем виде, который удобен для дальнейшего использования в гл. 6.

ОПТИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ФОКУСИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Введение

Физика пучков, в которых коллективные силы малы, в принципе очень проста. Траектория частицы с данным отношением заряда к массе полностью определяется внешними фокусирующими полями и тремя составляющими импульса в выделенной точке пространства. Если последние найдены, то, исходя из заданной силы, действующей на заряд, с помощью уравнений движения можно рассчитать траектории. В общем случае это, разумеется, весьма трудная задача. Поэтому, для того чтобы можно было систематическим образом выполнить практические расчеты, были введены вспомогательные понятия, многие из которых заимствованы из геометрической оптики.

При расчете ряда приборов необходимо получать электрические и магнитные поля заданной формы и вычислять движение заряженных частиц в таких полях. Здесь мы уделим основное внимание второй из этих задач, предполагая, что форма полей задана.

В отсутствие взаимодействия между частицами пучка его можно рассматривать как ансамбль движущихся зарядов, траектории которых образуют "жгут", как показано на рис. 2.1. Диаметр этого жгута мал по сравнению с его длиной, и траектории в любом поперечном сечении обычно образуют весьма малый угол с "осью",

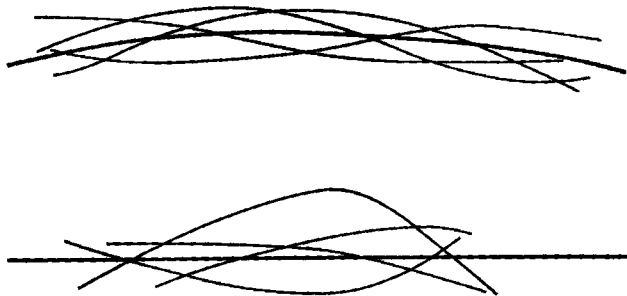


Рис. 2.1. Жгуты траекторий заряженных частиц в пучке для двух типичных случаев. Жирной линией обозначена ось.

определяемой как специально выбранная траектория внутри жгута. Оптика заряженных частиц занимается нахождением таких траекторий и коллективных свойств жгутов, которые мы будем далее называть "пучками". Траектории будем также называть "орбитами" или "лучами". Пучки, в которых скорость частицы является однозначной функцией координат, назовем "ламинарными".

По существу имеются два подхода для решения задач оптики заряженных частиц. В первом и самом прямом из них интегрируется уравнение движения

$$dp/dt = q(E + v \times B) \quad (2.1)$$

в заданных полях. Во втором подходе используются вариационные принципы классической механики. Для многих целей (например, при изучении аберраций линз) последний подход дает более изящный формализм. Однако в нашей книге мы будем пользоваться более прямым методом.

Основное линейное уравнение оптики, описывающее движение частиц в пучке, называется уравнением парааксиального луча. После того как в пучке выделена подходящая ось, силы, действующие на частицы в направлении к оси и в направлении от нее, можно выразить через поля на оси, их производные и кривизну оси. Реальные поля, действующие на частицу, записываются в виде разложений полей вблизи оси с точностью до членов первого порядка, а угол между траекториями частиц и осью считается малым. Во многих случаях это является хорошим приближением. В качестве оси обычно выбирают какую-то возможную орбиту частицы, хотя это не обязательно и не всегда в действительности оказывается удобным. Скажем, в циклических ускорителях иногда удобно выбрать ось в виде окружности, даже если эта окружность не представляет собой какую-либо орбиту. Так бывает, например, в системах с искажениями. Только в прямолинейных системах можно найти орбиту, которая не зависит от импульса частицы; во всех других системах положение орбиты представляет собой функцию импульса, для количественного выражения которой применяются такие понятия, как "дисперсия" и "расширение орбит".

Парааксиальное уравнение, пригодное для описания движения частиц в наиболее общих конфигурациях полей, которые могут встретиться, было бы слишком сложным. Поэтому в данной главе мы рассмотрим некоторые выделенные конфигурации, представляющие интерес для практических устройств. Мы изучим эти конфигурации таким образом, чтобы вывести как их общие свойства, так и существенные различия. Влияние отклонений от условий парааксиальности, характеризуемое введением аберраций, обсуждается не исчерпывающим образом, а скорее иллюстративно. Мы рассмотрим характерные особенности разных типов фокусировки, а также кратко

обсудим некоторые специальные приложения, такие, как фокусировка частиц в полях, меняющихся во времени. Начнем с вывода уравнения парааксиального луча в случае систем с аксиальной (или вращательной) симметрией.

§ 2. Аксиально-симметричные системы

2.1. Введение; теорема Буша. Многие встречающиеся на практике системы обладают азимутальной симметрией относительно прямолинейной оси. Очевидно, что при такой симметрии любые электрические и магнитные поля на оси должны быть ориентированы вдоль нее, а ось должна представлять собой одну из возможных траекторий частицы. Вне оси могут существовать радиальные составляющие поля; азимутальные составляющие невозможны ни для электрического, ни для магнитного поля, если только не существует тока, текущего в области, расположенной ближе к оси, чем рассматриваемая точка.

Движение частиц в таких полях описывается уравнением парааксиального луча. Его можно вывести разными способами и записать в различных формах. В данном разделе мы последуем прямому элементарному подходу и выведем разные формы этого уравнения. Хотя физическое содержание различных записей такого уравнения во многих случаях одно и то же, для разных задач приемлемы различные формулировки. Здесь мы попытаемся свести вместе и сравнить все обычно используемые варианты.

В качестве первого шага к выводу уравнения парааксиального луча докажем важную вспомогательную теорему, которая называется теоремой Буша [48]. Она связывает угловую скорость заряженной частицы, движущейся в аксиально-симметричном магнитном поле, с магнитным потоком, охваченным окружностью с центром на оси и проходящим через точку, в которой расположена частица. Сначала, исходя из физических соображений, дадим прямой вывод этой теоремы.

Рассмотрим заряд q , движущийся в аксиально-симметричном магнитном поле $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$, как показано на рис. 2.2. Затем приравняем θ -составляющую силы Лоренца к производной момента импульса по времени, деленной на r :

$$F_{\theta} = -q(\dot{r} B_z - \dot{z} B_r) = (1/r) (d/dt) (\gamma m_0 r^2 \dot{\theta}). \quad (2.2)$$

Поток, пронизывающий площадь, охваченную окружностью C , центр которой расположен на оси, а сама она проходит через точку, в которой находится заряд, записывается в виде

$$\Psi = \int_0^r 2\pi r B_z dr. \quad (2.3)$$

Когда частица перемещается из точки (r, z) в точку $(r + dr, z + dz)$,

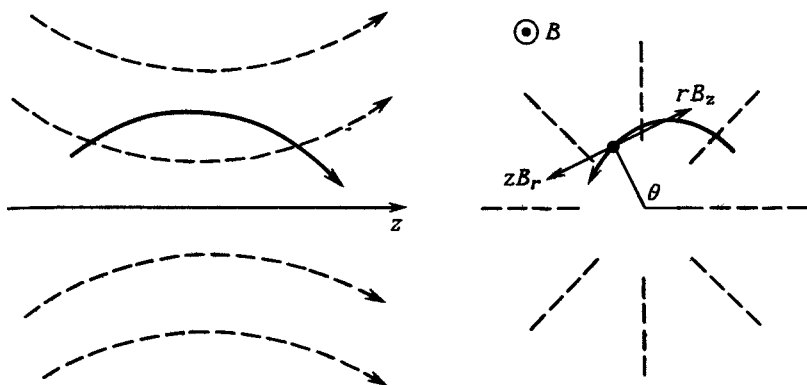


Рис. 2.2. Силы, действующие на частицу в аксиально-симметричном магнитном поле.

Штриховые линии соответствуют силовым линиям магнитного поля, а сплошные — траекториям частицы.

скорость изменения потока, охваченного этой окружностью, можно найти из соотношения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Таким образом,

$$d\psi/dt = 2\pi r (-B_r \dot{z} + B_z \dot{r}). \quad (2.4)$$

Отсюда и из уравнения (2.2) после интегрирования по времени получаем следующее выражение:

$$\dot{\theta} = (-q/2\pi\gamma m_0 r^2) (\Psi - \Psi_0), \quad (2.5)$$

где константа интегрирования Ψ_0 представляет поток, охватываемый окружностью C при $\dot{\theta} = 0$.

Хотя этот вывод непосредственно иллюстрирует физику, лежащую в основе теоремы, формально он просто отражает сохранение канонического момента импульса P_θ относительно оси:

$$P_\theta = qr A_\theta + \gamma m_0 r^2 \dot{\theta}; \quad (2.6)$$

здесь A_θ — азимутальная составляющая вектор-потенциала. Подстановка $\Psi = 2\pi r A_\theta$ и $\Psi_0 = 2\pi P_\theta/q$ дает выражение (2.5).

В качестве примера рассмотрим электрон, который с нулевой угловой скоростью вылетает с поверхности аксиально-симметричного катода. При этом Ψ_0 представляет собой поток магнитного поля на катоде, охваченный окружностью радиусом, равным радиусу катода, с которого была испущена частица. Такие катоды называются "иммерсионными". С другой стороны, если катод "экранирован", например, путем размещения пушки позади железной пластинки, имеющей небольшое отверстие для прохождения пучка, то в однородном

поле $(0, 0, B_z)$ получаем $\Psi_0 = 0$ и $\Psi = \pi r^2 B_z$. Следовательно, $\dot{\theta} = -(qB_z/2\gamma m_0) = (1/2)\omega_c = \Omega_L$, (2.7)

где ω_c и Ω_L называются соответственно циклотронной и ларморовской частотами. На первый взгляд можно было бы ожидать, что $\dot{\theta}$ должна быть равна ω_c ; этот парадокс, однако, исчезает, если рассмотреть траекторию частицы, проходящую через ось системы. Из рис. 2.3 можно видеть, что угловая скорость относительно оси равна точно половине угловой скорости относительно центра окружности, образованной проецированием орбиты на плоскость (r, θ) .

2.2. Уравнение параксиального луча. Здесь мы запишем уравнение параксиального луча в виде, соответствующем системе с аксиальной симметрией. Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает траекторию частиц вблизи оси, или пару уравнений первого порядка. Ограничение приосевыми траекториями означает, что угол, который траектории составляют с осью, мал, а также то, что в разложении полей удерживаются только члены первого порядка. При этом подразумевается, что аксиальные составляющие поля существенно не зависят от r , а радиальные составляющие пропорциональны r , где r — расстояние по радиусу от оси z . Будем считать также, что разность потенциалов между осью и точкой, в которой расположена частица, мала по сравнению с кинетической энергией частицы. (Это следует, но не полностью, из прежних допущений.) Как мы увидим ниже, параксиальное приближение

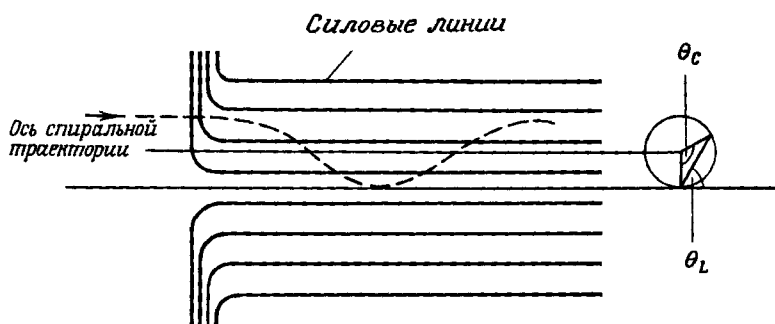


Рис. 2.3. Частица, движущаяся по окружности, проходящей через ось O системы, с угловой скоростью $\dot{\theta}_c$ относительно центра этой окружности и с угловой скоростью, измеренной относительно оси системы $\dot{\theta}_L = \dot{\theta}_c/2$.

Таким образом, частица, вошедшая в однородное магнитное поле и обладающая нулевым каноническим моментом импульса, вращается с частотой ω_c относительно оси спиральной орбиты, а частота ее вращения относительно оси системы равна $\Omega_L = \omega_c/2$.

приводит к гауссовой оптике. Оно не включает геометрические аберрации; последние появятся в следующем порядке приближения, когда выше упомянутые ограничения не выполняются.

Чтобы вывести уравнение парааксиального луча, приравняем силу радиального ускорения силам, действующим на частицу со стороны электрического и магнитного полей. Необходимо помнить, что в присутствии аксиального электрического поля величина γ является функцией времени:

$$(d/dt) (\gamma m_0 \dot{r}) - \gamma m_0 r \dot{\theta}^2 = q (E_r + r \dot{\theta} B_z). \quad (2.8)$$

Из теоремы Буша [уравнение (2.5)] и из условия независимости B_z от r имеем

$$-\dot{\theta} = (q/2\gamma m_0) (B_z - \Psi_0/\pi r^2). \quad (2.9)$$

Исключая $\dot{\theta}$ и подставляя $\dot{\gamma} \approx \beta q E_z/m_0 c$, получаем

$$\ddot{r} + \frac{\beta q E_z}{\gamma m_0 c} \dot{r} + \frac{q^2 B_z^2}{4\gamma^2 m_0^2} r - \frac{q^2 \Psi_0^2}{4\pi^2 \gamma^2 m_0^2} \frac{1}{r^3} - \frac{q E_r}{\gamma m_0} = 0. \quad (2.10)$$

Это и есть парааксиальное уравнение, в котором независимой переменной является время. Хотя записанное в таком виде уравнение иногда оказывается полезным, во многих случаях в качестве независимой переменной более удобно использовать величину z , а аксиальное электрическое поле выражать через $d\gamma/dz$. Для этого надо воспользоваться следующими равенствами:

$$\dot{r} = \beta c r', \quad (2.11)$$

$$\ddot{r} = r'' \dot{z}^2 + r' \ddot{z} \approx r'' \beta^2 c^2 + r' \beta' \beta c^2,$$

где штрихом обозначены производные по z , а вместо \dot{z} подставлено βc . Поскольку в данном приближении $\dot{z} \gg \dot{r}$, такой переход вполне оправдан. Кроме того, если в области, занятой пучком, нет никаких зарядов, то, разлагая поля в ряд Тейлора в окрестности оси и оставляя только первый член, с учетом условия $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ получаем

$$E_r = - (1/2) r E_z' = - (1/2) r \gamma'' m_0 c^2 / q. \quad (2.12)$$

Подстановка выражений (2.11) и (2.12) в уравнение (2.10) дает искомый результат:

$$r'' + \frac{\gamma' r'}{\beta^2 \gamma} + \left\{ \frac{\gamma''}{2\beta^2 \gamma} + \left(\frac{q B_z}{2\beta \gamma m_0 c} \right)^2 \right\} r - \left(\frac{q \Psi_0}{2\pi \beta \gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{r^3} = 0. \quad (2.13)$$

Это уравнение можно записать в более изящном виде, вводя ларморовскую частоту Ω_L и выражая Ψ_0 через канонический мо-

мент импульса P_θ :

$$r'' + \frac{\gamma' r'}{\beta^2 \gamma} + \left(\frac{\gamma''}{2\beta^2 \gamma} + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} \right) r - \left(\frac{P_\theta}{\beta \gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{r^3} = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку параметры β и γ являются функциями потенциала Φ , это уравнение нередко записывают через Φ и $\Phi_0 = -m_0 c^2/q$. Используя подстановки

$$\gamma = 1 + \Phi/\Phi_0, \quad (2.15)$$

$$\beta^2 = \Phi(2\Phi_0 + \Phi)/(\Phi + \Phi_0)^2,$$

уравнение (2.13) можно записать в другом виде:

$$\frac{\Phi(2\Phi_0 + \Phi)}{\Phi_0 + \Phi} r'' + \Phi' r' + \left\{ \frac{\Phi''}{2} - \left(\frac{qB_z}{2m_0 c} \right)^2 \left(\frac{\Phi_0^2}{\Phi + \Phi_0} \right) \right\} r + \left(\frac{q\psi_0}{2\pi m_0 c} \right)^2 \left(\frac{\Phi_0}{\Phi + \Phi_0} \right) \frac{1}{r^3} = 0. \quad (2.16)$$

При нерелятивистских энергиях $\gamma \approx 1$, а $\beta^2 \approx 2\Phi/\Phi_0 \ll 1$. Величину $\beta^2 \gamma^2 \Phi_0/2$, равную $\Phi(\Phi_0 + \Phi/2)/\Phi_0$, часто называют "потенциалом с релятивистской поправкой".

Исследуя это уравнение, можно получить представление о некоторых свойствах орбит. Поток ψ_0 можно положить равным $\pi B_0 r_1^2$, где r_1 — радиус, при котором угловая скорость частицы в поле B_0 равна нулю [выражение (2.9)]. Подставив в уравнение величину ψ_0 и разделив результат на r_1 , получим уравнение относительно переменной r/r_1 . Отсюда следует, что все траектории, для которых ψ_0 пропорционально r^2 (например, испускаемые из плоского катода перпендикулярно его поверхности) являются геометрически подобными. Такие траектории не могут пересекаться, если только они не проходят через ось, что может произойти, только когда $\psi_0 = 0$.

Уравнение параксиального луча позволяет определить радиальное положение частицы. Для данной частицы оно зависит от трех начальных условий, соответствующих значениям r , r' и (через ψ или P_θ) θ' . Чтобы определить угловое положение частицы, необходимо четвертое начальное условие, а именно начальный угол θ_0 . Если он известен, то, интегрируя уравнение (2.9), можно найти $\theta(z)$:

$$\theta - \theta_0 = - \int_0^z \frac{q}{2\beta\gamma m_0 c} \left(B_z - \frac{\psi_0}{\pi r^2} \right) dz. \quad (2.17)$$

Подставляя $\Psi_0 = 2\pi P_\theta/q$ и выражая B_z через Ω_L , можно переписать это уравнение в другом виде:

$$\theta - \theta_0 = \int_0^z \frac{1}{\beta c} \left(\Omega_L + \frac{P_\theta}{\gamma m_0 r^2} \right) dz. \quad (2.18)$$

Как мы увидим ниже, часто удобно проводить рассмотрение в системе координат, вращающейся с ларморовской частотой, которую будем называть далее "ларморовской системой координат". Угол поворота ее относительно неподвижной системы координат равен

$$\theta_L = \int_0^z \Omega_L dz / \beta c. \quad (2.19)$$

В ларморовской системе координат угловая координата частицы дается выражением

$$\theta - \theta_L = \int_0^z \frac{P_\theta dz}{\beta \gamma c m_0 r^2}. \quad (2.20)$$

Если P_θ (или Ψ_0) = 0, то частица в этой системе координат движется в плоскости, проходящей через ось (такая плоскость называется "меридиональной"), и определить ее движение можно либо из уравнения (2.13), либо из уравнения (2.16). В случае же, когда частица движется не в меридиональной плоскости, уравнения (2.13) и (2.16) надо решать с учетом выражения (2.20). В ларморовской системе координат частица обладает *механическим* моментом импульса p_θ .

Во многих случаях переход в ларморовскую систему координат оказывается очень полезным, и в последующих главах мы нередко будем поступать таким образом. Этот переход представляет собой частный случай более общего преобразования во вращающиеся системы координат, рассматриваемого в приложении 1. При преобразовании во вращающуюся систему координат аксиальное магнитное поле изменяется и появляется дополнительное радиальное электрическое поле. Обозначим индексами 1 и 2 величины B_z и E_r , соответственно в неподвижной и вращающейся системах координат, а через ω_f — частоту вращения. Тогда поля B_z и E_r (дополнительное электрическое поле), которые действуют на частицу в системе координат, вращающейся с ларморовской частотой Ω_L , запишутся следующим образом:

$$B_{z2} = (1 - \omega_f / \Omega_L) B_{z1}, \quad (2.21)$$

$$E_{r2} = r \omega_f (1 - \omega_f / 2\Omega_L) B_{z1}.$$

Это преобразование справедливо только для систем, в которых поперечные скорости частиц являются нерелятивистскими. Для паракиальных систем оно справедливо всегда, даже если частицы движутся с релятивистскими скоростями в направлении оси z . В случае когда $\omega_f = \Omega_L$, преобразование становится совсем простым:

$$B_{z2} = 0, \quad E_{r2} = \frac{1}{2} r \Omega_L B_{z1}. \quad (2.22)$$

Электрическое поле создает силу, направленную к оси.

Уравнение паракиального луча, записанное в виде (2.16), было получено еще на заре развития электронных микроскопов. Вводя приближения с самого начала, здесь мы вывели его элементарным и прямым способом. Для того чтобы формально найти уравнения движения в трех направлениях, мы могли бы с равным успехом в качестве отправной точки использовать лагранжиан. Исключая из этих трех уравнений время и вводя соответствующие приближения, можно получить уравнение (2.13), описывающее траекторию частицы. В аксиально-симметричных системах угол θ является циклической координатой. θ -проекция уравнения движения дает теорему Буша, из которой следует уравнение (2.17).

С еще более общих позиций уравнение траектории можно вывести непосредственно из принципа наименьшего действия. Этот принцип представляет собой изящный и мощный метод для общих исследований в электронной оптике. Впервые такой подход был применен Глазером [98] и развит Стэрроком в его книге [286]. Вывод нерелятивистского уравнения паракиального луча дается Зворыкинским и др. [314]. В приложении 2 мы рассмотрим вывод этого уравнения на случаи релятивистского движения частиц.

Во многих случаях удобно использовать прямоугольные координаты и записывать уравнения относительно переменных x и y , которые описывают проекции орбит на две взаимно перпендикулярные плоскости. При этом сами уравнения являются линейными, но связанными друг с другом. Запишем сначала уравнения движения частицы в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{x}) &= q(E_x + B_z \dot{y} - B_y \dot{z}), \\ \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{y}) &= q(E_y - B_z \dot{x} + B_x \dot{z}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставляя в них, как и выше [ср. с выражениями (2.11) и (2.12)], соотношения

$$\ddot{x} = x'' \beta^2 c^2 + x' \beta' \beta c^2, \quad (2.24)$$

$$E_x = -\frac{1}{2} \gamma'' x m_0 c^2 / q, \quad (2.25)$$

$$B_x = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) x$$

и выражая B_z через ларморовскую частоту

$$\Omega_L = -\frac{qB_z}{2\gamma m_0}, \quad \Omega_L' = -\frac{q}{2\gamma m_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\gamma'}{\gamma} \Omega_L, \quad (2.26)$$

получаем следующую пару уравнений:

$$x'' + \frac{\gamma' x'}{\beta^2 \gamma} + \frac{\gamma'' x}{2\beta^2 \gamma} + \frac{2\Omega_L y'}{\beta c} + \frac{\Omega_L' y}{\beta c} + \frac{\gamma' \Omega_L y}{\beta \gamma c} = 0, \quad (2.27)$$

$$y'' + \frac{\gamma' y'}{\beta^2 \gamma} + \frac{\gamma'' y}{2\beta^2 \gamma} - \frac{2\Omega_L x'}{\beta c} - \frac{\Omega_L' x}{\beta c} - \frac{\gamma' \Omega_L x}{\beta \gamma c} = 0.$$

Преобразуя эти уравнения, можно получить линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно переменной x (или y), решение которого будет зависеть от начальных значений величины x и ее первых трех производных. [Почувствительный пример — движение частицы в однородном магнитном поле. В этом случае уравнение сводится к уравнению третьего порядка, имеющего следующие независимые решения:

$$x = x_1 \sin(2\Omega_L z / \beta c),$$

$$x = x_2 \cos(2\Omega_L z / \beta c), \quad (2.28)$$

$$x = x_3.$$

Первые два решения описывают проекции движения частицы по спирали, а третье решение отражает то, что положение оси было выбрано произвольным образом.]

Если ввести комплексную переменную $\xi = x + jy = r e^{j\theta}$, то уравнения (2.27) можно переписать в более компактном виде

$$\xi'' + \left(\frac{\gamma'}{\beta^2 \gamma} - \frac{2j\Omega_L}{\beta c} \right) \xi' + \left\{ \frac{\gamma''}{2\beta^2 \gamma} - \frac{j}{\beta c} (\Omega_L' + \frac{\gamma'}{\gamma} \Omega_L) \right\} \xi = 0. \quad (2.29)$$

Соответствующее уравнение справедливо и для комплексно-сопряженной величины ξ^* . Действительные и мнимые коэффициенты описывают силы, направленные параллельно и перпендикулярно соответствующим скоростям. Это уравнение имеет, разумеется, такой же физический смысл, что и уравнения (2.13) и (2.16). Однако оно линейно, и при его выводе мы не пользовались теоремой Буша,

поэтому Ψ_0 (или P_θ) в него не входит в явном виде. Если только не выполняется условие $\Psi_0 = 0$, то и x , и y могут быть равными нулю, хотя, конечно, не одновременно. Физическая информация, содержащаяся в Ψ_0 , должна быть использована в этом уравнении для установления начальных условий; вместо r , r' , θ , Ψ_0 необходимо задать x , y , x' и y' . В отсутствие магнитного поля B_z движение частиц в x - и y -направлениях происходит независимым образом, и оба уравнения (2.27) как относительно x , так и относительно y становятся идентичными.

Мы уже видели, что при преобразовании во вращающуюся с ларморовской частотой систему координат уравнение параксиального луча можно записать в форме двух идентичных уравнений относительно x и y , каждое из которых имеет вид

$$x'' + g_1(z)x' + g_2(z)x = 0. \quad (2.30)$$

Наоборот, если мы хотим использовать лабораторную систему координат, то уравнение будет иметь аналогичный вид, но с комплексными коэффициентами и комплексной переменной $\xi = x + jy$, где x и y соответствуют теперь координатам точки в неподвижной системе.

Уравнение (2.29) является линейным, и, как мы увидим ниже, другие формы уравнения параксиального луча можно записать в аналогичном виде. Здесь удобно остановиться на ряде математических свойств уравнений этого типа. В последующем рассмотрении переменная x может быть действительной или комплексной. Поскольку дифференциальное уравнение (2.30) линейно и представляет собой уравнение второго порядка, оно имеет два независимых решения $u(z)$ и $v(z)$, а общее решение записывается в виде $Au(z) + Bv(z)$. В некоторых случаях удобно выбрать такие решения u и v , которые соответствуют начальным условиям (1,0) и (0,1) в некоторой точке z . Эти решения называются фундаментальными, и мы будем обозначать их как u_0 и v_0 . [В некоторых теориях, где в качестве независимой переменной рассматривается время, эти решения записываются как $M(t)$ и $S(t)$, что соответствует "увеличению" и "жесткости".] С другой стороны, при изучении линз часто оказываются полезными решения с начальными условиями (1,0) при $z = \pm\infty$.

С помощью матрицы преобразования значения x_2 и x_2' в точке z_2 можно выразить через значения x_1 и x_1' в точке z_1 :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Если матрица M_{21} дает соотношение между координатами (x, x') в точке z_2 и в точке z_1 , то $M_{31} = M_{32}M_{21}$. Матрицу M_{21} иногда записывают как $M(z_2|z_1)$. Очевидно, что матрицу фундаментальных решений $u_0(z)$ и $v_0(z)$ можно записать в виде

$$M_{21} = \begin{pmatrix} u_0(z) & v_0(z) \\ u_0'(z) & v_0'(z) \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Важным количественным параметром, связанным с уравнением (2.30), является вронскиан, построенный из пары независимых решений:

$$W = uv' - vu'. \quad (2.33)$$

Дифференцируя его и подставляя результат в уравнение (2.30), находим $W = -q_1W$, откуда после интегрирования получаем

$$W(z) = W_1 \exp \left(- \int_{z_1}^z g_1(z) dz \right). \quad (2.34)$$

Таким образом для системы, в которой $g_1 = 0$, вронскиан есть постоянная величина. Вычисляя определители в обеих частях соотношения

$$\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_2' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

и используя тот факт, что определитель матрицы, полученной перемножением двух матриц, равен произведению двух определителей, имеем

$$W_2 = |M_{21}| W_1. \quad (2.36)$$

Отсюда следует важный результат: если $q_1 = 0$, то $|M| = 1$. Вводя "приведенную" переменную

$$x = \left(\frac{W_1}{W} \right)^{\frac{1}{2}} x = x \exp \left(\frac{1}{2} \int_{z_1}^z g_1(z) dz \right), \quad (2.37)$$

коэффициент g_1 , стоящий в уравнении (2.30) перед x' , можно положить равным нулю. Тогда уравнение (2.30) принимает вид

$$x'' + (g_2 - \frac{1}{2}g_1^2 - \frac{1}{2}g_1')x = 0. \quad (2.38)$$

Таким образом, при использовании "приведенных" переменных определитель матрицы преобразования M_{21} всегда равен единице.

Чтобы записать уравнение (2.13) при $P_\theta = 0$ в более компактном виде, можно использовать выражение (2.37). Подставляя его в формулу (2.33), получаем

$$W = W_1 \exp\left[-\int \frac{\gamma'}{\beta^2 \gamma} dz\right] = \frac{W_1}{\beta \gamma}. \quad (2.39)$$

Следовательно, $R = r(\beta \gamma)^{1/2}$. Ниже мы покажем, что вронскиан обратно пропорционален импульсу частицы. Значение этого результата станет очевидным впоследствии. Запишем величину R через потенциал ϕ :

$$\begin{aligned} R/r &= \{(\phi/\phi_0)^2 + 2\phi/\phi_0\}^{1/4} \approx \\ &\approx (2\phi/\phi_0)^{1/4} \quad (\text{НР}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

В полярных координатах уравнение параксиального луча можно записать в виде

$$R'' + \left\{ \frac{\gamma'^2 (\gamma^2 + 2)}{4\beta^4 \gamma^4} + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} \right\} R - \left(\frac{P_\theta}{m_0 c} \right)^2 \frac{1}{R^3} = 0 \quad (2.41)$$

или в виде

$$R'' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\phi'^2 (\phi^2 + 2\phi\phi_0 + 3\phi_0^2)}{(\phi^2 + 2\phi\phi_0)^2} + \frac{\phi_0^2}{\phi(2\phi_0 + \phi)} \frac{q^2 B^2}{m_0^2 c^2} \right\} R - \left(\frac{q\Psi_0}{2\pi m_0 c} \right)^2 \frac{1}{R^3} = 0. \quad (2.42)$$

В нерелятивистском приближении это уравнение принимает вид

$$R'' + \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \frac{\phi_0^2 q^2 B^2}{8\phi m_0^2 c^2} \right\} R - \left(\frac{q\Psi_0}{2\pi m_0 c} \right)^2 \frac{1}{R^3} = 0 \quad (\text{НР}). \quad (2.43)$$

Приведенные переменные для комплексного параксиального уравнения (2.30) можно найти аналогичным образом:

$$\Xi = \xi \exp\left(-j \int_0^z \left(\frac{\Omega_L}{\beta c} + \frac{\gamma'}{\beta^2 \gamma} \right) dz\right) = (\beta \gamma)^{1/2} \xi \exp(-j\theta_L); \quad (2.44)$$

здесь θ_L — угол поворота ларморовской системы координат. Таким образом, замена ξ на Ξ отражает не только изменение амплитуды,

которая является функцией величины $\beta\gamma$, но также и вращение, так что координаты частицы теперь определяются в ларморовской системе координат. Уравнение (2.29) в приведенных переменных принимает вид

$$\Xi'' + \left(\frac{\gamma'^2(\gamma^2+2)}{4\beta^4\gamma^4} + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} \right) \Xi = 0, \quad (2.45)$$

аналогичный уравнению (2.41) при $P_\theta = 0$, за тем лишь исключением, что Ξ теперь является комплексной переменной и уравнение справедливо при $P_\theta \neq 0$. Переменную Ξ можно записать в виде $X_L + jY_L$, где X_L и Y_L — проекции на оси декартовой системы координат, ортогональных оси z , причем ось x направлена под углом $\theta_L(z)$, на который повернута ларморовская система координат.

Во многих случаях удобно использовать лабораторную систему координат. Для того чтобы осуществить переход к этой системе, определим новую переменную

$$\Lambda = X + jY = (\beta\gamma)^{1/2} \Xi. \quad (2.46)$$

Таким образом, из выражения (2.44) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Xi \exp(j\theta_L) = \\ &= (X_L + jY_L) \exp(j\theta_L), \end{aligned} \quad (2.47)$$

а из (2.47) —

$$\Lambda' = (\Xi' + j\Omega_L \Xi / \beta c) \exp(j\theta_L). \quad (2.48)$$

Оба этих преобразования можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \exp(j\theta_L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\Omega_L / \beta c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi \\ \Xi' \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Для обратного преобразования имеем

$$\begin{pmatrix} \Xi \\ \Xi' \end{pmatrix} = \exp(-j\theta_L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j\Omega_L / \beta c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix}. \quad (2.49a)$$

Введем теперь два фундаментальных решения уравнения (2.45).

Поскольку коэффициенты этого уравнения действительны, решения также являются действительными функциями, для которых

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= 1, & T(0) &= 0, \\ \Gamma'(0) &= 0, & T'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Используя выражение (2.32) (в котором u_0 и v_0 заменены на Γ и T), получаем

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \exp(j\theta_L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\Omega_L/\beta c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & T \\ \Gamma' & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j\Omega_{L0}/\beta c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda'_0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

здесь индекс 0 соответствует значениям величин при $z=0$. Перемножение матриц дает соотношение

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N \\ M' & N' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda'_0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

где

$$\begin{aligned} M &= (\Gamma - j\Omega_{L0}T/\beta c)\exp(j\theta_L), \\ N &= T\exp(j\theta_L). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Нетрудно проверить, что определитель этой матрицы равен $\exp(2j\theta_L)$.

Простой пример дает однородное магнитное поле, занимающее область длиной $L = \beta c/\Omega_L$. В этом случае

$$\begin{pmatrix} \Gamma & T \\ \Gamma' & T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & (\beta c/\Omega_L)\sin\phi \\ -(\Omega_L/\beta c)\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Для того чтобы определить элементы матрицы, входящей в уравнение (2.52), воспользуемся следующим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\beta c\{\exp(-2j\phi)/\Omega_L^2\} \\ 0 & \exp(-2j\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda(0) \\ \Lambda'(0) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Это преобразование можно записать через матрицу четвертого порядка с действительными элементами (см. разд. 7.6 гл. 2):

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (L \sin 2\phi)/2\phi & 0 & L(1 - \cos 2\phi)/2\phi \\ 0 & \cos 2\phi & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & -L(1 - \cos 2\phi)/2\phi & 1 & (L \sin 2\phi)/2\phi \\ 0 & -\sin 2\phi & 0 & \cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

В случае $\phi = \pi$ матрица преобразования превращается в единичную матрицу, которая соответствует одному полному повороту с циклотронной частотой.

Мы привели различные способы записи уравнения параксиального луча для аксиально-симметричных систем. В табл. 2.1 приведены обозначения соответствующих переменных. В последующих главах мы обобщим уравнение, включив в него члены, учитывающие влияние собственных полей пучка. Полученное уравнение будет использовано в качестве основы для нахождения уравнения, описывающего огибающую пучка с пересекающимися траекториями.

В аксиально-симметричных системах использование комплексных переменных позволяет отказаться от матриц четвертого порядка. Однако, когда одновременно присутствуют и аксиальное магнитное поле и квадрупольные поля, матрицы четвертого порядка играют значительную роль при описании движения. Такой случай рассмотрен в разд. 7.7 гл. 2.

2.3. Формирование изображений, увеличение. Мы привели несколько уравнений параксиального луча. Все они описывают движение одиночной частицы в прямолинейной системе координат, в которой фокусирующая сила зависит от расстояния z вдоль оси.

Оптическое понятие изображения зависит от свойств жгута траекторий. Рассмотрим предмет, находящийся в начальный момент времени в плоскости, перпендикулярной оси, который испускает частицы в некотором диапазоне углов таким образом, что потоки частиц, выходящие из элементарных площадок, отличаются друг от друга. При условии, что рассматриваются только частицы, которые движутся под небольшим углом к оси, т.е. траектории являются параксиальными, в плоскости изображения частицы, вышедшие из точки P_0 предмета, сходятся вновь в точку P_1 . Такое поведение показано на рис. 2.4. Чтобы удостовериться, что все частицы, вышедшие из некоторой точки предмета, сходятся в другую точку и найти увеличение системы, используем приведенную комплексную переменную Ξ . Пусть Ξ_0 есть координата точки P_0 . Тогда общее решение уравнения параксиального луча можно записать в виде

$$\Xi = \alpha_1 \Gamma(z) + \alpha_2 \Gamma^*(z), \quad (2.57)$$

Таблица 2.1
 ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНОГО ПУЧА

Переменные	Система отсчета	Система координат	Тип переменных	Соотношения между переменными	Фундаментальные решения
x, y	Стационарная	Декартова, действительная	Естественные	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	u_0, v_0
r, θ	Стационарная	Полярная, действительная	Естественные		
R, θ	Стационарная	Полярная, действительная	Приведенные	$R = (\beta \gamma)^{1/2} r$	
ξ, ξ^*	Стационарная	Комплексная	Естественные	$\xi = x + jy = r \exp(j\theta)$	
Ξ, Ξ^*	Ларморовская	Комплексная	Приведенные	$\Xi = (\beta \gamma)^{1/2} \xi \exp(-j\theta_L)$	Γ, Γ
X_L, Y_L	Ларморовская	Декартова, действительная	Приведенные	$X_L = (\beta \gamma)^{1/2} (x \cos \theta_L + y \sin \theta_L)$ $Y_L = (\beta \gamma)^{1/2} (y \cos \theta_L - x \sin \theta_L)$	
Λ, Λ^*	Стационарная	Комплексная	Приведенные	$\Lambda = (\beta \gamma)^{1/2} \xi$	

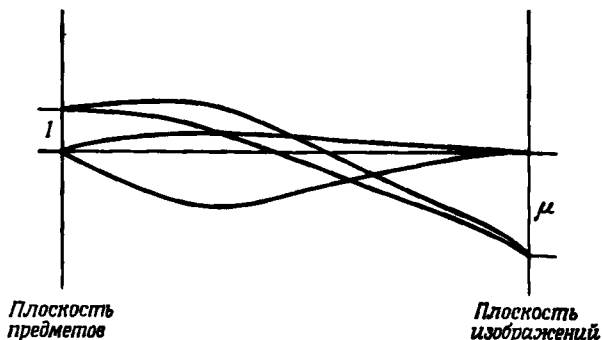


Рис. 2.4. Формирование паракиального изображения в системе с увеличением μ (углы показаны в увеличенном масштабе).

где Γ и T – фундаментальные решения уравнения с начальными условиями $(1,0)$ и $(0,1)$. Коэффициенты α_1 и α_2 являются комплексными, и это же решение справедливо для комплексно-сопряженных переменных и коэффициентов. В любом случае, когда $T = 0$, величина Ξ зависит только от α_1 . Следовательно, при значениях z , соответствующих этому условию, все частицы, вышедшие из некоторой точки предмета, вновь сходятся в одну точку. Это и есть условие изображения.

Таким образом, матрица преобразования от плоскости предмета к плоскости изображения имеет такой же вид, как и соответствующая матрица в (2.31), но при этом $m_{12} = 0$:

$$M_{oi} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ \Gamma' & T' \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

В частности, $\Xi_1 = \Gamma \Xi_0$. Величину Γ , представляющую собой действительное число, можно записать через приведенное увеличение, а само увеличение дается выражением

$$\mu = \frac{r_i}{r_o} = \Gamma \frac{\beta_o \gamma_o}{\beta_i \gamma_i}, \tag{2.59}$$

где индексы i и o , как и всюду в данном параграфе, относятся соответственно к изображению и предмету. Для начинающих на оси траекторий $\Xi = \Xi_i = 0$. Поскольку $|M_{oi}| = 1$, из (2.58) следует, что $\Gamma = (T')^{-1} = \Xi_o' / \Xi_i'$. Таким образом, выражение (2.59) принимает вид

$$\mu = \left\{ \left\{ \frac{\Xi_o' (\beta_o \gamma_o)}{\Xi_i' (\beta_i \gamma_i)} \right\}^{1/2} \right\}. \tag{2.60}$$

Кроме того, изображение поворачивается на угол

$$\theta = \operatorname{arctg} (\operatorname{Im} \Xi_1 / \operatorname{Re} \Xi_1) - \operatorname{arctg} (\operatorname{Im} \Xi_0 / \operatorname{Re} \Xi_0). \quad (2.61)$$

Если предмет и изображение находятся в свободном от полей пространстве, то выражение (2.60) можно переписать в виде

$$\mu = \frac{r'_0 \beta_0 \gamma_0}{r'_1 \beta_1 \gamma_1}. \quad (2.62)$$

Это выражение мы получим ниже (§ 3 гл. 5) как частный случай, вытекающий из более общего результата. С точки зрения динамических переменных оно показывает, что при движении частицы от предмета к изображению ее поперечный импульс меняется обратно пропорционально увеличению μ . Кроме того, нетрудно показать, что в параксиальном приближении продольное увеличение предмета, имеющего конечные размеры в z -направлении, равно μ^2 .

2.4. Некоторые общие свойства линз. Линзы играют важную роль в формировании и управлении пучками. В нескольких следующих разделах мы кратко опишем некоторые из их основных свойств.

Рассмотрим вначале электростатические и магнитные линзы с аксиально-симметричными конфигурациями полей, обращая основное внимание на приосевую область, в которой пучок является параксиальным. Будем считать, что поля создаются электродами, расположенными вне оси, т.е. размеры этих полей в аксиальном направлении не малы по сравнению с диаметром пучка. Однако, несмотря на это, во многих случаях линзы можно рассматривать как "тонкие" в том смысле, что радиальное смещение по траектории частицы, проходящей через линзу, мало.

Для описания свойств толстой линзы необходимо иметь пять параметров. К ним относятся координаты двух главных плоскостей, два фокусных расстояния и ларморовский угол поворота. Если проводить рассмотрение в ларморовской системе отсчета, то этот угол не зависит от остальных параметров, и в дальнейшем мы его не будем учитывать. Другие параметры выразим через два решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ уравнения параксиального луча, для которых в области, где поле отсутствует, выберем начальные и конечные значения координат (r, r') соответственно равными $(1, 0)$. На рис. 2.5 две плоскости, расположенные при z_a и z_b , ограничивают область, в которой присутствует фокусирующее поле. Область $z < z_a$ назовем "пространством предмета", а область $z > z_b$ — "пространством изображения". Как показано на рис. 2.5, проекции прямолинейных продолжений двух траекторий дают точки, определяющие координаты главных плоскостей P_2 и P_1 . Расстояния от этих плоскостей до точек, в которых траектории пересекаются с осью,

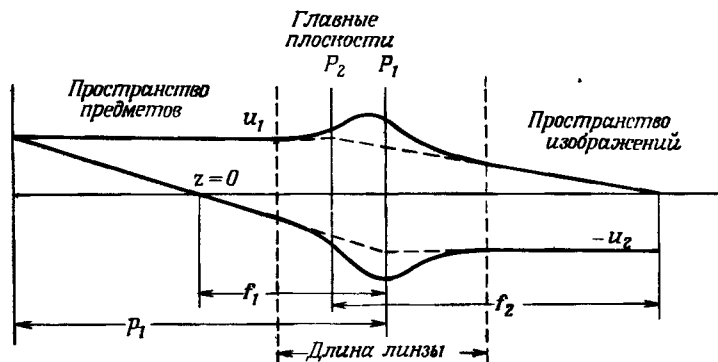


Рис. 2.5. Параметры, необходимые для описания толстой линзы.

P_1 и P_2 – главные плоскости, f_1 и f_2 – фокусные расстояния, u_1 и u_2 – решения уравнения парааксиального луча с начальным и конечным условиями (1, 0). Штриховыми линиями показаны продольные размеры линзы.

равны фокусным расстояниям f_1 и f_2 . Координаты двух главных плоскостей и значения f_1 и f_2 полностью определяют оптические свойства линзы. Из простых геометрических соображений можно получить формулы, связывающие параметры линзы с расстоянием от предмета до изображения и коэффициентом увеличения. Соответствующий вывод можно найти в любом учебнике по оптике. Здесь мы приведем окончательные формулы в обозначениях, указанных на рис. 2.5. Расстояния будем отсчитывать от главных плоскостей, причем расстояния, измеренные вправо от них, являются положительными, а влево – отрицательными. Таким образом, имеем следующие выражения:

$$\frac{f_1}{P_1} + \frac{f_2}{P_2} = 1, \tag{2.63}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = - \frac{f_1}{f_2} \frac{P_2}{P_1},$$

где h_1 и h_2 – высота предмета и изображения, а P_1 и P_2 – их относительные расстояния от соответствующей главной плоскости. Оптическая сила линзы определяется как $(f_1 f_2)^{-1/2}$. Она является отрицательной, если отрицательны f_1 и f_2 . На рис. 2.5 иллюстрируется собирающая (положительная) линза. Ниже мы увидим, что все электростатические и магнитные линзы, для которых в пределах пространства, занятого пучком, не имеется каких-либо сторонних зарядов и токов, принадлежат этому типу. Если изображение образуется в области, где нельзя пренебречь наличием

поля, то допущения, использованные при выводе формул (2.63), нарушаются и их нельзя использовать для определения местоположения и характеристики изображения. Предметы и изображения, соответствующие этой области, называют "иммерсионными", а их связь с объектами и изображениями, расположенными вне этой области, можно найти только из анализа прохождения лучей через линзу. На рис. 2.4 показано изображение, относящееся к этому типу. В связи с возможностью возникновения такого изображения предпочитают использовать вместо терминов "пространство предметов" и "пространство изображений" более общие названия "входное пространство" и "выходное пространство".

В общем случае параметрами f и p можно обычно охарактеризовать линзу только после того, как проведены расчеты траекторий. Если известны две траектории, то достаточно иметь соотношения между условиями на входе и выходе, чтобы определить все четыре параметра. Подробный расчет с помощью интегралов от полей вдоль оси, вообще говоря, слишком сложен, чтобы быть полезным, хотя таким образом можно получить некоторые приближенные результаты.

Во многих случаях систему линз удобно описывать эквивалентной матрицей. Конечно, форма матрицы зависит от того, где расположены границы рассматриваемых линз. Особенно простой вид имеет матрица преобразования для тонкой линзы, в которой главные плоскости совпадают. Нетрудно убедиться, что она записывается следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & \frac{f_1}{f_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^{1/2} & 0 \\ \frac{-1}{(f_1 f_2)^{1/2}} & \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Определитель первой матрицы может быть равен единице, только если $f_1 = f_2$. Это означает, что для линзы, в которой $f_1 \neq f_2$ импульсы частицы по обеим сторонам от линзы являются различными. Определитель второй матрицы равен единице, так что при прохождении через линзу отношение обычных переменных к приведенным изменяется по закону $(f_1/f_2)^{1/2}$. Поскольку выражение (2.39) для этого отношения дает величину $(\beta\gamma)^{-1/2}$, мы можем написать

$$f_1/f_2 = \beta_1\gamma_1/\beta_2\gamma_2. \quad (2.65)$$

Этот результат, тесно связанный с формулой (2.62), соответствует соотношению Гельмгольца - Лагранжа в световой оптике, которое связывает фокусные расстояния с показателями преломления сред,

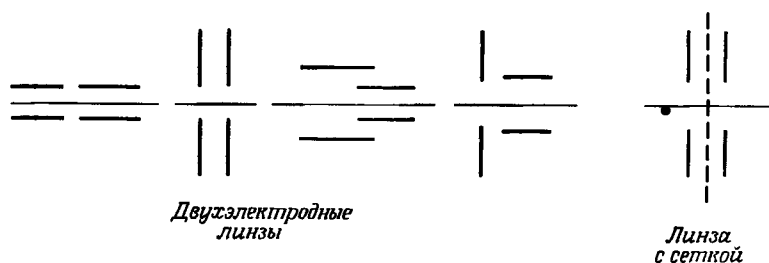


Рис. 2.6. Основные конфигурации двухэлектродных электростатических линз.

Встречающиеся на практике конфигурации отличаются большим разнообразием; диафрагмы и цилиндры, имеющие конечную толщину и закругления. Используются также полусферические и конические элементы. Устанавливая дополнительный плоский или цилиндрический электрод, можно создать трехэлектродные линзы, в которых суммарный перепад потенциала равен нулю. Показана также линза с сеткой.

расположенных по обеим сторонам от линзы. Угловая расходимость лучей в фокусе обратно пропорциональна величине $\beta \gamma$. С этим результатом в более общей формулировке мы встретимся в гл. 4.

В последующих разделах описаны некоторые из основных свойств электростатических и магнитных линз более общих типов.

2.5. Электростатические линзы На рис. 2.6 приведены схематически некоторые широко используемые конфигурации электростатических линз. Начиная с цилиндров, плоскостей с отверстиями и сеток, можно разработать системы, состоящие из различных их комбинаций. Кроме того, число таких комбинаций можно увеличить применяя конические, сферические и другие криволинейные поверхности. Многие из них тщательно изучены, их преимущества и недостатки оценены в различных приложениях, а их свойства отображены в виде соответствующих графиков и таблиц. Соответствующая информация содержится в многочисленной литературе (см. ссылки в разд. Л.2). Здесь же мы остановимся на рассмотрении некоторых простейших общих свойствах этих линз. Начнем с параксиального уравнения, в котором отбросим член, учитывающий влияние магнитного поля. Чтобы не нарушать гармонию принятых в электронной оптике обозначений, выпишем уравнение (2.16), полагая $\mathbf{B} = 0$:

$$\frac{\phi(2\phi_0 + \phi)}{\phi_0 + \phi} r'' + \phi' r' + \frac{\phi''}{2} r = 0; \quad (2.66)$$

здесь ϕ представляет собой функцию от z , которая определяется геометрией линзы. Задача состоит в определении параметров линзы в зависимости от ϕ . Введение приведенных переменных (2.40)

облегчает решение уравнения (2.66). При этом оно принимает вид

$$R'' + T(z)R = 0, \quad (2.67)$$

где $T(z)$ определяется из уравнения (2.42) при $B = \Psi_0 = 0$. Нетрудно найти фокусное расстояние f "слабой" линзы, в которой R достаточно медленно меняется вдоль траектории, первоначально параллельной оси. Если при прохождении через линзу величина R меняется медленно, то фокусное расстояние f должно быть намного больше, чем толщина линзы. В этом случае линзу можно считать тонкой. Обозначим индексами 1 и 2 соответственно величины на входе и выходе линзы. Тогда для траектории с $r'_1 = 0$ имеем

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{r'_2}{r_1} = -\left(\frac{\phi_1^2 + 2\phi_1\phi_0}{\phi_2^2 + 2\phi_2\phi_0}\right)^{1/4} \frac{R'_2}{R_1}. \quad (2.68)$$

Для тонкой линзы при $|\phi_2 - \phi_1| \ll \phi_2$ можно записать выражение

$$\frac{R'_2}{R_1} \approx \int_{z_1}^{z_2} \frac{R'' dz}{R} = -\int T(z) dz. \quad (2.69)$$

Выражение (2.68) в окончательном виде записывается следующим образом:

$$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{\phi_1^2 + 2\phi_1\phi_0}{\phi_2^2 + 2\phi_2\phi_0}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'^2 (\phi^2 + 2\phi\phi_0 + 3\phi_0^2) dz}{4(\phi^2 + 2\phi\phi_0)^2}. \quad (2.70)$$

В нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях последнее выражение принимает вид

$$\frac{1}{f_2} = \frac{3}{16} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{1/4} \int \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 dz \quad (\text{НР}), \quad (2.71)$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{1/2} \int \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 dz \quad (\text{УР}). \quad (2.72)$$

В обоих этих предельных случаях интеграл не зависит от ϕ . Очевидно, величина f_2 должна быть положительной, откуда следует, что все рассматриваемые линзы являются фокусирующими. (Этот вывод не имеет силы для линз, содержащих сетки или фольги, поскольку уравнение Пуассона не справедливо в области, занятой пучком, а также для незамкнутых линз, таких, как диафрагменная электростатическая линза; оба этих типа линз мы рассмотрим ниже.)

Рассматривая идеализированную однородную линзу, для которой величина T постоянна на интервале $0 \leq z \leq L$ и равна нулю вне его, а TL является константой, можно оценить справедливость формулы тонкой линзы, полученной из уравнений (2.67) и (2.68). В этом иллюстративном расчете пренебрежем изменением потенциала в линзе, так что $r/r' \approx R/R'$. Нетрудно показать, что матрица преобразования для такой линзы записывается в виде

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos LT^{1/2} & T^{-1/2} \sin LT^{1/2} \\ -T^{1/2} \sin LT^{1/2} & \cos LT^{1/2} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

(см. разд. 4.2). Фундаментальное решение, описывающее траекторию, первоначально параллельную оси, имеет вид

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos LT^{1/2} \\ -T^{1/2} \sin LT^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

где индексами 1 и 2 обозначены соответственно величины на входе и выходе линзы.

Определим f как расстояние от центральной плоскости линзы до точки, в которой ось пересекается лучом, первоначально параллельным ей:

$$f = \frac{L}{2} - \frac{r_2}{r_2'} = \frac{L}{2} + \frac{\cos LT^{1/2}}{T^{1/2} \sin LT^{1/2}}. \quad (2.75)$$

Обозначим через $(LT)^{-1} = f_t$ фокусное расстояние тонкой линзы при $L \rightarrow 0$ и разложим в ряд второй член. Таким образом,

$$f \approx f_t + \frac{L}{3}. \quad (2.76)$$

Фокусное расстояние толстой линзы больше фокусного расстояния тонкой на одну треть ее длины.

Если потенциал меняется вдоль линзы, то из уравнения (2.41) следует, что $f_1 \neq f_2$. В силу симметрии имеем

$$\frac{f_2}{f_1} = \left[\frac{\phi_2^2 + 2\phi_2\phi_0}{\phi_1^2 + 2\phi_1\phi_0} \right]^{1/2} = \frac{\beta_2 \gamma_2}{\beta_1 \gamma_1}, \quad (2.77)$$

что согласуется с выражением (2.65).

Выражение (2.70) показывает, что при $\phi_1 \approx \phi_2$ оптическая сила линзы пропорциональна квадрату электрического поля, т.е.

фокусировка является эффектом второго порядка. С физической точки зрения этот факт можно объяснить следующим образом. Из конфигурации электрического поля видно, что, когда частица проходит через линзу, направление силы, действующей на заряженную частицу, меняется от фокусирующего к дефокусирующему (и наоборот). Если направление и скорость движения частицы сохраняются без изменения, то результирующий импульс, получаемый частицей, движущейся на расстоянии r_1 от оси, направлен к оси и равен

$$F = \frac{\int qE_r(r_1) dz}{\beta c}. \quad (2.78)$$

Поскольку

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r), \quad (2.79)$$

то в параксиальном приближении, в случае которого $\partial E_r / \partial r$ является постоянной величиной, имеем

$$\int E_r dz = -\frac{r_1}{2} \int \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = 0. \quad (2.80)$$

В действительности частица приобретает результирующее ускорение за счет того, что как r , так и скорость частицы изменяются. Это нарушает баланс двух противодействующих сил. Изменения радиуса и скорости приводят к увеличению силы, направленной к оси, и уменьшению силы, действующей в обратном направлении. Результирующая сила пропорциональна как величине поля, так и величине разбаланса, который в свою очередь пропорционален полю. В конечном счете сила имеет квадратичную зависимость от поля, и в любом случае ее знак соответствует фокусировке.

В проводимых до сих пор обсуждениях мы предполагали, что лучи лежат в меридиональной плоскости. Свойства винтовых лучей удобно описывать, как и выше, с помощью комплексной переменной

$$\xi = x + jy = r \exp(j\theta)$$

и ее комплексно-сопряженной величины.

До сих пор мы рассматривали линзы, находящиеся в свободном от полей пространстве. Однако в некоторых случаях приходится рассматривать фокусирующие свойства пространства, расположенного между двумя областями, одна из которых не является свободным от поля пространством. Например, в электронной пушке пучок эмитируется с катода в область с отличным от нуля полем. Такие конфигурации, которые по принятому выше определению составляют лишь часть линзы, могут быть либо собирающими, либо рассеивающими. Особенно простой и играющей важную роль линзой такого

типа является апертурная (диафрагменная) электростатическая линза, представляющая собой проводящий экран с отверстием, который разделяет однородное поле на две области. Если предположить, что область неоднородного поля имеет ограниченные по z размеры, сравнимые с радиусом диафрагмы, но много меньшие фокусного расстояния, то свойства такой линзы можно рассчитать довольно просто.

Пусть φ'_1 и φ'_2 — градиенты потенциала соответственно с двух сторон диафрагмы, а φ — потенциал, соответствующий энергии частицы. Тогда если фокусное расстояние велико по сравнению с радиусом диафрагмы, то в уравнении параксиального луча (2.66) при расчете траектории, первоначально параллельной оси, можно пренебречь членом с r' . При этом уравнение можно проинтегрировать, что дает

$$-\frac{r}{r_2} = f_2 = \frac{2\varphi(2\varphi_0 + \varphi)}{(\varphi_0 + \varphi)(\varphi'_2 - \varphi'_1)} \quad (2.81)$$

В нерелятивистском случае данное выражение принимает простой вид:

$$f_2 = \frac{4\varphi}{\varphi'_2 - \varphi'_1} \quad (2.82)$$

Знак величины f зависит от того, увеличивается или уменьшается напряженность поля в сечении диафрагмы, так что в отличие от "полной" линзы он может быть отрицательным. Поскольку в области фокуса поле не равно нулю, траектории частиц искривляются и первоначально параллельный пучок не будет проходить через фокус, положение которого определяется формулой (2.81). Как отмечалось выше, ход лучей, показанный на рис. 2.5, не соответствует этому случаю. Оптическая сила линзы зависит от отношения полей, но не от размера диафрагмы.

До сих пор мы рассматривали только такие линзы, в которых внутри области, занятой пучком, не имеется ни сторонних зарядов, ни токов. Примером линзы, в которой это ограничение не выполняется, является линза с сеткой. Как показано на рис. 2.6, такая линза состоит из двух диафрагменных линз, расположенных рядом и разделенных плоскостью, потенциал которой отличен от потенциала диафрагм. Чтобы обеспечить эффективное прохождение заряженных частиц, внутренний электрод обычно изготавливают из тонких проволок или сеток. Хотя такая линза имеет некоторые технические ограничения, например ограниченную способность управления интенсивными пучками, она позволяет значительно сильнее фокусировать пучок, чем соответствующая трехдиафрагменная линза, и уменьшить сферические aberrации. Разрывное изменение наклона силовых линий поля на сетке в комбинации с изменением направления поля

обеспечивают радиальную фокусирующую силу, которая в отличие от других линз имеет одно и то же направление по всей протяженности линзы. В зависимости от потенциала сетки линзу можно сделать либо фокусирующей, либо дефокусирующей. Фокусное расстояние линзы зависит от φ , а не от φ^2 , и фокусировка в отличие от рассмотренных выше линз, для которых в области, занятой пучком, не имеется сторонних зарядов, является эффектом первого порядка. Фокусное расстояние сложным образом связано с геометрическими параметрами. Подробности читатель может найти в соответствующей литературе.

Этот краткий обзор содержит основные физические идеи, касающиеся линейных свойств электростатических линз. Аберрации мы рассмотрим в разд. 2.7 настоящей главы.

2.6. Магнитные линзы. Чтобы определить фокусное расстояние магнитной линзы, рассмотрим сначала уравнение параксиального луча, описывающее движение частиц в системах только с магнитными полями, и траекторию, первоначально параллельную оси, так что $P_\theta = 0$. Траектория описывается уравнением

$$r'' = - \left(\frac{qB_z}{2\beta\gamma m_0 c} \right)^2 r = - \left(\frac{\Omega_L}{\beta c} \right)^2 r, \quad (2.83)$$

причем

$$\theta = \theta_0 + \int \left(\frac{\Omega_L}{\beta c} \right) dz. \quad (2.84)$$

Это уравнение является релятивистским и имеет тот же самый вид, что и уравнение (2.67), записанное в приведенных переменных, которым мы пользовались при расчете фокусного расстояния электростатической линзы.

Используя те же самые допущения, что и в расчетах тонкой электростатической линзы, нетрудно показать, что

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \int \left(\frac{\Omega_L}{\beta c} \right)^2 dz. \quad (2.85)$$

Как и в случае электростатических линз, величина f всегда положительна. В этом случае фокусировка также является эффектом второго порядка, но, по-видимому, совсем по другим физическим причинам. Сила, действующая на частицу в направлении к оси, пропорциональна произведению напряженности поля на круговую скорость. В свою очередь круговая скорость обусловлена присутствием поля и пропорциональна ему. Результирующий эффект пропорционален квадрату поля. Магнитная фокусировка отличается от электростатической в основном другой зависимостью от энергии частиц и тем, что при такой фокусировке траектории частиц, дви-

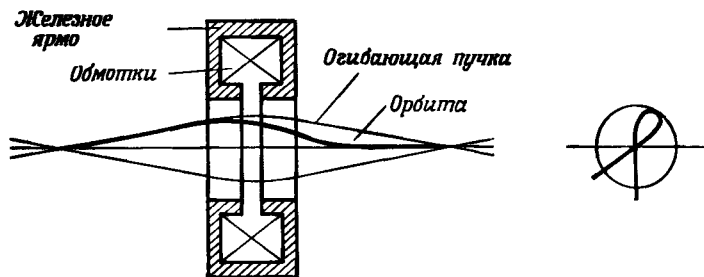


Рис. 2.7. Основные элементы магнитной линзы и типичная орбита.

В практически применяемых конструкциях ядро вблизи отверстия часто делают профилированным.

жущихся параллельно оси, становятся винтообразными. Эти различия исчезают, если рассматривать системы в ларморовской системе отсчета. На рис. 2.7 приведена типичная траектория частиц, движущихся через магнитную линзу.

В предыдущем разделе отмечалось, что можно значительно увеличить оптическую силу электростатических линз, если использовать в них сетки, которые с достаточной эффективностью вносят сторонний заряд в область, занятую пучком. Аналогичного увеличения оптической силы можно добиться путем введения в область, занятую пучком, сторонних токов. Этот результат объясняется тем, что фокусировка в таких линзах является эффектом первого порядка, в то время как в аксиально-симметричных линзах без сторонних токов играют роль эффекты только второго порядка. Магнитные линзы со сторонним током в области пучка были разработаны для специальных применений, требующих фокусировки ультррелятивистских частиц, которые не могут быть остановлены или заметно рассеяны проводником с током. На рис. 2.8 показаны "магнитный горн" и "плазменная линза", разработанные для фокусировки π -мезонов очень высокой энергии, которые затем распадаются на μ -мезоны и нейтрино.

Линейная теория тонких электростатических и магнитных линз, как мы видели, относительно проста, хотя подробный расчет конкретной линзы может оказаться громоздким. Более сложным оказывается анализ различных аберраций и искажений, которые возникают из-за механических неоднородностей, существенных нелинейностей оптики, разброса частиц по энергиям в пучке, наличия тепловых скоростей, дифракции частиц, а также благодаря эффектам пространственного заряда. Ниже с более общих позиций мы обсу-

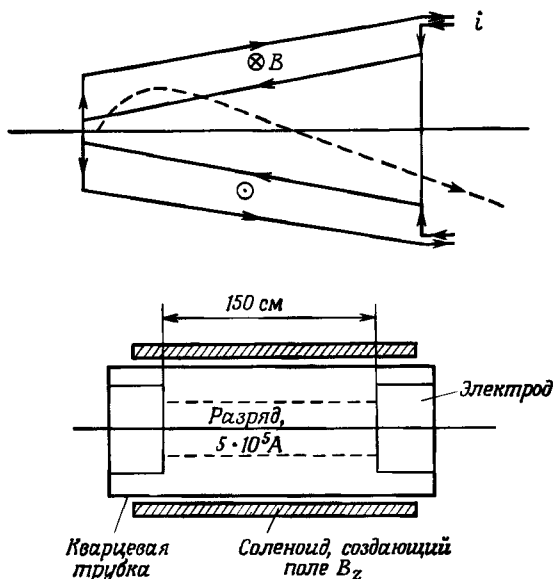


Рис. 2.8. Схематическое представление импульсного магнитного горна [198] и плазменной линзы [90], применяемых для фокусировки π -мезонов в экспериментах по получению мезонных нейтрино.

дим влияние пространственного заряда и распределения по тепловым скоростям. В следующем же разделе проанализируем сферическую aberrацию, а также опишем кратко другие типы aberrаций. В гл. 4 мы обсудим, каким образом aberrации ограничивают минимальный размер сфокусированного пучка.

Аксиально-симметричные линзы нашли широкое применение в электронных пушках, электронно-лучевых трубках, электронных микроскопах, источниках ионов, электростатических электронных и ионных ускорителях, а также в других более специализированных устройствах. После обсуждения aberrаций мы рассмотрим системы с различными типами симметрии.

2.7. Aberrации в аксиально-симметричных линзах. До сих пор мы изучали свойства линз, которые были выведены из уравнения параксиального луча. Предметы, находящиеся в плоскости, перпендикулярной оси пучка, могут идеально отображаться линзой в плоскость, в которой точки изображаются точками и изображение геометрически подобно предмету.

Однако параксиальное уравнение верно лишь приближенно, и члены более высоких порядков в разложении полей приводят к всевозможным искажениям изображения. В общем случае изобра-

жение получается искаженным, оно не лежит в одной плоскости и лучи, вышедшие из любой точки предмета, не сходятся в одну точку в плоскости изображения. К эффектам другого класса относится хроматическая аберрация, которая не связана ни с какими нелинейными членами, входящими в уравнение параксиального луча. Ее лучше всего представить себе как образование непрерывного спектра у изображений, каждое из которых соответствует частицам пучка с определенной энергией. Характеристики такой аберрации трудно вычислить с помощью коэффициентов, входящих в уравнение параксиального луча и зависящих от энергии частиц. Здесь мы рассмотрим в основном аксиально-симметричные линзы. Наиболее важным их дефектом является сферическая аберрация, и поэтому лишь эту аберрацию рассмотрим подробно.

Из-за фундаментальных ограничений на конфигурации полей в области пучка, налагаемых условиями $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, исправление аберраций можно производить лишь в определенных пределах. В частности, невозможно полностью устранить сферическую аберрацию. В нашем случае ситуация является более сложной, чем в обычной оптике, где существует большая свобода в выборе материала и формы линз. Чтобы достигнуть соответствующей степени свободы в электронной оптике, необходимо было бы создавать в области, занятой пучком, специальные распределения зарядов и токов. Действительно, используя фольгу, сетки или облака зарядов в области фокусировки, в принципе можно либо частично, либо полностью избавиться от сферической аберрации в электростатических линзах. К сожалению, возникающие при этом эффекты рассеяния и пересечений делают неприменимыми эти способы для большинства случаев. Краткий обзор некоторых из таких возможностей с ссылками на литературу приведен в работе [5]; более подробное изложение соответствующих вопросов можно найти в работе [265].

Рассмотрим теперь аберрации, обусловленные в уравнении параксиального луча (2.14) или (2.15) членами, пропорциональными r^3 . (Квадратичные члены выпадают в силу симметрии, так как при изменении знака r должно меняться направление действия силы.) Из-за того, что теперь уравнение является нелинейным, на величину искажений влияют не только коэффициенты при кубических членах, но также и допускаемые радиальные смещения орбит.

Для того чтобы охарактеризовать аберрации, рассмотрим частицу, выходящую из точки с координатами (r_0, θ_0) в плоскости предметов и приходящую в точку с координатами $(r_1 + \Delta r, \theta_1 + \Delta \theta)$ в плоскости изображений, причем в случае идеальной линзы $\Delta r = \Delta \theta = 0$. В нашем случае Δr и $\Delta \theta$ зависят от пути, по которому проходит луч из точки (r_0, θ_0) . Этот путь можно найти путем вычисления величин r и θ в любой произвольно выбранной плоскости

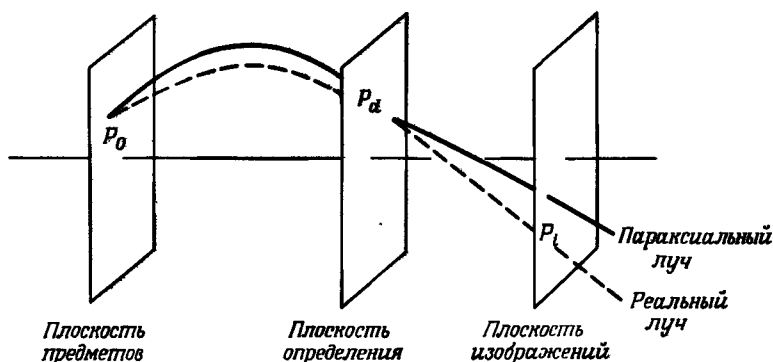


Рис. 2.9. К иллюстрации aberrации параксиального луча.

Координаты точек P_o , P_d и P_i , в которых реальный луч пересекает три плоскости, определяются действительными и мнимыми частями величин ξ_o , ξ_d и $\xi_i + \Delta\xi_i$.

отсчета. (Такую плоскость удобно выбрать расположенной в точке, в которой главный параксиальный луч ^{д)} с нулевым начальным наклоном и при продолжении его в обратном направлении от точки изображения пересекает ось.) Координаты луча в этой плоскости обозначим через r_d и θ_d , как показано на рис. 2.9.

Более удобно перейти к комплексной переменной $\xi = r e^{j\theta}$.

Тогда влияние искажений можно охарактеризовать следующей величиной:

$$\Delta\xi_i = \xi_i - M\xi_o, \quad (2.86)$$

где M — (комплексное) увеличение линзы, не имеющей искажений. Комплексная форма величины M позволяет учесть как размер, так и угол поворота изображения [выражение (2.60)], знак же его остается неопределенным. Величина $\Delta\xi_i$, зависит от ξ_o , ξ_d и их комплексно-сопряженных величин. Если как ξ_i , так и ξ_o изменяются в $e^{j\theta}$ раз, то мы имеем чистый поворот системы координат, и, следовательно, $\Delta\xi_i$ также должна зависеть от θ . Это позволяет найти некоторые ограничения на вид зависимости. При разложении $\Delta\xi_i$ в ряд все четные произведения, такие, как $\xi_o \xi_d$, и некоторые нечетные произведения, например $\xi_o \xi_d^{*2}$, исключаются. Первые отличные от нуля члены имеют третий порядок. Оставим в выражении (2.86) только те члены, которые удовлетворяют требуемым ограничениям:

^{д)} Под главным лучом или главной траекторией здесь понимается траектория с определенными начальными условиями (0, 1) или (1, 0). — *Прим. ред.*

$$\Delta \xi_i = A \xi_d^* \xi_d^2 + B \xi_0^* \xi_d^2 + C \xi_0 \xi_d \xi_d^* + D \xi_0^2 \xi_d^* + E \xi_0 \xi_0^* \xi_d + F \xi_0^2 \xi_0^* \quad (2.87)$$

Это разложение содержит 12 действительных коэффициентов. Два из них связаны с A и равны $(A + A^*)/2$ и $-j(A - A^*)/2$. Используя теорему Малуса и Дупина, из чисто геометрических рассмотрений можно показать, что некоторые из этих коэффициентов не независимы [29]. Эту теорему можно сформулировать в виде условия равенства нулю мнимой части производной $\partial \Delta \xi_i / \partial \xi_d$. Поскольку ξ_0 и ξ_d взаимно независимы, это условие применимо по отдельности к каждому члену разложения (2.87). Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A &= \operatorname{Im} E = 0, \\ \operatorname{Re} B &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} E, \\ \operatorname{Im} B &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} C. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Отсюда следует, что искажения и абберация изображения характеризуются восемью коэффициентами. В чисто электростатических системах, которые не поворачивают изображения, остаются лишь действительные коэффициенты. Их всего пять, как и в геометрической оптике.

Подробности, касающиеся классификации видов аббераций, типов искажений, вносимых ими, и методов расчета, читатель может найти в учебниках по электронной оптике и приведенных в них ссылках. Изучение аббераций и разработка методов их уменьшения потребовали больших усилий. В следующих двух разделах мы ограничимся рассмотрением сферической и хроматической аббераций.

2.8. Сферическая абберация. Из различных типов аббераций, характеризующихся разными коэффициентами разложения (2.87), лишь единственная применима к точкам на оси линзы, в которых $\xi_0 = 0$. Это сферическая абберация с коэффициентом A , который, как следует из условий (2.88), имеет действительное значение. Лучи, выходящие из некоторой точки плоскости предметов под различными углами к оси, пересекаются вновь в различных точках z . Из разложения (2.87) видно, что лучи пересекают фокальную плоскость идеальной линзы на расстоянии от оси, пропорциональном r_d^3 , которое в свою очередь пропорционально кубу угла наклона траектории частицы к оси, под которым она выходит из плоскости предметов (рис. 2.9). Коэффициент сферической абберации C_s находится из уравнения

$$\Delta r_i = C_s \alpha_i^3, \quad (2.89)$$

где α_i — угол, под которым луч, вышедший из данной точки плоскости предметов, пересекает ось. Сферическая aberrация описывает свойство линзы, которое не зависит от размера апертуры в плоскости определения. Однако из разложения (2.87) видно, что если точка изображения попадает в область, свободную от полей, а апертура в плоскости определения, помещенной на расстоянии z_0 от точки изображения, имеет диаметр $r_d = |\xi_d|$, то $C_s = Az_0^3$.

На рис. 2.10 показана структура пучка вблизи кроссовера. Хотя круг рассеяния в фокальной плоскости идеальной линзы имеет радиус $C_s \alpha_i^3$, все лучи проходят внутри круга радиусом $C_s \alpha_i^3/4$ на расстоянии $3C_s \alpha_i^2/4$ перед плоскостью изображения. Коэффициент C_s можно вычислить различными способами. Прямой способ заключается в том, чтобы, оставив кубические члены в уравнении параксиального луча, вычислить разницу в координатах точной и параксиальной траекторий, исходящих из одной точки плоскости предметов. Если точная траектория известна, то C_s можно записать через интегралы, в которые входят параметры параксиальной траектории, а также значения магнитного поля и электростатического потенциала на оси. Другим, более изящным подходом является вариационный метод характеристических функций, предложенный в работе [98] и подробно разработанный в работах [284, 285]. Однако в обоих случаях решение слишком громоздко, и мы не будем приводить его здесь. Подробности можно найти в литературе, на которую даны ссылки в разд. Л.2. Для нескольких общих типов линз были рассчитаны значения безразмерного параметра

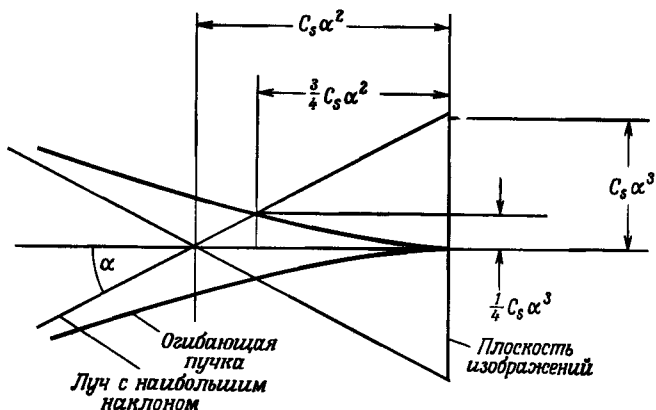


Рис. 2.10. Структура пучка вблизи фокуса линзы со сферической aberrацией. Уравнение огибающей лучей записывается в виде $r = 2(z^3/27 C_s)^{1/2}$, где z измеряется в обратную сторону от плоскости изображений.

C_s/f , и результаты представлены в виде графиков и таблиц.

Знак сферической аберрации всегда таков, что лучи, более удаленные от оси, фокусируются сильнее, чем лучи, идущие ближе к оси. Шерцер [261, 262] показал, что если в области, через которую проходят траектории, нет сторонних зарядов и токов, то формулу для коэффициента аберрации можно представить в виде суммы квадратичных членов, так что знак аберрации изменить невозможно. В частности, нельзя полностью уничтожить аберрацию. Кроме той очевидной роли, которую аберрация играет в электронной микроскопии, сферическая аберрация накладывает существенные ограничения при конструировании пушек, предназначенных для генерации электронных пучков высокого качества, и получении тонких сфокусированных пучков большой яркости для таких целей, как обработка материалов электронным лучом (разд. 4.8 гл. 4). Интересный исторический обзор по этому вопросу содержится в статье [265]. В дополнение к упомянутому выше обсуждению об использовании пространственного заряда в ней рассмотрены возможности применения меняющихся во времени полей, а также отклонений от аксиальной симметрии, которые позволяют преодолеть существенные трудности, обнаруженные Шерцером [261, 262].

2.9. Хроматическая аберрация¹⁾. Рассмотрим теперь в качестве простого примера явление хроматической аберрации и определим соответствующий коэффициент.

Пусть на линзу падает пучок параллельно движущихся частиц, имеющих на выходе из нее импульс p . В случае идеальной линзы пучок сфокусировался бы на оси в некоторой точке z_1 . С другой стороны, частицы, имеющие импульс $p + \Delta p$, сфокусируются в точку $z = z_1 + (\partial f / \partial p) \Delta p$. Если угол сходимости лучей равен α , то очевидно, что радиус круга рассеяния этих частиц дается выражением

$$r_c = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) \Delta p = \alpha f \left(\frac{p}{f} \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\Delta p}{p}. \quad (2.90)$$

Коэффициент хроматической аберрации линзы C_c удобно определить как

$$r_c = 2C_c \alpha \frac{\Delta p}{p} = 2C_c \alpha \frac{\Delta \gamma}{\beta^2 \gamma}, \quad (2.91)$$

где $C_c/f = (p/f) (\partial f / \partial p) / 2$. В нерелятивистском случае это выраже-

¹⁾ Хроматическая аберрация названа по аналогии с явлением в световой оптике, когда фокусное расстояние линзы зависит от длины волны света. — *Прим. ред.*

ние можно переписать в виде

$$r_c = c_c \alpha \frac{\Delta\phi}{\phi}, \quad (2.92)$$

где ϕ — разность потенциалов, которую проходят частицы, чтобы приобрести после ускорения импульс p . Следует заметить, что разность потенциалов $\Delta\phi$ соответствует половинной величине полного разброса частиц по энергиям в пучке.

Для тонких магнитных линз, фокусирующая сила которых имеет первый и второй порядок по полю, значения $(p/f) (\partial f/\partial p)$ равны соответственно -1 и -2 . Это следует из того факта, что в таких линзах величина f пропорциональна соответственно $p/fBdz$ и p^2/fB^2dz . Если изменение потенциальной энергии частицы в линзе мало по сравнению с ее энергией, то аналогичный вывод справедлив и для электростатических линз. В общие выражения, описывающие толстые линзы, входят зависимости поля и потенциала вдоль оси, и эти выражения имеют сложный вид.

Это очень упрощенное обсуждение физической природы рассматриваемого эффекта позволяет нам найти коэффициент C_c , который понадобится нам ниже.

Л.2. Замечания и литература. Большая часть материала, изложенного в этих разделах, была получена еще в 30-е годы в связи с развитием электронных микроскопов. Этот материал хорошо изложен в ряде работ, в которых можно найти и ссылки на оригинальные статьи, и необходимые выводы. Многие результаты получены в нерелятивистском приближении. Релятивистские же эффекты иногда учитывались в качестве "поправки", для чего использовался потенциал с релятивистской поправкой (разд. 2.2 гл. 2).

К ранним классическим работам относятся книги, написанные Зворыжким и др. [314] и Глазером [98]. Более формальное изложение с упором на вариационные методы можно найти в теоретической работе Стэррока [286]. В последнее время вышел ряд книг, ориентированных на прямое применение их в качестве практических руководств [108, 122, 148]. Материалы, касающиеся уравнения параксиального луча и цилиндрических линз, можно также найти в двухтомном сборнике "Фокусировка заряженных частиц", вышедшем под редакцией Септье [266]. Уравнение параксиального луча обсуждается также подробно в книгах Пирса [228] и Кирштейна и др. [147]. Эти книги в основном посвящены лампам СВЧ, а не электронным микроскопам. В монографии Пирса [228] уделяется внимание главным образом физике явления, а не математическому описанию, и она служит хорошим введением в область применения ламп СВЧ. Более разработанным является труд Кирштейна и др. [147], и наше обсуждение с использованием

комплексных переменных основано на этой работе. В обеих книгах рассматривались лишь нерелятивистские пучки, а линзы — только в линейном приближении, поскольку теория аберраций едва ли имеет отношение к лампам СВЧ.

Хотя упомянутые в предыдущем параграфе книги содержат много информации о линзах, более подробная информация рассеяна по статьям, опубликованным в журналах и трудах конференций. Полное описание линз можно найти в работе [208].

В современных учебниках, посвященных другим дисциплинам, таким, как анализ микрообразцов, сварка электронным пучком и ионная имплантация, также содержится материал по рассмотренным здесь темам. В них изложены фундаментальные идеи, отобранные из более ранних работ, которые мы упоминали здесь.

§ 3. Двумерные системы

3.1. Ленточные пучки. В этом разделе мы выведем параксиальное уравнение, описывающее движение частиц в ленточных пучках, и рассчитаем свойства плоских линз. Вывод почти аналогичен тому, который мы использовали в § 2. Ориентируем оси так, чтобы ось z совпадала с направлением движения частиц пучка, и предположим, что все параметры не зависят от координаты y . Будем называть плоскость yz "осевой плоскостью". Хотя на самом деле ленточные пучки всегда ограничены в направлении оси y , полученные результаты можно также применить к полым цилиндрическим системам, в которых толщина пучка много меньше, чем его радиус. В этом случае $x \approx r - a$, $y \approx a\theta$, где $r = a$ определяет осевую плоскость пучка. Магнитное поле выбирается таким образом, что $B_y = \partial B_z / \partial x = 0$.

Вывести параксиальное уравнение нетрудно. Эквивалентом теоремы Буша является утверждение о том, что величина $P_y = \gamma m_0 \dot{y} + qA_y$ является константой. Выражая это условие через B_z , получаем

$$\dot{y} = \frac{q}{\gamma m_0} (\Psi_0 - B_z x), \quad (2.93)$$

где Ψ_0 — поток составляющей поля B_z через площадь, имеющую единичную длину в y -направлении и ограниченную с одной стороны плоскостью $x = 0$, а с другой — параллельной ей плоскостью, проходящей через точку, в которой $\dot{y} = 0$ для рассматриваемой частицы. С помощью метода, примененного при выводе уравнения (2.14), найдем параксиальное уравнение. Используя уравнение (2.93), исключим y -составляющие, входящие в уравнение баланса сил в направлении оси x . В полученное уравнение входит координата x , ее производные по времени и поля. Поскольку величина Ψ_0 является конечной, вместо члена $1/r^3$ возникает член, не зависящий от x .

Это означает, что движение несимметрично относительно плоскости симметрии. Поэтому исключим этот член и рассмотрим случай, когда $\Psi_0 = 0$. В обозначениях, принятых в уравнении (2.13), параксиальное уравнение, описывающее движение частиц в ленточном пучке в случае $\Psi_0 = 0$, имеет вид

$$x'' + \frac{\gamma' x'}{\beta^2 \gamma} + \left[\frac{\gamma''}{\beta^2 \gamma} + \frac{4 \Omega_L^2}{\beta^2 c^2} \right] x = 0. \quad (2.94)$$

Сравнивая его с уравнением (2.16) или (2.10), можно записать это уравнение через потенциал ϕ или ввести в качестве независимой переменной время.

Уравнение (2.94) получено для геометрии, которая имеет ограниченный практический интерес по крайней мере для случая магнитной фокусировки. Более интересным является случай, когда магнитное поле однородно в направлении оси y и имеются составляющие электрического и магнитного полей в направлении как оси z , так и оси x . В такой системе осевая плоскость становится криволинейной и для общего анализа надо использовать криволинейные координаты. Поэтому оставим пока обсуждение этого случая до § 5 настоящей главы, после того как мы введем криволинейную систему координат.

3.2. Плоские линзы. Фокусное расстояние электростатической плоской линзы можно рассчитать таким же способом, как и аксиально-симметричной линзы. Перепишем уравнение (2.94) через ϕ и ϕ_0 при $\Omega_L = 0$:

$$\frac{\phi(2\phi_0 + \phi)}{\phi_0 + \phi} x'' + \phi' x' + \phi'' x = 0. \quad (2.95)$$

Используя способы, изложенные в разд. 2.5, получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{\phi_1^2 + 2\phi_0 \phi_1}{\phi_2^2 + 2\phi_0 \phi_2} \right)^{1/4} \int \left\{ \frac{\phi'^2 (\phi^2 + \phi \phi_0 + 3\phi_0^2)}{4(\phi^2 + 2\phi \phi_0)^2} + \frac{(\phi + \phi_0) \phi''}{2(\phi^2 + 2\phi \phi_0)} \right\} dz. \quad (2.96)$$

Из-за появления члена ϕ'' , который не обращается в нуль при переходе к уравнению в приведенных переменных, это выражение имеет более сложный вид, чем в случае цилиндрической линзы. Однако в нерелятивистском случае интеграл можно упростить:

$$\int \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \frac{\phi''}{4\phi} \right\} dz = \int \frac{7}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 dz \quad (\text{НР}). \quad (2.97)$$

Это тождество можно доказать, если записать правую часть в виде суммы членов в отношении 3:4 и проинтегрировать второй член по частям. При этом одна часть интеграла становится равной второму члену левой части (2.97), а другая обращается в нуль при подстановке верхнего и нижнего пределов интегрирования. Следовательно, для фокусного расстояния мы имеем следующее выражение:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{7}{16} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^{1/4} \int \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 dz \quad (\text{HP}). \quad (2.98)$$

Для шелевой линзы получаем выражение, аналогичное формуле (2.81), а именно

$$f_2 = \frac{\phi(2\phi_0 + \phi)}{(\phi_0 + \phi)(\phi_2' - \phi_1')} \quad (2.99)$$

Обе эти формулы по виду совпадают с формулой для цилиндрической линзы, однако соответствующие им линзы обеспечивают более слабую фокусировку.

Магнитные плоские линзы нашли ограниченное применение, поскольку в них возникает y -составляющая скорости, приводящая к шире¹⁾ и расплыванию пучка в этом направлении. Однако в кольцевых системах это может и не быть недостатком. Из уравнения (2.94) нетрудно показать, что фокусное расстояние плоской линзы в четыре раза больше, чем цилиндрической, при той же напряженности поля на оси.

Л.3. Замечания и литература. Ленточные пучки представляют небольшой интерес с точки зрения их применения в электронных микроскопах, а свойства плоских линз обычно не рассматриваются в учебниках. Ленточные пучки обсуждались Пирсом [228] и Кирштейном [147]. В книге Пирса дан анализ плоских линз в нерелятивистском приближении.

§ 4. Системы с двумя плоскостями симметрии

4.1. Введение. В разд. 2.5 и 2.6 мы уже объясняли, что и в электростатических, и в магнитных линзах с аксиальной симметрией фокусировка является эффектом второго порядка. Эти выводы справедливы, если внутри области, занятой пучком, отсутствуют сторонние заряды и токи. Как мы увидим в гл. 3, введение однородно распределенного вдоль оси линзы заряда или тока обеспечивает фокусировку первого порядка. Плазменная линза, показанная

¹⁾ Под широм здесь подразумевается зависимость от y . — Прим. ред.

на рис. 2.8, относится к этому классу, хотя сами такие линзы представляют ограниченный практический интерес.

Другим путем создания фокусировки первого порядка является отказ от азимутальной симметрии. Этого можно достичь, искривляя ось или, наоборот, оставляя ее прямолинейной, но вводя квадрупольные поля. Здесь мы рассмотрим второй способ.

В свободном пространстве цилиндрические мультипольные поля удовлетворяют уравнениям $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Нетрудно проверить, что "2n-полюсная" зависимость радиального поля вида $f(z) r^{n-1} \times \cos \chi(n-1)\theta$ удовлетворяет этим уравнениям. В частности, чисто квадрупольное электрическое поле записывается следующим образом:

$$E_r = \frac{E_0 r}{a} \cos 2\theta, \quad E_\theta = -\frac{E_0 r}{a} \sin 2\theta \quad (2.100)$$

или

$$E_x = E_0 x/a, \quad E_y = -E_0 y/a, \quad (2.100a)$$

где a — радиус, при котором $E_r^2 + E_\theta^2 = E_0^2$. Квадрупольное магнитное поле описывается выражениями

$$B_r = \frac{B_0 r}{a} \sin 2\theta, \quad B_\theta = \frac{B_0 r}{a} \cos 2\theta \quad (2.101)$$

или

$$B_y = B_0 x/a, \quad B_x = B_0 y/a. \quad (2.101a)$$

Оси выбраны таким образом, что на частицу, движущуюся в направлении оси z в плоскости xz или xy , действует сила, направленная к оси или от нее. На рис. 2.11 изображены конфигурации полей, создаваемые электродами или магнитами. Такие поля являются основой квадрупольных линз, рассматриваемых в следующем разделе.

4.2 Квадрупольные линзы В магнитном квадруполе, показанном на рис. 2.11, на заряд q , движущийся в направлении оси z , действуют силы, одна из которых пропорциональна x и направлена к плоскости yz , а другая пропорциональна y и направлена от плоскости xz . Используя снова параксиальное приближение, согласно которому траектория частицы составляет небольшой угол относительно оси, можно записать уравнения движения заряженной частицы

$$\begin{aligned} \gamma m_0 \ddot{x} + q v_0 B_0 x/a &= 0, \\ \gamma m_0 \ddot{y} - q v_0 B_0 y/a &= 0, \end{aligned} \quad (2.102)$$

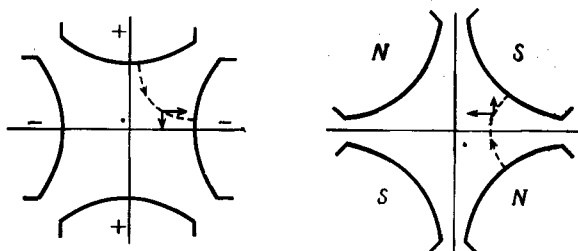


Рис. 2.11. Электростатическая и магнитная квадрупольные линзы.

Показаны типичные силовые линии полей и направление сил, действующих на частицу, движущуюся в направлении от плоскости страницы.

где V_0/a – градиент поля в радиальном направлении. В однородном по оси z поле эти уравнения описывают синусоидальное (фокусирующее) движение частицы в направлении к плоскости xz и экспоненциальное (дефокусирующее) движение в направлении, параллельном плоскости xz . Уравнения (2.102) можно переписать в виде траекторных уравнений:

$$x'' + kx = 0, \quad y'' - ky = 0, \quad (2.103)$$

где $k = qV_0/\beta\gamma m_0 c a$. Электростатические линзы описываются этими же уравнениями, где k определяется выражением $qE_0/\gamma m_0 a \beta^2 c^2$ [выражение (2.100)], но оси надо выбрать так, чтобы азимутальное, а не радиальное, поле было равно нулю.

Квадрупольное поле, имеющее в аксиальном направлении конечную длину L , представляет собой квадрупольную линзу. Нередко длина таких линз больше, чем их радиус, но меньше, чем $k^{-1/2}$. Квадрупольное поле не спадает резко на границе линзы; "краевые эффекты" зависят от конкретной конструкции линзы, а также от распределения поля. Если L много больше радиуса линзы, то влияние этих эффектов незначительно и его можно компенсировать подбором соответствующей эффективной длины. В большинстве приложений можно пренебречь aberrациями, создаваемыми дополнительными составляющими мультипольных полей на краях линзы. На рис. 2.12 показаны фокусирующие и дефокусирующие квадрупольные линзы, а в таблице под рисунком приведены выражения для кардинальных расстояний.

В отличие от аксиально-симметричных линз, в которых при отсутствии сторонних зарядов и токов в объеме пучка фокусировка является эффектом второго порядка, квадруполь обеспечивают фокусировку первого порядка в одной плоскости и дефокусировку в другой. Оптическая сила аксиально-симметричных систем пропорцио-

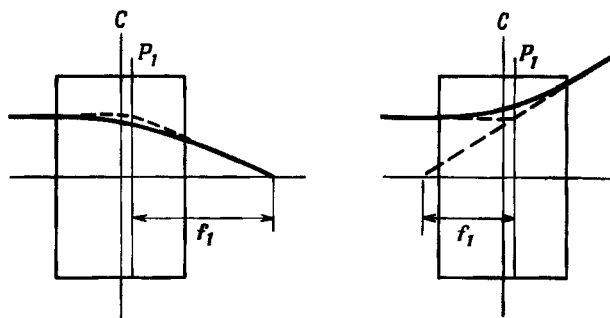


Рис. 2.12. Кардинальные точки фокусирующих и дефокусирующих плоскостей квадрупольных линз.

C — центр линзы, P_1 — главная плоскость и f_1 — фокусное расстояние.

	Расстояние CP_1	Фокусное расстояние f_1
Фокусирующая плоскость	$\frac{L}{2} - \frac{1 - \cos \kappa^{1/2} L}{\kappa^{1/2} \sin \kappa^{1/2} L}$	$\frac{1}{\kappa^{1/2} \sin \kappa^{1/2} L}$
Дефокусирующая плоскость	$\frac{L}{2} - \frac{\text{ch} \kappa^{1/2} L - 1}{\kappa^{1/2} \text{sh} \kappa^{1/2} L}$	$\frac{-1}{\kappa^{1/2} \text{sh} \kappa^{1/2} L}$

нальна E^2 или B^2 [выражения (2.70) и (2.85)], в то время как оптическая сила квадрупольных линз пропорциональна напряженности поля. Нетрудно показать, что фокусное расстояние тонкой электростатической или магнитной линзы дается выражениями

$$\frac{1}{f_e} = \pm \frac{q}{\gamma^m \beta^2 \sigma^2} \int \frac{E^0}{a} dz, \quad (2.104)$$

$$\frac{1}{f_m} = \pm \frac{q}{\gamma^m \beta \sigma} \int \frac{B^0}{a} dz.$$

Фокусирующее действие аксиально-симметричных линз зависит как от продольных, так и от поперечных полей. В квадрупольных же линзах взаимодействие частицы с продольными составляющими краевых полей, неизбежно возникающих на концах линзы, дает только эффекты второго порядка.

Хотя одиночный квадруполь фокусирует частицы в одной плоскости и дефокусирует в другой, две линзы, объединенные в фокусирующе-дефокусирующую пару, обеспечивают суммарный фокуси-

рующий эффект. Такая квадрупольная пара фокусирует пучок сильнее, чем аксиально-симметричная линза таких же размеров и при той же напряженности поля, но в этом случае фокусировка снова представляет собой эффект второго порядка, обусловленный разностью фокусирующего и дефокусирующего действий двух линз. Более сильная фокусировка в первом случае объясняется тем, что в фокусирующей области частица находится в среднем дальше от оси, поэтому результирующая сила, направленная к оси, больше. Детальные расчеты фокусирующих свойств квадрупольных дублетов (и более сложных комбинаций) можно провести с помощью матриц преобразований фокусирующих и дефокусирующих линз, имеющих длину L :

$$M_f = \begin{pmatrix} \cos \kappa^{1/2} L & \kappa^{-1/2} \sin \kappa^{1/2} L \\ -\kappa^{1/2} \sin \kappa^{1/2} L & \cos \kappa^{1/2} L \end{pmatrix}, \quad (2.105a)$$

$$M_d = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \kappa^{1/2} L & \kappa^{-1/2} \operatorname{sh} \kappa^{1/2} L \\ \kappa^{1/2} \operatorname{sh} \kappa^{1/2} L & \operatorname{ch} \kappa^{1/2} L \end{pmatrix}, \quad (2.105b)$$

и матрицы преобразования для дрейфового промежутка между линзами, имеющего длину D :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

В разных случаях используют различные соглашения о знаках. Оба уравнения (2.103) записаны в предположении, что знаки положительны, т.е. в фокусирующей секции $\kappa = \kappa_+$, а в дефокусирующей $-\kappa = -\kappa_d$.

Поучительно рассчитать фокусное расстояние пары тонких линз, находящихся на расстоянии D друг от друга. Предполагая, что углы малы, и в матрицах (2.105) и (2.106) пренебрегая длиной L по сравнению с D , матрицу преобразования для такой системы можно записать в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa L & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \kappa DL & D \\ -\kappa^2 DL^2 & 1 - \kappa DL \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Расстояние z_2 от второй линзы, на которой главный луч $(x, x') = (1, 0)$ пересекает ось, определяется отношением элементов матрицы $-m_{11}/m_{21}$:

$$z_2 = \frac{1 + \kappa DL}{\kappa^2 DL^2} \quad (2.108)$$

Фокусное расстояние комбинации линз, которую в общем случае надо считать толстой, дается из простых геометрических соотношений (рис. 2.5) формулой $z_2/(1 + \kappa DL)$ или $1/\kappa^2 DL^2$. Таким образом, оптическая сила линзы пропорциональна *квадрату* величины κ , что свидетельствует о фокусировке второго порядка. Такие же рассуждения справедливы и в случае движения частицы в плоскости yz с той лишь разницей, что первым в комбинации идет фокусирующий квадруполь, а κL берется с противоположным знаком. Это не влияет на фокусное расстояние, но главная плоскость располагается в другом месте; поэтому линза обязательно становится астигматической.

Нетрудно проверить, что отношение фокусного расстояния квадрупольного дублета к фокусному расстоянию соленоида длиной $2L$, напряженность магнитного поля которого B равна полю квадруполя на радиальном расстоянии a , равно $a^2/2LD$. Разлагая в выражениях (2.105) функции в ряд, можно убедиться, что в случае двух смежных линз это отношение равно $a^2/2L^2$. Можно создать комбинацию линз в виде симметричного триплета, который должен фокусировать частицы из одной точки в другую. Однако это свойство ограничивается для частиц только парой точек, и в общем случае комбинация получается астигматической.

Наиболее важное применение квадрупольные магниты нашли в ускорителях и устройствах управления пучком, в которых требуется создавать направленные пучки высокоэнергетических частиц. Свойства различных комбинаций линз, особенно дублетов и триплетов, исследованы довольно подробно. Линейным системам посвящен большой обзор [240], а аберрации рассмотрены в работах [120, 122]. В системах фокусировки электростатические квадрупольные линзы применяются реже, хотя они и используются для частичной коррекции некоторых типов аберраций в электронно-оптических системах микроскопов.

Мультипольные линзы более высокого порядка, в частности секstupоли и октуполи, используются для введения нелинейных эффектов и управления ими в больших ускорительных структурах. Применение их в этих целях мы обсудим ниже (разд. 7.5). В системах, в которых с магнитным полем взаимодействует не заряд частицы, а ее магнитный момент, секstupоли играют ту же самую роль, что квадрупольные линзы в фокусировке заряженных частиц.

Это свойство используется в источниках поляризованных ионов и в линзах, предназначенных для отклонения холодных нейтронов. На такие частицы квадрупольные поля действуют таким же образом, как дипольное поле на заряженные пучки: они отклоняют частицы в плоскости, параллельной магнитному моменту.

§ 5. Криволинейные системы с одной плоскостью симметрии

5.1. Введение. До сих пор мы рассматривали фокусирующие системы с прямолинейными осями. При использовании в системе криволинейных осей она приобретает новые свойства. Во-первых, имеется только одна плоскость симметрии. Ниже мы обнаружим, что в системах с такой симметрией возможна фокусировка первого порядка в обеих плоскостях. Во-вторых, возникает дисперсия: частицы, обладающие различными энергиями, не могут двигаться вдоль общей оси. Во многих случаях удобно определить ось таким образом, чтобы она соответствовала частице с данной энергией, а соседние траектории частиц, имеющих энергию, близкую к данной, найти из линейного разложения; соответствующий пример мы рассмотрим в разд. 5.4. Очень важный класс систем представляют собой замкнутые орбиты в ускорителях частиц и накопительных кольцах. Периодичность фокусирующей структуры и очень большое число оборотов усиливают отсутствующие или маловажные свойства устройств "однократного прохождения".

Обозначим направление вдоль криволинейной оси через s , направление, лежащее в плоскости оси и перпендикулярное s , — через x , а направление, перпендикулярное им обоим, — через y . Направим ось x в сторону от среднего центра кривизны. Нередко используют и другие обозначения, в частности y обозначают как $-z$. Однако выбранная нами система координат позволяет не путать обозначения с принятыми в случае прямолинейных осей, которые мы использовали в предыдущих разделах.

В следующих разделах мы рассмотрим краевую фокусировку, в случае которой частицы входят в магнит под углом, а также бетатронную фокусировку, обусловливаемую наличием кривизны и градиентов магнитного или электрического полей.

5.2. Краевая фокусировка. Когда пучок проходит область однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно движению частиц, частицы отклоняются. Ось пучка искривляется, а ее форма зависит от импульса частиц. Кроме того, частицы с одинаковыми импульсами, но идущие в стороне от оси, могут фокусироваться (или дефокусироваться) за счет влияния переходной области магнитного поля на его краю. Этот эффект называют "краевой фокусировкой", и его анализом мы займемся здесь, а вопросы "разрешения по импульсам" рассмотрим в разд. 5.4 и 7.2.

Каким образом происходит фокусировка в плоскости, перпендикулярной полю B_y , можно понять из рис. 2.13, где для простоты изображено "ступенчатое" поле, в котором радиус кривизны траектории частицы скачком меняется от бесконечности до R . Разумеется, такая картина представляет собой лишь приближение, но она достаточно хорошо выполняется, если расстояние между полюсами магнита мало по сравнению с радиусом кривизны траектории в магните. Частица, движущаяся на расстоянии x_0 от оси, входит в поле раньше или позже, чем частица, движущаяся вдоль оси. Если угол между осью пучка и нормалью к поверхности магнита равен θ , то частица движущаяся не по оси, отклоняется дополнительно на величину $(x_0/R) \operatorname{tg} \theta$, что приводит к увеличению фокусного расстояния

$$f = R/\operatorname{tg} \theta. \quad (2.109)$$

Если лучи отклоняются в сторону направления нормали (как показано на рисунке), то, очевидно, знак $\operatorname{tg} \theta$ надо выбрать отрицательным. Прежде чем рассматривать фокусировку в вертикальном направлении, следует заметить, что частица, движущаяся по траектории на расстоянии y_0 от плоскости симметрии, приобретает импульс $q\beta c \sin\theta \int B_{\perp} dt$, где B_{\perp} — составляющая краевого поля, перпендикулярная поверхности магнита. При этом она отклоняется на угол

$$y' = q \sin \theta \int B_{\perp} ds / \beta \gamma m_0 c. \quad (2.110)$$

Поскольку $\cos \theta \int B_{\perp} ds = B_y y_0$, а $R = \beta \gamma m_0 c / q B_y$ [выражение (2.112)],

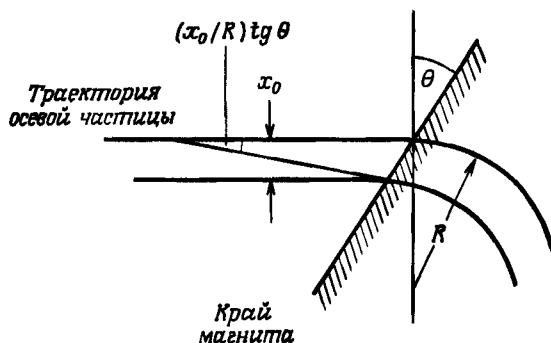


Рис. 2.13. Краевая фокусировка на резкой границе. Два первоначально параллельных луча пересекают границу магнита.

Для углов $\theta \neq 0$ одна из частиц попадает в магнитное поле раньше другой и поэтому отклоняется сильнее. Из рисунка ясно, что фокусное расстояние равно $R/\operatorname{tg} \theta$, причем угол θ отрицательный, если лучи искривляются в сторону направления нормали к поверхности, и положительный в противоположном случае.

фокусное расстояние $-y_0/y'$ дается выражением

$$f_y = -R/\operatorname{tg} \theta. \quad (2.111)$$

Численно оно равно фокусному расстоянию при фокусировке в радиальном направлении, но противоположно ему по знаку.

Кроме анализирующих систем и систем управления пучком, этот тип фокусировки используется в секторно-фокусирующих циклотронах для компенсации дефокусировки частиц в вертикальном направлении, обусловленной нарастанием поля по радиусу. Этот случай мы рассмотрим в разд. 7.6. Вертикальная фокусировка на каждом крае радиальных секторов положительна, но мала по величине. С помощью спиральных секторов фокусирующую силу можно увеличить, но при этом меняется ее направление, хотя результирующий эффект все же больше. Орбиты частиц в таких ускорителях обычно рассчитывают с помощью вычислительных машин путем пошагового интегрирования уравнений движения в присутствии полей, найденных из измерений.

5.3. Бетатронная фокусировка. В бетатронах, классических циклотронах, синхроциклотронах и в некоторых небольших синхротронах старой разработки частицы движутся в азимутальном направлении в аксиально-симметричных полях¹⁾. В больших и более современных ускорителях используются принципы переменного градиента и секторной фокусировки. Поле в них меняется по азимуту и имеет симметрию третьего или более высокого порядка, а форма орбиты отличается от круговой. Колебания в радиальном и аксиальном направлениях относительно "замкнутой орбиты" называются "бетатронными колебаниями", а частота Q этих колебаний, отнесенная к частоте обращения частиц по орбите, представляет собой один из наиболее важных параметров при создании ускорителей. Некоторые общие свойства замкнутых орбит мы обсудим в разд. 7.3. Очевидно, в аксиально-симметричных системах они имеют форму правильной окружности.

Рассмотрим сначала бетатронные колебания в аксиально-симметричном магнитном поле с помощью простого линейного приближения. Определим равновесную орбиту частицы, имеющей импульс $\beta\gamma mc$, как круговую орбиту радиусом R_0 с центром на оси, по которой могла бы двигаться частица. Эта орбита лежит в "медианной плоскости", в которой радиальная составляющая магнитного поля B обращается в нуль. Радиус равновесной орбиты R_0 найдем из уравнения баланса силы Лоренца $q\beta_s c B_y$ и центробежной силы

¹⁾ В советской литературе синхроциклотрон называют также фазотроном, а для протонного синхротрона изредка встречается также название "синхрофазотрон". — *Прим. ред.*

$\gamma m_0 \beta_s^2 c^2 / R_0$. Таким образом,

$$R_0 = \beta_s \gamma m_0 c / q B_{y0}, \quad (2.112)$$

где B_{y0} — поле на радиальном расстоянии R_0 . [Следует заметить, что в системе координат (x, y, s) величина R_0 положительна. В цилиндрических полярных координатах она была бы отрицательна; см. § 4 гл. 1.]

Определив равновесную орбиту, вычислим теперь траекторию частицы, которая незначительно отклонена от равновесной. На частицу, обладающую тем же самым импульсом и находящуюся на радиальном расстоянии $R_0 + x$ (где $x \ll R_0$), действует результирующая радиальная сила:

$$\gamma m_0 \ddot{x} = \frac{\gamma m_0 \beta_s^2 c^2}{R_0 + x} - q \beta_s c \left(B_{y0} + x \frac{\partial B_y}{\partial r} \right). \quad (2.113)$$

Оставляя в разложении только линейные члены и используя выражение (2.112), это уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{x} + (1-n)\omega_0^2 x = 0, \quad (2.114)$$

где "показатель поля" $n = -(R_0/B_{y0})(dB_y/dr)$, а ω_0 — угловая частота вращения частицы. Она равна (численно, но не по знаку) циклотронной частоте частицы в поле B_{y0} . Фокусировку частиц в аксиальном направлении можно найти, рассчитав силу, действующую на нее со стороны радиальной составляющей поля B_x и стремящейся возратить частицу на равновесную орбиту:

$$\gamma m_0 \ddot{y} = q \beta_s c B_x. \quad (2.115)$$

Поскольку $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, то с точностью до членов первого порядка

$$B_x = y \frac{\partial B_y}{\partial r} = - \frac{n B_{y0} y}{R_0}$$

и

$$\ddot{y} + n \omega_0^2 y = 0. \quad (2.116)$$

Переписывая эти результаты через производные относительно переменных вдоль равновесной орбиты, получаем

$$x'' + \frac{(1-n)x}{R_0^2} = 0, \quad (2.117)$$

$$y'' + \frac{n y}{R_0^2} = 0$$

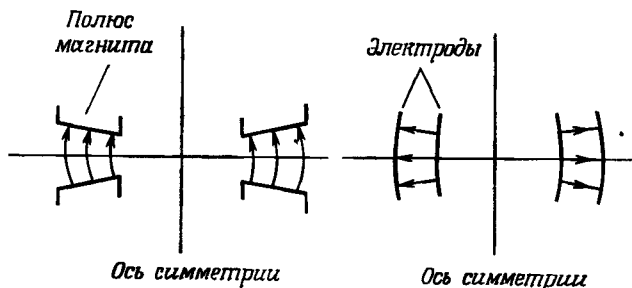


Рис. 2.14. Конфигурации полюсов и электродов, обеспечивающих устойчивые круговые орбиты.

Следовательно, чтобы движение в радиальном и вертикальном направлениях было устойчивым, B_y должно уменьшаться с увеличением радиуса, но не быстрее, чем $1/r$. На рис. 2.14 показаны силовые линии поля и соответствующие формы полюсов магнита, обеспечивающих такое распределение поля.

Частоты бетатронных колебаний Q , связанные с фокусировкой частиц, определены в начале данного раздела и даются выражениями

$$Q_x = (1-n)^{1/2}, \quad Q_y = n^{1/2}. \quad (2.118)$$

Нижние индексы x и y обозначают соответствующие направления колебаний. Иногда для обозначений "радиальных" и "вертикальных" колебаний используются индексы R и V . Обычно выбирают цилиндрическую полярную систему координат с соответствующими индексами r и z . В Европе частоту бетатронных колебаний принято обозначать через Q , а в США эту величину обозначают как ν .

Чтобы движение в обеих плоскостях было устойчивым, должно выполняться условие $0 < n < 1$; следовательно, и Q_x , и Q_y меньше единицы, т.е. за время одного оборота в ускорителе частица совершает не более одного бетатронного колебания. Такую фокусировку иногда называют "слабой". Полагая $n = 1/2$, имеем $Q_x = Q_y = 1/\sqrt{2}$. Это фокусировка первого порядка, которая вследствие кривизны равновесной орбиты возможна одновременно в обеих плоскостях. Случай $n = 0$ соответствует однородному полю. При этом в вертикальном направлении нет ни фокусировки, ни дефокусировки, и частица движется с $y' = \text{const}$. В горизонтальной плоскости все орбиты представляют собой окружности. Если одну из таких орбит рассматривать как равновесную, то очевидно, что для незначительно смещенной орбиты $Q = 1$.

Аксиально-симметричные электрические поля нашли применение не в ускорителях, а в спектрометрах. Используя те же рассужде-

ния, что и в случае магнитных полей, можно определить частоты бетатронных колебаний в такой конфигурации. Однако результаты получаются другие. Это объясняется тем, что в магнитном поле энергия частицы постоянна, в то время как в электрическом поле она зависит от ее радиального положения и сохраняется не энергия, а момент импульса. Отличием является и то, что в вертикальной плоскости вместо условия $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ выполняется условие $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Расчеты приводят к следующим результатам:

$$Q_x^2 = 3 - \beta^2 - n, \quad Q_y^2 = n - 1. \quad (2.119)$$

В данном случае при $n = 1$ фокусировка в вертикальном направлении отсутствует; это соответствует полю, спадающему как $1/r$ по радиусу и однородному в аксиальном направлении. Частота радиальных бетатронных колебаний Q зависит от энергии частиц и меняется от $\sqrt{2}$ до 1 в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах.

Эти результаты справедливы также и для гравитационного поля; случай $n = 2$ соответствует закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, а $Q_x = (1 - \beta^2)^{1/2} = \gamma^{-1}$ и $Q_y = 1$. При малых значениях β имеем $Q_x = 1$. Это означает (для орбит планет), что орбита повторяется из года в год и имеет фиксированный перигелий. При $\gamma > 1$ появляется релятивистская частота прецессии $(\gamma - 1)\omega_0$, которая при малых значениях β равна $\beta^2\omega_0/2$. Она отличается от точного значения $3\beta^2\omega_0$, следующего из общей теории относительности. Если имеется и электрическое, и магнитное поля, то расчеты становятся несколько более громоздкими, но все еще достаточно прямыми. Основное уравнение баланса сил в радиальном направлении записывается в виде

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 \dot{x}) = \frac{\gamma m_0 \beta^2 c^2}{r} + qE_x - q\beta c B_y = 0, \quad (2.120)$$

где $r = R_0 + x$. Разложим в ряд входящие в него величины

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma,$$

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

$$E_x = E_{x0} (1 - n_E x/R_0),$$

$$B_y = B_{y0} (1 - n_M x/R_0).$$

Используя энергетическое соотношение

$$qE_{x0}x = \Delta\gamma m_0 c^2,$$

которое справедливо при малых значениях x , величины γ и x можно выразить через β . Подставляя эти выражения, получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно x , из которого можно найти частоту колебаний. Обобщая методы, с помощью которых было выведено уравнение (2.116), можно найти соответствующую частоту колебаний в направлении оси y . В результате получаем более общие соотношения:

$$Q_x^2 = 1 + \frac{\beta_0(1-n_E) - \beta n_M}{\beta_0 + \beta} + \frac{\beta_0^2}{\gamma^2(\beta_0 + \beta)^2},$$

$$Q_y^2 = \frac{n_M\beta + (n_E - 1)\beta_0}{\beta_0 + \beta},$$
(2.121)

которые соответствуют выражениям (2.118) и (2.119). Здесь $\beta_0 = -E_{x0}/B_{y0}c$. Эти формулы получены в работе Райзера [242], но с другим соглашением о знаках.

В проведенном здесь анализе мы учитывали только линейные члены. Более полное рассмотрение показывает, что имеется большее количество членов второго порядка, обусловленных в основном кривизной орбиты и конечной амплитудой колебаний. Хотя большая часть из них играет незначительную роль, члены, описывающие связь аксиального и вертикального движений, могут приводить к резонансной перекачке энергии между этими двумя модами колебаний, если частоты бетатронных колебаний Q связаны целочисленным соотношением $N_1 Q_x = N_2 Q_y$. В разд. 7.8 мы продолжим рассмотрение этого вопроса.

Хотя до сих пор мы неявно подразумевали, что речь идет об аксиально-симметричных системах и круговых равновесных орбитах, очевидно, что секторные магниты или электростатические дефлекторные системы с конечными размерами в азимутальном направлении можно использовать как толстые линзы. Так, магнитный спектрометр с $n = 1/2$ имеет два фокуса, смещенных относительно друг друга по азимуту на угол $\sqrt{2}\pi$. Аналогично электростатическая система, образованная концентричными полусферическими электродами, обеспечивает в нерелятивистском пределе фокусировку частиц на угол π . Сфокусировать частицы только в одной плоскости можно с помощью однородного магнитного поля, занимающего в пространстве угол π , или электрическим полем, меняющимся как r^{-1} , которое создается в промежутке между концентрическими цилиндрическими электродами и имеет угловые размеры $\pi/(2 - \beta^2)^{1/2}$.

Если из источника выходят частицы с различными энергиями или импульсами, то радиальное положение фокуса меняется пропорционально членам первого порядка. Это дисперсионное свойство лежит в основе работы спектрометров, и в следующем разделе мы рассмотрим его с помощью иллюстративных примеров.

5.4. Системы с дисперсией. В настоящей главе основное внимание мы до сих пор уделяли рассмотрению фокусирующих свойств линз и магнитных систем. Эти свойства зависят от энергии частиц. В некоторых приложениях такая зависимость нежелательна; однако в других случаях дисперсия используется для того, чтобы разделять пучки частиц, обладающих широким спектром энергии или (как в масс-спектрометре) широким диапазоном масс.

Разработка спектрометров представляет собой высокоспециализированную область, хотя основные принципы их устройства очевидны. Создано множество типов спектрометров, которые имеют различные конструкции, зависящие от энергии частиц, диапазона изменения энергии и требуемого разрешения. В большинстве из них используется разделение орбит частиц по углам в поперечных электрическом и магнитном полях. В области высоких энергий обычно используют магнитные поля, в то время как для анализа пучков нерелятивистских электронов в основном удобнее применять электрические поля. Для разделения пучков, обладающих спектром энергий, можно также использовать скрещенные поля. Электрическое поле одинаковым образом влияет на все частицы, в то время как магнитное поле действует сильнее на более быстрые. Теперь ясно, как сделать, чтобы необходимые нам частицы двигались по прямой линии, а нежелательные отклонялись в сторону. Такое устройство называется фильтром Вина. Этот же принцип используется в физике высоких энергий для разделения смешанных пучков частиц, предварительно проанализированных по импульсам. В классических бета-спектрометрах для разделения по энергиям частиц, выходящих из точечного источника, используется хроматическая абберрация линз.

Важной составной частью многих конструкций спектрометров является магнитная призма. В качестве иллюстративного примера рассчитаем линейные характеристики простой призмы, хотя общий метод позволяет рассмотреть и более сложные системы. Описание эффектов второго порядка (геометрических аббераций) следует искать в специальной литературе.

Рассмотрим вначале общее соотношение между траекториями на входе и выходе призмы с учетом возможного отклонения $\Delta p/p$ импульса относительно некоторого выделенного значения $p = \beta \gamma m_0 c$. Предположим, что плоскость симметрии магнита имеет координату $y = 0$, а координаты в направлениях вдоль и поперек центральной орбиты обозначим через s и x . Предположим также, что централь-

ная орбита, или ось пучка, лежит в плоскости симметрии магнита. Значения величин на входе и выходе магнита будем обозначать нижними индексами 1 и 2. В общем случае величины x_2, x'_2, y_2 и y'_2 зависят от x_1, x'_1, y_1, y'_1 и $\Delta p/p$. Если учесть только линейные члены (параксиальное приближение), то в силу симметрии относительно плоскости орбиты, движения в x - и y -направлениях не связаны друг с другом, так что величины x_2 и x'_2 являются функциями только x_1, x'_1 и $\Delta p/p$, а y_2 и y'_2 — аналогично только функциями y_1, y'_1 и $\Delta p/p$. Для преобразования удобно использовать матрицы 3×3 . Поскольку внутри магнита величина $\Delta p/p$ не меняется, эта матрица имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

Если конфигурация поля известна, то можно вычислить элементы этой матрицы. Четыре элемента в левом верхнем углу соответствуют тем, с которыми мы уже встречались в разд. 2.2. Элементы m_{13} и m_{23} соответствуют значениям x_2 и x'_2 частицы, которая начинает свое движение на центральной орбите, но получает единичное относительное отклонение импульса $\Delta p/p$.

В качестве примера рассмотрим секторный магнит с бетатронным полем. Пусть центральным лучом будет равновесная орбита частицы, радиус которой R_0 соответствует импульсу данной частицы. Элементы m_{11}, m_{12}, m_{21} и m_{22} аналогичны соответствующим элементам матрицы M_f , определяемой выражением (2.105), где $\kappa = (1-n)/R_0^2$. О частице, выходящей из точки $s=0$ с импульсом $p_0 + \Delta p$, можно сказать, что она имеет минимальную амплитуду бетатронных колебаний $\alpha R_0 \Delta p/p_0$ относительно орбиты радиусом $R_0(1 + \alpha \Delta p/p_0)$, где $\alpha = (\Delta R/R_0)/(\Delta p/p_0)$ (определение величины α , которая по существу является коэффициентом расширения орбит, мы дадим в разд. 7.4). В бетатронном поле $\alpha = (1-n)^{-1}$. В этом можно убедиться, подставляя $n = -(r/B)(dB/dr)$ и $\Delta p/p_0 = \Delta B/B_0$, причем $p_0 \sim Br$. Из определения величины α следует, что $\Delta R = R_0 \alpha (\Delta p/p_0) = R_0 (\Delta p/p_0)/(1-n)$. Таким образом, уравнение, описывающее траекторию частицы, импульс которой отличается от импульса p_0 частицы, движущейся по равновесной орбите радиусом R_0 , записывается в виде

$$x = \frac{\Delta p}{p} \frac{R_0}{1-n} \left[1 - \cos \left\{ \frac{(1-n)^{1/2}}{R_0} s \right\} \right]. \quad (2.123)$$

Для того чтобы вычислить отсюда x' , составим матрицу, соответ-

ствующую секторному магниту:

$$M_s = \begin{pmatrix} \cos \kappa^{1/2} s & \kappa^{-1/2} \sin \kappa^{1/2} s & (\kappa R_0)^{-1} (1 - \cos \kappa^{1/2} s) \\ -\kappa^{1/2} \sin \kappa^{1/2} s & \cos \kappa^{1/2} s & \kappa^{-1/2} R_0^{-1} \sin \kappa^{1/2} s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.124)$$

здесь $\kappa = (1 - n)/R_0^2$.

Для элементов, соответствующих прямолинейной оси пучка, или для бесконечно тонких элементов (таких, как край магнита или тонкая линза) m_{13} и m_{23} равны нулю. Линейные свойства секторного магнита с резкими краями, с которыми центральная ось пучка составляет углы θ_1 и θ_2 на входе и выходе соответственно, можно описать матрицей $M_{E2} M_s M_{E1}$, где M_s — матрица (2.124), а

$$M_{E1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (\operatorname{tg} \theta_1)/R & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.125)$$

здесь угол θ_1 отрицателен, если при входе в магнит пучок отклоняется по направлению к нормали. Более подробный вывод соответствующей матрицы можно найти в работах [81, 185].

Интересным является следующее свойство фокусирующего секторного магнита с однородным полем ($n=0$): если пучок входит в магнит по нормали к его поверхности, то фокусировка частиц в нем происходит таким образом, что предмет, вершина магнита и изображение находятся на одной линии. Это свойство иногда называют правилом Барбера. Вывести его можно, рассматривая матрицу $M_b M_s M_a$, где M_a и M_b — матрицы, соответствующие дрейфовым промежуткам a и b от предмета и изображения соответственно до края магнита. Подставляя $n=0$ в матрицу M_s [выражение (2.124)] и учитывая, что в матрице $M_b M_s M_a$ элемент $m_{12} = 0$ (см. разд. 2.3), находим условие фокусировки. Это условие записывается в виде

$$(a+b) \cos\left(\frac{s}{R_0}\right) + \left(R_0 - \frac{ab}{R_0}\right) \sin\left(\frac{s}{R_0}\right) = 0. \quad (2.126)$$

Его можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{s}{R_0}\right) = -\frac{(a+b)R_0}{R_0^2 - ab}, \quad (2.127)$$

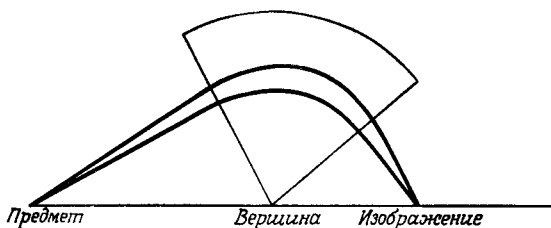


Рис. 2.15. Фокусирующая система, состоящая из секторного магнита с однородным полем.

При условии, что траектории частиц на входе и выходе из магнита перпендикулярны его плоскостям, предмет, вершина магнита и изображение находятся на одной линии [выражение (2.127)].

откуда получаем условие $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_s = \pi$, где $\operatorname{tg} \varphi_a = a/R_0$, а $\operatorname{tg} \varphi_s = s/R_0$. Это означает, что предмет, изображение и вершина магнита лежат на одной линии (рис. 2.15).

Матрица преобразования системы, которая удовлетворяет этому условию, имеет вид

$$M_b M_s M_a = \begin{pmatrix} \cos \varphi_s - (b/R_0) \sin \varphi_s & 0 & 1 - \cos \varphi_s + (b/R_0) \sin \varphi_s \\ -\sin \varphi_s & \cos \varphi_s - \sin \varphi_s & \sin \varphi_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

(здесь расстояния нормированы на R_0). Такие системы не фокусируют частицы в вертикальном направлении и, очевидно, имеют ограниченную практическую ценность. Применяемые на практике (более сложные) системы описаны в специальной литературе, которая обсуждается в следующем разделе.

Отклонение частиц используется во многих других широко применяемых устройствах, например в электронно-лучевых трубках и фотоэлектронных умножителях. Эти и другие специальные приложения здесь мы рассматривать не будем. Ссылки на них даны в разд. Л. 4,5.

Л.4.5. Замечания и литература Квадрупольные линзы не применялись в фокусирующих системах до тех пор, пока в 1952 г. не был открыт принцип сильной фокусировки (разд. 7.2). С того времени их исследовали во всех подробностях. Общее описание, изобилующее большим количеством деталей, можно найти в книге Гриве и Септэ [108] (следует заметить, что в первом издании книги содержится существенно меньше материала). Под-

робное обсуждение теоретических исследований, включая рассмотрение аббераций, дается в монографии Хаукса [120] и в выполненном им более позднем обзоре [121]. Оптические свойства различных комбинаций квадрупольных рассмотрены в работах [145, 240]. Подробности, касающиеся конструкций квадрупольных (в том числе и сверхпроводящих), можно найти в трудах конференций по ускорителям и магнитам. В них также имеются статьи, посвященные численным расчетам соответствующих конструкций с помощью ЭВМ.

Хотя механизм бетатронной фокусировки был признан еще в 30-е годы и стала понятной роль вертикальной фокусировки в классических циклотронах, эти вопросы еще более прояснились, когда Керст и Сербер [144] предложили использовать показатель поля n . Использование аналогичного показателя для электростатического поля оказалось естественным обобщением. Теория бетатронной фокусировки рассматривается во всех книгах по циклическим ускорителям, обсуждаемых в разд. Л, 6, 7.

Теория краевой и секторной фокусировки применительно к расчету призм и отклоняющих магнитов представлена в статьях Волника и Энже, опубликованных в сборнике под редакцией Септье [266]. Дипольные магниты подробно исследовались также в книге [185].

Свойства и применения дипольных и квадрупольных магнитов в системах транспортировки пучков широко обсуждаются в монографиях [11, 282].

§ 6. Криволинейные ленточные пучки

В нескольких предыдущих разделах мы проанализировали системы с криволинейными осями, в которых свойства пучка вдоль его оси были достаточно конкретными и простыми. Общая задача с учетом ускорения частиц вдоль оси является исключительно сложной. Тем не менее имеет смысл попытаться привести общую формулировку задачи, а частные задачи лучше всего решать по отдельности, используя численные методы.

Соответствующую задачу для ленточного пучка почти что удается сформулировать в аналитическом виде, однако в общем случае она приводит к громоздкому и не очень удобному для вычислений параксиальному уравнению. Уравнение в нерелятивистском приближении на основе вариационного метода получено Стэрроком [288], а Кириштейн и др. [147] вывели его прямым методом, начиная с записи лагранжиана. В приложении 3 дан вывод релятивистского уравнения, описывающего системы с единственной составляющей магнитного поля, в направлении которого все величины однородны (y -направление). Электрическое поле имеет сос-

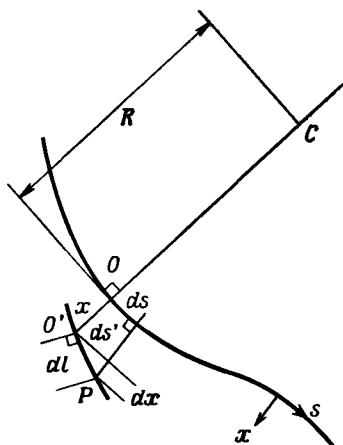


Рис. 2.16. Криволинейная система координат.
Жирной линией показано сечение осевой поверхности.

твляющие как в направлении оси пучка (s -направление в криволинейной системе координат), так и в нормальном к ней направлении (x -направление). Система координат показана на рис. 2.16. Назовем "осевой поверхностью" криволинейную поверхность, которая соответствует оси в системах с фокусировкой в обеих плоскостях, или (что более понятно) в "осевой плоскости" плоского ленточного пучка, определенной в разд. 3.1. Следует заметить, что рассматриваемый здесь пучок отличается от исследованных выше, поскольку в нем присутствует компонента магнитного поля, ориентированная вдоль направления движения. В криволинейной системе координат нельзя по отдельности рассматривать поля B_s и B_x , как это сделали Кирштейн и др., но в окончательный результат, полученный ими, входят члены, непосредственно содержащие вектор-потенциал A , который трудно выразить через B . Неоднозначность, связанная с появлением A , может быть исключена только путем задания начальных условий для траекторий, лежащих на осевой поверхности. В общем случае, даже при отсутствии B_s и B_x , осевая поверхность определяется неоднозначно. Ясно, что в тривиальном предельном случае однородного магнитного поля B_y положение цилиндрической осевой поверхности вообще произвольно.

Параксиальное уравнение имеет смысл только тогда, когда известно также уравнение, определяющее осевую поверхность. В приложении 3 показано, что оба эти уравнения записывают в виде

$$x'' + \frac{\gamma' x'}{\beta^2 \gamma} + \left\{ \frac{\gamma''}{\beta^2 \gamma} + \frac{2}{R^2} - \frac{2q}{\beta \gamma m_0 c^2 R} (cB_y - \beta E_x) \right\} +$$

$$+ \frac{q^2}{\beta^2 \gamma^2 m_0^2 \sigma^4} (\sigma B_y - \beta E_x)^2 \} x = 0, \quad (2.129)$$

$$\frac{\gamma m_0 \beta^4 \sigma^2}{R} - q B_y \beta \sigma + q E_x = 0. \quad (2.130)$$

В общем случае величины E_x , R и γ , входящие в эти уравнения, являются функциями расстояния s вдоль орбиты. Однако если $E_s = 0$, то эти уравнения описывают круговые орбиты, а из уравнения (2.129) можно вычислить частоту бетатронных колебаний Q при движении частицы в электрическом и магнитном полях с $n_M = 0$ и $n_E = 1$ (разд. 5.3).

Сразу не ясно, как идентифицировать отдельные члены в этих уравнениях с соответствующими эффектами фокусировки. Например, в уравнении (2.129) последние три слагаемых в квадратных скобках, а также уравнение (2.130) необходимы при расчете простого случая фокусировки частиц в однородном магнитном поле. В этом случае член в квадратных скобках сводится к величине $1/R^2$, что соответствует $Q = 1$. Нетрудно проверить, что, если $R = \text{const}$ и присутствует лишь электрическое поле, $Q = (2 - \beta^2)^{1/2}$, как и ожидается из уравнения (2.119) при $n = 1$. В общем случае, когда криволинейная ось не является правильной окружностью, фокусировка называется "отклоняющей". Если R является осциллирующей функцией от s , так что осевая поверхность имеет вид "волны", то такую фокусировку называют "слаломной". Все эти случаи рассмотрены Кирштейном и др. в книге [147], в которой можно найти ссылки на оригинальные работы.

§ 7. Теория орбит в ускорителях

7.1. Введение. В данном параграфе мы попытаемся кратко изложить основные результаты теории орбит в циклических установках. Главное внимание уделим общим понятиям; некоторые из них тесно связаны с уже рассмотренными выше идеями, а другие, например характеризующиеся периодичностью структуры, определяют совершенно новые свойства. Здесь мы рассмотрим только орбиты отдельных частиц; устойчивые коллективные эффекты обсуждаются в гл. 3; понятия, связанные с ансамблями орбит, развиваются в гл. 4, а в гл. 5 исследуем влияние радиационных эффектов и эффектов рассеяния.

7.2. Переменная-градиентная ("сильная") фокусировка. Этот важный принцип начал использоваться во всех больших ускорителях лишь после его повторного открытия Курантом, Ливингстоном и Снайдером [64]. Первоначально он был изложен в отчете Кристофилоса [54], опубликованном в небольшом количестве экземпляров, и до 1952 г. никто не смог оценить значения этой работы. Хотя было уже известно, что комбинация двух квадрупольных линий

обеспечивает результирующую фокусировку частиц в двух плоскостях, до 1952 г. этому факту не придавали существенного значения.

Впервые этот принцип нашел применение в синхротронах. Было показано, что магнитная структура, разделенная по азимуту на ряд одинаковых сегментов, в которых n меняется от большого положительного до большого отрицательного значения, способна обеспечить фокусировку частиц с частотой бетатронных колебаний $Q \gg 1$ как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. При такой фокусировке не только уменьшаются амплитуды колебаний, обусловленных угловым смещением частиц относительно равновесной орбиты, но и возникает возможность удержания пучка с большим энергетическим разбросом частиц в апертуре с заданным радиальным размером.

Свойства орбит в периодических фокусирующих структурах подробно изучались в связи с созданием больших синхротронов. При больших значениях Q поведение частиц очень сильно зависит от параметров структуры, особенно от рассогласованностей и ошибок, которые даже слегка возмущают периодичность структуры. Например, при наличии локальных ошибок в градиенте поля частота Q становится комплексной величиной вблизи целых и полужелых значений, так что амплитуда колебаний (в линейном приближении) неограниченно возрастает (см. разд. 7.3).

В качестве простого специального примера мы продемонстрируем фокусирующее действие наипростейшей "переменно-градиентной" структуры, опираясь на результаты, полученные для бетатронной фокусировки. Воспользовавшись уравнением (2.117), нетрудно убедиться, что матрица преобразования для орбиты длиной $s = R_0 \theta$ имеет тот же самый вид, что и матрица (2.105а) для квадрупольа, причем $\kappa = n/R_0^2$ для вертикального движения и $\kappa = (1-n)/R_0^2$ для горизонтального. Если положить теперь $n \gg 1$, то матрица, описывающая преобразование координат в вертикальном направлении, остается той же самой, а в матрице преобразования координат в горизонтальном направлении вместо n надо записать $(1-n)^{1/2} = jn^{1/2}$, в результате чего она примет вид матрицы (2.105б).

Рассмотрим теперь сектор, в котором n имеет большое отрицательное значение, т.е. поле нарастает по радиусу. Тогда первая матрица описывает движение в радиальном направлении, а вторая — в вертикальном. Поэтому матрица преобразования в радиальном направлении для пары секторов есть $M_r M_d$, а в вертикальном — $M_v M_f$. В частности,

$$M_f M_d = \begin{pmatrix} CC_h + SS_h & \kappa^{-1/2} (CS_h + SC_h) \\ \kappa^{1/2} (CS_h - SC_h) & CC_h - SS_h \end{pmatrix}; \quad (2.131)$$

здесь через C и S обозначены синус и косинус от аргумента $n^{1/2}s/R_0$, а нижний индекс h означает, что соответствующая функция является гиперболической. Обозначим эту матрицу, соответствующую "единичному элементу" установки, через M_0 . Поскольку длина каждого элемента равна $2s$, всего имеется $\pi R_0/s = N_0$ элементов.

Для того чтобы показать, как происходит фокусировка, перепишем матрицу в виде

$$M_0 = \cos \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \mu \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & -m_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.132)$$

где

$$\cos \mu = \cos(n^{1/2}s/R_0) \operatorname{ch}(n^{1/2}s/R_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} M_0, \quad (2.133)$$

а Tr обозначает след матрицы. Умножая многократно матрицу (2.132) саму на себя и используя тот факт, что определитель матрицы M_0 равен единице (см. разд. 2.3), получаем

$$M_0^{N_0} = \cos N_0 \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin N_0 \mu \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & -m_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Движение будет ограниченным, если $\cos \mu$ — действительная величина. Для выполнения этого условия правая часть выражения (2.133) должна быть меньше единицы, т.е. $n^{1/2}s/R_0$ должно быть меньше $0,6\pi$. Если величина $n^{1/2}s/R_0$ несколько больше этого значения, то амплитуда колебаний частицы экспоненциально нарастает, и лучок оказывается "перефокусированным". При еще большем значении этого параметра фокусировка снова становится возможной. По мере дальнейшего увеличения $n^{1/2}s/R_0$ области неустойчивого движения и постепенно уменьшающиеся области устойчивого движения чередуются.

Величину μ можно рассматривать как сдвиг фазы бетатронных колебаний на одном элементе периодичности. Поэтому для всей установки частота бетатронных колебаний Q дается выражением

$$Q = \frac{N_0 \mu}{2\pi} = \frac{N_0}{2\pi} \arccos \left\{ \cos \left[\frac{n^{1/2}}{N_0} \pi \right] \operatorname{ch} \left[\frac{n^{1/2}}{N_0} \pi \right] \right\}. \quad (2.135)$$

Выбирая достаточно большие значения n и N_0 , можно в принципе безгранично увеличивать частоту бетатронных колебаний Q . В больших ускорителях Q выбирают обычно в интервале от 6 для протон-

ного ускорителя, рассчитанного на 25 ГэВ, до 20 для ускорителя, рассчитанного на энергию в несколько сотен ГэВ. Существующие на практике ограничения на величину Q обусловлены соответствующими допусками.

Магнитные структуры больших синхротронов состоят из последовательно установленных по окружности магнитов, разделенных "прямолинейными промежутками", которые не обязательно имеют одинаковые длины. Между магнитами размещаются различные устройства, такие, как ускоряющие резонаторы, система инжекции и диагностическая аппаратура. Создание магнитных структур для таких установок стало высокоспециализированной областью. Для определения и оптимизации орбит по параметрам структуры разработаны сложные машинные программы. Одним из вариантов структуры, в котором используется только что рассмотренный фокусирующий элемент, является структура с "разделенными функциями", в которой используются как поворотные магниты с однородным полем, так и квадрупольные магниты. [Матрица преобразования для поворотного магнита, в который пучок входит по нормали к его поверхности, дается выражением $(2.105a)$, в котором $n=1$ и, следовательно, $\kappa=1/R_0^2$. По сравнению с квадрупольными магнитами такой магнит обеспечивает слабую фокусировку.] Для фокусировки и транспортировки выведенных пучков применяются системы, состоящие из квадрупольных и поворотных магнитов. В этом случае также с помощью ЭВМ вычисляются траектории частиц.

Периодические фокусирующие системы с аксиальной симметрией применяются в СВЧ-лампах; поскольку они работают в режимах, в которых существенную роль играет пространственный заряд, отложим их рассмотрение до следующей главы (§ 5 гл. 3).

7.3. Существование замкнутых орбит; резонансы Очевидно, что в аксиально-симметричных магнитных системах типа рассмотренных в разд. 5.3 существуют замкнутые круговые орбиты. Однако, как мы уже видели, движение частиц относительно таких орбит не обязательно будет устойчивым. С достаточной общностью можно показать, что в магнитном поле, имеющем плоскость симметрии, в каждой точке которой поле нормально к этой плоскости, может существовать по крайней мере одна замкнутая орбита. Доказательство приведено в работе [66]. В электрическом или магнитном полях, не имеющих плоскости симметрии, такая орбита не обязательно существует.

Почти во всех циклических ускорителях частиц замкнутую орбиту стараются сделать плоской. Если частицы в пучке имеют различные энергии, то им соответствуют разные замкнутые орбиты. Мы будем называть замкнутую орбиту, частицы которой имеют определенную энергию, "равновесной". В бетатронах и синхротро-

нах положение равновесной орбиты остается неизменным, а поле и энергия увеличиваются во времени. С другой стороны, в синхротронах поле остается постоянным, а радиус равновесной орбиты меняется. В классических циклотронах с постоянным полем и постоянной частотой обращения частиц по орбите частицы существуют одновременно на всех радиусах, так что не имеется выделенного радиуса равновесной орбиты.

В изученных до сих пор типах полей замкнутая орбита имела вид правильной окружности или (в структурах с прямолинейными промежутками) состояла из отрезков прямых линий и окружностей. С другой стороны, в секторно-фокусирующих циклотронах и ускорителях с постоянным полем и переменными градиентами поле меняется непрерывно вдоль равновесной орбиты. Если конфигурация поля задана аналитически, например в виде произведения азимутальных гармоник и полиномов, описывающих свойства поля в радиальном направлении, то равновесную орбиту можно найти следующим образом. Разложим величины в ряд вблизи окрестности произвольно выбранной орбиты (например, имеющей форму правильной окружности) и введем в уравнения движения силовые члены, обусловленные отклонением полей от значений соответствующих выбранной орбите. Как это можно сделать применительно к интересующему нас классу полей, объясняется, например, в работе [293] и обзорной статье [164]. Эти расчеты довольно трудоемки, и в реальных конструкциях секторно-фокусирующих циклотронов, в которых применяются такие поля, форму замкнутой орбиты в общем случае находят не аналитически, а методом проб и ошибок, прибегая к численным расчетам на ЭВМ.

Частоты бетатронных колебаний относительно замкнутой орбиты уже вычислялись нами для ускорителей с круговыми орбитами (разд. 5.3). В работе [293] показано, что, даже если n и R_0 зависят от s , уравнение (2.117) все еще можно использовать для описания колебаний малой амплитуды, хотя сами колебания не являются гармоническими. Если амплитуда колебаний мала, то это уравнение обязательно линейно и с его помощью можно определить матрицу преобразования M_C для одного оборота по замкнутой орбите, которая имеет вид, аналогичный матрице (2.132):

$$\begin{pmatrix} x(C) \\ x'(C) \end{pmatrix} = M_C \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

где C — длина периметра орбиты. Частота бетатронных колебаний Q дается выражением $\cos \omega C (2\pi Q) = \cos \mu C$; оно не определяет Q однозначно, но позволяет найти ее целую часть. Если значение Q лежит между N и $N + 1$, где N — целое число, то осциллирующая орбита

пересекает замкнутую орбиту либо $2N$, $2N + 1$, либо $2N + 2$ раз за один оборот.

Свойства замкнутой орбиты частицы, энергия которой слабо отличается от энергии частицы, движущейся по равновесной орбите, характеризуются "коэффициентом расширения орбит" или функцией "отклонения энергии" $\alpha_p(s)$. Если частица с импульсом $p_0 + \Delta p$ находится на расстоянии x от равновесной орбиты, то

$$\alpha_p(s) = \frac{\Delta x}{\Delta p/p} \quad (2.137)$$

(иногда эту функцию обозначают через η или X_p ¹⁾). В ускорителях с аксиальной симметрией величина Δx не зависит от s , и дополнительное расстояние, которое проходит по орбите частица с импульсом, отличным от импульса равновесной частицы, равно $2\pi\Delta x = \Delta C$. В установках, в которых орбиты не имеют форму правильной окружности, используется среднее по длине орбиты значение величины α_p , определяемое выражением

$$\alpha = \frac{p}{C} \frac{\Delta C}{\Delta p}. \quad (2.138)$$

(Следует отметить, что α — безразмерная величина, тогда как α_p имеет размерность длины.) Этот коэффициент мы обсудим в следующем разделе.

От импульса частицы зависят не только размеры и форма равновесной орбиты, но также и частота бетатронных колебаний Q . Эта зависимость характеризуется "хроматичностью" структуры:

$$\xi = \frac{p}{Q} \frac{\Delta Q}{\Delta p}. \quad (2.139)$$

В слабофокусирующем синхротроне в случае, когда $dB/dr = \text{const}$, показатель поля $n = -(r/B)(dB/dr)$ зависит от r , и нетрудно проверить [используя выражение (2.139)], что

$$\xi_x = -\frac{n(1+n)}{2(1-n)^2}, \quad \xi_y = \frac{1+n}{2(1-n)}. \quad (1.140)$$

В сложных структурах, в которых частота Q велика и для устранения возможных резонансов должна задаваться с высокой степенью точности (см., например, разд. 7.5), большое значение хроматичности нежелательно. С другой стороны, в случае больших токов пучка хроматичность может оказаться полезной для подавления поперечной неустойчивости (см. разд. 4.4 и 5.3 гл.6). В работе [14] приведено общее выражение через параметры структуры α_0 и β_0 , которые мы определим в разд. 3.4 гл. 4 для структуры,

¹⁾ В советской литературе отклоненную замкнутую орбиту обычно называют безразмерной "пси-функцией" $\psi(s)$, связанной с $\alpha_p(s)$ соотношением $\psi(s) = 2\pi\Pi^{-1}\alpha_p(s)$, где Π — длина орбиты. — *Прим. ред.*

составленной из линейно-фокусирующих элементов¹⁾. Оказывается, что для сильнофокусирующих структур величины ξ_x и ξ_y примерно равны -1 и $+1$. Нелинейный градиент фокусирующего поля, когда dB/dr зависит от r , также влияет на хроматичность. Частным примером этого является "подобное поле" $B/B_0 = (r/R_0)^{-n}$. В таком поле орбиты частиц, имеющих различные импульсы и, следовательно, различные значения R_0 , геометрически подобны, т.е. $\xi = 0$. С точностью до членов первого порядка поле на окружности радиусом R_0 аналогично бетатронному полю, рассмотренному в разд. 5.3, и в этом смысле хроматичность является эффектом второго порядка. Нелинейные эффекты мы рассмотрим в разд. 7.5.

В связи с различного рода искажениями в реальных ускорителях возникает много проблем. Например, если частота бетатронных колебаний Q близка к целому числу, то положение замкнутой орбиты очень сильно зависит даже от незначительных ошибок в распределении поля, вызываемых искажением магнитного поля и смещением магнитов. В качестве простого иллюстративного примера рассмотрим установку, в которой $2\pi Q = \mu$, $0 < Q < 1$. Представим себе, что в точке $\theta = 0$ поле слабо искажено и в очень малой окрестности азимута его величина несколько меньше проектной. Такое искажение приводит к тому, что частица испытывает "удар" в радиальном направлении и отклоняется на угол $\Delta\theta$. Из простых геометрических построений (рис. 2.17) ясно, что новая замкнутая орбита смещается от точной орбиты $R = R_0$ на расстояние

$$\Delta R = \frac{\pi R_0 \Delta\theta}{\mu \sin \frac{1}{2}\mu}, \quad (2.14)$$

которое неограниченно возрастает при стремлении μ к 2π . При $\mu = 2\pi$ амплитуда колебаний частицы, находившейся вначале на невозмущенной равновесной орбите, растет линейно со временем. Такой случай называется "целым резонансом", и его можно описать с помощью введенной в правую часть уравнения (2.114) резонансной вынуждающей силы, изменяющейся с частотой ω_p . При $n = 0$ имеем $Q = 1$, т.е. возникает резонанс. На первый взгляд может показаться, что при этих условиях замкнутая орбита вообще не должна существовать. В действительности из-за нелинейных эффектов происходит ограничение амплитуды, и замкнутая орбита все же существует.

Другой тип искажений — это, когда равновесная орбита оста-

¹⁾ Выражение для хроматичности произвольной магнитной системы приведено в книге [151], с. 141, формулы (1.23), (1.24). — *Прим. ред.*

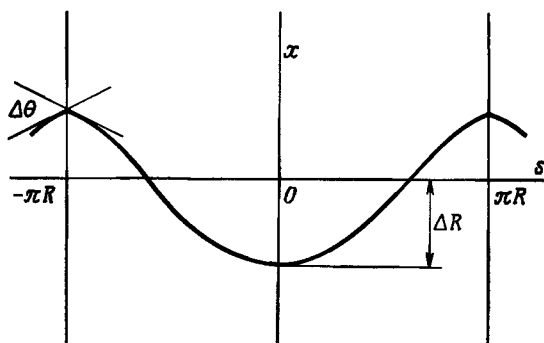


Рис. 2.17. Замкнутая орбита в однородно-фокусирующей системе с искажением магнитного поля на азимуте $s = \pi R$.

Это искажение вызывает отклонение частицы на угол $\Delta\theta$. Уравнение орбиты $x = \Delta R \cos(Qs)/R_0$, а ее наклон в точке $s = \pi R$ равен $(Q\Delta R/R_0) \sin Q\pi = (\mu\Delta R/2\pi R_0) \sin(\mu/2)$. Приравнявая эту величину к $\Delta\theta/2$, получаем выражение (2.141).

ется невозмущенной, но при некотором азимуте показатель поля n имеет неправильное значение. Такие ошибки приводят к размытию пучка, скорость которого зависит от амплитуды колебаний. Из матрицы (2.134) видно, что, когда Q принимает целое или полуцелое значение, $\mu = N\pi$ и $\cos \mu = \pm 1$. Если в небольшой области s структуры, имеющей сдвиг фазы μ , близкой к $N\pi$, заменить n на $n + \delta n$, то в случае небольших значений μ_0 след матрицы преобразования по абсолютной величине становится больше 2, т.е. мы имеем $|\cos \mu_0| > 1$. Этому случаю соответствуют два решения, одно из которых описывает движение по орбите с экспоненциально нарастающей, а другое — с экспоненциально затухающей амплитудой колебаний. Область значений μ_0 , в которой движение неустойчиво, называется "полосой неустойчивости". Равновесная орбита остается невозмущенной, но колебания относительно нее неустойчивы. В последующих разделах мы обсудим резонансы, обусловленные нелинейностью поля и наличием связи между радиальным и вертикальным движениями. Резонанс последнего типа может быть связан либо с нарушением расстановки магнитов (например, вследствие их перекоса в плоскости, перпендикулярной орбите), либо с нелинейностями градиента поля.

7.4. Коэффициент расширения орбит и отрицательная масса. Прежде чем приступить к обсуждению понятия отрицательной массы, посмотрим более внимательно на коэффициент расширения орбит α , определенный выражением (2.138). (Следует отметить, что иногда, в частности в книге [184], вместо α используется α^{-1} .)

Очевидно, что в линейных ускорителях $\alpha = 0$. Нетрудно показать, что в бетатронном поле, в котором $n = -(R_0/B)(dB/dr) = \text{const}$, $p=qB$, $C = 2\pi R_0$ справедливо равенство

$$\alpha = (1-n)^{-1} \quad (2.142)$$

т.е. величина α всегда больше единицы. С другой стороны, в ускорителях с сильной фокусировкой $\alpha < 1$ и форма орбиты зависит от p . В описанной в разд. 7.2 идеализированной структуре, в которой знак показателя поля n меняется, равновесная орбита частицы с правильным (равновесным) импульсом представляет собой правильную окружность. Однако, если импульс частицы незначительно отличается от правильного, она уже не движется по круговой орбите и ее траектория пересекает области со скачком поля между фокусирующим и дефокусирующим секторами, как показано на рис. 2.18. Рассчитать α нетрудно (см., например, книгу [184]). В частном случае поля со знакопеременным градиентом и $n \gg 1$, когда величина n остается постоянной, а меняется только ее знак, имеем

$$\alpha = 4N \left[n^{3/2} \pi \left\{ \text{cth} \left(\frac{n^{1/2} \pi}{2N} \right) - \text{ctg} \left(\frac{n^{1/2} \pi}{2N} \right) \right\} \right]^{-1}; \quad (2.143)$$

здесь N — число пар секторных магнитов в установке. В протонном синхротроне ЦЕРНа на 25 ГэВ, имеющем более сложную структуру, $\alpha = 0,03$.

В ускорителях с большими значениями α может проявляться эффект отрицательной массы. При увеличении импульса частицы, движущейся по орбите, возрастает как ее скорость, так и радиус равновесной орбиты. Первая стремится увеличить угловую скорость вращения по орбите, а второй — уменьшить ее. Если доминирует последний эффект, то при ускорении частицы угловая скорость вращения по орбите падает, так что в известном смысле частица обладает отрицательной массой. В этом можно убедиться, определяя эффективную массу следующим образом:

$$m^* = - \frac{\Delta p}{\Delta \tau} \frac{\tau}{v} = -m_0 \frac{\tau}{\Delta \tau} \frac{\Delta(\beta \gamma)}{\beta} = - \frac{m_0 \tau}{\Delta \tau} \frac{\gamma^3}{\beta} \Delta \beta; \quad (2.144)$$

здесь τ — период обращения частицы по орбите в ускорителе. Если частица движется прямолинейно, то τ можно определить как время, которое требуется на прохождение данного расстояния. Поскольку $\Delta \tau / \tau = -\Delta \beta / \beta$, "продольная масса" частицы $m^* = \gamma^3 m_0$. В циклических ускорителях величину $\Delta \tau / \tau$ обычно принято выражать через параметр η , определяемый соотношением

$$\eta = \frac{\Delta \tau}{\tau} / \frac{\Delta p}{p}. \quad (2.145)$$

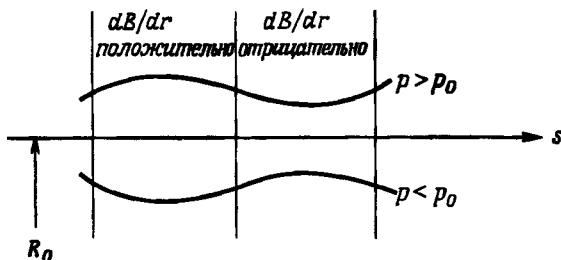


Рис. 2.18. Равновесные орбиты частиц в синхротроне с переменным градиентом.

В однородном поле частица, имеющая импульс $p_0 = q B_0 R_0$, движется по орбите, имеющей форму правильной окружности. Частица с другим импульсом, движется в изменяющемся по азимуту поле и ее орбита состоит из отрезков синусоид.

Используя равенство $\Delta p/p = \Delta(\beta\gamma)/\beta\gamma = \gamma^2 \Delta\beta/\beta$, получаем

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta\beta}{\beta} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p}, \quad (2.146)$$

откуда

$$\eta = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (2.147)$$

Величину, обратно пропорциональную корню квадратному из значения α , при котором η меняет знак, называют "критической энергией" $\gamma_t = \alpha^{-1/2}$. Из (2.144) и (2.147) имеем

$$m^* = \frac{m_0 \gamma^3}{1 - \alpha \gamma^2} = - \frac{\gamma m_0}{\eta}. \quad (2.148)$$

Эта величина положительна, если энергия частицы ниже критической энергии, бесконечна при критической энергии и отрицательна при более высокой энергии. В слабофокусирующих системах $\gamma_t < 1$, так что в них эффективная масса всегда отрицательна. Из выражения (2.142) имеем $\gamma_t = (1 - n)^{1/2} = Q_x$. Оказывается, что это соотношение остается приблизительно справедливым и в более сложных сильнофокусирующих структурах ускорителей. Если рассматривать частицу в системе координат, движущейся вместе с пучком (величины, измеренные в этой системе координат, обозначим индексом 2), то, как и в случае прямолинейного движения, коэффициент γ^3 исчезает. В этой системе координат

$$m_2^* = \frac{m_0}{1 - \alpha \gamma^2}. \quad (2.149)$$

Как мы увидим ниже, то, что энергия частицы $(1/2) m_2^* \beta_2^2 c^2$, измеренная в движущейся системе координат, становится отрицательной при $\alpha > \gamma_2^{-2}$, имеет определенный смысл.

7.5. Нелинейные эффекты. В данном разделе мы рассмотрим нелинейные эффекты, обусловленные отклонением от пропорциональной зависимости фокусирующих сил относительно смещения частицы. Здесь мы ограничимся исследованием движения либо в плоскости орбиты, либо в нормальном ей направлении. Связь колебаний рассмотрим в разд. 7.9. Как и в разд. 2.7, можно было бы рассмотреть оптические aberrации и рассчитать соответствующие коэффициенты. Однако в циклических ускорителях все эти свойства существенно зависят от периодичности структуры. Выше мы уже обсуждали периодическое движение частиц в установках, в которых уравнения движения, описывающие бетатронные колебания частиц, являются линейными. Равновесную орбиту и частоту бетатронных колебаний частицы, имеющей заданную энергию, можно определить однозначно, если Q не принимает целых или полужелых значений.

Когда существенное влияние на движение оказывают нелинейные члены, то появляются новые свойства. Частота Q теперь зависит от амплитуды. В периодическом поле ее значение можно найти как предел, к которому стремится отношение $M/2N$ при $N \rightarrow \infty$, где M — число пересечений орбиты с осью, а N — число оборотов частицы. В качестве примера рассчитаем зависимость Q от амплитуды в фокусирующем поле, однородном в направлении z . Гармоническое движение частицы с небольшой нелинейностью описывается в таком поле уравнением

$$x'' + kx + f(x) = 0, \quad (2.150)$$

где $f(a) \ll ka$, a — амплитуда колебаний. В прямолинейной системе, как было показано в разд. 4.2, квадрупольное поле приводит к линейным осцилляциям. Благодаря секступольным и октупольным составляющим поля в функции $f(x)$ возникают члены, пропорциональные x^2 и x^3 соответственно.

Секступольные составляющие поля с точностью до первого порядка изменяют амплитуду колебаний на равные и противоположные по знаку значения в положительном и отрицательном полупериодах, но не влияют на частоту колебаний. С другой стороны, октупольные составляющие изменяют амплитуду симметрично, но также приводят и к изменению частоты. Выбирая $f(x)$ в виде kx^n/x_0^{n-1} , где $n = 2$ или 3 , нетрудно показать, что (приложение 4) относительное изменение амплитуды, обусловленное присутствием нелинейных членов, равно $(a/x_0)^{n-1}/(n+1)$, где a — амплитуда колебаний. При $n=2$ эта величина имеет разные знаки в положитель-

ном и отрицательном полупериодах; при $n=3$ амплитуда колебаний уменьшается одинаково в обоих полупериодах. В окупольном поле относительное изменение частоты колебаний равно $3a^2/8x_0$. Эти результаты приведены только для иллюстрации. В реальных ускорителях они зависят от параметров структуры более сложным образом.

Хотя с точностью до членов первого порядка секступольная составляющая поля в уравнении (2.150) не приводит к изменению частоты колебаний частицы, обладающей заданным импульсом и осциллирующей относительно оси $x=0$, она все же влияет на хроматичность. Частица, импульс которой отличен от импульса равновесной частицы, движется в поле с другим градиентом. В выражениях (2.140) для ξ_x и ξ_y к коэффициенту $(1+n)$ следует добавить дополнительный член $-B^0 R^2/Vn$. Отметим, что секступольные поля, фокусирующие частицу в x -плоскости, дефокусируют ее в y -плоскости; сила, действующая на частицу в y -плоскости, пропорциональна y^2 и направлена по оси x . Однако при конечном значении x существует дефокусирующая сила, пропорциональная xy и направленная вдоль оси y . Секступольные или мультипольные поля более высоких порядков (или, говоря иначе, нелинейные члены в выражениях для полей) обязательно приводят к связи колебаний в двух плоскостях, поскольку в общем случае величина возвращающей силы в данной точке x зависит как от x , так и от y . В разд. 7.8 рассматривается простой пример, иллюстрирующий этот случай.

В периодической структуре влияние нелинейностей проявляется более сложным образом. Рассматривать эти эффекты удобнее в фазовом пространстве, построенном следующим образом. Для последовательных значений N нарисуем зависимости x от x' при $s = s_0 + NC$, где C — длина окружности орбиты. В линейной системе эти точки лежат на эллипсе или, если Q — комплексная величина, на гиперболе. Если $MQ = NC$, где M и N — целые числа, то движение повторяется после того, как частица совершит N оборотов, а "фазовый портрет" такого движения состоит из ряда точек, принадлежащих этому эллипсу. Если же отношение M/N является иррациональным числом, то изображающие точки никогда не совпадают и как бы проскальзывают по эллипсу.

С другой стороны, в нелинейных системах топология таких фазовых портретов значительно более сложная и зависит от структуры нелинейных членов, входящих в уравнение. Обычно в такой структуре существует равновесная орбита, которая изображается особой точкой в центре диаграммы. При малых амплитудах колебаний система по существу линейна, так что точка оказывается окруженной вложенными один в другой эллипсами, соответствующими различным начальным условиям для x и x' . В качестве при-

мера рассмотрим относительно простую структуру с низкими значениями Q , так что при колебаниях небольшой амплитуды величина $3Q$ не равна целому числу, а при некоторой конечной амплитуде становится целой (но не кратной трем). По мере приближения амплитуды к этому значению эллипс становится треугольным по форме, и, когда $3Q$ принимает целое значение, появляются три особые точки, лежащие на сепаратрисе, вне которой фазовые траектории не окружают больше первоначальную особую точку, как это показано на рис. 2.19. Не совсем ясен смысл этих кривых, удаленных на достаточно большое расстояние от первоначальной особой точки, так что x' больше уже не мало по сравнению с s' ; иногда они удаляются еще дальше, тогда можно считать, что сепаратриса служит границей раздела между "устойчивым" и "неустойчивым" движениями. Наоборот, если амплитуда колебаний все еще невелика, то эти кривые могут быть замкнутыми, как показано на рис. 2.19 штриховыми линиями, и образуются другие устойчивые особые точки. О них можно сказать, что они соответствуют "равновесной орбите, которая замыкается после трех оборотов". Если при произвольно малой амплитуде колебаний величина $3Q$ становится целым числом, то центральный треугольник исчезает и сепаратриса вблизи начала координат представляет собой три линии,

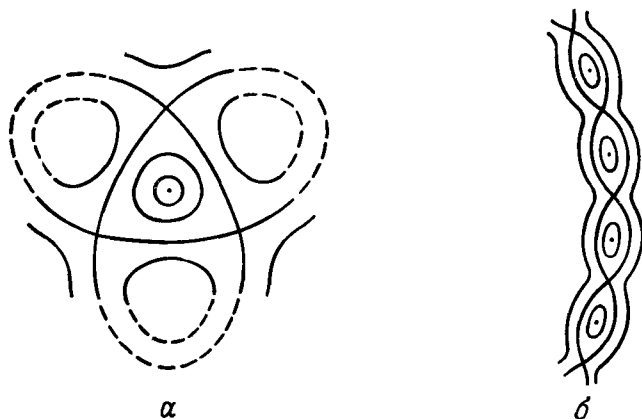


Рис. 2.19. Топология фазовых диаграмм в плоскости $x-x'$, соответствующих нелинейному поведению орбит в периодических полях.

Фазовые траектории образованы точками, координаты которых соответствуют значениям x и x' на данном азимуте, при последовательных оборотах частицы в ускорителе.

a — фазовая диаграмма иллюстрирует поведение, характерное для спирально-секторного циклотрона; b — показана часть тонкой структуры в более сложной системе, такой, как магнитная система большого накопительного кольца.

проходящие через начало координат. Это соответствует "резонансу одна треть". В общем случае, когда параметры фокусирующей системы меняются медленно, такое поведение имеет место при целых значениях величин $3Q$ или $4Q$, не кратных 3 или 4. Однако при $M > 4$ целое значение величины MQ , вообще говоря, не всегда приводит к резонансу. При изменении параметров фокусирующей системы центральный многоугольник не исчезает.

В таких системах, как накопительные кольца со знакопеременным градиентом, в которых частота Q велика, структура фазового портрета может быть очень сложной. Подробные исследования структуры свидетельствуют о появлении "островных формаций", которые также показаны на рис. 2.19. Они возникают тогда, когда отношение M/N представляет собой дробь с не слишком большим знаменателем. Из тщательного анализа следует явно "случайное" поведение изображающих точек, лежащих в непосредственной близости от сепаратрисы; изображающие точки на фазовой плоскости, соответствующие последовательным оборотам, не ложатся на какую-либо кривую.

Правильное понимание и описание такого поведения требует значительно более усовершенствованного метода, чем тот, которым мы пользовались здесь. Описание его можно найти в работе [166], где имеется большое количество ссылок на более общие работы, посвященные этому явлению. Литературу, относящуюся к теме нелинейного поведения орбит в ускорителях, с обоснованием изложенных здесь описательных формулировок можно найти в разд. Л.6,7. В разд.7.9 дается краткое рассмотрение нелинейных эффектов, обусловленных связью движений в x - и y -направлениях.

7.6. Постоянное магнитное поле с азимутальными вариациями.

В циклотронах с азимутальной вариацией поля широко применяются поля, постоянные во времени, но изменяющиеся по азимуту. Такое поле использовалось в синхротронах с постоянным полем и знакопеременным градиентом¹⁾. Хотя несколько моделей ускорителей последнего типа работали вполне успешно, каких-либо больших ускорителей, основанных на этом принципе, не было создано.

Томас [295] первым предложил использовать азимутально изменяющиеся поля для обеспечения одновременно радиальной и вертикальной фокусировки в циклотронах, в которых среднее магнитное поле возрастает с увеличением радиуса. Такое поле требуется и в изохронных циклотронах для обеспечения независимости частоты обращения частиц по орбите от ее радиуса. Для того чтобы угловая скорость сохранялась постоянной, V_y должно увеличиваться по радиусу пропорционально γ . Это означает, что показатель поля

¹⁾В советской литературе такие ускорители называют обычно кольцевыми фазотронами. — *Прим. ред.*

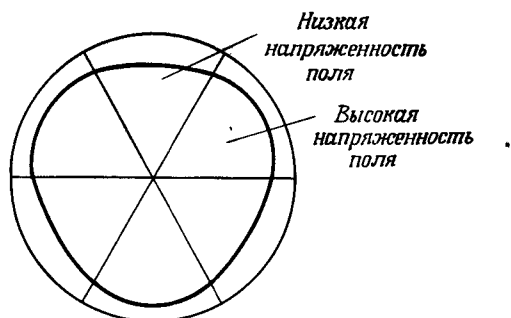


Рис. 2.20. Секторно-фокусирующий циклотрон.

Радиус кривизны орбиты попеременно имеет большое и малое значения в секторах с низкими и высокими значениями поля. Вертикальная фокусировка осуществляется на границах между секторами.

n имеет отрицательное значение и, следовательно, в азимутально-однородной системе отсутствует фокусировка в вертикальном направлении. Вертикальную фокусировку можно восстановить, если заставить поле меняться соответствующим образом по азимуту. Покажем это на следующих частных примерах. Предположим, что в соседних секторах магнитное поле имеет в одном большое значение, а в другом — малое, как показано на рис. 2.20. Тогда кривизна равновесной орбиты велика в секторе с большим значением поля и мала в секторе с малым полем. Поэтому частица пересекает границу между секторами под некоторым углом и фокусируется в вертикальном направлении за счет краевых эффектов, компенсирующих дефокусировку в нарастающем по радиусу поле. Степень достигнутой таким образом фокусировки ограничена, но суммарный эффект фокусировки можно усилить, если использовать спиральные секторы, которые обеспечивают сильную переменную фокусировку и (несколько меньшую) дефокусировку. Спиральные гребни (вариации) теперь широко применяются в циклотронах, хотя впервые было предложено использовать их в синхротронах с постоянным полем и знакопеременным градиентом [293].

В разд. 7.3 мы уже отмечали, что аналитические расчеты орбит и колебаний в таком поле являются сложными. На практике для этого широко применяют численные методы, основанные на расчете хода лучей. Конфигурацию орбиты, замыкающейся после одного оборота, находят с помощью итерационных методов. Однако для некоторых полей специальной конфигурации удается относительно просто вычислить частоты бетатронных колебаний в аналитическом виде. Эти вычисления можно найти, например в книге Ливингуда [184]. Мы рассмотрим их кратко здесь, для того чтобы показать, какие

параметры в них участвуют. Для магнитного поля, заданного в виде

$$\frac{B}{B_0} = \left(1 - \frac{nx}{R_0}\right) \left(1 + \delta \cos \left(N\theta - \frac{x \operatorname{ctg} \sigma}{R_c}\right)\right), \quad (2.151)$$

найдено

$$Q_y^2 \approx n + \delta^2 \left(\frac{1}{2} + \operatorname{ctg}^2 \sigma\right). \quad (2.152)$$

С точностью до членов первого порядка наличие гребней не влияет на частоту Q_x , и она равна $(1 - n)^{1/2}$. В изохронном циклотроне угловая скорость ω_0 движения частицы по орбите постоянна, и, поскольку $\omega_0 \sim R/\gamma$, мы имеем $B(r) = \gamma(r) B(0)$. Зависимость γ от r можно найти, если известна величина $\beta = r/R_c$, где $R_c = m_0 c/q B_0$ — гипотетический радиус орбиты, при котором $\beta = 1$, а γ и B бесконечны. Выражая γ через r в виде $(1 - r^2/R_c^2)^{-1/2}$, можно вычислить значение $n = -(r/B)(dB/dr)$, которое равно $1 - \gamma^2$. При больших значениях γ величина n велика и отрицательна; поэтому, чтобы обеспечить фокусировку в вертикальном направлении, необходимо значительное количество тесно расположенных спиральных гребней. На практике существование целого резонанса $Q = 2$ ограничивает величину γ числом 2, n — числом -3 .

В более современных ускорителях используют отдельные секторы, между которыми поле падает до очень низкого значения. Это обеспечивает сильную модуляцию азимутального поля, правда, далекую от синусоидальной.

7.7. Линейная связь между радиальным и вертикальным движениями

В примерах орбитального движения, рассмотренных до сих пор, связь между движением в плоскости орбиты и в перпендикулярном к ней направлении не изучалась. С другой стороны, при рассмотрении парааксиального уравнения эта связь учитывалась в специальном случае аксиально-симметричного поля. Анализировать связь движений удобнее в ларморовской системе координат или с помощью комплексных переменных. Однако если поля не аксиально-симметричные, то ситуация усложняется и для описания движения необходимо использовать матрицы четвертого порядка.

Линейную связь между движениями можно ввести, используя либо продольное магнитное поле, либо элемент, плоскость симметрии которого повернута относительно плоскостей симметрии всех других элементов, установленных вдоль орбиты. В первом случае связь возникает из-за появления в x -проекции уравнения движения сил, пропорциональных \dot{y} , а во втором — из-за появления члена, пропорционального y . Матрица преобразования четвертого порядка

для однородного поля приведена в разд. 2.2 настоящей главы. Поворачивая оси на угол θ и возвращая их затем в исходное положение, можно найти матрицу преобразования, соответствующую квадруполю, наклоненному под углом θ :

$$M = \begin{pmatrix} I \cos \theta & -I \sin \theta \\ I \sin \theta & I \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_t & 0 \\ 0 & M_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \cos \theta & I \sin \theta \\ -I \sin \theta & I \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.153)$$

где I — единичная матрица второго порядка, а M_t и M_d — матрицы преобразования (2.105) для квадрупольных линз. Матрица преобразования для случая, когда учитывается и продольное магнитное поле, и поворот плоскости симметрии, имеет более сложный вид. Ее элементы лучше всего найти из рассмотрения траекторий, соответствующих четырем фундаментальным решениям с начальными условиями $(1, 0, 0, 0)$, и т.д. В системах, имеющих гамма-тоннаж, как в случае, когда поля описываются уравнениями Максвелла, существует ряд ограничений на движение частиц. Они обуславливают соотношения между некоторыми элементами матрицы преобразования четвертого порядка. Эти ограничения можно рассматривать как следствие из интегрального инварианта Пуанкаре [101, с. 247]. В системах с одной степенью свободы существует только одно ограничение, которое эквивалентно соотношению Вронского (2.36). С другой стороны, в случае связанного движения с двумя степенями свободы требуется, чтобы матрица преобразования, соответствующая нормализованным переменным, была симплектической. Это означает, что независимы только 10 из 16 элементов матрицы. Подробности можно найти в работе [66].

Анализ циклического движения с учетом слабой линейной связи играет важное значение в теории циклических ускорителей частиц, поскольку в них такая связь может возникать из-за искажений магнитного поля. Основы соответствующей теории изложены в работах [66, 164]. Здесь мы только воспроизведем их результаты, относящиеся к резонансам связи в периодической структуре. Эти выводы справедливы для связи, обусловленной боковыми смещениями магнитов, перекосом магнитов и продольными составляющими магнитного поля. Поскольку мы считаем связь слабой, движение частиц в любой плоскости, рассматриваемое за короткий промежуток времени, меняется незначительно. За более длительный промежуток времени возможен частичный или полный обмен энергиями между колебаниями в радиальном и горизонтальном направлениях или же может наблюдаться непрерывный резонансный рост амплитуды колебаний. Можно показать, что "разностные" резонансы, условие возникновения которых имеет вид $Q_x - Q_y = N$, где N — целое число, приводят к полному обмену энергией между радиальным и вертикальным движениями, в то время как "суммар-

ные" резонансы, условие возникновения которых записывается в виде $Q_x + Q_y = N$, приводят к непрерывному росту амплитуды колебаний. Рассчитать скорость увеличения амплитуды колебаний нетрудно, хотя в некоторых случаях такой расчет может быть громоздким. Соответствующая теория изложена в упомянутых выше работах. В следующем разделе мы рассмотрим простой пример, а некоторые замечания, касающиеся резонансов связи, обсудим в разд. 3.6 гл.4.

7.8. Бетатрон с азимутальным магнитным полем; пример сильной линейной связи. Простым примером сильной линейной связи между радиальным и азимутальным движениями является бетатрон, в котором вдоль орбиты имеется дополнительное азимутальное поле B_s . Такие конфигурации полей изучались в связи с разработкой плазменных бетатронов и коллективных ускорителей с электронными кольцами. Хотя в них важную роль играют собственные поля пучка, основные их свойства можно продемонстрировать на простом примере без учета собственных полей.

Роль азимутального поля сводится к тому, чтобы создать радиальную силу, пропорциональную вертикальной скорости и наоборот. Уравнения, описывающие орбиты частиц, записываются в виде

$$\begin{aligned} x'' + \frac{Q_x^2 x}{R_0^2} &= \frac{B_s y'}{B_0 R_0}, \\ y'' + \frac{Q_y^2 y}{R_0^2} &= -\frac{B_s x'}{B_0 R_0}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Поскольку $\int B_s ds$ по периметру орбиты должен быть постоянной величиной, азимутальное магнитное поле B_s пропорционально $1/(R_0 + x)$. В используемом здесь параксиальном приближении достаточно для начала рассматривать поле B_s как постоянное. Отношение полей B_s/B_0 будем обозначать через b .

Поле B_s обеспечивает связь колебаний, и нормальные моды имеют вид эллипсов в плоскости xy . Чтобы найти значения частот Q , связанные с этими эллипсами, а именно с отношением их осей, запишем переменные x и y в виде $x = \alpha_1 \exp(iQs/R_0)$ и $y = \alpha_2 \exp(iQs/R_0)$, где α_1 и α_2 — комплексные числа, и подставим их в уравнения (2.154):

$$\begin{aligned} \alpha_1(-Q^2 + Q_x^2) &= j\alpha_2 b Q, \\ \alpha_2(-Q^2 + Q_y^2) &= -j\alpha_1 b Q. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-j(Q_x^2 - Q^2)}{bQ} = \frac{-jbQ}{Q_y^2 - Q^2}. \quad (2.156)$$

Вторые два члена дают биквадратное уравнение относительно Q , из которого можно найти значения Q для двух нормальных мод. Подставив эти значения в соотношение (2.156), найдем величину α_2/α_1 . Решение биквадратного уравнения можно записать в виде

$$Q^2 = \frac{1}{2}[(Q_x^2 + Q_y^2 + b^2) \pm \{(Q_x^2 + Q_y^2 + b^2)^2 - 4Q_x^2 Q_y^2\}^{1/2}]. \quad (2.157)$$

Поскольку $Q_x^2 + Q_y^2 = 1$, его можно упростить:

$$Q^2 = \frac{1}{2}[(1 + b^2) \pm \{(1 + b^2)^2 - 4Q_x^2 Q_y^2\}^{1/2}]. \quad (2.158)$$

В общем случае, когда Q_x и Q_y не равны друг другу, увеличение параметра b приводит к увеличению большего из этих значений и уменьшению меньшего. Если b становится много больше единицы, то Q имеет два значения: одно, равное b , а другое — $Q_x Q_y / b$.

Поскольку величина Q является действительной, из соотношения (2.156) следует, что α_2/α_1 должно быть чисто мнимым числом. Это означает, что траектории в двух плоскостях сдвинуты по фазе на $\pi/2$, поэтому их проекция на плоскость xy представляет собой вертикальный эллипс с полуосями $|\alpha_1|$ и $|\alpha_2|$. Величину отношения α_2/α_1 для этих двух мод можно найти из уравнения (2.156). Так как разности $Q_x^2 - Q^2$ и $Q_y^2 - Q^2$ имеют противоположные знаки, эти два эллипса вращаются в противоположных направлениях. В пределе, когда b велико, эллипс, соответствующий нормальному типу колебаний с большей частотой Q , стремится к правильной окружности и частица вращается с частотой, равной циклотронной частоте частицы в поле B_s , а отношение полуосей эллипса, соответствующего нормальной моде с более низкой частотой Q , становится равным Q_x/Q_y . Рассмотренное до сих пор движение частиц в параксиальном приближении является очень простым. Разумеется, если имеются четыре траектории с начальными условиями $(1, 0, 0, 0)$ и т.д., нетрудно (хотя и утомительно) построить матрицу четвертого порядка, описывающую эти поля, как это было сделано в предыдущем разделе. Например, орбита частицы с начальными условиями $(1, 0, 0, 0)$ описывается решением, составленным из двух нормальных мод, фазы и амплитуды которых таковы, что для каждой моды $x' = y' = 0$, а значения y для обеих мод равны по величине и противоположны по знаку.

Если b достаточно велико, то параксиальное приближение нару-

шается, поскольку больше нет оснований пренебрегать зависимостью B_s от r . В этом случае уравнения (2.154) принимают вид

$$\begin{aligned} x'' + \frac{Q_x^2 x}{R_0^2} &= \frac{b y'}{R_0} \left(1 - \frac{x}{R_0} \right), \\ y'' + \frac{Q_y^2 y}{R_0^2} &= - \frac{b x'}{R_0} \left(1 - \frac{x}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (2.159)$$

Эти уравнения обсуждаются в работе [85] в связи с плазменным бетатроном. В ней показано, что если второй член в правой части много больше, чем второй член в левой части, то частицы дрейфуют в направлении оси y с определенной скоростью и в конце концов все уходят с равновесной орбиты. Такое движение известно в чисто тороидальных полях и интерпретируется как "центробежный дрейф", обусловленный кривизной линий магнитного поля.

7.9. Связь, обусловленная нелинейностями поля; простой пример.

В предыдущих двух разделах рассматривалась линейная связь между вертикальным и горизонтальным движением на простом примере, в котором связь обуславливалась магнитным полем, направленным вдоль орбиты. Теперь мы приведем пример нелинейной резонансной связи и сделаем некоторые общие замечания, касающиеся этого типа связи в периодическом поле.

Хотя в реальных ускорителях связь часто обусловлена несовершенствами, такими, как рассеянные поля или наклон магнитов, существование нелинейностей в "идеальном" с других точек зрения поле может также приводить к резонансам связи. Это очевидно, например в случае, когда сила, фокусирующая частицу в вертикальном направлении, зависит от ее радиального положения. Движение частицы в радиальном направлении приводит к появлению эффективной "вынуждающей силы" в уравнении вертикального движения. Если она имеет составляющую, изменяющуюся с частотой, равной частоте вертикальных колебаний, то возникает резонансная связь. Резонанс этого типа играет важную роль, например в классических циклотронах, в которых в большей по радиусу области частота $Q_x \sim 1$, а Q_y — малая величина. Однако на больших радиальных расстояниях, вблизи края полюса магнита, где поле уменьшается, показатель поля n растет, Q_x уменьшается, а Q_y увеличивается. При $Q_x = 2Q_y$ между вертикальным и радиальным движениями происходит резонансный обмен энергиями.

Проанализировать эту связь можно так, как это было сделано в разд. 5.3, однако при этом надо учитывать следующий член n ,

определяемый в разложении полей членом $(R_0^2/B)(d^2B/dr^2)$:

$$\frac{B_y}{B_0} = 1 - \frac{nx}{R_0} + \frac{n'(y^2 - x^2)}{2R_0^2}, \quad (2.160)$$

$$\frac{B_x}{B_0} = -\frac{ny}{R_0} - \frac{n'xy}{R_0^2};$$

в этом разложении коэффициенты определяются из условий равенства нулю ротора и дивергенции поля. Уравнения, описывающие орбиту, имеют следующий вид:

$$x'' + (1-n)x/R_0^2 = \frac{1}{2}n'(y^2 - x^2)/R_0^3, \quad (2.161)$$

$$y'' + ny/R_0^2 = -n'xy/R_0^3.$$

Поскольку величина n' мала, подставляя в эти уравнения решения, полученные при $n'=0$, можно с достаточной степенью точности вычислить правые части. Эти решения записываются в виде $x = x_0 \exp[i(1-n)^{1/2}\theta]$, $y = y_0 \exp(in^{1/2}\theta)$ (и их комплексно-сопряженных выражений), где x_0 и y_0 — комплексные числа. Нетрудно показать, что правая часть первого уравнения содержит экспоненциальные члены с аргументами $\pm 2jn^{1/2}\theta$, а правая часть второго — $\pm j[n^{1/2} - (1-n)^{1/2}]$. Приравнивая их соответствующим аргументам экспонент из решения невозмущенных уравнений, получаем условие резонанса

$$2n^{1/2} = (1-n)^{1/2}, \quad (2.162)$$

или $n = 0, 2$. Пока мы просто показали возможность существования резонанса. Скорость увеличения амплитуды колебаний нетрудно записать через n' , однако этот простой подход не выявляет всех особенностей движения. Например, чтобы продемонстрировать периодичность обмена энергиями между вертикальным и радиальным движениями, необходимо более полное исследование, основанное на методах с использованием гамильтониана [95]. В периодических структурах нелинейности могут привести к появлению дополнительных резонансов. Если сумма $aQ_x + bQ_y$ равна целому числу, а $a + b < 4$, то движение будет неустойчивым. Если же $a + b = 4$, то без подробного анализа невозможно сказать, будет ли движение устойчивым или нет. За исключением достаточно маловероятных случаев, движение при $a + b > 5$ устойчиво.

7.10. Траектории, орбиты и фокусировка; некоторые общие выводы.

Все рассмотренные до сих пор задачи имели очевидный физический

смысл. Во-первых, для конкретной конфигурации электростатического или магнитного полей мы определяли траекторию частицы, обладающей определенными массой и зарядом, а также заданными начальными координатами и импульсом. Эта специально выбранная траектория часто называется "осью", или "замкнутой орбитой". В тех случаях, когда такая траектория оказывается прямолинейной или имеет вид правильной окружности, найти ее нетрудно. В других случаях ее определение является более сложным (как в разд. 7.6). Определив ось (или замкнутую орбиту), мы рассматривали свойства близлежащих траекторий частиц, начальные координаты и значения поперечного или продольного импульсов которых незначительно отличались от начальных условий, соответствующих частице, движущейся по основной орбите. Мы обсудили также разнообразные частные случаи конфигураций полей, каждая из которых характеризовалась своей собственной упрощенной симметрией. Такие конфигурации относятся к наиболее типичным конфигурациям, применяемым в разнообразных практических устройствах. Кроме того, мы ввели оптические понятия, такие, как дисперсия и абберация, и определили ряд вспомогательных параметров, иногда имеющих отношение только к конкретному приложению.

Поведение одиночной частицы в статических полях представляет хотя и ограниченный интерес, но является существенной частью для более полного понимания свойств пучков заряженных частиц. Мы рассмотрели следующие группы взаимосвязанных понятий, используемых в различных приложениях. К ним относятся:

- 1) фокусировка;
- 2) дисперсия, коэффициент расширения орбит, хроматичность;
- 3) абберации и нелинейности;
- 4) резонансное поведение в циклических системах.

Взаимосвязь этих понятий нами была довольно подробно обсуждена.

До сих пор изложение относилось только к статическим полям. Если допустить, что поля меняются во времени, то появляются дополнительные возможности. Некоторые из них описаны в общих чертах в заключительном параграфе данной главы.

Л.6,7. Замечания и литература. Изложенный в данном параграфе материал отражен в работах, посвященных ускорителям частиц, за исключением тех мест, в которых приведены ссылки на специальные статьи. Историю развития этой области, а также комментарии и вопросы приоритета можно найти в капитальном труде Ливингстона [186].

Дальнейшее ее развитие отражено в неопубликованных отчетах больших ускорительных лабораторий, хотя, вообще говоря, их можно найти (часто в сокращенном виде) в трудах конференций по ускорителям. В основном это труды международных конференций, проходящих раз в два-три года, начиная с первой конференции,

проведенной в 1956 г. в Женеве Европейским центром по ядерным исследованиям (ЦЕРНом). Помимо этого в США и СССР проводятся дополнительные национальные конференции, а также конференции специалистов по циклотронам и линейным ускорителям.

Естественно, что описание сильной фокусировки и изложение теории орбит в ускорителях представлены во всех книгах по теории ускорителей. Гораздо полнее и с большей глубиной, чем в настоящей монографии, эти вопросы рассмотрены Коломенским и Лебедевым [151], а также Бруком [44]. Книжки, написанные Блюэтом [24], Ливингудом [184] и Коллатом [150], посвящены главным образом практическим вопросам создания ускорителей и менее подробны, хотя в работе [150] детально рассмотрена теория орбит. Линейная теория переменного-градиентной фокусировки подробно излагается в классической работе [66]. В частности, эту теорию удобно применять для описания орбит в кусочно-постоянном поле. Парзен [220] дал общую теорию, более приемлимую для ускорителей с постоянным магнитным полем и знакопеременными градиентами, а также для ускорителей с азимутальной вариацией магнитного поля. Многочисленные исследования были посвящены важной теме нелинейных эффектов в ускорителях с переменного-градиентной фокусировкой. Основными из них являются неопубликованные отчеты ЦЕРНа [112, 263]. В монографии Коломенского и Лебедева [151], в которой приведен ряд ссылок на более ранние работы, также рассматривается этот вопрос. Приложение теории к циклотронам рассмотрено в большой работе [112а]. Во многих из этих работ использованы гамильтоновы методы, которые в данной главе не рассматриваются. (Хорошее введение в этот подход с точки зрения приложения к ускорителям дается в соответствующем разделе книги по классической механике [63].)

В настоящее время теория орбит в больших ускорителях и накопительных кольцах, а также в циклотронах с азимутальной вариацией магнитного поля продолжает интенсивно разрабатываться. Аналитические методы в ней дополняются большим набором программ для ЭВМ. Некоторые из них описаны Колонисасом [61].

До сих пор мы рассматривали движение только одиночной частицы. Главной же темой нашей книги является исследование пучков, которые принципиально состоят из ансамблей траекторий частиц. Этим вопросом мы займемся в гл.4, в которой также дадим соответствующий обзор литературы.

§ 8. Фокусировка в полях, изменяющихся во времени

8.1. Введение. До сих пор рассматривалось движение частиц только в статических электрическом и магнитном полях. Очевидно, что в изменяющихся во времени полях многие ограничения ис-

чезают и возникают новые возможности. Действительно, в этом случае мы имеем такое большое количество самых разнообразных ситуаций, что их довольно трудно анализировать систематически и с общей точки зрения. Многие задачи лучше всего решать, опираясь с самого начала на численные методы. Например, исследование движения частицы на первых нескольких оборотах в циклотроне представляет специальную задачу, для решения которой существуют машинные программы. К другому примеру относится численное решение задачи в теории большого сигнала, даваемого сгруппированным пучком в клистронах. Можно привести еще примеры из спектроскопии, в которой используются квадрупольные высокочастотные поля, а удержание частиц зависит от их массы и частоты изменения поля [27, 78].

Однако некоторые случаи можно рассматривать как несложные обобщения уже известных идей. Во-первых, используя параксиальное уравнение, можно достаточно просто исследовать адиабатическое изменение амплитуды колебаний в изменяющемся во времени управляющем поле. Для этого надо выбрать в качестве независимой переменной не время, а расстояние, отсчитываемое вдоль траектории, и предположить, что существует поле в направлении движения пучка. С другой стороны, можно прямо записать условие постоянства интеграла действия $\oint p_x dx$ для колебаний. Нетрудно проверить, что если в бетатроне частота бетатронных колебаний Q изменяется во времени, то $x_0 \sim V^{1/2} / Q^{1/2}$. Во-вторых, если в электростатической линзе поле заметно меняется за время, меньшее, чем время прохождения частицы через линзу, то имеется широкий выбор возможных параметров фокусировки. Эта задача имеет отношение к циклотронам и линейным ускорителям, и мы исследуем ее в разд. 8.5 и 8.6. Третий случай, который представляет общий интерес как для ускорителей, так и для плазмы, что мы покажем ниже, — это перемещение частицы в движущейся потенциальной яме продольного электрического поля, гармонически меняющегося с расстоянием. Ускорение частиц в такой потенциальной яме, в свою очередь движущейся с ускорением, лежит в основе всех ускорителей, за исключением бетатронов и электростатических ускорителей. Анализ такой системы можно найти в любой книге по ускорителям, мы же рассмотрим ее в довольно общем виде.

8.2. Продольная фокусировка и фазовая устойчивость. До сих пор мы изучали фокусировку в направлении, перпендикулярном траектории частиц. Чтобы обеспечить синхронизм движения частицы и ускоряющего поля в циклических и линейных ускорителях, существенную роль играет фокусировка частиц в продольном направлении. Такая фокусировка приводит к возникновению в пучке продольной структуры, которая представляет собой последовательности

"сгустков". Рассмотрим движение частиц в предельном случае достаточно низкой их плотности, так чтобы можно было пренебречь собственными полями заряженного пучка.

В перечисленных выше классах ускорителей частицы многократно пересекают ускоряющие промежутки, в которых имеется продольное гармонически меняющееся поле. Точный синхронизм частиц с ускоряющим полем достигается в том случае, когда они пересекают центр промежутков в такой фазе поля, чтобы получать определенный прирост энергии. Частицы, пересекающие промежутки слишком рано или слишком поздно, приобретают энергию, отличающуюся от прироста энергии синхронной частицы, и им требуется либо большее, либо меньшее время для пересечения пространства между последовательными промежутками. Такие частицы можно "сфокусировать по фазе", если заставить более быстрые или более медленные частицы, чем синхронная, достигать последующих промежутков в фазах, соответствующих меньшему или большему полю в промежутке.

Сравнивая время, которое требуется какой-либо частице, чтобы достичь следующего промежутка, с соответствующим временем для выделенной "синхронной" частицы, можно провести анализ движения. Однако задачу можно решить и в более общем виде, если дискретный набор ускоряющих промежутков заменить эффективным спектром бегущих гармонических волн и рассмотреть взаимодействие частицы с той волной, фазовая скорость которой примерно совпадает со скоростью частицы. Здесь мы используем последний метод.

Поле E_s вдоль равновесной орбиты можно записать в виде действительной части выражения

$$\tilde{E}_s(s, t) = E_0(s) \exp(j\omega_g t), \quad (2.163)$$

где ω_g — частота изменения поля в ускоряющем промежутке, а $E_0(s)$ — распределение поля (в общем случае комплексная величина) в окрестности орбиты. В больших циклических ускорителях $E_0(s)$ достаточно хорошо описывается δ -функцией или набором δ -функций, каждая из которых соответствует отдельному резонатору. Разлагая $E_0(s)$ в ряд Фурье, величину \tilde{E}_s можно представить в виде спектра волн, распространяющихся в направлениях s и $-s$. По существу, частицы взаимодействуют лишь с волной, фазовая скорость которой приблизительно совпадает со скоростью частицы. Выделим из спектра волну, составляющую

$$\operatorname{Re} \tilde{E} = E_h \sin(\omega_g t - 2\pi h s / C), \quad (2.164)$$

где C/h — расстояние, измеряемое вдоль равновесной орбиты, на котором фаза электрического поля изменяется на 2π . В цикличес-

ких ускорителях C — это длина периметра равновесной орбиты, а h — "номер гармоники" ускоряющего поля. В линейных ускорителях понятие "периметра" орбиты не имеет смысла и h берется равным единице. Выберем начальные условия так, чтобы $s=0$ при $t=0$. Частоту ω_g выберем такой, чтобы она удовлетворяла условию

$$\omega_g = h\omega_s. \quad (2.165)$$

Синхронная частота обращения частицы, движущейся по равновесной орбите, $\omega_s = 2\pi s/C$.

Определим "фазу" частицы, которую она имеет в точке s относительно фазы волны, следующим образом:

$$\phi = \frac{2\pi h s}{C} - \int \omega_g dt. \quad (2.166)$$

В случае когда поле локализовано в одном ускоряющем промежутке, фаза поля в промежутке в момент пересечения его частицей равна $-\phi$. Фазу нередко определяют именно таким образом, а не выражением (2.166).

В процессе ускорения скорость частицы увеличивается; законы изменения ω_s и среднего периметра орбиты от времени определяются конкретным типом ускорителя. В табл. 2.2 дается сводка этих законов. В накопительных кольцах энергия сохраняется постоянной; мощность, вводимая в резонаторы, компенсирует потери энергии на излучение. Параметры, перечисленные в таблице, медленно меняются во времени, так что параметры фазовых колебаний

Таблица 2.2.

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ
УСКОРИТЕЛЕЙ И НАКОПИТЕЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Ускоритель	Энергия	Частота ускоряющего напряжения	Периметр орбиты
Линейный	Увеличивается	Постоянная	—
Синхротрон	Увеличивается	Увеличивается	Постоянный
Релятивистский синхротрон	Увеличивается	Постоянная	Незначительно увеличивается
Синхроциклотрон (фазотрон)	Увеличивается	Уменьшается	Увеличивается
Электронное накопительное кольцо	Постоянная	Постоянная	Постоянный

изменяются адиабатически. Приравнивая друг к другу силу, действующую на частицу со стороны электрического поля, и скорость изменения импульса частицы с эффективной массой m^* , определяемой выражением (2.144), можно найти уравнение фазовых колебаний

$$\frac{d}{dt} (m^* \dot{\phi}) = qE_h \sin \phi. \quad (2.167)$$

Используя равенства $\dot{\phi} = (2\pi h \dot{s} / C) - \omega_g$ [выражение (2.166)], $E_h C = V$ ["напряжение на одном обороте" (в циклическом ускорителе)] и $h\omega_s = \omega_g$ [условие (2.165)], это уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m^* \dot{\phi}}{2\pi h} \right) = \frac{qV}{C} \sin \phi - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (m^* \omega_s). \quad (2.168)$$

Определяя $\sin \phi_s$ как произведение последнего члена на C/qV , где ϕ_s — "устойчивая фаза"¹⁾, уравнение можно записать в более простом виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m^* \dot{\phi}}{2\pi h} \right) = \frac{qV(\sin \phi - \sin \phi_s)}{C}. \quad (2.169)$$

В общем случае ω_s меняется медленнее, чем ϕ . При этом уравнение (2.168) для колебаний малой амплитуды можно приближенно записать в виде

$$\ddot{\phi} = \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\sin \phi_s - \sin \phi) \approx \Omega_s^2 (\phi_s - \phi), \quad (2.170)$$

где

$$\Omega_s^2 = - \frac{2\pi h q V}{m^* C} \cos \phi_s. \quad (2.171)$$

Чтобы движение было устойчивым, величины m^* и $\cos \phi_s$ должны иметь противоположные знаки. Это означает, что в случае, когда эффективная масса m^* положительна, например в линейных и циклических ускорителях при энергии частиц выше критической, устойчивая фаза соответствует нарастающему во времени полю в данной точке. При этом запаздывающая частица получает "дополнительный толчок", помогающий ей догнать остальные. В случае же, когда эффективная масса отрицательна, устойчивая фаза

¹⁾ Заданному значению $\sin \phi_s$ соответствуют две величины ϕ_s и $\phi_u = \pi - \phi_s$, называемые обычно синхронными или равновесными фазами. Одна из них (ϕ_s) является устойчивой, а другая (ϕ_u) — неустойчивой. — *Прим. ред.*

ответствует спадающему полю. В ускорителе с круговой орбитой частота фазовых колебаний дается выражением

$$\Omega_s = \left[\frac{h q V \eta}{2 \pi \gamma m_0 R^2} \right] \cos \phi_s, \quad (2.172)$$

где $\eta = -\gamma m_0 / m^* = \alpha - 1 / \gamma^2$ выражение (2.148)]. Величину $\Omega_s / \omega_s \ll 1$ обозначают как Q_s и называют "Q-величиной" для синхротронных колебаний.

Уравнение (2.170) описывает движение несвободного маятника (рис. 2.1) или шарика (рис. 2.22), катящегося по поверхности, наклонной под углом $(2\pi h / \lambda) \cos \phi_s$ и профилированной по синусоидальному закону. Еще лучшей аналогией является горизонтально расположенная профилированная поверхность, которая в горизонтальном направлении движется с ускорением $(2\pi g h / \lambda) \cos \phi_s$, где g — ускорение свободного падения. Такой аналогии соответствует правильное затухание колебаний при изменении параметров.

Из различных аналогий можно сразу получить характеристики движения. В случае малых колебаний движение является ограниченным. Если амплитуда колебаний растет, то частота уменьшается до тех пор, пока не достигается граница устойчивости, после которой затухание исчезает и фаза увеличивается или уменьшается.

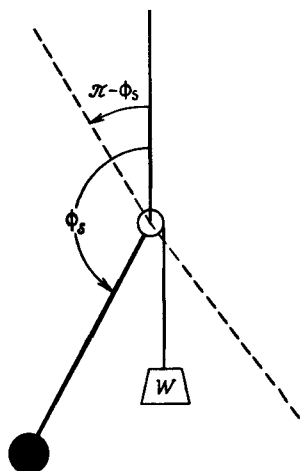


Рис. 2. Маятник с внешним моментом сил.

Это движение описывается уравнением (2.170) и имеет аналогию с фазовыми колебаниями. Штриховыми линиями обозначены границы устойчивого движения. В верхнем положении маятник находится в состоянии неустойчивого равновесия.

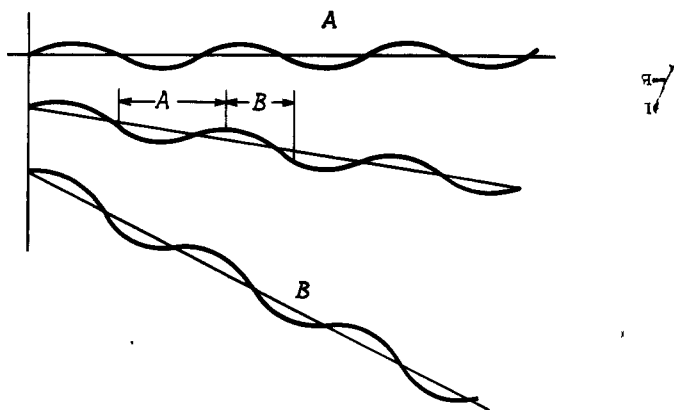


Рис. 2.22. Аналогия фазового движения с "наклонной волной".

Шарик, находящийся в области *A*, совершает устойчивые колебания; шарик, помещенный в область *B*, непрерывно скатывается вниз по склону. Шарик, имеющий начальную скорость (соответствуют несинхронным частицам), могут захватываться только в областях меньших размеров.

в неограниченных пределах. Движение удобно рассматривать на "фазовой диаграмме", на которой величина $d\dot{\phi}/\Omega dt$ построена в зависимости от фазы ϕ (рис.2.23). Эти зависимости нетрудно найти в явном виде, записывая уравнение (2.170) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \dot{\phi}^2 - \frac{2\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) \right\} = 0. \quad (2.173)$$

Интегрируя его, получаем

$$\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_1^2 = \frac{2\Omega_s^2}{\cos \phi_s} \{ \cos \phi - \cos \phi_s - (\phi_1 - \phi) \sin \phi_s \}; \quad (2.174)$$

здесь нижним индексом 1 отмечены начальные значения. Если ϕ_0 — фаза, при которой $\dot{\phi} = 0$, то можно положить $\phi_1 = \phi_0$ и $\dot{\phi}_1 = 0$.

Внутри сепаратрисы движение ограничено, вне ее фаза может увеличиваться до бесконечности. Частицы, которые изображаются точками, лежащими внутри сепаратрисы, называются "захваченными". Их энергия увеличивается со средней скоростью, равной средней скорости увеличения энергии синхронной частицы, находящейся в устойчивой фазе ϕ_s :

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = (\Delta\gamma)_g \omega_g \frac{\sin \phi_s}{2\pi}. \quad (2.175)$$

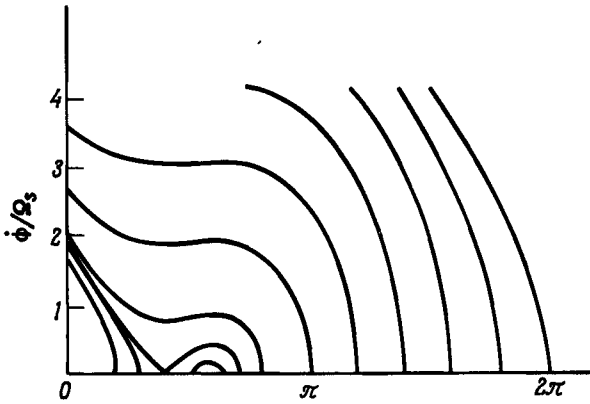


Рис. 2.23. Фазовое движение частиц при $\varphi_s = 100^\circ$ и различных значениях фаз φ_0 , при которых $\dot{\varphi} = 0$.

Точки, расположенные вне сепаратрисы, "проскальзывают" по фазам и соответствуют частицам, энергия которых в среднем не увеличивается. Особая точка на сепаратрисе соответствует неустойчивой фазе $\varphi_u = \pi - \varphi_s$. В этой точке $\sin \varphi_u = \sin \varphi_s$, а $\cos \varphi_u = -\cos \varphi_s$. Полагая в уравнении (2.174) $\varphi_1 = \varphi_u$ при $\dot{\varphi}_1 = 0$, находим уравнение сепаратрисы

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2\Omega_s^2}{\cos \varphi_s} \{ \cos \varphi + \cos \varphi_s + (\varphi_s + \varphi - \pi) \sin \varphi_s \} . \quad (2.176)$$

Решения этого уравнения при различных значениях φ_s построены на рис.2.24. Дифференцируя (2.176), нетрудно убедиться, что

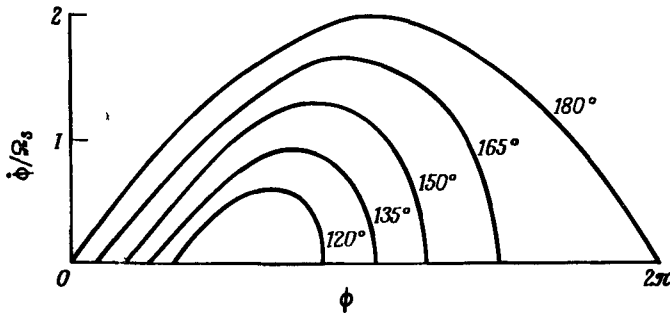


Рис. 2.24. Сепаратрисы фазового движения при различных значениях φ_s .

при $\varphi = \varphi_s$ производная $\dot{\phi}$ достигает своего максимального значения.

Часто более удобно записать уравнение фазовых колебаний в гамильтоновой форме, используя канонические переменные. В этом случае можно сразу же получить в явном виде инварианты фазового пространства, связанные с движением частиц. Каноническими переменными являются W и ϕ , причем

$$W = \int_1^{\gamma} m_0 c^2 d\gamma \cdot \quad (2.177)$$

Гамильтониан записывается следующим образом:

$$H(\phi, W, t) = -\gamma(W) m_0 c^2 + W \omega_g + \frac{qV}{2\pi\hbar} \cos \phi. \quad (2.178)$$

Инвариантом является площадь, занимаемая группой частиц в (W, ϕ) -пространстве. (Более подробно это поясняется в гл. 4.)

Нетрудно проверить, что в циклических установках с круговыми орбитами $W = 2\pi R_0 / hc$, где R_0 — канонический момент импульса. В линейных ускорителях $W = p_z c / \omega$.

8.3. Изменение энергии и радиального положения частиц при фазовых колебаниях; адиабатическое затухание. В процессе фазовых колебаний существенно знать, насколько изменяется энергия и радиальное положение частиц. Такая информация необходима, например, при конструировании систем инжекции частиц из линейного ускорителя в синхротрон, поскольку эффективность захвата зависит как от разброса энергии инжектируемых частиц, так и от амплитуды радиальных колебаний. Исходя из условий $\gamma - \gamma_s \ll \gamma$, $R - R_s \ll R$, которые всегда справедливы на практике, определим соотношение между $\gamma - \gamma_s$, $R - R_s$ и ϕ . Интегрируя уравнение (2.169), найдем основное соотношение, которое понадобится нам в этих расчетах, а именно

$$\frac{m^* C \dot{\phi}}{2\pi \hbar m_0 c} = (\beta\gamma - \beta_s \gamma_s) \approx \frac{1}{\beta} (\gamma - \gamma_s). \quad (2.179)$$

Оно связывает $\dot{\phi}$ с относительным отклонением энергии $\gamma - \gamma_s = \Delta\gamma \ll \gamma$.

Воспользовавшись функцией расширения орбит (2.137), которую можно переписать в виде $\Delta x = \alpha_p \Delta(\beta\gamma) / \beta\gamma = \alpha_p \Delta\gamma / \beta^2 \gamma$, найдем соответствующее уравнение, описывающее радиальное смещение частиц. Исключая $\gamma - \gamma_s = \Delta\gamma$, получаем

$$\Delta x = \frac{m^* C \dot{\phi} \alpha_p}{2\pi \hbar m_0 \beta^2 \gamma c} = - \frac{C \phi \alpha_p}{2\pi \hbar \eta \beta c}. \quad (2.180)$$

Поскольку в аксиально-симметричном ускорителе $C = 2\pi R$ и $\alpha_p = \text{const}$, то в этом случае соотношение (2.180) дает непосредственную связь изменения фазы и радиального отклонения частицы. Благодаря тому, что как Δy , так и $\Delta x/\alpha_p$ пропорциональны $\dot{\phi}$, поведение этих величин прямо иллюстрируется на рис. 2.23 и 2.24. При этом величины, определяемые выражениями (2.179) и (2.180), можно рассматривать как масштабные коэффициенты.

Адиабатическое затухание колебаний можно найти из интеграла действия, связанного с гамильтонианом (2.178). С другой стороны, его можно найти из уравнения движения (2.169), замечая, что в случае малых амплитуд колебаний оно записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} (u \dot{\phi}) + v \phi = 0, \quad (2.181)$$

где u и v — медленно меняющиеся величины. Раскрывая его, получаем уравнение второго порядка, содержащее слагаемые с $\dot{\phi}$, решение которого, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\phi = (uv)^{-1/4} [A \cos(v/u)^{1/2} t + B \sin(v/u)^{1/2} t]. \quad (2.182)$$

Оно описывает адиабатическое затухание колебаний, пропорциональное $(uv)^{1/4}$. Этот метод [метод Венцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ)] пояснен в книге [184], но, к сожалению, полученный в ней результат для затухания фазовых колебаний рассчитан некорректно. Применяя этот результат к уравнению (2.169), при условии $\phi - \phi_s \ll \pi$ находим инвариант, из которого следует закон отклонения фазы от устойчивого значения ϕ_s :

$$I_{\phi} = (\phi - \phi_s) (-\pi^* c^2 \gamma \cos \phi_s)^{1/4}. \quad (2.183)$$

Поскольку величины, стоящие во второй скобке, изменяются адиабатически, разность $(\phi - \phi_s)$ меняется таким образом, что произведение этих двух скобок сохраняется постоянным.

В синхротронах с переменным-градиентной фокусировкой возникает частная задача о фазовом движении при переходе через критическую энергию, когда m^* становится бесконечно большой величиной ($\gamma = \alpha^{-1/2}$). В данном случае адиабатическое приближение не годится. Эта задача обсуждалась Курантом и Снайдером [66], а также более подробно Соренсенсом [276]. Чтобы пройти через критическую энергию, нужно резко изменить фазу ускоряющего поля¹⁾. Проблемы, связанные с этим переходом, были успешно преодолены в больших ускорителях.

¹⁾Изменение должно быть произведено на величину $\pi - 2\phi_s$ в соответствии с тем, что после перехода устойчивая и неустойчивая равновесные фазы ϕ_s и ϕ_u меняются местами. — Прим. ред

Чтобы получить соответствующие адиабатические инварианты для затухания отклонений энергии и радиального положения частицы от равновесных, воспользуемся выражениями (2.179), (2.180) и (2.183), а также условием $\phi_1 \sim \dot{\phi}_1 / \Omega$, где ϕ_1 и $\dot{\phi}_1$ — максимальные значения, достигаемые в течение одного периода колебаний. В результате для инвариантов I_E и I_R получаем следующие выражения:

$$\frac{I_E}{\Delta E} = \frac{c^{1/2}}{\beta(-m^* v \cos \phi_s)} = \frac{\alpha c}{\beta^2 \gamma} \frac{I_R}{\Delta R}. \quad (2.184)$$

Эти результаты справедливы в равной мере для синхротронов, фазотронов и линейных ускорителей, за тем лишь исключением, что для линейных ускорителей I_R не имеет смысла (формула дает $I_R = \infty$).

8.4. Заключительные замечания по фазовой фокусировке и обзор некоторых неявных предположений. В последних двух разделах мы кратко рассмотрели явления автофазировки (фазовой фокусировки). Целью этого рассмотрения было дать представление об основных физических свойствах, а не заниматься подробным и тщательным исследованием. Строго говоря, следовало бы рассмотреть связь бетатронных и синхротронных колебаний, но поскольку отношение их частот Q_s / Q достаточно мало, во многих случаях с достаточной степенью точности можно считать их независимыми. Уравнения связи приведены, например, в книге [66].

В циклических установках, в которых прирост энергии частицы за один оборот относительно мал, радиальное электрическое поле в ускоряющем промежутке обычно оказывает слабое влияние на движение частиц. Однако в линейных ускорителях тяжелых ионов оно приводит к значительным поперечным колебаниям, так что фазовое и поперечное движение частиц приходится рассматривать совместно. Силы, действующие в поперечном направлении, изменяются как γ^{-2} , поэтому они играют существенно меньшую роль в электронных ускорителях, за исключением области предельно низких энергий, в которой их нетрудно скомпенсировать с помощью продольного магнитного поля. Как мы увидим в следующем разделе, невозможно одновременно обеспечить фокусировку в продольном и поперечном направлениях. В настоящее время поперечная фокусировка частиц в протонных линейных и больших ускорителях электронов обычно осуществляется квадрупольными линзами. В небольших установках величину h — номер гармоники ускоряющего поля — обычно выбирают равной единице. Это значение увеличивается, например, до 20 в протонном синхротроне ЦЕРНа на 25 ГэВ и до 1120 в протонном синхротроне Национальной лаборатории

им. Э. Ферми, рассчитанном на 400 ГэВ. Очевидно, что в ускорителе с номером гармоники h пучок группируется ("бунчируется") в h сгустков. Преимущество использования большой величины h заключается в том, что уменьшаются радиальные размеры сгустков. В синхротроне изменение ω_g/h при увеличении магнитного поля должно соответствовать изменению частоты обращения ω . Рассмотрение этой важной задачи, называемой привязкой частоты, выходит за рамки настоящего обсуждения.

Наконец, мы ничего не сказали об обычных циклотронах с постоянной частотой ускоряющего напряжения, хотя в них частицы также ускоряются в переменных полях, когда они проходят через один или несколько ускоряющих промежутков. В таких ускорителях не существует устойчивых фазовых колебаний, поскольку $\alpha = 1/\gamma^2$, т.е. $m^* = \infty$ и, следовательно, $\Omega_s = 0$.

8.5. Поперечная фокусировка в изменяющихся во времени полях; применение в циклотроне. Хотя обычно в циклических ускорителях частиц фокусировка обеспечивается главным образом постоянным или медленно меняющимся полем, не связанным с ускоряющим ВЧ-полем, при некоторых обстоятельствах на поперечную фокусировку влияет поперечная составляющая ускоряющего поля. В циклотроне на нескольких первых оборотах вертикальная электрическая фокусировка проявляется значительно сильнее, чем магнитная, которая в центральной области отсутствует, поскольку в ней магнитное поле однородно и соответственно показатель поля $n = 0$. Вообще говоря, в каждом конкретном ускорителе центральная область имеет свои специфические особенности и рассматривается с общей точки зрения. Чисто аналитические методы являются слишком сложными, чтобы их можно было использовать (особенно, если в них пытаются учесть влияние пространственного заряда), и обычно для расчета траекторий в конкретных полях используют численные методы расчета. Тем не менее имеются приближенные подходы, которые справедливы в области, лежащей не очень близко от центра, и которые позволяют проиллюстрировать физические свойства. В работе Роуза [248] проведено первое обсуждение этих эффектов. Подробный обзор литературы дан Райзером [241]. Оказывается, что с точностью до членов первого порядка фокусирующее действие дуанта можно описать двумя составляющими, каждая из которых характеризуется своей собственной оптической силой. Здесь мы не будем проводить подробный расчет, а воспользуемся результатами работы [241].

Первая составляющая описывает дуант как электростатическую линзу, которая уже обсуждалась в § 3. Ее оптическая сила не зависит от времени и изменяется пропорционально квадрату напряжения,

приложенного к ускоряющему промежутку:

$$\frac{i}{f_1} = \frac{F}{2\pi b} \left(\frac{2qV_g}{m_0 \beta^2 c^2} \right)^2 \sin^2 \phi, \quad (2.185)$$

где b — полувысота линзы в вертикальном направлении, F — табулированный Райзером геометрический фактор, имеющий величину порядка единицы, а ϕ — фаза поля в центре ускоряющего промежутка. В цитируемой работе сдвиг фазы обозначался через θ , причем $\theta = \phi - \pi/2$. К сожалению, для описания движения частиц в циклотронах и синхротронах приняты различные обозначения, и ради однообразия мы воспользуемся последними.

С другой стороны, вторая составляющая существенно зависит от скорости изменения поля во время прохождения частицы через линзу. Для нее мы имеем

$$\frac{1}{f_2} = - \frac{\omega q V_g \cos \phi}{m_0 \beta^3 c^3}. \quad (2.186)$$

При $\phi = \pi/2$ оптическая сила обращается в нуль, как и следовало ожидать. Знак минус указывает на то, что фокусировка происходит, когда $3\pi/2 > \phi > \pi/2$, т.е. когда поле уменьшается. Такой же результат должен быть получен из рассуждений, приведенных в разд. 3.5. На частицу, проходящую через линзу в направлении, совпадающем с направлением ускоряющего поля, вначале действует фокусирующая, а после того, как она пересечет центральную часть линзы, — дефокусирующая сила. В случае изменяющегося поля взаимная компенсация линейных составляющих сил, которая происходит в стационарном поле, не действительна. Результирующая сила оказывается пропорциональной первой степени V_g , в то время как другой член [выражение (2.185)] пропорционален квадрату V_g . В практических случаях преобладающую роль играет второй член, за исключением центральной области циклотрона, в которой приближение геометрической оптики становится неприменимым.

8.6. Поперечная фокусировка в линейных ускорителях. В линейных ускорителях на движение частиц оказывают заметное влияние поперечные составляющие ускоряющего поля. По причинам, которые мы рассмотрим ниже, это представляло собой значительную проблему, пока не появились сильнофокусирующие квадрупольные линзы.

В разд. 8.2 мы показали, что в линейном ускорителе для обеспечения фазовой устойчивости фаза синхронной частицы должна находиться в нарастающем поле. Однако в предыдущем разделе было найдено, что для получения вертикальной фокусировки поле должно

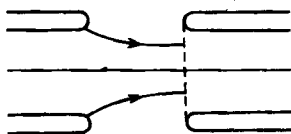


Рис. 2.25. Сетка на входе в дрейфовую трубку линейного ускорителя, позволяющая обеспечить радиальную фокусировку частиц независимо от фазы переменного поля.

быть спадающим. Оказывается, с полной определенностью можно показать, что в линейном ускорителе при условии, что изменение энергии частицы при пересечении одного ускоряющего промежутка мало и что в области ускорения не имеется каких-либо сторонних зарядов, невозможно одновременно обеспечить радиальную и фазовую фокусировку (см., например, работу Макмиллана [197]). Чтобы доказать это, достаточно воспользоваться преобразованиями Лоренца и перейти в систему координат, движущуюся со скоростью, равной фазовой скорости волны. В этой системе отсчета составляющие магнитного поля обращаются в нуль и, согласно теореме Ирншоу, движение частиц не может быть устойчивым сразу в продольном и поперечном направлениях. В протонных ускорителях, в которых трудно создавать внешние фокусирующие поля соответствующей напряженности, это накладывало жесткие ограничения до тех пор, пока не стал известен принцип сильной фокусировки.

Однако, как и в случае электростатических линз, фокусировку частиц можно усилить, если ввести в пучок сетки или фольги. Из рис. 2.25 видно, что наличие сетки, закрывающей вход в дрейфовую трубку, обеспечивает фокусировку частиц независимо от фазы ускоряющего поля. Фокусировка сетками теперь не применяется, поскольку стало возможным вводить непосредственно в конструкцию дрейфовых трубок квадрупольные магнитные линзы. Они создают поля достаточно высокой напряженности, позволяющие компенсировать дефокусировку частиц. Очевидно, что анализ этой задачи с учетом как зависящей от фазы дефокусировки ускоряющим полем, так и квадрупольной переменного-градиентной фокусировки представляет большую сложность, поскольку параметры пучка изменяются вдоль ускорителя.

Иногда в электронных ускорителях на низкие энергии для фокусировки частиц применяют продольное магнитное поле. При высоких энергиях, когда дефокусировка является слабой, имеет смысл разместить квадрупольные линзы в промежутках между ускоряющими секциями.

8.7. Переменно-фазовая фокусировка. Вскоре после того, как было введено понятие переменного-градиентной фокусировки и она была практически реализована в виде чередующихся одинаковых элементов, которые фокусируют частицы в различных направлениях и обес-

печивают результирующую фокусировку, было предложено периодически изменять фазу ускоряющего поля вдоль ускорителя посредством модулирования структуры. При этом поперечная и фазовая фокусировки должны быть переменными, в результате чего должна обеспечиваться эффективная фокусировка в обоих направлениях. Практически фокусировка, полученная этим методом, оказывается довольно слабой, а условия на устойчивость движения являются жесткими. В действующих ускорителях такая фокусировка до сих пор не применялась. Более удовлетворительной альтернативой оказалось применение магнитных квадруполов.

Фокусировка сетками и переменнo-фазовая фокусировка более подробно описаны Буссаром [30] (там же имеются ссылки на соответствующие работы). В этой работе обсуждаются также конструкции устройств, в которых концы дрейфовых трубок не обладают аксиальной симметрией и выполнены таким образом, чтобы можно было создавать высокочастотные квадрупольные поля.

Л.8. Замечания и литература. Теория захвата частиц была впервые подробно разработана Бомом и Фолди [28], а также другими авторами вскоре после открытия в 1944 – 1945 гг. принципа работы синхротрона Векслером, а также независимо от него – Макмилланом. Она изложена во многих статьях, упомянутых в разд. Л.7. Коломенский и Лебедев [151], а также Брук [44] используют несколько другой подход и в своих работах рассматривают ее более подробно, чем в настоящей книге. Авторы большое внимание уделяют обсуждению адиабатических изменений и задаче перехода через критическую энергию. Лихтенберг [182] дает достаточно общий подход к решению задачи, основанный на понятиях фазового пространства и адиабатического изменения параметров. Такие подробные исследования требуются при создании инжекторов для ускорителей. Согласование фазовых объемов, которое является необходимым для этого условием, мы рассмотрим в разд. 3.2 гл.4 в связи с исследованием систем транспортировки пучков.

Вопросы захвата частиц и фокусирующих свойств поперечных составляющих полей являются основными в линейных ускорителях. Здесь снова важную роль играют адиабатические изменения, поскольку параметры, определяющие движение частиц, непрерывно меняются вдоль ускорителя. Действительно, в течение одного периода фазовых колебаний вследствие очень высокого темпа ускорения могут произойти весьма значительные изменения. Из-за быстрого изменения параметров, а также вследствие более сложной взаимосвязи ускоряющих и фокусирующих сил теория этих ускорителей представляет собой довольно специальную область и нередко требует применения численных методов. В данной главе мы рассмотрели основные принципы динамики одиночной частицы.

Однако читатель, интересующийся этим вопросом более подробно может обратиться к всеобъемлющему обзору [16]. В нем рассматриваются все более ранние работы или приводятся ссылки на них. Интерес представляет также сборник трудов под редакцией Нейла [21], посвященных исследованиям на Стэнфордском "двух-мильном" линейном ускорителе.

ЛАМИНАРНЫЕ ПУЧКИ С СОБСТВЕННЫМИ ПОЛЯМИ

§ 1. Введение

Свойства пучков, рассмотренных до сих пор, определялись внешними фокусирующими полями и не зависели от интенсивности пучка. Однако при достаточно больших токах на характеристики пучка могут существенно влиять как заряд пучка, так и его ток. В свою очередь поля, создаваемые распределением и движением зарядов изменяют движение частиц. Это приводит к требованию самосогласованного описания пучка, которое трудно выполнить для любых конфигураций, за исключением самых простейших.

В данной главе мы рассмотрим ламинарный поток, в котором распределение скоростей частиц определено однозначно в каждой точке. В таком потоке траектории частиц не пересекаются. В параксиальной системе поток моноэнергетических частиц из точечно источника ламинарен всюду, за исключением самого источника и последующих изображающих точек, в которых пересекаются все траектории. Хотя чисто ламинарный поток практически получить невозможно, во многих случаях его можно использовать как хорошее приближение. С помощью этого приближения нередко удается достаточно легко построить простые модели пучков, обладающих собственными полями, которые иллюстрируют многие основные свойства и особенности реальных пучков. Более общий случай, в котором для определения условий в точке надо задавать функцию распределения, рассматривается в следующей главе после введения соответствующих физических понятий, необходимых для рассмотрения подобных задач. Здесь же мы последовательно изучим ряд простых идеализированных типов потока, большинство которых соответствуют идеальным предельным случаям, встречающимся при расчете ламп СВЧ и ускорителей частиц, причем рассмотрим только установившиеся конфигурации, переходные же процессы и волновое движение оставим до гл. 5.

При анализе нам потребуются несколько характерных параметров. Определим их здесь, даже если полный смысл этих параметров прояснится лишь позже. Параметр Будкера ν равен произведению числа частиц N , приходящихся на единицу длины пучка, и классического радиуса частицы r_0 :

$$\nu = \frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = Nr_0. \quad (3.1)$$

Для однородного пучка радиусом a , имеющего объемную плотность частиц n ,

$$v = \frac{a^2 n q^2}{4 \epsilon_0 m_0 c^2} = \frac{\gamma}{4} \frac{a^2 \omega_p^2}{c^2}, \quad (3.2)$$

где ω_p — плазменная частота пучка, определяемая как $\omega_p^2 = n q^2 / \gamma \epsilon_0 m_0$ и обсуждаемая ниже в разд. 2.4 гл. 6. Релятивистский фактор γ , входящий в выражение для плазменной частоты, обусловлен тем, что частота измеряется в системе координат, движущейся вместе с электронами и в которой плотность частиц уменьшается в γ раз. Разумеется, при этом предполагается, что значения γ и β для всех электронов одни и те же.

С релятивистским фактором тесно связан характерный ток Альвена [1]

$$I_A = \left(\frac{4\pi \epsilon_0 m_0 c^3}{q} \right) \beta \gamma = \left(\frac{c q}{r_0} \right) \beta \gamma, \quad (3.3)$$

где β и γ относятся к частицам пучка. В случае когда этими частицами являются электроны, величина в скобках равна $-17\,000$ А. Используя параметр Будкера, можно записать

$$\frac{I}{I_A} \approx \frac{v}{c} \quad (I \ll I_A). \quad (3.4)$$

Это соотношение выполняется только приближенно, поскольку βc есть скорость отдельного электрона, а не средняя величина. Оно справедливо в параксиальном приближении при условии, что γ все еще относится к отдельным частицам, а не определяется как $(1 - \bar{\beta}^2)^{-1/2}$, где $\bar{\beta}$ — средняя скорость частиц. В параксиальном приближении при ультрарелятивистских энергиях частиц $\beta \approx \bar{\beta}$, но величина $(1 - \bar{\beta}^2)^{1/2} \gamma$ может быть много больше единицы. Этот вопрос подробно обсуждался автором в статье [172], в которой рассмотрены разнообразные потоки частиц, характеризующиеся параметрами v и $\epsilon = (1 - \bar{\beta}^2)^{-1/2} - 1$.

§ 2. Свойства различных типов потока

2.1. Введение. В данном параграфе мы приступим к систематическому изучению многообразия типов ламинарного потока, в которых существенную роль играют собственные поля. Некоторые из этих потоков будут состоять из зарядов только одного знака. В других случаях будем предполагать, что они нейтрализованы неподвижными зарядами противоположного знака. Известно, что собственное магнитное поле заряженных потоков играет существенную

роль лишь в случае релятивистского движения частиц. Когда же заряд пучка полностью или почти полностью нейтрализован, собственное магнитное поле нужно учитывать даже в нерелятивистских случаях. Иногда оказывается, что учет релятивизма в расчетах ведет к их значительному усложнению, в частности когда траектории частиц отличаются от парааксиальных. В связи с этими некоторые результаты, особенно те, которые представляют практический интерес в этой области, получим в нерелятивистском приближении.

2.2. Цилиндрический пучок в бесконечном магнитном поле. В приближении бесконечного магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, \infty)$, когда любым движением частиц в поперечном направлении можно пренебречь, структура пучка определяется распределениями скорости и плотности частиц по его поперечному сечению. Модель пучка была бы строго самосогласованной даже при совершенно произвольном выборе этих распределений. Чтобы сделать задачу интересной, введем некоторые ограничения.

Рассмотрим цилиндрически-симметричный пучок радиусом a , состоящий из зарядов с плотностью n движущихся со скоростью βc , причем как n , так и β зависят от радиуса. Обозначим через N число частиц, приходящихся на единицу длины пучка, а через I полный ток пучка. Очевидно, можно записать

$$N = \int_0^a 2\pi r n(r) dr, \quad I = \int_0^a 2\pi q r n(r) \beta(r) c dr. \quad (3.5)$$

Применяя теорему Гаусса к пучку, имеющему единичную длину, и используя тот факт, что $E_z = 0$, нетрудно вычислить радиальное электрическое поле. Таким образом,

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r r n dr, & r < a, \\ \frac{Nq}{2\pi\epsilon_0 r}, & r > a. \end{cases} \quad (3.6)$$

Потенциал пучка относительно "земли", удаленной на бесконечность, имеет логарифмическую особенность. В этом смысле пучок отличается от заряда, имеющего конечные размеры в z -направлении. Начало нулевого отсчета потенциала можно выбрать произвольным. Выберем его таким образом, чтобы произведение заряда частицы на потенциал, вычисленный на границе пучка, равнялось кинетической энергии частиц с обратным знаком, т.е.

$$q\phi_a + (\gamma_a - 1)m_0\sigma^2 = 0, \quad (3.7)$$

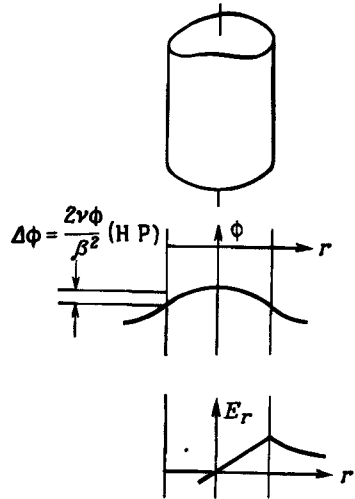


Рис. 3.1. Распределения поля и потенциала внутри и вне положительно заряженного пучка на большом расстоянии от источника.

где индексом a обозначены величины, вычисленные при $r = a$. (Ниже мы будем использовать это обозначение и для других переменных.) Уравнение (3.7) означает, что если частицы испущены из источника с нулевой скоростью, то его потенциал равен нулю. На больших расстояниях от источника потенциал на границе пучка отличается от потенциала в его центре вследствие существования полей пространственного заряда самого пучка. На рис. 3.1 показана соответствующая картина поля и потенциала. Следовательно, скорость частиц зависит от радиуса и для данной функции $n(r)$ можно найти $\beta(r)$ и наоборот. В качестве примера вычислим параметры пучка, плотность тока которого не зависит от радиуса. Для частицы, находящейся в пучке на радиусе r ,

$$(\gamma-1)m_0c^2 = (\gamma_a-1)m_0c^2 - \int_r^a qE_r dr. \quad (3.8)$$

Воспользовавшись выражением (3.6), получаем

$$\gamma = \gamma_a - \frac{q^2 n_a \beta_a}{\epsilon_0 m_0 c^2} \int_0^a \frac{1}{r} \int_0^r \frac{r_1}{\beta} dr_1 dr. \quad (3.9)$$

Если разность потенциалов мала, так что изменением β от r можно пренебречь, то последнее выражение можно переписать в виде

$$\gamma_a - \gamma \approx v(1 - \frac{r^2}{2}), \quad \gamma_a - \gamma \ll \gamma. \quad (3.10)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр Будкера ν , определенный в § 1. Как будет видно из дальнейшего изложения, использование в анализе этого параметра, а также β и γ вместо традиционных напряжения и тока часто позволяет простым и изящным способом провести сравнение ограничений и свойств различных моделей пучка. В этих единицах ток пучка в амперах и "напряжение" в пучке определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_0 c^3}{q} \right) \nu \bar{v}, \\ \nu &= \phi = - \frac{(\gamma-1)m_0 c^2}{q} \approx \\ &\approx - \frac{\beta^2 m_0 c^2}{2q} \quad (\text{НР}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где черта означает среднюю величину. Из соотношения (3.10) видно, что если разность потенциалов между внешней границей и центром пучка мала, то она равна просто $\nu m_0 c^2$. Критерий малости разности потенциалов имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \nu &\ll \gamma - 1, \\ \nu &\ll \frac{1}{2}\beta^2 \quad (\text{НР}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Следует заметить, что эти условия зависят только от числа частиц, приходящихся на единицу длины пучка, и не зависят от плотности тока и радиуса пучка. Второе условие, выраженное в амперах и вольтах, возможно, является более известным. Используя уравнение (3.7) и вводя "первеанс" k , это условие можно переписать в виде

$$k = \frac{|I|}{|\phi|^{3/2}} \ll \frac{4\pi\epsilon_0 |2q|^{1/2}}{m_0^{1/2}}. \quad (3.13)$$

В случае электронов величина k равна $66 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2}$. Первеанс можно рассматривать как меру влияния пространственного заряда на свойства потока. Он представляет масштабный коэффициент, гарантирующий постоянство характеристик пучка при изменении напряжения. Очевидно, что ток пучка ограничен величиной, имеющей порядок правой части неравенства (3.13), поскольку при некотором значении ν , близком к $\gamma_a - 1$, потенциал на оси пучка уменьшается до нуля и, следовательно, скорость электронов также стремится к нулю. Обычно в действительности рассматривается пучок радиусом a , который находится в

цилиндрической камере радиусом b , имеющей проводящие стенки. Нетрудно показать, что разность потенциалов между стенкой камеры и осью пучка превосходит разность потенциалов между границей пучка и осью в $[1 + 2 \ln(b/a)]$ раз.

При однородном распределении плотности тока по сечению пучка, так что $n\beta$ не зависит от r , из выражения (3.9) можно найти скорость β_c как функцию от радиуса. Записывая это выражение в дифференциальной форме и подставляя в него ток $I = \pi a^2 q_c(n\beta)$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\gamma m_0 c^2) \right\} = \frac{q^2 (n\beta)}{\epsilon_0 \beta}, \quad (3.14)$$

решение которого в общем случае имеет сложный вид. Поэтому здесь мы рассмотрим только решения, соответствующие нерелятивистскому и ультрарелятивистскому приближениям. В первом случае уравнение (3.14) можно записать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\beta r \frac{d\beta}{dr} \right] = \frac{q^2 (n\beta)}{\epsilon_0 m_0 c^2} \frac{1}{\beta}. \quad (3.15)$$

Оно имеет следующее частное решение при условии, что на оси $\beta = 0$:

$$\beta = \left\{ \frac{9q^2 (n\beta)}{8\epsilon_0 m_0 c^2} \right\}^{1/3} r^{2/3}. \quad (3.16)$$

Интегрируя по сечению пучка, нетрудно найти число частиц, входящих на единицу длины пучка. Следовательно, параметр Будкера ν можно определить, зная скорость частиц β_a на границе пучка. В результате получаем простое выражение:

$$\nu = \frac{1}{3} \beta_a^2. \quad (3.17)$$

Для электронов это соответствует первеансу $k = 29,3 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{B}^{-3/2}$. Вблизи оси пучка, описываемого этим решением, частицы имеют очень низкую скорость, но высокую плотность. Следовательно, эти частицы дают небольшой вклад в ток, но существенно влияют на разность потенциалов между границей и осью пучка. Равенство потенциала нулю на оси пучка не является условием достижения максимального тока. Максимальный ток достигается, когда потенциал в центре составляет 0,17 потенциала на границе пучка, что соответствует отношению скоростей 0,42. В этом случае первеанс равен $32,4 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{B}^{-3/2}$. Гирс [228, с. 164] дает более

подробный анализ этого решения вместе с графиками, иллюстрирующими изменение потенциала; в этой же книге приведены ссылки на ранее опубликованные работы.

В ультрарелятивистском пределе ($\gamma_a \gg 1$) решение имеет относительно простой вид. Для всех частиц, за исключением тех, которые движутся вблизи оси, $\beta \approx 1$. Последние дают небольшой вклад в ток, и, следовательно, предположение о том, что для всех частиц $\beta = 1$, а на оси $\gamma = 1$, вносит небольшую погрешность в определение тока. Из выражения (3.10), при выводе которого предполагалось, что β не зависит от r , сразу же следует, что предельный ток достигается, когда

$$v = \gamma_a \quad \text{или} \quad I = I_A. \quad (3.18)$$

Если заряд пучка нейтрализован присутствующими в нем зарядами противоположного знака, то, очевидно, эти ограничения становятся менее жесткими. Если "коэффициент зарядовой нейтрализации" f , равный отношению нейтрализующего заряда к заряду пучка, однороден по сечению, то предельный ток возрастает в $(1-f)^{-1}$ раз. Однако, как мы увидим ниже (см. разд. 3.2 гл. 6), при этих условиях могут возникать другие эффекты, приводящие к динамической неустойчивости. Хотя предположение о бесконечности магнитного поля B_z является идеализацией, все же имеет смысл рассмотреть задачу об инжекции пучка с очень большим током, чтобы посмотреть, как будут проявляться эти ограничения. Прежде чем приступить к решению этой задачи, выведем закон Чайлда для ограниченного пространственным зарядом потока, распространяющегося между двумя параллельными плоскостями, в предположении, что тепловой разброс скоростей отсутствует, а затем обсудим некоторые его следствия.

2.3. Плоский диод. Поток заряда в плоской системе описывается уравнениями

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = - \frac{nq}{\epsilon_0}, \quad nq\beta c = i, \quad (3.19)$$

$$\gamma = 1 + \phi/\phi_0,$$

где i — плотность тока, а магнитное поле $\mathbf{B}(0, 0, \infty)$ предполагается достаточно большим, чтобы подавить влияние собственного магнитного поля тока. В действительно бесконечной системе собственное магнитное поле равно нулю, поскольку нет обратного пути для зарядов. Конвекционный ток заряженных частиц компенсируется током смещения, возникающим вследствие переноса зарядов, так что $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, а следовательно, и $\mathbf{B} = 0$. Исключая из уравнений (3.19) величины n и ϕ , получаем

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} = \frac{nq^2}{\epsilon_0 m_0 c^2} = \frac{q^2 Z_0}{m_0 c^2} \frac{i}{\beta}, \quad (3.20)$$

где Z_0 — импеданс свободного пространства. Это уравнение можно решить аналитически только в нерелятивистском случае, когда $\gamma = 1 + \beta^2/2$. При этом левую часть уравнения можно переписать в виде $(1/2)(d^2\beta^2/dz^2)$. Умножая обе части уравнения на $2\beta(d\beta/dz)dz$ и затем его интегрируя, получаем

$$(d\beta^2/dz)^2 = (8qZ_0i/m_0c^2)(\beta - \beta_0); \quad (3.21)$$

здесь β_0 — постоянная интегрирования. В данном случае $\beta = 0$ на катоде, т.е. при $z = 0$. Если поток ограничен пространственным зарядом, то электрическое поле на катоде также равно нулю, так что $d\beta/dz = \beta_0 = 0$. Тогда уравнение (3.21) принимает вид

$$\beta^{1/2} \frac{d\beta}{dz} = \left(\frac{2qZ_0i}{m_0c^2} \right)^{1/2}. \quad (3.22)$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$\beta^3 = \frac{9qZ_0i}{2m_0c^2} z^2. \quad (3.23)$$

Это и есть закон Чайлда. Обычно его записывают через потенциал¹⁾:

$$\frac{iz^2}{\phi^{3/2}} = 2,34 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2}. \quad (3.24)$$

Если в некоторой точке $z = d$ расположена проводящая плоскость, потенциал которой равен ϕ , то из (3.24) можно определить i . Вычислив $\int (dz/\beta c)$, нетрудно найти время, которое требуется заряду, чтобы пересечь диод. Если результат выразить через плазменную частоту, соответствующую значению n при $x = d$, то время дается очень простым выражением:

$$t = 1/2 \omega_p.$$

Точное решение уравнений (3.19) в релятивистском случае было получено Джори и Трайвелписом [135]. Оно выражено через эллиптические интегралы и в общем случае имеет довольно сложный вид. Приближенное решение можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{iZ_0q}{m_0c^2} \right)^{1/2} z = (\gamma+1)^2 - 0,85. \quad (3.25)$$

¹⁾ Так же, как и в условии (3.13), в этом и последующих аналогичных выражениях рассматриваются модули величин.

Оно дает погрешность 5% при $\gamma = 2$, но с увеличением γ погрешность быстро уменьшается. В работе [135] приведены также графики, иллюстрирующие решения в случае, когда ток ограничен. Встречающиеся на практике системы с большим значением γ относятся как раз к этому типу.

Чтобы инжектировать пучок, проводящую плоскость можно в принципе заменить сеткой, через которую частицы будут проходить со скоростью βc . Посмотрим теперь, что произойдет, если в отсутствие пучка область за сеткой имеет такой же потенциал, что и сетка. При прохождении частиц через сетку в области за ней образуется пространственный заряд. Он создает тормозящее поле, замедляющее электроны. В силу симметрии электроны остановятся за сеткой на расстоянии d . Если в этой точке ($z = 2d$) разместить "поглощающий" катод, потенциал которого равен нулю, то система должна быть симметричной по отношению к полям, но не к потоку заряда. В отсутствие такого поглотителя электроны отражаются обратно к катоду и область, расположенная за плоскостью отражения, будет иметь нулевой потенциал. Если же на расстоянии $z > 2d$ разместить другую проводящую плоскость, потенциал которой положителен, то часть зарядов отразится обратно, а часть пройдет через плоскость нулевого потенциала и достигнет анода. Плоскость нулевого потенциала называют "виртуальным катодом". Именно такое поведение предсказывается уравнениями (3.19). Более подробно эта задача обсуждается в книге [21], где показано, что это не единственное решение для потока частиц между сеткой и второй плоскостью. Существует второе решение с минимумом потенциала, который, однако, не достигает нуля, так что в этом случае никаких отраженных электронов нет. Что происходит в действительности, сказать трудно. Результаты зависят как от наличия частиц с тепловыми скоростями, так и от конечной геометрии, которая значительно затрудняет расчеты. При наличии изменений во времени поток часто оказывается неустойчивым и в нем возбуждаются колебания. Это важная и обширная область исследований, затрагивающая все упомянутые здесь вопросы. В книге [21] дается последовательное рассмотрение ее и приводится большое количество ссылок на литературу.

До сих пор мы предполагали, что поток плоский. В нерелятивистском случае собственное магнитное поле не играет существенной роли и при отсутствии внешнего поля поведение потока определяется граничными условиями. Если расстояние между катодом и анодом мало по сравнению с поперечными размерами системы, то граничные условия соответствуют плоскому случаю. Цилиндрический и сферический потоки между электродами соответствующих конфигураций, которые исследовались Ленгмюром, обладают похожими свойствами. Этот тип потока и его применение при создании элект-

тронных пушек описан Пирсом [228]. Хотя этот вопрос представляет значительный интерес, его изучение выходит за рамки нашей книги. Очень подробное изложение теории расчета пушек различных конфигураций имеется в книге [147], в которой приведены также ссылки на более ранние работы.

В нерелятивистском случае при отсутствии внешнего магнитного поля на частицы действует сила со стороны собственного магнитного поля, которая направлена в сторону оси. Она может привести к сильному сжатию потока. При этом поток будет значительно отличаться от плоского. Как мы увидим в разд. 2.5, в дрейфующем заряженном цилиндрическом пучке, который имеет бесконечную протяженность в аксиальном направлении, эта магнитная сила слабее расталкивающей электростатической силы и пучок рассыпается. Однако в диоде, в котором велико влияние "концов" и параксиальное уравнение далеко не всегда справедливо, радиальная составляющая электрического поля относительно мала, вследствие чего пучок сильно сжимается. Простое аналитическое рассмотрение этого процесса вообще невозможно, поэтому задача решалась с помощью численных методов. Этот вопрос обсуждался Поуки и Топфером [236], которые дали общую теоретическую постановку задачи и проанализировали ее связь с параксиальным приближением. В работе этих авторов имеется также ряд результатов, полученных численными методами, для пучков с различными значениями v/γ . В работе [311] дается обзор работ, посвященных применению таких сжатых пучков к проблеме термоядерного синтеза. Кридон [69] дал более общую постановку задачи и рассмотрел другие конфигурации электродов. Все эти авторы дают ссылки как на ранее опубликованные, так и на последние экспериментальные работы.

Поскольку интенсивность релятивистских пучков с $v/\gamma \sim 1$ велика, их можно получать только в коротких импульсах длительностью порядка 10^{-8} с. Поэтому в экспериментах такие пучки нестационарны и поведение их очень сложное. В силу необходимости диоды с холодноэмиссионными катодами имеют значительно более сложные конфигурации, чем рассматриваемая плоская система. Кроме того, на поведение потока влияет нестационарная плазма, которая образуется на электродах в течение импульса тока пучка.

В то время, когда писалась данная книга, исследования в этой области продолжали бурно развиваться; поэтому мы не будем делать попыток, для того чтобы дать исчерпывающий обзор ее современного состояния.

2.4. Инжекция цилиндрического пучка. Здесь мы вновь вернемся к качественному обсуждению задачи инжекции цилиндрического пучка. Предположим, что в плоскости, расположенной в точке $z = d$, имеется закрытое сеткой отверстие радиусом a , центр которого

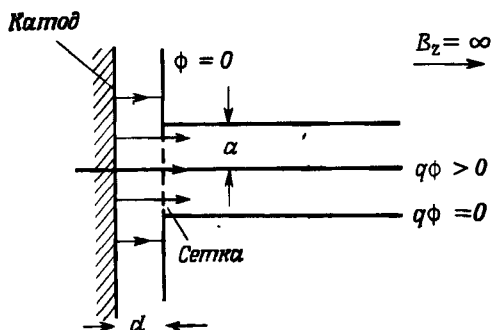


Рис. 3.2. Инжекция пучка с катода через сетку в трубу радиуса a .

На сетке потенциал по всему сечению пучка постоянный. Ниже по течению пучок электронов "вминается" в центре, и частицы, идущие ближе к оси, замедляются.

лежит на оси z . Распределение потенциала за отверстием теперь зависит от r . Замедление частиц, которое наблюдалось в бесконечной системе, имеет место и здесь, однако первыми останавливаются частицы, идущие по оси. Внешние электроны проходят дальше, и положение точки отражения частиц зависит от r . Естественно, что любые проводники, находящиеся вблизи пучка, влияют на распределение потенциала и, следовательно, поведение потока.

При описании пучка в разд. 2.2 мы предполагали, что на его внешней границе потенциал равен нулю. Это возможно при условии, если пучок полностью заполняет цилиндрическую камеру, соединенную с плоскостью, как показано на рис. 3.2. Заряды, проходящие через сетку при $r = a$, не чувствуют тормозящего поля; однако на любом другом радиусе вблизи сетки тормозящее поле всегда присутствует. Будем считать, что инжектированный ток однородно распределен по сечению. Тогда на расстояниях от сетки, больших нескольких радиусов a , пучок можно достаточно хорошо описать с помощью модели, рассмотренной в разд. 2.2. Если инжектируемый ток непрерывно увеличивается (благодаря уменьшению расстояния d или с помощью промежуточной сетки, расположенной между катодом и плоскостью $z = d$), то трудно сказать, что произойдет, когда потенциал на оси упадет ниже критического значения, соответствующего максимальному первеансу. Если в каком-либо месте образуется виртуальный катод, от которого электроны отражаются обратно к катоду, то можно ожидать резкого изменения потенциала. Это могло бы вызвать внезапное уменьшение тока, возможно, до значения, определяемого решением (3.16) при $\phi = 0$ на оси. Если устранить сетку и позволить зарядам проходить через отверстие, то можно было бы получить более

"практическую" конфигурацию (в том смысле, что она несколько лучше соответствует реальным устройствам). В такой системе тормозящее поле будет проникать в область $z < d$ и приводить к уменьшению плотности тока, особенно в приосевой области. Поэтому на больших расстояниях z плотность тока на внешней границе пучка будет больше, чем на оси. В конечном счете, как и прежде, должно было бы достигаться условие образования виртуального катода, хотя совсем не очевидно, что оно всегда соответствовало бы разрывному изменению потенциала. Например, нетрудно показать, что в модели пучка, в которой не $\lambda\beta$, а β не зависит от радиуса, максимальный ток достигается при $\varphi = 0$ на оси и $v = \beta_a^2/2$.

Обсуждение этих примеров, носящих отчасти академический характер, на самом деле помогает пониманию явлений, происходящих в значительно более сложных практических системах. В них часто наблюдаются перескакивание от одних условий работы к другим и колебания приблизительно на плазменной частоте. Как обсуждалось в тексте после уравнения (3.22), плазменная частота по порядку величины обратно пропорциональна времени движения частицы между катодом и виртуальным катодом. Гистерезисные эффекты, ясно свидетельствующие о существовании двух устойчивых состояний, исследовались в работе [111], а релаксационные колебания между двумя стационарными состояниями — в работе [292].

Некоторые конструкции применяемых на практике электронных пушек с "иммерсионными" катодами имеют много общего с системами, которые мы рассмотрели выше. Отличия заключаются в следующем:

- 1) Поле не является бесконечным.
- 2) Поперечные размеры катода ограничены. Однако электроды можно разместить таким образом, что поля на границе пучка будут соответствовать полям в бесконечной системе, и поток поэтому остается тем же самым.
- 3) Из-за наличия тепловых скоростей у эмиттированных электронов граница пучка и положение виртуального катода размыты.
- 4) Пучок не полностью заполняет камеру. (Это изменяет потенциал пучка и уменьшает максимальный ток).
- 5) Очень часто, чтобы уменьшить плотность тока на катоде, но сформировать сходящийся поток, используются катоды, форма которых близка к сферической. Отверстие в аноде, через которое проходит пучок, действует как апертурная электростатическая линза.

В предыдущем разделе мы упоминали об электронных пушках со сферическим и цилиндрическим потоком в отсутствие внешнего магнитного поля. С помощью соответствующей переходной области

пучок из такой пушки можно ввести в удерживающее магнитное поле. Промежуточным случаем между пушками с "экранированным" и "иммерсионным" катодами являются пушки, в которых некоторая часть магнитного потока, пронизывающего пучок, проходит через катод. В § 3 мы вновь рассмотрим этот вопрос, после того как изучим распространение пучка частиц в конечном магнитном поле.

Мы не будем здесь обсуждать многочисленные конструкции электронных пушек и по необходимости значительно более сложные конструкции источников положительных и отрицательных ионов, но в разд. 4 дадим несколько ссылок на соответствующие работы.

На практике в релятивистском случае собственное магнитное поле оказывает существенное влияние на поток частиц. Как уже отмечалось в конце разд. 2.3, исследованию пучков частиц, релятивистский фактор которых составлял $\gamma = 2-10$, а $v/\gamma \sim 1$, было посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ.

Теоретические работы по необходимости сводятся к численному моделированию. В то время, когда писалась настоящая книга, основные процессы были уже поняты, хотя многие детали остались неясными. Мы вернемся к таким пучкам после обсуждения сжатых пучков в разд. 2.6.

2.5. Ленточные пучки. Проведенный в предыдущем разделе анализ можно непосредственно обобщить на случай ленточных пучков. Однако здесь имеются два существенных отличия. Во-первых, собственное электрическое поле вне такого пучка однородно, а не спадает как $1/r$. Это означает, что если пучок не полностью заполняет пространство между заземленными плоскостями, то разность потенциалов между плоскостями и пучком может превосходить изменение потенциала в самом пучке и, очевидно, оказывать более существенное влияние. Во-вторых, чем меньше ширина пучка, тем больше его первеанс в расчете на единицу длины. Если пучок имеет ширину $2b$ и распространяется между плоскостями, потенциал которых задан, то первеанс пучка единичной длины равен $2b$ и не зависит от расстояния между плоскостями, что можно было бы предположить, исходя из аналогии с цилиндрической системой, в которой при данном значении тока первеанс не зависит от диаметра. Свойства ленточного пучка, имеющего квадратное сечение, примерно аналогичны свойствам пучка кругового сечения. Например, с (3.6) и (3.10) можно сравнить следующие выражения для такого пучка квадратного сечения:

$$E_x = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} \int n \, dx, & x < b, \\ \frac{Nq}{4\epsilon_0 b}, & x > b, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\gamma_b - \gamma = \pi v(1 - x^2/b^2), \quad (3.27)$$

где N и v соответствуют пучку квадратного сечения со стороной $2b$. Второе выражение получено при условии однородности величины λ .

2.6. Свойства пучка в отсутствие внешних полей. Важным свойством пучка заряженных частиц является его расплывание (или самосжатие) под действием собственных полей. По-видимому, простейшую конфигурацию дает однородный пучок, образованный параллельно движущимися частицами и инжектируемый в свободное от полей пространство. Если ток пучка пренебрежимо мал, то пучок сохраняется цилиндрическим и однородным, т.е. если бы источником частиц был плоский диод, в аноде которого имелось бы закрытое сеткой отверстие радиусом a , то радиус пучка оставался бы постоянным и равным a .

Рассмотрим вначале случай, когда разность потенциалов между центром и границей пучка, а следовательно, и любые поля в направлении оси z малы и ими можно пренебречь. Допустим также, что радиальные силы пространственного заряда могут быть частично скомпенсированы зарядами противоположного знака, имеющими однородное распределение внутри пучка и не имеющими составляющей скорости вдоль оси z . Действие такой нейтрализации сводится к уменьшению сил электростатического расталкивания в $1-f$ раз, где f — отношение нейтрализующего заряда к заряду пучка, который также предполагается равномерно распределенным по сечению пучка. Нейтрализующие заряды находятся в поперечной параболической потенциальной яме и, следовательно, будут приобретать поперечные скорости. В разд. 3.3 гл. 4 мы рассмотрим распределение скоростей, необходимое для реализации в данном случае однородного пространственного распределения частиц. Воспользуемся также параксиальным приближением, т.е. потребуем, чтобы z было мало. Смысл этого приближения станет очевидным после проведения расчетов.

В соответствии с указанными предположениями на частицы пучка действуют только радиальные силы. Это сила электростатического расталкивания, направленная наружу по радиусу и равная $(1-f)Nq^2r/2\pi a^2 \epsilon_0$, и "сжимающая" сила, направленная внутрь по радиусу и обусловленная движением заряда в собственном магнитном поле пучка. Здесь r — это радиус, на котором находится электрон, а a — радиус пучка. При заданном значении линейной плотности N как магнитное поле, так и заряд пропорциональны β . Нетрудно проверить, что сила, действующая на

заряд, дается выражением

$$\frac{\beta^2 N q^2 \sigma^2 r}{2\pi a^2 \mu_0} = \frac{\beta^2 N q^2 r}{2\pi a^2 \epsilon_0}.$$

Приравнявая сумму сил электростатического расталкивания и магнитного сжатия поперечному ускорению, имеем

$$\gamma m_0 \ddot{r} = \frac{N q^2 r}{2\pi a^2 \epsilon_0} (1 - f - \beta^2). \quad (3.28)$$

Поскольку сила пропорциональна радиусу r , траектории всех частиц идентичны и отличаются только множителем r/a . Следовательно, без потери общности можно рассматривать траекторию частицы, начинающуюся при $r = a$. Подставляя $a = r$ и $r' = r/\beta^2 c^2$ уравнение (3.28), определяющее профиль пучка, принимает вид

$$r r'' = \frac{2v}{\beta^2 \gamma} \left[\frac{1}{\gamma^2} - f \right] = K. \quad (3.29)$$

При $f < \gamma^{-2}$ преобладают силы электростатического расталкивания и пучок рассыпается. С другой стороны, если $f > \gamma^{-2}$, то пучок сжимается. Назовем правую часть уравнения обобщенным первеансом K :

$$K = \begin{cases} \frac{2v}{\beta^2 \gamma} \left(\frac{1}{\gamma^2} - f \right), \\ \frac{2v}{\beta^2 \gamma^3} \quad \text{при } f = 0, \\ -\frac{2v}{\gamma} \quad \text{при } f = 1, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$K = \frac{2v}{\beta^2} = \frac{l}{\phi^{3/2}} \left(\frac{m_0^{1/2}}{4\sqrt{2\pi\epsilon_0} q^{1/2}} \right) \quad \text{при } f = 0 \text{ (НР)}.$$

Первеанс K нерелятивистского заряженного пучка отличается от обычного первеанса k_3 множителем, стоящим в скобках; численно он равен $15 \cdot 10^3 \text{ В}^{1/2} \cdot \text{А}^{-1}$.

Прежде чем приступить к решению уравнения (3.29), отметим, что в работе [119] приведен его удобный асимптотический вид, который является хорошим приближением при $r - a_0 \ll a_0$, где a_0 — значение a при $r' = 0$. При этом условии величина r' мала по сравнению с $r r''$, так что ее добавление в уравнение не вызо-

вет большой ошибки;

$$rr'' + r'^2 \approx K. \quad (3.31)$$

В случае положительного K это уравнение описывает гиперболу $r^2 - Kz^2 = a_0^2$, асимптоты которой наклонены под углом $K^{1/2}$; для отрицательного K мы имеем эллипс. Отсюда следует, что для выполнения условия параксиального приближения первеанс K должен быть много меньше единицы. Условие малости разности потенциалов между осью и границей пучка (3.12) с учетом множителя $1 - f$ приобретает вид: $v \ll (\gamma - 1)(1 - f)$. В предельном случае заряженного нерелятивистского пучка эти условия записываются в виде, полученном ранее, а именно $v \ll \beta^2/2$ или $k \ll 66 \cdot 10^{-6} A \cdot V^{-1/2}$.

Дважды интегрируя уравнение (3.29), уравнение для огибающей пучка можно записать следующим образом:

$$\frac{z}{a_0} = \begin{cases} \left(\frac{2}{K}\right)^{1/2} \left[\ln(r/a_0)\right]^{1/2} \exp u^2 du, & K > 0, \\ \left(-\frac{2}{K}\right)^{1/2} \left[\ln(a_0/r)\right]^{1/2} \exp(-u^2) du, & K < 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

На рис. 3.3 показана зависимость r от z . Огибающая пучка симметрична относительно минимума или максимума в точке $z = 0$, так что из приведенных зависимостей нетрудно определить свойства первоначально сходящегося или расходящегося пучка.

Если первеанс K положительен, то вводя функцию

$$F(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp u^2 du, \quad (3.33)$$

уравнение (3.32) можно записать по-другому. Первое из уравнений принимает вид

$$z = \left(\frac{2}{K}\right)^{1/2} r F \left\{ \left[\ln \frac{r}{a_0} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.34)$$

При малых значениях x имеем $F(x) \approx x$, и уравнение (3.34) записывается следующим образом:

$$\frac{a_0}{r} = \exp \left\{ -\left[\frac{Kz^2}{2r^2} \right] \right\} \approx 1 - \frac{Kz^2}{2r^2}. \quad (3.35)$$

Возводя левую и правую части уравнения (3.35) в квадрат, не-

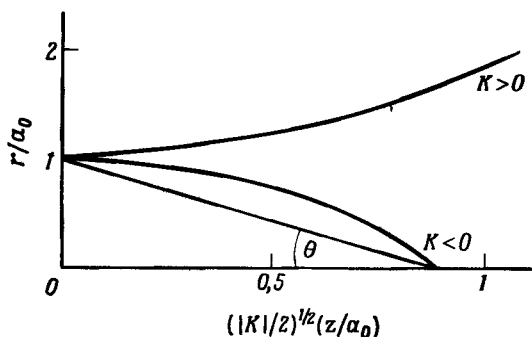


Рис. 3.3. Огибающие расходящегося и сжатого под действием собственных полей параксиальных пучков.

Эти зависимости получены из выражений (3.32), в которые входят безразмерные переменные r/a_0 и z/a_0 .

трудно убедиться, что в случае $Kz^2/2r^2 \ll 1$ решение его имеет вид гиперболической зависимости, описываемой уравнением (3.31). В другом предельном случае, когда x велико, мы имеем $F(x) \approx x/2$ и уравнение (3.34) принимает вид

$$\ln \frac{r}{a_0} = \frac{r^2}{2Kz^2} . \quad (3.36)$$

Для сходящегося пучка с начальными условиями $r/a_0 \gg 1$ отношение r/z можно приближенно заменить величиной $\alpha = dr/dz$. При этом уравнение (3.36) можно записать как

$$a_0 = r \exp \left[\frac{\alpha^2}{2K} \right] . \quad (3.37)$$

Если пучок параллельно движущихся частиц фокусируется линзой, фокусное расстояние которой равно f , и в нем образуется перетяжка, то $r = \alpha f$. Таким образом, минимально возможный диаметр сфокусированного пучка в перетяжке при данных значениях первеанса и угла сходимости пропорционален f .

В случае ленточного пучка анализ является значительно более простым. Поперечные силы (в направлении оси x) не зависят от ширины пучка. Как показано в разд. 2.5, первеанс пучка определенной длины обратно пропорционален его ширине. Следовательно, характерным параметром, как и прежде, является первеанс, отнесенный к единице площади. Используя уравнение (3.26), нетрудно показать, что уравнение огибающей имеет вид параболы

$$x''b = \frac{1}{2} \pi K_s , \quad (3.38)$$

где b — полувысота пучка, а K_s — первеанс потока, имеющего квадратное поперечное сечение со стороной $2b$.

Пирс [228] рассмотрел более подробно вопрос о расплывании пучка в свободном пространстве, а также привел зависимости $F(x)$. Он также вычислил максимальный ток, который может проходить через цилиндрический канал, не соприкасаясь с его стенкой. Кроме того, им приведены ссылки на оригинальные статьи, посвященные этому вопросу.

Если v не мало по сравнению с $\beta^2/2$, то поведение пучка, как и в случае бесконечного магнитного поля, становится более сложным и зависит от граничных условий. На его свойства оказывают сильное влияние способ инжекции и геометрия окружающих стенок. Уменьшение потенциала на оси (электронного пучка) замедляет движение приосевых частиц, что в свою очередь приводит к увеличению поля. Поэтому величина тока, проходящего через цилиндрическую камеру или пару разнесенных в пространстве апертур, оказывается меньше, чем это следует из формулы для малого значения K . В случае пучков, используемых на практике, первеанс намного меньше критического значения $66 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{В}^{-3/4}$. Так, для типичного электронного пучка с током 1 А и энергией электронов 10 кэВ первеанс равен $10^{-6} \text{ A} \cdot \text{В}^{-3/4}$ и $K = 0,015$, что соответствует уменьшению потенциала на 150 В и $\theta \approx 1^\circ$. В обзоре [3] приводятся расчетные кривые для уменьшения аксиальной скорости частиц в цилиндрическом пучке, распространяющемся в цилиндрической камере, поперечные и продольные размеры которой велики по сравнению с радиусом пучка

Начиная с 1965 г. появилось большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных релятивистским электронным пучкам с $|K| \gtrsim 1$. В первых экспериментах такого типа пучки получали при разряде большой коаксиальной линии, заряжаемой до напряжения 2 — 3 МВ, причем значения $|K|$ оказались несколько меньше, чем единица. Свойства этих пучков в общих чертах согласуются с результатами проведенного здесь анализа [104]. Дальнейшие эксперименты с более сильноточными пучками показали наличие ряда дополнительных эффектов, которые иногда очень сильно усложняют поведение пучка. Важной особенностью является возникновение обратного тока при инжекции пучков в плазму или нейтральный газ, плотность которых превосходит плотность электронов в пучке. Обратный ток стремится уничтожить собственное магнитное поле пучка и ослабить его эффективное самосжатие (пинчевание) [67]. Левин и др. [180] описали свойства таких пучков с $v/\gamma \approx 2,5$. Возникновение обратного тока в основном обусловлено индукционными эффектами, которые зависят от времени и влияют на установившийся режим пучка. Более подробное изложение и ссылки на ранее опубликован-

ные работы можно найти в упомянутых статьях. Поскольку многие пучки, принадлежащие к этому типу, характеризуются неламинарным потоком, отложим дальнейшее их обсуждение до следующей главы.

2.7. Однородный ламинарный пинч. В предыдущем разделе мы вывели уравнение, описывающее самосжатие частично нейтрализованного пучка, образованного первоначально параллельно движущимися частицами. Пучок сжимается, когда сила, действующая на частицы со стороны собственного магнитного поля пучка и направленная внутрь по радиусу, превосходит силу электростатического расталкивания. В принципе направленную внутрь силу можно сбалансировать центробежной силой, направленной наружу, сообщая частицам пучка некоторую угловую скорость. Это можно было бы осуществить, инжектируя пучок с катода, размещенного в магнитном поле, при выходе с которого частицы приобретали бы составляющую угловой скорости.

Хотя вряд ли можно реализовать такой пучок на практике, его основные свойства являются простыми и понадобятся нам в дальнейшем при обсуждении более сложных конфигураций. Поэтому рассмотрим вначале эти основные свойства. Предположим, что азимутальная скорость частиц на внешней границе пучка мала по сравнению с $\beta_z c$, и вновь воспользуемся параксиальным приближением. Условие равновесия однородного пучка получим из уравнения (3.28), заменяя в нем левую часть центробежной силой $\gamma m_0 \beta_\theta^2 c^2 / r$. Предполагая, что угловая скорость $\beta_\theta c / r$ постоянна, получаем

$$\beta_{\theta a}^2 = 2 \langle \beta_\theta^2 \rangle = -K \beta_z^2. \quad (3.39)$$

В этом равенстве угловые скобки означают усреднение по всем радиусам, а величина K представляет собой перванс, определяемый выражением (3.30). Условие малости β_θ по сравнению с β_z записывается в виде неравенства $(-K)^{1/2} \ll 1$. В частном случае, когда пучок является полностью нейтральным (т.е. $f = 1$), имеем

$$\frac{2 \langle \beta_\theta^2 \rangle}{\beta_z^2} = \frac{2v}{\gamma}. \quad (3.40)$$

Нетрудно проверить, что величина $2v/\gamma$ равна также отношению радиуса пучка к ларморовскому радиусу электрона, вращающегося в собственном магнитном поле пучка на его границе. Соотношение (3.40) представляет собой "условие пинча Беннета", которое мы рассмотрим в разд. 4.5 гл. 4.

Ограничиваясь параксиальным приближением, мы получили дос-

точно простой результат, однако очевидно, что, отказавшись от параксиального приближения, а также от условия $\beta_\theta \sim r$, можно построить широкий класс равновесий, в которых скорость и плотность частиц меняются по сечению пучка. Считая $\beta_\theta \gg \beta_z$, можно аналитически рассмотреть самосогласованные свойства потока с произвольно большой величиной параметра $2v/\gamma$, хотя трудно представить себе, каким образом такой поток можно осуществить практически.

2.8. Равновесие однородного цилиндрического пучка в однородном магнитном поле. Выше мы уже исследовали свойства пучка, распространяющегося в бесконечном магнитном поле. Рассмотрим здесь более реальный случай в том смысле, что поле является конечным, но такой поток все еще остается идеализированным, поскольку мы считаем его ламинарным и однородным вдоль оси z . Предположение об одновременной ламинарности и азимутальной симметрии потока означает, что отдельные заряды движутся по спиральным траекториям постоянного радиуса. При этом на заряды действуют следующие радиальные силы:

- 1) Центробежная сила.
- 2) Сила Лоренца, возникающая при движении электрона во внешнем магнитном поле и пропорциональная $\beta_\theta B_z$.
- 3) Сила Лоренца, обусловленная влиянием собственного магнитного поля пучка и пропорциональная $\beta_z B_\theta$.
- 4) Поправка к указанной в п. 2 силе, связанная с собственным магнитным полем пучка, направленным вдоль оси z и создаваемым азимутальным током.
- 5) Электростатическая сила, обусловленная пространственным зарядом пучка.

Нетрудно (хотя, возможно, бесполезно) написать общее интегральное уравнение баланса сил, действующих на заряженную частицу, расположенную в точке r , для величин n , β_θ и β_z , представляющих собой функции радиуса. Очевидно, такое уравнение имеет множество решений. Налагая соответствующие ограничения, попытаемся выделить из них наиболее интересные.

Во-первых, потребуем, чтобы в пучке не было шира угловой скорости ($\dot{\theta} = \text{const}$), так что пучок можно рассматривать как "жесткий ротатор". С целью упростить преобразования и выявить существенные физические свойства будем вначале считать, что $f = 0$ и частицы имеют нерелятивистские скорости. Предположим также, что плотность частиц n имеет однородное распределение по радиусу, а β может меняться. При этих условиях следует учитывать только силы, указанные в п. 1, 2 и 5. Таким образом, уравнение баланса радиальных сил записывается в виде

$$m_0 r \dot{\theta}^2 = - \frac{n q^2 r}{2 \epsilon_0} - q B_z r \dot{\theta}. \quad (3.41)$$

Это уравнение можно переписать через плазменную ω_p и ларморовскую Ω_L частоты:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\omega_p^2 - 2\dot{\theta}\Omega_L = 0, \quad (3.42)$$

откуда находим

$$\dot{\theta} = \Omega_L \pm (\Omega_L^2 - \frac{1}{2}\omega_p^2)^{1/2}. \quad (3.43)$$

При $\Omega_L^2 > \omega_p^2/2$ уравнение имеет два решения, соответствующих большей и меньшей, чем ларморовская, частотам вращения пучка. При $\Omega_L^2 < \omega_p^2/2$ равновесие невозможно. Когда $\Omega_L = \omega_p/\sqrt{2}$, мы имеем частный случай бриллюэновского потока [43]. Ниже мы его обсудим более подробно. Условие существования бриллюэновского потока можно записать через другие параметры:

$$\Omega_L^2 = \frac{1}{2}\omega_c^2 = \frac{1}{2}\omega_p^2 = 2v_e^2/a^2. \quad (3.44)$$

До сих пор мы еще не определили составляющую скорости вдоль оси z . Предположим, что все частицы имеют такую составляющую и, кроме того, выходят с катода, потенциал которого поддерживается постоянным. При этом предположении и определенном значении потенциала на границе пучка можно вычислить изменение потенциала по радиусу, а также первеанс пучка. Однако сначала обсудим условия на катоде, используя теорему Буша [уравнение (2.5)]. Теорему Буша можно записать следующим образом:

$$\dot{\theta} = \Omega_L (1 - \Psi_0/\Psi); \quad (3.45)$$

здесь Ψ — поток, пронизывающий площадь круга радиусом r , а Ψ_0 — поток через катод. Сравнивая выражение (3.45) с (3.43), находим

$$\Psi_0 = \pm \Psi \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\Omega_L^2} \right)^{1/2} = \frac{2\pi P \theta}{q}. \quad (3.46)$$

На рис. 3.4 показаны возможные распределения потока на катоде, соответствующие этим двум решениям. Представляют интерес некоторые предельные случаи. В пределе малой плотности $\omega_p = 0$, так что мы имеем либо $\Psi_0 = +\Psi$, т.е. частицы движутся вдоль силовых линий поля, либо $\Psi_0 = -\Psi$, т.е. они приобретают импульс в θ -направлении, вполне достаточный для того, чтобы они могли двигаться по круговой орбите с центром на оси. Это согласуется с тем фактом, что в случае $\Psi_0 = 0$ частицы приобретают в два раза меньший импульс и их траектории пересекают ось. Предельный

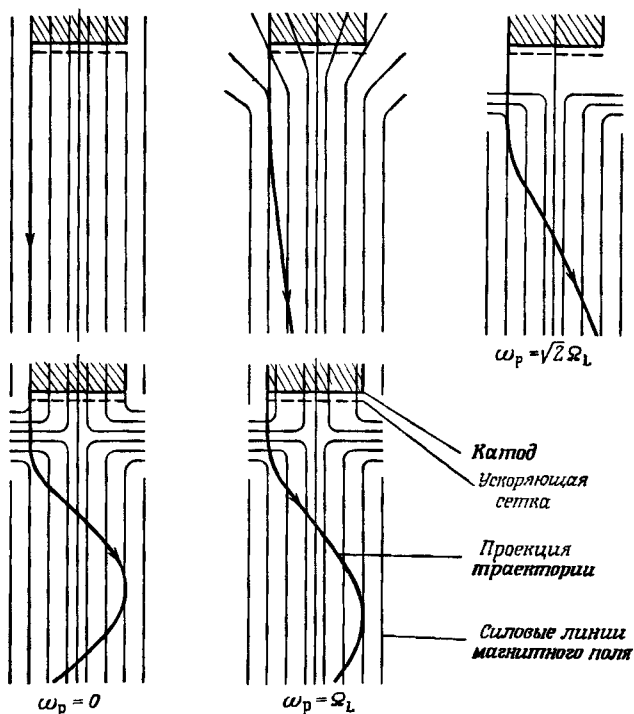


Рис. 3.4. Траектории электронов, инжектированных в магнитное поле, соответствующие двум возможным решениям уравнения (3.43).

При $\omega_p = \sqrt{2}\Omega_L$ оба решения сливаются в одно, соответствующее бриллюэновскому потоку. Трём значениям ω_p соответствуют следующие значения ω/Ω_L 0 и 2, $(\sqrt{2} \pm 1)/2$ и 1.

случай высокой плотности, когда два решения сливаются в одно, соответствует бриллюэновскому потоку.

Найдем теперь распределение аксиальной скорости в поперечном сечении пучка. Поскольку, согласно предположению, плотность однородна, потенциал меняется квадратично с радиусом [выражение (3.10)] и соотношение для составляющих скорости записывается в виде

$$\frac{1}{2}(\beta_z^2 + \beta_\theta^2 - \beta_{z0}^2) = v r^2 / a^2, \quad (3.47)$$

где $\beta_{z0}c$ — скорость частиц на оси. После подстановки $\beta_\theta = r\dot{\theta}$ и $v = a^2\omega_p^2 / 4c^2$ это выражение принимает вид

$$\beta_z^2 - \beta_{z0}^2 = \frac{r^2}{2c^2} (\frac{1}{2}\omega_p^2 - \dot{\theta}^2). \quad (3.48)$$

Следовательно, аксиальная скорость меняется по сечению пучка, если только не выполняется условие $\omega_p^2 = 2\theta^2$. Это условие соответствует бриллюэновскому потоку. Можно показать, что это вычисление является несколько искусственным и что более соответствующим действительности должно быть предположение о постоянной по сечению пучка плотности тока. Разумеется, можно было бы так и сделать, но вытекающая из этого неоднородность плотности частиц n по радиусу привела бы к возникновению шира скоростей в θ -направлении.

Мы показали, что в нерелятивистском бриллюэновском потоке частицы движутся так, как если бы пучок был твердым телом. По мере увеличения n шаг спиральных траекторий уменьшается и, следовательно, падает β_z . Представляет интерес рассчитать максимальный ток пучка при данном значении потенциала, допуская, что для поддержания условия равновесия магнитное поле может расти. Пусть ϕ_a — потенциал на границе пучка, а $\phi_0 = -m_0 c^2 / q$. Тогда имеем следующее соотношение:

$$\frac{\phi_a}{\phi_0} = \frac{1}{2}(\beta_z^2 + \beta_{\theta a}^2) = \frac{1}{2}\left(\beta_z^2 + \frac{a^2 \Omega_L^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}(\beta_z^2 + 2\nu). \quad (3.49)$$

Дифференцируя последнюю часть этого уравнения при постоянном значении ϕ_a , можно показать, что при

$$\nu = \beta_z^2 = \frac{1}{3}(\beta_z^2 + \beta_{\theta a}^2), \quad (3.50)$$

$d(\nu\beta_z)/d\beta_z = 0$. Следовательно, максимальный ток достигается в случае, когда отношение азимутальной скорости частицы к аксиальной на границе пучка равно $\sqrt{2}$. Кроме того, $\phi_{\text{осев}}/\phi_a = 1/3$.

В системе единиц СИ это соответствует (для электронов)

$$k_{\text{макс}} = 16 \pi \epsilon_0 q^{1/2} / 3 \sqrt{6} m_0^{1/2} = 25,4 \cdot 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{В}^{-1/2}. \quad (3.51)$$

Первую и третью правые части соотношения (3.49) можно использовать для нахождения общей связи между током, магнитным полем и потенциалом. Умножение всех этих частей на $a^2 \Omega_L^2 = 2\nu c^2$ [условие (3.44)] дает

$$\frac{\phi_a}{\phi_0} a^4 \Omega_L^4 = \beta_z^2 \nu^2 c^4 + \frac{a^6 \Omega_L^6}{2c^2}. \quad (3.52)$$

Выражая Ω_L через B , а $\nu\beta_z$ через I , имеем

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \epsilon_0 B^2 a^2 \left(\frac{q}{2m_0}\right)^{3/2} \left(-\phi_a - \frac{qB^2 a^2}{8m_0}\right)^{1/2} = \\ &= 1,45 \cdot 10^6 B^2 a^2 \left(\phi_a - 2,2 \cdot 10^{10} B^2 a^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

(для электронов). В случае когда потенциал меняется слабо, вторым членом в квадратных скобках можно пренебречь. При $a = 10^{-8}$ м, $\Phi_a = 10$ кВ и $B = 10^{-1}$ Т мы имеем $I = 1,43$ А.

Интересно посмотреть, какова структура пучка, описываемого уравнениями (3.41) и (3.42) в системе координат, вращающейся с частотой ω_f и дрейфующей со скоростью β_z , в предположении, что β_z постоянна по сечению пучка. Поскольку нет шира скоростей, частицы не могут выходить с эквипотенциального катода (за исключением особого случая бриллоэновского пучка). Из выражения (2.21) следует, что во вращающейся системе координат появляется компенсирующее электрическое поле. Соответствующим выбором ω_f можно так сбалансировать силу электростатического расталкивания, что частицы будут находиться в состоянии покоя. Для бриллоэновского потока магнитное поле уменьшается в $(1 - \omega_f/\Omega_L)$ раз, и им можно пренебречь. Фиктивное поле, возникающее во вращающейся системе координат, в точности эквивалентно полю, которое может быть создано нейтрализующим фоном в лабораторной системе координат. Это наводит на мысль о тесной связи между поведением стационарной нейтральной плазмы в магнитном поле и поведением удерживаемых магнитным полем заряженных пучков. В рассмотрении этого вопроса мы вернемся в гл. 6.

Полностью релятивистский подход к бриллоэновскому потоку дан Ульрихом и Де-Паком в работе [218], которые учли все пять составляющих силы, перечисленных выше. Такой пучок не имеет шира скоростей, но плотность тока в нем неоднородна, причем на оси пучка она больше, чем на краю. Величина β также возрастает с увеличением радиуса пропорционально γ , так что выполняется условие постоянства ω . Конечный результат, полученный этими авторами, записывается следующим образом:

$$v = \gamma_0 \left[\frac{\gamma_a^2}{\gamma_0^2} - 1 \right], \quad (3.54)$$

где γ_0 — значение γ на оси, равное $(1 - \beta_z^2)^{-1/2}$, а γ_a — значение γ на границе пучка. Выражение (3.54) представляет собой обобщение выражения (3.49) (вторая и четвертая составляющие) на релятивистский случай. Условие достижения максимального тока, полученное в работе [218], имеет вид

$$\gamma_0^6 + (2\gamma_a^2 + \gamma_a^4)\gamma_0^2 + 2\gamma_a^4 = 0, \quad (3.55)$$

а выражение, соответствующее (3.50), находят исключением величины γ_a или γ_0 из последних двух выражений. Очевидно, что получить его в аналитическом виде невозможно, однако в ультра-

релятивистском пределе $\beta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, а

$$v = \frac{\gamma_a^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}. \quad (3.56)$$

Поскольку θ не зависит от радиуса, поле при этих условиях меняется по радиусу от оси к границе пучка в γ_a/γ_0 раз. Это отношение¹⁾ равно $\gamma_a/\sqrt{2}$.

В некотором смысле такие пучки представляют лишь академический интерес, поскольку вряд ли можно сделать пушки подходящей конфигурации, дающие релятивистские электронные пучки. Более близкое к действительности, хотя и более сложное рассмотрение проведено в работах [214, 310], посвященных анализу потоков, выходящих с катода, который пронизывается отличным от нуля потоком магнитного поля.

2.9. Практически применяемые нейтрализованные пучки.

В данной главе мы уже встречались с некоторыми примерами нейтрализации пучков заряженными частицами противоположного знака. При этом мы использовали простые предположения, хотя во многих случаях реальное их поведение является весьма сложным.

Обычно нейтрализующие заряды возникают при ионизации остаточного газа в установках. Например, при ионизации остаточного газа электронным пучком вторичные электроны выталкиваются из пучка на стенку камеры, а ионы захватываются в потенциальную яму пучка. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не достигается равновесие между скоростью ухода электронов и ионов из пучка и скоростью их образования. Равновесное состояние зависит от таких факторов, как энергия частиц пучка, давление газа, сечение ионизации, энергия вторичных электронов и возможность ухода ионов через концевые части пучка. Если это возможно, то степень нейтрализации пучка меняется по его длине. Такой процесс подробно описан в работе [127], где результаты сопоставлены с экспериментальными данными. В нее включен обзор более ранних работ, включая эксперименты [86] по предотвращению разлета длинного пучка под действием пространственного заряда.

Используя ловушки для ионов, как это показано на рис. 3.5, можно предотвратить уход ионов через концевые части пучка. На обоих концах пучка в небольшой области устанавливаются сетки или диафрагмы, разность потенциалов между которыми составляет несколько вольт, а поле направлено так, чтобы отразить обратно дрейфующие ионы. Для предотвращения ускорения ионов в обратном направлении (в сторону пушки), которые разрушают катод,

¹⁾ Последние расчеты, выполненные Райзером [243], дают результат, несколько отличающийся от того, который следует из (3.54) и (3.55).

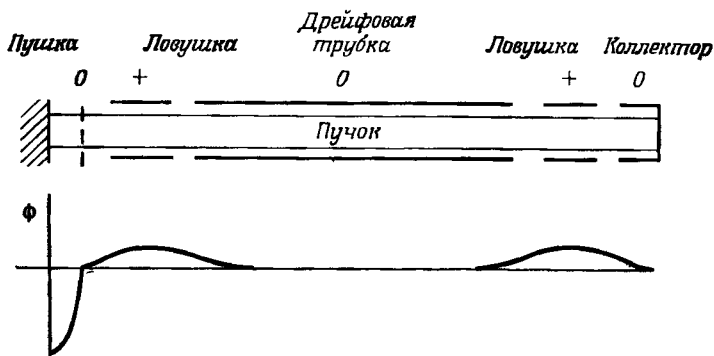


Рис. 3.5. Схематическое представление ионных ловушек, установленных на концах дрейфовой трубки, через которую проходит электронный пучок (ϕ — потенциал вдоль оси системы).

можно установить ловушку непосредственно перед электронной пушкой.

Если ионы "заперты" в продольном направлении, то они неизбежно уходят из пучка в радиальном направлении. Этот случай изучался Даном и Селфом [80]. Предполагалось, что вторичные электроны с энергией в несколько электрон-вольт имеют максвелловское распределение, в то время как ионы свободно попадают на стенку под действием радиального электрического поля. Авторы считали, что так же, как и в газовых разрядах, ионные и электронные токи на стенке одинаковы. Изменение потенциала можно найти, решая совместно уравнения Пуассона, Больцмана [уравнение (4.55)] и уравнение движения ионов, а также предполагая, что ионы и электроны образуются пучком.

В некоторых случаях в пучке возникает положительно заряженный столб, который приводит к "электростатическому сжатию" (пинчу) пучка. Это по существу процесс "газовой фокусировки", который использовался в первых моделях электронно-лучевых трубок. Анализ этой задачи и описание экспериментов, предпринятых для проверки теоретических положений, приведены в статье [114]. В ней имеются ссылки на более ранние работы, включая ряд статей, опубликованных до 1935 г. Более недавние эксперименты с пучками значительной интенсивности описаны в статье Мак-Коркли и Беннета [195].

В отсутствие магнитного поля нейтрализация может существенно изменить свойства потока. В частности, она может привести к уменьшению разлета пучка под действием поля пространственного заряда. Хотя этот метод эффективен по отношению к тонким пучкам с малым перьеансом, его трудно применять к длинным пучкам

с высоким первеансом. Эксперименты, выполненные в работе [97] для пучка с первеансом $I/V^{3/2} = 10^{-6} \text{ А} \cdot \text{В}^{-3/2}$, показали, что его поведение сильно зависит от деталей формы полей в ионной ловушке, разделяющей нейтрализованный пучок от заряженного в области электронной пушки. Неизбежное появление значительных aberrаций приводит к тому, что присевые траектории отличаются от траекторий на границе пучка. Довольно трудно разработать универсальную теорию эффектов, связанных с нейтрализацией пучка. Скорости ионизации очень сильно зависят от таких факторов, как энергия частиц пучка, состав и давление остаточного газа. Поэтому для формирования равновесного состояния требуется некоторое конечное время, и нередко свойства импульсных пучков существенно отличаются от тех, которые должен был бы иметь стационарный пучок. Кроме того, иногда между различными равновесными состояниями наблюдаются релаксационные колебания. Катлер [70] экспериментально изучал "спонтанную модуляцию" электронных пучков и обнаружил многие из этих эффектов. Из полученных им результатов следует, что поведение пучка сложным образом зависит от конкретных параметров установки.

Аткинсон [8] нашел интересное применение изменяющимся во времени свойствам пучка. Он предложил использовать пучок для создания высоковакуумного манометра. Электронный пучок с высоким первеансом и энергией около 100 эВ инжектируется в дрейфовое пространство. Вначале пучок расходится в радиальном направлении под действием сил пространственного заряда. По мере того, как в пучок захватывается все больше ионов, расходимость пучка уменьшается со скоростью, пропорциональной давлению газа. Эту скорость нетрудно измерить по увеличению тока, попадающего на мишень, расположенную за анодом, в котором имеется отверстие.

Сравнительно недавно нейтрализованные электронные пучки нашли применение и в области ионной спектроскопии. Исследуемые ионы создаются внутри электронного пучка, снабженного ионными ловушками. Затем под действием локального электрического поля ионы выводятся из пучка. Анализируя их в масс-спектрометре и измеряя ток ионов при различных значениях энергии электронов и выводящего напряжения, можно определить разнообразные сечения ионизации и возбуждения. Ионы можно удерживать в пучке достаточно долго, чтобы получить высокую степень их ионизации и затем провести с ними измерения. Описание соответствующих методов измерения дано в статьях [9, 238]. Был разработан целый ряд остроумных конфигураций пучков и электродов, которые подробно рассмотрел Редхед в своем обзоре [239], там же имеются и соответствующие ссылки на другие работы.

Частично нейтрализованные кольцевые пучки являются необходимой составной частью ускорителя электронных колец, предложен-

ного Векслером [299]. Такое кольцо состоит обычно из 10^{11} – 10^{12} электронов и имеет большой и малый радиусы порядка нескольких сантиметров и 1 мм соответственно. Оно представляет образование, в котором отношение заряда к массе значительно выше, чем у захваченных в нем ионов. При ускорении кольца в направлении, перпендикулярном его плоскости, либо электрическим полем, либо изменяющимся в пространстве магнитным полем ионы ускоряются собственным полем кольца, которое намного превосходит величину внешнего поля, ускоряющего электроны. Однако движение электронов и ионов в таких кольцах существенно отличается от ламинарного. Характеристики этого движения мы обсудим в следующей главе.

До сих пор мы говорили о нейтрализации электронных пучков ионами. В некоторых приложениях важную роль играет также и обратная задача. Например, обратный процесс нейтрализации необходим для успешной работы сильноточных установок, предназначенных для разделения изотопов. В отсутствие нейтрализации разлет пучка под действием поля пространственного заряда не позволяет получить разрешение, необходимое для разделения изотопов. Эта задача подробно обсуждается в работах [215, 301]. Нейтрализация играет существенную роль также в интенсивных дейтронных пучках, которые используются в настоящее время для нагрева плазмы с целью инициирования термоядерной реакции. Этой теме посвящен обзор Грина [105].

Другой важной областью применения нейтрализованных пучков являются ионные двигатели спутников. Для того чтобы спутник оставался электрически нейтральным, из двигателя должен истекать не только поток ионов, но и такое же количество электронов. В последние годы разработаны разнообразные конструкции двигателей, в которых используются главным образом однозарядовые ионы ртути. Теория работы ионных двигателей изложена в книге [36].

В данном параграфе были кратко рассмотрены разнообразные важные области исследований и соответствующие методы, касающиеся нейтрализованных пучков. Физические идеи, изложенные здесь, в целом просты, хотя иногда, чтобы их выявить, приходится использовать хитроумные подходы. Эти идеи достаточно хорошо иллюстрируются более общими случаями, изученными как в данной главе, так и других главах книги.

§ 3. Параксиальное уравнение для пучков с пространственным зарядом,

распространяющихся в аксиальных магнитных полях

3.1. Сплошные пучки. В предыдущем параграфе мы исследовали влияние значительного изменения потенциала по диаметру пучка

на его свойства. Однако во многих практических устройствах потенциал меняется незначительно. Если принять такое предположение, то для описания движения частиц пучка с изменяющимся вдоль оси z радиусом во внешнем магнитном поле, которое также изменяется в направлении оси z , можно использовать параксиальное уравнение. Чтобы учесть влияние поля пространственного заряда и собственного магнитного поля, однородного по сечению пучка, в уравнение (2.13) надо добавить член $-Kr/a^2$. При наличии ускоряющего поля E_z величина K зависит от z . В ламинарном потоке радиальная координата любой выделенной частицы изменяется таким образом, что отношение r/a сохраняется постоянным. В этом случае можно записать $r = a$, а уравнение траектории электрона, расположенного на границе пучка, можно рассматривать как уравнение огибающей пучка. (В дальнейшем мы увидим, что это несправедливо в случае пересекающихся траекторий.) Таким образом, необходимое нам в данном разделе параксиальное уравнение, в котором учитывается влияние пространственного заряда, но не учитывается влияние внешних электрических полей, имеет вид

$$a'' + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} a - \left(\frac{P_\theta}{\beta \gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{a^3} - \frac{K}{a} = 0. \quad (3.57)$$

Это уравнение получено в обычном параксиальном приближении, однако оно имеет более общий вид, чем уравнение, приведенное в разд. 2.7, которое мы использовали для описания бриллиэновского потока. Уравнение (3.57) справедливо в релятивистском случае, и в нем учтена возможность нейтрализации пространственного заряда. Потребовав, чтобы $a'' = 0$ и $P_\theta = 0$, можно найти условие существования бриллиэновского потока в этом случае. Оно имеет простой вид:

$$K = \left(\frac{\alpha \Omega_L}{\beta c} \right)^2. \quad (3.58)$$

Правая часть равна квадрату отношения поперечной и продольной скоростей частицы на границе пучка. Чтобы параксиальное приближение было справедливым, это отношение должно быть мало, т.е. $K \ll 1$.

Очевидно, что в однородном поле решение уравнения (3.57) является в общем случае осциллирующим. Это решение можно было бы применить, например, для описания цилиндрического пучка, инжектированного в магнитное поле из пушки, которая либо экранирована от магнитного поля ($\Psi = 0$), либо находится в нем ($\Psi > 0$). Вообще говоря, до тех пор пока не будет обеспечено

точное согласование пучка с переходной областью, огибающая пучка в однородном поле будет иметь вид "гофра". Создание соответствующей конфигурации переходной области требует специальных ухищрений, подробно описанных в литературе (например, в статье [34] и книге [147]). Во многих практически используемых электронных пушках катод находится в краевом магнитном поле. Поток, пронизывающий катод, конечен по величине и много меньше, чем поток, пронизывающий поперечное сечение пучка в области однородного магнитного поля.

Линеаризуя уравнение (3.57), что можно осуществить, если положить $r = a + \rho$, когда $\rho \ll a$, можно найти длину волны малых осцилляций в постоянном поле. В результате имеем

$$\frac{1}{\chi^2} = \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} + 3 \left(\frac{P_\theta}{\beta \gamma m_0 c a^2} \right) + \frac{K}{a^2} \quad (3.59)$$

Полагая $P_\theta = 0$ и используя выражение (3.58), это выражение для бриллюэновского потока принимает вид

$$\chi = \frac{\beta c}{\sqrt{2} \Omega_L} \quad (3.60)$$

Для нерелятивистского пучка $\omega_c = \sqrt{2} \omega_p$, т.е. отдельные электроны осциллируют в радиальном направлении с частотой, которая в $\sqrt{2}$ раз больше плазменной. Величину χ^{-1} иногда называют "жесткостью" пучка. Если амплитуда колебаний велика и сами колебания нелинейны, то огибающую пучка невозможно представить в простом аналитическом виде.

Уравнение (3.57) можно также использовать для определения равновесного радиуса пучка в однородном магнитном поле B_z , когда пучок инжектируется с катода, пронизываемого потоком $\Psi_0 = \pi B_z R_c^2$, где R_c — постоянная, имеющая размерность длины. Если катод находится в том же однородном поле, что и пучок, то R_c равна реальному радиусу катода. При $a'' = 0$ (это условие необходимо для определения равновесного радиуса пучка) подстановка $P_\theta = q \Psi_0 / 2\pi$ в уравнение (3.57) дает биквадратное уравнение относительно a , единственное приемлемое решение которого записывается в виде

$$a = \{2R_e^2 K + (2R_e^4 K^2 + R_c^4)^{1/2}\}^{1/2}, \quad (3.61)$$

где $R_e = \beta c / 2\Omega_L$ — радиус кривизны траектории частицы в поле B_z . При $R_e = 0$ (что соответствует бесконечному магнитному полю) или $K = 0$ это дает $a = R_c$, что и следовало ожидать. Интересно сравнить радиус такого пучка с радиусом R_c бриллюэ-

новского потока. Подстановка $\alpha = R_c$ в выражение (3.58) дает $R_c^2 = 4KR_e^2$. Подставляя KR_e^2 в выражение (3.61), получаем

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} R_c = 1,27 R_c. \quad (3.62)$$

Если бы катод находился в том же самом однородном поле, что и пучок, то до тех пор, пока перед катодом не будет установлена соответствующая согласующая система линз, огибающая пучка будет осциллировать около значения r , определенного выше.

Модуляцию цилиндрических пучков можно рассматривать как деформацию "стоячей волны". Более общий случай, который допускает существование бегущих волн, мы изучим в разд. 4.7 гл. 6. Рассмотренные здесь примеры иллюстрируют некоторые свойства ламинарных цилиндрических пучков в магнитных полях. В следующем параграфе исследуются некоторые другие конфигурации пучков.

§ 4. Некоторые другие типы потоков пространственного заряда

4.1. Трубочатый и плоский бриллюэновские пучки. Большинство существенных физических особенностей ламинарного потока пространственного заряда уже рассматривалось нами на отдельных примерах. Очевидно, что кроме рассмотренных могут существовать и другие типы потока. Многие из них уже были изучены, некоторые — в связи с разработкой конкретных устройств, а другие — в качестве упражнений, представляющих академический интерес. В большинстве работ изучались только нерелятивистские заряженные пучки, поскольку связанные с ними ограничения выполняются в большинстве приложений, относящихся к лампам СВЧ. Методы анализа свойств трубчатых пучков близки к использованным выше и, кроме того, изложены Кириштейном и др. в книге [147]; поэтому здесь приведены лишь окончательные результаты.

Обобщение бриллюэновского потока на случай трубчатого пучка, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно r_a и r_b и который иногда называют "потоком Самуэля" [258], приводит к пучку с однородной аксиальной скоростью частиц, но с широким угловым спектром. Плотность тока является функцией радиуса и уменьшается при изменении радиуса от r_a до r_b в 2 раза (если внутренний радиус пучка мал) или остается примерно постоянной (если пучок тонкостенный). Как только r_a уменьшается до нуля и пучок станет сплошным, область высокой плотности тока, которая была главным образом локализована вблизи оси, внезапно исчезает. Характерные частоты связаны с радиусом следующими соотношениями:

$$\omega = \Omega_L \left\{ 1 - (r_a/r)^2 \right\}, \quad (3.63)$$

$$\omega_p^2 = 2\Omega_L^2 \{1 + (r_a/r)^4\} . \quad (3.64)$$

Соотношение между током, полем и радиусом можно получить из выражения (3.53), заменяя в нем a на r_b и умножая все его члены на величину $[1 - (r_a/r_b)^4]$, а второй член в скобках — на $[1 - (r_a/r_b)^2]^2$. Максимальный первеанс [выражение (3.51)] увеличивается в $(r_b^2 + r_a^2)/(r_b^2 - r_a^2)$ раз. На рис. 3.6 приведены зависимости ω_p и ω от радиуса типичного пучка, а также схематически показаны конфигурации магнитного поля и катода.

Ток можно увеличить, если внутри пучка поместить цилиндр под соответствующим потенциалом (более высоким, чем потенциал анода в случае электронов) и сформировать поток частиц, выходящих с катода на расстоянии $r < r_1$ (на котором $\omega = 0$), таким образом, чтобы он попадал в область $r < r_a$. Если потенциалы на внешней r_b и внутренней r_a границах пучка сделать одинаковыми, то, как показал Самуэль, ток пучка приблизительно удваивается, а $r_1^2 = r_a r_b$. При $r = r_1$ частота ω меняет знак.

При условии $r_b - r_a \ll r$ нетрудно перейти к предельному случаю ленточного пучка. Первеанс такого пучка, соответствующий единице площади, отличается в $2/\pi$ раз от приходящегося на еди-

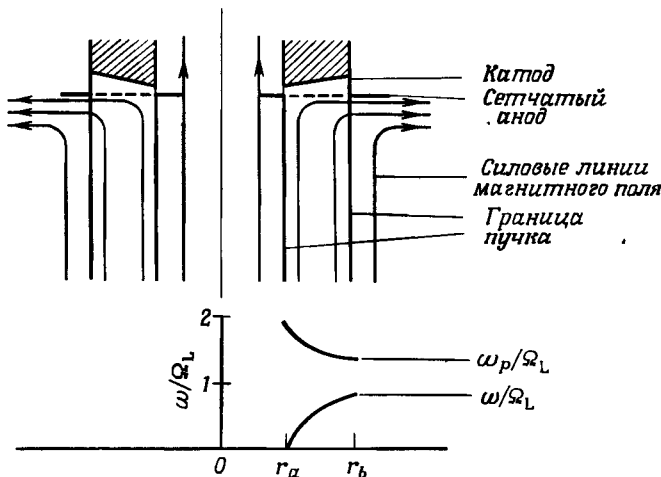


Рис. 3.6. Бриллюэновский поток в трубчатом пучке.

Такую конфигурацию иногда называют потоком Самуэля. Катод и распределение потока показаны чисто условно. Зависимости ω и ω_p от радиуса определяются выражениями (3.63) и (3.64).

ницу площади первоанса цилиндрического пучка с круговым сечением. Как и в цилиндрическом пучке, скорость частиц на внешней границе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем скорость частиц в центре. Другие свойства таких пучков, а также ленточных пучков, находящихся в магнитном поле, изучались автором [171]. Они обладают тем свойством, что поле пространственного заряда не зависит от расстояния x частицы до плоскости симметрии. Если ток пучка слишком мал, для того чтобы мог реализоваться бриллюэновский поток, радиус пучка будет модулирован, а если ток составляет менее половины бриллюэновского тока, то траектории частиц будут проходить через плоскость симметрии ($x = 0$). При этом направление силы пространственного заряда резко меняется на противоположное игибающая пучка представляет собой разорванные отрезки синусоид. К этому анализу не стоит относиться слишком серьезно с точки зрения практического применения. Благодаря неламинарности потока эти свойства быстро изменялись бы, даже если бы в потоке не развивалась поперечная неустойчивость, рассматриваемая в разд. 4.13 гл. 6.

С помощью приведенных в предыдущем параграфе методов можно вычислить длину волны пространственной модуляции трубчатых бриллюэновских пучков в случае, когда амплитуда модуляции мала. Оказывается, длина волны на внешней границе пучка больше, чем на внутренней. Для тонкого пучка отношение длин волн примерно равно r_a/r_b .

Очень важным типом является плоский бриллюэновский поток в скрещенных полях, который можно также рассматривать как предельный случай трубчатого пучка при $\beta_z = 0$ и $r_a \rightarrow \infty$. Однако здесь мы рассчитаем его свойства в релятивистском случае с учетом собственного магнитного поля. Нейтрализация пучка не учитывается, поскольку ее почти невозможно достичь в реальных конфигурациях. Предположим, что в направлении оси z поток ламинарен, а в направлении y он простирается от $y = 0$ до $y = w$. Пусть в плоскости $y = 0$ помещена пластина, имеющая нулевой потенциал. Внешнее магнитное поле имеет составляющую только вдоль оси x , т.е. $B = B_x$, а n и β_z изменяются с y . Приравняв результирующую силу, действующую на заряд в направлении y , нулю, получаем следующее уравнение:

$$E_y + \beta_z c \left\{ B_x - \mu_0 q \left(\int_0^y - \int_y^w \right) n \beta_z c dy \right\} = 0. \quad (3.65)$$

В соответствии с уравнением Пуассона имеем

$$\epsilon_0 E_y = \int_0^y q n dy. \quad (3.66)$$

Исключая E_y из этих двух уравнений, получаем интегральное уравнение, связывающее между собой $\beta_z(y)$ и $n(y)$. В общем случае оно имеет сложный вид, но в нерелятивистском случае и в предположении об однородности n можно получить интересное частное решение. Пренебрегая собственным магнитным полем, уравнение (3.65) можно переписать в виде

$$E_y + \beta_z c B_x = 0. \quad (3.67)$$

Из уравнения (3.66) имеем $E_y = n q y / \epsilon_0$ и, следовательно,

$$\epsilon_0 \beta_z c B_x + n q y = 0. \quad (3.68)$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\beta_z c = \frac{\omega_p^2}{\omega c} y. \quad (3.69)$$

Если в плоскости $y = 0$ потенциал равен нулю, то при $y = w$ имеем

$$-q\phi = \frac{1}{2} n q^2 w^2. \quad (3.70)$$

Нетрудно показать, что эта величина равна кинетической энергии при $y = w$, а $\omega_p = \omega_c$ всюду внутри пучка. Последний результат можно сравнить с выражением (3.44), из которого следует, что в цилиндрическом потоке $\omega_p = \omega_c / \sqrt{2}$. Условие равенства β_z нулю в плоскости $y = 0$ не является необходимым. При условии, что имеется плоскость с соответствующим потенциалом, обеспечивающая на новой границе пучка определенное значение E_y , часть пучка можно убрать.

Этот тип потока играет важную роль как идеализация при расчетах ламп СВЧ со скрещенными полями, таких, как линейный магнетрон. Аналогичный поток цилиндрической геометрии соответствует бриллюэновскому трубчатому пучку, но с $\beta_z = 0$. В практических случаях поток имеет более сложную структуру, поскольку он всегда неламинарен.

Другие типы бриллюэновского потока с учетом релятивизма и эффектов собственного поля рассматривались Кридоном [69].

4.2. Эллиптические пучки и эллиптический бриллюэновский поток.

До сих пор мы рассматривали только либо плоские, либо имеющие круговое сечение пучки. Иногда представляет интерес рассмотреть пучки с эллиптическим поперечным сечением (особенно в циклических ускорителях частиц). Прежде чем перейти к изучению эллиптического бриллюэновского потока (который представляет почти академический интерес), рассмотрим свойства эллиптических распределений заряда

Задача о вычислении распределения потенциала в цилиндрических пучках кругового сечения, когда распределение плотности частиц по радиусу известно, является тривиальной. Эквипотенциали также имеют форму правильных окружностей и никаких трудностей при выборе внешних границ, не влияющих на поток, не возникает. Однако для пучка с эллиптическим поперечным сечением форма эквипотенциалей вне пучка не описывается простыми кривыми, она меняется с изменением радиуса и лишь на бесконечности становится приблизительно круговой.

Метод решения этой задачи приведен Келлогом [143]. Рассмотрим вначале поля внутри пучка с эллиптическим распределением плотности, имеющим полуоси a и b , в предположении, что проводящие стенки отсутствуют. Будем использовать безразмерную координату ρ , определяемую следующим образом: $x = \rho a \cos \theta$ и $y = \rho b \sin \theta$, и будем считать, что радиальное распределение плотности заряда зависит только от ρ . Заряд $nq \, dx \, dy$, расположенный в точке (x, y) , создает на оси x в точке $(x_0, 0)$ следующую x -составляющую поля:

$$dE_x = \frac{nq}{2\pi\epsilon_0} \frac{x_0 - x}{y^2 + (x - x_0)^2} \, dx \, dy. \quad (3.71)$$

Переходя теперь к переменной ρ и интегрируя, получаем

$$E_x = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n(x_0 - \rho a \cos \theta)}{b^2 \rho^2 \sin^2 \theta + (x_0 - \rho a \cos \theta)^2} \, d\theta \, d\rho. \quad (3.72)$$

Чтобы выполнить интегрирование по θ , сделаем следующую замену переменной: $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$. Таким образом, можно написать

$$E_x = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_0^1 n\rho \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2)x_0 - 2a\rho(1-t^2)}{4b^2\rho^2 t^2 + \{x_0(1+t^2) - a\rho(1-t^2)\}^2} \, dt \right] d\rho. \quad (3.73)$$

Воспользовавшись теоремой о вычетах, можно вычислить внутренний интеграл, имеющий полюса при значениях t , определяемых выражением

$$t = \frac{j[\pm ab \pm \{x_0^2 + (b^2 - a^2)\rho^2\}^{1/2}]}{x_0 + a\rho}. \quad (3.74)$$

Оказывается, что этот интеграл зависит от соотношения величин x_0 и a . Кроме того, при $x_0 < a$ интеграл равен нулю, если $\rho > x_0/a$. Это означает, что поле в некоторой точке создается

только зарядами, расположенными внутри цилиндра эллиптического поперечного сечения, образующая которого проходит через эту точку. Поскольку величину a можно задать произвольно большой, нет необходимости рассматривать, что происходит при $x_0 > a$.

При условии $\rho < x/a < 1$ интеграл (3.73) сводится к следующему:

$$E_x(x, 0) = \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^{x/a} \frac{n\rho d\rho}{\{(b^2 - a^2)\rho^2 + x^2\}^{1/2}} \quad (3.75)$$

(здесь все индексы опущены).

Рассмотрим теперь пучок, в котором плотность заряда n однородна вплоть до $x = a$ и равна нулю при $x > a$. Для такого пучка

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{nqb x}{\epsilon_0(a+b)}, \\ E_y &= \frac{nqay}{\epsilon_0(a+b)} : \end{aligned} \quad (3.76)$$

Полученные выражения можно сравнить с полем $E_r = nqr / 2\epsilon_0$, которое создает пучок кругового сечения такой же площади. Переход от пучка кругового сечения к эллиптическому не меняет среднего радиального поля, однако вносит квадрупольную составляющую, напряженность которой по отношению к радиальному полю равна $\pm(a-b)/(a+b)$.

Записывая общее решение уравнения Пуассона для однородного распределения плотности заряда с коэффициентами, полученными при дифференцировании выражений (3.76), нетрудно найти распределение потенциала внутри однородно заряженного пучка эллиптического сечения. В результате получаем

$$\phi = -\frac{qn}{4\pi\epsilon_0} \left\{ x^2 + y^2 - \frac{a-b}{a+b} (x^2 - y^2) \right\}. \quad (3.77)$$

Перегруппировав члены, можно показать, что эквипотенциалы имеют форму эллипсов, полуоси которых пропорциональны $a^{1/2}$ и $b^{1/2}$. Они приведены на рис. 3.7. Предполагая, что a много больше радиуса пучка, из выражения (3.75) можно найти поля вне пучка. На больших расстояниях от пучка существенны только квадрупольный член и член $1/r$.

Как уже отмечалось выше, если пучок окружен трубкой, форма сечения которой не совпадает с формой эквипотенциала пучка в проанализированной выше конфигурации, соответствующей "свободному пространству", то в пучке будут индуцироваться дополнительные поля. Даже в относительно простых конфигурациях, таких, как

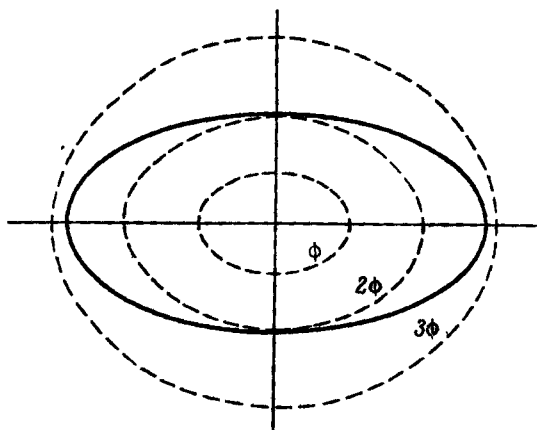


Рис. 3.7. Эквипотенциалы (штриховые линии) поля, создаваемого однородным эллиптическим распределением заряда с отношением осей 2 : 1.

Внутренние эквипотенциалы имеют форму эллипсов с отношением осей $\sqrt{2} \cdot 1$. Форма внешних эквипотенциалей более сложная.

эллиптические камеры, коаксиальные с пучком, анализ сильно усложняется. Существует, однако, один простой частный случай, но он не представляет существенного практического интереса. Если стенки камеры вплотную прилегают к пучку, то его поверхность становится эквипотенциальной. В этом случае, как нетрудно проверить, присутствие камер приводит к появлению дополнительного квадрупольного поля с потенциалом

$$\phi = - \frac{qn}{4\pi\epsilon_0} \left\{ x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) \right\}. \quad (3.78)$$

Рассмотрим снова бриллоуновский поток. Свойства эллиптических пучков исследовали Уолкер [303], а также Пёшль и Вейт [234]. Эллиптичность вводится внешним квадрупольным полем. Свойства эллиптического пучка характеризуются частотой ω_0 , которая обращается в нуль в случае пучка кругового сечения. Эта частота зависит от внешнего поля и параметров потока. При малой эллиптичности она равна отношению величин внешнего квадрупольного поля и радиального поля пучка кругового сечения, площадь которого совпадает с площадью эллиптического пучка. Формально ω_0 определяется выражением

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \omega_p^2 - \Omega_L^2. \quad (3.79)$$

Уолжер показал, что траектории частиц описываются уравнением

$$(\Omega_L - \omega_0)x^2 + (\Omega_L + \omega_0)y^2 = \text{const.} \quad (3.80)$$

При $\omega_0 < \Omega_L$ они представляют эллипсы, а при $\omega_0 = \Omega_L$ [а также при равенстве ω_0 величине ω_p , входящей в уравнение (3.79)] поток становится плоским; он аналогичен потоку, описанному в предыдущем разделе (продолженному в область отрицательных x). В случае $\omega_0 > \Omega_L$ траектории становятся гиперболическими.

Пешль и Вейт, используя эллиптические координаты, вычислили внешнее поле; они показали, что квадрупольная составляющая внешнего поля не увеличивается монотонно с ростом эллиптичности пучка, а достигает максимума и затем уменьшается. Например, в случае плоского потока она полностью исчезает и поле между плоскими электродами меняется линейно по обеим сторонам пучка.

4.3. Трубочатые ламинарные потоки с нулевой аксиальной скоростью.

Можно построить релятивистские самосогласованные конфигурации ламинарных потоков, в которых ток сосредоточен в тонком цилиндрическом слое и имеет только азимутальную составляющую. На заряды действуют следующие силы: центробежная сила, обусловленная присутствием внешнего магнитного поля, сила Лоренца, силы, направленные наружу по радиусу и обусловленные пространственным зарядом, а также собственное магнитное поле, которое направлено по оси z , но в сторону, противоположную внешнему полю.

Сила электростатического расталкивания увеличивается от нуля при $r = r_a$ до максимума при $r = r_b$, в то время как магнитная сила максимальна при $r = r_a$ и уменьшается до нуля на внешней границе пучка. В случае когда система находится в равновесии, уравнение баланса сил, действующих на заряд, расположенный на расстоянии r от оси, дается выражением

$$\frac{\gamma m_0 \beta_\theta^2 c^2}{r} = -q B_z \beta_\theta c - \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_{r_a}^r n q^2 r dr - \mu_0 \int_r^{r_b} n \beta_\theta q^2 dr. \quad (3.81)$$

Очевидно, задавая произвольные зависимости γ (а следовательно, β_θ) и n от r , можно получить множество решений. Все они имеют отчасти искусственный характер, поскольку в действительности потоки в тонких слоях такого типа являются неизменно неламнарными. Поэтому мы не будем рассматривать эти решения; неламнарные системы анализируются в разд. 5.4 гл. 4.

4.4. Ламинарный поток в бетатронном фокусирующем поле. Хотя вряд ли можно практически получить ламинарный поток в бетатрон-

ном поле, этот случай все-таки дает представления о максимальном токе пучка, который может существовать в поле данного типа.

Приведем здесь очень упрощенные рассуждения, пренебрегая влиянием как кривизны пучка, так и изображающих сил, возникающих в стенках камеры. Их мы рассмотрим в § 5 гл. 4. Опережая результаты этого обсуждения, можно сказать, что в настоящем исследовании хорошим приближением является пучок, заключенный в камеру, радиус которой значительно превосходит радиус пучка, но мал по сравнению с радиусом орбиты. Последнее означает, что электростатическое и магнитное поля пучка экранированы. Предположим, что частицы в пучке имеют энергию $\gamma m_0 c^2$, а зарядовая нейтрализация равна f . Для эллиптического пучка в поле с показателем n условие существования ламинарного потока можно получить из уравнения баланса бетатронной фокусирующей силы и дефокусирующей силы, обусловленной собственным полем. Из уравнения (2.117) для бетатронной силы, уравнения (3.28) и выражения (3.76) для силы пространственного заряда имеем

$$\gamma m_0 (1-n) \omega_0^2 x = \frac{Nq^2 x}{\pi \epsilon_0 a(a+b)} (1-f-\beta^2), \quad (3.82)$$

$$\gamma m_0 n \omega_0^2 y = \frac{Nq^2 y}{\pi \epsilon_0 b(a+b)} (1-f-\beta^2).$$

Из этих уравнений сразу же следует, что $a/b = n/(1-n)$. Исключая n и вводя параметр K , определяемый выражением (3.30), получаем

$$ab/2R_0^2 = (2v/\beta^2\gamma)(1-f-\beta^2) = K = 2v/\beta^2\gamma^3, \text{ когда } f = 0; \quad (3.83)$$

здесь R_0 — радиус равновесной орбиты. Из выражения для K следует, что если $f = 0$, то при большом значении β магнитная и электрическая силы практически компенсируют друг друга и результирующая сила расталкивания уменьшается в γ^2 раз. Это означает, что можно увеличить v , а следовательно, и ток пучка. Подставляя в (3.83) выражение (3.2), при $f = 0$ получаем очень простой результат: $\omega_p \beta \gamma c / R_0 = \gamma \omega_0$, где частота ω_p измерена в системе координат, движущейся вместе с пучком.

4.5. Поток, удерживаемый электрическим полем. В разд. 4.1 мы изучили бриллюэновский поток в трубчатых пучках. Было найдено, что ток пучка можно увеличить, если во внутреннюю полость трубчатого пучка внести цилиндр, потенциал которого отличается от потенциала внешней цилиндрической стенки. Очевидно, что для существования равновесия пучка в отсутствие внешнего магнит-

ного поля необходимо выбрать потенциал внутреннего цилиндра так, чтобы действующая на заряд сила была направлена внутрь. Равновесие такого типа изучал Харрис [118] в связи с разработкой лампы бегущей волны. Максимальный первеанс такого потока, в котором все частицы имеют одинаковую аксиальную скорость, может быть равен первеансу бриллоэновского потока. При этих условиях минимум потенциала (для электронов) лежит на внешней границе потока, а угол спиральной траектории частиц на внутренней границе равен $\arctg(1/\sqrt{3})$. Это условие аналогично условию на внешней границе бриллоэновского потока (разд. 2.8).

Практически создать эффективную систему инжекции для получения такого потока довольно трудно. Эта задача обсуждается в книге Кирштейна и др. [147]. Поскольку угловая скорость электронов отлична от нуля, величина P_{θ} конечна и пучок надо инжектировать с катода, расположенного в магнитном поле.

Пульсации таких и трубчатых бриллоэновских пучков можно анализировать так же, как и в §3. Оказывается, что частота пульсаций на внутренней поверхности пучка больше, чем на внешней. Аналогичные выводы относятся и к модуляции пучка в азимутальном направлении.

§ 5. Пространственный заряд в периодических структурах

Как уже объяснялось в гл. 2, для того чтобы обеспечить сильную фокусировку и удержать пучок в относительно небольшой области в ускорителях частиц и каналах транспортировки пучков, применяется переменнo-градиентная фокусировка. При такой фокусировке на частицу действуют существенно различные силы в x - и y -плоскостях, так что эксцентриситет ламинарного пучка, имеющего эллиптическое поперечное сечение, изменяется. Поскольку собственные поля пучка зависят в любой плоскости от соответствующих размеров пучка, огибающая пучка описывается двумя связанными уравнениями для x и y . Реальные пучки в ускорителях никогда не бывают ламинарными; более общий случай рассмотрен в разд. 3.6 гл. 4. Свойства ламинарных пучков в квадрупольных линзах анализировались Биком [20]. Интересно заметить, что в таком пучке в отличие от аксиально-симметричных систем может возникнуть пересечение орбит, поскольку при вырождении эллиптического сечения пучка в линию сила пространственного заряда остается конечной.

Периодическая фокусировка применяется также в лампах СВЧ, но другим способом. Для транспортировки пучка в продольном магнитном поле требуется либо соленоид, либо постоянный магнит с большой площадью полюсов. Первый потребляет большую мощность, а последние являются громоздкими и тяжелыми. Более изящным с

практической точки зрения решением представляется использование последовательности кольцевых постоянных магнитов переменной полярности, через которые проходит лучок. Эта система более экономична, и магнитное поле концентрируется вблизи пучка там, где это необходимо. Такая конструкция имеет некоторый недостаток. Дело в том, что пучок в равновесном состоянии оказывается неизбежно промодулированным, хотя нетрудно убедиться, что степень модуляции невелика.

Аналогичную фокусировку можно получить, применяя переменное электрическое поле, например, с помощью последовательности колец, потенциал которых меняется в пределах от ϕ до $\phi + \Delta\phi$. Осуществить на практике такую фокусировку довольно сложно, и поэтому периодическая фокусировка электростатическими полями не получила широкого распространения.

Рассматриваемая здесь фокусировка отличается в некотором смысле от изученных в § 4 гл. 2. Исследуем сначала фокусировку отдельных частиц без учета влияния пространственного заряда. Отличие состоит в том, что, даже если направление поля меняется на обратное, тем не менее любая линза фокусирующей системы обеспечивает фокусировку частиц. В идеализированном случае, когда магнитное поле выбрано в виде "квадратной волны", т.е. его направление периодически меняется на обратное, а амплитуда остается постоянной, радиальное положение частиц изменяется вдоль оси z так, как если бы они двигались в однородном магнитном поле. Однако резкое изменение B_z приводит к появлению в плоскости, в которой происходит изменение направления поля, составляющей B_r в виде δ -функции, причем пропорциональной r , так что в этих двух системах вариации в θ -направлении будут очень сильно отличаться. Так, если частица движется по траектории постоянного радиуса, то $\dot{\theta}$ меняет знак при каждом изменении полярности поля.

В действительности величина β^2 меняется плавно, а сама система состоит, как правило, из цепочки фокусирующих линз. Однако, даже если все линзы являются фокусирующими, возможно, что движение частиц станет неустойчивым, если линзы расположены на большом расстоянии друг от друга. При этом возникает "перефокусировка", которая рассматривалась в разд. 2.9. Чтобы показать это, вычислим матрицу преобразования одного элемента системы, состоящего из тонкой линзы с фокусным расстоянием f и дрейфового промежутка длиной D :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f} & D \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Если теперь выбрать $D > 4f$, то числовое значение следа матрицы будет больше 2 и частицы будут колебаться относительно оси с возрастающей амплитудой.

Если поле изменяется в пространстве синусоидально с периодом d , то параксиальное уравнение записывается в виде

$$r'' + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{L0}}{\beta c} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi z}{d} \right) r - \left(\frac{P_{\theta}}{8\gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{r^3} = 0. \quad (3.85)$$

При $P_{\theta} = 0$ оно сводится к более простому уравнению:

$$r'' + \left(\frac{\Omega_{L0}}{\beta c} \right)^2 \left\{ 1 - \cos \left(\frac{4\pi z}{d} \right) \right\} r = 0, \quad (3.86)$$

которое называется уравнением Матъе. Последнее обычно записывают в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x)y = 0. \quad (3.87)$$

Плоскость параметров (a, q) можно разбить на полосы, соответствующие областям ограниченного и неограниченного решений [196]. Нарастающие решения имеют осциллирующий характер, однако огибающая этих осцилляций в области больших амплитуд ведет себя приблизительно как экспонента. В случае когда

$$a = 2q = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{L0} d^2}{2\pi \beta c} \right)^2, \quad (3.88)$$

уравнения (3.86) и (3.87) тождественно совпадают. Уравнение (3.88) определяет квадрат d , измеренный в единицах длины ларморовской орбиты. Если на плоскости (a, q) провести линию $a = 2q$, то первые две полосы, которые она пересечет таковы:

области изменения a , внутри которых движение устойчиво:
0 - 0,66, 1,75 - 3,7 и т.д.;

области изменения a , внутри которых движение неустойчиво:
0,66 - 1,75, 3,7 - 6,2 и т.д.

При учете влияния пространственного заряда параксиальное уравнение, описывающее ламинарный поток [уравнение (3.57)], становится нелинейным. Если амплитуда колебаний относительно некоего среднего значения мала, то, используя изложенный в § 3 метод, это уравнение можно линеаризовать и снова найти области устойчивого и неустойчивого движения. Однако нелинейное уравнение решалось с помощью ЭВМ в области параметров, представляющих

практический интерес, и в литературе можно найти ряд расчетных зависимостей.

Более подробно эта тема изложена в книге [147], в которой воспроизведены некоторые из этих зависимостей и имеются ссылки на соответствующие работы.

§ 6. Гидродинамическое описание потоков пространственного заряда

До сих пор в данной главе мы рассматривали простые геометрические конфигурации потоков. В большинстве случаев они представляют идеализацию, которая недостижима на практике, поскольку отсутствуют какие бы то ни было способы расчета пучков соответствующих конфигураций или (в случае кольцевых пучков) устройств инжекции. Эти трудности обусловлены отчасти такими факторами, как неизбежный тепловой разброс энергий частиц в источнике, и противоречивыми требованиями, предъявляемыми к конструкции пушки или инжектора, которые должны обеспечивать пучки одновременно интенсивными и имеющими строго определенную структуру.

Хотя все встречающиеся на практике потоки в той или иной степени неламинарны, предположение о ламинарности (сформулированное в § 1) часто является разумным приближением и служит основой для исследования потоков, имеющих более сложную конфигурацию, чем те, которые мы рассматривали до сих пор. Это замечание применимо к стационарным электронным пучкам, инжектируемым с катодов большого диаметра. С другой стороны, для получения замкнутых кольцевых конфигураций, подобных тем, которые описаны в разд. 4.4, необходимо иметь поля, изменяющиеся во времени. На практике такие пучки оказываются в высокой степени неламинарными, и во многих случаях ламинарные модели для их описания просто неприменимы. Тем не менее они все-таки дают полезные теоретические представления для предельных случаев.

Многочисленные исследования ламинарных потоков были предприняты в связи с разработкой ламп СВЧ. Хотя очень часто практические конструкции рассчитываются до некоторой степени эмпирически, основные представления о них были получены с помощью общего гидродинамического описания потоков пространственного заряда. Конструкции электронных пушек со "скрещенными полями" и "магнетронного" типа разрабатывались на основе гидродинамических понятий. Решение задачи, за исключением самых простейших случаев, является очень сложным. Применительно к проектированию пушек это решение описано Кирштейном и др. [147], а также Амбоссом [3]. Проблемы, связанные с магнетронами, исчерпывающе рассмотрены в книге [217].

Здесь мы познакомимся с некоторыми физическими свойствами гидродинамического потока и с более общей точки зрения посмотрим на некоторые результаты, полученные выше в данной главе. В общем случае релятивистские ламинарные потоки с трудом поддаются рассмотрению. Поэтому мы уделим основное внимание нерелятивистским моделям пучков, в которых импульс частиц пропорционален их скорости и в отсутствие нейтрализации пространственного заряда можно пренебречь влиянием собственных магнитных полей.

Поэтому все последующие рассуждения относятся к ламинарному, заряженному, нерелятивистскому и стационарному потоку. Для описания потока удобнее использовать не напряженность поля, а потенциалы \mathbf{A} и ϕ . Кроме того, поскольку мы исследуем нерелятивистский случай, скорость удобно записывать как v , а не βc . Уравнение движения одиночного электрона имеет вид

$$m_0 \frac{dv}{dt} = q(-\nabla\phi + [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]]). \quad (3.89)$$

Если, вместо того чтобы изучать движение отдельного электрона, выбрать некоторую точку в среде и рассматривать скорость и градиент скорости частиц в этой точке, то оператор dv/dt надо заменить на $\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. (Нетрудно доказать, что это представляет собой стандартное гидродинамическое преобразование, т.е. является переходом от "лагранжевых" координат к "эйлеровым"; более подробное обсуждение такого преобразования можно найти в учебниках по гидродинамике.) В стационарном случае мы имеем $\partial/\partial t = 0$, так что

$$dv/dt = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (3.90)$$

Используя векторное тождество

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (3.91)$$

и подставляя его вместо dv/dt в уравнение (3.89), получаем

$$\nabla \left(\frac{m_0 v^2}{2} + q\phi \right) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{P}), \quad (3.92)$$

где $\mathbf{P} = m_0 \mathbf{v} + q\mathbf{A}$ — нерелятивистский канонический импульс. Величину $\nabla \times \mathbf{P}$ называют "напряженностью вихря" и обозначают через \mathbf{w} . Записывая полную энергию в виде

$$H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + q\phi, \quad (3.93)$$

уравнение (3.92) можно переписать следующим образом:

$$\nabla H = \mathbf{v} \times \mathbf{w}. \quad (3.94)$$

Если поток возникает на катоде, из которого электроны испускаются с нулевой скоростью, задачу можно упростить еще больше. Величину H , представляющую собой интеграл движения, выберем равной нулю, так что

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \quad (3.95)$$

Это означает, что вектор \mathbf{w} либо равен нулю, либо направлен параллельно \mathbf{v} . Поскольку $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{P}$, то $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Кроме того, поскольку напряженность вихря \mathbf{w} направлена параллельно \mathbf{v} , полный поток вектора \mathbf{w} в жгуте траекторий, имеющем вид трубки, сохраняется. В любом сечении справедливо следующее соотношение:

$$\int_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = \int_s (m_0 \nabla \times \mathbf{v} + q\mathbf{B}) d\mathbf{s} = \text{const}. \quad (3.96)$$

По теореме Стокса поверхностный интеграл от ротора вектора равен криволинейному интегралу от этого вектора по границе, окружающей поверхность, а именно интегралу

$$\oint_L (m_0 \mathbf{v} + q\mathbf{A}) d\mathbf{L} = q\psi_0, \quad (3.97)$$

где ψ_0 — поток, проходящий через катод, на котором $\mathbf{v} = 0$. Это уравнение представляет собой более общую формулировку теоремы Буша. В случае аксиально-симметричной системы оно принимает вид

$$2\pi m_0 r^2 \dot{\theta} + q\psi = q\psi_0, \quad (3.98)$$

что совпадает с уравнением (2.5).

Если напряженность вихря равна нулю, то поток является потенциальным и $\psi_0 = 0$. Для аксиально-симметричной системы это означает, что $P_\theta = 0$. Такое свойство мы уже обсуждали в разд. 2.8. Чтобы более четко выявить связь с этим обсуждением, перепишем \mathbf{w} в более удобном виде $\mathbf{w} = m_0 \boldsymbol{\omega}_v$, где $\boldsymbol{\omega}_v$ — "частота вихря". С этой величиной нам еще придется встретиться в гл. 6. Здесь же отметим ее связь с величинами, рассмотренными в разд. 2.8 в связи с потоком в однородном аксиальном магнитном поле. В этом случае вектор $\boldsymbol{\omega}_v$ имеет только z -составляющую:

$$\omega_v = 2(\Omega_L - \dot{\theta}) = \omega_c - 2\dot{\theta} = \frac{2\Omega_L \psi_0}{\Psi} = \frac{-2P_\theta}{m_0 r^2} \quad (\text{H P}). \quad (3.99)$$

В параксиальном потоке можно заменить m_0 на γm_0 , что дает

$$\omega_v = \frac{-2P_\theta}{\gamma m_0 r^2}. \quad (3.100)$$

Если напряженность вихря $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{P} = 0$, то \mathbf{P} можно представить

в виде градиента некоторой скалярной функции W :

$$\nabla W = m_0 \mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (3.101)$$

При отсутствии магнитного поля эта функция представляет собой по существу гидродинамический "потенциал скоростей" или функцию действия.

Функция действия существует, только если напряженность вихря равна нулю. В этом случае можно найти поверхности, ортогональные каноническому импульсу \mathbf{P} . Однако скорость направлена не параллельно каноническому импульсу, и такой поток называется "косо-конгруэнтным". Такой поток существует в магнитных линзах, когда пучок инжектируется с катода, обладающего конечными размерами и расположенного вне магнитного поля (или с точечного катода в магнитном поле). В отсутствие магнитного поля векторы \mathbf{P} и \mathbf{v} параллельны друг другу, и такой поток называется "конгруэнтным". Подобные потоки формируются в электростатических линзах. В отсутствие пространственного заряда параксиальные конгруэнтные потоки всегда можно сфокусировать в точку. Если поток не конгруэнтный, то в уравнении присутствует член $1/r^3$ и траектории невозможно свести в одну точку (см. разд. 2.2 гл. 2). Функция действия W , очевидно, позволяет получить полезное описание потока в компактном виде. Попробуем теперь для нее найти общее выражение. Из уравнений (3.93) и (3.101) следует, что

$$q\phi + (1/2 m_0)(\nabla W - q\mathbf{A})^2 = 0. \quad (3.102)$$

Комбинируя это уравнение с уравнением Пуассона $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$ и уравнением непрерывности $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$, получаем искомое уравнение

$$\nabla \cdot \{(\nabla W - q\mathbf{A}) \nabla^2 [(\nabla W - q\mathbf{A})^2]\} = 0 \quad (3.103)$$

со следующими граничными условиями: $|\mathbf{v}| = \Psi = |\mathbf{B}| = 0$ на поверхности катода.

Это уравнение имеет относительно громоздкий вид. Тем не менее, выбирая W в виде произведения функций, обладающих некоторыми специальными свойствами, каждая из которых зависит только от одной из независимых переменных, можно исследовать ряд конфигураций потока при $\mathbf{B} = 0$. Если выбрать функцию $W(r, z, \theta)$, например, в виде $f_1(r)f_2(z)$, а потенциал в виде $\phi = \phi_1(r)\phi_2(z)$, то можно получить уравнение в обыкновенных, а не в частных производных относительно $f(x)$. С помощью этого метода были исследованы аксиально-симметричные потоки, выходящие с конических и цилиндрических катодов. Используя данный метод, Мельцер [200] рассмотрел еще один поток, эквипотенциали которого имеют вид правильных окружностей, а траектории — вид гипербол. Подробное описание этих

и других потоков и их применение для расчета пушек со скрещенными полями и пушек магнетронного типа можно найти в книге Кирштейна и др. [147].

Л. Замечания и литература. Большая часть материала, изложенного в данной главе, была получена в связи с разработкой пушек и пучков для ламп СВЧ, для которой теория ламинарных потоков служила хорошим руководством. В своей монографии Пирс [228] довольно подробно описал простые типы потоков. Более объемистая книга Кирштейна и др. [147] построена на современном материале, и в ней затронуто большое количество вопросов с более подробным изложением. Книга содержит ссылки на оригинальные статьи, относящиеся к началу работ в данной области. Более последнее исследование, выполненное Наги и Сцилаги [210], дает очень подробное рассмотрение многих задач электронной оптики и задач, связанных с учетом пространственного заряда. В статье Габора [93], которую можно рекомендовать в качестве введения к § 6, изложены основы гидродинамического описания потока.

Подробный обзор Доу [79] посвящен фокусировке пучков магнитным полем, а в работе Брюэра [34, 35] исследуются пушки и пучки высокой плотности.

Амбосс [3] составил практически исчерпывающий обзор работ по плотным электронным пучкам. Что касается ускорителей частиц, то приближения ламинарного потока для описания пучков в них не соответствует действительности. Оно было использовано здесь только для того, чтобы проиллюстрировать предельные случаи. Например, предельный ток пучка, который можно ускорять в бетатроне (см. разд. 4.4), был вычислен Блеветтом [24].

Для описания ионных пучков ламинарный поток в редких случаях представляет собой полезное приближение. Для этого более уместно рассмотреть материал, изложенный в следующей главе.

НЕЛАМИНАРНЫЕ ПУЧКИ В ОТСУТСТВИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

§ 1. Введение

Движение пучков невзаимодействующих частиц в различных типах фокусирующих систем изучалось в гл. 2. Особенно простым является движение моноэнергетических частиц, траектории которых составляют небольшой угол с осью, в линейно-фокусирующих системах. Орбиты, выходящие из одной точки, пересекаются в точках изображений и нигде больше. В области между точкой предмета и точкой изображения поток является ламинарным. Если же мы имеем протяженный источник, из каждой точки которого частицы испускаются в широком диапазоне направлений, то поток становится существенно неламинарным. Даже в случае точечного источника, но при наличии нелинейностей, обусловленных абберациями, пучок может быть неламинарным. В данной главе мы рассмотрим оба класса неламинарных потоков.

В таких областях, как электронная микроскопия, теория электронно-лучевых трубок, ускорители частиц и физика плазмы, способы описания и свойства неламинарных потоков несколько отличаются. Здесь сделана попытка с единой точки зрения охватить и сравнить некоторые из подходов, принятых в различных областях. Все они основаны на теореме Лиувилля, и следующий параграф посвящен краткому изложению основ динамики, приводящих к этой теореме.

§ 2. Гамильтонов формализм и теорема Лиувилля

До сих пор при анализе свойств пучков мы не пользовались гамильтоновыми методами. Прежде чем сформулировать теорему Лиувилля, полезно составить некоторое представление об этом формализме. Общее и формальное его исследование проведено, например, в работе Голдштейна [101]. Вполне приемлемое рассмотрение основных вопросов с примерами из теории ускорителей имеется в монографии [63]. Лихтенберг [182] значительно более подробно обсудил этот формализм с упором на задачи, встречающиеся в ускорителях частиц. Предлагаемая нами теория не претендует на более общие возможности, но по крайней мере частично применима к слу-

чаем, встречающимся в пучках заряженных частиц. Разумеется, сам по себе гамильтонов формализм не представляет какую-либо новую "физику", но в рамках его переменных он действительно позволяет значительно упростить сложные задачи и приводит к правилам, которым можно следовать без постоянного обращения к физической ситуации. Такой формализм необходим для полного понимания концепции фазового пространства.

Начнем рассмотрение с лагранжиана для ансамбля частиц, находящихся во внешних полях, заданных потенциалами ϕ и \mathbf{A} , которые в общем случае являются функциями времени:

$$L = -m_0 c^2 / \gamma - q(\phi - \beta \cdot \mathbf{A}c). \quad (4.1)$$

Затем введем систему координат, в которой x_i обозначает "положение" i -й частицы. Канонический импульс P_i дается выражением

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.2)$$

В декартовой системе координат $\mathbf{P} = \beta \gamma m_0 c$, если $\mathbf{A} = 0$, и $\mathbf{P} = \beta \gamma m_0 c + q\mathbf{A}$, если $\mathbf{A} \neq 0$. В полярной системе координат $P_\theta = r(\beta \gamma m_0 c + qA_\theta)$.

Гамильтониан определяется следующим образом:

$$H = \sum P_i \dot{x}_i - L. \quad (4.3)$$

Используя это определение, из выражения (4.2) и уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

которое позволяет описать движение с помощью лагранжиана с учетом (4.1) получаем

$$-\dot{P}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}. \quad (4.4)$$

Систему уравнений (4.4) называют гамильтоновыми (или каноническими) уравнениями, а P_i и x_i — каноническими переменными. Произведение Px имеет размерность действия $ML^2 T^{-1}$, однако переменная x не обязательно имеет размерность длины. (Например, каноническими переменными являются угол и момент импульса.) Число уравнений в два раза больше, чем число степеней свободы f . Таким образом, движение можно описать траекторией точки в $2f$ -мерном пространстве. Такое пространство называется "фазовым пространством". Если каноническими переменными являются импульс и положение частицы, движущейся в одномерной потенциальной яме, то ее

фазовая траектория имеет форму эллипса или при соответствующей нормировке форму окружности. Радиус этой окружности и угол поворота изображающей точки на фазовой плоскости можно использовать для определения канонических переменных "действие - угол". Они часто бывают полезными при анализе движения в системах, в которых гамильтониан представляет собой периодическую функцию, таких, как циклотроны с секторной фокусировкой. Если число частиц равно N , то фазовое пространство является $6N$ -мерным, и мы будем его называть "Г-пространством". Для наших целей более удобно рассматривать движение ансамбля точек в шестимерном фазовом пространстве, т.е. в " μ -пространстве". В случае параксиальных потоков, в которых все частицы имеют единственную составляющую скорости вдоль оси, для описания движения достаточно четырехмерного пространства $xu p_x p_y$. Как мы увидим ниже, иногда полезно использовать пространство переменных $xu\dot{x}$ и $xu\dot{y}$, т.е. пары переменных, которые, однако, не являются канонически сопряженными и не обладают их некоторыми общими свойствами. Вид функции Гамильтона и выбор наилучших для каждого конкретного случая координат не всегда очевиден и прост. Однако в гл. 2 мы уже рассмотрели два случая, для которых такой выбор не представляет трудностей. Это бетатронные и фазовые колебания¹⁾ (разд. 8.2). В первом случае канонически сопряженными переменными являются p_y и u , p_x и x , а гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_x^2}{\gamma m_0} + \gamma m_0 \omega_0^2 (1-n) x^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_y^2}{\gamma m_0} + \gamma m_0 \omega_0^2 y^2 \right\}. \quad (4.5)$$

В данной конфигурации A_x и A_y равны нулю, а $p_x = P_x$ и $p_y = P_y$. В случае фазовых колебаний, описываемых уравнением (2.173), мы уже записывали гамильтониан [выражение (2.178)].

Если H не зависит от времени, то он соответствует интегралу движения Якоби и описывает механическую энергию системы. В приложениях к теории ускорителей встречаются как адиабатически изменяющиеся, так и периодические гамильтонианы. В этих случаях H не является инвариантом. Например, в периодической системе с адиабатически изменяющимися параметрами инвариантом будет интеграл действия $\oint p dq$. Для гармонических колебаний с амплитудой a он дается выражением

$$J = \pi \omega a^2 = 2\pi H / \omega. \quad (4.6)$$

Гамильтонов подход широко применяется для анализа нелинейных

¹⁾ Фазовые колебания в используемом здесь смысле называют также синхротронными колебаниями. — *Прим. ред.*

эффектов в системах с переменным градиентом¹⁾ и орбит в циклотронах с азимутальной вариацией поля. В обоих этих случаях гамильтониан является периодической функцией. Все эти вопросы выходят за рамки нашей книги, однако примеры использования такого подхода можно найти в литературе, рассматривающей нелинейное движение, ссылки на которую приведены в разд. Л. 6,7 гл. 2.

Основные понятия, требующиеся для формулировки теоремы Лиувилля, в частности понятия фазового пространства, нами были уже определены. Теорему можно сформулировать по-разному. Для наших целей удобна следующая формулировка: *Плотность невзаимодействующих частиц консервативной динамической системы в шестимерном фазовом пространстве есть инвариант вдоль их траекторий.* Этот результат следует непосредственно из уравнения непрерывности и гамильтоновых свойств консервативных систем. Уравнение непрерывности для функции распределения $f(P_i, x_i, t)$, которая определяет временную зависимость плотности в фазовом пространстве, записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f\dot{x}_i) + \frac{\partial}{\partial P_i}(f\dot{P}_i) = 0, \quad (4.7)$$

где предполагается, что суммирование по i проводится от 1 до 3. Раскрывая второй и третий члены, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial P_i} + \dot{P}_i \frac{\partial f}{\partial P_i} = 0. \quad (4.8)$$

Используя гамильтониан (4.3), имеем

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial P_i} = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{P}_i \frac{\partial f}{\partial P_i} = 0 \quad (4.10a)$$

или

$$\frac{Df}{Dt} = 0, \quad (4.10b)$$

¹⁾В отечественной литературе принят термин "сильнофокусирующие системы". Применяется также термин "жесткофокусирующие системы". — *Прим. ред.*

где полная производная D/Dt означает скорость изменения координат данной частицы вдоль фазовой траектории. Поток в фазовом пространстве аналогичен потоку несжимаемого газа в реальном пространстве. (Такое движение частиц в фазовом пространстве имеет много общего с моделью "водяного мешка"; ограниченный объем однородной плотности может менять свою форму и положение, но не величину, как это имеет место с заполненным водой эластичным мешком.) Если плотность частиц зависит от их положения, то объем, ограниченный поверхностью, на которой плотность частиц равна данной, сохраняется.

Гамильтониан взаимодействующих частиц содержит члены, обязанные своим происхождением их взаимному влиянию; теорема Лиувилля в этом случае остается справедливой в $6N$ -мерном Γ -пространстве, но нарушается в шестимерном. [В справедливости этого утверждения можно убедиться с помощью аргументов, аналогичных используемым при выводе уравнения (4.10), а также учитывая члены гамильтониана, зависящие от координат всех частиц. Тогда функция f есть плотность вероятности нахождения частиц в данной точке, а не действительная плотность частиц в конкретной системе.] Однако существуют условия, при которых теорема Лиувилля остается хорошим приближением даже с учетом взаимодействия частиц. С формальной точки зрения, если функция $F_N(p_{i1} \dots p_{iN} \dots x_{i1} \dots x_{iN}, t)$ представляет собой распределение частиц в $6N$ -мерном фазовом пространстве, то, интегрируя N раз по набору из шести переменных, можно получить функцию распределения в шестимерном пространстве. Это дает нам функцию распределения F_1 , обозначенную через f в уравнении (4.10). После интегрирования получаем уравнение (4.10), в которое входит дополнительный член с интегралом от F_2 -функции, содержащей информацию о корреляции координат пар частиц. Если такой корреляции нет, то дополнительный член обращается в нуль и имеет место уравнение (4.7). Если же корреляция существует, то интегрируя исходное уравнение, но уже по $N-1$ набору переменных, можно определить F_2 . Полученное уравнение будет содержать член с F_3 , в определении F_3 входит F_4 и т.д. до тех пор, пока не придем вновь к исходному уравнению. Эта цепочка уравнений называется "иерархической цепочкой ББККИ" по начальным буквам фамилий авторов, которые первыми получили ее (Боголюбов, Борн, Грин, Кирквуд и Ивон). Подробности можно найти в книгах по кинетической теории плазмы, таких, как [203, 309].

Замкнуть эту цепочку уравнений можно, только вводя некоторые предположения. Простейшее приближение можно сформулировать следующим образом: одиночная частица более сильно взаимодействует с коллективными полями других частиц, чем со своим ближайшим соседом. Количественно этому условию можно удовлетворить,

потребовав, чтобы дебаевский радиус экранирования (§ 4) был больше расстояния между частицами. В этом случае коллективные поля пространственного заряда и магнитные поля можно рассматривать на том же основании, что и внешние, и можно пренебречь столкновениями между отдельными частицами. Таким образом, теорема Лиувилля остается справедливой, а коллективные силы описываются сглаженным "внешним" потенциалом, одинаковым для всех частиц. Это приближение лежит в основе уравнения Власова, которое мы рассмотрим в § 6.

Во многих встречающихся на практике случаях можно пренебречь рассеянием частиц, и теорема Лиувилля выполняется с хорошей точностью даже при наличии коллективных полей. В других случаях (например, в накопительных кольцах) рассеяние ведет к постоянному уменьшению интенсивности пучка или к его диффузии. Тем не менее, если рассматривать достаточно малый интервал времени, это приближение все еще остается справедливым. Разумеется, в тех случаях, когда гамильтонов формализм применить нельзя, теорема Лиувилля не имеет места. (Такие случаи возникают, когда при подробном рассмотрении динамики вводятся некоторые упрощающие предположения, например при использовании понятия диссипации.) В гл. 5 мы изучим такие явления, как рассеяние частиц на остаточном газе в ускорителях и радиационное затухание в электронных синхротронах.

§ 3. Эмиттанс

3.1. Определение эмиттанса; яркость. Параксиальные и ламинарные пучки, рассмотренные в гл. 2 и 3, представляют собой идеализацию того, что можно встретить на практике. В реальных пучках тепловые скорости частиц в источнике, абберации и другие искажения всегда приводят к неламинарному поведению. Можно ввести критерий, позволяющий количественно характеризовать качество пучка, который называется "эмиттансом". Как мы покажем ниже, он тесно связан с проекцией фазового объема пучка на плоскость. Большинство встречающихся на практике пучков имеют две плоскости симметрии или же являются аксиально-симметричными. Рассмотрим пучок, симметричный относительно плоскостей xz и yz , и определим эмиттанс ϵ_x в плоскости x как уменьшенную в π раз ¹⁾ площадь проекции фазового объема пучка в данном сечении z на плоскость xx' , где z — расстояние, отсчитываемое вдоль пучка. (Конечно, на заданном расстоянии z может оказаться лишь несколько частиц или они вообще могут отсутствовать. В случае стационар-

¹⁾ Иногда в определении эмиттанса множитель $1/\pi$ опускают. Во многих случаях множитель π вводят непосредственно в числовое значение эмиттанса.

ного пучка можна рассматривать частицы, которые проходят соответствующее расстояние z за данное время.) Ясно, что это не совсем полное определение. На практике плотность изображающих точек неоднородна и постепенно уменьшается к краям. Можно договориться о том, чтобы под величиной эмиттанса понимать площадь проекции фазового объема пучка, в которой находится, скажем, 90% полного числа изображающих точек. Вместе с тем, площади, ограниченные линиями равной плотности, внутри которых находятся разные доли пучка, могут иметь неправильные формы.

Чтобы иметь полное представление о пучке, нужно определить не только площадь, но также и форму распределения. Нередко для этого используют "диаграмму эмиттанса", пример которой показан на рис. 4.1. По причинам, которые станут ясными позже, обычно предпочитают диаграмму эллиптической формы, а не какую-либо иррегулярную.

Такие диаграммы можно получить экспериментально, подбирая соответствующее расположение щелей и экранов, как показано на рис. 4.2. Одна из щелей перемещается поперек пучка, а распределение плотности частиц той части пучка, которая проходит через нее, измеряется с помощью другой щели. Подробные вычисления возможностей этого метода выполнил ван Стинберген [280]. Хотя в принципе метод является довольно простым, его не всегда легко применять на практике. Например, если пробег частиц в веществе достаточно велик, то щели должны быть сделаны в толстом материале, а это приводит к "рассеянию на щели". Измерить эмиттанс внутренних пучков, циркулирующих в циклических ускорителях, еще более сложно. Поэтому для отдельных частных случаев было разработано несколько методов.

Диаграмма эмиттанса обладает одним очень важным свойством, которое можно вывести из теоремы Лиувилля. В парааксиальном приближении при $A_x = A_y = 0$, т.е. когда $P_x = p_x$, координата x' пропорциональна p_x/p_z . Следовательно, если движения частиц в x - и y -направлениях не связаны, то при изменении z плотность изображающих точек в пространстве xx' вблизи некоторой выделенной точки остается пропорциональной p_z . Поэтому площадь, занятая данным набором точек, обратно пропорциональна p_z . Если p_z не зависит от z , то плотность изображающих точек в пространстве xx' в окрестности некоторой заданной точки остается постоянной. Таким образом, площадь, занятая данным набором изображающих точек, а следовательно, и эмиттанс являются инвариантными величинами. Если же p_z зависит от z , то эмиттанс меняется обратно пропорционально p_z , поскольку $p_x \sim \beta \gamma x'$. Поэтому во многих случаях используют в качестве инварианта "нормализованный эмиттанс" $\epsilon_n = \beta \gamma \epsilon$. Им удобно пользоваться при рассмотрении пучков уско-

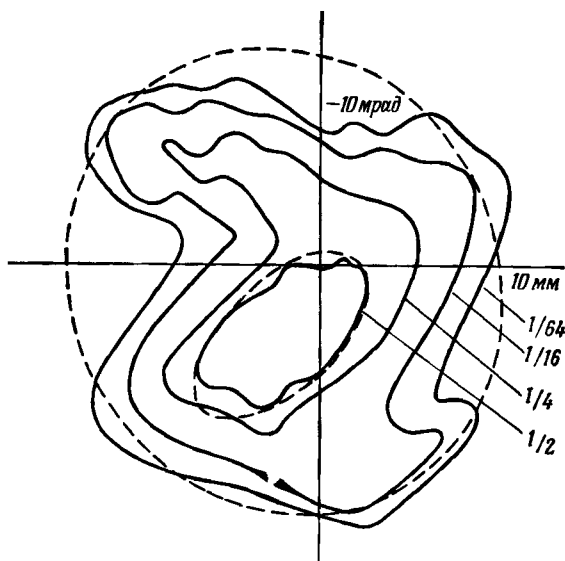


Рис. 4.1. Диаграмма эмиттанса в плоскости xx' аксиально-симметричного пучка, выходящего из гелиевого ионного источника [107].

Сплошными линиями показаны уровни постоянной яркости [выражение (4.11)]. Числа у каждой линии указывают яркость, измеренную относительно максимального значения. Штриховыми линиями отмечены эллипсы.

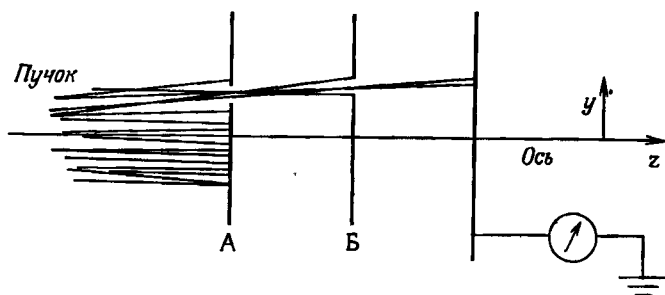


Рис. 4.2. Установка для измерения эмиттанса пучка в плоскости yy' .

Экран A , в котором имеется щель, фиксируется в различных положениях, а экран B перемещается. На третьем экране измеряется ток. Положение первой щели определяет величину y , а положение второй – величину y' для данного y .

ряемых частиц, а такжe при сравненнн пучков разлнчных частиц и пучков частиц с разлнчными энергнями. Для пучков, в которых отсутствует акснальная снмметрня, ϵ_x и ϵ_y явлнются незавнсымыми и ннварннтными, только еслн двнження в x - и y -направленнях не свнзаны. Еслн же онн свнзаны между собой, то в этом слу-чае можно опрелелнть ннварннтный четырехмерный объем, хотя нм пользуются редко.

При наличин акснального магннтного поля двнження частиц в x - и y -направленнях всегда свнзаны друг с другом. Эмнттансы акснально-снмметрнчного пучка в обеих плоскостях постоянны и равны между собой. Значенне эмнттанса акснально-снмметрнчного пучка, измеренное во врашающейсн системе коордннат, отлнчается от его значения, измеренного в стацинарной системе. Еслн пучок состонт из частиц, двнжушнхся по спнральным траекторням с угловой скоростью ω относительно осн, то очевндно, что в системе коордннат, врашающейсн с той же скоростью, эмнттанс равен нулю. Ннже мы выясннм, что при наличин акснального магннтного поля эмнттанс удобно измерять в ларморовской системе коордннат. Поэтому эмнттанс брнллиуэновского потока равен нулю, хотя в стацинарной системе коордннат он будет нметь конечное значение¹⁾. Переход в ларморовскую систему коордннат позволнть устрннить из рассмотрення магннтное поле B_z и выбрать $A_\theta = 0$.

В данной плоскостн z моноэнергетнческие частицы, для которых $\dot{z} \gg \dot{x}, \dot{y}$, нмют одннаковые нмпульсы p_z , так что пучок можно адекватно описывать в четырехмерном фазовом прострнстве. Однако в реальном пучке сущестует значнтельный разброс энергнй частиц и для полного его описання необходнмо анализнровать пучок в шестнмерном фазовом прострнстве. В ускорнтелях с бегущнм полем, таких, как снхротроны и лннейные ускорнтелн, вместо z и p_z удобно перейти к переменным ϕ и W (см. разд. 8.2 гл. 2), рассматрнваемые как каноннческие переменные, соответствующие продольным степеням свободы. Поперечные и продольные составляющие будем называть "бетатронным" и "снхротронным" фазовыми прострнствами.

Эмнттанс тесно свнзан с нспользуемым в электроннй оптике поннтьем "яркости" пучка. Она опрелелается как ток, протекающнй

¹⁾Этн рассуждення автора нуждаются в некотором поясненнн. Согласно опрелеленню эмнттанса как фазового объема, для ламнарного пучка его значение всегда равно нулю. Однако можно ввести условное поннтьем "эффектнвного эмнттанса". Например, еслн эмнттанс пучка в ларморовской системе коордннат нзображается точкой с нулевым фазовым объемом, а в лабораторной — некоторой лнней, также нмеющей нулевой фазовый объем, то для согласовання пучка с каналом важно знать форму этой лннн, а также то, попадает лн она внутрн диаграммы аксептанса канала, т.е. эффектнвный эмнттанс надо опрелелнть соответствующнм образом. — *Прнм. ред.*

через единичную площадь пучка в единичный телесный угол:

$$B = dI/dAd\Omega. \quad (4.11)$$

Яркость имеет размерность $A \cdot m^{-2} sr^{-1}$. В общем случае яркость B изменяется по сечению пучка и часто используют ее среднее значение. Для небольших углов можно записать $d\Omega dA = 4\pi^2 r r' dr dr'$. В случае пучка, имеющего однородную плотность в областях $r < r_1$ и $r' < r_1'$, диаграммы эмиттанса в плоскостях xx' и yy' представляют собой прямоугольники. Площадь их равна $\pi \epsilon = 4\pi x x' = 4\pi r r'$, а $d\Omega dA = \pi^2 r^2 r'^2 = \pi^4 \epsilon^2 / 16$, причем плотность распределена неоднородно. Если такой пучок переносит ток I , то $B = 16 I / \pi^4 \epsilon^2$. В общем случае между r и r' существует некоторая корреляция и распределение плотности пучка является неоднородным. При этих условиях следует использовать среднее значение. Таким образом, имеем следующее выражение:

$$B = \eta I / \pi^2 \epsilon^2, \quad (4.12)$$

где величина $\eta \approx 1$ представляет собой форм-фактор. Инвариантной величиной, соответствующей нормализованному эмиттансу, является $\beta^2 \gamma^2 / B$, которая в нерелятивистском случае пропорциональная ϕ / B .

Сохранение отношения яркости к импульсу подразумевалось также и в выражении (2.62), которое связывает увеличение с отношением углов между лучом и осью. Если x_0 и x_1 — точки, соответствующие предмету и его изображению, а θ_0 и θ_1 — углы между парой лучей, выходящих из точек x_0 к x_1 , то из выражения (2.62) имеем

$$\frac{x_1 \theta_1}{x_0 \theta_0} = \frac{x_1 x_1'}{x_0 x_0'} = \frac{\beta_0 \gamma_0}{\beta_1 \gamma_1}. \quad (4.13)$$

Соответствующий принцип световой оптики гласит: яркость изображения равна яркости источника, умноженной на квадрат отношения показателей преломления сред в пространствах предмета и изображения. Это соотношение, выраженное через углы лучей и размеры изображения, называется соотношением Гельмгольца — Лагранжа; в световой оптике роль $\beta \gamma$ играет показатель преломления n .

Связь световой оптики и оптики пучков заряженных частиц рассматривалась во многих работах по электронной оптике. Это соответствие нетрудно понять, сравнивая принцип Ферма с принципом наименьшего действия. Соответствующими величинами являются показатель преломления и канонический импульс. Допустимые пространственные вариации показателя преломления в оптике частиц

в областях, где нет сторонних зарядов и токов, ограничены требованием, чтобы поля удовлетворяли уравнению Пуассона, что уже отмечалось выше при обсуждении линз и их аббераций. В световой оптике таких ограничений не существует; с другой стороны, на практике гораздо удобнее использовать области с постоянным показателем преломления, ограниченные либо криволинейными, либо плоскими поверхностями. Вследствие этих различий возможность тщательного сравнения двух предметов ограничена. Тем не менее в книге [194] описан интересный подход для исследования оптических волноводов с использованием матричного аппарата.

Обсуждение в данном разделе было не очень подробным. В частности, мы ограничивались рассмотрением только параксиального приближения, которое вряд ли является адекватным в случаях, когда пучки испускаются не из точечных источников, а с поверхностей. Кроме того, соотношение между яркостью и эмиттансом было получено довольно приближенным методом. В работах [87, 280, 302] эти вопросы рассмотрены более тщательно. Критический разбор понятия эмиттанса имеется в работах [158, 160].

3.2. Фазово-амплитудные переменные и согласование пучка. До сих пор для описания ламинарных пучков с однородным распределением плотности заряда по сечению использовалось уравнение параксиального луча с учетом влияния как собственного пространственного заряда, так и собственного магнитного поля пучка. В разд. 3.1 гл. 3 было показано, что уравнение огибающей пучка можно найти из параксиального уравнения, если заменить r радиусом пучка a . В случае же, когда поток неламинарен или параксиальное уравнение записано в декартовой системе координат, этого больше нельзя сделать. В данном разделе мы выведем соответствующее уравнение в декартовой системе координат, используя приведенные переменные. Оно позволит описать пучки эллиптического сечения, имеющие различные размеры в направлениях осей x и y .

Рассмотрим движение частиц вдоль оси x и используем приведенную переменную $X = (\beta\gamma)^{1/2}x$. Параксиальное уравнение запишем в виде

$$X'' + \kappa(s)X = 0, \quad (4.14)$$

где $\kappa(s)$ учитывает как внешнее фокусирующее, так и линейное собственное поле пучка, имеющего однородное распределение плотности по сечению. В общем случае $\kappa(s)$ является непрерывной функцией s . В некоторых приложениях, таких, как синхротроны с переменным градиентом, она может быть кусочно-постоянной и периодической. Мы не будем здесь требовать ламинарности потока, так что частицы могут перемещаться из центра к внешней гра-

нице пучка. Оставим пока до будущего рассмотрения вопрос о форме функции распределения, которая соответствует однородному пучку с неламинарным течением, и просто постулируем, что такое распределение существует.

При переходе к фазовым и амплитудным переменным уравнение (4.14) принимает другой вид. Эти переменные определяются выражениями

$$X = Aw(s) \cos \{\psi(s) + \phi\}, \quad (4.15)$$

$$X' + A[w'(s) \cos \{\psi(s) + \phi\} - \frac{1}{w} \sin \{\psi(s) + \phi\}], \quad (4.16)$$

причем функции w и ψ связаны между собой ограничивающим условием

$$\psi' = 1/w^2. \quad (4.17)$$

Причина такого кажущегося произвольным выбора станет очевидной позже. Мы ввели четыре переменные: w , ψ , A и ϕ . Из них w и ψ являются функциями от s и одними и теми же для всех траекторий, в то время как величины A и ϕ не зависят от s и заменяют значения X и X' , вычисленные в точке $s = 0$, которые определяют конкретную траекторию. Подставляя (4.15) в уравнение (4.14), получаем, что w должно удовлетворять уравнению

$$w'' + kw - \frac{1}{w^3} = 0. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) имеет множество решений, и нам остается только выбрать из них соответствующее. Чтобы это сделать, найдем соотношение между переменными A , X , X' , w и w' путем исключения функции ψ из выражений (4.15) и (4.16) (используя при этом тождество $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$). Искомое соотношение можно записать в виде

$$A^2 = \frac{X^2}{w^2} + (wX' - w'X)^2 \quad (4.19)$$

или

$$A^2 = \gamma_0 X^2 + 2\alpha_0 X X' + \beta_0 X'^2, \quad (4.20)$$

где

$$\alpha_0 = -ww', \quad \beta_0 = w^2, \quad \gamma_0 = w^{-2} + w'^2 = \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0}. \quad (4.21)$$

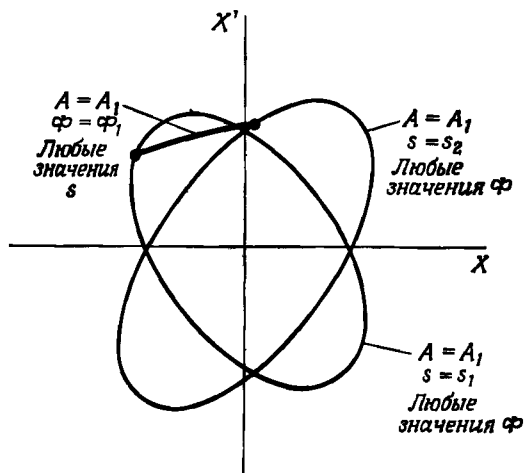


Рис. 4.3. Трансформация эллипса, описываемого уравнением (4.20), в плоскости XX' .

Все изображающие точки, соответствующие данному значению A и данной аксиальной координате s , лежат на эллипсе; при изменении s изображающие точки скользят по эллипсу, эксцентриситет и ориентация которого меняются, а площадь остается постоянной.

Уравнение (4.20) представляет собой уравнение эллипса в плоскости XX' . Размеры, эксцентриситет и ориентация этого эллипса определяются величиной A и коэффициентами α_0 и β_0 . В свою очередь эти два коэффициента зависят от w и w' . Поэтому, чтобы проследить за движением ансамбля изображающих точек, лежащих на данном эллипсе, при изменении s , нам необходимо знать, как меняется w . Это можно найти, используя в уравнении (4.18) соответствующие начальные условия. Для изображающих точек, лежащих на эллипсе, имеется единственное значение A , а величина Φ меняется в диапазоне $0 - 2\pi$. Изображающие точки, траектории которых соответствуют другим значениям A , располагаются на геометрически подобных эллипсах. По мере того как s изменяется, форма и ориентация эллипса меняются в соответствии с изменением w и w' , а изображающие точки, характеризуемые данным значением Φ , перемещаются по эллипсу так, как это показано на рис. 4.3. Площадь эллипса, описываемого уравнением (4.20), дается выражением

$$S = \pi A^2 (\beta_0 \gamma_0 - \alpha_0^2)^{-1/2}. \quad (4.22)$$

Из (4.21) следует, что величина в скобках равна единице. Таким образом, площадь является инвариантом и равняется πA^2 .

Рассмотрим теперь ансамбль траекторий изображающих точек, равномерно распределенных внутри эллипса. При изменении s все точки перемещаются по геометрически подобным эллипсам, определяемым соответствующим значением A . Поскольку площадь эллипса есть инвариант, из теоремы Лиувилля следует, что плотность изображающих точек сохраняется постоянной. Кроме того, площадь эллипса равна произведению числа π на нормализованный эмиттанс пучка, равный $\epsilon_n = A_0^2$, где A_0 — максимальное значение величины A .

Нетрудно вычислить огибающую пучка, траектории изображающих точек которого однородно распределяются по эллипсу в фазовом пространстве (т.е. однородно заполняют область $A < A_0$ при любых значениях Φ). При любом значении s граничной частице пучка соответствуют условия $\psi + \Phi = 0$ и $A = A_0 = \epsilon_n^{1/2}$. Для таких частиц из выражения (4.15) имеем $X = A_0 w$ и из уравнения (4.18) находим следующее уравнение для огибающей пучка:

$$X'' + \kappa X - \epsilon_n^2 X^{-3} = 0, \quad (4.25)$$

причем начальные условия определяются из выражений (4.15) — (4.17) и (4.21).

Интересное частное решение этого уравнения получается при $\kappa = 0$, т.е. когда никаких фокусирующих сил нет. Соотношение (4.19) сводится при этом к уравнению $X''X^3 = \epsilon_n^2$, решение которого записывается в виде

$$X = \left(X_1^2 + \frac{\epsilon_n^2 s^2}{X_1^2} \right)^{1/2}. \quad (4.24)$$

Начальные условия выбраны так, чтобы $X = X_1$ и $X' = 0$ при $s = 0$. Огибающая пучка имеет вид гиперболы с "перетяжкой" в точке $s = 0$; все траектории отдельных частиц представляют собой прямые линии.

Приступим теперь к изучению свойств эллипса в плоскости XX' для типичных ситуаций, встречающихся при расчете линий транспортировки пучков. Простейшим из них является однородно-фокусирующий канал, в котором κ является постоянной величиной. На рис. 4.4 показано, как преобразуется эллипс вдоль такого канала. Если пучок выходит из точечного источника, то эллипс вырождается в линию; если же при любом данном значении A частицы имеют равномерное распределение по Φ , то эллипс остается в вертикальном положении и его ориентация не зависит от s . О таком пучке говорят, что он "согласован" с каналом. Ему соответствует решение уравнения (4.23), в котором κ — постоянная величина, а $X'' = 0$. Размер пучка определяется выражением

$$X = \epsilon_n^{1/2} \kappa^{-1/4}. \quad (4.25)$$

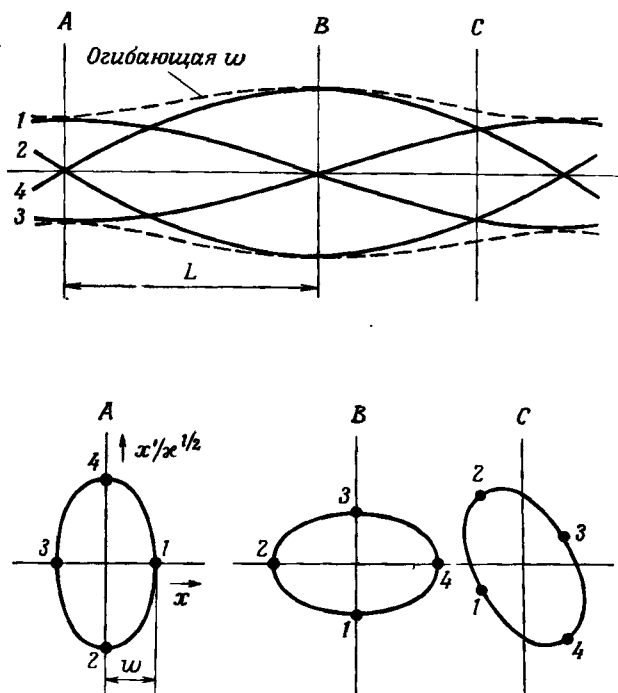


Рис. 4.4. Траектории частиц, огibaющая пучка, матрица преобразования и трансформация фазового объема типичного пучка в однородно-фокусирующем канале.

Масштаб выбран таким образом, что отдельные изображающие точки движутся по окружностям. Матрица преобразования участка канала длиной L записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \cos \kappa L & \kappa^{-1/2} \sin \kappa L \\ -\kappa^{1/2} \sin \kappa L & \cos \kappa L \end{pmatrix}.$$

"Акцептанс" канала конечной ширины, характеризуемой данным значением $X = X_1$, определяется как значение эмиттанса, равное в соответствии с выражением (4.25) $\epsilon_n = \kappa^{1/2} X^2$.

Чтобы пучок эффективно перевести из широкого слабофокусирующего канала в более узкий сильнофокусирующий канал, необходима "четвертьволновая" согласующая секция с соответствующей фокусирующей силой $\kappa_m^2 = \kappa_1 \kappa_2$. На рис. 4.5 показаны траектории частиц и преобразование фазового объема пучка для этого случая. В обоих каналах пучок согласован. На рис. 4.6 иллюстрируется прохождение пучка через тонкую линзу.

В более общем смысле "диаграмма акцептанса", характеризу-

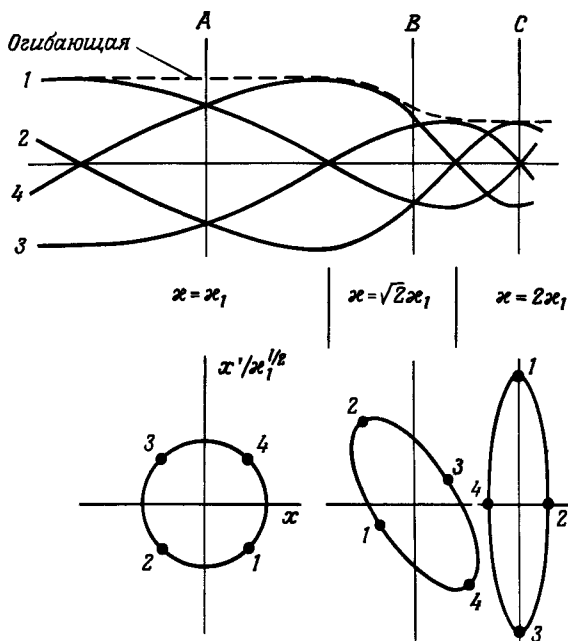


Рис. 4.5. Траектории частиц, оггибающая пучка и трансформация фазового объема пучка, проходящего из согласованного канала с фокусирующей силой $\kappa = \kappa_1$ через согласующую секцию с фокусирующей силой $\kappa = \sqrt{2}\kappa_1$ в канал с фокусирующей силой $\kappa = 2\kappa_1$.

Матрица преобразования приведена в подписи к рис. 4.4, в которую надо подставить соответствующие значения κ .

ющая часть системы, представляет собой контур в пространстве $x x'$, показывающий предельно допустимые значения координат частиц, которые могут пройти через эту часть системы без столкновений со стенками. В общем случае контур не имеет эллиптической формы. Если мы имеем пучок с известным эмиттансом, например выходящий из источника, то при условии, что эмиттанс меньше акцептанса, в принципе можно построить согласующую секцию, чтобы преобразовать форму эмиттанса. С помощью линейно-фокусирующих элементов это можно сделать непосредственным образом, только если диаграммы акцептанса и эмиттанса имеют форму эллипсов. В нелинейных же системах $x x'$ и $u u'$, по всей вероятности, связаны между собой и проблема становится более сложной. На практике часто удобно иметь дело с эллипсами, описанными вокруг диаграммы эмиттанса или вписанными в диаграмму акцептанса соответствующей установки.

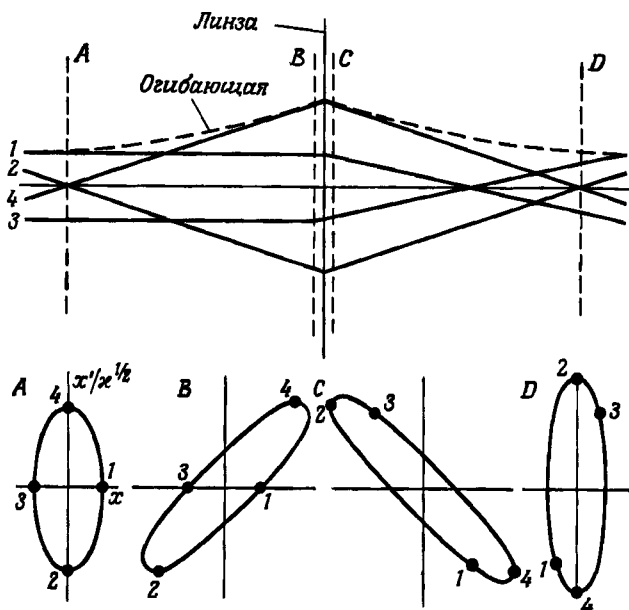


Рис. 4.6. Траектории частиц, огибающая пучка и трансформация фазового объема пучка, проходящего через тонкую линзу.

$AB = CD = 2F$, где F – фокусное расстояние линзы. Матрица преобразования системы $M_{DA} = M_{BA}M_{CB}M_{DC}$ имеет вид

$$M_{DA} = \begin{pmatrix} 1 & 2F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/F & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Распределение Капчинского – Владимирского. Функция распределения в пространстве $xx'yy'$, которая при проекции на плоскости xh' , yy' , xu' , $x'u'$, xu' и $x'u'$ дает равномерное эллиптическое распределение частиц, была получена Капчинским и Владимирским [138]. В дальнейшем будем называть ее "КВ-распределением". Уолш [304] предложил менее удачный термин "нормальное распределение". Это распределение описывает однородно заполненную гиперэллипсоидальную трехмерную оболочку в четырехмерном фазовом пространстве. В однородном фокусирующем канале, который согласован с пучком и в котором огибающая пучка параллельна оси канала, оси гиперэллипсоида параллельны координатным осям и функция распределения имеет простой вид:

$$f(x, y, x', y') = \delta \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2 x'^2}{\epsilon_x^2} + \frac{b^2 y'^2}{\epsilon_y^2} - 1 \right). \quad (4.26)$$

Обобщая теорему Архимеда, получаем, что все двумерные проекции такой трехмерной гиперэллипсоидальной оболочки имеют однородную плотность, так что это распределение обладает удобным свойством: оно описывает пучок с равномерным распределением плотности заряда, в котором силы, обусловленные собственными полями, меняются линейно с радиусом. Если $a/b = \epsilon_x/\epsilon_y$, то для данного распределения энергия (кинетическая и потенциальная) всех частиц в поперечном направлении одна и та же и это распределение можно назвать "микрочаноническим".

В аксиально-симметричном согласованном пучке, в котором $a = b$ и $\epsilon_x = \epsilon_y$, проекции траекторий частиц на плоскость xu имеют вид окружностей (рис. 4.7). Все орбиты располагаются внутри кольцевой области, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно $a/\sqrt{2}$ и a , а энергии всех частиц в поперечном направлении одинаковы. В плоскости xx' проекции траекторий являются концентрическими окружностями, в то время как в плоскости xu' они являются эллипсами, эксцентриситеты которых могут быть любыми, а большая полуось всегда меньше, чем a . Нетрудно показать, что для КВ-распределения форм-фактор, входящий в соотношение (4.12) между яркостью и эмиттансом, равен 2 [304].

Это очень удобное распределение благодаря однородному распределению плотности в различных проекциях используется в аналитических расчетах. Однако оно не соответствует физической реальности, поскольку в нем не учитываются частицы, совершающие колебания небольшой амплитуды в обеих плоскостях. На практике

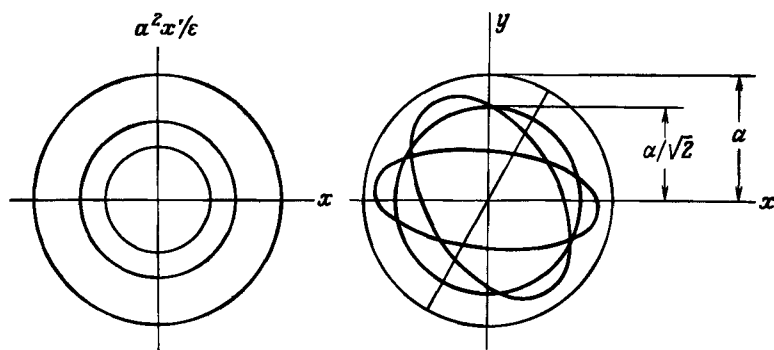


Рис. 4.7. Проекция на плоскости xx' и xu траекторий частиц в согласованном однородном цилиндрическом пучке, описываемом распределением Капчинского - Владимирского.

На рисунке справа сумма квадратов осей эллипсов является постоянной для всех эллипсов.

распределения не имеют вид чисто трубчатых, и их плотность в четырехмерном фазовом пространстве спадает монотонно с уменьшением радиуса. Тем не менее по указанным выше причинам КВ-распределение позволяет построить удобную модель, которой мы воспользуемся в разд. 3.4, для исследования влияния собственных полей, меняющихся линейно с радиусом, на динамику частиц. Следует заметить, что фазовый объем пучка, описываемого КВ-распределением, равен нулю, даже если траектории частиц в реальном пучке пересекаются. Четырехмерный фазовый объем, соответствующий реальному пучку, является не очень полезным физическим параметром.

3.4. Фазовая и амплитудная переменные в периодических системах.

Эти переменные и особенно параметр¹⁾ β_0 , входящий в выражение (4.22), очень удобно использовать для изучения свойств согласованного пучка в периодических структурах, которые применяются в ускорителях частиц и накопительных кольцах.

В системах, в которых k меняется периодически, нас будут интересовать решения уравнения (4.14) [или уравнения (4.18)], описывающие пучок, огибающая которого периодически изменяется с периодом структуры. При данном значении A плотность частиц в таком согласованном пучке распределена однородно по Φ . Диаграмма эмиттанса, имеющая форму эллипса, остается неизменной в соответствующих точках различных периодов структуры, но изображающие точки, соответствующие выделенной частице, располагаются на эллипсе в разных местах. Это видно из выражения (4.15); поскольку огибающая пучка имеет периодическую форму, величина w представляет собой периодическую функцию, $\Phi = \text{const}$, а ψ изменяется на одном периоде структуры на величину, не кратную 2π .

Для того чтобы найти периодическое решение уравнения (4.20), необходимо вначале найти матрицу преобразования, элементы которой выражены через w, w' и ψ . Это можно сделать, находя фундаментальные решения уравнения (4.14) и определяя соответствующие им значения A и Φ при начальных условиях $(X, X') = (1, 0)$ и $(0, 1)$ в точке s_1 , а затем записывая матрицу через эти решения, как это делалось при выводе матрицы преобразования (2.32). С помощью выражений (4.15) и (4.16) параметры A и Φ можно записать через значения w, w' и ψ , вычисленные в точке s_1 , а матрицу записать как функцию от s_2 через значения w, w' и ψ , вычисленные в точке s_2 . Если w — периодическая функция с периодом L , то $w(s_1) = w(s_1 + L)$. Обозначая

¹⁾Используемое здесь обозначение β с индексом позволяет не путать этот параметр с $\beta = v/c$, и в дальнейшем изложении оно не встречается.

$w(s_1) = w(s_1 + L) = w_1$, $w'(s_1 + L) = w_1'$ и $\psi(s_1 + L) - \psi(s_1) = \psi_L$, получаем матрицу преобразования для одного периода:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos \psi_L - w_1 w_1' \sin \psi_L & w_1^2 \sin \psi_L \\ - (w_1^{-2} + w_1'^2) \sin \psi_L & \cos \psi_L + w w' \sin \psi_L \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Используя уравнение (4.14), эту матрицу можно переписать в виде

$$M_{21} = \cos \psi_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \psi_L \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\gamma_0 & -\alpha_0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

который аналогичен виду матрицы (2.132) при $\psi_L = \mu$. Из условия $\beta_0 = w^2 = 1/\psi'$ следует важное соотношение

$$\psi_L = \int_0^L \frac{1}{\beta_0} ds. \quad (4.29)$$

Пусть NL — периметр замкнутой периодической установки. Тогда мы имеем $Q = N\psi_L / 2\pi$.

Таким образом, можно сказать, что w или β_0 представляют собой периодические функции, период которых равен периоду структуры. С помощью уравнений (4.20) и (4.23) они определяют профиль согласованного пучка. Величина ψ является фазовой функцией, изменяющейся с частотой, равной частоте структуры. Смещение отдельной частицы пропорционально величине $w \cos(\psi + \Phi)$, которая *непериодическим* образом зависит от частоты структуры.

Данное обсуждение показывает в самых общих чертах только некоторые свойства движения частиц в периодических структурах. Например, мы предполагали, что для w существует периодическое решение; однако это несправедливо, если матрица преобразования такова, что $\cos \psi_L$ будет больше, чем единица. В этом случае происходит резонансный рост амплитуды колебаний (см. разд. 7.3 гл. 2).

3.5. Влияние собственных линейных полей; самосжатый пучок.

В разд. 3.2 мы получили уравнение для огибающей пучка, описываемого КВ-распределением в фазовом пространстве. Оно представляет собой параксиальное уравнение движения одиночной частицы, в которое входит дополнительный член $\epsilon_{\parallel}^2 / X^3$. При анализе мы исключили наличие продольных магнитных полей и ограничились рассмотрением движения частиц пучка в одной плоскости.

В случае аксиально-симметричного пучка скорость x можно ориентировать в любом направлении, поэтому для описания движения частиц можно использовать то же самое уравнение, заменив X на R . Уравнение огибающей пучка запишем соответственно через радиус пучка a :

$$a'' + \frac{\gamma' a'}{\beta^2 \gamma} + \left\{ \frac{\gamma''}{2\beta^2 \gamma} + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2 c^2} \right\} a - \frac{\kappa}{a} - \frac{\epsilon_n^2}{\beta^2 \gamma^2 a^3} = 0. \quad (4.30)$$

В разд. 3.2 мы выбрали канонический момент импульса равным нулю, и именно поэтому он входит в уравнение (4.30). Следует заметить, однако, что в уравнении (2.14) член, содержащий канонический момент импульса, имеет вид, аналогичный члену уравнения (4.30), в который входит эмиттанс. В самом деле, проекции на плоскость xx' орбит, соответствующих КВ-распределению или ламинарному спиральному распределению, одинаковы, если равны соответствующие коэффициенты уравнений:

$$\epsilon_n = \beta \gamma \epsilon = \frac{p_{\theta a}}{m_0 \sigma} = \frac{\alpha \beta \theta a}{\beta z}, \quad (4.31)$$

где, как и выше, индексом a обозначены значения величин на границе пучка. Соотношение (4.31) связывает эмиттанс пучка с параметрами, характеризующими его вращение, а именно с $p_{\theta a}$ или $\beta \theta a$.

Нетрудно убедиться, что при таком ламинарном спиральном движении проекции траекторий на плоскости xx' и yy' представляют собой вертикальные эллипсы, причем эмиттанс равен $a\theta$, где θ — угол спирали. Ламинарное распределение можно представить себе в виде двумерной оболочки в четырехмерном фазовом пространстве, которое получается при пересечении трехмерных объемов:

$$x = y' a^2 / \epsilon, \quad y = -x' a^2 / \epsilon, \quad (4.32)$$

где $\epsilon = a\theta$.

Эквивалентность эмиттанса потока с пересекающимися траекториями, описываемого КВ-распределением, и эмиттанса ламинарного вращающегося потока подчеркивает, что эмиттанс — это свойство проекций, которое не зависит от корреляции, например, между x' и y . Поэтому не существует какого-либо прямого соответствия между эмиттансом и параметрами, такими, как давление и температура, для определения которых надо знать зависимость функции распределения как от x' , так и от y' в данной точке пучка. В разд. 4.2, в котором исследуется соотношение между давлением, температурой и эмиттансом, мы вновь вернемся к сравнению КВ-распределения и ламинарного распределения.

В уравнении (4.30) для пучков, в которых тенденция к увеличению размеров вследствие конечных значений эмиттанса компенсируется стремлением к самосжатию, или "пинчеванию", обусловленным отрицательными значениями K , отличны от нуля только последние два члена. Следовательно, равновесный радиус пучка дается выражением

$$a^2 = \frac{-\epsilon^2 n}{\beta^2 \gamma^2 K} = \frac{-\epsilon^2}{K} \quad (4.33)$$

Этот радиус соответствует радиусу полностью нейтрализованного ламинарного пинча, полученного в разд. 2.7 гл. 3 :

$$-K = \left(\frac{\beta_{\theta} a}{\beta_z} \right)^2 = 2 \left(\frac{\beta_{\theta}^2}{\beta_z^2} \right) \quad (4.34)$$

Первый и последние два члена уравнения (4.30) определяют профиль расплывающегося пучка (огibaющую) с учетом конечной величины эмиттанса. Уолш [304] и Вебер [305] вычислили эти величины для некоторых случаев. Сравнивая последние два члена, можно получить критерий того, что будет оказывать преобладающее воздействие на пучок: эмиттанс или пространственный заряд. В области перетяжки их влияние примерно одинаково, если для осевого луча $r' = K^{1/2}$.

3.6. Уравнения Капчинского – Владимирского. Если пучок не обладает аксиальной симметрией, то ситуация становится более сложной, особенно в присутствии продольного поля V_s . В этом случае огibaющая пучка описывается двумя связанными уравнениями. В отсутствие магнитного поля V_s уравнения имеют относительно простой вид. Их иногда называют уравнениями КВ, поскольку впервые они были выведены Капчинским и Владимирским [138].

Эти уравнения можно получить непосредственно из уравнения (3.76), описывающего собственные поля пучка эллиптического поперечного сечения, вводя различные фокусирующие силы в плоскостях x и y . В том виде, в каком они были получены первоначально, их можно записать при условии отсутствия поля E_s следующим образом:

$$\begin{aligned} a'' + \kappa_x a - \frac{2K}{a+b} - \frac{\epsilon^2 x}{a^3} &= 0, \\ b'' + \kappa_y b - \frac{2K}{a+b} - \frac{\epsilon^2 y}{b^3} &= 0; \end{aligned} \quad (4.35)$$

здесь κ учитывает внешние фокусирующие поля, K учитывает соб-

ственные поля, а ϵ представляет собой эмиттанс конечной величины.

Уравнения (4.35) являются уравнениями *огibaющей пучка*, в которых κ_x и κ_y зависят от s . В случае согласованного пучка, когда κ_x и κ_y не зависят от s , размеры $x = a$ и $y = b$ можно найти, подставляя $x'' = y'' = 0$ и разрешая уравнения относительно x и y . Уравнение *траекторий* частиц в таком однородном пучке эллиптического сечения записывается в виде

$$\begin{aligned} x'' + \left\{ \kappa_x - \frac{2K}{a(a+b)} \right\} x &= 0, \\ y'' + \left\{ \kappa_y - \frac{2K}{b(a+b)} \right\} y &= 0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

В разд. 4.4 гл. 3 мы рассмотрели частный случай ламинарного потока, когда $x'' = y'' = 0$, а $\kappa_x = (1-n)/R^2$ и $\kappa_y = n/R^2$.

3.7. Общее параксиальное уравнение огibaющей пучка в приведенных переменных. Здесь уместно использовать полученные выше результаты и записать параксиальное уравнение для огibaющей пучка в приведенных переменных, учитывая все эффекты, рассмотренные до сих пор. Параксиальное уравнение можно записать через приведенный радиус $A = (\beta\gamma)^{1/2}a$ следующим образом [ср. уравнение (2.41)]:

$$A'' + \left\{ \frac{\gamma^2(\gamma^2+2)}{4\beta^4\gamma^4} + \frac{\Omega_L^2}{\beta^2c^2} \right\} A - \frac{\beta\gamma K}{A} - \frac{\epsilon_n}{A^3} = 0. \tag{4.37}$$

1 2 3 4 5

В большинстве рассмотренных случаев учитывались только два или три члена. Эти случаи перечислены в табл. 4.1. Член под номером 5а входит в уравнение вместо пятого члена в случае ламинарного потока с конечным эмиттансом $\epsilon_n = p\theta_a/m_0c^1$.

3.8. Нелинейные оптические системы; рост эмиттанса²⁾.

До сих пор мы изучали только системы с линейно изменяющимися внешними и собственными полями. Нелинейности и абберации искажают форму фазового объема, так что площадь его проекции увели-

¹⁾ В общем случае фазовый объем, а следовательно, и эмиттанс любого ламинарного потока равны нулю. В данном случае эмиттанс изображается на фазовой плоскости прямой линией с нулевым фазовым объемом, а под величиной эмиттанса автор понимает площадь прямоугольника в фазовом пространстве, диагональ которого служит эта линия, т. е. некий "эффективный" эмиттанс. — *Прим. ред.*

²⁾ В этом разделе под ростом эмиттанса понимается, что в фокусирующем канале с нелинейностями эмиттанс увеличивается лишь за счет процесса нитеобразования, показанного на рис. 4.8 и 4.9. Это в действительности имеет место, только если распределение частиц на фазовой плоскости яв-

Таблица 4.1.

СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ РАЗЛИЧНЫМИ ЧАСТНЫМИ СЛУЧАЯМИ УРАВНЕНИЯ (4.37)

Члены, оставленные в уравнении	Физическая система	Раздел книги, в котором они изучались
1, 2	Электростатические линзы	2.5 гл. 2
1, 4	Магнитные линзы	2.6 гл. 2
1, 4	Расплывание пучка под действием пространственного заряда	2.6 гл. 3
1, 5 или 5а	Перетяжка пучка	3.2 гл. 4
1, 2, 5а	Система электростатических линз	3.2 гл. 4
3, 4	Бриллюэновский поток	2.8 гл. 3
3, 4, 5а	Равновесие потока в аксиальном магнитном поле	2.8 гл. 3
3, 5	Согласованный пучок в поле B_z	3.2 гл. 4
4, 5	Однородный пинч	3.5 гл. 4
4, 5а	Ламинарный пинч	2.7 гл. 3

чивается, хотя величина четырехмерного объема остается постоянной. (В самом деле, поскольку КВ-распределение описывает только оболочку в четырехмерном фазовом пространстве, ее гиперобъем равен нулю!)

Если рассмотреть частицы, находящиеся в тонком слое пучка, в котором они могут двигаться только в одной плоскости, то нелинейности и аберрации в оптической системе искажают эллиптическую форму фазового объема. В данном разделе под эмиттансом пучка будем понимать эмиттанс именно такого тонкого слоя, а не рассматривавшийся выше эмиттанс всего пучка.

Площадь внутри искаженных прямых, разумеется, остается постоянной, однако по практическим соображениям (например, при согласовании пучка с фокусирующим каналом) существенную роль играет величина, представляющая собой площадь эллипса, описывающего искаженную проекцию фазового объема пучка. Его размеры, а следовательно, и эффективный эмиттанс¹⁾ пучка растут под влиянием нелинейностей.

В качестве примера рассмотрим точечный источник, помещен-

ляется тонкой линией вблизи плоскостей xz или yz . В общем случае при прохождении пучка через нелинейно-фокусирующий канал растет полный фазовый объем пучка и, следовательно, возрастает площадь проекции фазового объема. Поэтому все, что изложено в данном разделе, надо рассматривать лишь как материал, представляющий академический интерес.

¹⁾ Эффективный эмиттанс определяют как площадь этого описанного эллипса. — Прим. ред.

ный в такой нелинейно-фокусирующий канал, что длина волны колебаний частицы, испущенной из этого точечного источника, уменьшается с ростом амплитуды. Пусть источник испускает однородный пучок в интервале углов $\pm x'_0$, диаграмма эмиттанса которого в источнике представляет собой прямую линию. С увеличением s эта линия изгибается и скручивается, как показано на рис. 4.8. (Аналогичное поведение в начальной стадии можно заметить на рис. 4.1.) Фактическая площадь, заключенная внутри этой линии, остается равной нулю, как требует теорема Лиувилля, однако в конечном счете изображающие точки целиком заполняют на фазовой плоскости область, ограниченную окружностью, помеченной на рисунке штриховой линией. Микроэмиттанс все еще остается нулевым, а макроэмиттанс возрастает до величины, несколько большей, чем $x'_0 k^{-1/2}$.

Такое расплывание фазового объема пучка, характерное для нелинейных систем, иногда называют "нитеобразованием". Оно имеет место, в частности, для фазовых колебаний (см. разд. 8.2 гл. 2), когда частота колебаний на сепаратрисе стремится к нулю. Понятия фазового пространства с успехом применялись для исследования фазовых колебаний, особенно при расчете условий захвата частиц в процессе ускорения в синхротронах и накопления ускоренных пучков в накопительных кольцах. Эта сторона вопроса исчерпывающе изложена в книге Лихтенберга [182]. Аналогичный процесс нитеобразования встречается также при описании эволюции звездных

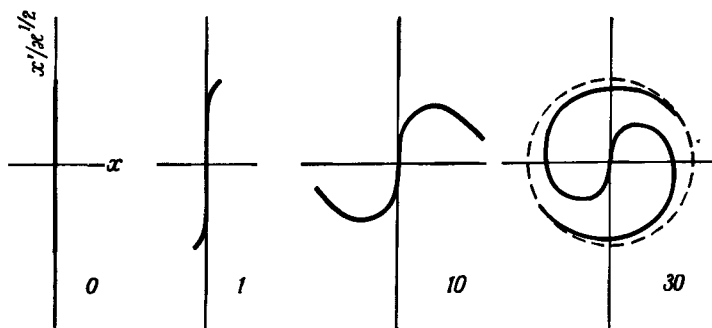


Рис. 4.8. Фазовая диаграмма пучка, выходящего из точечного катода и попадающего в однородный фокусирующий канал с небольшой нелинейностью фокусирующей силы.

Числами указано количество колебаний малой амплитуды, совершаемых частицами. Хотя линия имеет нулевую площадь, за достаточно большое время она эффективно "заполняет" область внутри окружности, изображенной штриховой линией.

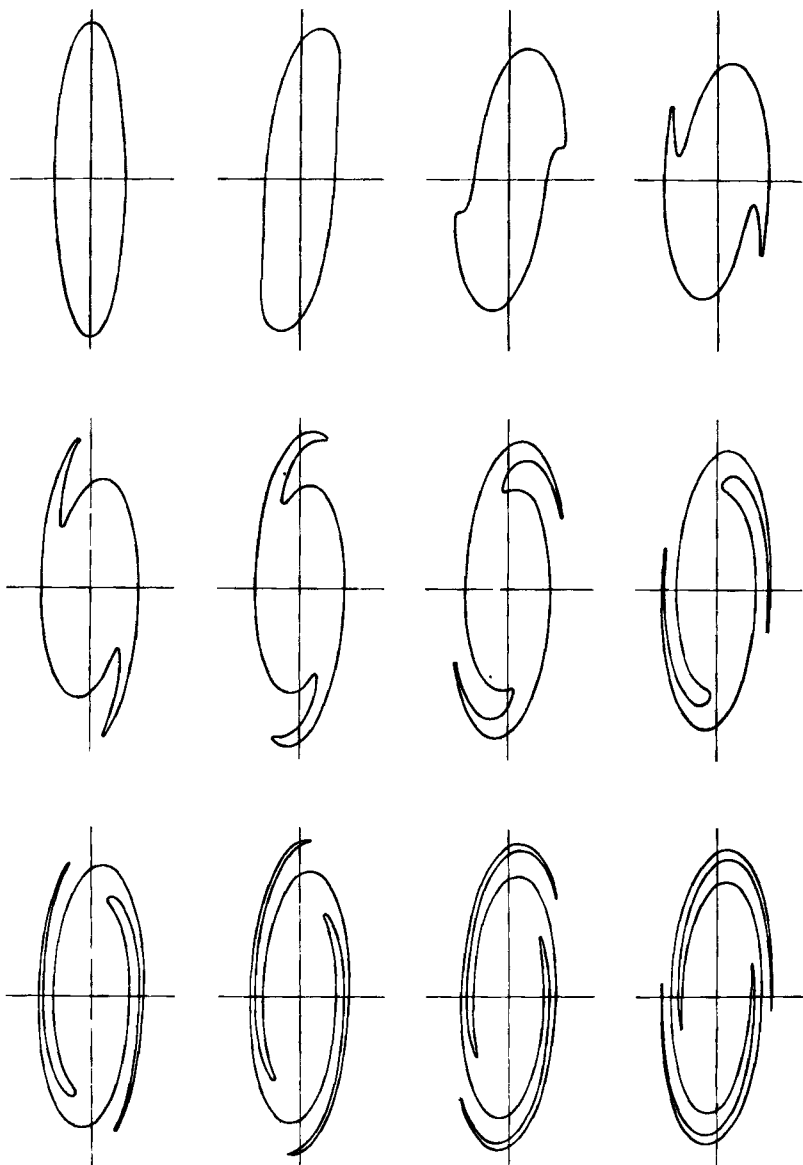


Рис. 4.9. Последовательное искажение эллипса на фазовой плоскости для пучка в системе линз, имеющих небольшую сферическую aberrацию.

Диаграммы приведены для точек, расположенных вдоль пучка последовательно на расстоянии друг от друга, равном 10 длинам волн. В отсутствие aberrаций все эллипсы должны быть идентичными.

скоплений, движение звезд в которых происходит в собственных гравитационных полях (см., например, работу [192]). На рис. 4.9 показан процесс постепенного нитеобразования эмиттанса, имевшего первоначально форму эллипса, в системе линз со сферическими аберрациями.

Рассмотрим снова пучок в нелинейно-фокусирующем канале. Очевидно, что в момент $t = 0$ эмиттанс равен нулю, а при $t = \infty$ он имеет определение (макроскопическое) конечное значение. При этом возникает вопрос о том, как наилучшим способом количественно описать процесс постоянного расплывания фазового объема. Один из методов, с которым мы встречались выше, заключается в возможности определить эмиттанс как площадь эллипса, описывающего реальную диаграмму, внутри которого заключены все фазовые траектории частиц. Другой метод состоит в использовании "средне-квадратичного эмиттанса", который ввел Лапостоль [159]:

$$\bar{\epsilon} = 4((x^2 \chi x',^2) - (xx')^2)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Такое определение эмиттанса позволяет получить результат, который не зависит от ориентации осей эллипса и согласуется с обычным определением эмиттанса, принятым для двумерной проекции КВ-распределения. Для прямой линии, проходящей через начало координат, $\bar{\epsilon} = 0$. С другой стороны, для искривленной линии, даже если ее площадь на фазовой плоскости равна нулю, $\bar{\epsilon}$ имеет конечное значение. Этот эмиттанс является инвариантом лишь в линейно-фокусирующих системах и больше ни в каких других.

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, вычислим изменение $\bar{\epsilon}$ после прохождения параллельного пучка через тонкую линзу, коэффициент сферической аберрации которой C_s определяется выражением (2.89). Если f - параксиальное фокусное расстояние линзы, то уравнение луча, проходящего через линзу на расстоянии x_0 от ее оси, записывается в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x'z = \\ &= x_0 - z \left(\frac{x_0}{f} + \frac{C_s x_0^3}{f^4} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Подставляя $z = f$ и $x_0 = a$, где a - радиус линзы, получаем

$$x = C_s \left(\frac{a^3}{f^3} \right) = C_s \alpha_i^3,$$

т.е. радиус аберрационного кружка в соответствии с принятым определением. Такая аберрация иллюстрируется на рис. 2.10.

Какие величины следует подставлять в выражение (4.38) в случае пучка, имеющего в плоскости линзы $z = 0$ однородное распределение плотности по координате x от $x = 0$ до $x = \pm a$, является очевидным. Для такого пучка в соответствии с (4.39) имеем

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \left\{ x_0 - z \left(\frac{x_0}{f} + C_s \frac{x_0^3}{f^4} \right) \right\}^2 dx_0, \quad (4.40)$$

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \left(\frac{x_0}{f} + \frac{C_s x_0^3}{f^4} \right)^2 dx_0,$$

откуда нетрудно найти соответствующее выражение для $\langle xx' \rangle$. Чтобы найти $\bar{\epsilon}$, вычислим эти выражения. В результате получаем

$$\bar{\epsilon} = \frac{4}{5\sqrt{2}\Gamma} \frac{C_s a^4}{f^4}. \quad (4.41)$$

Эффективный эмиттанс не зависит от z и имеет вид, который можно было ожидать. Радиус кружка рассеяния (см. разд. 2.8 гл. 2) равен $r_c = C_s \alpha^3 / 4 = C_s a^3 / 4f^3$. Умножая его на $\alpha = a/f$, получаем величину того же порядка, что и эмиттанс $\alpha r_c = C_s a^4 / 4f^4$. Из сравнения с выражением (4.38) следует, что $\alpha r_c / \bar{\epsilon} = 5\sqrt{2}\Gamma / 16 = 1,4$.

Встречающееся на практике распределение, среднеквадратичный эмиттанс которого нам потребуется ниже (разд. 4.7), соответствует пучку с радиусом a и однородным распределением температуры kT в поперечном сечении. Воспользовавшись выражением (4.38), нетрудно показать, что

$$\bar{\epsilon}_{th} = 2a \left(\frac{kT}{m_0 \beta^2 a^2} \right)^{1/2}. \quad (4.42)$$

Интересно отметить как формальную, так и физическую аналогию между эмиттансом и энтропией, которые оба являются мерой неупорядоченности. В случае пучка, который можно сфокусировать для получения изображения, aberrации увеличивают неупорядоченность и ведут к потере информации. Эта связь была подробно исследована Лоусоном, Лапостолем и Глакстерном [175], которые показали, что в случае однородного распределения из N частиц энтропия S дается выражением

$$S = kN(\ln \pi \epsilon - \ln A), \quad (4.43)$$

где k — постоянная Больцмана, а A — площадь ячейки, занятой частицей в фазовом пространстве. Энтропия определяется обычным

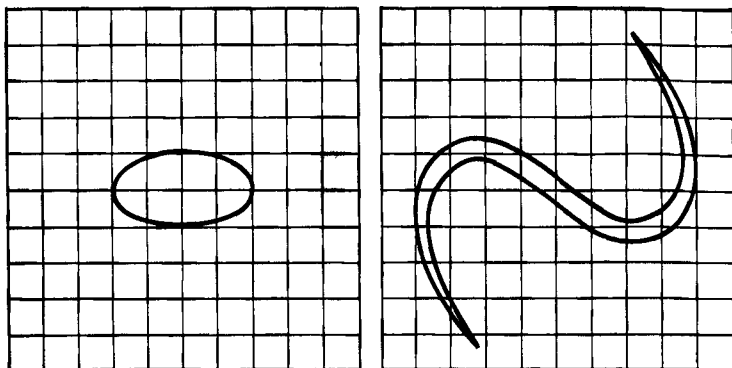


Рис. 4.10. Два распределения частиц в фазовом пространстве, имеющие одну и ту же площадь, но (для указанного размера ячеек) различные значения энтропии.

На левой диаграмме распределение занимает только 8 ячеек, в то время как на правой частицы находятся в 25 ячейках. При стремлении размера ячеек к нулю в обоих случаях число ячеек, занятых обоими распределениями, не меняется, и энтропия также остается постоянной.

способом как $k \log W$, где W – число способов, которыми можно ввести соответствие между изображающими точками на фазовой плоскости и ячейками, чтобы получить заданное распределение. Если ячейки настолько малы, что изменение фазовой плотности внутри них невелико, то, согласно теореме Лиувилля, S сохраняется постоянной. Если же нитеобразование достигает такой степени, что это предположение перестает быть справедливым, то информация о точной структуре теряется и вычисленное значение энтропии становится выше. (Это показано на рис. 4.10.) На практике размер ячейки обычно определяется разрешающей способностью аппаратуры, используемой для измерения эмиттанса.

В цитируемой статье имеется подробное обсуждение этого вопроса, включая термодинамическое описание пучка в виде двумерного течения газа, причем замечена связь между энтропией и адиабатическим поведением колебаний отдельных частиц.

3.9. Системы с нелинейными собственными полями. Встречающиеся на практике пучки характеризуются неравномерным распределением плотности в поперечном сечении. До тех пор пока нельзя будет пренебречь влиянием собственных полей, поперечные колебания частиц в таких пучках будут нелинейными даже в случае линейного внешнего фокусирующего поля. Используя способы, изложенные, например, в § 6 для согласованных пучков, распределение плотности в которых не зависит от расстояния вдоль пучка, не-

трудно получить самосогласованное описание. Некоторые такие распределения были найдены, в частности, Капчинским [137], Сахерером [254] и Лапостолем [159].

Вычислить же характеристики несогласованных пучков, радиус которых меняется вдоль их длины, довольно сложно независимо от того, однородны фокусирующие поля или нет. Однако Лапостоль [159] и Сахерер [254] показали, что если внешние фокусирующие силы линейны, то КВ-уравнение (4.35) можно применять для описания пучков даже с неоднородным распределением плотности по сечению. При этом координаты x и y больше не соответствуют координатам границ пучка, а представляют собой удвоенные среднеквадратичные значения координат частицы, и эмиттанс заменяется его среднеквадратичным значением $\bar{\epsilon}$. Системы с аксиальной симметрией описываются уравнением (4.30), в котором величина a теперь равна удвоенному среднеквадратичному значению радиуса распределения плотности, спроецированного на плоскость, проходящую через ось. Однако, если нам не известно, как ведет себя эмиттанс $\bar{\epsilon}$, который не является инвариантом, в зависимости от s , этот результат имеет ограниченную ценность.

Наибольший интерес представляют неоднородные распределения плотности, которые соответствуют максвелловскому распределению по скоростям. В следующих параграфах мы обсудим ряд задач, в которых встречаются такие распределения.

Л.1 – 3. Замечания и литература. Представленный в § 2 материал является просто кратким изложением обычной классической теории, которую можно найти во многих учебниках. Большая часть результатов, приведенных в § 3, была получена в 50-е г. в связи с созданием ускорителей частиц. В это же время было введено понятие эмиттанса и вскоре стала очевидной его связь с более старым оптическим понятием яркости. Точные определения и связь этих величин в более общих случаях послужили предметом некоторых дискуссий, ссылки на которые можно найти в статьях, упомянутых в разд. 3.1.

Понятие фазового пространства и его использование в теории ускорителей и других устройств широко обсуждается в книге Лихтенберга [182]. В ней же подробно рассмотрены вопросы согласования как поперечных, так и продольных (синхротронных) фазовых объемов и общие основы теории динамики частиц. В монографиях Штеффена [282] и Бенфорда [11], посвященных системам транспортировки пучков, эти вопросы рассматриваются скорее с практической стороны и в них содержится большая часть материала, изложенного в данном разделе и § 5 гл. 2, а книга [307] посвящена ионным пучкам. Важный вклад в эту область внес Капчинский (см. книгу [137], которая, к сожалению, не переведена на английский язык).

Теорыя, рассматренианная в разд. 3.2 и 3.4, по существу излагается в обзоре [66], упомянутом в разд. Л. 6,7 гл. 2, хотя в разд. 3.2 мы использовали работу Гаррена [94].

§ 4. Тепловыы распределения

4.1. Введение; пучкы и плазма. Пучкы заряженных частиц, очевидно, не находятся в состоянии термодинамического равновесия. Тем не менее во многих случаях для их описания удобно использовать гауссовы функции распределения. Это полезно для понимания смысла таких параметров, как температура и давление, часто встречающихся в физике плазмы. Непосредственное описание пучков тепловыми распределениями обусловлено методами генерации электронных пучков, испускаемых с термоэмиссионного катода, и ионных пучков из плазмы. В термодинамике понятия температуры и давления определяются без ссылки на микроструктуру среды, которую они описывают. С другой стороны, в неравновесных средах эти понятия можно определить только совместно через функцию распределения частиц в пространстве импульсов или скоростей. Этим мы займемся в следующем разделе.

Здесь имеет смысл уточнить, в каком смысле можно рассматривать пучок как особый вид плазмы. Разумеется, здесь не подходит первоначальное определение Ленгмюра о том, что плазма — это "часть дугового разряда, в которой плотности электронов и ионов в основном равны друг другу". Однако понятие плазмы постепенно расширялось, и иногда плазмой называют любой ансамбль зарядов, в котором собственными полями нельзя пренебречь по сравнению с внешними. Интенсивный пучок, особенно если рассматривать его в системе координат, в которой средняя скорость частиц равна нулю; во многих случаях удовлетворяет этому критерию. В разд. 2.7 гл. 3 было уже дано определение плазменной частоты, а в гл. 6 мы рассмотрим различные примеры характерного плазменного поведения.

Важным параметром плазмы, о котором уже упоминалось в связи с теоремой Лиувилля (§ 1), является дебаевский радиус экранирования λ_D . В дальнейшем мы с ним снова встретимся, поэтому здесь полезно раскрыть его физический смысл. В обычном газе частицы в общем случае взаимодействуют только со своим ближайшим соседом. Однако в плазме вследствие дальнедействующего характера кулоновских сил отдельная частица взаимодействует одновременно со многими другими частицами. Рассмотрим теперь одиночный пробный заряд, помещенный в стационарную плазму, электроны и ионы которой в отдельности имеют максвелловское распределение по скоростям, соответствующее температуре kT :

$$f(\mathbf{v}) = n (m_0/2\pi kT)^{3/2} \exp(-m_0 v^2/2kT). \quad (4.44)$$

Как мы увидим ниже, при введении пробного заряда частицы плазмы изменяют свое положение, что приводит к "экранированию" поля $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, которое должен был бы создавать пробный заряд. Это характерное расстояние, на котором происходит экранирование поля, и называется "дебаевским радиусом экранирования" λ_D .

Чтобы вычислить λ_D , воспользуемся выражением, полученным Больцманом, которое описывает влияние внешнего поля на плазму с максвелловским распределением по скоростям. Распределение Больцмана, выраженное через потенциал ϕ , записывается в виде

$$n = n_0 \exp\left(\frac{-q\phi}{kT}\right). \quad (4.45)$$

Отсюда видно, что форма распределения не меняется, но плотность частиц с увеличением потенциала быстро уменьшается. (Это выражение обычно применяют для изучения распределения давления в изотермической атмосфере в гравитационном поле.) Выражение (4.45), которое справедливо и при наличии магнитного поля, лучше всего вывести с помощью уравнения Власова. Этим мы займемся в разд. 6.2.

Чтобы найти λ_D , надо решать уравнение Пуассона совместно с выражением (4.45). Предположим, что пробный заряд является положительным, ионы однозарядными, а плотности ионов n_i и электронов n_e в отсутствие пробного заряда равны друг другу. Применяя уравнение (4.45) по отдельности к электронам и ионам и подставляя найденные выражения в уравнение Пуассона, получаем

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = \frac{2qn_0}{\epsilon_0} \operatorname{sh} \frac{q\phi}{kT}. \quad (4.46)$$

В случае когда $q\phi \ll kT$, это уравнение можно решить аналитически. Такое приближение справедливо для всех точек, за исключением области, непосредственно примыкающей к заряду. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\nabla^2 \left(\frac{q\phi}{kT}\right) = \frac{2(q\phi/kT)}{\lambda_D^2}, \quad (4.47)$$

где

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{n_0 q^2}. \quad (4.48)$$

Зависимость потенциала от радиуса записывается следующим образом:

$$\varphi = \begin{cases} (q/4\pi\epsilon_0 r) \exp(-\sqrt{2}r/\lambda_D), & r \gg \lambda_D, \\ (q/4\pi\epsilon_0 r), & r \ll \lambda_D. \end{cases} \quad (4.49)$$

Отсюда можно видеть, каким образом λ_D играет роль радиуса экранирования. Число частиц внутри "дебаевской сферы", а именно

$$N_p = 2\pi_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3, \quad (4.50)$$

иногда называют "плазменным параметром". В случае когда $N_p \gg 1$, сглаженная часть собственного поля плазмы влияет на движение частиц гораздо больше, чем процессы рассеяния отдельной частицы, и, как мы показали в § 1, теорема Лиувилля в этом случае служит хорошим приближением.

Нередко длина пучков превосходит величину λ_D , а их поперечные размеры меньше, чем λ_D . С некоторыми следствиями, вытекающими из этого обстоятельства, мы столкнемся при изучении волн, распространяющихся в пучках (разд. 4.7 гл. 6).

4.2. Давление, температура и эмиттанс. Полная функция распределения частиц в пучке или плазме часто содержит избыточную информацию, так что интересно рассмотреть средние значения. В нерелятивистских системах средняя скорость в данной точке называется скоростью потока или скоростью дрейфа \bar{v} , а второй момент распределения по скорости дает тензор давления p_{ij} . Тензор давления можно записать через локальную функцию распределения по скоростям $f(v_i)$, нормировка которой выбрана так, что $\int f(v_i) d^3v = n$ и $\int v_i f(v_i) d^3v = n\bar{v}_i$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} p_{ij}(x) &= m_0 \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3v = \\ &= m_0 (\int v_i v_j f d^3v - n\bar{v}_i \bar{v}_j). \end{aligned} \quad (4.51)$$

В теории пучков представляют интерес лишь системы, для которых этот тензор имеет диагональный вид. Естественно, что в общем случае три его диагональных члена не равны друг другу и их часто рассматривают как давления в определенных направлениях.

В аксиально-симметричных системах величины p_x и p_y обозначают через p_\perp , а p_z — через p_\parallel . Температура, связанная с одной из этих составляющих давления, определяется следующим образом:

$$kT_i = \frac{1}{n} m_0 \int (v_i - \bar{v}_i)^2 f(v_i) dv_i. \quad (4.52)$$

Нетрудно показать, что для одномерного максвелловского распределения вида

$$f(v_i) = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_0 (v_i - \bar{v}_i)^2}{2kT} \right\} \quad (4.53)$$

соответствующее давление дается выражением

$$P_i = nkT_i. \quad (4.54)$$

В случае когда скорость дрейфа v_i равна нулю, плотность кинетической энергии частиц можно найти усреднением распределения по квадрату скоростей. Она равна $(1/2) \sum_i nkT_i$. Следовательно, по порядку величины kT являются мерой энергии типичной частицы. Для нерелятивистского пучка, наблюдаемого в системе координат, движущейся со скоростью \bar{v} , плотности энергии, связанные с продольной и поперечной температурами, равны соответственно $nkT/2$ и nkT .

До сих пор мы требовали, чтобы движение частиц было нерелятивистским. Обобщение тензора давления на релятивистский случай представляет большую сложность. При этом существенной особенностью является то, что скорость более не пропорциональна импульсу, так что поток импульса не может быть идентифицирован с потоком энергии.

Однако в большинстве релятивистских пучков, представляющих практический интерес, скорости частиц в поперечном направлении являются нерелятивистскими и величина γ почти одна и та же для всех частиц, т.е. можно записать, что $\gamma m_0 v_{\perp}^2 / 2 = kT_{\perp}$. В системе координат, движущейся вместе с частицами,

$$kT_{\perp m} = \frac{1}{2} m_0 (\gamma v_{\perp})^2 = \gamma kT_{\perp}. \quad (4.55)$$

Этот результат непосредственно следует из лоренц-инвариантности поперечного импульса $\gamma m_0 v_{\perp}$. Воспользовавшись релятивистским законом сложения скоростей, нетрудно показать, что в пределе $\gamma \gg 1$ две частицы, движущиеся в лабораторной системе координат в продольном направлении с энергиями γ и $\gamma + \Delta\gamma$, в подвижной системе координат имеют относительные скорости β и $\beta + \Delta\beta$, где $\Delta\beta = \Delta\gamma/\gamma$. Следовательно, даже в ультрарелятивистском пуч-

ке с небольшим энергетическим разбросом частицы в подвижной системе координат обладают нерелятивистской температурой. Этот вопрос мы изучим более подробно в § 5 гл. 5.

Интересно вычислить поперечную температуру T_{\perp} КВ-распределения, определяемого выражением (4.26). Для простоты рассмотрим цилиндрический пучок радиусом a , эмиттанс которого равен ϵ . В соответствии с выражением (4.26) функцию распределения можно записать в виде

$$\delta \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\beta^2 c^2 \epsilon^2} - 1 \right) = 0, \quad (4.56)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $\dot{x} = \beta c x'$, а β — скорость частиц в направлении оси z , которую будем считать постоянной и однородной по сечению пучка. Поперечная энергия частиц $\gamma m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ зависит только от r . Подстановка $\gamma m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = k T_{\perp}$ дает

$$k T_{\perp} = \frac{\beta^2 \gamma m_0 c^2 \epsilon^2}{2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (4.57)$$

На оси пучка $k T_{\perp} \sim \epsilon^2/a^2$, а на границе пучка $k T_{\perp}$ спадает до нуля.

Очевидно, это распределение, как уже отмечалось выше, представляет главным образом академический интерес. Однако оно указывает на тот факт, что для любого конечного распределения поперечная температура T_{\perp} обязательно равна нулю на границе пучка, поскольку на границе радиальные скорости всех частиц должны обращаться в нуль. С другой стороны, из этого анализа следует, что благодаря наличию связи между температурой и давлением конечную величину эмиттанса можно интерпретировать как градиент давления, стремящийся расширить пучок. Так, однородный линч, описываемый выражением (4.33), возникает в результате баланса между направленной наружу силой давления и направленной внутрь силой $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Эквивалентность гидродинамического и оптического описания пучка подробно изучалось автором [174].

В противоположность изложенным выше результатам, температура вращающегося ламинарного потока с эмиттансом ϵ , определенным в разд. 3.5, равна нулю. Однако полезно определить "температуру" $k \bar{T}$, которая получается не из распределения по скоростям в данной точке, а из распределения, учитывающего все частицы в поперечном сечении пучка. Эту величину не сле-

дует путать с температурой, усредненной по поперечному сечению пучка. Оказывается, что она имеет одно и тоже значение как для КВ-, так и для ламинарного распределения. Интегрирование можно выполнить непосредственно, и мы имеем

$$k\bar{T}_i = \frac{\beta^2 \gamma m_0 c^2 \varepsilon^2}{4a^2} . \quad (4.58)$$

Комбинируя этот результат с условием существования однородного пинча (4.34) и производя следующие подстановки: $K = -2v/\gamma$, $v = \mu_0 Nq^2/4\pi m_0$ и $I = Nq\beta c$, получаем

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} = 2Nk\bar{T} . \quad (4.59)$$

Это соотношение представляет собой условие пинча Беннета (см. разд. 2.7 гл. 3), с которым мы еще встретимся в разд. 4.5.

Можно построить также другие модели, в которых действительная поперечная температура не будет зависеть от радиуса; при этом, естественно, подразумевается, что распределение имеет "хвост", который никогда не достигает нуля. В следующих разделах мы обсудим две модели такого типа.

4.3. Сфокусированные пучки при конечной температуре. В § 3 были рассмотрены свойства пучков, обладающих конечными значениями первеанса и эмиттанса в параксиальных фокусирующих системах. Благодаря исключительно специальному выбору функции распределения уравнения, описывающие движение частиц в поперечном направлении, оказываются линейными. В разд. 3.8 и 3.9 были изучены некоторые более сложные случаи с учетом нелинейностей, обусловленных либо внешней фокусирующей силой, либо неоднородными распределениями заряда и тока в поперечном сечении пучка. В оставшейся части данного параграфа мы рассмотрим пучки с максвелловским распределением частиц по поперечным скоростям.

Задача нахождения самогласованных распределений, соответствующих согласованному пучку в однородно-фокусирующем канале или сжатому пучку, не представляет трудности. С другой стороны, для пучка, несогласованного с каналом (или с фокусирующей системой более общего вида), свойства которого зависят от s , нелегко найти такие распределения с учетом собственных полей. Однако многие встречающиеся на практике случаи адекватно описываются приближенными линейными моделями. Более простая задача нахождения закона изменения распределения плотности в поперечном сечении пучка, в котором можно пренебречь влиянием

пространственного заряда, хотя и легко поддается решению, но она имеет ограниченную ценность, поскольку в действительности невозможно пренебречь влиянием аббераций. Тем не менее это поучительный пример, и мы изучим его в разд. 4.7.

4.4. Согласованный пучок в однородном внешнем линейно-фокусирующем поле.

Приступим теперь к изучению конфигурации пучка, частицы которого имеют максвелловское распределение по поперечным скоростям. Предположим, что пучок распространяется в однородном фокусирующем канале, в котором фокусировка за счет внешних полей является линейной. Вклад собственных полей в полную фокусирующую силу, действующую на частицы, приводит к ее нелинейности. Пучок предполагается согласованным, так что в направлении его распространения не происходит никаких изменений. Следовательно, задача сводится к нахождению самосогласованного двумерного распределения в потенциальной яме. Для ее решения необходимо иметь соотношение Больцмана (4.45) и уравнение Пуассона.

В идеализированном случае потенциальная яма могла бы быть создана однородным стационарным фоном тяжелых ионов. С другой стороны, ее можно было бы имитировать однородным аксиальным магнитным полем, рассматривая пучок в ларморовской системе координат. В силу соотношения Больцмана распределение поперечных скоростей во всех точках пространства является максвелловским. В одном предельном случае, когда плотность частиц мала и силы пространственного заряда слабы, частицы образуют "атмосферу" в потенциальной яме. В другом предельном случае, когда равна нулю температура, заряды "наполняют" потенциальную яму и образуют при этом облако с резкими границами, внутри которого электрическое поле равно нулю. Если фокусирующее поле создается стационарными ионами, то пучок представляет холодную плазму с дрейфующими электронами. С другой стороны, эту теорию можно применить для описания пучков, распространяющихся в аксиальном магнитном поле. В предельном случае нулевой температуры она приводит к бриллюэновскому потоку [232].

В проведенном выше обсуждении не учитывалось влияние собственного магнитного поля. В параксиальном приближении B_0 пропорционально E_r и, как было показано в разд. 2.6 гл. 3, влияние магнитного поля сводится просто к уменьшению сил, действующих со стороны электрического поля, в $(1 - \beta^2)$ раз. Если поперечную массу частицы взять равной $\gamma^3 m_0$, то это будет эквивалентно учету влияния магнитного поля. В данном разделе мы рассмотрим задачу в нерелятивистском приближении, однако напомним

ним, что для учета релятивизма скоростей в z -направлении нужно только заменить m_0 на $\gamma^3 m_0$.

Если градиент $\partial E_r / \partial r$ радиального фокусирующего поля, обусловленного внешней потенциальной ямой, является постоянным, то потенциал внешнего поля запишется в виде

$$\phi_{\text{внеш}} = - \int r \frac{\partial E_r}{\partial r} dr = - \frac{1}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r} r^2. \quad (4.60)$$

Потенциал поля пространственного заряда дается выражением

$$\phi_{\text{пр.з}} = - \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r n(r_1) r_1 dr_1 dr. \quad (4.61)$$

Подстановка суммарного потенциала ϕ в соотношение Больцмана (4.45) дает интегральное уравнение относительно n :

$$n(r) = n_0 \exp \left[\left[\frac{q}{kT} \right] \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r} r^2 + \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r n(r_1) r_1 dr_1 dr \right\} \right]. \quad (4.62)$$

Вводя новые обозначения переменных, его можно свести к более простому виду. Определим следующие безразмерные переменные:

$$R = \frac{r}{\lambda_D} = r \left(\frac{n_0 q^2}{\epsilon_0 kT} \right)^{1/2}, \quad (4.63)$$

$$D = \frac{n}{n_0}, \quad D_1 = \frac{n_1}{n_0} = - \frac{2\epsilon_0}{n_0 q} \frac{\partial E}{\partial r}.$$

Данные соотношения означают, что расстояния измеряются в единицах дебаевского радиуса. Нетрудно убедиться, что n_1 — это плотность частиц, которую имел бы пучок при нулевой температуре. В этих переменных уравнение (4.62) принимает вид

$$D(R) = \exp \left\{ - \frac{1}{4} D_1 R^2 - \int_0^R \frac{1}{R} \int_0^R D(R_1) R_1 dR_1 dR \right\}. \quad (4.64)$$

Из него можно определить профиль плотности (D в зависимости от R) при различных значениях параметра $D_1 = n_1/n_0$.

Более поучительно было бы представить результаты как функцию от радиуса при данном полном числе зарядов на единице длины $N = \int 2\pi n r dr$, а kT выбрать в качестве параметра. Такие кривые приведены на рис. 4.11, где температура выражена в единицах kT/vm_0c^2 (v — параметр Будкера). Параметр kT/vm_0c^2 можно также записать как $2\lambda_D/a$. Ниже будет показано, что условие $\lambda_D \approx a$ со-

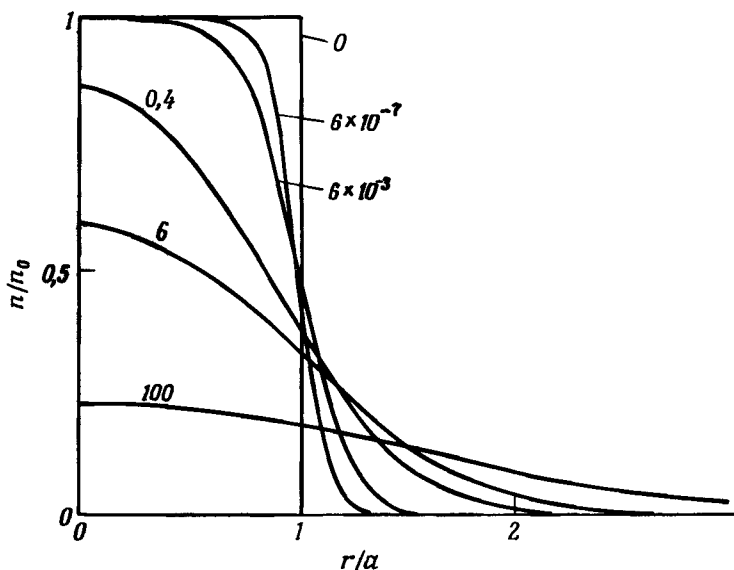


Рис. 4.11. Распределение плотности частиц в поперечном сечении согласованного пучка, распространяющегося в однородном фокусирующем канале, при наличии тепловых поперечных скоростей.

Числа на кривых представляют собой значения $kT/v m_0 c^2$, равные отношению кинетической энергии теплового движения к потенциальной энергии частиц во внешнем поле на радиальном расстоянии, которое соответствует границе пучка, когда $kT = 0$.

ответствует переходу от "квадратного" ($\lambda_D = 0$) к "гауссову" ($\lambda_D = \infty$) типу решения. Эти единицы представляют отношение поперечной кинетической энергии к потенциальной энергии внешнего поля в точке $r = a$, в которой $kT = 0$.

4.5. Самофокусирующиеся пучки; пинч Беннета. В разд. 3.5 были рассмотрены функции распределения частиц по скоростям, которые соответствуют однородному распределению заряда и тока в поперечном сечении пучка. В таких пучках влияние конечной величины эмиттанса уравновешивалось направленной внутрь силой, действующей на частицы со стороны собственного магнитного поля пучка. Здесь же мы займемся нахождением самосогласованного решения, описывающего пучок с максвелловским распределением частиц по поперечным скоростям, в духе первоначальных расчетов Беннета [18], но не следуя им досконально.

Предположим, что пучок состоит из двух компонент: ионов, имеющих заряд q_i , и неподвижных в аксиальном направлении, и

электронов, которые движутся с аксиальной скоростью $\beta_z c$, значительно превышающей их поперечную скорость. Будем считать, что коэффициент зарядовой нейтрализации f , равный $-n_i q_i / n_e q_e$, не зависит от радиуса пучка. Это предположение оправдано в случае полностью нейтрализованного пучка, но является несколько искусственным в случае, когда $f < 1$. Зависимость плотности n от радиуса определяется формулой (4.45), в которой ϕ представляет собой потенциал, связанный с радиальными силами, действующими на электроны и ионы. В нерелятивистском пучке ϕ — это электростатический потенциал. Однако в релятивистском пучке его можно обобщить, приняв во внимание также радиальные магнитные силы, которые различны для электронов и ионов. Температуры электронов и ионов также предполагаются разными и равными соответственно kT_e и kT_i .

Потенциал в точках r дается выражениями

$$\begin{aligned}\phi_e &= - \int_0^r (E_r - \beta_z c B_\theta) dr, \\ \phi_i &= - \int_0^r E_r dr.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Опуская индексы при величинах E , B и β , из выражения (4.45) имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} &= \frac{q_e}{kT_e} (E - \beta c B), \\ \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} &= \frac{q_i E}{kT_i}.\end{aligned}\tag{4.66}$$

Из уравнения Пуассона и закона Ампера следует

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) &= \frac{(q_e n_e + q_i n_i)}{\epsilon_0}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) &= \mu_0 q_e \beta c n_e.\end{aligned}\tag{4.67}$$

Исключая отсюда B и E , находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n_e} \frac{dn_e}{dr} \right) &= \frac{n_e q_e^2}{\epsilon_0 kT_e (1 - \beta^2 - f)}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n_i} \frac{dn_i}{dr} \right) &= \frac{n_i q_i^2}{\epsilon_0 kT_i (1/f - 1)}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Поскольку мы предположили, что во всех точках пучка n_e пропорционально n_i , эти уравнения нетрудно решить. В результате получаем следующие выражения для радиальных профилей плотности:

$$n_e = \frac{n_{0e}}{(1+r^2/a^2)^2}, \quad n_i = \frac{n_{0i}}{(1+r^2/a^2)^2} \quad (4.69)$$

и температуры:

$$4\pi\epsilon_0 kT_e = -\frac{1}{2} q_e (q_i N_i + q_e N_e / \gamma_e^2), \quad (4.70)$$

$$4\pi\epsilon_0 kT_i = -\frac{1}{2} q_i (q_e N_e + q_i N_i);$$

здесь a — произвольная постоянная, имеющая размерность длины, а $N = \int_0^\infty 2\pi nr dr = \pi a^2 n_0$.

Складывая два уравнения (4.70), получаем условие пинча Беннета, которое в случае однократно заряженных ионов $q_e = -q_i$ записывается в виде

$$N_e q_e^2 \beta^2 = 8\pi\epsilon_0 k(T_e + T_i) \quad (4.71)$$

или в более принятой форме

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} = 2N_e k(T_e + T_i). \quad (4.72)$$

Если kT_e заменить на $k\bar{T}$, то при $T_i = 0$ это выражение совпадает с условием существования ламинарного пинча (4.59).

Теория, рассматриваемая в данном разделе, описывает самосогласованные системы, но не дает каких-либо рекомендаций о том, каким образом их можно реализовать практически. Если учесть столкновение частиц, то можно показать, что и в этом случае существует равновесное распределение, к которому стремятся другие начальные распределения. Теория и ее экспериментальное подтверждение изложены в § 3 гл. 5.

Исходя из понятия давления Тонеманн и Ковиг [296] также получили выражения (4.68) и (4.69), но для разряда в нейтральном газе. Мы не пользовались результатами этой работы, хотя уравнения (4.66) можно было бы записать в виде

$$\frac{dp_\perp}{dr} = \frac{d}{dr} (n_e kT) = n_e q_e (E - \beta c B). \quad (4.73)$$

Тонеманн и Ковиг в своих расчетах не предполагали, что $\beta_z \gg \beta_\perp$. Действительно, в выполненных ими экспериментах это условие не выполнялось. Измерения, проведенные с помощью зондов,

показали, что экспериментальные профили плотностей хорошо согласуются с профилями, вычисленными по формулам (4.69).

Формулу (4.69), описывающую профили плотности для пинчованного пучка можно обобщить [17] на случай, когда вдоль оси системы протекает нитевидный ток. В этом случае профиль плотности электронов или ионов дается выражением

$$\frac{n}{n_0} \propto \left[\frac{r}{a} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^\eta + \left(\frac{a}{r} \right)^\eta \right\} \right]^{-2}, \quad (4.74)$$

где η — положительная величина. Отношение тока I_a , протекающего вдоль оси, к току пучка I_b равно

$$\frac{I_a}{I_b} = \frac{1-\eta}{2\eta}. \quad (4.75)$$

В случае $\eta < 1$ это отношение положительно и плотность имеет более резкую зависимость, чем та, которая дается формулой (4.69). При $\eta = 1$ имеем $I_a = 0$ и снова получаем выражение (4.69). В случае же $\eta > 1$ ток, протекающий вдоль оси, направлен навстречу основному току пучка и плотность частиц на оси оказывается равной нулю, т.е. образуется трубчатый пучок. Графики распределения плотностей приведены в оригинальной статье [17], а другие свойства распределений этого типа, в частности значения предельных токов, изучались Бенфордом и Буком [16]. В этом обзоре, а также в книге Девидсона [75] обсуждаются другие модели пинча.

4.6. Плоский диод при наличии тепловых скоростей частиц. В данном разделе исследуем пучок, в котором распределение скоростей в направлении распространения играет важную роль при определении его детального поведения. В разд. 2.2 гл. 3 изучалась эмиссия частиц с плоского катода при условии отсутствия тепловых скоростей электронов. Здесь же мы очень кратко рассмотрим более близкий к действительности случай, когда придется учитывать тепловые скорости. Если эмиттером служит термоэлектронный катод, то ситуация достаточно хорошо определена, если же эмиттером является плазма или же катод работает в режиме "автоэлектронной эмиссии", то поведение пучка становится несколько более сложным. Мы не будем пытаться исчерпывающе и подробно излагать эту обширную область исследований, а остановимся только на основных свойствах пучка, которые понадобятся при дальнейшем рассмотрении.

Хотя физическую картину в плоском диоде, ток которого ограничен пространственным зарядом, можно обрисовать достаточно

просто, расчеты распределения потенциала между электродами и распределения скоростей в любой точке никоим образом нельзя назвать тривиальными. Такой катод представляет собой проводник, внутри которого имеются свободные электроны, плотность и распределение по скоростям которых зависят от структуры проводника. Выходу электронов из проводника препятствует эффективный потенциальный барьер на его поверхности. Эмиссионную способность обычно характеризуют "работой выхода" ϕ_w , которая составляет, как правило, несколько электрон-вольт. Она сложным образом зависит от структуры проводника и, возможно, также от температуры. В кристаллических материалах она зависит, кроме того, от ориентации поверхности. Если нагревать материал с малой работой выхода, то электроны проникают через потенциальный барьер и образуют полезный поток частиц — ток. Широко используются такие источники, как торированный вольфрам, окиси бария и стронция и гексаборид лантана.

Рассмотрим вначале одиночную, горячую, изолированную плоскую металлическую пластину в вакууме. В стационарном режиме испущенные электроны должны оставаться в непосредственной близости от пластины. Вначале некоторые из них могут уйти достаточно далеко от нее, но при этом она постепенно приобретает все больший положительный заряд до тех пор, пока все электроны не вернутся обратно к ней. Вблизи поверхности формируется "слой" толщиной порядка дебаевского радиуса экранирования λ_D . Изменение потенциала и плотности частиц в этом слое можно найти из уравнения Пуассона и соотношения Больцмана (4.45). В результате имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{2qn_0}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q\phi}{kT}\right), \quad (4.76)$$

решение которого записывается в виде

$$\frac{q\phi}{kT} = -\ln \frac{z^2}{2\lambda^2} + 1, \quad (4.77)$$

где $\phi = 0$ на проводящей поверхности $z = 0$. Потенциал монотонно уменьшается с увеличением z и логарифмически расходится на бесконечности, где отражаются электроны, составляющие хвост "бесконечных энергий" максвелловского распределения.

Если в плоскости $z = d$ поместить теперь вторую проводящую поверхность, которая не испускает электроны и потенциал которой поддерживается постоянным по отношению к потенциалу горячего катода, то электроны будут протекать от катода к аноду. Если потенциал анода ϕ_a выше, чем потенциал катода, то в промежут-

ке между электродами будет существовать плоскость, в которой потенциал имеет минимальное значение $\phi_{\text{мин}}$. Ток и распределение потенциала зависят от n_0 , kT и d . В области $z < z_{\text{мин}}$, где $z_{\text{мин}}$ — положение плоскости минимального потенциала, существует как прямой, так и обратный поток электронов (для последних скорость \dot{z} имеет отрицательное значение). В области же $z > z_{\text{мин}}$ значение \dot{z} всегда положительно. Если $\phi_a \gg \phi_{\text{мин}}$, то минимум потенциала находится вблизи катода и ток диода хорошо описывается законом Чайлда [выражение (3.23)]. Он справедлив для большинства представляющих практический интерес пучков, поскольку $\phi_{\text{мин}} \approx kT/q < 1\text{В}$.

Точному анализу этой задачи посвящено большое количество статей. Ссылки на них и очень подробное обсуждение соответствующих вопросов можно найти в книге [21], а также в обзоре [183]. Характерный вид решения показан на рис. 4.12.

Источники ионов являются значительно более сложными по конструкции, чем электронные пушки. В качестве эмиттеров в них используется не твердое тело, а газообразная плазма. Кроме того, в них существуют некоторые ограничения на форму создаваемой плазменной поверхности. Аналогия с плоским диодом представляет для них довольно нереальную идеализацию, и конструкции ионных источников рассчитываются, вообще говоря, более эмпирическими и менее очевидными методами, чем конструкции электронных пушек.

4.7. Общий случай линейно-фокусирующей системы, создаваемой внешними полями.

В разд. 4.4 мы изучали свойства однородного или "согласованно-

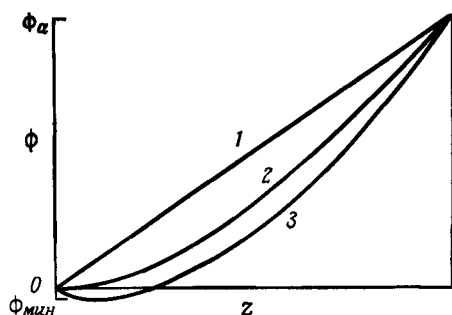


Рис. 4.12. Распределение потенциала в плоском диоде.

Кривая 1 — в отсутствие тока; кривая 2 — при условии ограничения тока пространственным зарядом, причем $kT = 0$; кривая 3 — при наличии тепловых скоростей частиц.

го" пучка, имеющего тепловое распределение скоростей частиц и находящегося в линейно-фокусирующем поле. Если в такой канал инжектировать, например с катода, пучок с другим профилем плотности, то распределения как по x , так и по x' -координатам будут изменяться вдоль системы. В общем случае, когда необходимо учитывать пространственный заряд, трудно определить, как при этом ведет себя пучок. Аналитические методы здесь не годятся, и обычно используют численные методы интегрирования. Лапостоль в книге [159] привел пример подобных расчетов, хотя и не для теплового распределения скоростей. В этом примере рассматривается аксиально-симметричное распределение, соответствующее однородно заполненной гиперэллипсоидальной оболочке в четырехмерном пространстве и которое находится в однородно-фокусирующем канале. Можно показать, что пространственная проекция такого распределения имеет параболический вид:

$$n = \begin{cases} n_0(1 - r^2/a^2)^{1/2}, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (4.78)$$

Последующее поведение пучка с заданным эмиттансом зависит от фокусирующей силы канала. Оказывается, что если отношение поперечных размеров данного и согласованного пучков, имеющих одинаковые эмиттансы, составляет 2 – 3, то среднеквадратичный эмиттанс постепенно возрастает до величины, превосходящей начальный эмиттанс в 2 – 3 раза. Об этом можно догадаться, рассматривая эволюцию фазовой диаграммы на рис. 4.9.

Зная распределение в некоторой точке пучка и фундаментальные решения параксиального уравнения при условии пренебрежения влиянием пространственного заряда, можно найти аналитические выражения, описывающие продольные вариации плотности. Рассмотрим вначале конкретную задачу о распространении однородного пучка, выходящего из цилиндрического катода, в однородно-фокусирующем канале. Затем сформулируем более общую задачу для фокусирующей системы, свойства которой меняются вдоль оси z .

На рис. 4.13 схематически показана первая система, которую мы проанализируем. Электроны испускаются однородно и изотропно с катода, радиус которого равен r_c . На поверхности катода параксиальное уравнение несправедливо, поскольку поперечные скорости сравнимы с продольными и, кроме того, существует непрерывный спектр скоростей, простирающийся от нуля до значения, равного нескольким $(kT/m_0)^{1/2}$. Однако если существует ускоряющее поле E_z , то на расстоянии z_1 от катода, таком, что $z_1 \gg kT/qE_z$, движение частиц становится параксиальным. В системах, встречающихся на практике, в которых $kT \lesssim 1$ эВ, это расстояние мало.

Если оно мало по сравнению с радиусом катода, то это служит хорошим основанием для того, чтобы использовать параксиальное уравнение для всех точек пучка. При таких условиях изменение радиуса пучка при движении от точки $z = 0$ до точки $z = z_1$ мало и функция распределения по x' является максвелловской с температурой, равной температуре катода kT . Вблизи такого катода нормализованные распределения по x и x' можно записать следующим образом:

$$f_1(x) = (r_c^2 - x^2)^{1/2} / \pi r_c^2, \quad (4.79)$$

$$f_2(x') = \left(\frac{m_0 \beta^2 c^2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{x'^2 m_0 \beta^2 c^2}{2kT} \right). \quad (4.80)$$

Среднеквадратичные значения x и x' равны соответственно $r_c^2/4$ и $kT/m_0 \beta^2 c^2$, а $\langle xx' \rangle = 0$, так что из выражения (4.38) для среднеквадратичного эмиттанта имеем

$$\bar{\epsilon} = \beta \bar{\epsilon}_n = 4 (\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle)^{1/2} = 2r_c \left(\frac{kT}{m_0 \beta^2 c^2} \right)^{1/2}. \quad (4.81)$$

На рис. 4.13 показано распределение частиц в фазовом пространстве, определяемое выражениями (4.79) и (4.80).

Распределение плотности частиц по сечению пучка можно вычислить, воспользовавшись уравнением (4.30), в котором r следует

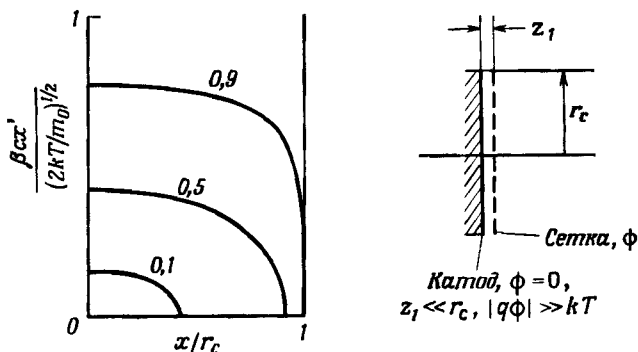


Рис. 4.13. Диаграмма эмиттанта и фазовые траектории частиц пучка, ускоряемого с цилиндрического катода с помощью близко расположенной сетки.

Радиус катода r_c , температура kT . Кривые симметричны относительно осей x и x' ; числа на кривых означают долю частиц пучка внутри данных контуров.

рассматривать как удвоенный среднеквадратичный радиус распределения плотности тока, спроецированного на плоскость, проходящую через ось. В отсутствие собственных полей какого-либо увеличения эмиттанса не имеется. Если же существуют нелинейные силы, обусловленные собственными полями, то в общем случае $\bar{\epsilon}_n$ будет возрастать с увеличением z . Тем не менее для относительно коротких систем (таких, как электронно-лучевые трубки) условие того, что величина $\bar{\epsilon}_n$ сохраняется постоянной, по всей вероятности, является хорошим приближением. На это указывают результаты вычислений, выполненных Вебером [305], который получил нерелятивистский аналог уравнения (4.30) с $\bar{\epsilon} = 2r_c kT/m_0\beta^2 c^2$, где r_c — эффективный радиус катода, определяемый через отношение полного тока к плотности тока в центре катода, умноженной на π .

Исследуем теперь поведение пучка, инжектируемого с катода через сетку в фокусирующий канал, как показано на рис. 4.13. Пренебрежем собственными полями пучка. Тогда проекции траекторий частиц на плоскость, проходящую через ось системы, представляют собой синусоиды с длиной волны $\lambda = 2\pi\kappa^{-1/2}$. На расстоянии $\lambda/4$ от катода диаграмма эмиттанса поворачивается на $\pi/2$, пространственное распределение имеет гауссовый вид, а распределение по x' меняется как $(r_c^2 - x^2)^{1/2}$. Через следующий отрезок $\lambda/4$ условия на катоде повторяются. Такие значения z соответствуют "плоскостям кроссоверов" и "плоскостям изображений", что иллюстрируется на рис. 4.14. Заменяя в выражении (4.80) x' на $\kappa^{1/2}r$ и перенормируя f_2 так, чтобы

$$\int f_2 (\kappa^{1/2}r) 2\pi r dr = \pi r_c^2 i_c,$$

где i_c — (однородная) плотность тока на катоде, можно найти плотность тока в плоскости кроссовера. Обозначая плотность тока

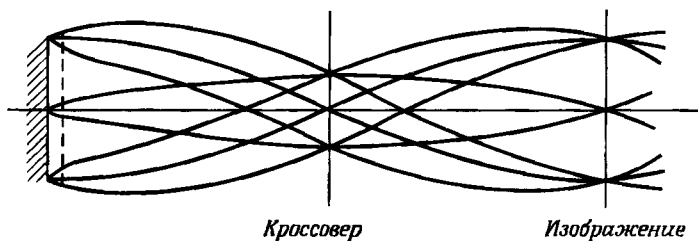


Рис. 4.14. Траектории частиц, вышедших из источника, схематически представленного на рис. 4.13, в однородном фокусирующем канале.

Показаны плоскости кроссовера и изображения.

в кроссовере через i_x , имеем

$$\frac{i_x}{i_c} = \frac{\kappa r_c^2 m_0 \beta^2 c^2}{2kT} \exp \left[- \frac{\kappa r_c^2 m_0 \beta^2 c^2}{2kT} \right]. \quad (4.82)$$

Отношение максимальной плотности тока в кроссовере к плотности тока на катоде равно

$$\left(\frac{i_x}{i_c} \right)_{r=0} = \kappa r_c^2 \frac{m_0 \beta^2 c^2}{2kT} = \frac{2\kappa r_c^4}{\epsilon^2}. \quad (4.83)$$

Следовательно, пучок концентрируется в канале, если $\kappa \frac{1}{4} r_c$ превосходит квадрат отношения тепловой скорости к продольной, т.е. величину $2kT/m_0 \beta^2 c^2$. Если это условие не выполняется, то в кроссовере пучок оказывается более размытым, чем в плоскости изображений.

Этот пример специально выбран, чтобы показать тип поведения, который можно ожидать от тепловых пучков в отсутствие пространственного заряда. Поскольку $\bar{\epsilon}_n$ остается постоянным, из выражения (4.83) ясно, что максимально возможное увеличение плотности тока по порядку величины составляет $kT/m_0 \beta^2 c^2$. Оставаясь в рамках параксиального приближения, нельзя рассчитать этот предел более точно. К рассмотрению данной задачи мы вернемся в следующем разделе.

Описанный выше пучок по существу представляет собой пучок в ларморовской системе координат, инжектируемый из экранированной пушки в магнитное поле, и иллюстрируется (в идеализированном виде) на средней диаграмме рис. 3.4. Такие пучки изучались в многочисленных экспериментах. Их поведение оказалось гораздо более сложным, чем можно было бы ожидать, основываясь на приведенном выше анализе. Во многих случаях обнаруживают четко выраженную радиальную структуру, которая непрерывно меняется квазипериодически вдоль пучка. Это связано с наличием существенных aberrаций в системе пушки, приводящих к появлению в пучке групп электронов с пересекающимися траекториями и каустик. За период 1957 - 1959 гг. был опубликован ряд статей [7, 33, 117, 126, 134, 306], в которых исследуются и анализируются эти эффекты и имеются весьма изящные диаграммы, а также фотографии, сделанные с помощью камеры-обскуры. С тех пор достигнут большой прогресс. Начиная с этого времени, работа в данном направлении постоянно развивалась. Миран и Андал [201] описали почти идеальный бриллиэновский поток.

До сих пор мы изучали поток в однородном фокусирующем канале. Обобщение этого рассмотрения на случай системы, в которой

фокусирующее поле является функцией от z , было выполнено Кирштейном и описано в книге [147]. Фокусирующие свойства системы определяются фундаментальными решениями параксиального уравнения. В качестве независимой переменной Кирштейн использовал время. В ларморовской системе координат фундаментальными решениями являются $M(t)$ и $S(t)$ с начальными условиями $(M, \dot{M}) = (1, 0)$ и $(S, \dot{S}) = (0, 1)$. Радиус катода обозначен через r_c , а температура через T . Для более компактной записи выражений определим следующие величины:

$$\begin{aligned} R &= \rho(M^2 + S^2 \Omega_{Lc}^2)^{1/2}, \\ \sigma &= \left(\frac{kT}{m_0} \right)^{1/2} S, \end{aligned} \quad (4.84)$$

где Ω_{Lc} — ларморовская частота электрона в магнитном поле на катоде. R и σ имеют размерность длины и представляют собой расстояния от оси для частиц, выходящих соответственно по нормали с поверхности катода на радиусе ρ и из центра катода с поперечной скоростью $(kT/m_0)^{1/2}$. Вывод необходимого соотношения является простым, но довольно утомительным. Его можно записать в несколько измененном виде, чем тот, который приведен в книге [147]¹⁾ или работе [3]. Распределение плотности тока в поперечном сечении пучка в некоторой плоскости z определяется значениями M и S в этой точке и имеет вид

$$\frac{i_z(r)}{i_c} = \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 \exp \left(- \frac{r^2}{2\sigma^2} \right) \int_0^{R_c/\sigma} \frac{R}{\sigma} \exp \left(- \frac{R^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{rR}{\sigma^2} \right) d \left(\frac{R}{\sigma} \right), \quad (4.85)$$

где R_c — значение R , при котором $\rho = r_c$, а I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Впервые этот интеграл был получен Катлером и Хайнсом в работе [71], в которой изучались температурные эффекты в электронных пушках. Однако Кирштейн дал более широкую его интерпретацию. На рис. 4.15 показаны зависимости i/i_0 от r/σ при фиксированном значении R/σ , где $i_0 = i_c/M^2$ — плотность тока пучка, имеющего нулевую температуру. Эти зависимости основаны на результатах работы [71].

На рис. 4.15 видно, что при $R/\sigma \gtrsim 3$ величина $i_z(0)$ практически не зависит от R/σ , т.е. для фиксированного значения M плотность тока не зависит от температуры пучка. В этом можно также убедиться, переходя в выражении (4.85) к пределу при $r = 0$, что

¹⁾ В этой книге формула приведена с типографской опечаткой. В последних скобках уравнения (5.22) надо убрать r^2 .

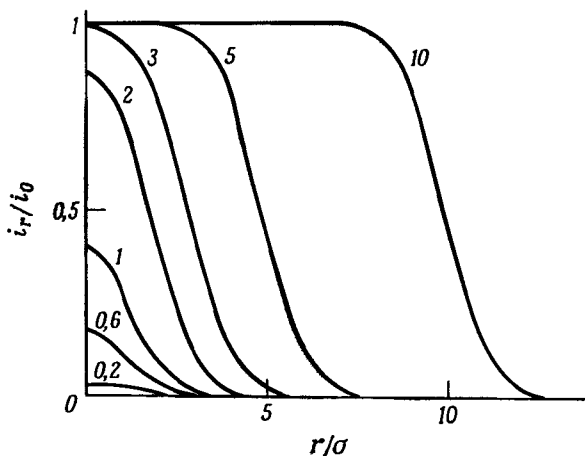


Рис. 4.15. Профиль первоначально однородного пучка, который рассеивается из-за наличия тепловых скоростей частиц.

Числами на каждой кривой отмечены значения величины R/σ , определяемой выражениями (4.84). Плотность тока равна i_r , а $i_0 = i_c/M^2$ [i_c — плотность тока на катоде, а M — фундаментальное решение параксиального уравнения с начальными условиями (1, 0) на катоде].

дает

$$\frac{i_z(0)}{i_c} = \frac{1 - \exp(-R^2/2\sigma^2)}{R_c^2}. \quad (4.86)$$

Выбирая M и S в качестве решений, соответствующих пучку с резкой границей и однородным распределением плотности тока и температуры, в выражении (4.85) можно приближенно учесть влияние пространственного заряда. Однако, как отмечалось выше, ценность этого анализа для всех случаев, встречающихся на практике, за исключением простейших, несколько ограничена, поскольку распределение тока очень сильно зависит от аберраций.

4.8. Влияние тепловых скоростей частиц, испускаемых из источника, на максимальную плотность тока в фокусируемом пучке. Фокусировку пучка, имеющего конечную величину эмиттанса, можно усилить в реальном пространстве за счет концентрации частиц в пространстве $x'y'$. Использование более крутых траекторий частиц позволит уменьшить диаметр сфокусированного пучка. Однако наличие пространственного заряда может ограничить такой процесс, но, даже если пространственные заряды отсутствуют, все же должны

существовать какие-то ограничения, когда угол наклона отдельных траекторий к оси достигает $\pi/2$. Чтобы исследовать предельный размер пятна фокусировки, очевидно, необходимо выйти за рамки параксиального приближения и учесть также продольный фазовый объем пучка.

Здесь мы сформулируем достаточно общий подход к задаче описания пучка нерелятивистских частиц, испускаемых с термоэмиссионного катода (или же плазмы), температура которого равна kT . Будем следовать теории, предложенной Пирсом [228], которая приводит к результату, установленному Ленгмюром [157]. Каких-либо предположений относительно природы используемой оптической системы делать не будем. Рассмотрим задачу в нерелятивистском приближении, так что скорость частиц считается пропорциональной их импульсу. Это ограничение позволяет существенно упростить расчеты, однако после получения соответствующих результатов мы постараемся провести некоторое ограниченное (хотя и достаточно очевидное) обобщение.

Начнем с рассмотрения распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ частиц в фазовом пространстве, выходящих из плоского эмиттера. В системах, в которых ток ограничен пространственным зарядом, под эмиттером будем понимать плоскость с минимумом потенциала, расположенную перед катодом. При $\varphi = 0$ распределение скоростей "полумаксвелловское", поскольку допустимы лишь положительные значения v_z . Если температура эмиттера равна kT , то

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2n_0 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int \exp \left[- \frac{m_0 v^2 / 2 + q\varphi(\mathbf{x})}{kT} \right] d^3x d^3v; \quad (4.87)$$

здесь φ — разность потенциалов в данной точке и на поверхности эмиттера. Теорема Лиувилля остается справедливой, поскольку для отдельного электрона аргумент экспоненты сохраняется постоянным, так что $Df/Dt = 0$. Плотность заряда в реальном пространстве равна $n_0 q$. В выражении (4.87) появление множителя 2 связано с тем, что при интегрировании исключаются отрицательные значения v_z . Для полумаксвелловского распределения плотность тока, выходящего с катода под углом θ к нормали, пропорциональна $\cos \theta$. Это свойство было проверено экспериментально.

Плотность тока, выходящего с поверхности эмиттера, дается выражением

$$\begin{aligned} i_0 &= q \int v_z f d^3v = \\ &= n_0 q (2kT/\pi m_0)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Остается только вычислить плотность тока в точке, потенциал ко-

торой равен ϕ . Предположим, что система является аксиально-симметричной и имеет диафрагму, которая ограничивает максимальный угол падения величиной α . Выберем сферическую систему координат, центр которой расположим на оси в плоскости, где пучок имеет минимальный поперечный размер. Тогда $v_z = v \cos \theta$ и $d^3v = 2\pi v^2 \sin \theta d\theta dv$. Поскольку для любой частицы $v^2 \gg v_{\text{МИН}}^2 = -2q\phi/m_0$, интегрирование нужно проводить от $v_{\text{МИН}}$ до ∞ .

Плотность тока в центре пятна фокусировки записывается в виде

$$i_s = 2\pi q \int_{v_{\text{МИН}}}^{\infty} \int_0^{\alpha} v^3 f \sin \theta \cos \theta d\theta dv, \quad (4.89)$$

где f определяется выражением (4.87). Подстановка f и использование условия нормировки (4.88) приводит к простому результату:

$$\frac{i_s}{i_0} = \left(1 - \frac{q\phi}{kT}\right) \sin^2 \alpha. \quad (4.90)$$

В случае когда $q\phi \gg kT$ и угол α мал, правую часть этого выражения можно заменить величиной

$$\alpha^2 \frac{m_0 v_z^2}{2kT} \approx \frac{\alpha^2 \beta_z^2}{\beta_{\perp}^2}.$$

Тогда выражение (4.90) принимает вид

$$\frac{i_s}{i_0} = \frac{m_0 v_z^2 \alpha^2}{2kT} = \frac{\alpha^2 \beta_z^2}{\beta_{\perp}^2}. \quad (4.91)$$

Отсюда следует, что плотность тока нельзя увеличить более чем на множитель, равный квадрату отношения поперечной скорости к характерной тепловой скорости $\beta_{\perp} c$. В такой упрощенной форме этот результат можно было бы получить из инвариантности нормализованного эмиттанта (см. разд. 3.2). При этом обобщение на случай релятивистского движения оказывается очевидным, а именно вместо v_z нужно записать γv_z .

В общем случае довольно просто доказать, что весь ток, выходящий с однородного катода, невозможно сфокусировать в пятно, плотность тока в котором определяется выражением (4.91). В системе с ограничивающей диафрагмой, которая необходима для обеспечения максимальной плотности тока, полный ток обязательно уменьшается. С другой стороны, если отверстие диафрагмы достаточно широко и она способна пропускать через себя весь ток, то

в пятне фокусировки будет более низкая плотность тока. Эту задачу проанализировал Пирс, который привел график, показывающий, какая доля полного тока, снимаемого с катода, может быть сфокусирована в пятно данного размера в зависимости от относительной плотности тока, определяемой выражением (4.91). Для обычных величин разумным компромиссным значением является 0,63.

Более подробное обсуждение этого вопроса можно найти в книге Пирса [228]; Лихтенберг [182] и Эш [5] рассмотрели задачу с несколько других точек зрения. Эш рассмотрел влияние магнитного поля, когда угол θ не имеет определенного значения.

4.9. Общий обзор факторов, которые ограничивают размер пятна фокусировки.

В предыдущем разделе мы проанализировали ограничения на максимально достижимую плотность тока в пучке, обусловленные тепловыми скоростями частиц в источнике. Полученные формулы позволяют определить нижний предел площади пятна, в которую можно сконцентрировать часть тока от источника. Рассмотрим теперь другие ограничивающие факторы, такие, как сферическая и хроматическая абберации линз конечных размеров, конечная величина длины волны де Бройля частиц и пространственный заряд. В разных ситуациях преобладают различные факторы. Сферическая и хроматическая абберации обсуждались в разд. 2.8 и 2.9 гл. 2; дифракционные ограничения можно получить из простых оптических рассмотрений, а ограничения, вносимые пространственным зарядом, изучались в разд. 2.6 гл. 3.

Теперь попытаемся представить эти ограничения через параметры типичного аксиально-симметричного пучка, а также характеристики линзы конечных размеров и ограничивающей диафрагмы. Анализ будем проводить для релятивистского случая. Свойства пучка определяются следующими параметрами

- $(\gamma - 1)m_0 c^2 = -q\phi$ — кинетическая энергия частиц;
- $N = v/r_0$ — число частиц, приходящихся на единицу длины пучка,
- ϵ — эмиттанс пучка;
- $\lambda = h/p = h/\beta\gamma m_0 c$ — длина волны де Бройля;
- kT — температура катода;
- $I = Nq\beta c$ — ток пучка;
- $K = 2v(1 - \beta^2 - f)/\beta^2\gamma$ — обобщенный первеанс пучка.

Оптические характеристики следующие:

- C_s — коэффициент сферической абберации линзы конечных размеров;
- C_c — коэффициент хроматической абберации линзы конечных размеров,
- α — угол сходимости пучка, определяемый диафрагмами.

Чтобы найти искомые ограничения, рассмотрим вначале по отдель-

ности вносимые каждым фактором искажения. Если эмиттанс пучка равен ϵ , то минимальный радиус пучка при угле сходимости α равен $r_{\text{мин}} = \epsilon/\alpha$. Минимальный радиус пучка с током I , вышедшего с катода, температура которого равна kT , можно найти из выражения (4.91). Поскольку $I = \pi r_{\text{мин}}^2 i_s$, мы имеем следующее выражение:

$$r_{\text{мин}}^2 = \frac{I}{\pi i_s \alpha^2} \frac{2kT}{\gamma m_0 \beta^2 c^2}, \quad (4.92)$$

в котором, для того чтобы оно было справедливым в релятивистском случае, введен релятивистский фактор γ . Способ введения γ мы объясняли сразу же после получения формулы (4.91). Ограничения, обусловленные сферической абберацией, вычислялись в разд. 2.8 гл. 2. Наименьший радиус круга r_s , через который проходят все лучи, равен $C_s \alpha^3/4$. Хроматическая абберация обсуждалась в разд. 2.9 гл. 2. Для нее радиус соответствующего круга дается выражением

$$r_c = 2C_c \alpha \frac{\Delta p}{p} = 2C_c \alpha \frac{\Delta \gamma}{\beta^2 \gamma}. \quad (2.91)$$

В нерелятивистском случае эта величина равна $C_c \alpha \Delta \phi / \phi$.

В идеальной с других точек зрения системе размер пятна фокусировки ограничен дифракцией электронов, имеющих конечную длину волны. Дифракционная картина, образующаяся при дифракции электронов на линзе с конечным размером апертуры, представляет собой чередующиеся полосы, интенсивность которых спадает с ростом радиуса. Расстояние от дифракционного максимума до первого нуля — радиус "диска Эйри" — удобно использовать как (по порядку величины) радиус пятна фокусировки. Он равен

$$r_d = 0,61 \frac{\lambda}{\alpha} = 0,61 \frac{h}{\alpha \beta \gamma m_0 c} = 1,93 \frac{r_0}{\alpha_f \alpha \beta \gamma}, \quad (4.93)$$

где α — угол сходимости, λ — длина волны де Бройля, h — постоянная Планка, r_0 — классический радиус частицы и α_f — постоянная тонкой структуры, равная $1/137$.

Последний ограничивающий фактор, который нужно еще учесть, — это пространственный заряд. Выражение (3.37) определяет минимальный размер пятна фокусировки в зависимости от угла сходимости α и начального радиуса пучка R . Меняя обозначения, минимальный радиус сфокусированного пучка, ограниченный влиянием пространственного заряда, можно записать в виде

$$r = R \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2K}\right). \quad (4.94)$$

Таким образом, обсудим пять факторов, которые ограничивают размер пятна фокусировки. То, какой из них играет наиболее важ-

ную роль, зависит, естественно, от конкретного приложения. В табл. 4.2 для всех пяти эффектов перечислены функциональные зависимости минимального радиуса пятна фокусировки от различных параметров. (В таблице приведено 6 зависимостей, однако первые две – это по существу различные выражения одного и того же ограничивающего эффекта.) Если размер пятна фокусировки зависит от энергии или тока частиц, то он в любом случае уменьшается с ростом энергии или с уменьшением тока. Единственный общий параметр в различных ограничениях, который может действовать в противоположном направлении, – это угол сходимости α . С целью уменьшения aberrаций требуется небольшой угол α , в то время как при наличии остальных ограничивающих факторов угол α нужно иметь большим. Поэтому следует найти оптимальный угол сходимости и соответствующее соотношение между определяющими параметрами.

В качестве примера вычислим оптимальное значение α при наличии сферической aberrации и дифракции в предельном случае малого тока и нулевого эмиттанса. Обозначая минимальный радиус сфокусированного пучка через $r = (r_d^2 + r_s^2)^{1/2}$, из таблицы имеем

$$r^2 \approx \left(r_1 \alpha^3 \right)^2 + \left(\frac{r_2}{\alpha} \right)^2; \quad (4.95)$$

Таблица 4.2

ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ
НА РАЗМЕР СФОКУСИРОВАННОГО ПУЧКА

Фактор	Формула для расчета радиуса пятна фокусировки	Выражение или рисунок	Зависимость от α
Эмиттанс конечной величины ϵ	ϵ/α	–	$1/\alpha$
Плотность тока на катоде i_0	$(2kTI/\pi i_0 \alpha^2 \gamma m_0 \beta^2 c^2)^{1/2}$	(4.91)	$1/\alpha$
Сферическая aberrация C_s	$\frac{1}{4} C_s \alpha^3$	Рис. 2.10	α^3
Хроматическая aberrация C_c	$2 C_c \alpha \Delta\gamma/\beta^2 \gamma$	(2.91)	α
Дифракция на длине волны λ	$0.61\lambda/\alpha, (\lambda = 2\pi r_0/\alpha_f \beta \gamma)$	(4.93)	$1/\alpha$
Пространственный заряд K	$R \exp(-\alpha^2/2K)$	(4.94)	$\exp(-\alpha^2)$

здесь $r_1 = C_s/4$ и $r_2 = 0,61\lambda$. Полагая $dr/d\alpha = 0$, получаем

$$\alpha = (r_2/3r_1)^{1/4}, \quad (4.96)$$

$$r = (3^{-3/4} + 3^{1/4})^{1/2} r_1^{1/4} r_2^{3/4} \approx 0,64 C_s^{1/4} \lambda^{3/4}.$$

Это вычисление является весьма приближенным. В других простых теориях используют несколько отличающиеся предположения (например, вместо квадратов радиусов складывают радиусы, причем r_1 берут равным C_s , а не $C_s/4$). Согласно более основательным доводам (см. гл. 16 в работе [108]), вместо коэффициента 0,64 надо подставлять коэффициент, близкий к единице.

Приведенные выше расчеты можно найти во многих учебниках по электронным микроскопам. В случае интенсивных пучков надо также рассматривать и другие эффекты, перечисленные в таблице. Пространственный заряд характеризует локальные свойства пучка; эмиттанс и хроматическая aberrация определяются условиями в источнике или взаимным рассеянием частиц пучка в перетяжке. Последнее явление, называемое "эффектом Бурша" выходит за рамки рассмотренных до сих пор эффектов, поскольку для него не справедлива теорема Лиувилля в μ -пространстве, и его мы обсудим в гл. 5. В работе [225] дается обобщение результата (4.96) с учетом этих эффектов.

Если основную роль играют только сферическая aberrация и длина волны частиц, то пучок электронов с энергией в несколько десятков килоэлектрон-вольт и с током $\sim 10^{-12}$ А можно сфокусировать в пятно диаметром в несколько нанометров. В случаях когда ограничивающими факторами являются конечная величина эмиттанса и сферическая aberrация, выражение (4.96) все еще остается справедливым, но при этом $r_2 = \epsilon/\alpha$:

$$r = 0,93 C_s^{1/4} \epsilon^{3/4}. \quad (4.97)$$

Если эмиттанс пучка обусловлен только тепловыми скоростями частиц на катоде, то его можно выразить через температуру катода и радиус [выражение (4.81)]. С другой стороны, величину ϵ можно записать через яркость B и ток I . Из выражения (4.12) получаем $\epsilon^2 = \eta I/\pi^2 B$. Комбинируя это равенство с выражением (4.97) и подставляя $\eta = 2$, получаем окончательный результат:

$$I \approx \frac{5Br^{8/3}}{C_s^{2/3}}. \quad (4.98)$$

Числовый коэффициент, входящий в это упрощенное выражение, не надо воспринимать слишком серьезно. Для нас представляет интерес лишь зависимость от r и C_s . Малви [207] более подробно проанализировал данную задачу, причем специальное внимание уделил конструкции зондовых систем.

1.4. Замечания и литература. Материал, изложенный в данном разделе, разрабатывался в целом ряде работ. Свойства максвелловского распределения, теория оболочек и понятия давления и температуры рассматривались в многочисленных трудах по физике плазмы.

Фокусировка пучков, а также вопросы, связанные с выяснением ограничивающих факторов, влияющих на минимально возможный размер сфокусированного пучка, играют значительную роль для многих электронных устройств, таких, как электронно-лучевые трубки, электронные микроскопы, аппаратура для анализа микрообразцов и обработки материалов электронным пучком. Более подробное изложение теории применительно к специальным приложениям можно найти в специализированных книгах. В качестве примера можно привести монографию Мосса [205], посвященную расчету и формированию пучков в различных устройствах с особым ударением на конструкции электронно-лучевых трубок, а также книгу Мелеки [199] по сварке и книгу Бакиша [10], посвященную различным техническим приложениям.

Изучение ионных пучков и источников ионов представляет собой обширную область, которая по своей природе является главным образом экспериментальной. По этим вопросам имеется многочисленная литература, которая разбросана в виде различных статей. Хорошим пособием для получения подробной информации могут служить труды различных конференций, посвященных конкретным применениям, таким, как ускорители частиц, масс-спектрометры, исследования по управляемому термоядерному синтезу и внедрению ионов.

Исследования пинч-эффекта в плазменном столбе продолжались с течение длительного времени в связи с разработкой устройств для термоядерного синтеза. Сравнительно недавно этим эффектом начали заниматься и при изучении пучков, о чем упоминалось в разд. 2.6 гл. 3. Во многих случаях изучаемые аналитически конфигурации значительно идеализируют конфигурации, встречающиеся на практике, поэтому более подробную информацию получают либо эмпирически, либо с помощью численных методов.

§ 5. Кольцевые пучки и цилиндрические токовые слои¹⁾

5.1. Введение. Сильноточные кольцевые пучки и токовые оболочки (или "слои") изучались в связи с разработкой коллективных ускорителей и предполагаемых устройств для термоядерного синтеза. Исследование таких кольцевых пучков имеет также значение для определения максимальных токов, которые могут удерживаться в ускорителях частиц. Хотя в действительности параметры таких колец часто ограничиваются динамическими неустойчивостями, немаловажный интерес представляет исследование ограничений, обусловленных статическими собственными полями. Мы уже пытались учесть влияние пространственного заряда на примере (хотя и достаточно искусственном) ламинарного потока в бетатроне (см. разд. 4.4 гл. 3). В данном параграфе мы рассмотрим пучки с конечным эмиттансом и учтем влияние токов изображения в стенках.

В достаточно слабых токовых парааксиальных пучках учесть влияние собственных и изображающих полей относительно несложно. Однако в сильноточных пучках задача отыскания самосогласованного решения в аналитическом виде представляет значительную трудность. Для решения таких задач существует стандартная методика, но мы пока не будем говорить о ней, а изучим некоторые простейшие случаи более прямым способом.

Очевидно, что в поле бетатронного типа можно осуществить ряд сильно отличающихся самосогласованных распределений зарядов и токов. На рис. 4.16 показано такое поле, имеющее аксиальную симметрию, но спадающее по радиусу с увеличением расстояния от оси и увеличивающееся в аксиальном направлении по обе стороны центральной медианной плоскости. Даже в свободном пространстве и без учета влияния пространственного заряда в такой конфигурации могут существовать самые разнообразные траектории частиц. Обычная "бетатронная" траектория (см. разд. 5.3 гл. 2) лежит почти в плоскости симметрии и слабо отклоняется от равновесной орбиты в направлениях осей r и u . Центры других орбит захваченных частиц не лежат на оси системы, и частицы могут совершать значительные перемещения в u -направлении. Такие траектории часто возникают при отражении частиц от магнитного зеркала с

¹⁾ Исследование равновесий кольцевых пучков и токовых слоев необходимо для понимания работы ускорителя электронных колец и одного из рассматривавшихся вариантов экспериментальной термоядерной установки, а именно "Астроны". Принцип коллективного ускорения ионов электронными кольцами был впервые предложен и развит Векслером, Саранцевым и др. [299]. Установка "Астрон", созданная в Ливерморской лаборатории (США), предназначалась для исследований по удержанию горячей плазмы с помощью магнитного поля, создаваемого сильноточным электронным пучком ("токовым слоем"), вращающимся во внешнем магнитном поле [55]. — *Прим. ред.*

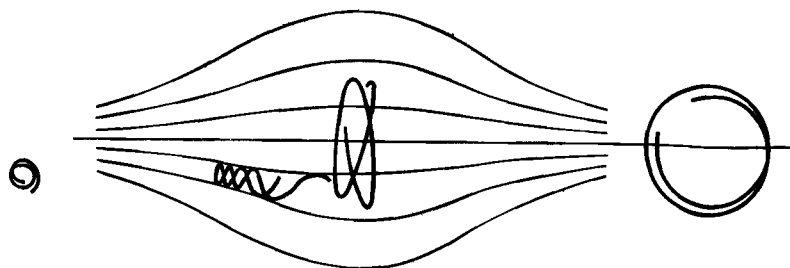


Рис. 4.16. Схематическое представление различных типов орбит частиц в "магнитной бутылке".

Орбита, расположенная в центре, иллюстрирует вертикальные и радиальные бетатронные колебания; орбита же, центр которой не лежит на оси системы, соответствует отражению частиц от магнитного зеркала.

большим магнитным полем, а всю систему в целом называют "магнитной бутылкой".

Соответствующее описание траекторий частиц в таких полях и идентификацию соответствующих инвариантов можно найти во многих учебниках по физике плазмы, например в книгах Ленерта [179] и Нортрапа [216]. Здесь мы не будем развивать эту тему дальше, а обратим внимание на распределения, о которых можно сказать, что они описывают пучок или токовый слой. Однако эти системы попадают в класс распределений, которые в большей степени соответствуют тем, что изучаются в некоторых разделах физики плазмы. Подкласс распределений заряженных частиц одного знака, описывающих как пучковые, так и квазипучковые конфигурации, составляет предмет рассмотрения в книге Девидсона [75]. В ней дается большой обзор разнообразных конфигураций и имеется обширный список литературы.

Приступим теперь к изучению некоторых частных примеров, имеющих реальный или потенциальный практический интерес. Примеры подобраны и представлены таким образом, что основное внимание уделяется существенным физическим свойствам систем, а не их математическому описанию.

5.2. Кольцевой пучок в бетатронном поле в отсутствие стенок.

В предельном случае малого числа частиц их движение в бетатронном поле имеет простой вид. Отдельные частицы следуют по траекториям типа описанных в разд. 5.3 гл. 2. В общем случае поток является неламинарным и форма поперечного сечения пучка определяется распределением частиц по импульсам и амплитудам бетатронных колебаний. Если частицы не совершают бетатронных колебаний, но имеют разброс по импульсам, то они формируют дискообразный пучок с ламинарным потоком частиц, разброс радиусов орбит

которых дается равенством $\Delta r/r = \alpha \Delta p/p$, где α — коэффициент расширения орбит, равный $(1-n)^{-1}$. Бетатронные колебания частиц, не имеющих разброса по энергии, приводят к образованию пучка с неламинарным потоком и конечным эмиттансом. Если увеличивать ток до тех пор, пока не станут проявляться собственные поля пучка, то возникают дополнительные эффекты. Во-первых, сила расталкивания между любыми двумя частями кольца, обусловленная присутствием собственных электрического и магнитного полей, стремится увеличить внешний радиус кольца; во-вторых, собственные поля изменяют частоту бетатронных колебаний Q -отдельных частиц.

Сначала вычислим изменение среднего радиуса кольца, имеющего эллиптическое поперечное сечение с полуосями a и b , предполагая, что a и b малы по сравнению с внешним радиусом кольца R . Это предположение позволяет не вдаваться в подробности структуры пучка и рассматривать его как заряженную токовую нить. Тем не менее надо иметь в виду, что произвольно тонкий пучок не всегда можно реализовать физически. Ясно, что для данного тока пучка величины a и b нельзя сделать меньше тех, которые допускаются выражением (3.83). Кольцевой пучок иллюстрируется на рис. 4.17. Как и при рассмотрении пучка в разд. 2.6 гл. 3, будем считать, что часть f зарядов кольцевого пучка нейтрализована захваченными в него зарядами противоположного знака. На единицу длины кольца действуют следующие силы:

F_L — сила Лоренца;

F_c — центробежная сила;

F_e — собственная сила электростатического взаимодействия между частицами пучка;

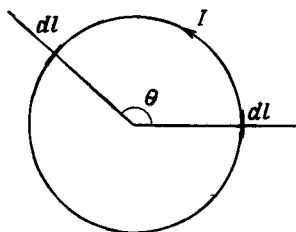


Рис. 4.17. Взаимодействие двух элементов кольцевого тока.

Вследствие симметрии на элемент dl силы действуют только в радиальном направлении. Как электростатическая, так и магнитная силы являются отталкивающими между движущимися зарядами. Электростатические же силы, действующие между подвижными и неподвижными нейтрализующими зарядами, являются силами притяжения.

F_{es} - собствённая сіла электростатычнага ўзаемадзейства між частіцамі пучка і статынарнымі нейтралізуючымі частіцамі;

F_m - сіла, дзействующая на частіцы со староны собствённага магнітнага поля пучка.

В раўнаважыі гэтыя сілы павінны быць сбалансаваны. Спачатку вылічым іх, а затым прыравняем электрычную і магнітную сілы цэнтрбежнай. В адпаведнасці з прынятым вышэ саглашэннем іспользуем крыволінейную сістэму каардынат $x y z$ і абозначым $r = R_0 + x$, дзе R_0 - радыус раўнаважнай арбіты. Угол θ будзем змяняць як $-s/R_0$ (см. § 4 гл. 1). Выражэння для F_L і F_c палучаюцца непасрэдна. Если лічу частіц, прыходзяшыхся на адзінцу дліны пучка, раўно N , то

$$F_L = -Nq\beta\sigma B_y, \tag{4.99}$$

дзе B_y - знешняе поле, і

$$F_c = \frac{\gamma N m_0 \beta^2 \sigma^2}{R}. \tag{4.100}$$

В адсутнасці дрыхіх сіл із раўнасва $F_c + F_L = 0$ імаем ізнестны рэзультав:

$$R_0 = \frac{qB}{\beta\gamma m_0 \sigma}, \tag{4.101}$$

дзе R_0 - радыус раўнаважнай арбіты адночыной частіцы.

Другіе сілы знадем, рассчыва электростатычнае і магнітнае расталкыванне і прывяжэнне між дувма элемеvтамі кольца, располоненым под углом θ , как показано на рс. 4.17, і затым проінтэгрывовав іх по θ . Вследствие симметрии все сілы направлены по радусу. Из закона Кулона следует, что в точке $\theta = 0$ радальная составляющая электрычнаго поля, созданного зарядом $NRq d\theta$, располоненным в точке θ , равна

$$\Delta E_r = \frac{NRq\sigma \sin \frac{1}{2}\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 (2R \sin \frac{1}{2}\theta)^2}. \tag{4.102}$$

Отсюда можно найти сілу, дзействующую на адзінцу дліны пучка:

$$F_e = \frac{(1-f)N^2q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R \sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{N^2q^2}{4\pi R \epsilon_0} \ln(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta) \Big|_0^\pi. \tag{4.103}$$

Этот інтэграл расходится. Его расходимость обусловлена тем, что мы взяли внутрєнный радус кольца равным нулю. При малых зна-

чениях θ правильное выражение имеет сложный вид. Однако вследствие того, что расходимость имеет логарифмический характер, можно использовать разумное приближение, т.е. записать $\theta_{\text{мин}} = \alpha a/R$, где α - коэффициент порядка единицы. После такой подстановки получаем

$$F_e = (1-f) \frac{N^2 q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \ln \frac{4R}{\alpha a}. \quad (4.104)$$

Более точные расчеты [165] показывают, что в случае, когда $R \gg a$, $\alpha \approx 1/2$. Это значение мы будем использовать в дальнейшем рассмотрении.

Сила, действующая со стороны нейтрализующих неподвижных зарядов противоположного знака, равна $-fF_e$. В выражение (4.104) входят две составляющие силы F_{es} , поскольку неподвижные частицы взаимно расталкивают друг друга, но притягивают движущиеся. Рассмотрение магнитного взаимодействия на основе закона Ампера показывает, что F_m по существу записывается в том же виде, причем

$$\frac{F_e}{(1-f)} = - \frac{F_m}{\beta^2}. \quad (4.105)$$

Таким образом, теперь можно написать уравнение баланса сил:

$$\frac{\gamma N m_0 \beta^2 \sigma^2}{R} - Nq\beta cB + \frac{Nq^2}{4\pi\epsilon_0 R} \ln \frac{8R}{\alpha} \{1-f-f(1-f)+\beta^2\} = 0. \quad (4.106)$$

Записав B через радиус R_0 равновесной орбиты одиночной частицы в поле B [выражение (4.101)], получаем искомым результат:

$$\frac{R}{R_0} \left[1 + \frac{v}{\beta^2 \gamma} \left\{ \beta^2 + (1-f)^2 \right\} \right] \ln \frac{8R}{\alpha} = 0. \quad (4.107)$$

Очевидно, условия того, что изменение радиуса орбиты в результате действия собственных сил мало, записываются в виде

$$\begin{aligned} vL < \beta^2, & \quad (\beta < 1, f = 0), \\ vL < \gamma, & \quad (\gamma > 1, \text{любые } f), \end{aligned} \quad (4.108)$$

где через L обозначен логарифмический член. Интересно сравнить эти условия с критериями, выведенными выше при описании свойств прямолинейных пучков, например с условием (3.12). В случае когда $v \gg 1$, пучок существовать не может. Однако при этом в плазмен-

ном кольце могут течь токи; обширные исследования кольцевых токов проводились в связи с разработкой устройств для термоядерного управляемого синтеза. Равновесие таких токовых колец во внешнем поле изучалось Муховатовым и Шафрановым, которые в своей работе [206] привели много ссылок на более ранние исследования.

Другой метод получения уравнения (4.107) основан на энергетических соображениях. Малые изменения R приводят к изменению энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях кольца. Для расчета изменения запасенной энергии под действием работы, производимой центростремительной силой, можно использовать принцип виртуальной работы, приняв для единицы длины кольца соответствующие значения индуктивности и емкости. Логарифмический член соответствует по существу половине индуктивности или емкости единицы длины пучка.

До сих пор мы не касались внутренней структуры токовой нити. Если кольцо находится во внешнем бетатронном поле с показателем n , то следует ожидать, что возможным распределением будет однородное эллиптическое распределение Капчинского - Владимирского (см. разд. 3.3 настоящей главы), причем отдельные частицы совершают бетатронные колебания на частотах, зависящих от комбинации внешнего и собственного полей. Это описание справедливо при $f = 0$. С другой стороны, если существует нейтрализующий фон, то невозможно реализовать распределение плотности в поперечном направлении, согласованное с циркулирующими частицами. Это объясняется тем, что радиальное электрическое поле $(F_e + F_s)/q$ смещает точку нулевого поля из центра эллипса и это приводит к тому, что центр масс нейтрализующих частиц перемещается на большее расстояние, чем радиус циркулирующего пучка, и кольцо поляризуется. Возвращающие силы, действующие на частицы при бетатронных колебаниях, перестают быть прямо пропорциональными амплитудам колебаний частиц, и система становится существенно нелинейной. Этот случай показан на рис. 4.18.

Поперечная структура реальных пучков этого типа, которые интенсивно изучались в связи с созданием ускорителей электронных колец, очень сильно зависит от того, каким образом был сформирован пучок. В общем случае распределение плотности в поперечном сечении более близко к гауссову, чем к однородному. Кроме того, следует принимать во внимание, что изучаемые конфигурации ни в коем случае не бывают всегда устойчивыми. В самом деле, в случаях когда собственные поля оказывают существенное влияние, велика вероятность развития как неустойчивости отрицательной массы, так и поперечной двухпотоковой неустойчивости, при которой ионы и электроны движутся в противоположных направлениях. Эти явления мы проанализируем в гл. 6.

Несмотря на эти оговорки, интересно вычислить частоту бета-

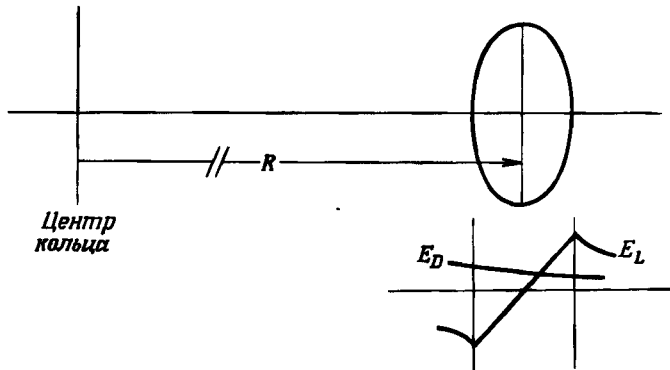


Рис. 4.18. Составляющие электрического поля в плоскости симметрии кольцевого тока, имеющего эллиптическое поперечное сечение.

Локальное поле E_L распределено симметрично относительно центра бечення, а составляющая E_D , создаваемая отдаленными частями кольца, не симметрична. Если заряд кольца частично нейтрализован, то кольцо поляризуется в радиальном направлении.

тронных колебаний в рассмотренных до сих пор структурах, пренебрегая нелинейностями, вносимыми поляризацией. Частота бетатронных колебаний определяется главным образом следующими тремя составляющими поля: 1) внешним магнитным полем; 2) локальными собственными полями, идентичными тем, которые существуют в случае прямолинейного пучка; 3) собственными полями, создаваемыми различными частями кольца и обусловленными тороидальной формой. Влияние первых двух составляющих рассмотрено по отдельности в разд. 3.6. Влияние третьего поля на радиус кольцевого пучка, но не на его фокусировку, описывается выражением (4.107). Чтобы вычислить Q -значения бетатронных колебаний, необходимо определить также градиенты дальнедействующих собственных полей на равновесной орбите. Это вычисление является несложным, но довольно трудоемким. Поэтому мы здесь воспроизведем лишь конечные результаты, приведенные Райзером [242], который решил эту задачу довольно подробно. В наших обозначениях полученные им результаты записываются следующим образом:

$$Q_x^2 = (1-n) + \frac{2KR^2}{a(a+b)} + \frac{v}{Y} \left\{ \ln \left(\frac{16R}{a+b} \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{(1-f)^2 v}{\beta^4 \gamma^3} \ln \frac{16R}{a+b} - \frac{n(1+\beta^2-f)}{\beta^2} \right\},$$

$$Q_y^2 = n + \frac{2KR^2}{b(a+b)} + \frac{v}{Y} \left\{ \ln \left(\frac{16R}{a+b} \right) \right\} \left\{ -1 + \frac{n(1+\beta^2-f)}{\beta^2} \right\}. \quad (4.109)$$

В этих выражениях три слагаемых соответствуют трем составляющим фокусирующим полям, перечисленным выше. С помощью выражения (3.30) первеанс K можно записать через v , γ и f . Эти формулы достаточно громоздки и не допускают никакого явного упрощения ни в нерелятивистском, ни в ультрарелятивистском пределах.

5.3. Кольцевой пучок в бетатронном поле в присутствии стенок; сдвиг частот Q бетатронных колебаний. В предыдущем разделе были вычислены параметры кольцевых токов в параксиальном приближении и в отсутствие стенок. Наличие стенок в общем случае усложняет задачу, в них индуцируются токи и заряды, которые изменяют силы, действующие на пучок и, следовательно, меняют конфигурацию пучка. Если силовые линии поля, создаваемого пучком, ограничиваются поверхностями, которые расположены относительно близко к поверхности кольца R , то задача несколько упрощается в том смысле, что можно пренебречь влиянием собственных полей, создаваемых удаленными частями кольца. В выражениях сохраняются лишь члены, обусловленные ближними собственными полями, которые соответствуют цилиндрической, а не тороидальной геометрии, и появляются дополнительные члены, соответствующие изображениям.

Эти дополнительные члены нужно обязательно вычислить, поскольку они определяют величину тока пучка, который может удерживаться в ускорителе с сильной фокусировкой без нежелательного сдвига частот Q бетатронных колебаний в область резонанса (см. разд. 7.3 гл. 2). Эту задачу проанализировал Ласлет [163] в связи с рассмотрением проблемы инжекции пучка в синхротроны. Поэтому изменения Q иногда называют " Q -сдвигом Ласлета". Рассмотрим "идеальную" систему, образованную пучком эллиптического поперечного сечения. Выберем граничные условия таким образом, чтобы сохранялась конфигурация полей, характерная для прямолинейного пучка эллиптического сечения, рассмотренного в разд. 4.2, гл. 3. В такой системе сдвиг частот Q должен описываться просто вторыми членами выражений (4.109):

$$\begin{aligned} \Delta Q_x^2 &= \frac{2KR^2}{a(a+b)}, \\ \Delta Q_y^2 &= \frac{2KR^2}{b(a+b)}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

(Эти выражения справедливы только в поле, однородном по азимуту, разумеется в реальном сильно-фокусирующем поле они имеют более сложный вид.) Предположим, что распределение плотности частиц в поперечном сечении пучка известно. Тогда можно найти

дополнительные фокусирующие члены и, используя методы, описанные в разд. 7.2 гл. 2, рассчитать сдвиг частот Q . С другой стороны, можно воспользоваться для расчетов "гладкой аппроксимацией", т.е. заменить реальное фокусирующее поле гипотетическим однородным полем, в котором частоты бетатронных колебаний остаются теми же самыми.

В большинстве ускорителей между полюсами магнитов расположена металлическая вакуумная камера. Силовые линии электрического поля заканчиваются на стенках камеры, а магнитные силовые линии в стационарном режиме проходят через камеру и входят в магнит. Однако в случае, когда имеются переходные явления или когда пучок группируется в сгустки, силовые линии магнитного поля могут также замыкаться на стенках вакуумной камеры.

Рассмотрим вначале однородный негруппированный пучок. Геометрия задачи задается полувисотой вакуумной камеры h , величиной зазора между полюсами магнита g и форм-факторами ϵ_1 и ϵ_2 , которые зависят от конкретной геометрии вакуумной камеры. Граница может быть, например, прямоугольной, эллиптической или трапецеидальной формы. Влияние границ, расположенных симметрично по отношению к медианной плоскости, сводится к изменению поля на орбите. Если высота пучка мала по сравнению с h и g , то поле зависит только от заряда и тока пучка, но не от его размера. Поле на орбите можно представить в виде разложения по мультиполям (рис. 4.19). Дипольная составляющая приводит к небольшому радиальному смещению равновесной орбиты, квадрупольная — в равной степени увеличивает фокусирующие и дефокусирующие члены соответственно в уравнениях радиального и вертикального движений, а мультиполи более высоких порядков приводят к появлению в уравнениях движения нелинейных членов. В случае прямых и почти параллельных границ существенным оказывается только квадрупольный член. Поскольку граничные условия для электрического и магнитного полей различны, практически полная компенсация эффектов электрического и магнитного собственных полей, которая имеет место при $f = 0$, когда β велико, нарушается. Вместо члена γ^{-3} , который описывал влияние собственных полей на движение частиц в заряженном пучке (поскольку $K = 2v/\beta^2\gamma^3$), мы имеем зависимость γ^{-1} .

Подробности расчета и зависимости форм-факторов ϵ от геометрии можно найти в оригинальной статье Ласлета¹⁾. Здесь же мы запишем полученные им результаты для частот Q бетатронных колебаний через параметры, определенные выше, а также на рис. 4.19. Работа Ласлета посвящена исследованию процесса инжекции пучка, поскольку именно в этом случае рассматриваемый эффект играет особенно важную роль. В течение короткого времени инжекции нейтрализи-

¹⁾ См. также работу Коломенского и Лебедева [152]. — *Прим. ред.*

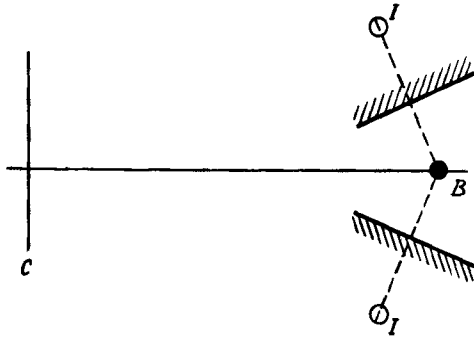


Рис. 4.19. Токи изображений I пучка B создают поле на орбите, которое можно представить в виде спектра мультиполей.

Дипольная составляющая приводит к сдвигу радиуса орбиты, а квадрупольная — к сдвигу частоты Q бетатронных колебаний.

зующие заряды не могут накопиться в пучке; поэтому f выбрано равным нулю. Выражения для частот Q , полученные при использовании гладкой аппроксимации с постоянным значением показателя поля n , в наших обозначениях записываются следующим образом

$$Q_x^2 = 1 - n - \frac{4\nu}{\beta^2 \gamma^3} \cdot \frac{R^2}{a(a+b)} \left\{ 1 - \gamma^2 a(a+b) \left(\frac{\epsilon_1}{h^2} + \frac{\epsilon_2}{g^2} \right) \right\}, \tag{4.111}$$

$$Q_y^2 = n - \frac{4\nu}{\beta^2 \gamma^3} \cdot \frac{R^2}{b(a+b)} \left\{ 1 + \gamma^2 b(a+b) \left(\frac{\epsilon_1}{h^2} + \frac{\epsilon_2}{g^2} \right) \right\}.$$

Для вычислений порядка этих величин можно положить $a = b$, $g = h = 5a$, $\epsilon_1 = \pi^2/48$ и $\epsilon_2 = \pi^2/24$. Как следует из расчета Ласлета, такие значения ϵ_1 и ϵ_2 соответствуют геометрии камеры в виде плоской щели. При подстановке этих значений второй член в квадратных скобках оказывается равным $(0,22 \gamma)^2$. Выражения (4.111) нельзя непосредственно сравнивать с формулами, приведенными Ласлетом, поскольку они описывают пучок с постоянным, а не с модулированным (сбунчированным) током. Как объяснялось выше, в случае гармонически меняющегося во времени тока граничные условия для магнитного и электрического полей одинаковы. Определим "коэффициент бунчировки" B как отношение средней и максимальной линейной плотности частиц. Значение частот Q для частиц, расположенных в точках, в которых плотность тока максимальна, получается заменой в первой из формул (4.111) выражения, стоящего в фигурных скобках, на следующее:

$$\frac{1}{B} \left[1 - \gamma^2 a(a+b) \left\{ \left(\frac{1}{B\gamma^2} + \beta^2 \right) \frac{\epsilon_1}{h^2} + \frac{\epsilon_2}{g^2} \right\} \right]. \tag{4.112}$$

(во второй формуле выражение в фигурных скобках заменяется этим же выражением, только вместо $\gamma^2 b$ надо записать $-\gamma^2 a$), где v обозначает теперь параметр Будкера, *усредненный* по орбите.

Приведенный выше анализ можно применить к случаю "некогерентных" бетатронных колебаний отдельных частиц, на любом азимуте колебания могут происходить в разных фазах, так что во всех точках пучок согласован в том смысле, как это понималось в разд. 3.2. Если рассматривать систему частиц на данном азимуте, то она имеет временную структуру, а если двигаться вдоль азимута со скоростью частиц, то такой структуры не наблюдается. Однако если фазы бетатронных колебаний распределены неоднородно, то наблюдатель, движущийся вместе с пучком, также увидит временную структуру. Такие колебания мы обсудим в гл. 6. Они усложняют ситуацию по сравнению с рассмотренной выше, и их можно классифицировать как динамические эффекты. Ласлет и Резеготти [169] рассмотрели соответствующие коэффициенты изображений. Оказывается, в некоторых встречающихся на практике случаях "когерентный сдвиг частот бетатронных колебаний" приводит к более жестким ограничениям, чем "некогерентные" эффекты, рассмотренные в данном разделе.

5.4. Цилиндрические токовые слои. С кольцевыми пучками, рассмотренными в предыдущем разделе, тесно связаны цилиндрические токовые слои. Частный случай такой системы с ламинарным потоком был рассмотрен в разд. 4.3 гл. 3. Можно построить много моделей неламинарных слоев, особенно если допустить, что они имеют в аксиальном направлении конечные размеры и частицы могут двигаться в этом направлении. Однако многие существенные физические свойства проявляются в бесконечной в аксиальном направлении системе с однородной плотностью заряда. Анализом такой системы мы и займемся здесь.

В бесконечных в аксиальном направлении системах магнитное поле должно быть однородным. В таком поле слаботочное кольцо конечной толщины состоит из ансамбля круговых орбит, центры которых располагаются внутри небольшого круга, как показано на рис. 4.20. Если средний радиус кольца равен R , толщина кольца $2a$, а относительный разброс импульсов частиц $\pm \Delta p/p$ достаточно мал, то центры круговых орбит лежат внутри круга, имеющего радиус $r = a + (\Delta p/p)R$. Ясно, что плотность заряда внутри радиальной области $R \pm a$ может быть произвольной. Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 0$ и плотность заряда однородна. Условие $a \ll R$ соответствует параксиальному приближению, поэтому плотность тока также однородно распределена по сечению пучка. Все орбиты будем рассматривать как отклонения от равновесной орбиты радиусом R , которой соответствует частота бетатронных коле-

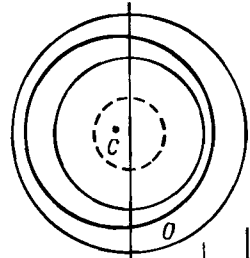
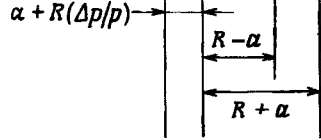


Рис. 4.20. Геометрия цилиндрического токового слоя.

Орбиты частиц лежат в кольцевой области $r = R \pm a$, а их центры — внутри круга $r \leq a + R(\Delta p/p)$. Показаны типичная орбита O и ее центр C . При расчетах предполагалось, что $a/r + \Delta p/p \ll 1$.



баний частиц $Q = 1$. Диаграмма эмиттанса пучка ограничена эллипсом, полуоси которого равны a и a/R , а соответствующий эмиттанс равен $\epsilon = a^2/R$. (Однако внутри эллипса плотность распределена неоднородно.)

С ростом числа частиц могут возникнуть собственные электрическое и магнитное поля. Для цилиндрического слоя в свободном пространстве радиальное электрическое поле равно нулю во внутренней полости, линейно увеличивается от внутренней к внешней границе слоя и уменьшается как $1/r$ вне его. С другой стороны собственное аксиальное магнитное поле постоянно во внутренней полости слоя и линейно спадает до нуля на его внешней границе. Если N_a — число частиц, приходящихся на единицу площади сечения цилиндрического слоя, а B_e — внешнее магнитное поле, то при $r = R$ имеем

$$E_1 = \frac{N_a q}{2\epsilon_0}, \tag{4.113}$$

$$B_1 = B_e - \frac{1}{2}\mu_0 N_a q \beta c.$$

Вводя обозначение $r = R + x$, зависимость полей от радиуса в интервале $-a < x < +a$ можно записать в виде

$$E = E_1 \left(1 + \frac{x}{a}\right), \tag{4.114}$$

$$B = B_1 + (B_e - B_1) \frac{x}{a}.$$

Радиус R равновесной орбиты можно найти из уравнения баланса электрической, магнитной и центробежной сил:

$$\frac{\beta^2 \gamma m_0 c^2}{R} = q(\beta c B_1 - E_1). \quad (4.115)$$

Обозначая $v_y = R N_a q^2 / 2 \epsilon_0 m_0 c^2$ и подставляя выражения для E_0 и B_0 , получаем следующее соотношение:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{v_y}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right), \quad (4.116)$$

где R_0 — радиус орбиты в предельном случае $v_y = 0$. Это соотношение аналогично выражению (4.107) для кольцевого пучка. Однако следует отметить, что v_y определяется здесь числом частиц, приходящихся на единицу длины в *аксиальном*, а не в азимутальном направлении. Как и в случае колец, при условии частичной нейтрализации слой становится поляризованным, а величину $1/\beta^2$, как и в выражении (4.107), надо заменить на $(1-f)^2/\beta^2$.

Диамангнитный фактор слоя, определяемый как отношение собственного поля B_s к внешнему B_e , можно найти из выражений (4.113) и (4.116):

$$-\frac{B_s}{B_e} = \frac{2(B_e - B_1)}{B_e} = \frac{\mu_0 N_a q \beta \gamma}{B_e} = \frac{2v_y/\gamma}{1 + (v_y/\gamma)(1 + 1/\beta^2)}. \quad (4.117)$$

В случае заряженного слоя эта величина всегда меньше единицы, так что поле не может изменить свое направление. С другой стороны, в случае нейтрализованного слоя и $v_y/\gamma = 1$ имеем $B_s = -B_e$. Такое изменение направления поля было зарегистрировано на практике [4].

В присутствии собственных полей орбиты перестают быть круговыми и, кроме того, в заряженной системе кинетическая энергия частиц меняется по сечению слоя. Интересным параметром является отношение разности потенциалов между внешней и внутренней границами слоя к кинетической энергии частицы, движущейся по равновесной орбите:

$$\int_{-a}^a \frac{qE dx}{(\gamma-1)m_0 c^2} = \frac{Nq^2 a}{(\gamma-1)\epsilon_0 m_0 c^2} = \frac{2a}{R} \frac{v}{\gamma-1}. \quad (4.118)$$

Частоты бетатронных колебаний можно записать через градиенты полей (разд. 5.3 гл. 2):

$$n_M = -\frac{R}{B_1} \frac{dB}{dr} = -\frac{R}{a} \frac{\mu_0 N_a q \beta c}{2B_e - \mu_0 N_a q \beta c}. \quad (4.119)$$

Подставляя $V_e R$ из выражения (4.116), получаем

$$n_M = -\frac{R}{a} \left(\frac{v_y}{\gamma + v_y/\beta^2} \right). \quad (4.120)$$

Для нейтрализованного пучка второй член в знаменателе равен нулю. Показатель электрического поля n_E находим непосредственно из выражения (4.114):

$$n_E = -\frac{R}{a}. \quad (4.121)$$

Из выражения (4.113) имеем

$$\beta_0 = \frac{-\mu_0 E_1}{E_1} = \frac{-v_y}{\beta(\gamma - v_y)}. \quad (4.122)$$

Подставляя теперь n_M , n_E и β_0 в выражение (2.121), можно сразу же найти Q^2 . В случае заряженного слоя это выражение имеет несколько громоздкий вид, но для нейтрального слоя его можно записать в виде

$$Q_n^2 = 1 + \frac{R}{a} \frac{v_y}{\gamma}. \quad (4.123)$$

В случае когда $v_y \ll \beta^2 \gamma$, выражение для частот Q бетатронных колебаний в заряженном слое можно существенно упростить:

$$Q^2 \approx 1 + \frac{R}{a} \frac{v_y}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right). \quad (4.124)$$

Поскольку $\beta < 1$, имеем $Q < 1$ и, следовательно, орбита прецессирует в направлении, противоположном направлению в нейтрализованном слое. Таким образом, мы нашли зависимости среднего радиуса цилиндрического слоя, диамагнетизма и частоты обращения от параметров системы. Важную роль играют безразмерные параметры v/γ и a/R .

Как уже отмечалось выше, эта модель является весьма идеализированной. Реализуемые на практике слои имеют концы и, кроме того, частицы в слое всегда обладают аксиальной составляющей скорости. Как и в случае кольцевых пучков, важную роль могут играть силы изображения. При наличии на оси системы внутреннего электрода электрическое поле E не обязательно равно нулю при $r < R - a$. Если, например, потенциал этого внутреннего проводника выбрать равным потенциалу внешней цилиндрической стенки, то условия равновесия изменятся. Следуя разработанной выше методике, нетрудно построить простые модели.

Интенсивные экспериментальные исследования цилиндрических токовых слоев конечной длины проводились в связи с проектом термо-ядерного реактора "Астрон" [55]. Многие теоретические работы, посвященные анализу равновесных конфигураций, используют различные предположения. В большей части из них применяется подход, основанный на уравнении Власова, который мы рассмотрим в § 6. Эта специальная тема подробно изложена в книге [75], в которой можно найти исчерпывающий список литературы. Работы по проекту "Астрон" сейчас прекращены, но благодаря им были получены слои большой интенсивности (см. одну из ранних работ по этому проекту [4]). Были выполнены также исследования протонных слоев [89, 291].

К моменту написания данной книги эта область исследований продолжала развиваться; проводились эксперименты по генерации интенсивных электронных слоев и колец в нестационарном режиме с помощью захвата интенсивных релятивистских пучков, имеющих специальную конфигурацию, которую мы обсудим в § 6 настоящей главы,

5.5. Адиабатическое поведение кольцевых пучков и цилиндрических токовых слоев; бетатронное условие 2 : 1. Если внешнее управляющее поле меняется медленно по сравнению с частотой вращения частиц по орбите, то радиус кольца, энергия частиц и частоты бетатронных колебаний изменяются адиабатически. Проанализируем вначале поведение тонкого слаботокового кольца радиусом R в бетатронном поле. Изменение радиуса R найдем из условия сохранения канонического момента импульса [см. выражение (2.6)] :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 R^2 \dot{\theta} + q A_\theta R) = 0. \quad (4.125)$$

Подставляя $R \dot{\theta} = -\beta c$, $q B R = \beta \gamma m_0 c$, $A_\theta = \left(\int_0^R B r dr \right) / R$, находим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^R B r dr - B_1 R^2 \right) = 0, \quad (4.126)$$

где B_1 и R — значения соответствующих величин на орбите. Для того чтобы определить закон изменения R от t , должна быть известна зависимость B от r и t . В качестве специального примера выберем

$$B = B_0(t) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-n}; \quad (4.127)$$

здесь $B = B_0$, $R = R_0$ в момент времени $t = 0$, а $0 < n < 1$. Подставляя выражение (4.127) в (4.126), находим адиабатический инвариант: $B_1 R^2 = \text{const}$. Интересно отметить, что он не зависит от n .

Естественно, здесь B_1 — это значение поля на орбите; B_1/B_{10} и R/R_0 , действительно, зависят от n .

Между прочим, интересно отметить, что если в таком поле вместо вращающейся частицы рассмотреть стационарную частицу, то она также движется внутрь по радиусу, так что $B_1 R^2 = \text{const}$. Это следует непосредственно из сохранения канонического момента импульса $q A_\theta R$, поскольку $R A_\theta$ равно уменьшенному в 2π раз потоку внутри окружности, проходящей через точку расположения частицы. Это иллюстрирует идею "привязки" частицы к силовой линии магнитного поля.

Другой важный случай, когда в уравнении (4.126) оба члена равны друг другу. В этом случае при изменении поля радиус остается постоянным, причем соответствующее условие записывается в виде

$$\int_0^R 2\pi r B dr = \psi = 2\pi B R^2. \quad (4.128)$$

Физически оно означает, что поток, проходящий внутри орбиты, в два раза больше, чем это было бы в случае однородного поля, имеющего всюду величину, равную полю на орбите. Оно называется "бетатронным условием 2:1" или "условием Видерое" [186]. В бетатронах в центральной области помещается железный сердечник, который позволяет удовлетворить этому условию.

Если ток в кольце достаточно велик, то необходимо учитывать собственные поля. Вычисления по существу оказываются такими же, за исключением того, что для определения соотношения между радиусом и импульсом надо использовать выражение (4.107) и ввести в уравнение (4.126) составляющую вектор-потенциала A_s , которая описывает собственное магнитное поле кольца. Последняя величина связана непосредственно с индуктивностью единицы длины пучка l с помощью соотношения

$$\psi_s = 2\pi R L \mu_0 N q \beta c = 2\pi R A_s. \quad (4.129)$$

Для кольцевого тока $l \sim 2 \ln(8R/a)$, где a — средний радиус поперечного сечения пучка. Добавляя A_s к значению A_θ , соответствующему внешнему полю в уравнении (4.126), и заменяя $\dot{\theta}$, как это было сделано выше, получаем

$$\frac{d}{dt} \{ \beta(\gamma + v l) m_0 c R - q A_\theta R \} = 0. \quad (4.130)$$

Это уравнение довольно интересно по форме; частицы ведут себя так, как если бы масса увеличилась. Увеличение энергии при данной скорости происходит за счет энергии, запасенной в собствен-

ном магнитном поле. Чтобы найти зависимость R от V , надо решить уравнение (4.130) с учетом выражения (4.107), в котором логарифмический член можно отождествить с $l/2$. [Как уже объяснялось в разд. 5.2, формулу (4.107) можно вывести из принципа виртуальной работы. При этом логарифмический член равен просто индуктивности единицы длины пучка.]

В случае заряженного ($f = 0$) пучка релятивистских частиц ($\beta \approx 1$) ситуация ничем не отличается от случая одиночной частицы, имеющей увеличенную массу $(\gamma + \nu l)m_0 c^2$. Нетрудно убедиться, что, если радиус сохраняется постоянным, должно выполняться условие 2:1. С другой стороны, если $\beta < 1$ или $f > 0$, радиус невозможно поддерживать постоянным. (В самом деле, если f не равно нулю, то ситуация становится более сложной; необходимо учитывать динамику ионов, которая отличается от динамики электронов.)

Аналогичные аргументы применимы и для цилиндрических слоев. Поскольку V однородно, вектор-потенциал магнитного поля токового слоя имеет простой вид $A_s = B_s R/2 = \mu_0 q \beta c N_a R/2 = \nu \gamma m_0 \beta c/q$. Кроме того, составляющая вектор-потенциала внешнего магнитного поля равна $B_e R/2$. В этом случае уравнение (4.130) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \{ (1 + \nu/\gamma) \beta \gamma m_0 c R - \frac{1}{2} q B_e R^2 \} = 0, \quad (4.131)$$

Записывая $B_e = \beta \gamma m_0 c/q R_0$ и исключая R_0 с учетом выражения (4.116), находим зависимость R от γ . Из вида этих уравнений ясно, что в присутствии собственных полей величина $B_e r^2$ не сохраняется.

Разумеется, при наличии стенок и полюсов магнита поведение пучков, рассматриваемых в данном разделе, изменяется под влиянием токов изображения. Кроме того, на практике часто наблюдаются неустойчивости, которые ограничивают допустимые значения ν/γ . Это имеет место, например, в ускорителе электронных колец, где ν/γ составляет всего $\sim 10^{-3}$. Однако для колец, имеющих большую величину отношения внутреннего радиуса к внешнему и большой разброс частиц по энергии, увеличить ν/γ нетрудно. В разд. 5.1 мы уже отмечали, что не всегда понятно, когда данная конфигурация перестает быть "электронным кольцом" и ее лучше описывать как "заряженную плазму". В § 8 гл. 5 дается краткое рассмотрение формирования пучков "убегающих" электронов в тороидальной плазме, к которой приложено индукционное электрическое поле.

5.6. Потоки в скрещенных полях. Рассмотренные в предыдущих нескольких разделах электронные кольца представляют собой примеры более общего класса "потоков в скрещенных полях", в которых

существенную роль играют магнитное и электрическое поля и скорость дрейфа, взаимно перпендикулярные (точно или приближенно) относительно друг друга. В изучаемых примерах предполагается, что скорость частиц равна по существу скорости дрейфа, а электрическое поле создается только пространственным зарядом пучка, а не заряженным проводником, расположенным вдоль оси. Отказ от первого из этих ограничений приводит к системам, которые в смысле определения, принятого в гл. 1, не являются пучками; пренебрежение вторым (но не первым) ограничением позволяет расширить возможные типы потоков и включить в рассмотрение важный класс устройств СВЧ магнетронного типа, а также манометр Пеннинга, применяемый для измерения давления. Возможно, отчасти произвольно мы исключаем из рассмотрения эти довольно специальные устройства. Подробные свойства потоков в скрещенных полях, используемых в устройствах СВЧ, можно найти в книге [217]. Теория манометра Пеннинга дается в работе [132], где имеются ссылки на ранее опубликованные работы.

Догерти и Леви [72] проанализировали равновесие с несколько другой геометрией. Это равновесие изучалось экспериментально Догерти и др. [74] на их установке "HIPAC". В этой установке вместо однородного магнитного поля применяется тороидальное. Вследствие того, что такое поле является существенно неоднородным по радиусу, эта тороидальная система не позволяет удерживать однократно заряженные частицы. Пример такого поля в бетатроне с азимутальным магнитным полем мы рассмотрели в разд. 7.7 гл. 2. Частица, имеющая составляющую скорости в плоскости, проходящей через ось симметрии, и благодаря наличию радиального градиента тороидального поля дрейфует в направлении, параллельном оси. Если же она имеет составляющую скорости, направленную вдоль силовых линий, то кривизна силовых линий в плоскости, перпендикулярной оси, вновь приводит к дрейфу в том же самом направлении. Однако присутствие других зарядов и проводящей тороидальной камеры обуславливают появление дополнительных сил, изменяющих этот дрейф таким образом, что заряд может удерживаться в торе. Экспериментальная проверка существования таких равновесий изложена в упомянутых выше работах

Л.5. Замечания и литература. В обычных учебниках содержится лишь малая доля материала, изложенного в предыдущих разделах, хотя в текущей литературе и трудах конференций имеется довольно большое количество статей, в которых рассмотрены затронутые здесь темы. Некоторые из них мы уже упоминали, чтобы продемонстрировать отдельные свойства систем. Одной из причин, побудившей предпринять исследование кольцевых пучков и слоев, было создание циклических ускорителей и накопительных колец, в которых эффекты собственных полей и полей изображения малы по сравне-

нию с влиянием внешнего фокусирующего поля (см. разд. 5.2 и 5.3). На свойства колец с величиной отношения $v/\gamma \sim 1$ обратил внимание Будкер в замечательной статье [45], в которой он предложил использовать поле интенсивного электронного пучка в качестве управляющего для ускорителя бетатронного типа. (С этой работой мы вновь встретимся в гл. 5.) Кристофилос [55] предложил использовать электронный слой для удержания плазмы и под его руководством были проведены обширные экспериментальные исследования [56]. Интерес к электронным кольцам средней (хотя и не очень малой) интенсивности возродился после ознакомления с предложенным Векслером [299] ускорителем электронных колец, в котором используется принцип коллективного ускорения. Большинство первых работ, в которых исследовались свойства таких колец, были выполнены в СССР.

Область применимости формул, описывающих рассчитанные в предыдущих разделах эффекты, часто ограничена развитием различного рода неустойчивостей, которые во многих случаях могут проявляться уже при достаточно малых значениях K или v/γ . Например, кольцевые пучки в бетатронном поле подвержены неустойчивости отрицательной массы и неустойчивостям, связанным с взаимодействием кольца со стенками. Эти эффекты мы обсудим в гл. 6. Количественная оценка различных ограничений, возникающих в ускорителях электронных колец, дается, в частности, в работе [202]. Оценку положения дел в этой области ко времени написания настоящей книги можно найти в ряде статей, опубликованных в трудах Стэнфордской конференции по ускорителям 1974 г.

Применения потоков в скрещенных полях разнообразны и достаточно различны; ссылки на соответствующую литературу мы уже приводили в разд. 5.6.

§ 6. Более общий подход; уравнение Власова

6.1. Введение. В гл. 3 и 4 мы рассмотрели большое количество различных конфигураций пучков, большей частью параксиальных. Свойства ламинарных потоков обычно выводились из рассмотрения баланса сил, действующих на отдельную частицу. В случае неламинарных потоков, в которых важную роль играют собственные поля, должно выполняться условие самосогласованности полей и орбит частиц; в изученных примерах для решения задач мы использовали разные приближения и специальные свойства некоторых частных систем, таких, например, которые описываются КВ-распределением.

Рассмотрим теперь более мощный и общий метод построения самосогласованных равновесий, с помощью которого можно анализировать любые, в том числе и непараксиальные, системы, лишь бы они подчинялись теореме Лиувилля. Хотя этот метод и является

мощным средством, он часто приводит к математическим сложностям, даже если сделать в исходной модели какие-то приближения и упрощения. По этой причине вместо точного, но сложного рассмотрения упрощенных моделей часто предпочитают использовать упрощенные приближенные исследования. Принимая во внимание эти замечания, приступим теперь к описанию метода решения.

Мы ищем решение задачи для такой конфигурации зарядов и токов в реальном пространстве, которая зависит не только от внешних полей, но и от полей, создаваемых самими зарядами и токами. Форма этой конфигурации определяется ограничениями, наложенными на функцию распределения плотности частиц в фазовом пространстве $f(P_i, x_i)$. (Если конфигурация образована более чем одним сортом частиц, то необходимо провести суммирование по всем сортам частиц.) Поля, создаваемые данными распределениями зарядов и токов, можно найти из уравнений Максвелла. Плотность заряда и плотность тока в реальном пространстве, выраженные через плотность частиц в фазовом пространстве f , равны $qff d^3v$ и $qffv d^3v$ соответственно. Рассмотрим теперь целиком задачу нахождения функции распределения, согласованной с полями, начиная с теоремы Лиувилля и ограничиваясь системами, в которых можно пренебречь столкновениями между частицами. Если P и x — канонически сопряженные координаты, то теорему Лиувилля можно записать в виде [см. выражение (4.10 а)]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial P_i} = 0. \tag{4.10a}$$

Выражая \dot{P} через внешние поля, получим уравнение, которое называют "уравнением Власова" или "кинетическим уравнением" [300].

В декартовых координатах в качестве P можно выбрать либо линейный импульс $p = \gamma m_0 \dot{x}$ частицы, на которую действуют электрическое и магнитное поля, либо канонический импульс $P = \gamma m_0 x + qA$ частицы, движущейся в электростатическом потенциальном поле. Для своих целей мы выберем первый импульс. Таким образом, можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= d(\gamma m_0 v)/dt = q [E(x, t) + v \times B(x, t)], \\ \dot{x} &= v = p/\gamma m_0. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Уравнение (4.10) можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{\gamma m_0} \frac{\partial f}{\partial x} + q \left(E + \frac{p \times B}{\gamma m_0} \right) \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{4.133}$$

Это и есть уравнение Власова. В нерелятивистском случае оно

имеет более простой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m_0} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0. \quad (4.134)$$

С другой стороны, переписывая его через канонический импульс \mathbf{P} , скалярный ϕ и векторный \mathbf{A} потенциалы, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})c}{[(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + m_0^2 c^2]^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - (\nabla\phi - \frac{\mathbf{P} - q\mathbf{A}}{\gamma m_0} \times \nabla \times \mathbf{A}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = 0; \quad (4.135)$$

здесь $f = f(\mathbf{P})$, а не $f(\mathbf{p})$. Это уравнение [или уравнение (4.133)] совместно с уравнениями Максвелла и соотношениями

$$\rho = q \int f d^3v, \quad \mathbf{i} = q \int v f d^3v \quad (4.136)$$

составляет замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений, которая определяет динамику ансамбля заряженных частиц, подчиняющихся теореме Лиувилля. В выражениях (4.136) необходимо брать сумму интегралов по всем сортам частиц, если их несколько. Напомним, что рассматриваемая система уравнений описывает картину приближенно, поскольку они выведены в приближении "сглаженного" поля, создаваемого ансамблем из большого числа частиц. Сила, действующая на данную частицу со стороны других частиц, представляет собой сглаженную усредненную силу и не зависит от конкретного положения любой другой частицы ансамбля. Таким образом, столкновения между отдельными частицами не учитываются.

В общем случае отыскание решений уравнений Максвелла - Власова является довольно трудной задачей, хотя существуют два класса задач, которые мы решим с помощью рассматриваемого метода. К первому классу этих задач относится определение самосогласованных равновесий, обладающих некоторыми специальными свойствами, второй класс задач - это исследование устойчивости таких равновесий с использованием метода возмущений. В следующем разделе мы опишем метод определения самосогласованных равновесий.

6.2. Определение самосогласованных равновесий. Во многих случаях равновесные конфигурации можно найти, если некоторые их свойства известны, а остальные рассматриваются как неопределенные параметры. Сделав такой выбор и подставив выбранные параметры в уравнения Власова и Максвелла, можно получить (как мы надеемся) соотношение между другими неопределенными параметрами, которое легко интерпретируется и является самосогласованным. При выборе физически реальных и поддающихся аналитическому рассмотрению равновесий требуется определенное искусство. Метод решения основан на том, что любая функция интегралов движения является реше-

нием уравнения Власова. В том, что это должно быть именно так, можно убедиться, рассматривая траекторию одиночной частицы. Согласно теореме Лиувилля [уравнение (4.10б)] $Df/Dt = 0$ и по определению это условие должно выполняться, когда f зависит только от интегралов движения.

Очень простое применение этого свойства приводит к соотношению Больцмана, упомянутому в разд. 4.2, между плотностью частиц и потенциалом поля в газе, частицы которого имеют максвелловское распределение по скоростям. В случае когда нерелятивистский газ находится в электростатическом потенциальном поле, описываемом потенциалом ϕ , интегралом движения является энергия

$$H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + q\phi(x). \quad (4.137)$$

Функция распределения

$$f = f_0 \exp\left(\frac{-H}{kT}\right) = f_0 \exp\left\{\frac{-(\frac{1}{2} m_0 v^2 + q\phi)}{kT}\right\} \quad (4.138a)$$

зависит только от интегралов движения и, следовательно, является решением уравнения (4.134), в чем можно убедиться, подставив в уравнение $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Если $\int f_0 \exp(-m_0 v^2/2) d^3v$ обозначить через n_0 , то мы имеем [см. выражение (4.45)]

$$\int f d^3v = n = n_0 \exp\left(\frac{-q\phi}{kT}\right),$$

т.е. получаем желаемый результат.

6.3. Релятивистский пучок Хаммера и Ростокера. Проиллюстрируем теперь способ нахождения самосогласованного решения уравнений Максвелла – Власова на более сложном примере цилиндрического частично нейтрализованного самосжатого пучка. В этом примере мы не ограничены парааксиальным приближением, хотя, налагая ниже определенные условия, можно свести его к случаю парааксиального пинча, рассмотренного в разд. 3.5. Равновесие, которое мы будем здесь исследовать, и метод вычислений по существу те же, что и использованные Хаммером и Ростокером [115], хотя простое нерелятивистское решение этой же задачи приведено в качестве примера в книге Лонгмайра [190], в которой иллюстрируются возможности данного метода.

Предположим, что пучок характеризуется следующими свойствами:

- 1) является однородным в z -направлении;
- 2) обладает аксиальной симметрией,
- 3) частично нейтрализован стационарным фоном ионов, так что отношение заряда пучка к заряду нейтрализующих ионов всюду постоянно и равно f ,

- 4) все движущиеся частицы имеют одинаковые энергии;
 5) аксиальный канонический импульс для всех движущихся частиц один и тот же.

Свойства 4 и 5 описываются следующими соотношениями:

$$H_0 = \gamma_0 m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 + q\phi(r) \quad (4.139)$$

[здесь γ_0 — значение γ на оси ($r=0$), $\phi=0$ при $r=0$] и

$$P_{z0} = \beta_z \gamma m_0 c + qA_z = \beta_{z0} \gamma_0 m_0 c \quad (4.140)$$

(здесь $\beta_z c$ — z -составляющая скорости, а β_{z0} — значение β_z на оси.)

Используем тот факт, что любой интеграл движения удовлетворяет уравнению Власова и запишем функцию распределения в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(r, P_x, P_y, P_z) = C \delta(H - H_0) \delta(P_z - P_{z0}), \quad (4.141)$$

где C — нормировочная постоянная, которая еще не определена. Вместо шести переменных фазового пространства имеем только четыре, поскольку свойства системы не зависят от z и θ . Чтобы найти плотность $n(r)$, проинтегрируем f по P_x, P_y, P_z и θ . Во-первых, следует заметить, что $f=0$ при всех значениях импульса P_z , входящего в обе δ -функции, за исключением тех, при которых аргументы δ -функций обращаются в нуль. Выражая H через p и ϕ и учитывая, что $P_z = p_z + qA_z, P_x = p_x$ и $P_y = p_y$, получаем

$$f(r, p_x, p_y, p_z) = C \delta[c(m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + (P_{z0} - qA)^2)^{1/2} + q\phi - H_0] \delta(p_z - P_{z0}). \quad (4.142)$$

Чтобы проинтегрировать функцию f , удобно ввести новое обозначение: $p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2$, так что вследствие аксиальной симметрии имеем $dp_x dp_y = dp_{\perp}^2/2$. Поскольку распределение по P_z имеет вид δ -функции, а интегрирование по θ дает 2π , искомый интеграл запишется в виде

$$n(r) = \iint f dp_x dp_y dP_z d\theta = \pi C \int dp_{\perp}^2 \delta(F), \quad (4.143)$$

где F — аргумент δ -функции в выражении (4.142). Для вычисления интеграла необходимо записать δ -функцию в виде $\delta(p_{\perp}^2 - p_{\perp 0}^2)$. Подставляя $F=0$ в выражение (4.142), имеем

$$p_{\perp 0}^2 = \left\{ \frac{(H_0 - q\phi)^2}{c^2} - (P_{z0} - qA)^2 - m_0^2 c^2 \right\}. \quad (4.144)$$

Используя соотношение

$$\delta\{F(p_{\perp}^2)\} = \frac{\delta(p_{\perp}^2 - p_{\perp 0}^2)}{dF/dp_{\perp}^2}, \quad (4.145)$$

выражение (4.143) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} n(r) &= \pi C \int \frac{\delta(p_{\perp}^2 - p_{\perp 0}^2) dp_{\perp}^2}{df/dp_{\perp}^2} = \\ &= \frac{2\pi C}{c^2} \int \delta(p_{\perp}^2 - p_{\perp 0}^2) \{m_0^2 c^4 + c^2 p_{\perp}^2 + c^2 (P_{z0} - qA)^2\}^{1/2} dp_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Последний член можно представить в виде $(H_0 - q\phi)^{1/2}$ [выражение (4.144)]. Подставляя в (4.146) величину $H_0 = \gamma_0 m_0 c^2$ и интегрируя, получаем

$$n(r) = 2\pi C \gamma_0 m_0 \left[1 - \frac{q\phi}{\gamma_0 m_0 c^2} U(p_{\perp}^2) \right], \quad (4.147)$$

где U — ступенчатая функция Хевисайда, которая при отрицательных аргументах равна нулю, а при положительных — единице. Это соответствует тому, попадает или нет аргумент δ -функции в пределы интегрирования. Физически условие $p_{\perp}^2 = 0$ означает, что область движения частиц зависит от их энергии. Частицы находятся в потенциальной яме глубиной $\int q\phi dr$ и в случае, когда $p_{\perp}^2 = 0$, движутся в направлении, параллельном оси. Постоянную C можно выразить через n_0 . Подставляя в функцию U вместо p_{\perp}^2 его выражение, окончательно получаем

$$n(r) = n(0) \left\{ 1 - \frac{q\phi r}{\gamma_0 m_0 c^2} \right\} U \left\{ \frac{(H_0 - q\phi)^2}{c^2} - (P_{z0} - qA)^2 - m_0^2 c^2 \right\}. \quad (4.148)$$

Выражение (4.148) определяет зависимость плотности от потенциала и интегралов движения H_0 и P_{z0} . Плотность заряда находят путем совместного решения уравнения Пуассона с (4.148). Однако, прежде чем это сделать, интересно найти также распределение тока.

Найдем это распределение, вычисляя вместо $n(r)$ величину $n < \beta_z c > (r)$. Вместо уравнения (4.143) имеем

$$\begin{aligned} n(\beta_z) &= \int \frac{f dp_x dp_y dP_z d\theta (P_{z0} - qA)}{\gamma m_0 c} = \\ &= \pi C \int \frac{dp_{\perp} (P_{z0} - qA) \delta(F)}{\gamma m_0 c}. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Проводя аналогичные алгебраические преобразования, получаем

$$n(\beta_z) = \left[n(0) \frac{\{P_{z0} - qA_z\}}{\gamma_0 m_0 c} \right] U(P_{\perp}^2). \quad (4.150)$$

Для окончательного решения задачи остается решить уравнения Максвелла с учетом выражений (4.148) и (4.149). Это позволит нам определить пространственное распределение величин \mathbf{E} и \mathbf{B} . После того как мы определим эти поля, можно сразу найти (если это требуется) траектории частиц, а также другие свойства, такие, как распределения плотности заряда и тока.

Прежде чем перейти к расчету полей, предположим, что в пучке присутствует нейтрализующий фон, благодаря которому плотность заряда пучка уменьшается в $1-f$ раз. В принципе можно сказать, что фон образован неподвижными массивными частицами, хотя его можно было бы заменить другим самосогласованным динамическим распределением. Наиболее оптимальным методом решения уравнений является вычисление полей из потенциалов, которые определяются по формулам

$$\nabla \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\phi}{dr} \right] = \begin{cases} \frac{q(1-f)}{E_0} n(0) \left(1 - \frac{q\phi}{\gamma_0 m_0 c^2} \right), & r \leq a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad (4.151)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = -\nabla^2 A_z = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dA_z}{dr} \right] = \begin{cases} \frac{qn(0)}{\gamma_0 m_0} (P_{z0} - qA_z), & r \leq a, \\ 0, & r > a; \end{cases} \quad (4.152)$$

здесь a — радиус, на котором функция U в выражениях (4.147) и (4.150) обращается в нуль. Нормируем потенциалы ϕ и A_z таким образом, чтобы они обращались в нуль при $r = 0$. Глубину бесстолкновительного скин-слоя D определим из выражения

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 \gamma m_0 c^2}{n_e(0) q^2} = \frac{\gamma}{4\pi n_e(0) r_0}. \quad (4.153)$$

Решения уравнений (4.151) и (4.152) с учетом выражений (4.149) и (4.153) можно записать в виде

$$\phi(r) = \frac{\gamma m_0 c^2}{q} \left[1 - I_0 \left\{ \frac{r}{D} (1-f)^{1/2} \right\} + U(r-a) \frac{a}{D} (1-f)^{1/2} I_1 \left\{ \frac{a}{D} (1-f)^{1/2} \right\} I_n \left[\frac{r}{a} \right] \right], \quad (4.154)$$

$$A(r) = \frac{P_{z0}}{q} \left[1 - I_0\left(\frac{r}{D}\right) + U(r-a) \frac{a}{D} I_1\left(\frac{a}{D}\right) \ln \frac{r}{a} \right], \quad (4.155)$$

где I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя, а U — ступенчатая функция Хевисайда. Интегрируя уравнения (4.151) и (4.152) с учетом этих выражений, можно найти поля

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\gamma_0 m_0 c^2}{q} \frac{(1-f)^{1/2}}{D} I_1\left\{\frac{r}{D}(1-f)^{1/2}\right\}, & r < a, \\ \frac{\gamma_0 m_0 c^2}{q} \frac{(1-f)^{1/2}}{D} \frac{a}{r} I_1\left\{\frac{a}{D}(1-f)^{1/2}\right\}, & r > a, \end{cases} \quad (4.156)$$

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{P_{z0}}{qD} I_1\left(\frac{r}{D}\right), & r < a, \\ \frac{P_{z0}a}{qDr} I_1\left(\frac{a}{D}\right), & r > a. \end{cases} \quad (4.157)$$

Зависимости плотности и аксиальной скорости β_z от радиуса находим из вычисления выражений (4.147) и (4.150) с учетом выражений (4.142), (4.154) и (4.155). Это дает

$$\frac{n(r)}{n(0)} = I_0\left\{\frac{r}{D}(1-f)^{1/2}\right\} = \frac{\gamma(r)}{\gamma_0}, \quad (4.158)$$

$$\frac{\beta_z(r)}{\beta_z(0)} = \frac{I_0(r/D)}{I_0\{(r/D)(1-f)^{1/2}\}}. \quad (4.159)$$

Выражения (4.156) — (4.159) показывают, что величины полей, плотность, кинетическая энергия и скорость частиц меняются по сечению пучка. Однако, очевидно, радиус пучка a нельзя определить непосредственно. Мы находим его из выражения, полученного подстановкой A (4.155) и φ (4.154) в уравнение (4.156) при $U = 0$:

$$H_0^2 I_0^2\left\{\frac{r}{D}(1-f)^{1/2}\right\} = P_{z0}^2 c^2 I_0^2\left(\frac{r}{D}\right) + m_0^2 c^4 + p_\perp^2 c^2. \quad (4.160)$$

Полагая $p_\perp^2 = 0$, отсюда находим требуемое значение для a .

Получив эти выражения, проанализируем теперь решения. В нейтральном пучке (в котором $f = 1$) n и γ не зависят от радиуса, а β_z и, следовательно, i_z увеличиваются с радиусом. Увеличение β_z должно быть понятным, поскольку, как мы видели выше, на границе пучка частицы движутся в z -направлении. Для пучков с

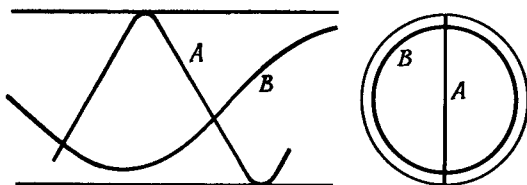


Рис. 4.21. Орбиты частиц в модели пучка Хаммера – Ростокера.

Орбита *A* плоская и достигает границы пучка; орбита *B* является спиральной.

большим отношением a/D отношение $\beta_z(r)/\beta_z(0)$ также велико. Поскольку γ не зависит от r , то частицы пересекают ось под большими углами к ней, как показано на рис. 4.21. При уменьшении f как n , так и γ увеличиваются с радиусом; пучок стремится стать трубчатым с малым числом медленных электронов в приосевой области. В случае $f = 0$ никаких решений для a не существует. Это физически очевидно, поскольку силы электростатического расталкивания всегда превосходят силы магнитного сжатия. Если f невелико, то в пучках с большим отношением a/D большая часть заряда сосредоточена на больших радиусах. Однако при всех значениях f , отличных от нуля, существуют решения, соответствующие произвольно большому току, переносимому пучком.

Можно было бы доказать, что такая конфигурация пучка очень искусственна и вряд ли ее можно реализовать практически. Конечно если учитывать, что пучок инжектируется из пушки или с катода, имеющих определенную геометрию, то трудно обеспечить соответствующие согласованные условия на границе. Тем не менее в экспериментах такой пучок все же проявляет некоторые из отмеченных свойств, в частности, отсутствуют какие-либо "ограничения" при $v/\gamma = 1$ и пучок приобретает трубчатую форму. Можно построить более простые (но более искусственные) модели пучков, которые обладают этими свойствами. Некоторые из моделей были рассмотрены автором [173].

При $a/D \ll 1$ функции Бесселя можно заменить их асимптотическими представлениями $I_0(x) \approx 1 + x^2/4$, $I_1(x) \approx x/2$. Нетрудно убедиться, что в этом предельном случае распределения аксиальной скорости и плотности частиц однородны по радиусу $v/\gamma \ll 1$ и $\beta_z \ll \beta_\perp$, а распределение поперечных скоростей аналогично КВ-распределению. Такой пучок идентичен рассмотренному в разд. 3.3. На основе данного типа равновесия исследована тороидальная конфигурация пучка как в параксиальном приближении, так и в непараксиальном случае. В одном из таких исследований [76] характеристики кольца, полученные этим методом в параксиальном приближении, сравнивались с характеристиками, представлен-

ными в разд. 5.2. В практически используемых кольцевых пучках предположение о том, что для всех частиц P_θ и H являются постоянными, выполняется плохо. Обе эти величины имеют некоторый разброс, и распределение плотности в поперечном сечении пучка обычно не сильно отличается от гауссова.

С помощью кинетического подхода исследовались пучки как прямой и тороидальной конфигурации, так и в виде цилиндрических слоев. Во многих работах изучались функции распределения, описывающие равновесия типа "жесткого ротатора", а именно функции

$$f(H, P_\theta, P_z) = f(H - \omega_R, P_\theta, P_z), \quad (4.161)$$

в которых средняя угловая скорость равна ω_R . Функцию распределения обычно выбирают в виде δ -функции или экспоненциальной зависимости. Этот класс распределения представляет собой обобщение распределений, исследованных в разд. 2.8 гл. 3. Подробности можно найти в книге Девидсона [75].

Л.6. Замечания и литература. В настоящее время продолжают обширные экспериментальные исследования свойств интенсивных релятивистских пучков, энергия частиц в которых составляет несколько МэВ, а величина v/γ порядка единицы. Изучаются линейные и тороидальные конфигурации пучков в различных окружающих условиях, например, при наличии проводящих стенок, резонаторов, плазмы или остаточного газа в магнитном поле и без него. На данном этапе трудно кратко сформулировать современный уровень знаний. Мы не будем пытаться делать это. Некоторые ссылки, касающиеся открытий ранее не наблюдавшихся явлений приведены в предыдущих разделах. В кратком популярном обзоре, выполненном Флейшманом [88], основное внимание уделено применениям пучков. Более подробные ссылки на литературу следует искать в трудах последних конференций.

Детальные характеристики таких пучков во многих случаях являются весьма сложными, и достаточно хорошего согласия между теорией и экспериментом, которого можно было ожидать в ускорителях частиц и лампах СВЧ, не достигается. Теоретические представления, в особенности о нестационарных процессах, часто отрывочны и в некотором смысле являются эмпирическими и, хотя с их помощью можно указать на предполагаемый характер поведения, они позволяют в лучшем случае иногда получить лишь качественные оценки. Несомненно, прогресс к лучшему пониманию данного вопроса будет продолжаться.

ПУЧКИ С РАССЕЯНИЕМ И ДИССИПАЦИЕЙ

§ 1. Введение

Во всех рассмотренных до сих пор случаях мы пренебрегали потерями энергии частиц и их взаимным рассеянием или рассеянием на остаточном газе. В гл. 4 изучалось взаимодействие отдельной частицы со средними полями, создаваемыми другими частицами и именуемыми собственными электрическим и магнитным полями. Движение частиц в этих полях удовлетворяет теореме Лиувилля. В данной главе мы обсудим некоторые процессы, которые имеют важное значение на практике, но не подчиняются теореме Лиувилля в шестимерном фазовом пространстве (μ -пространстве).

Здесь мы рассмотрим четыре типа процессов: рассеяние и излучение частиц в полях внешних агентов, а также рассеяние и излучение в собственных полях пучка. К первому типу относится рассеяние частиц в остаточном газе, имеющемся в ускорителях и накопительных кольцах, что приводит к непрерывному увеличению нормализованного эмиттанса¹⁾. С этим процессом тесно связано охлаждение²⁾ одного пучка другим, распространяющимся внутри первого с той же скоростью. Второй тип связан, например, с динамикой пучков в электронных синхротронах, в которых излучение, обусловленное кривизной орбиты, приводит как к потерям энергии частицами, так и к их рассеянию, обусловленному квантовой природой излучения. К третьему типу можно отнести взаимное рассеяние частиц в пучке. Оно наблюдается в кроссоверах пучков электронных микроскопов и в пучках электронных накопительных колец. Первое из этих явлений называют "эффектом Бурша", а второе — "эффектом Тушека". Наконец, к четвертому типу относится излучение частиц в собственных полях пучка, которое имеет место в почти нереальном, но с точки

¹⁾ Определение нормализованного эмиттанса см. на стр. 177 — *Прим. ред.*

²⁾ При накоплении пучков протонов и особенно антипротонов в накопительных кольцах возникает требование каким-то образом уменьшить фазовый объем пучка, чтобы можно было вводить в камеру дополнительные порции частиц и повышать их плотность. Для этого было предложено применять пучок электронов, движущийся на прямолинейных участках с той же скоростью, что и ионы. Электронный пучок при взаимодействии уносит с собой часть поперечного импульса ионов и таким образом, как говорят, "охлаждает" ионный пучок, уменьшая его поперечную температуру, т.е. групповой разброс: см. дальше § 7. — *Прим. ред.*

зрения самой идеи интересном стабилизированном излучением пучке Будкера [45] .

Существует еще одна важная область применения пучков, а именно приборы СВЧ, которую мы здесь рассматривать не будем. Эту очень обширную область можно назвать одним словом "шум". Хотя она представляет несомненный интерес и имеет большое значение, исследовать ее стоит, только рассматривая всю систему в целом, а не один пучок. Однако следует заметить, что именно **превосходные шумовые характеристики** ламп бегущей волны с **небольшой мощностью** дают им преимущество по сравнению с соответствующими полупроводниковыми устройствами.

§ 2. Многократное рассеяние пучка в остаточном газе или плазме

Рассеяние первоначально параллельного пучка в газе однородной плотности хорошо изучено. Если потерями энергии частиц на ионизацию или ионизацию остаточного газа можно пренебречь и считать, что угол рассеяния мал, т.е. $\sin \theta \approx \theta$, то их поведение является особенно простым. На очень тонком слое газа рассеивается относительно немного частиц и угловое распределение рассеянных частиц зависит от конкретных особенностей рассеивающего центра. В случае толстого слоя, если предположить, что сечение рассеяния быстро падает с увеличением θ , частицы, идущие под углом $\theta \approx 0$, испытывают несколько столкновений и их распределение приближается к гауссову, имеющему "хвост однократно рассеянных частиц". На больших углах распределение все еще имеет вид, соответствующий однократному рассеянию. При дальнейшем увеличении толщины газового слоя гауссова часть распределения становится справедливой для все больших углов θ до тех пор, пока она не станет хорошим приближением во всем диапазоне углов. Такое поведение описано, например, Росси в его книге [249].

Проанализируем теперь этот процесс в случае рассеяния пучка частиц на тяжелых стационарных рассеивающих центрах, соответствующих, скажем, ядрам атомов газообразного азота. Сечение рассеяния частиц, имеющих заряд, равный заряду электрона, в пределах телесного угла $d\Omega$ дается формулой рассеяния Резерфорда

$$\sigma(\theta) d\Omega = \frac{Z^2 r_0^2}{4\beta^4 \gamma^2} \csc^4\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\Omega, \quad (5.1)$$

где r_0 - классический радиус налетающей частицы и Z - заряд рассеивающих ядер. Если углы рассеяния малы, то

$$\sigma(\theta) \approx \frac{4Z^2 r_0^2}{\beta^4 \gamma^2 \theta^4}. \quad (5.2)$$

При $\theta \rightarrow 0$ сечение рассеяния стремится к бесконечности. Кроме того, можно записать выражение для среднеквадратичного значения угла рассеяния

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int \sigma(\theta) 2\pi \theta^3 d\theta}{\int \sigma(\theta) 2\pi \theta d\theta}, \quad (5.3)$$

которое логарифмически расходится в области больших и малых углов. Чтобы устранить эту расходимость, надо определить верхний и нижний предел интегрирования по θ . Различным средам [таким, как неионизованная среда, в которой ядра экранированы орбитальными электронами, и плазма, в которой имеется дебаевское экранирование (разд. 4.1 гл. 4)] соответствуют разные пределы. Кроме того, необходимо знать, какие — классические или квантовые — эффекты доминируют в процессе рассеяния. (Хотя в случае неэкранированных ядер обе эти теории приводят в одному и тому же результату, они дают разные результаты, когда ядра экранированы или имеют конечные размеры.)

К счастью, поскольку отношение $\theta_{\text{макс}}/\theta_{\text{мин}}$ велико и входит в соответствующие выражения как аргумент логарифма, можно получить достаточно грубую оценку этих углов. При классическом описании максимальный угол рассеяния при лобовом столкновении равен π . Поэтому приближенное соотношение $\theta \approx \sin \theta$ перестает быть справедливым, и обычно $\theta_{\text{макс}}$ удобно выбрать равным $\pi/2$. При квантовомеханическом описании максимальный угол равен углу дифракции, связанному с радиусом r_n ядра:

$$\theta_{\text{макс}} = \frac{\lambda}{r_n} = \frac{\lambda}{0,57Z^{1/3} r_e} = \frac{1,75 r_0}{\alpha_f \beta \gamma r_e Z^{1/3}}, \quad (5.4)$$

где $\lambda = 2\pi\hbar$ — длина волны де Бройля налетающей частицы, а $\alpha_f = q^2/2\varepsilon_0 \hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. В случае когда значение β достаточно велико, угол θ , определяемый этим выражением, меньше $\pi/2$, и его можно использовать как максимальное значение.

Аналогичные соображения можно использовать относительно минимального угла $\theta_{\text{мин}}$. В соответствующие квантовомеханические и классические выражения входит угол дифракции, связанный с радиусом экранирования, и угол рассеяния на этом же радиусе, полученный из классической теории. Если радиус равен a , то в квантовомеханическом случае мы имеем

$$\theta_{\text{мин}} = \lambda/a = r_0/\alpha_f \beta \gamma a, \quad (5.5 \text{ а})$$

а в классическом —

$$\theta_{\text{мин}} = 2Zr_0/\beta^2 \gamma a. \quad (5.5 \text{ б})$$

Из этих выражений очевидно, что дифракционные формулы справедливы в случае, когда $\beta > 2Z\alpha_f$. Они описывают рассеяние однократно заряженных частиц, классический радиус которых равен r_0 , на мишени из массивных частиц, заряд которых равен Zq . Для описания рассеяния частиц в неионизированной среде обычно используют квантовомеханическую формулу, в которой под радиусом понимают радиус экранирования:

$$\theta_{\text{мин}} (\text{кв. мех.}) = \hbar\alpha^2 Z^{1/2} / r_e = (\alpha Z^{1/2} / \beta \gamma) (m_e / m_0). \quad (5.6)$$

В случае когда рассеивающей средой является плазма, вместо a следовало бы, по-видимому, подставить дебаевский радиус экранирования λ_D , хотя строго обосновать это не просто. Задача определения соответствующих значений $\theta_{\text{макс}}$ и $\theta_{\text{мин}}$ более подробно обсуждалась Сивухиным [274]. Определив соответствующие величины с достаточной для наших целей точностью, вернемся теперь к задаче многократного рассеяния частиц в газе. Если в слое с поверхностной плотностью 1 кг/м^2 имеется $N_A/10A$ центров рассеяния, где $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ - число Авогадро, A - атомная масса молекулы, играющей роль рассеивающего центра, то после того, как частица пройдет в веществе длину, соответствующую $\Delta l \text{ кг/м}^2$, ее среднеквадратичный угол рассеяния увеличится на величину

$$\Delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{N_A}{10A} \Delta l \int_{\theta_{\text{мин}}}^{\theta_{\text{макс}}} \theta^2 \sigma(\theta) 2\pi\theta d\theta. \quad (5.7)$$

Подставляя сюда для σ выражение (5.2) и интегрируя, получаем

$$\Delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{8\pi Z^2 N_A r_0^2}{10A\beta^4 \gamma^2} \ln \left(\frac{\theta_{\text{макс}}}{\theta_{\text{мин}}} \right) \Delta l. \quad (5.8)$$

В случае когда рассеивателем является неионизованная среда, в качестве пределов интегрирования $\theta_{\text{макс}}$ и $\theta_{\text{мин}}$ можно подставить соответствующие выражения (5.4) - (5.6), что дает

$$\Delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{16\pi N_A Z^2 r_0^2}{10\beta^4 \gamma^2 A} \ln(183Z^{-1/3}) \Delta l. \quad (5.9)$$

Здесь длина безразмерна и измеряется в единицах радиационной длины. Радиационная длина определяется выражением

$$L_0 = \frac{10A}{4\alpha_f N_A Z^2 r_e^2 \ln(183Z^{-1/3})} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}, \quad (5.10)$$

где r_e - классический радиус электрона, α_f - постоянная тонкой структуры. Для водорода, углерода и свинца соответственно имеем $L_0 = 1380, 520$ и 59 кг/м². Если S - расстояние, измеренное в единицах радиационной длины, а ρ - плотность, то

$$\Delta S = \frac{\Delta Z}{L_0} = \frac{\rho \Delta S}{L_0} \text{ м.} \quad (5.11)$$

Кроме того, из выражений (5.8) - (5.10) следует, что

$$\Delta \langle \theta^2 \rangle = \frac{4\pi}{\alpha_f} \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^2 \frac{\Delta S}{\beta^4 \gamma^2}. \quad (5.12)$$

До сих пор мы вычисляли только среднеквадратичное значение угла рассеяния. Интересно теперь рассчитать функции распределения частиц по углам и поперечной координате, предполагая, что слой газа имеет достаточно большую толщину, чтобы гарантировать гауссово распределение. Это предположение должно быть хорошим приближением в случае, когда среднеквадратичный угол рассеяния значительно превосходит угол рассеяния частицы при одиночном столкновении. Используем для расчета метод, предложенный Ферми и описанный Росси и Грейзенем [250]. Будем следовать приближению малых углов, но сами углы будем теперь рассматривать в их проекции на плоскость $X S$. Длины, измеряемые в единицах радиационной длины, обозначим заглавными буквами, а действительные длины - строчными. Пусть θ_p - это угол проекции на плоскости $X S$, $\theta_p = dX/dS = dx/ds = x'$, $\Delta \langle \theta^2 \rangle = 2 \langle \theta_p^2 \rangle = 2 \langle x'^2 \rangle$. Если функция распределения по проекциям углов и поперечному смещению X частиц имеет после прохождения слоя толщиной S вид $F(S, X, x')$, то можно доказать следующее равенство:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -x' \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}, \quad (5.13)$$

где

$$1/w^2 = \Delta \langle \theta^2 \rangle / 4 \Delta S = \Delta \langle x'^2 \rangle / 2 \Delta S = (\pi / \alpha_f \beta^4 \gamma^2) (m_e / m_0)^2. \quad (5.14)$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$F(S, X, x') = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{w^2}{S^2} \exp \left\{ -w^2 \left(\frac{x'}{S} - \frac{3x'X}{S^2} + \frac{3X^2}{S^3} \right) \right\} \quad (5.15)$$

является решением уравнения (5.13). При $X \neq 0$ угловое распределение является гауссовым и симметричным относительно угла $3X/2S$. Интегрирование соответственно по X и x' дает

$$G(S, x') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{w}{S^{1/2}} \exp \frac{-w^2 x'^2}{4S}, \quad (5.16)$$

$$H(S, X) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \frac{w}{S^{3/2}} \exp \frac{-3w^2 X^2}{4S^3}. \quad (5.17)$$

Среднеквадратичный угол $\langle x'^2 \rangle$ увеличивается пропорционально S , но $\langle X^2 \rangle$ растет как S^3 , а отношение среднеквадратичных значений X и x' равно $S/\sqrt{3}$.

Из выражений (4.38), (5.16) и (5.17) можно найти зависимость среднеквадратичного эмиттанта $\bar{\epsilon}$ от S :

$$\bar{\epsilon} = \frac{4L_0 (\langle X^2 \rangle \langle x'^2 \rangle)^{1/2}}{\rho} = \frac{8S^2 L_0}{\sqrt{3} w^2 \rho} = \frac{8e^2 \rho}{\sqrt{3} w^2 L_0} = \frac{8\pi e^2 \rho}{\sqrt{3} \alpha_f \beta^4 \gamma^2 L_0} \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^2. \quad (5.18)$$

В отсутствие фокусировки частиц эмиттанс растет пропорционально квадрату расстояния, проходимого пучком.

§ 3. Многократное рассеяние при наличии фокусировки

В предыдущем разделе изучалось рассеяние частиц пучка в слое однородного материала. В ускорителях частицы фокусируются относительно оси, и поведение пучка будет несколько иным. Во-первых, при условии, что угол рассеяния на длине волны бетатронных колебаний увеличивается мало, распределение частиц по x' непосредственно связано с распределением по x . В этом случае $x/x' = L_0 X/\rho x' = \lambda/2\pi$, где λ — длина волны колебаний частицы в фокусирующем поле, которая в циклических установках равна C/Q . Во-вторых, скорость увеличения $\langle x'^2 \rangle$ с расстоянием только в два раза меньше, чем при отсутствии фокусирующих сил. Это объясняется тем, что в случае рассеяния частицы на угол $\delta x'$ угол x'_0 , под которым траектория частицы пересекает ось, не обязательно изменится на $\delta x'$. Из геометрических построений нетрудно убедиться в том, что для частицы, движущейся по траектории $x' = x'_0 \times \sin(2\pi x/\lambda)$ величина x_0 изменится на $\delta x' \cos(2\pi x/\lambda)$. Отсюда следует, что $\langle (\delta x_0)^2 \rangle = \langle (\delta x)^2 \rangle / 2$ и, следовательно, угловое отклонение частицы в два раза меньше, чем при отсутствии фокусирующих сил.

Таким образом, при наличии фокусирующего поля выражение (5.18) надо заменить следующим:

$$\bar{\epsilon} = 4 (\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle)^{1/2} = \frac{4\lambda}{2\pi} \langle x'^2 \rangle = \frac{2\lambda S}{\pi w^2} = \frac{2\lambda \rho v}{\alpha_f \beta^4 \gamma^2 L_0} \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^2. \quad (5.19)$$

Теперь эмиттанс пропорционален расстоянию, которое проходит пучок, а диаметр пучка изменяется как корень квадратный из s . В выражении (5.19) отсутствует зависимость от λ , а для пучка с различными фокусирующими силами в x - и y -направлениях это выражение справедливо для любого из них. Скорость изменения эмиттанса с расстоянием дается выражением

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{ds}\right)_{\text{рассеян}} = \frac{2\lambda\rho}{\alpha_f \beta^4 \gamma^2 L_0} \left(\frac{m_e}{m_0}\right)^2. \quad (5.20)$$

Если частицы пучка ускоряются, то появляется член, уменьшающий величину $d\bar{\epsilon}/ds$, который обусловлен тем, что инвариантом является величина $\bar{\epsilon}_n$, а не $\bar{\epsilon}$. Поскольку $\bar{\epsilon}_n = \beta\gamma\bar{\epsilon}$, можно записать следующее выражение:

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{ds}\right)_{\text{уск}} = -\frac{\bar{\epsilon}_n}{\beta^2 \gamma^2} \frac{d}{ds}(\beta\gamma) = -\frac{\bar{\epsilon}_n \gamma'}{\beta^3 \gamma^2}. \quad (5.21)$$

Складывая выражения (5.20) и (5.21), получаем

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{ds}\right)_{\text{общ}} = \frac{1}{\beta^4 \gamma^4} \left\{ \frac{2\lambda\rho}{\alpha_f L_0} \left(\frac{m_e}{m_0}\right)^2 - \beta \bar{\epsilon}_n \gamma' \right\}. \quad (5.22)$$

В области низких энергий второй член мал, и в результате эмиттанс увеличивается. При высоких энергиях, если только γ' достаточно велико, преобладает затухание; именно такая ситуация характерна для циклических ускорителей.

Выражение (5.22) описывает процессы, которые происходят в ускорителе с пучком в отсутствие стенок. На практике желательно создать такие условия, чтобы давление в камере не изменялось из-за чрезмерных потерь частиц на стенках. Даже в стационарных условиях, когда затухание почти компенсирует процессы рассеяния, рассчитать скорость потерь частиц в пучке не очень просто. Функция распределения теперь отличается от гауссовой и обязательно равна нулю на стенках. Если пучок сначала расширяется, а затем в течение цикла ускорения сжимается, то опасность возникает лишь на короткий промежуток времени, и если стенки расположены на расстоянии, составляющем более чем несколько стандартных отклонений частицы от оси пучка, то потери будут незначительными. Для количественного определения того, что означает "несколько отклонений", требуется провести подробные расчеты. Задача о потерях частиц, возникающих непосредственно после инжекции, имела существенное значение на заре развития синхротронов, поскольку именно потери частиц были определяющим фактором, влияющим на выбор давления газа. Однако благодаря появлению высокоразвитой вакуумной техники в переходу

к более высоким энергиям инъекции потери частиц стали пренебрежимо малыми, хотя их и следует учитывать, для того чтобы можно было оценить, насколько увеличивается эмиттанс.

Проблема различных потерь частиц рассмотрена с весьма общей точки зрения в книге Коломенского и Лебедева [151], в которой приведены также ссылки на ранее опубликованные работы, посвященные данному вопросу. Эта задача подробно рассматривалась также Бруком [44]. Хардт в своей работе [116] привел кривые зависимости увеличения эмиттанса и величины потерь, удобные для практического использования. Ли и Купер [177] выполнили более общие расчеты, которые приводят к уравнению огибающей пучка (4.37), но с учетом процесса рассеяния. Поскольку в присутствии рассеяния распределение плотности в поперечном сечении пучка оказывается неоднородным, в расчетах приходится использовать некоторые приближения, основанные на усреднении величин. В разд. 4.5 гл. 4 мы проанализировали самосогласованное распределение Беннета для самосжатого пучка, имеющего максвелловское распределение частиц по скоростям. Как показал Ли [176], произвольные начальные распределения поперечной скорости и плотности в поперечном сечении пучка, проходящего через рассеивающий фон, стремятся к распределениям, определяемым выражением (4.69). Бриггс и др. [41] экспериментально измерили профили плотности в поперечном сечении пучка электронов с энергией 5 МэВ и током 220 А, который проходит через азот и аргон при давлении 5 - 100 мм рт.ст.

§ 4. Взаимное рассеяние частиц пучка в накопительных кольцах

В очень многих случаях можно полностью пренебречь взаимным рассеянием частиц в пучке. Однако в накопительных кольцах, в которых пучки существуют в течение многих часов, такое рассеяние играет существенную роль. При этом объектами наблюдения являются столкновения между частицами пучков, движущихся навстречу друг другу.

В накопительных кольцах можно выделить несколько типов столкновений. Столкновения могут происходить как между частицами одного и того же пучка, так и между частицами встречных пучков; они могут приводить как к потере частиц из пучка, так и к лишь слабому изменению амплитуды их колебаний относительно равновесной орбиты или устойчивой фазы колебаний. Кроме того, существует значительное отличие между поведением пучков в протонных установках, в которых синхротронное излучение пренебрежимо мало, и в электронных установках, где оно оказывает доминирующее воздействие на динамику пучка.

Рассмотрим вначале протонные накопительные кольца, в которых

колебания не затухают. Лобовые столкновения между частицами встречных пучков приводят к процессам, в результате которых налетающие или другие частицы выходят из пучка. Это именно тот процесс, подлежащий изучению, ради которого создаются эти установки. Его следствием является уменьшение с некоторой скоростью накопленного тока, причем эта скорость пропорциональна плотности пучка. Упругое рассеяние на малые углы не приводит к потерям частиц, но обуславливает непрерывный рост эмиттанса. Однако оба эти эффекта малы по сравнению с взаимными столкновениями между частицами одного и того же пучка, в котором они в течение длительного времени остаются на относительно небольшом расстоянии друг от друга, что может привести к значительно большему изменению импульса. В протонных накопительных кольцах этот тип рассеяния ответствен за постоянный рост эмиттанса, однако он дает пренебрежимо малое число рассеянных частиц, вышедших из пучка.

В электронных накопительных кольцах условия являются иными. Потери энергии могут увеличиться благодаря тормозному излучению, возникающему при столкновениях двух пучков, которое может стать доминирующим механизмом, вызывающим потери частиц в установке. Однако если частицы все же остаются в пучке, то их диффузии из пучка, обусловленной этим процессом, противодействует сильное радиационное затухание, которое мы опишем в § 10 настоящей главы.

Процесс диффузии при взаимном рассеянии частиц одного и того же пучка, заметный в протонных накопительных кольцах, в случае электронов опять-таки компенсируется затуханием. Однако иногда существенными становятся столкновения, приводящие к потерям частиц. Это явление, называемое "эффектом Тушека", зависит от распределения частиц по импульсам пучка с данным эмиттансом, который может еще удерживаться внутри вакуумной камеры, и от резерфордского сечения рассеяния. Влияние последнего быстро уменьшается с ростом энергии [выражение (5.1)]; оказывается, что это сечение рассеяния следует учитывать только в области низких энергий. Нужно заметить, что для потери частицы в пучке вовсе не обязательно, чтобы она была рассеяна на большой угол; если ее импульс может просто увеличиться или уменьшиться, то радиус ее равновесной орбиты может измениться настолько, что частица попадет на стенки вакуумной камеры. Подробный анализ этого явления вместе со ссылками на соответствующие работы можно найти в книге [44].

В заключение заметим, что процессы диффузии представляют наибольший интерес в протонных накопительных кольцах, в то время как в электронных накопительных кольцах важны только события однократного рассеяния. Это объясняется тем, что скорость увели-

чения поперечного сечения пучка, обусловленная процессами диффузии, мала по сравнению со скоростью радиационного затухания.

Прежде чем перейти к подробному изучению других процессов, рассмотрим некоторые свойства пучков, обладающих конечной температурой.

§ 5. Некоторые свойства пучков, обладающих конечной температурой

В гл. 4 мы изучили несколько конфигураций пучков с максвелловским распределением частиц по поперечным скоростям. Для большинства случаев в параксиальном приближении достаточно хорошим предположением является то, что распределением по продольным скоростям можно пренебречь. Если пучок выходит с катода и затем ускоряется, то разброс продольных скоростей, а следовательно, и продольных энергий частиц, измеряемых наблюдателем, движущимся вместе с пучком, уменьшается. Таким образом, два электрона, испущенных с начальными скоростями 0 и v и затем ускоренных полем, приобретают первый энергию (нерелятивистскую) $m_0 v^2/2$, а второй энергию $m_0(V+v)^2/2 = m_0(V+\Delta V)^2/2$, где ΔV — относительная скорость движения электронов. Энергия второго электрона, измеренная в системе координат, в которой первый электрон покоится, равна

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} m_0 (\Delta V)^2 \approx \\ &\approx \frac{m_0 v^4}{8V^2}, \text{ когда } v \ll V. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ускорение частиц в продольном направлении не влияет на поперечную температуру; поэтому в пучке, ускоренном после катода, поперечная температура значительно превосходит продольную. В системе координат, движущейся вместе с пучком, влияние столкновений в непрерывно фокусируемом пучке приводит к равномерному перераспределению энергии между поперечным и продольным движением частиц. В лабораторной системе координат оно проявляется в виде увеличения разброса энергий. Это явление, обусловленное эффектом Тушека и которое впервые экспериментально наблюдал Бурш [26] в кроссовере электронных пучков высокой яркости, мы обсудим в § 6.

Выражение (5.23) получено в предположении, что пучок выходит из катода. В ускорителях и накопительных кольцах, в которые инжектируется уже готовый пучок, отношение поперечной и продольной энергий, наблюдаемое в системе координат, движущейся вместе с пучком, зависит от конкретной ситуации. Для циклического уско-

рителя понятие "движение вместе с пучком" нуждается в тщательном уточнении. Оказывается, что в некотором смысле величину m^*v^2 , где m^* — эффективная масса, можно называть (нерелятивистской) температурой в продольном направлении. Если эффективная масса отрицательна, то это соответствует "отрицательной температуре", которая "выше", чем любая положительная. Как показал Пивински [233], энергия при этом непрерывно переходит из продольного движения в поперечное без достижения когда-либо равновесия.

В циклических ускорителях частицы с различными энергиями движутся по разным равновесным орбитам и общий анализ процесса диффузии является довольно сложным.

В заключение данного параграфа рассмотрим снова прямолинейную систему и найдем релятивистское соотношение между разбросом энергии в лабораторной и движущейся системах координат. Пусть в неподвижной системе координат две частицы имеют нормализованные энергии γ и $\gamma + \Delta\gamma$, где $\Delta\gamma \ll \gamma$. Нормализованные скорости этих двух частиц даются выражениями

$$\beta_1^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}, \quad (5.24)$$

$$\beta_2^2 \approx 1 - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2\Delta\gamma}{\gamma^3} \approx \beta_1^2 \left(1 + \frac{2\Delta\gamma}{\beta_1^2 \gamma^3} \right).$$

Относительную скорость движения частиц в движущейся системе координат, которую обозначим индексом m , можно найти из закона сложения скоростей:

$$\beta_{2m} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2} = \quad (5.25)$$

$$= \beta_1 \gamma^2 \left\{ \left(1 + \frac{2\Delta\gamma}{\beta_1^2 \gamma^3} \right)^{1/2} - 1 \right\}.$$

Если значение γ достаточно велико, так что $(\gamma^2 - 1)/\gamma^2 \approx 2\Delta\gamma/\gamma$, то выражение (5.25) можно записать в более простом виде:

$$\beta_{2m} \approx \frac{\Delta\gamma}{\beta_1 \gamma} \approx \frac{\Delta\gamma}{\beta_2 \gamma}. \quad (5.26)$$

При больших значениях γ относительная скорость всегда нерелятивистская и зависит только от $\Delta\gamma/\gamma$. При $\gamma \approx 1$ выражение (5.25) сводится к $\beta_{2m} = \beta_2 - \beta_1$.

§ 6. Эффект Бурша

В предыдущем параграфе мы описали пучки с разными значениями поперечной и продольной температуры и показали, что пучок, ускоренный с термоэмиссионного катода, имеет различные поперечную и продольную температуры в системе координат, движущейся вместе с ним. Если частицы испытывают столкновения, то продольная температура увеличивается, до тех пор пока не придет в равновесие с поперечной температурой. Таким образом, насколько существенным является этот эффект, зависит от времени, за которое данное распределение релаксирует к изотропному в движущейся системе координат.

Во многих приложениях этот эффект оказывает пренебрежимо малое влияние. Однако в электронном микроскопе, где электроны проходят через кроссовер, в котором плотность частиц очень велика, он может проявляться в виде наблюдаемого уширения энергетического спектра пучка и уменьшения его яркости. Впервые обнаруженный экспериментально Буршем [26], этот эффект стал предметом изучения в большом количестве экспериментальных и теоретических работ. Простое физическое описание эффекта и расчет его величины в пучке параллельно движущихся частиц приведены в статье [312]. Более сложный случай, имеющий место в кроссовере пучка, проанализирован в работе [188]. В этих статьях даются ссылки на ранее опубликованные работы. Рассматривая пучок параллельно движущихся частиц как дрейфующий газ, можно вычислить время релаксации; этим методом мы и воспользуемся ниже. Однако для расчета времени релаксации пучка в кроссовере необходимо иметь подробную статистику рассеяния с соответствующими функциями распределения и граничными условиями. Мы не будем воспроизводить этот довольно специальный расчет, а сошлемся позже на результаты, полученные Лофлером [188].

Чтобы проиллюстрировать природу рассматриваемого эффекта и уместность идей, развитых в предыдущем параграфе, вычислим изменение энергии частиц на единице длины параллельного пучка. В системе координат, движущейся вместе с пучком, этот процесс по существу аналогичен релаксации газа, характеризуемого поперечной kT_{\perp} и продольной $kT_{\parallel m}$ температурой при $kT_{\perp} \gg kT_{\parallel m}$, к изотропному максвелловскому распределению. Обозначим время релаксации через τ . Тогда можно написать следующее равенство:

$$\frac{dT_{\parallel m}}{dt_m} = -\frac{T_{\perp}}{\tau}, \quad (5.27)$$

где температура и время t_m измеряются в движущейся системе координат. Из соотношения $z = \beta ct = \beta ct_m$, где z — расстояние,

измеряемое в лабораторной системе координат, следует

$$\frac{dT_{\parallel m}}{dz} = \frac{T_{\perp}}{\beta \gamma c \tau}. \quad (5.28)$$

Таким образом,

$$T_{\parallel m} = T_{\parallel m0} + \frac{T_{\perp} z}{\beta \gamma c \tau}; \quad (5.29)$$

здесь индекс 0 означает, что величина рассматривается при $z = 0$. Теперь необходимо выразить T_{\parallel} через разброс энергий в неподвижной системе координат. Это можно сделать, возводя в квадрат выражение (5.26) и используя подстановку $\beta_m^2 \approx kT_{\parallel m}/m_0 c^2$, что дает

$$(\Delta \gamma)^2 m_0 c^2 \approx \beta^2 \gamma^2 kT_{\parallel m}. \quad (5.30)$$

В точке $z = 0$ разброс энергий $\Delta \gamma m_0 c^2$ равен kT_c , т.е. температуре катода, а величину $kT_{\parallel m0}$ можно найти из соотношения (5.30). Подставляя в выражение (5.29) вместо $T_{\parallel m}$ ее выражение из (5.30), можно найти величину, на которую изменяется разброс энергий, когда пучок проходит расстояние z_0 :

$$\Delta \gamma m_0 c^2 \Big|_0^{z_0} = \left(k^2 T_c^2 + \frac{\beta \gamma m_0 c^2 k T_{\perp} z_0}{c \tau} \right)^{1/2}. \quad (5.31)$$

Теперь остается вычислить время релаксации τ . Слитцер [277] для этой величины получил выражение

$$\tau = \frac{0,29}{n r_0^2 c \ln \Lambda} \left(\frac{kT}{m_0 c^2} \right)^{3/2}, \quad (5.32)$$

где n — плотность, числовой множитель $0,29 = 3^{3/2}/(8\pi \times 0,71)$, а $\ln \Lambda$ — логарифм, соответствующий тому, который появляется в выражении (5.7). Однако в связи с тем, что мы имеем дело с распределением частиц, обладающих различными скоростями, а не с частицами постоянной скорости, рассеиваемыми фиксированным центром, оказывается, что рассчитать этот логарифм не так просто. Подробности о том, как это можно сделать, приведены в книге Слитцера [277], а также в стандартных учебниках. Если дебаевский радиус экранирования меньше, чем радиус пучка, как это обычно и бывает, множитель λ_D , входящий в выражение для Λ , должен быть заменен значением, лежащим между λ_D и радиусом пучка. Однако, поскольку Λ велико, эта неопределенность приводит к небольшим ошибкам при вычислении $\ln \Lambda$, значение которого обычно лежит

между 6 и 20. Подставляя выражение (5.32) для τ в выражение (5.31), получаем окончательный результат в безразмерном виде

$$\Delta\gamma = \left\{ \frac{3,4v\beta\gamma r_0 z_0}{\pi a^2} \left(\frac{m_0 c^2}{kT_1} \right)^{1/2} \ln \Lambda + \left(\frac{kT_c}{m_0 c^2} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.33)$$

Интересно заметить, что величина $\Delta\gamma$ зависит только от плотности тока ($i = vq\beta c / \pi a^2 r_0$), а при данной плотности тока в области нерелятивистских энергий зависит от энергии частиц только через логарифмический член. Для типичного пучка с плотностью тока 10^4 A/m^2 при $kT_c/q = 0,1 \text{ В}$, $\gamma m_0 c^2/q = 1 \text{ кВ}$ и $z_0 = 0,1 \text{ м}$ получаем $\Delta\gamma m_0 c^2/q \approx 2 \text{ В}$.

На первый взгляд может показаться, что для описания пучка, радиус которого, а следовательно, и поперечная температура меняются вдоль координаты z , требуется лишь учесть величину τ в выражении (5.28) и проинтегрировать его по z , используя тот факт, что температура T_1 обратно пропорциональна площади поперечного сечения пучка. Это было бы допустимо, если бы диаметр пучка значительно превосходил дебаевский радиус экранирования. Однако если это не так и если, кроме того, угол наклона огибающей сходящегося или расходящегося пучка велик по сравнению с углами, связанными с тепловыми скоростями частиц, то модель тепловой релаксации перестает быть справедливой и возникает необходимость рассмотрения более подробной модели области взаимодействия.

Такие расчеты были выполнены Лофлером [188]; к сожалению, как и в других задачах этого типа, подробная физика рассеяния, которую можно исследовать только приближенно, описывается логарифмическими членами. Интересно отметить, что, даже если рассматривать сходящийся пучок с нулевыми поперечной и продольной температурами, эффект все же существует, так что релаксационная модель не подходит для описания сходящихся потоков. Лофлер для разброса энергий дает следующее выражение:

$$\Delta\gamma m_0 c^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{q^3}{2\beta a} \right)^{1/2} (Ba_0)^{1/2} \{3 + \ln 2 + 2\ln(8Na_0) + \frac{1}{2} \ln^2(8Na_0)\}^{1/2}, \quad (5.34)$$

где β — яркость пучка, a_0 — радиус пучка в перетяжке, а N — число частиц, приходящихся на единицу его длины. То, что разброс энергий пропорционален величине $(Ba_0)^{1/2}$, было экспериментально подтверждено Пфейффером [224]. В другой статье этого же автора [225] рассчитана хроматическая абберрация, вносимая этим эффектом, и оценена ее роль в ограничении минимального диаметра сфокусированного пучка.

Другие ссылки, в особенности на более ранние работы, можно найти в обзоре [313].

§ 7. Электронное охлаждение

Другое явление, в котором играют роль столкновения частиц в пучках, представляет собой "электронное охлаждение". Это явление Будкер [46] предложил использовать для уменьшения эмиттанса накопленного протонного пучка. В системе, состоящей из электронного пучка, имеющего более низкую температуру и движущегося вместе с протонным пучком, происходит обмен энергиями между электронами и протонами. Этот эффект был продемонстрирован экспериментально [47], однако в накопительных кольцах из-за весьма больших времен релаксации его невозможно эффективно использовать. Будкер вычислил время релаксации методом, аналогичным рассмотренному в предыдущем параграфе; пучки наблюдались в движущейся вместе с ними системе координат, и рассчитывалось время релаксации двухкомпонентной максвелловской системы. Полученные результаты позволяют определить скорость изменения величины θ_p^2 , где θ_p — угол, который протонная орбита составляет с осью. Вводя некоторые переобозначения, этот результат можно выразить через эмиттанс протонного пучка ϵ_p при $v = v_p$. Таким образом, мы имеем следующее приближенное выражение:

$$\frac{d}{dt} \left(\epsilon_p^2 \right) \approx \frac{2v_p r_e c \ln \Lambda}{\beta^2 \gamma^5 \beta_{\perp e}}, \quad (5.35)$$

где r_e — классический радиус электрона, а $\beta_{\perp e}$ — характерная поперечная скорость электронов. Очевидно, что с ростом энергии влияние этого эффекта очень быстро уменьшается¹⁾

§ 8. Формирование пучков убегающих электронов

Пучки, которые мы обсуждали до сих пор, формировались либо с помощью катодов, либо их получали из ионных источников. Для получения кольцевого пучка необходимо иметь систему инжекции специального типа в соответствующем вакуумном объеме. Другой возможностью является приложение индукционного электрического поля к плазме, находящейся в тороидальной вакуумной камере, в присутствии соответствующего удерживающего поля. В таком случае возникает возможность непрерывного ускорения наиболее быстрых электронов начального максвелловского распределения плазмы. Это

¹⁾ В случае высокоэнергетических частиц энергию в принципе можно снижать до значений, при которых охлаждение сказывается заметным образом, а затем снова ее повышать до номинального значения. Подробнее о методе электронного охлаждения см. в работе: Будкер Г.И. — УФН, 1978, т. 124, № 4, с. 561. — *Прим. ред.*

ускорение обусловлено тем, что сечение рассеяния быстро падает с увеличением скорости, так что эффективная сила трения, соответствующая потерям импульса частицы, уменьшается. Следовательно, при некоторой критической скорости увеличение энергии и импульса электрона под действием ускоряющего электрического поля начинает преобладать над потерями, обусловленными столкновениями, и появляются "убегающие электроны".

Удовлетворительно проанализировать данный процесс сложно и трудно даже в системе с идеализированной бесконечной геометрией. В этом можно убедиться на примере статьи [62], в которой приведен краткий обзор более ранних работ. В используемых на практике системах этот процесс очень сильно зависит от общей геометрии системы и природы удерживающих полей. В тороидальных плазменных системах с сильным азимутальным магнитным полем, предназначенных для исследований по управляемому термоядерному синтезу, наблюдались пучки убегающих электронов с током свыше 100 кА и энергией электронов в несколько МэВ. В данном случае эти электроны играли отрицательную, а не положительную роль. Результаты экспериментальных наблюдений и теория представлены, например, в работе [278], в которой имеются ссылки на ранее опубликованные работы.

Несколько раз предпринимались попытки конструктивно использовать это явление в "плазменном бетатроне". В такой установке должны отсутствовать ограничения на ток, которые мы обсуждали в разд. 4.4 гл. 3. Однако многочисленные усилия в направлении создания полезного устройства не увенчались успехом. Поведение пучка в нем оказалось чрезвычайно сложным. Даже если и возникал интенсивный пучок, он быстро разрушался неустойчивостью отрицательной массы или неустойчивостями других типов. Очевидно, что условие удержания пучка в поле бетатронного типа более жесткое, чем в сильном азимутальном поле тороидальных термоядерных установок. Кроме того, в тороидальных термоядерных установках имеется непрерывное распределение электронов по скоростям, которое монотонно спадает с увеличением энергии электронов, в то время как в бетатронах имеются электроны только с конечным диапазоном энергий. Как будет показано в § 3 гл. 6, непрерывное распределение более устойчиво при наличии плазменного фона.

Описание типичных экспериментов с плазменными бетатронами, а также ссылки на ранее опубликованные работы по этому вопросу можно найти в статьях [19, 83, 84].

Оказывается, что на практике существенным параметром, определяющим вероятность появления убегающих электронов, является величина v плазмы. В типичных экспериментах на установке "Токамак" отношение тепловой скорости к скорости дрейфа, равное примерно $v^{1/2}$, должно быть не меньше ≈ 50 . Поэтому многие

встречающиеся в действительности системы с $v \ll 1$ можно охарактеризовать как "пучки", а системы с $v \gg 1$ — как "плазму". Такое различие подробно рассматривалось автором в статье [172].

§ 9. Релятивистский стабилизированный пучок Будкера

Будкер [45] описал замечательное квазистационарное равновесие электронного пучка в продольном электрическом поле. Хотя такой пучок подвержен различным неустойчивостям и даже в их отсутствие возникли бы непреодолимые трудности для его реализации, он представляет исключительный познавательный интерес. Здесь мы дадим упрощенное описание такого пучка, сохранив существенные его свойства.

В первых работах по изучению нейтрализованных электронных пучков пренебрегалось как рассеянием электронов на ионах, так и излучением электронов, связанным с кривизной их орбит в собственном поле пучка. При экстремальных условиях должны учитываться оба этих эффекта. Наличие ионов приводит к увеличению амплитуды бетатронных колебаний, как это было описано в § 2; излучение же, наоборот, приводит к появлению демпфирующей силы. Когда эти эффекты уравнивают друг друга, достигается равновесное состояние.

В своем первоначальном анализе этой задачи Будкер рассмотрел частично нейтрализованный электронный пучок в бетатронном поле. Изменяющийся поток, проходящий через железный сердечник, создавал постоянное электрическое поле, ускоряющее электроны, а ускорением ионов пренебрегалось. Будкер предположил, что распределение плотности в поперечном сечении пучка имеет вид распределения Беннета [выражение (4.69)], и рассмотрел стационарное состояние пучка в системе координат, в которой средняя скорость электронов равна нулю. Переход в лабораторную систему координат осуществлялся с помощью преобразований Лоренца.

В настоящем упрощенном рассмотрении предполагается, что пучок имеет однородное распределение плотности в поперечном сечении и все расчеты проводятся в неподвижной системе координат. Пучок определяется четырьмя параметрами E , v , γ и радиусом a . Записав уравнение баланса для энергии и импульса, найдем соотношения между ними. Предположим, что пучок ультрарелятивистский, так что $\beta \approx 1$; величину v/γ будем считать несколько меньшей, чем единица, но не обязательно очень малой. Случай, который мы будем анализировать, показан на рис. 5.1.

Мощность потерь на излучение релятивистским электроном, движущимся в магнитном поле B , дается выражением [131]

$$W_r = qEc = \frac{8\pi cr^2 e^2 \beta^2 \gamma^2 B^2}{3\mu_0} \quad (5.36)$$



Рис. 5.1. Типичные траектории электронов в релятивистском стабилизированном пучке Будкера.

Показан одиночный акт рассеяния. Угол, под которым траектория, достигающая границы пучка, пересекает ось, равен $(2v/\gamma)^{1/2}$. (Не все траектории достигают границы пучка и не все пересекаются с осью.)

Подставляя $\beta \approx 1$ и заменяя точное значение V значением, грубо усредненным по сечению пучка, $\mu_0 I / 4\pi a = \mu_0 N q c / 4\pi a$, получаем

$$E q = \frac{q^2 \gamma^2 v^2}{6\pi \epsilon_0 a^2}. \quad (5.37)$$

Уравнение баланса импульсов найдем, приравнявая импульс qE , приобретаемый частицей в единицу времени, к сумме $\dot{p}_s + \dot{p}_r$, где p_s — скорость уменьшения импульса за счет столкновений, а \dot{p}_r — скорость, с которой импульс теряется за счет излучения. Вычислим обе эти величины. Сечение передачи импульса при резерфордском рассеянии можно записать в виде

$$\sigma = \left(\frac{r_e}{2\gamma} \right)^2 \int \frac{2\pi \sin \theta (1 - \cos \theta)}{(\sin \frac{1}{2}\theta)^4} d\theta. \quad (5.38)$$

Угол θ мал во всем диапазоне пределов интегрирования, так что

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \frac{4\pi r_e^2}{\gamma^2} \int \frac{d\theta}{\theta} \approx \\ &\approx \frac{4\pi r_e^2}{\gamma^2} \ln \frac{\theta_{\text{макс}}}{\theta_{\text{мин}}}, \quad \theta \ll 1. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Выражая \dot{p}_s через σ , имеем

$$\begin{aligned} p_s &= (\gamma m_0 c^2) \frac{N \sigma}{\pi a^2} = \\ &= \frac{v q^2 L}{\pi \epsilon_0 a^2 \gamma}; \end{aligned} \quad (5.40)$$

здесь $L = \ln(\theta_{\text{макс}}/\theta_{\text{мин}})$.

Воспользовавшись выражением для силы радиационного торможения, можно рассчитать импульс, уносимый излучением. Эту величину можно найти из выражения для мощности радиационных потерь (5.36), предполагая, что она действует в направлении, противоположном направлению движения электрона. Нам нужно определить составляющую силы в s -направлении; грубую оценку ее получим, замечая, что траектория электрона направлена к оси под углом порядка $r' = (v/\gamma)^{1/2}$. [В этом можно убедиться, если в уравнении параксиального луча (4.33) приравнять друг другу члены, пропорциональные эмиттансу и первеансу.] При этом сила радиационного торможения вдоль орбиты оказывается равной $8\gamma^2 v^2 q^2 / 3\pi\epsilon_0 a^2$ [выражение (5.36)], так что ее s -составляющая дается выражением

$$\dot{p}_r = \frac{\gamma^2 v^2 q^2 \cos \theta}{6\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\gamma^2 v^2 q^2 (1-v/2\gamma)}{6\pi\epsilon_0 a^2}, \quad (5.41)$$

где вместо $\cos \theta$ записано приближенное выражение $1 - r'^2/2$. Приравнявая сумму величин \dot{p}_r (5.41) и \dot{p}_s (5.40) к qE , получаем

$$4\pi\epsilon_0 Eq = \frac{2\gamma^2 v^2 q^2}{3a^2} \left(1 - \frac{v}{2\gamma}\right) + \frac{4vq^2 L}{a^2 \gamma}. \quad (5.42)$$

Из выражения (5.37) и уравнения (5.42) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma v &= (12L)^{1/2}, \\ a &= \left(\frac{2qL}{\pi\epsilon_0 E}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Замечательно, что в каждое выражение входят только по две из четырех переменных. В равновесном состоянии энергия электронов зависит только от линейной плотности N , а радиус пучка — только от величины приложенного поля.

Выберем $L = 30$, а типичные параметры, характеризующие равновесный пучок, возьмем такими: энергия = 20 МэВ, ток = 8200 А, $E = 100$ В/м и $a = 3,7 \times 10^{-5}$ м. Собственное магнитное поле пучка очень велико и составляет 44 Т. Именно это свойство пучка предложил использовать Будкер для создания ведущего поля в ускорителях частиц.

В выражениях (5.43) числовые множители несколько отличаются от тех, которые даются Будкером. В литературе существует некоторая путаница в определении величин γ , относящихся к отдельным электронам и измеренных в системе координат, в которой средняя скорость электронов равна нулю. Хотя отношение v/γ мало, зна-

чения β в обоих случаях близки к единице. Следовательно, $1 - \beta^2$ и γ могут существенно отличаться в различных случаях.

Грубые оценки, проведенные выше, иллюстрируют основные физические свойства стационарного релятивистского пучка. Однако исходная модель пучка была чрезвычайно упрощенной, и даже если такой пучок не был бы подвержен развитию неустойчивостей, его было бы весьма трудно создать.

В данном анализе подразумевалось, что $v/\gamma < 1$. Тороидальные самосжатые кольцевые токи в нерелятивистской плазме с $v/\gamma \gg 1$ изучались в связи с исследованиями по управляемому термоядерному синтезу. В такой плазме существенную роль играют столкновения частиц, а распределение электронов по скоростям является по существу изотропным и максвелловским, но характеризуется небольшой составляющей скорости дрейфа. Для типичного значения $v = 10^4$ имеем $\beta_{\parallel} / \beta_{\perp} \approx v^{-1/2} \approx 0,01$. Расчеты баланса энергии и импульса, аналогичные тем, которые провел Будкер, были выполнены независимо Пизом [221] и Брагинским [31]. Однако между этими расчетами имеется отличие, связанное с тем, что хотя потери энергии происходят в основном за счет тормозного излучения, при этом пренебрегалось уносимым им импульсом, поскольку авторы предполагали, что излучение не было узконаправленным, а энергия излучалась более или менее изотропно. Как следует из указанных работ, подробный анализ этой задачи является сложным. Тем не менее ее опять-таки можно значительно упростить и получить результаты, справедливые по порядку величины. Для этого необходимо ввести только одно дополнительное физическое предположение, заключающееся в выборе нерелятивистского сечения тормозного излучения [123]:

$$\sigma = \frac{16}{3} \alpha_f r_e^2, \quad (5.44)$$

где α_f — постоянная тонкой структуры. Выполняя такие же вычисления, как и выше, и используя этот результат, получаем выражения, соответствующие (5.38):

$$\begin{aligned} v\beta &= \left(\frac{3\pi}{4} \frac{1n\Lambda}{\alpha_f} \right)^{1/2}, \\ a &= \left(\frac{4\alpha_f q}{3\pi^2 \epsilon_0 E} \right)^{1/2} v^{3/4}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Переменные в них не разделены попарно, как было выше; во второе выражение входят a , E и v . Более интересно первое из этих выражений; в системе единиц СИ оно просто соответствует $I \approx 10^6$ А. Надо опять подчеркнуть, что это крайне идеализированный результат, поскольку при выводе мы предполагали плазму устойчивой и

изолированной от стенок камеры. На практике возможность существования такой плазмы ограничена неустойчивостями различных типов. Некоторые более подробные комментарии можно найти в статье автора [172].

§ 10. Радиационные эффекты в электронных синхротронах и накопительных кольцах

В электронных синхротронах высокой энергии радиационные эффекты, обусловленные поперечным ускорением электронов в управляющем магнитном поле, оказывают существенное влияние на динамику пучка. В электронных накопительных кольцах поведение пучков в значительной мере определяется этими эффектами и существенным образом отличается от поведения пучков в протонных накопительных кольцах. Задача, рассматривающая такие эффекты, является довольно специальной, и мы не будем ее подробно анализировать. Однако опишем основные физические эффекты и приведем ссылки на работы, в которых эта задача изложена более подробно. Рассматриваемые здесь эффекты в отличие тех, которые мы изучали в предыдущем параграфе, не зависят от интенсивности пучка. Они отражают взаимодействие отдельного электрона с *внешним* фокусирующим и управляющим магнитным полем. Естественно, что при более высоких интенсивностях, когда начинают сказываться эффекты собственного поля, рассмотренные в гл. 3, они видоизменяются.

Наиболее очевидный эффект синхротронного излучения заключается в уменьшении энергии электронов циркулирующего пучка. В ускорителях это требует дополнительной передачи энергии частицам при прохождении ускоряющего промежутка. Действительно, в ускорителях высокой энергии компенсация потерь энергии на излучение может существенно превосходить необходимую для ускорения частиц энергию. В накопительных кольцах надо постоянно подпитывать пучок, чтобы компенсировать потери энергии на излучение. Выражение для мощности излучения (5.36) можно записать по-разному; наиболее удобной является следующая запись:

$$W_{\Gamma} = \frac{2\gamma^2 r_e}{3m_0 c} F_{\perp}^2, \quad (5.46)$$

где

$$F_{\perp} = \frac{\gamma m_0 \beta^2 c^2}{R} = q\beta c B_z. \quad (5.47)$$

Здесь R — радиус кривизны орбиты, а F_{\perp} — сила, действующая на электрон в направлении, перпендикулярном его движению.

Предположим на миг, что сила реакции излучения действует непрерывно и монотонно. (Ниже мы рассмотрим реальный случай, когда излучение происходит небольшими квантами; однако для наших настоящих целей вполне адекватно предположение о непрерывном монотонном характере излучения.) Ясно, что излучение приводит к уменьшению энергии электронов, однако не очевидно, обязательно ли будут при этом затухать бетатронные и фазовые колебания. В самом деле, как мы увидим ниже, существует возможность раскачки и радиальных бетатронных, и фазовых колебаний. Физический подход к рассмотрению фазовых колебаний, а также вертикальных и радиальных бетатронных колебаний оказывается различным. Мы опишем факторы, влияющие в каждом из этих случаев, и представим окончательные результаты. Подробное физическое обсуждение, приводящее к этим результатам, дается Сандсом [260]. Раньше более формальный подход был применен Робинсоном в статье [244], в которой имеются ссылки на предшествующие работы, относящиеся к этому вопросу. Материал, изложенный в данном параграфе, базируется на содержании этих двух статей с незначительными изменениями обозначений. Поскольку в нерелятивистской области энергий рассматриваемыми эффектами можно полностью пренебречь, предположим, что всюду условия соответствуют ультрарелятивизму ($\beta \approx 1$).

Рассмотрим вначале фазовые колебания. В § 8 гл. 2 мы проанализировали их в отсутствие излучения. Частицы могут в процессе фазовых колебаний смешаться по фазе как по отношению к ускоряемому полю, так и по отношению к энергии равновесной частицы. Эти смещения сдвинуты по фазе на $\pi/2$, так что максимальное или минимальное отклонения энергии соответствуют наибольшей скорости изменения фазы. При наличии излучения эти две половины периода колебаний, в которых энергия частицы либо больше, либо меньше энергии частицы, движущейся по равновесной орбите, не равноценны. (Мы будем называть их "положительным" и "отрицательным" полупериодами.) Если не принимать во внимание бетатронные колебания, то необходимо учесть следующие три фактора:

- 1) Поскольку интенсивность излучения зависит от γ , мощность излучения в положительном полупериоде в данном магнитном поле больше, чем в отрицательном полупериоде.
- 2) В течение положительного полупериода частица проходит за один оборот больший путь.
- 3) При наличии градиента поля частица в разных полупериодах взаимодействует с различными полями.

Если в течение положительного полупериода частица теряет больше энергии, чем в течение отрицательного, то колебания будут затухать, и наоборот. Поэтому первые два фактора стремятся вызвать

затухание колебаний, а третий — в полях, спадающих с радиусом, как, например, в ускорителях с постоянным градиентом поля, — стремится вызвать их раскачку. При наличии бетатронных колебаний интервал значений магнитного поля изменяется, но все же с точностью до членов первого порядка можно считать, что в среднем они не оказывают влияния.

Подробные расчеты влияния всех этих эффектов приводят к следующему выражению для декремента амплитуды фазовых колебаний:

$$\alpha_s = \frac{(2+D)W_r}{4\gamma m_0 c^2}, \quad (5.48)$$

где W_r — излучаемая мощность, а D — функция параметров структуры. Параметр D удобно выразить через радиус кривизны орбиты R_s , фокусирующий член κ_s , определяемый выражением (2.103), и коэффициент расширения орбит α_p , определяемый выражением (2.137) (здесь мы обозначим его как X_p , чтобы не путать с декрементами). Он имеет следующий вид:

$$D = \oint \frac{X_p}{R} \left(\frac{1}{R^2} - 2n \right) ds / \oint \frac{ds}{R^2}, \quad (5.49)$$

где интегрирование проводится по окружности орбиты. В структурах ускорителей с "разделенными функциями", в которых поворот частиц происходит в однородном магнитном поле, оказывается, что D — положительная величина, много меньшая, чем единица. Таким образом, имеем

$$\alpha_s \approx \frac{W_r}{2\gamma m_0 c^2}. \quad (5.50)$$

С другой стороны, в слабо-фокусирующих установках, не имеющих прямолинейных промежутков, $D = (1 - 2n)/(1 - n)$, где n — показатель магнитного поля. Если $n > 3/4$, то декремент α_s является отрицательным, что соответствует нарастанию колебаний.

Рассмотрим теперь влияние затухания на вертикальные бетатронные колебания. Положительный и отрицательный полупериоды таких колебаний симметричны, и эффект затухания можно объяснить увеличением импульса частицы вдоль направления орбиты, когда она проходит ускоряющий промежуток. Его можно рассматривать как аналог механизма адиабатического затухания колебаний непрерывно ускоряемых частиц. Подробные расчеты дают следующее выражение для декремента:

$$\alpha_y = \frac{W_r}{2\gamma m_0 c^2}. \quad (5.51)$$

Для колебаний в плоскости орбиты имеет место другой эффект. Когда частицы теряют энергию, равновесная орбита сжимается. При таком сжатии амплитуда колебаний частицы, движущейся по орбите, радиус которой больше или меньше радиуса равновесной орбиты, соответственно либо увеличивается, либо уменьшается. Какой из этих эффектов более важен, зависит, как и в фазовых колебаниях, от свойств ведущего поля. Подробные рассуждения дают следующий результат:

$$\alpha_x = \frac{(1-D)W_r}{2\gamma m_0 \sigma^2}. \quad (5.52)$$

При $D > 1$ декремент отрицателен, что соответствует нарастанию колебаний. В ускорителях этот эффект обычно нейтрализуется адиабатическим затуханием колебаний, возникающим при ускорении частиц. Однако в накопительных кольцах значение D должно быть обязательно меньше, чем единица. Для всех мод, которые должны быть подавлены, $-2 < D < 1$.

Из выражений (5.48) и (5.52) можно получить достаточно общее соотношение

$$\alpha_x + \alpha_y + 2\alpha_s = \frac{2W_r}{\gamma m_0 \sigma^2}. \quad (5.53)$$

Можно показать, что это соотношение будет справедливо и в более общем случае, когда орбита не лежит в одной плоскости. Если колебания связаны, то нормальные моды и декременты отличаются от рассмотренных выше, но соотношение (5.48) все еще остается справедливым. Соотношение (5.53) иногда записывают в следующем виде:

$$J_x + J_y + J_s = 4, \quad (5.54)$$

который получается при делении членов соотношения (5.53) на его правую часть; здесь J — коэффициенты распределения затухания по степеням свободы:

$$\begin{aligned} J_x &= 1-D, \\ J_y &= 1, \\ J_s &= 2+D. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Если бы процесс затухания был плавным, то амплитуды колебаний частиц в накопительных кольцах можно было бы подавить до очень малых значений. Однако вследствие квантовой природы излучения

затухания не является плавной функцией. Излучение происходит в виде последовательности небольших импульсов, действующих как шум. Он стремится увеличить амплитуду колебаний, и равновесие достигается тогда, когда это возбуждение компенсируется затуханием. Чтобы рассчитать амплитуду, при которой наступает компенсация этих эффектов, необходимо знать спектр излучения. Статистические амплитуды колебаний затухающих осцилляторов, возбуждаемых шумом, которые соответствуют фазовым и бетатронным колебаниям, рассчитать нетрудно, однако эти расчеты очень громоздки. Такие вычисления представлены в упомянутых выше статьях, в которых функция распределения амплитуд колебаний является гауссовой, что, по-видимому, и следует ожидать.

Было найдено, что равновесные амплитуды колебаний быстро растут с увеличением энергии. В накопительных кольцах, рассчитанных на энергию частиц в несколько ГэВ, это означает, во-первых, что напряжение в резонаторе, необходимое для компенсации потерь энергии, должно быть достаточно большим, чтобы не позволить частицам диффундировать из эффективной потенциальной ямы, и, во-вторых, с целью предотвращения чрезмерных потерь частиц (принадлежащих "хвосту" гауссова распределения) на стенках апертура вакуумной камеры должна быть достаточно большой. Оказывается, что в электронных накопительных кольцах из-за большого времени накопления, которое составляет несколько часов, горизонтальная стенка должна отстоять от оси пучка на расстояние не меньше, чем шестикратный среднеквадратичный размер пучка.

Амплитуды фазовых и радиальных колебаний сложным образом зависят от параметров ускорителя. В структурах с "разделенными функциями", в которых применяются поворотные магниты с однородным полем и квадрупольные фокусирующие магниты, для оценок по порядку величины можно использовать следующие выражения. Запишем амплитуду фазовых колебаний через среднеквадратичное отклонение энергии σ_γ а не через фазовый угол, и радиус кривизны траектории ρ_0 в магните будем рассматривать как параметр. Если установка работает при постоянном магнитном поле, то $\rho_0 \sim \gamma$. Выражение для фазовых колебаний записывается в виде

$$\left(\frac{\sigma_\gamma}{\gamma}\right)^2 = \frac{C_q \gamma^2}{J_s \rho_0}, \quad (5.56)$$

где $C_q = (55/32 \sqrt{3})(h/m_0 c) = 3,83 \cdot 10^{-13}$ м. (Любопытная числовая постоянная получается из интегрирования выражения, учитывающего спектр излучения, который имеет сложную аналитическую зависимость.)

Для радиальных бетатронных колебаний имеем

$$\left(\frac{\sigma_x}{\beta_0}\right)^2 \approx \frac{\lambda_c \gamma^2}{J_x Q_x^2 \rho_0}; \quad (5.57)$$

здесь β_0 — амплитудная функция, определенная в разд. 3.2 гл. 4. По порядку величины ее значение равно $C/2\pi Q_x$, где C — периметр установки, но в специальных секциях с "низким β " накопительного кольца, в которых происходит столкновение частиц, ее значение намного меньше. Постоянную C_q мы заменили на комптоновскую длину волны электрона λ_c . Они отличаются друг от друга только числовым коэффициентом порядка единицы. Величина σ_x представляет собой отклонение частицы от равновесной орбиты. Кроме того, существует разброс энергий и, следовательно, некоторый набор равновесных орбит, так что полная ширина пучка несколько больше, чем σ_x , обычно в 1 — 1,5 раза. Равновесная амплитуда вертикальных бетатронных колебаний примерно в γ^2 раз меньше, чем амплитуда горизонтальных. За счет этого высота пучка могла бы быть сделана пренебрежимо малой, если бы не связь колебаний, которая неизбежно существует в реальных установках. Кстати говоря, это удобный параметр; если высота пучка (в вертикальном направлении) станет слишком малой, то возникает существенный сдвиг частоты бетатронных колебаний Q_y .

Здесь не имеет смысла обсуждать многочисленные факторы, которые необходимо рассматривать при расчете и создании накопительного кольца. Вполне достаточно, что мы показали основные физические следствия, которые дают эффекты излучения. Другие подробности можно найти в уже упомянутых ссылках и книгах Коломенского и Лебедева [151], а также Брука [44]. Подробности, относящиеся к практическим конструкциям отдельных установок, можно найти в трудах конференций по ускорителям начиная с 1970 г. и далее.

§ 11. Заключительные замечания

Задачи, изученные в данной главе, отражают некоторые типичные и специальные случаи, в которых важное значение имеют столкновения частиц между собой и диссипация их энергии. Другие примеры, в которых учитываются эффекты ионизирующих столкновений, мы уже обсудили в разд. 2.8 гл. 3. В действительности можно найти еще много других примеров, представляющих практический интерес. Однако получение интересных обобщений является трудной задачей, и в большинстве случаев эти эффекты лучше всего изучать отдельно как специальные примеры. Это относится в особенности к интерпретации последних экспериментов с интенсивными релятивистскими пучками.

ВОЛНЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПУЧКАХ

§ 1. Введение

Рассмотрим теперь динамические эффекты, обусловленные конечностью заряда и тока пучка. До этого мы изучали статические эффекты, связанные с собственными полями, и некоторые динамические эффекты, обусловленные изменяющимися во времени внешними полями. Многие явления, обнаруженные в пучках, по существу аналогичны явлениям, встречающимся в физике плазмы. В пучках возможно распространение продольных и поперечных волн, которые могут взаимодействовать с окружающей структурой или плазменным фоном, что ведет к росту или распаду волн либо во времени, либо в пространстве. Существует большое многообразие возможностей. Некоторые эффекты применяются с пользой, например при конструировании ламп СВЧ, в то время, как другие, такие, как неустойчивости в ускорителях, нежелательны и их необходимо подавлять.

Мы ограничимся исследованием систем в линейном приближении и рассчитаем пороги неустойчивостей и их инкременты, однако, за исключением некоторых качественных замечаний, не будем рассматривать факторы, ограничивающие рост колебаний. Этот вопрос трудно излагать на основе общих соображений, особенности ситуации необходимо учитывать конкретно. Исключим из рассмотрения также теорию параметрической связи двух волн. Поскольку существенные свойства пучков хорошо поняты, к ним довольно просто применить теорию этого типа взаимодействия. В этом можно убедиться, например, изучая книгу Люиселла [191].

Поскольку соответствующие явления рассматриваются лишь в линейном приближении и учитываются гармонические изменения полей, смещения и плотности зарядов следует также считать гармонически изменяющимися величинами. Решая уравнения Максвелла совместно с уравнениями движения частиц пучка, можно вывести дисперсионное уравнение для конкретной системы. Оно связывает частоту ω и волновое число k возмущений. Иногда дисперсионное уравнение имеет комплексные корни, в которых надо еще определить соответствующие знаки мнимых частей ω и k .

§ 2. Волны в неограниченной плазме

2.1. Введение. Прежде чем начать изучение пучков, полезно кратко рассмотреть некоторые свойства волн в неограниченной плазме.

В данном разделе мы дадим понятия плазменной частоты, положительной и отрицательной энергии волн, затухания Ландау и изучим распространение волн в холодной дрейфующей плазме. В следующих разделах применим эти идеи к пучкам.

Здесь уместно договориться об обозначениях и знаках. Гармонические величины описываются действительной частью $j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})$. Часто для краткости мы будем опускать этот множитель, однако во всех случаях, когда возможна путаница, его фактическое присутствие будем обозначать тильдой. Таким образом,

$$\tilde{A} \equiv A \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]. \quad (6.1)$$

Фазовая скорость такой волны, движущейся в направлении оси z , равна ω/k_z . По аналогии с обозначениями, принятыми для релятивистских частиц, перепишем ее в виде $\beta_w c$ и обозначим

$$\gamma_w = (1 - \beta_w^2)^{-1/2}. \quad (6.2)$$

Изменение знака любой из величин ω или k_z приводит к изменению направления скорости на обратное; одновременное изменение знаков обеих этих величин не приводит к изменению направления скорости. Возможность существования у этих величин любого знака приводит к неопределенности. Более естественно было бы принять соглашение о положительности значений ω ; тем не менее, как мы увидим ниже, во многих случаях удобнее выбрать отрицательный знак.

Данную главу начнем с изучения простейших типов волн в самой простой среде, постепенно переходя к рассмотрению более сложных случаев. Там, где необходимо, будем вводить некоторые понятия, полезные для понимания и классификации движения волн. Часто вначале будем излагать только смысл идей, а более полное и точное обоснование их будем давать позже. Основная геометрия, которая будет рассматриваться, — это цилиндрический пучок радиусом a , распространяющийся в цилиндрической камере радиусом b . Исследуем влияние на характеристики продольных волн таких параметров, как импеданс стенок камеры и разброс импульсов частиц в пучке. Свойства таких систем имеют много общего со свойствами дрейфующей в неподвижном нейтрализующем фоне электронной плазмы, но отличаются от последней тем, что имеют ограниченные размеры. Это отличие аналогично тому, которое претерпевают волны, распространяющиеся в свободном пространстве, когда их заставляют идти через волновод с ограниченными размерами.

2.2. Волны в холодной стационарной плазме. Наиболее простой системой является холодная неограниченная плазма, состоящая из электронов и ионов. Предположим, что при отсутствии волнового движения все величины стационарны, а инерция ионов столь вели-

ка, что они не могут перемешаться, даже когда появляются поля, обусловленные волновым движением электронов. Изучим вначале простейший тип волны. Для этого предположим, что возмущения скорости, плотности заряда и электрического поля имеют гармоническую зависимость в z -направлении. Из этих величин только плотность заряда $n_0 \tilde{j}$ имеет не зависящую от времени составляющую. Обозначим напряженность электрического поля и скорость электронов соответственно через \tilde{E} и $\tilde{\beta}_c$, а плотность заряда — через $(n_0 + \tilde{n})q$. При этом (нерелятивистское) уравнение движения запишется в виде

$$q\tilde{E} = m_0 c \frac{d\tilde{\beta}}{dt} = jm_0 \omega \tilde{\beta}_c, \quad (6.3)$$

а уравнение непрерывности

$$c \frac{\partial}{\partial z} [(n_0 + \tilde{n})\beta] + \frac{\partial}{\partial t} (n_0 + \tilde{n}) = 0. \quad (6.4)$$

Оставляя в последнем уравнении только члены первого порядка малости, можно записать его в более простом виде

$$n_0 k \tilde{\beta}_c = \omega \tilde{n}. \quad (6.5)$$

Чтобы получить дисперсионное уравнение, необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла; в этом очень простом примере достаточно только одного уравнения Пуассона

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = \frac{\tilde{n}q}{\epsilon_0}, \quad (6.6)$$

из которого следует

$$-j\epsilon_0 k \tilde{E} = \tilde{n}q. \quad (6.7)$$

Исключая из уравнений (6.3), (6.5) и (6.6) величины \tilde{n} и $\tilde{\beta}_c$, находим, что k и \tilde{E} исчезают. Таким образом, получаем

$$\omega^2 = \frac{n_0 q^2}{m_0 \epsilon_0} = \omega_p^2. \quad (6.8)$$

Это и есть плазменная частота, с которой мы уже встречались раньше в § 1 гл. 3. То, что в выражении (6.8) частота ω не зависит от k , свидетельствует о независимости частоты возмущений от длины волны. Групповая скорость $\partial\omega/\partial k$ равна нулю, а фазовая скорость обратно пропорциональна k .

С физической точки зрения причину такого поведения можно объяснить, рассматривая слой плазмы. Если все электроны слоя смещаются в направлении, перпендикулярном его поверхностям, на расстояние Δz , то на этих поверхностях возникает избыток поло-

жительных и отрицательных зарядов, которые создают силу, стремящуюся восстановить первоначальное положение смещенных электронов. Эта сила пропорциональна смещению, но не зависит от толщины слоя, так что частота колебаний не зависит от размеров. Как мы увидим ниже, такой вывод нельзя применить к плазме, имеющей конечные поперечные размеры, в которую поле проникает через границу.

В бесконечной среде магнитное поле, связанное с этими волнами, тождественно равно нулю. Нетрудно проверить, что плотность тока проводимости $nq\beta c$ равна и противоположна по знаку плотности тока смещения $\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$, так что $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{B} = 0$.

При выводе выражения для плазменной частоты мы предполагали, что ионы неподвижны. Учесть их движения в расчетах можно непосредственно; они движутся в противофазе с электронами и испытывают меньшие отклонения. При этом выражение для плазменной частоты принимает вид

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2, \quad (6.9)$$

где ω_{pe}^2 и ω_{pi}^2 определяются выражением (6.8), в котором m_0 — масса либо электронов, либо ионов.

Волны, которые до сих пор мы изучали, являются продольными и не существуют в отсутствие плазмы. Кроме них имеются также поперечные волны, которые при отсутствии плазмы соответствуют волнам в свободном пространстве. Дисперсионное уравнение для них можно получить из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{i}), \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \end{aligned} \quad (6.10)$$

и соотношения $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$ (снова пренебрегая движением ионов). Используя уравнение (6.3), получаем для тока следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{i}} = nq^2 \tilde{\mathbf{E}} / (j\omega m_0). \quad (6.11)$$

Поскольку в данном примере скорость направлена перпендикулярно направлению распространения, n не зависит от времени. Подставляя это выражение в первое из уравнений (6.10) и учитывая, что все величины меняются гармонически с частотой ω , получаем

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{B} = (\omega \tilde{\mathbf{E}} / c^2) [1 - nq^2 / \omega^2 m_0 \epsilon_0]. \quad (6.12)$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение, описывающее распространение волн в свободном пространстве (в котором $\mathbf{i} = 0$), с той лишь разницей, что теперь имеется еще дополнительный множитель $\mu_0 \epsilon_0$ (или $1/c^2$), стоящий в квадратных скобках. Этот мно-

житель представляет собой диэлектрическую проницаемость и равен $1 - \omega_p^2 / \omega^2$. Следовательно, дисперсионное уравнение для поперечных волн записывается в виде

$$\sigma^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2. \quad (6.13)$$

Это уравнение описывает гиперболическую зависимость, асимптотики которой соответствуют линиям $\omega \pm ck$ для "свободного пространства". В случае когда $\omega < \omega_p$, величина k является мнимой; этот случай соответствует волнам, быстро спадающим по экспоненте с расстоянием от источника. При $\omega \ll \omega_p$ имеем

$$\frac{1}{|k|} = \frac{c}{\omega_p} = \left(\frac{1}{4\pi n^2 \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (6.14)$$

Эту величину называют "глубиной бесстолкновительного скин-слоя".

При наличии магнитного поля поведение волн становится более сложным, а их структура зависит от направления распространения. Соотношение между током и электрическим полем больше не остается простым, поскольку в общем случае электроны движутся не параллельно приложенному электрическому полю, и, кроме того, их движение зависит от относительной ориентации электрического и магнитного полей. Тем не менее провести расчеты все же можно. Они облегчаются введением тензора диэлектрической проницаемости κ_{ij} , который связывает векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} . Подробное описание этих расчетов можно найти во многих учебниках; исчерпывающее изложение имеется в книге [2]. В ней объяснен как метод расчета, так и исследованы разнообразные типы волн. Здесь же мы просто приведем общеизвестные результаты.

Используя уравнение непрерывности и уравнение движения зарядов, определим вначале тензор проводимости σ_{ij} , который связывает ток, текущий в плазме, с полем. Затем найдем тензор диэлектрической проницаемости κ_{ij} , который равен $\delta_{ij} - j\sigma_{ij} / \epsilon_0 \omega$. Можно показать, что при наличии магнитного поля, параллельного оси z , тензор κ_{ij} записывается в виде

$$\kappa_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa_{\perp} & -j\kappa_x & 0 \\ j\kappa_x & \kappa_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

где при условии, что движением ионов можно пренебречь, имеем

$$\kappa_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2},$$

$$\kappa_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (6.16)$$

$$\kappa_{\perp} = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}.$$

Для гармонического возмущения оба уравнения Максвелла можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} -j \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= -j \omega \mathbf{B}, \\ -j \mathbf{k} \times \mathbf{B} c^2 &= j \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

из которых путем исключения величины \mathbf{B} находим

$$-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = k_0^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}; \quad (6.18)$$

здесь $k_0 = \omega/c$ — значение k в свободном пространстве. Векторное уравнение (6.18) соответствует трем уравнениям для трех составляющих вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , представляющих собой функции величин k , ω и \mathbf{k} . Разделив уравнения на одну из них, получим три уравнения для двух переменных. Исключение этих переменных приводит к соотношению между ω , k и \mathbf{k} , которое является дисперсионным уравнением.

Даже такая простая с физической точки зрения система, как холодная плазма с неподвижными ионами, в присутствии однородного магнитного поля B_0 описывается достаточно сложным дисперсионным уравнением

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) - \frac{1}{2} \omega_c^2 \omega^2 \sin^2 \theta \pm \omega \{ (\frac{1}{2} \omega_c^2 \omega \sin^2 \theta)^2 + (\omega^2 - \omega_p^2)^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta \}^{1/2}}, \quad (6.19)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 . Знаки “ \pm ” соответствуют двум направлениям поляризации. При $\theta = \pi/2$ уравнение описывает плоские волны, в которых в зависимости от выбранного знака вектор \mathbf{E} направлен перпендикулярно или параллельно магнитному полю \mathbf{B}_0 ; с другой стороны, при $\theta = 0$ эти знаки соответствуют правой и левой круговым поляризациям волн. Если второй член больше, чем первый, то значение k^2 отрицательно и волны не могут распространяться [ср. с уравнением (6.13)]. В случае когда $\theta = 0$ или $\pi/2$, уравнение (6.19) можно представить в значительно более простом виде.

При $\theta = 0$ имеем

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (6.20)$$

Здесь наличие двух знаков означает, что на частотах $\pm \omega_c$ фазовая скорость волн равна нулю. Это справедливо для плоскополяризованного излучения. Если же излучение имеет круговую поляризацию, то выбор знака зависит от того, совпадают ли направления вращения плоскости поляризации и частиц или они вращаются в противоположных направлениях. Если направления вращений совпадают, то надо выбрать знак минус. Дисперсионное уравнение не является теперь симметричным, и знак ω соответствует направлению вращения плоскости поляризации по отношению к направлению вращения электронов в магнитном поле.

В случае когда $\theta = \pi/2$, имеем два уравнения, одно из них описывает волны, в которых векторы \mathbf{E} и \mathbf{B}_0 параллельны друг другу, а второе — когда они взаимно перпендикулярны. Не удивительно, что первое из них не содержит \mathbf{B}_0 и имеет такой же вид, как и уравнение, описывающее волны в свободном пространстве:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0), \quad (6.21)$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \quad (\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0).$$

Частота $(\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2}$, входящая во второе уравнение, называется "верхней гибридной" частотой. На рис. 6.1 приведены дисперсионные зависимости, построенные в соответствии с уравнением (6.21) при различных значениях ω_p/ω_c .

Используя обозначения (6.2), последние два уравнения можно записать в виде

$$1 = \beta_w^2 \gamma_w^2 \left(\frac{-\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \right) \quad (6.22)$$

и

$$1 = \beta_w^2 \gamma_w^2 \left(\frac{-\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0), \quad (6.23)$$

$$1 = \beta_w^2 \gamma_w^2 \left(\frac{-\omega_p^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right) \quad (\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0).$$

Величины β_w и γ_w соответствуют значениям β и γ , когда частица

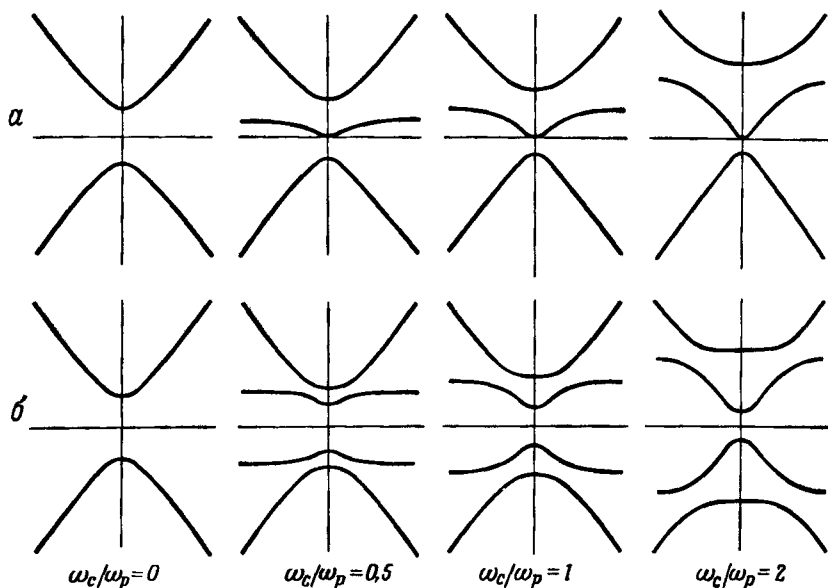


Рис. 6.1. *a* – дисперсионные кривые $\omega(k)$, иллюстрирующие дисперсионные зависимости для поперечных волн в холодной плазме, помещенной в магнитное поле, верхний ряд соответствует волне, распространяющейся вдоль направления поля; частоты ω_1^+ и ω_1^- , при которых $k = 0$, даются выражением

$$\omega_0/\omega_p = \omega_c/2\omega_p \pm (\omega_c^2/4\omega_p^2 + 1)^{1/2}.$$

Средняя ветвь имеет асимптотику, соответствующую $\omega = \omega_c$; *b* – в нижнем ряду представлены дисперсионные кривые для случая, когда направление распространения волны и электрическое поле перпендикулярны направлению магнитного поля. Частоты, при которых $k = 0$, определяются четырьмя корнями уравнения

$$(\omega_0/\omega_p)^2 = \frac{1}{2} [(\omega_c/\omega_p)^2 + 2 \pm (\omega_c/\omega_p)(\omega_c^2/\omega_p^2 + 4)^{1/2}].$$

Средние ветви имеют асимптотики, соответствующие $\omega = \pm(\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2}$. Поскольку магнитное поле перпендикулярно направлению распространения волны, волна не имеет круговой поляризации и в ней присутствуют как отрицательная, так и положительная частоты. Поэтому дисперсионные кривые симметричны относительно оси частот.

движется со скоростью, равной фазовой скорости волны. В случае $\beta_w > 1$ величина γ_w является мнимой и эти обозначения теряют смысл. Однако в следующих разделах, в которых рассматриваются волны со значением β_w , всегда меньшим, чем единица, величина γ_w будет действительной.

2.3. Поверхностные волны в плазме. Вследствие того, что на частоте ниже плазменной диэлектрическая проницаемость становится отрицательной, в плазме могут возбуждаться поверхностные волны, которые по своей природе существенно отличаются от поверхностных волн, возникающих на границе диэлектрика. В диэлектрике поверхностные волны образуются в "оптически менее плотной" среде, когда угол падения больше, чем критический угол полного внутреннего отражения. Чтобы такие волны существовали, фазовая скорость волны вдоль поверхности менее плотной среды должна быть меньше скорости света в этой среде. Если роль менее плотной среды играет свободное пространство, то амплитуда волны уменьшается с удалением от поверхности как $\exp(-y/\gamma_w \lambda)$. Такая волна не локализована вблизи поверхности; невозможно найти решения, которые бы экспоненциально спадали по обе стороны от поверхности раздела. Однако на поверхности плазмы такая ситуация возможна, и мы найдем решение, исходя из условия, чтобы при переходе через границу импедансы и фазовые скорости были согласованными. Пусть граничная поверхность плазмы расположена в плоскости xz , а волна распространяется в z -направлении.

Обозначим среду, для которой y положительно, индексом 1, а для которой y отрицательно, индексом 2. Если диэлектрическая проницаемость равна κ , а магнитная проницаемость — единице, то для обеих сред имеем

$$k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 \kappa}{c^2}. \quad (6.24)$$

Обозначим импеданс через Z . Тогда можно написать следующие выражения:

$$\begin{aligned} Z_{y1} &= \frac{Z_1 c k_{y1}}{\omega}, \\ Z_{-y2} &= -Z_{y2} = \frac{Z_2 c k_{y2}}{\omega}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $Z_1 = \mu_0/\epsilon_0 \kappa_1$. Полагая в уравнении (6.24), что $k_{z1} = k_{z2}$, а в уравнении (6.25), что $Z_{y1} = Z_{y2}$, и исключая k_{y1} и k_{y2} , получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2 k_z^2}{c^2} + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = 0, \quad (6.26)$$

из которого с очевидностью следует, что действительные значения k_z существуют только при отрицательных значениях κ_1 или κ_2 . Записывая $\kappa_1 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, т.е. считая, что в плазме отсутствует

магнитное поле, и опуская индекс в k_z , получаем

$$k^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{(\omega_p^2 - \omega^2) \kappa_2}{\omega^2 (1 + \kappa_2) - \omega_p^2}. \quad (6.27)$$

Отсюда мы видим, что k имеет действительные значения только тогда, когда числитель и знаменатель одновременно положительны:

$$1 > \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 > \frac{1}{1 + \kappa_2}. \quad (6.28)$$

Дисперсионная кривая для поверхностной волны приведена на рис. 6.2, откуда можно видеть, что групповая скорость волны $d\omega/dk$ отрицательна. На поверхности нормальная составляющая вектора E меняет направление на противоположное, а это означает, что потоки мощности на обеих сторонах поверхности имеют противоположные направления, причем отрицательный поток, текущий внутри плазмы, превосходит положительный поток вдоль поверхности. Ниже мы еще встретимся с поверхностными волнами в пучках, которые имеют ту же самую физическую природу, но несколько иные свойства, обусловленные ограниченностью размеров.

2.4. Стационарные свойства плазмы, дрейфующей через неподвижный нейтрализующий фон. Промежуточный по сложности случай между стационарной плазмой и пучком представляет собой плазма, состоящая из частиц одного знака, которые дрейфуют через стационарный, неподвижный нейтрализующий фон. Такое идеализированное представление тем не менее полезно во многих случаях. Очевидно, что оно является более подходящим для электронной плазмы, и поэтому для определенности временно предположим, что мы имеем дело с потоком дрейфующих электронов.

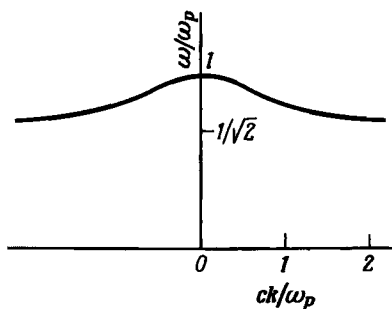


Рис. 6.2. Дисперсионная кривая для поверхностной волны, распространяющейся по границе между плоской однородной плазмой и свободным пространством.

Рассмотрим теперь сущность предположений, выдвинутых при построении этой модели. Во-первых, если плазма имеет бесконечные размеры в поперечном направлении, то в ней не может быть магнитного поля, поскольку на плюс бесконечности происходит накопление отрицательного заряда, а на минус бесконечности — положительного. Это приводит к постоянной скорости изменения электрической индукции D , и обусловленное им магнитное поле компенсирует магнитное поле, создаваемое конвекционным током. С другой стороны, наличие вектора D означает, что электрическое поле имеет такое направление, что оно стремится затормозить заряды, т.е. свободное течение, предположенное выше, оказывается невозможным; в действительности эта система столь же полезна, как и система, описанная в предыдущем разделе, которая осциллирует на частоте ω_p . Однако если для тока существует обратный путь, сколь угодно отдаленный, то в этом случае обязательно существует магнитное поле, порождающее поперечную силу, действующую на электроны. Для определенности будем рассматривать аксиально-симметричную систему с очень большими поперечными размерами. Направленная внутрь по радиусу сила, возникающая при взаимодействии электронов с собственным магнитным полем плазмы, пропорциональна r и вынуждает электроны двигаться в сторону оси. Влиянием собственного магнитного поля можно пренебречь в том случае, когда расстояние r от оси мало по сравнению с ларморовским радиусом, вычисленным в этой же точке. Это условие мы уже получили в разд. 2.7 гл. 3. Оно просто означает, что

$$2v/\gamma \ll 1 \quad (6.29)$$

или, если переписать v через n и r , что

$$\frac{r^2 n q^2}{2\epsilon_0 \gamma m_0 c^2} \ll 1. \quad (6.30)$$

После перегруппировки членов получаем следующее неравенство:

$$r^2 \ll \frac{2\epsilon_0 \gamma m_0 c^2}{n q^2} = \frac{2\gamma c^2}{\omega_p^2}. \quad (6.31)$$

Прежде чем обсуждать этот результат, заметим, что плотность электронов n измеряется в лабораторной системе координат. В системе координат, движущейся вместе с электронами, длина любого отрезка в γ раз больше, чем в лабораторной системе координат; следовательно, число электронов, приходящихся на единицу длины, и их плотность оказывается в γ раз меньше. Используя этот факт, усло-

вие (6.29) можно переписать следующим образом:

$$r < \frac{\sqrt{2}c}{\omega_{pm}}, \quad (6.32)$$

где ω_{pm} — плазменная частота, измеряемая в движущейся системе координат. В дальнейшем всюду будем предполагать, что плазменная частота измеряется в движущейся (собственной) системе координат, и индекс m писать не будем. Нетрудно заметить, что правая часть неравенства (6.32) представляет собой увеличенную в $\sqrt{2}$ раз глубину бесстолкновительного скин-слоя.

Если рассматриваемая система такова, что ее длина в z -направлении значительно превосходит ее радиус, то, считая n_e больше, чем n_1 , можно обеспечить условие баланса сил, действующих на электрон в направлении, перпендикулярном оси, поскольку радиальную электрическую силу можно (в принципе!) сделать равной и противоположной магнитной силе. Этот случай соответствует пучку с нулевым обобщенным первеансом [выражение (3.30)], для которого справедливо условие Будкера $n_e/n_1 = \gamma^2$. Для ультрарелятивистских частиц это отношение является очень большим. Такая модель в высшей степени нереалистична; на самом деле ионы больше не могут оставаться неподвижными, поскольку на них действует поперечная сила, обусловленная полем пространственного заряда и направленная к оси системы. Только наше не отвечающее действительности предположение о "бесконечно тяжелых" ионах не позволяет им двигаться к оси. Однако если предположить, что в направлении дрейфа существует очень сильное магнитное поле, то эту трудность в неограниченной дрейфующей плазме можно обойти более убедительным путем.

В системе координат, движущейся вместе с электронами, n_e уменьшается в γ раз, а n_1 увеличивается в такое же число раз, так что для плазмы, удовлетворяющей условию (6.32), в движущейся системе координат мы имеем $n_{e2}/n_{i2} = 1$, т.е. плазма является нейтральной. В этой системе координат силу, действующую на ионы в направлении к оси, можно интерпретировать как магнитную силу "пинчевания", обусловленную собственным магнитным полем ионного тока.

В данном разделе мы рассмотрели дрейфующую плазму с очень большими поперечными размерами. Ниже мы встретимся с пучками, имеющими ограниченные поперечные размеры, где важны только некоторые из отмеченных здесь факторов.

2.5. Продольные волны в холодной дрейфующей плазме. Приступим теперь к изучению свойств плазменных колебаний в движущейся среде, подобной той, которая рассматривалась в предыдущем разделе. Один из подходов очевиден: надо перейти в систему координат, дви-

жущуюся со скоростью плазмы. Однако вместо этого мы будем решать задачу непосредственно, используя метод, изложенный в начале разд. 2.2. Предположим, что скорость дрейфа релятивистская.

Тогда уравнение движения можно записать в виде¹⁾

$$qE = m_0 c \frac{d}{dt} (\beta \gamma), \quad (6.33)$$

Оно отличается от уравнения (6.3) двумя аспектами. Во-первых, электроны движутся, так что полную производную d/dt нужно записать в виде $\partial/\partial t + \beta_0 c \partial/\partial z$, где β_0 — среднее значение β ; во-вторых, необходимо использовать релятивистскую динамику. При этих условиях уравнение (6.33) принимает вид

$$q\tilde{E} = m_0 c \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta_0 c \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\beta_0 \tilde{\gamma} + \gamma_0 \tilde{\beta} \right). \quad (6.34)$$

Выполняя дифференцирование (при условии, что $\tilde{\beta}/\beta_0, \tilde{\gamma}/\gamma_0 \ll 1$), получаем

$$q\tilde{E} = j\gamma^3 m_0 \tilde{\beta} c (\omega - \beta_0 c k). \quad (6.35)$$

Запишем теперь уравнение непрерывности, которое аналогично уравнению (6.4), за исключением того, что теперь в нем присутствует β_0 . Оно имеет вид

$$c \frac{\partial}{\partial z} [(n_0 + \tilde{n})(\beta_0 + \tilde{\beta})] + \frac{\partial}{\partial t} (n_0 + \tilde{n}) = 0. \quad (6.36)$$

Пренебрегая здесь членами выше первого порядка малости, это уравнение можно записать более просто:

$$(\omega - \beta_0 c k) \tilde{n} - k n_0 \tilde{\beta} c = 0. \quad (6.37)$$

Как и прежде, уравнения Максвелла сводятся к уравнению (6.6):

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = \frac{\tilde{n} q}{\epsilon_0},$$

откуда получаем в результате [уравнение (6.7)]

$$-j\epsilon_0 k \tilde{E} = q \tilde{n}.$$

Дисперсионное уравнение можно получить точно таким же путем, как и выше. Оно записывается в виде

$$(\omega - \beta_0 c k)^2 = \frac{q^2 n_0}{\gamma_0^3 m \epsilon_0}. \quad (6.38)$$

¹⁾ Здесь β и γ — полные величины, т.е. $\beta = \beta_0 + \tilde{\beta}$, $\gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma}$. —
Прим. ред.

Можно заметить, что это уравнение отличается от (6.8) двумя моментами. Во-первых, частота имеет доплеровский сдвиг, равный произведению скорости электронов на величину k ; во-вторых, в правой части уравнения присутствует коэффициент γ_0^3 . Как уже отмечалось в разд. 2.3, плазменная частота определяется как частота, измеряемая в собственной системе координат плазмы:

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q^2}{\gamma_0 m_0 \epsilon_0}. \quad (6.39)$$

Тогда дисперсионное уравнение можно записать через плазменную частоту следующим образом:

$$\frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2 (\omega - \beta_0 c k)^2} = 1, \quad (6.40a)$$

или в другом виде:

$$\beta_w = \frac{\beta_0 \omega}{\omega \pm \omega_p / \gamma_0}. \quad (6.40b)$$

Дисперсионные кривые, описываемые уравнениями (6.40), представляют собой пару прямых линий (рис. 6.3). Групповая скорость волн $d\omega/dk$ равна скорости потока $\beta_0 c$. С другой стороны, фазовая скорость ω/k принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для данного значения k существуют две волны, фазовые скорости которых ω/k больше и меньше скорости потока $\beta_0 c$. Их называют "быстрой" и "медленной" волнами. При $k < \omega_p / \beta_0 c$ фазовая скорость медленной волны отрицательна.

Можно провести интересную аналогию с движущимся винтом. Если шаг резьбы обозначить через p и вращать винт с угловой скоростью ω , то для левой резьбы фазовая скорость ее смещения в z -направлении равна $+r\omega/2\pi$. Если частота ω отрицательна (винт вращается против часовой стрелки), то фазовая скорость равна $-r\omega/2\pi$. Если винт движется вперед со скоростью v , то фазовая скорость движения резьбы будет положительной или отрицательной в зависимости от того, больше или меньше v по сравнению с $r\omega/2\pi$. В плазме это соответствует условию, что $\beta_0 c$ больше или меньше, чем $\omega_p / k\gamma_0$.

Уравнение (6.39) можно получить другим методом, преобразуя дисперсионное уравнение для плазмы [уравнение (6.8)] в движущуюся систему координат с помощью преобразований Лоренца. Обозначим скорость движущейся системы координат через βc , а величины, измеряемые в лабораторной и движущейся системах координат, со-

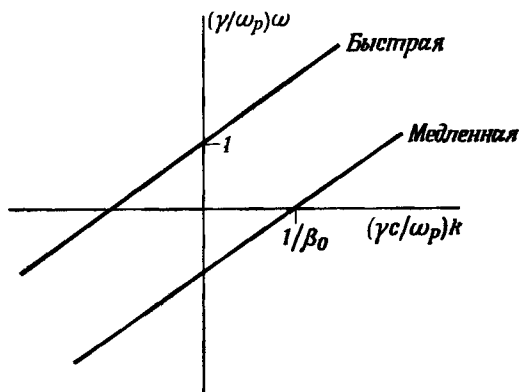


Рис. 6.3. Дисперсионные зависимости для плазмы, дрейфующей через стационарный неподвижный нейтрализующий фон со скоростью $\beta_0 c$ [выражение (6.40)].

В первом квадранте обе волны, как медленная, так и быстрая, распространяются в положительном z -направлении. Во втором и четвертом квадрантах фазовая скорость отрицательна. В третьем квадранте волна, помеченная как "быстрая", становится медленной волной, и наоборот. Групповая скорость обеих быстрой и медленной волн равна $\beta_0 c$.

ответственно индексами 1 и 2. Тогда, исключая ω_2 и k_2 из уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{p1}^2 &= \omega_{p2}^2, & \omega_2 &= \gamma(\omega_1 - k_1 \beta_0 c), \\ k_2 &= \gamma(k_1 - \frac{\beta_0 \omega_1}{c}), \end{aligned} \quad (6.41)$$

получаем уравнение (6.40 а). В рассматриваемом частном случае $k_2 = 0$, так что третье уравнение является лишним. При преобразованиях системы координат значение плазменной частоты не меняется. Увеличение плотности при переходе в движущуюся систему координат компенсируется растяжением времени. Если плотность частиц измеряется в лабораторной системе координат, что обычно имеет место, то величину n следует разделить на γ . В результате имеем следующее выражение:

$$\omega_p^2 = \frac{n_1 q^2}{\gamma m_0 \epsilon_0} = \frac{n_2 q^2}{m_0 \epsilon_0}, \quad (6.42)$$

интерпретация которому была дана в предыдущем разделе.

Стационарная плазма всегда пассивна. Мнимые части величин

k и ω описывают волну, которая затухает в направлении от источника или во времени. С другой стороны, дрейфующая плазма представляет собой существенно активную среду; при взаимодействии ее со стационарным фоном могут возбуждаться нарастающие волны, черпающие свою энергию из кинетической энергии движущихся частиц.

До сих пор мы рассматривали волны, в которых каждому действительному значению k соответствовало действительное значение ω , и наоборот. В случае же, когда уравнение имеет комплексные корни, интерпретация отнюдь не всегда является простой. Непосредственно неясно ни то, какой следует выбрать знак для мнимой части, ни то, к какому типу физического поведения можно отнести соответствующий результат. Для ответа на эти вопросы можно воспользоваться соответствующими формальными методами, хотя во многих простых случаях вполне достаточно ограничиться физическими аргументами. В § 3 мы вновь займемся рассмотрением этих вопросов, а сейчас остановимся на понятии волн с положительной и отрицательной энергиями.

Если вычислить энергию движущейся плазмы в присутствии распространяющейся в ней волны, то окажется, что энергия такой плазмы отличается от значения энергии, соответствующего отсутствию волны. В присутствии быстрой волны энергия плазмы увеличивается, а в случае медленной — уменьшается. Хотя на первый взгляд это может показаться удивительным, но такой результат становится понятным, если учесть, что модуляции скорости и плотности электронов коррелируются таким образом, что при возбуждении медленной волны большая часть частиц замедляется, а при возбуждении быстрой — ускоряется.

Важным следствием из этого факта является возможность связи медленной волны и волны с положительной энергией, распространяющейся в другой системе. Наличие такой связи приводит к обмену энергиями между двумя волнами, в результате чего может возбудиться нарастающая волна. Эта ситуация анализируется в следующем разделе. Другой важный эффект заключается в том, что диссипация энергии вызывает рост волны с отрицательной энергией, а не ее затухание. По мере того как энергия выводится из волны, ее амплитуда растет. Это можно очень просто показать, если в уравнение (6.7) ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon = \epsilon_0(1 - j\alpha)$, считая величину α малой по сравнению с единицей и выбирая ее знак так, чтобы он соответствовал диссипации энергии. При этом плазменная частота дается выражением

$$\begin{aligned} \omega_p &\approx \left\{ \frac{nq^2}{\gamma m_0 \epsilon_0} \right\}^{1/2} (1 + \frac{1}{2}j\alpha) = \\ &= \omega_{p0} (1 + \frac{1}{2}j\alpha), \end{aligned} \tag{6.43}$$

где ω_{p0} — это значение ω_p при $\alpha = 0$. Дисперсионную зависимость (6.38) можно теперь переписать в виде

$$\omega = \beta_0 c k \pm \left(\frac{\omega_{p0}}{\gamma} \right) (1 + \frac{1}{2} j \alpha). \quad (6.44)$$

Отсюда следует, что быстрая волна (верхний знак) затухает, а медленная волна (нижний знак) нарастает.

На данном этапе следует заметить, что, выбирая действительные значения k и комплексные значения ω (или наоборот), можно удовлетворить уравнению (6.44). Какое решение соответствует действительности, зависит от граничных условий задачи. Для бесконечной прямолинейной системы обычно более удобно выбирать действительные значения ω и комплексные значения k , что соответствует нарастающей или затухающей в пространстве волне, которая, однако, имеет в любой точке постоянную амплитуду. Если же система замкнута сама на себя, как это имеет место в циклических ускорителях частиц, более уместно выбирать комплексную частоту. В случае ограниченной прямолинейной системы этот выбор не является таким простым [245]. Мы еще вернемся к данным вопросам в дальнейшем, а теперь перейдем к изучению систем, состоящих из двух или более взаимопроникающих плазменных потоков.

2.6. Два или более плазменных потоков. В предыдущем разделе мы получили дисперсионное уравнение для холодной дрейфующей релятивистской плазмы. Оно квадратично по форме и описывает две волны, фазовая скорость одной из которых больше, а другой меньше, чем скорость движения плазмы. Теперь посмотрим, что произойдет в случае, когда имеются два совмещенных в пространстве плазменных потока, движущихся в одном или противоположных направлениях.

Дисперсионное уравнение для продольных волн получают точно таким же образом, как и в разд. 2.5, за тем лишь исключением, что теперь мы должны рассматривать две плазменные компоненты. Каждое из уравнений (6.35) и (6.36) расщепляется на два уравнения, по одному для соответствующих компонент. То же происходит и с уравнением (6.37). Однако уравнение (6.7) содержит обе компоненты и не меняется. Исключая, как и прежде, из этих уравнений величины \tilde{n} и \tilde{E} , получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2}{\gamma_1^2 (\omega - \beta_1 c k)^2} + \frac{\omega^2}{\gamma_2^2 (\omega - \beta_2 c k)^2} = 1, \quad (6.45)$$

которое аналогично уравнению (6.39). Частный случай этого дисперсионного уравнения описывает одиночный поток, проходящий через

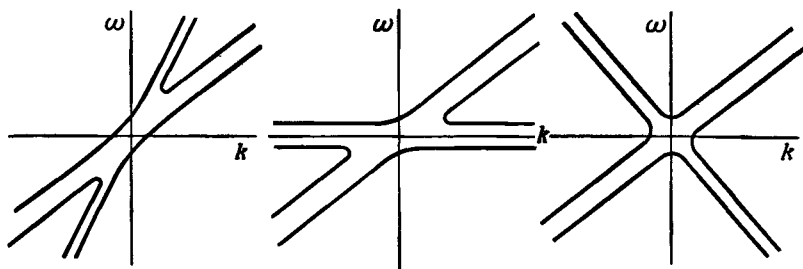


Рис. 6.4. Дисперсионные кривые для двухпоточковой неустойчивости [дисперсионное уравнение (6.45)].

Скорость одного из потоков всегда положительна; первая диаграмма соответствует положительной, вторая – нулевой, а третья – отрицательной скорости второго потока.

ионный фон, который больше не считается "бесконечно" тяжелым:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_e^2 (\omega - \beta_e ck)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 1; \quad (6.46)$$

здесь нижний индекс e соответствует электронам, а i – ионам.

На рис. 6.4 приведены дисперсионные кривые для трех случаев: 1) потоки движутся в одном направлении; 2) один из двух потоков покоится и 3) два потока движутся навстречу друг другу. Асимптотиками этих кривых являются пары прямых линий. Каждая пара соответствует дисперсионной зависимости для волн, распространяющихся в однокомпонентной плазме. Этот случай рассмотрен в предыдущем разделе.

Анализ дисперсионного уравнения показывает, что при больших значениях k уравнение имеет четыре действительных корня, однако в случае, когда k достаточно мало, действительных корней всего два. При действительных значениях k частота ω становится комплексной и наоборот. До сих пор мы лишь кратко обсуждали вопрос о выборе знаков и совсем не говорили о том, какое, нарастающее или затухающее, решение реализуется в действительности. Однако, основываясь на понятиях положительной и отрицательной энергий волн, введенных в предыдущем разделе, можно провести доказательство, которое с физической точки зрения вполне правдоподобно. Во-первых, предположим, что два потока движутся в одном направлении. Волны в потоках могут взаимодействовать только в том случае, если их фазовые скорости, вычисленные для каждого потока при условии, когда второй поток отсутствует, отличаются не слишком сильно. Рассмотрим вначале связь волн с положитель-

ной и отрицательной энергиями, каждая из которых распространяется в одном из двух потоков. Если в некоторой точке одного (или обоих) потока ввести гармоническое возмущение, то возбуждается волна, амплитуда которой возрастает с расстоянием от места возмущения в положительном направлении оси z . Обмен энергией между потоками происходит в прямой волне; возмущение нарастает в пространстве, однако в любой данной точке его амплитуда не зависит от времени. Волновое число k имеет комплексное значение, но ω — действительное. Это явление называется "конвективной" неустойчивостью. Предположим, что обе волны являются волнами с положительной или отрицательной энергией. В этом случае ни одна из волн не могла бы "питать" другую и никакого нарастания амплитуды волны не происходило бы, т.е. ω и k были бы действительными.

Пусть теперь потоки движутся в противоположных направлениях, тогда групповые скорости противоположны по знаку и свойства системы становятся другими. Предположим, что одна из волн обладает отрицательной энергией, а другая — положительной. В этом случае вместо прямого обмена энергией между потоками по мере их движения относительно друг друга энергия может передаваться в направлении, противоположном направлению фазовой скорости. Если в некоторой точке ввести возмущение, то в областях выше и ниже этой точки будет наблюдаться рост возмущения во времени. Частота ω является комплексной, и неустойчивость называется "абсолютной". Наконец, если обе волны одновременно обладают либо положительной, либо отрицательной энергией, то обратная связь действует так, чтобы уменьшить внесенное возмущение: k имеет комплексное значение, а знак мнимой части соответствует затуханию волн.

Этот краткий обзор типов взаимодействия, которые могут иметь место между двумя потоками, носит только качественный характер и не содержит никакого формального обоснования. Стэррок [287] дал более обширное и строгое описание поведения волн в четырех рассмотренных случаях. Оказывается, необходимо рассматривать не одиночные гармонические составляющие, как мы это делали выше, а волновые пакеты. В случае слабой связи различные варианты взаимодействия отличаются топологией дисперсионных зависимостей. В точке пересечения дисперсионных кривых, соответствующей взаимодействию связанных волн, результирующая дисперсионная зависимость имеет гиперболический вид.

В случае сильной связи, например при взаимодействии двух потоков, которое мы исследовали выше, строгое определение типа неустойчивости требует намного более тщательного математического исследования свойств дисперсионного уравнения. Здесь мы не будем

подробно обсуждать эту задачу, но в разд. Л.7 приведем соответствующие ссылки на литературу и обсудим некоторые вопросы. На рис. 6.4 показаны дисперсионные свойства бесконечной "двухпотоковой" среды для трех случаев взаимодействующих потоков. Очевидно, переходя в соответствующую подвижную систему координат, эти три случая можно свести к одному, так что вопрос о том, является ли неустойчивость конвективной или абсолютной, зависит от выбора системы координат, в которой она рассматривается. При наличии границ или возмущений в фиксированной точке пространства переход от одного случая к другому может оказаться сложным; лучше всего проводить рассмотрение в системе координат, в которой границы покоятся.

Аналитический подход позволяет обобщить рассмотрение непосредственно на любое число потоков. В этом случае дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\sum_r \frac{\omega_{pr}^2}{\gamma_r^2 (\omega - \beta_r c k)^2} = 1. \quad (6.47)$$

С увеличением r вид дисперсионной зависимости значительно усложняется, уравнение имеет $2r$ корней, и для каждого значения r асимптотиками являются пары прямых линий. Многие из корней могут быть комплексными. В предельном случае, когда r стремится к бесконечности, многопотоковая система переходит в плазму с непрерывным распределением частиц по скоростям. Форма распределения определяется зависимостью ω_{pr} от β_r . Осуществляя в дисперсионном уравнении (6.47) соответствующий переход к пределу $r \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{q^2}{\epsilon_0 m_0} \int \frac{f(\beta\gamma) d(\beta\gamma)}{\gamma^3 (\omega - \beta c k)^2} = \int \frac{q^2}{\epsilon_0 m_0} \frac{f(\beta\gamma) d\beta}{(\omega - \beta c k)^2} = 1, \quad (6.48)$$

где n - плотность, а $f(\beta\gamma)$ - функция распределения частиц в $\beta\gamma$ -пространстве (по существу в импульсном пространстве). Нормировка функции распределения выбрана таким образом, что $\int f(\beta\gamma) d(\beta\gamma) = n$. Выполняя в (6.48) интегрирование по частям, это уравнение можно записать в другом виде

$$\frac{q^2}{\epsilon_0 m_0 c k} \int \frac{\partial f(\beta\gamma) / \partial \beta}{\omega - \beta c k} d\beta = -1. \quad (6.49)$$

Интерпретация интегрального дисперсионного уравнения (6.49) осложняется наличием сингулярности в знаменателе подынтегрального выражения: совсем не очевидно, каким образом его можно было бы решить.

Некоторый практический интерес представляет случай, когда можно пренебречь сингулярностью. Это случай, когда в плазме фазовая скорость интересующей нас волны значительно превосходит скорость любых частиц βc . При этом интеграл в уравнении (6.48) можно переписать следующим образом:

$$\frac{q^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} \int f(\beta \gamma) \left(1 - \frac{k\beta c}{\omega}\right)^{-2} d\beta = 1 \quad (6.50)$$

и далее воспользоваться биномиальной теоремой. Выбирая $f(\beta)$ в виде нерелятивистского распределения с температурой KT и используя разложение в ряд, получаем¹⁾

$$\frac{q^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} \frac{m_0 \sigma^2}{2\pi^{1/2} KT} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{\beta^2 m_0 \sigma^2}{2KT}\right) \right\} \left\{ 1 + 3\left(\frac{\beta k c}{\omega}\right)^2 \right\} d\beta = 1 \quad (\text{Н Р}). \quad (6.51)$$

(Во второй паре квадратных скобок опущен член, пропорциональный β , поскольку он дает нулевой вклад при вычислении интеграла.) Интегрируя и перегруппировывая члены, получаем

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \frac{3KT}{m_0} \frac{k^2}{\omega^2} = 1 \quad (\text{Н Р}). \quad (6.52)$$

В рассматриваемом приближении плазму иногда называют "теплой" в отличие от "горячей" плазмы, в которой имеется большое число частиц, движущихся со скоростью волны. Результат, иллюстрируемый уравнением (6.52), часто получают из гидродинамического рассмотрения, вводя понятие электронного давления (см., например, [59], с. 178).

В следующем разделе мы обсудим дисперсионное уравнение для горячей плазмы, в котором должен быть решен вопрос о сингулярности. Один из методов решения этой задачи — значительно более тщательный выбор пути для осуществления предельных переходов [77]. Более общепринятым является подход, основанный на теории преобразования Лапласа, который впервые использовал Ландау [155].

2.7. Континуум плазменных потоков; затухание Ландау. В данном разделе мы резюмируем некоторые свойства волн в плазме, в которой электроны имеют непрерывное распределение по скоростям. Продолжим обсуждение интегрального дисперсионного уравнения (4.49). Можно надеяться, что оно позволит нам получить соотно-

¹⁾ В данном разделе постоянная Больцмана обозначается через K , чтобы не путать ее с волновым числом k .

шение между ω и k , которое зависит от функции распределения $f(\beta)$. Прежде чем приступить к решению этой задачи, необходимо "расправиться" с сингулярностью, имеющей место при $\omega = \beta ck$.

Интересно заметить, что если $\partial f / \partial \beta = 0$ при $\omega = \beta ck$, то сингулярность исчезает. Если $f(\beta)$ имеет конечную ширину (как это имеет место в пучке), а значения ω / ck расположены вне области определения $f(\beta)$, то сингулярность можно обойти. С другой стороны, $f(\beta)$ можно выбрать не зависящей от β при $\beta = \omega / ck$. Выведем дисперсионное уравнение для последнего случая, предполагая, что функция распределения $f(\beta)$ симметрична относительно $\beta = 0$ и область ее определения имеет ширину $2\beta_0$. Выбирая $f = n / 2\beta_0$ и подставляя ее в (6.48), получаем дисперсионное уравнение, справедливое при $\omega \neq |\beta_0 ck|$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \beta_0^2 c^2 k^2 \quad (\text{Н Р}), \quad (6.53)$$

При $\beta_0 = 0$ это квадратное уравнение сводится к уравнению (6.8) и фактически имеет вид, аналогичный уравнению (6.52). Проверкой нетрудно установить, что неравенство $\omega \neq |\beta_0 ck|$ удовлетворяется всегда.

В дисперсионном уравнении (6.49) условие сингулярности можно записать в виде $\beta c = \omega / k$, т.е. скорость частицы должна быть равна скорости волны. С физической точки зрения это означает резонансное взаимодействие между частицами и волной. Непосредственно не ясно, какое влияние будет оказывать это резонансное взаимодействие. Задачу впервые решил Ландау в 1946 г. в рамках теории преобразования Лапласа. С тех пор было выполнено много работ, посвященных данному вопросу. Математические выкладки при решении этой задачи являются довольно громоздкими, поэтому мы приведем здесь только некоторые замечания и представим конечные результаты, которые понадобятся нам ниже.

Кажущееся безвыходное положение, обусловленное сингулярностью, указывает на то, что для решения задачи необходимо иметь более полную информацию, чем та, которая использовалась при выводе дисперсионного уравнения (6.38). Сингулярность связана с резонансным поведением, и необходимая информация, как можно догадаться, относится к начальным условиям приготовления плазмы.

К счастью, для "регулярных" функций распределения (а большая часть распределений, реализуемых на практике, относится к этому типу) существует простой метод вычисления интеграла. Нормированную скорость β считают комплексной, а интегрирование выполняют вдоль действительной оси, обгибая полюс $\beta = \omega / ck$ сверху. Действительная часть интеграла, в который не вошла область от $\omega / ck - \epsilon$ до $\omega / ck + \epsilon$, представляет собой главное значение в смысле Коши и

обозначается через P . Мнимая часть этого интеграла равна умноженному на $-\pi j$ вычету, вычисленному в точке $\omega/c k$. Вычет подынтегральной функции равен $-(\partial f/\partial \beta)/c k$. Таким образом, в результате имеем

$$\frac{q^2}{\epsilon_0 m_0 c k} \left\{ P \int \frac{\partial f/\partial \beta}{\omega - \beta c k} d\beta + \frac{\pi j}{c k} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{\omega/c k} \right\} = -1. \quad (6.54)$$

В общем случае при действительном значении k это уравнение дает комплексные значения ω (с отмеченными выше исключениями). Для всех функций, за исключением самых простейших, уравнение (6.54) невозможно решить в аналитическом виде. Хотя зависимость ω от k можно найти только из решения этого уравнения, информацию о знаке мнимой части можно получить более простым путем.

В оставшейся части данного раздела представим некоторые хорошо установленные результаты без проведения каких-либо доказательств. Строгий их вывод очень громоздок и приведен в учебниках по физике плазмы. Первый из этих результатов состоит в том, что в случае распределения с одним максимумом $\text{Im } \omega$ всегда положительна и, следовательно, волны затухают. Такое затухание называют "затуханием Ландау", поскольку Ландау впервые проанализировал эту задачу [155]. Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы максимум распределения достигался при $\beta c = 0$. В случае такого распределения [например, для максвелловского распределения см. выражение (4.53)] знак производной $df/d\beta$ всегда противоположен знаку скорости волны. Чтобы связать этот факт с явлением затухания, уместно исследовать физическую природу резонанса между волной и частицей при $\beta c \sim \omega/k$.

Теория движения частиц в бегущих полях была изложена в § 8 гл. 2. Частицы, скорость которых близка к скорости волны, "захватываются" и движутся со средней скоростью, равной скорости волны. Более быстрые или более медленные частицы непрерывно проскальзывают по фазе. Если скорость волны постоянна, то средняя скорость всех частиц также сохраняется постоянной. Поскольку нас интересует предельный случай бесконечно малой амплитуды волны (для сохранения линейности), захватом частиц можно пренебречь. Так как энергия любой частицы остается в среднем постоянной и имеется много частиц, распределенных по всем фазам, сразу трудно понять, как возникает затухание. Физическое поведение можно представить себе в случае достаточно специального начального условия, когда в момент времени $t = 0$ скорости всех частиц расположены в узком интервале вблизи скорости резонансной частицы, а сами они равномерно распределены по фазам. Процесс

зависит от корреляции изменения фаз частиц и проявляется в том, что частицы, скорость которых больше скорости волны, отдают энергию волне, в то время как медленные частицы черпают энергию из волны. Поэтому затухание имеет место, если $\partial f/\partial \beta$ отрицательно. Если же $\partial f/\partial \beta$ положительно, то волна нарастает и развивается неустойчивость.

Если следовать подходу, предложенному Доусоном [77], то возникает несколько иная физическая картина. Описание этого подхода дано также в книге Стикса [283], и в общих чертах его суть заключается в следующем. Рассматривают систему, состоящую из очень большого, но конечного числа N пучков низкой плотности и обладающую следующими свойствами:

1. Для данного значения k дисперсионное уравнение имеет $2N$ корней ω , часть которых может быть комплексной. Эти корни соответствуют частотам нормальных мод системы.
2. Фазовые скорости этих мод лежат в интервале между скоростями пучков.
3. Скорости нарастания пучковых неустойчивостей стремятся к нулю, когда число пучков, используемых для аппроксимации функции распределения, стремится к бесконечности.
4. Эти моды пучка образуют полную систему нормальных мод, эквивалентных по существу модам ван Кампена [136].

Суммарное возмущение можно рассматривать как суперпозицию всех мод пучка, поэтому фазы перемешиваются. Именно это перемешивание фаз и рассматривается как затухание Ландау.

Сразу не очевидно, каким образом можно согласовать между собой эти две достаточно различные физические точки зрения. Для получения удовлетворительного ответа необходимо провести длительное обсуждение, но мы не будем здесь пытаться это делать.

Количественно затухание определяется выражением

$$\text{Im } \omega = - \frac{\pi q^2}{2\epsilon_0 m_0 k \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{\omega/k} \left(\frac{\omega}{k} - \frac{\partial \omega}{\partial k} \right), \quad (6.55)$$

где в правой части берется действительное значение ω . Эта формула, справедливая в области $\text{Im } \omega \ll \omega$, была получена Джексоном [130] и представляет собой небольшую поправку к результату, полученному Ландау. В предельном случае очень малых значений $\text{Im } \omega$ выполняются следующие приближенные равенства: $\omega \approx \omega_p$, $\partial \omega / \partial k \approx 0$.

Для распределений типа максвелловского, которые имеют один максимум, величина $(\partial f/\partial \beta)/\beta$ всегда отрицательна, поэтому эти распределения устойчивы. С другой стороны, для двугорбых распределений в некотором диапазоне β эта величина положительна, что приводит к возможности неустойчивого нарастания. Пенроуз [223], используя методы, тесно связанные с диаграммами Найквиста, ко-

торые применяются в теории цепей, показал, что система является неустойчивой, если выполняется следующее условие:

$$\int \frac{f(\beta\gamma) - f(\beta_0\gamma_0)}{(\beta - \beta_0)^2} d\beta > 0, \quad (6.56)$$

где β_0 — минимальное значение скорости между двумя максимумами. Если максимумы четко отделены друг от друга, то неустойчивость развивается всегда. Этот случай можно идентифицировать с двухпоточковой неустойчивостью, изученной в разд. 2.5 настоящей главы. Однако широкое распределение с небольшой "ямой", глубина которой составляет $\approx 10\%$ от максимальной величины, вероятно, будет устойчивым.

В данном разделе мы в общих чертах без подробных доказательств привели основные физические свойства затухания Ландау. Дальнейшее обсуждение читатель может найти в литературе, на которую даны ссылки в следующем разделе.

Л.2. Замечания и литература. Описание свойств плазменных волн, рассмотренных в общих чертах в разд. 2.2, можно найти во многих учебниках по физике плазмы. Полное, достаточно формальное математическое исследование дается, например, Аллисом и др. [?]. Рассмотрение на основе физических представлений, на котором был целиком построен изложенный здесь материал, приведено Клеммовом и Догерти в книге [59], в которой обсуждаются также свойства холодной релятивистской дрейфующей плазмы и проанализирована двухпоточковая неустойчивость (разд. 2.5 и 2.6).

Применение "многопоточкового" приближения при выводе дисперсионного уравнения для плазмы с непрерывным распределением частиц по скоростям, впервые использованного Доусоном [77], рассмотрено Стиксом [283]. Удовлетворительное обсуждение этой задачи и затухания Ландау (разд. 2.7) неизбежно приобретает громоздкий вид и достаточно сильно математизировано. В различных учебниках и текущей литературе рассмотрено большое количество разных подходов к этому важному вопросу. Они изложены в разном стиле и способны удовлетворить всем вкусам. Для более полного ознакомления с этим предметом мы рекомендуем читателю обратиться к любому современному учебнику по физике плазмы. Чен [52] дает обсуждение этого вопроса с физической точки зрения и приводит ссылки на соответствующие классические работы. Более формальный математический подход имеется в книге Монтгомери и Тидмана [203], а подробное обсуждение можно найти в книге Руса [247].

Другим вопросом, который опять-таки требует широкого обсуждения, является вопрос о различии между конвективной и абсолютной неустойчивостями и об установлении критерия для определения

по виду дисперсионного уравнения, к какому типу относится данная неустойчивость. В разд. 2.6 и 2.7 мы выделили два типа неустойчивости. Эти неустойчивости можно рассматривать только в неограниченной среде, при конвективной неустойчивости возмущения распространяются и нарастают во времени, хотя в любой фиксированной точке среды они в конце концов исчезают. С другой стороны, при абсолютной неустойчивости возмущения непрерывно нарастают в любой точке среды. Такое поведение четко описал Стэррок в уже упоминавшейся нами статье [289]. Правила определения типа неустойчивости, исходя из соображений причинности с использованием методов преобразования Фурье – Лапласа впервые четко изложил Бриггс [37]. С тех пор по этому вопросу было написано много работ, и он рассмотрен в различных учебниках, таких, как [59, 271]. В частности, в обширном обзоре, выполненном Ронлином и Селфом [245], изучается влияние конечной геометрии границ и имеется полный список литературы, посвященной данной теме. Мейникам и др. [193] описали типичные случаи применения этих критериев к решению практических задач.

С концепцией волн с положительной и отрицательной энергиями, развитой в разд. 2.5, мы вновь встретимся в § 3 и 4. Этот вопрос обсуждается в книге [279].

§ 3. Продольные волны в пучках с конечным поперечным сечением

3.1. Введение. В § 2 настоящей главы были описаны в общих чертах некоторые из волновых явлений, которые имеют место в неограниченной как стационарной, так и дрейфующей плазме с нулевой и конечной температурой. Основное внимание мы уделили исследованию не поперечных, а продольных волн, в которых электрическое поле параллельно направлению распространения. Это связано с тем, что при переходе к пучкам конечных размеров связь между поперечными типами волн в интересующих нас двух случаях является довольно слабой, в то время как для продольных волн она выражена более четко.

В разд. 2.6 обсуждалось взаимодействие волн в различных плазменных потоках. В данном разделе мы изучим также взаимодействие волн, распространяющихся в пучке, со структурой окружающих стенок. Эта тема имеет непосредственное отношение к некоторым типам ламп СВЧ и неустойчивостям в ускорителях частиц.

Здесь мы ограничимся изучением только продольных волн. Поперечные волны, в которых частицы движутся перпендикулярно направлению распространения пучка, мы рассмотрим в § 4. Приступим теперь к анализу волн в пучках, окруженных цилиндрической камерой с проводящими стенками.

3.2. Продольные волны в цилиндрическом пучке, окруженном проводящими стенками. Пучок простейшей конфигурации представляет собой цилиндрический столб движущихся зарядов в свободном пространстве. Предположим, что пучок удерживается сильным магнитным полем, не позволяющим ему рассыпаться в поперечном направлении (разд. 2.5 гл. 4). Кроме того, чтобы рассматриваемая конфигурация более соответствовала реальной действительности, будем считать, что пучок, радиус которого равен a , окружен проводящим цилиндром радиусом b . Как видно из обсуждений, проведенных в § 2 гл. 3 и в § 2 настоящей главы, между осью и внешней границей пучка очень большой интенсивности существует большая разность потенциалов. При этих условиях предположение об однородном распределении скоростей частиц по сечению пучка не соответствует действительности. Можно также предположить, что заряд пучка нейтрализован тяжелыми неподвижными положительно заряженными ионами, поскольку это не влияет на переменные во времени составляющие поля.

Попытаемся теперь получить дисперсионное уравнение для продольных волн, соответствующее определенной выше системе. Это можно сделать тем же методом, что и в предыдущем разделе, с той лишь разницей, что вариации поля в поперечном направлении и необходимость их согласования на границах усложняют алгебраические преобразования. Такой метод получения дисперсионного уравнения можно найти, например, в оригинальных статьях Хана [113] и Рамо [237], а также в монографии Бека [13].

Здесь мы проиллюстрируем несколько более компактный подход, воспользовавшись уравнением Власова, рассмотренным в конце предыдущей главы, для стационарного случая. Рассмотрим проблему, когда на фоне стационарного движения, характеристики которого предполагаются известными, имеются небольшие гармонически меняющиеся во времени возмущения. Эти два примера иллюстрируют два важных применения уравнения Власова, а именно при отыскании возможных равновесных состояний и при исследовании меняющихся во времени возмущений таких равновесных состояний.

Поскольку подход с использованием уравнения Власова включает в себя естественным образом функцию распределения частиц по скоростям, или, точнее, по импульсам, мы будем с самого начала рассматривать непрерывные распределения. При условиях, соответствующих нашей настоящей задаче, когда движение электронов ограничено сильным магнитным полем, так что они могут двигаться только в направлении оси z , уравнение Власова (4.133) можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\beta c \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{qE_z}{m_0 c} \frac{\partial f}{\partial(\beta\gamma)}, \quad (6.57)$$

где $p = \beta \gamma m_0 c$, а f — функция от $\beta \gamma$, но не от p . Функцию распределения представим в виде $f_0 + \tilde{f}$, где $\int f_0 d(\beta \gamma) = n$ — плотность частиц. [Это уравнение отличается от уравнения (4.133) тем, что в нем во втором члене вместо скорости стоит импульс и $B_{\perp} = 0$.] При подстановке f в уравнение (6.57) стационарные члены, пропорциональные f_0 , исчезают (поскольку они являются решением уравнения при $\partial f_0 / \partial t = 0$). Таким образом, мы имеем

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -\beta c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} - \frac{q \tilde{E}_z}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial (\beta \gamma)}. \quad (6.58)$$

Подставляя сюда $\tilde{E} = E \exp j(\omega t - kz)$ и интегрируя уравнение (6.58) по времени t , получаем (опуская индекс в E)

$$\tilde{f} = \frac{j q}{m_0 c} \frac{\partial f_0}{\partial (\beta \gamma)} \frac{\tilde{E}}{\omega - \beta c k}. \quad (6.59)$$

Умножая это выражение на q и интегрируя его по $\beta \gamma$, плотность заряда можно записать через \tilde{E} . Подставив это выражение в уравнения Максвелла и исключив \tilde{E} , получим требуемое дисперсионное уравнение. Уравнение для \tilde{E} можно найти, если исключить \tilde{B} из двух уравнений Максвелла:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \nabla_{\perp}^2 \mu_0 q c \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{n} \tilde{B}). \quad (6.60)$$

(Это скалярное уравнение для z -составляющей вектора напряженности электрического поля E . Частицы движутся в z -направлении со скоростью βc .) Подставляя далее в уравнение (6.60) соотношение

$$\tilde{n} = \int \tilde{f} d(\beta \gamma), \quad (6.61)$$

это уравнение для гармонических волн можно записать в виде

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \int \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f} d(\beta \gamma) + q \mu_0 c \int \beta \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f} d(\beta \gamma). \quad (6.62)$$

Здесь через ∇_{\perp}^2 обозначена поперечная часть оператора Лапласа, а через k_z — z -составляющая волнового вектора. Заменяя \tilde{f} выражением (6.59) и используя тот факт, что $d(\beta \gamma) = \gamma^3 d\beta$, уравнение (6.62) можно переписать следующим образом:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E} = \frac{-q^2 \tilde{E}}{\epsilon_0 m_0 c^2} \int \frac{c k_z - \omega \beta}{\omega - \beta c k_z} \frac{\partial f_0}{\partial \beta} d\beta. \quad (6.63)$$

Интеграл в правой части уравнения можно взять по частям. Первый

член равен нулю, поскольку f_0 обращается в нуль на границах интервала интегрирования -1 и $+1$. После сокращения обеих частей уравнения на \tilde{E} получаем

$$\begin{aligned} \left(\nabla_1^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) &= \frac{-q^2}{\epsilon_0 m_0 \sigma^2} \int \left\{ f_0 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sigma k_z - \omega \beta}{\omega - \beta \sigma k_z} \right) \right\} d\beta = \\ &= \frac{q^2}{\gamma^3 \epsilon_0 m_0} \left(\frac{\omega^2}{\sigma^2} - k_z^2 \right) \int \frac{f_0 d(\beta \gamma)}{(\omega - \beta \sigma k_z)^2}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Вводя величину γ_w , это уравнение можно записать в виде

$$\nabla_1^2 = - \frac{k^2}{\gamma_w^2} \left(1 - \frac{q^2}{\gamma^3 m_0 \epsilon_0} \int \frac{f_0(\beta \gamma) d(\beta \gamma)}{(\omega - \beta \sigma k)^2} \right), \quad (6.65a)$$

или

$$\nabla_1^2 = - \frac{k^2}{\gamma_w^2} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\gamma^3 m_0 \epsilon_0 \sigma k} \int \frac{\partial f_0(\beta \gamma)}{\partial \beta} \frac{d(\beta \gamma)}{(\omega - \beta \sigma k)} \right\} \quad (6.65b)$$

(в этих уравнениях мы опустили индекс при k). Важную роль играет так называемое "квазистатическое приближение", которое получается, если положить $\gamma_w = 1$. Такое условие означает, что фазовая скорость волны много меньше скорости света. Это эквивалентно предположению о бесконечности скорости света или выполнению условия $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. При этом электрическое поле подчиняется уравнению Пуассона (или его обобщению на случай, когда диэлектрическая проницаемость является тензорной величиной). Возвращаясь назад к уравнению (6.60), левая часть которого в этом приближении становится равной $\nabla^2 \mathbf{E}$, и продолжая выкладки дальше, нетрудно убедиться, что это предположение эквивалентно требованию $\gamma_w = 1$ в уравнении (6.65). Квазистатическое приближение не следует путать с нерелятивистским приближением, в котором предполагается, что по сравнению со скоростью света скорость частиц мала.

Рассмотрим теперь снова уравнение (6.65). Чтобы получить дисперсионное уравнение для системы, имеющей конечные поперечные размеры, необходимо определить ∇_1^2 в зависимости от геометрии. Для этого найдем значения k_r , которые удовлетворяют уравнению

$$(\nabla_1^2 + k_r^2) \mathbf{E}, \mathbf{H} = 0 \quad (6.66)$$

для пучка радиусом a в цилиндрической системе координат. Более удобно сделать это в терминах импеданса пучка Z_a , вычисленного при $Z = a$. В случае когда проводящая стенка совпадает с границей пучка, $r_a = 0$. Если же радиус цилиндрической камеры $r = b$, то ее

импеданс должен быть преобразован с учетом пространства между стенкой и пучком. Это пространство можно рассматривать как "радиальную передающую линию".

При решении уравнения (6.66) получается двойной бесконечный ряд мод, каждая из которых характеризуется собственными азимутальными и радиальными номерами. Хотя для изучения волн в плазменном столбе все эти моды играют важную роль, для *продольных* волн в пучке представляет общий интерес только низшая радиальная мода. Прежде чем записать общее решение, детальный вид которого приведен ниже, рассмотрим только решение, описывающее низшую аксиально-симметричную моду, поля которой монотонно изменяются от центра к стенке. Поля можно записать через импеданс свободного пространства Z_0 и γ_w следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 J_0(k_r r), \\ E_r &= -j \frac{k_r}{k_z} \gamma_w^2 E_0 J_1(k_r r), \\ Z_0 H_\theta &= -j \frac{\omega k_r}{c k_z^2} \gamma_w^2 E_0 J_1(k_r r). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Вычисляя отношение $-E_z/H_\theta$, можно рассчитать импеданс на границе пучка $r = a$:

$$Z_a = - \frac{j c k_z^2 Z_0 J_0(k_r a)}{\gamma_w^2 \omega k_r J_1(k_r a)} = - \frac{j k_z}{k_r} \frac{Z_0 J_0(k_r a)}{\beta_w \gamma_w^2 J_1(k_r a)}. \quad (6.68)$$

В случае когда стенка камеры совпадает с границей пучка, т.е. $r = a$, $Z_a = 0$ и k_r определяется первым корнем уравнения $J_0(k_r a) = 0$, откуда находим $k_r = 2,405/a$.

В случае же когда $b > a$, импеданс Z_a надо согласовать с импедансом стенки, преобразованном от $r = b$ к $r = a$. Формула такого преобразования в радиальной передающей линии получена Бердсомом и Уиннери [22]. Если импеданс стенки равен Z_b , а величина

$$Z_l = \frac{-j k_z}{\omega \epsilon_0 \gamma_w} = \frac{-j Z_0}{\beta_w \gamma_w} \quad (6.69)$$

представляет собой характеристический импеданс радиальной передающей линии, то можно записать следующее соотношение:

$$\frac{Z_a}{Z_l} = \frac{b \operatorname{ch} kx}{b \operatorname{ch} kx} \left(\frac{Z_b + Z_l}{Z_l + Z_b} \frac{B \operatorname{th} kx}{b \operatorname{th} kx} \right), \quad (6.70)$$

где $x = (b-a)/\gamma_w$, а "гиперболические функции Бесселя" определяются следующим образом (для краткости величины ka/γ_w и kb/γ_w обозначим соответственно через A и B):

$$\begin{aligned} \text{bth } kx &= \frac{K_1(A)I_1(B) - I_1(A)K_1(B)}{K_1(A)I_0(B) + K_0(A)I_1(B)}, \\ \text{Bth } kx &= \frac{K_0(A)I_0(B) - I_0(A)K_0(B)}{K_0(A)I_1(B) + I_0(A)K_1(B)}, \\ \frac{\text{Vch } kx}{\text{bch } kx} &= \frac{K_1(A)I_0(B) + I_1(A)K_0(B)}{K_0(A)I_1(B) + I_0(A)K_1(B)}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Исключив Z_a из выражений (6.68) и (6.70), получим уравнение для k_r , которое называется "характеристическим". Для стенки, обладающей бесконечной проводимостью, имеем $Z_b = 0$, и уравнение принимает более простой вид:

$$-\frac{\gamma_w k_r J_1(k_r a)}{k_r J_0(k_r a)} = \frac{I_1(ka/\gamma_w)K_0(kb/\gamma_w) + I_0(kb/\gamma_w)K_1(ka/\gamma_w)}{I_0(ka/\gamma_w)K_0(kb/\gamma_w) - I_0(kb/\gamma_w)K_0(ka/\gamma_w)} \quad (6.72)$$

(здесь индекс при k_z опущен). В соответствии с уравнением (6.66) имеем $k_r^2 = -\nabla_1^2$, так что величину k_r^2 можно исключить из уравнения (6.65) и характеристического уравнения. В результате получим полное дисперсионное уравнение. В общем случае проделать эту операцию очень сложно, хотя в квазистатическом приближении $\gamma_w = 1$, очевидно, такая процедура должна существенно упроститься.

Даже в квазистатическом приближении это уравнение имеет довольно громоздкий вид. Соответствующие выражения для стенок более сложной формы или конечных значений B_z еще больше запутаны. В последующих разделах нас будут интересовать главным образом физические эффекты, а не математические подробности, поэтому вместо исследования наиболее общего случая мы уделим основное внимание рассмотрению различных предельных случаев, для которых возможны какие-либо упрощения.

Полезное приближение, которым можно воспользоваться при исследовании неустойчивостей в ускорителях частиц, основано на предположении о том, что длина волны в пучке значительно превосходит величину отношения диаметра камеры к γ_w . В этом случае в уравнении (6.72) функции Бесселя можно заменить их асимптотическими разложениями. Такое приближение особенно полезно, как мы уви-

дим ниже, когда стенки камеры не гладкие и не обладают бесконечной проводимостью, так что $Z_b \neq 0$. Иногда это приближение называют приближением "тонкого пучка". Другое приближение, полезное при исследовании ультрарелятивистских пучков, для которых в системе координат, где пучок покоится, величина β_w мала, основано на условии $\gamma_w = \gamma$.

В нескольких следующих разделах мы рассмотрим некоторые специальные случаи, представляющие познавательный или практический интерес.

3.3. Цилиндрический пучок, полностью заполняющий камеру с проводящими стенками, в присутствии ионов. Если пучок полностью заполняет цилиндрическую проводящую камеру, т.е. $a = b$, то дисперсионное уравнение имеет гораздо более простой вид, чем в общем случае, когда $b > a$. Тем не менее основные физические свойства не изменяются. Поэтому мы рассмотрим более простой случай. При $a = b$ уравнение (6.68) принимает вид

$$J_0(k_r a) = 0. \quad (6.73)$$

Следовательно, чтобы получить дисперсионное уравнение в случае $a = b$, нужно только величину $k_{r,a}$ положить равной соответствующему корню уравнения $J_0(x) = 0$. Таким образом, для низшей моды, когда $J_0(2,4) = 0$ уравнение (6.65) можно записать в виде

$$k_z^2 = \left(\frac{2,4}{a}\right)^2 = -\frac{k_z^2}{\gamma_w^2} \left(1 - \frac{q^2}{\gamma^3 m_0^2 \epsilon_0} \int \frac{f_0(\beta\gamma) d(\beta\gamma)}{(\omega - \beta ck)^2}\right) = 0. \quad (6.74)$$

Для того чтобы получить вначале простейшие характеристики волн, описываемых этим уравнением, заменим непрерывное распределение скоростей δ -функцией. Тогда имеем

$$T^2 = -\frac{k_z^2}{\gamma_w^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - \beta ck)^2}\right]; \quad (6.75)$$

здесь через T обозначена величина $2,4/a$, т.е. значение k_z , которое удовлетворяет характеристическому уравнению. Уравнение (6.75) можно переписать следующим образом:

$$1 = \frac{\omega_q^2}{\gamma^2 (\omega - \beta ck)^2}; \quad (6.76)$$

здесь (вводя снова индекс при k_z)

$$\frac{\omega_q}{\omega_p} = \frac{k}{(k_z^2 + \gamma_w^2 T^2)^{1/2}}. \quad (6.77)$$

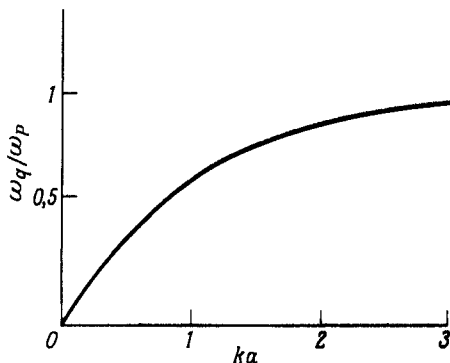


Рис. 6.5. Зависимость коэффициента редукции плазменной частоты ω_q/ω_p от ka .

Точная форма кривой определяется геометрией системы; кривые, построенные с высокой степенью точности для цилиндрической геометрии, приведены, например, в работе [32].

Эта величина называется "коэффициентом редукции плазменной частоты" F . Во многих используемых на практике устройствах, в которых фазовая скорость волны много меньше, чем скорость света, можно использовать квазистатическое приближение. При этом $\gamma_w = 1$, а величина $F = \omega_q/\omega_p$ зависит только от k и геометрии системы и не зависит от ω . На рис. 6.5 показана зависимость величины ω_q/ω_p от ka , вычисленная в этом приближении. При небольших значениях ka , т.е. когда длина волны велика по сравнению с диаметром камеры, F мало. С физической точки зрения это можно объяснить тем, что силовые линии электрического поля "закорачиваются" на стенках камеры, и это приводит к значительному уменьшению влияния поля в z -направлении (рис. 6.6). Однако, по мере того как величина ka становится все больше и больше, длина волны плазменных колебаний в конце концов оказывается пренебрежимо малой по сравнению с диаметром камеры, и F стремится к единице. В более сложных структурах, в которых $b \neq a$ или когда пучок является внутри полым, коэффициент $2,4/a$ заменяется более сложной функцией величин b и a , определяемых корнями k_c характеристического уравнения [уравнение (6.72)] или его аналога для других геометрий.

На рис. 6.7 приведена дисперсионная кривая, соответствующая уравнению (6.75). Она имеет квадратичную зависимость с двумя ветвями. Одна из них соответствует асимптотически двум волнам свободного пространства, распространяющимся в пустом волноводе, а другая — волнам в пучке. При $ka \gg \gamma_w$ влияние стенок является не очень заметным. Наиболее сильно характер зависимостей меняется

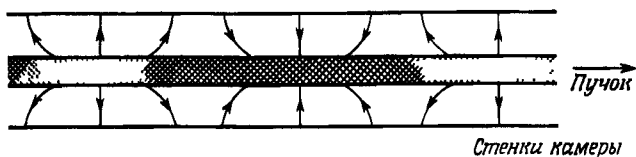


Рис. 6.6. Схематическое представление силовых линий поля, создаваемого сгруппированным пучком, распространяющимся в трубе с проводящими стенками.

Темные и светлые полосы соответствуют областям с высокой и низкой плотностью заряда. "Закорачивающее" действие стенок приводит к уменьшению частоты до значения, меньшего, чем ω_0 , которое имеет плазменная частота.

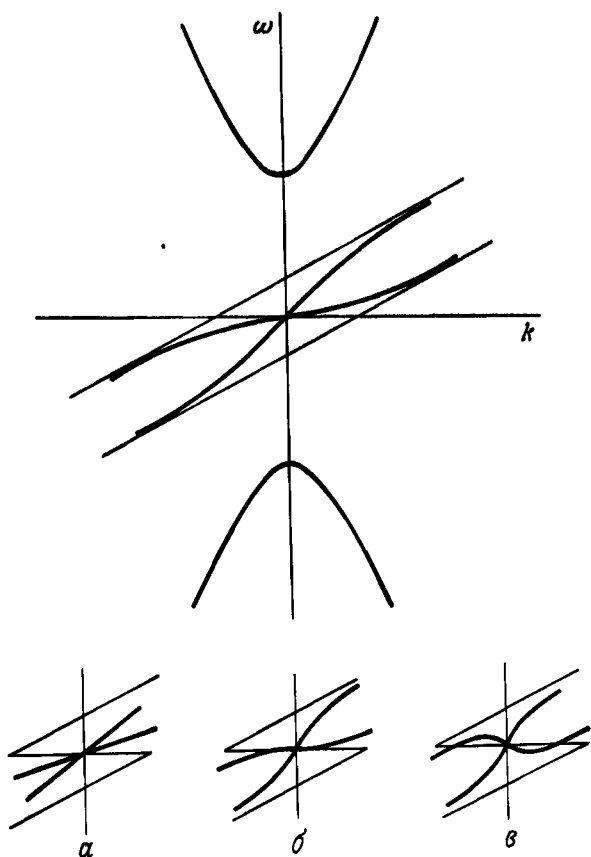


Рис. 6.7. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в цилиндрическом пучке, находящемся в камере с проводящими стенками.

Три нижних рисунка *a* - *в* показывают, как меняются условия распространения волн вблизи начала координат по мере того, как растет частота ω_p . Рисунок *б* иллюстрирует случай критического перегиба, когда групповая скорость медленной волны меняет знак.

вблизи начала системы координат. Групповая скорость $d\omega/dk$ перестает быть равной скорости пучка, а фазовая скорость при нулевой частоте не равна бесконечности. Действительно, в нейтрализованном пучке с большой плотностью заряда знак групповой скорости вблизи точки $\omega=0, k=0$ может измениться на противоположный, и при малых значениях ω и k возникают две моды, распространяющиеся в обратном направлении (см. рис. 6.7). Интересно заметить, что вблизи начала координат одна из них имеет отрицательную как групповую, так и фазовую скорость. Поток энергии в обратном направлении, связанный с полем волны, превосходит поток энергии, переносимый частицами в прямом направлении. Хотя частота этой волны действительная, в системе с конечными размерами за счет отражения от концов может возникнуть связь между прямой и обратной волнами, в результате чего в ней может развиваться неустойчивость.

Найдем теперь условия, при которых эта волна ведет себя так, как показано на рис. 6.7, б, т.е. в начале координат она имеет $d\omega/dk=0$. В интересующей нас области (вблизи начала координат) ω/k , несомненно, значительно меньше скорости света c , так что $\gamma_w=1$, и уравнение (6.75) можно переписать (опуская индексы в k) в виде

$$\frac{\omega_p^2}{\gamma^2(\omega - \beta ck)^2} = 1 + \frac{T^2}{k^2}. \quad (6.78)$$

После перегруппировки членов получаем

$$\omega = \beta ck \pm \frac{\omega_p k}{\gamma(k^2 + T^2)^{1/2}}, \quad (6.79)$$

откуда

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \beta c \mp \frac{\omega_p T^2}{\gamma(k^2 + T^2)^{3/2}}. \quad (6.80)$$

Полагая $d\omega/dk=0$ при $k=0$ и $Ta=2,4$, получаем окончательный результат. Его можно записать по-разному, а именно через плазменную частоту, параметр Будкера или ток и напряжение, которые даются следующими выражениями:

$$\beta c = \omega_p a / 2,4 \gamma, \quad (6.81a)$$

$$v = \frac{1}{2}(2,4)^2 \beta^2 \gamma^3, \quad (6.81b)$$

$$I/V^{3/2} = 190 \cdot 10^{-6} \text{ AB}^{-3/2} \text{ (HP)}. \quad (6.81v)$$

Это условие впервые было получено Пирсом [226] как предельный ток для существования устойчивого пучка в присутствии стационарного ионного фона, в виде выражения (6.81). Пирс указал на то, что в этом случае ток пучка в несколько раз превышает предельный ток, ограниченный собственным пространственным зарядом в заряженном пучке [выражение (3.13)] .

Если массу ионов нельзя считать бесконечно большой, то система неустойчива и при конечных размерах в ней развивается двухпоточковая неустойчивость. В этом случае в левую часть дисперсионного уравнения (6.78) входит дополнительный член ω_{pi}^2 / ω^2 . Нетрудно показать, что в правой части условия (6.81) для однократно заряженных ионов он дает множитель $[1 + (m_e/m_i)^{1/3}]^{3/2}$. Одновременно этот множитель служит и критерием возбуждения неустойчивости. При стремлении m_i к бесконечности время нарастания увеличивается и в пределе система переходит в устойчивое состояние, в котором ионы предполагаются стационарными [37]. Очевидно, что в случае, когда $b > a$, вычисления значительно усложняются. В приближении тонкого пучка ($kb \ll \gamma_w$) функции Бесселя малого аргумента можно аппроксимировать выражениями .

$$\begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{1}{4}z^2, & J_1(z) &= \frac{1}{2}z(1 - \frac{1}{4}z^2), \\ I_0(z) &= 1 + \frac{1}{4}z^2, & I_1(z) &= \frac{1}{2}z(1 + \frac{1}{4}z^2), \\ K_0(z) &= (-\gamma + \ln \frac{1}{2}z), & K_1(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}z(\ln \frac{1}{2}z + \gamma), \end{aligned}$$

где $\gamma \approx 0,577$ — постоянная Эйлера, которую обычно обозначают как γ . Подстановка этих выражений в уравнение (6.60) дает

$$\tau a = \{2 \ln(b/a) + \frac{1}{2}\}^{-1/2}. \quad (6.82)$$

Это выражение можно подставить в формулу (6.77) и таким образом найти соответствующее значение предельного первеанса.

Случай, проанализированный в этом разделе, представляет отчасти академический интерес в том смысле, что предположения о бесконечности магнитного поля и полной неподвижности ионов являются абстракциями, не реализуемыми на практике. Тем не менее практический вопрос об устойчивости нейтрализованных электронных пучков в камерах с проводящими стенками исследован с достаточной полнотой как теоретически, так и экспериментально. Возможность возникновения нелинейных затухающих колебаний, связанных с временем формирования ионов, значительно усложняет ситуацию, однако основные свойства поведения, предсказанные теоретически, довольно хорошо подтверждаются экспериментами.

Теоретическим и экспериментальным работам по этой теме посвящен обзор, выполненный Богданкевич и Рухадзе [27], в котором имеются ссылки на ранее опубликованные работы. В статье Фрея и Бердсолла [91], относящейся к данной теме, но не включенной в упомянутый выше обзор, описаны результаты экспериментов и дан их общий теоретический анализ; некоторые замечания, касающиеся содержания последней статьи, изложены в работе Фолкнера и Уэ [82].

3.4. Цилиндрические системы с произвольным импедансом стенок и с положительной и отрицательной массами.

Во многих применяемых на практике устройствах, включая приборы СВЧ и ускорители частиц, пучки находятся в камерах, импеданс стенок которых отличен от нуля. Импеданс гладких стенок, толщина которых больше, чем глубина скин-слоя, можно выразить через проводимость σ . Если проводимость стенки велика, то

$$Z_b = (1+j) \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2} Z_0. \quad (6.83)$$

Не менее важный интерес представляют также проводящие стенки, имеющие периодическую структуру. В некоторых случаях импеданс таких стенок можно вычислить достаточно просто. Например, если стенка имеет вид гофра, период модуляции которого много меньше, чем длина волны, то в зависимости от глубины модуляции импеданс будет либо индуктивным, либо емкостным. Однако в общем случае невозможно так просто описать периодическую структуру; структура мод становится очень сложной. Рассмотрим вначале структуру, импеданс стенки которых равен Z_b . Поскольку Z_b зависит от частоты, дисперсионное уравнение, описывающее полную систему, должно учитывать дисперсионные свойства стенки. Воспользуемся приближением тонкого пучка, т.е. будем считать, что $kb \ll \gamma_w$.

При $r = a$ импеданс Z_a можно определить из асимптотического вида правой части выражения (6.70). Используя приведенные в предыдущем разделе выражения для функций Бесселя при малых значениях аргументов, имеем

$$Z_a = \frac{a}{b} Z_l \frac{Z_b + Z_l \{kb \ln(b/a)\} / \gamma_w}{Z_l + \frac{1}{2} Z_b k (b+a^2/b) / \gamma_w}. \quad (6.84)$$

Поскольку $kb \ll \gamma_w$, вторым членом в знаменателе можно пренебречь, даже если Z_b не мало по сравнению с Z_0 , что часто встречается на практике. Пренебрегая в (6.84) этим членом и подставляя для Z_l его выражение из (6.69), выражение (6.84) можно свести к более простому виду:

$$Z_a = \frac{a}{b} Z_b - \frac{jkaZ_0 \ln(b/a)}{R_w \gamma_w^2}. \quad (6.85)$$

Приравнивая это выражение к величине Z_0 , даваемой формулой (6.68), получаем характеристическое уравнение. Используя разложение функций Бесселя для малого аргумента, можно записать следующее уравнение:

$$1 = \frac{a^2}{b} \frac{\beta_w \gamma_w^2}{2k} \left\{ \frac{jz_b}{z_0} + \frac{kb}{\beta_w \gamma_w^2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) \right\} k_r^2. \quad (6.86)$$

Подставляя в уравнения (6.65) вместо ∇_{\perp}^2 величину $-k_r^2$, получаем искомое дисперсионное уравнение. Исследуем теперь это уравнение для ряда конкретных систем.

Наиболее простым является случай, когда $Z_b = 0$, а $f(\beta\gamma)$ представляет собой δ -функцию. При этом дисперсионное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) k_r^2 = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{k^2}{\gamma_w^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - \beta ck)^2} \right). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Его можно также переписать следующим образом:

$$1 = \frac{\omega_q^2}{\gamma^2 (\omega - \beta ck)^2}; \quad (6.88)$$

здесь ω_q/ω_p - коэффициент редукции плазменной частоты, который определяется выражением

$$\frac{\omega_q^2}{\omega_p^2} = \frac{k^2 a^2}{2\gamma_w^2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right). \quad (6.89)$$

Записывая следующее выражение:

$$\frac{\gamma_w^2 \omega_q^2}{k^2 \omega_p^2} = \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right) = L_0^2, \quad (6.90)$$

где L_0 - характерный размер, зависящий от геометрии, и полагая $\beta_w = \omega/ck$, вместо дисперсионного уравнения (6.88) можно написать следующее:

$$\omega - \beta ck = \pm \frac{L_0 k \omega_p}{\gamma \gamma_w}. \quad (6.91)$$

Это уравнение соответствует двум дисперсионным кривым, имеющим

вид прямых линий, которые проходят через начало координат:

$$\omega = \left(\beta c \pm \frac{L_0 \omega_p}{\gamma \gamma_w} \right) k. \quad (6.92)$$

В начале координат эти линии являются касательными к дисперсионным кривым, приведенным на рис. 6.8. Для медленной волны условие критического тока, когда $\partial \omega / \partial k = 0$, рассмотренное в предыдущем разделе, достигается, если величина, стоящая в (6.9) в скобках равна нулю. При полном заполнении камеры пучком имеем $L_0 = a/2,4$.

Если импеданс стенки камеры отличен от нуля, то, проводя преобразования, аналогичные тем, что были сделаны при выводе уравнения (6.92), можно показать, что L_0 надо заменить комплексной величиной

$$L_1 = \left\{ \frac{a^2}{2} \left(\ln \frac{b}{a} + 1 \right) + \frac{j \beta_w \gamma_w^2 \alpha^2 Z_b}{2kb} \frac{Z_b}{Z_0} \right\}^{1/2}. \quad (6.93)$$

В случае когда стенка характеризуется высокой проводимостью, Z_b определяется выражением (6.83). В выражении для L_1 действительная часть второго члена мала по сравнению с первым членом, и, следовательно, мы ее можем опустить. В результате получаем

$$L_1 \approx L_0 \left\{ 1 + \frac{j \beta_w \gamma_w^2 \alpha^2}{4kbL_0^2} \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2} \right\}. \quad (6.94)$$

При этом дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega = \left(\beta c \pm \frac{L_0 \omega_p}{\gamma \gamma_w} \right) k \pm \frac{j \beta_w \gamma_w \alpha^2 \omega_p}{4bL_0 \gamma} \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2}. \quad (6.95)$$

Отсюда мы видим, что для действительных значений k частота ω является комплексной, и наоборот. Верхний знак соответствует затухающей быстрой волне, а нижний — нарастающей медленной волне. На рис. 6.8 показаны действительная и мнимая части величины ω , полученные для действительных значений k , и наоборот.

Если импеданс Z_b чисто емкостной, то это приводит к увеличению L_0^2 . С другой стороны, если импеданс Z_b индуктивный, то L_0^2 уменьшается. В самом деле, при достаточно большом значении Z_b в правой части уравнения (6.93) второй член значительно превосходит первый, и L_1 становится чисто мнимой величиной. (Это значит, что в данном случае при $r = a$ импеданс становится индуктивным.) Ветви, соответствующие быстрой и медленной волнам, сливаются в одну, а фазовая скорость обеих волн становится равной скорости пучка. При этом происходит увеличение глубины мо-

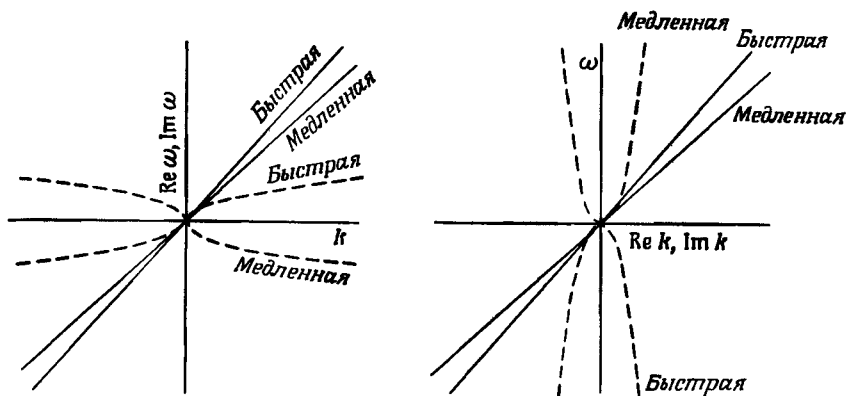


Рис. 6.8. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в пучке, находящемся в цилиндрической камере с конечной проводимостью стенок, в случае, когда $L_0 \omega_p / \gamma \ll \beta$ [уравнение (6.95)] и $kb \ll \gamma_w$.

Импеданс стенок мал, так что сдвигом действительной части частоты, обусловленным мнимой частью импеданса, можно пренебречь. На первой диаграмме показаны зависимости действительной (сплошные линии) и мнимой (штриховые линии) частей ω при действительных значениях k , а на второй — действительной и мнимой частей k при действительных значениях ω . Мнимые части, соответствующие быстрой волне, дают затухание, а соответствующие медленной волне, — нарастание.

дуляции огибающей пучка, которая перемещается со скоростью пучка. На этом принципе основана работа "изитрона" [230]. Такое же физическое явление наблюдается в условиях существования "отрицательной массы" при нулевом импедансе стенок. В разд. 7.4 гл. 2 было показано, что если энергия частиц в циклическом ускорителе больше, чем критическая энергия, т.е. $\gamma = \gamma_c$, то эффективная масса

$$m^* = \frac{\gamma_0^m}{(1/\gamma^2) - \alpha} = \frac{\gamma_0^m}{(1/\gamma^2) - (1/\gamma_c^2)} \quad (2.148)$$

становится отрицательной. В бетатронном поле с показателем $1 > n > 0$ мы имеем $\gamma_c^2 = 1/(1-n)$, и масса m^* в любом случае является отрицательной. В бетатроне пучок не удерживается продольным магнитным полем так, как мы предполагали, но тем не менее занимает четко определенную область, и в частном случае $n = 1/\sqrt{2}$ фокусирующие силы, действующие на частицы в вертикальной и горизонтальной плоскостях, становятся одинаковыми, так что вполне реально рассмотреть случай, когда пучок радиусом a распространяется в камере радиусом b . При этих условиях уравнение (6.79) остается справедливым, за исключением того, что теперь ω_p^2 надо заменить

отрицательной величиной $\omega^2 m_0 / m^*$. Следовательно, в данном случае модуляция пучка опять-таки ^pбудет увеличиваться со временем¹⁾.

Вернемся к распространению пучка в камере с конечным импедансом стенок. В применении к ускорителям эта задача рассматривалась Нейлом и Сесслером [213]²⁾. Очевидно, что в этом случае существуют два отличия.

Во-первых, геометрия в виде замкнутой орбиты допускает существование лишь квантованных значений k так что результаты удобнее выражать не через kz , а через $n\theta$, где n — азимутальный номер моды. Второе, очень незначительное отличие возникает из-за несколько других предположений, использованных при выводе уравнения. Оно сводится к замене коэффициента $\ln(b/a) + 1/4$ на $\ln(b/a) + 1/2$. Несколько отличаются также свойства пучков, поскольку в фокусирующей системе ускорителей не используется удержание пучка продольным полем B_z . Частицы совершают бетатронные колебания и поэтому не остаются внутри пучка на одном и том же радиусе, а все время перемещаются по сечению.

Можно показать, что таким же образом, как индуктивный импеданс при $r = a$ приводит к неустойчивости пучка с положительной массой, он приводит к стабилизации пучка с отрицательной массой, в то время как емкостной импеданс делает его еще более неустойчивым. Этот факт отмечен Бриггсом и Нейлом [42]. В табл. 6.1 перечислены характеристики пучка, полученные в данном разделе. В режиме отрицательной массы амплитуда медленной волны, обладающей положительной энергией, затухает, а быстрой — нарастает.

В данном разделе мы всюду использовали условие $kb \ll \gamma_w$. В статье [22] приведены результаты численного расчета соответствующих комплексных функций в более общем (но все же нерелятивистском) случае. В следующем разделе мы рассмотрим непрерывные распределения скоростей частиц и роль затухания Ландау в стабилизации движения пучков в ситуациях, отмеченных в табл. 6.1 как неустойчивые.

¹⁾ Неустойчивость отрицательной массы (НОМ) играет важную роль в ускорителях, накопителях, электронных релятивистских кольцах, а также в некоторых типах плазменных термоядерных ловушек. Эффекту НОМ посвящено много работ. Впервые он был обнаружен и исследован в следующих работах: 1) А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. — Атомная энергия, 1959, т. 7, с. 549. (См. также Proc. Intern. Confer. on High Energy Accel., CERN (1959), p. 115); 2) С.Е. Nielsen, А.М. Sessler, К.Р. Symon, Proc. Inter. Confer. on High Energy Accel., CERN (1959), p. 239. — Прим. ред.

²⁾ Впервые такая задача была рассмотрена в работе А.А. Коломенского (Атомная энергия, 1964, т. 17, с. 57). — Прим. ред.

Таблица 6.1

**ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОДОЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ В ПУЧКЕ
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИМПЕДАНСА СТенок КАМЕРЫ**

Импеданс Z_a	Знак массы	Характер движения
$-jX$ (емкостной)	+	Устойчивый
jX (индуктивный)	+	Неустойчивый
$-jX$	-	Неустойчивый
jX	-	Устойчивый
$\pm jX + R$	+ или -	Неустойчивый

3.5. Замечания по поводу обозначений, принятых в теории ускорителей.

Многие идеи, упомянутые в предыдущем разделе, имеют непосредственное отношение к циклическим ускорителям частиц. Используемый здесь подход к исследованию продольных неустойчивостей изложен в статье Нейла и Сесслера [213]. Позднее эти исследования проводили Кейл и Шнель [142], а также другие авторы. Они несколько переформулировали задачу, введя в нее измеряемые импедансы элементов вакуумной камеры.

Аналогичные явления, разумеется, наблюдаются и в лампах СВЧ, однако их лучше всего изучать с помощью теории связанных мод (разд. 3.7 настоящей главы). В данном разделе мы для удобства введем параметры, которые обычно используются в теории ускорителей, и поставим их в соответствие с обозначениями, принятыми в предыдущем разделе. Вместо величин z и $\beta v m_0 c$ введем канонические переменные θ и W . Для частиц, движущихся по круговой орбите, $W = 2\pi(P_\theta - P_0)$, где P_0 - канонический момент импульса частицы, движущейся по равновесной орбите. Если орбита отличается от правильной окружности, то можно использовать более общее определение: $W = m_0 c^2 \int dy / \omega_0$, где ω_0 - частота обращения частицы по равновесной орбите. Пределы интегрирования выбираются таким образом, чтобы на равновесной орбите выполнялось равенство $W = 0$. Комбинации постоянных величин, аналогичных L_0 и L_1 в уравнениях (6.93) и (6.94), представлены двумя параметрами U и V . В самом деле, полный перевод теории Нейла и Сесслера в рамки принятых нами обозначений можно сделать с помощью "словаря", приведенного в табл. 6.2.

Параметры U и V , имеющие размерность энергии, даются следующими выражениями:

$$U = \frac{N_0 q^2 n \{21n(b/a) + 1\}}{2\gamma_w^2 C \epsilon_0}, \quad V = \frac{q^2 N_0 \beta_w}{2\pi \epsilon_0 b} \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2}. \quad (6.96)$$

Таблица 6.2

"СЛОВАРЬ" СООТВЕТСТВИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ,
ПРИНЯТЫХ В ТЕОРИИ УСКОРИТЕЛЕЙ И ИСПОЛЗУЕМЫХ В ДАННОЙ КНИГЕ

Нейл и Сесслер ¹⁾	Обозначения в книге
R	$c/2\pi$
$R\dot{\theta}$	$\beta_w c$
$R\omega_0$	βc
n/R	k
N	$N_0, 2\pi^2 R a^2 n_0$
k_0	$1/2\pi R^2 m^*$
$\eta N q^2 / 2\pi^2 R a^2 \gamma m_0$	$-\omega_p^2 / \gamma$
ϵ	$(\epsilon_0 \omega / 2\sigma)^{1/2}$

¹⁾ Здесь n — азимутальный номер моды; n_0 — плотность частиц.

Так же, как и в выражении (6.85), пренебрежем действительной частью импеданса стенки Z_b . В обозначениях, принятых в теории ускорителей, уравнение (6.78) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega - n\omega_0 &= \pm (nk_0)^{1/2} (U + jV)^{1/2} \approx \\ &\approx \pm (nk_0 U)^{1/2} (1 + \frac{1}{2} jV/U). \end{aligned} \quad (6.97)$$

В последующем мы используем параметры U и V для сравнения с представляющими интерес выводами из различных статей, посвященных ускорителям.

3.6. Цилиндрические системы с непрерывным распределением скоростей и затухание Ландау. В предыдущем разделе было показано, что при определенных условиях на стенке продольные волны в моноэнергетическом пучке являются неустойчивыми. Если частицы пучка имеют некоторый разброс по энергии, то возникает затухание Ландау. В случае, когда оно имеет достаточно большую величину, система стабилизируется. Попытаемся теперь найти условия, при которых осуществляется стабилизация в режимах с положительной и отрицательной массами, когда импеданс Z_b (или V) отличен от нуля.

При произвольном импедансе стенки соответствующее дисперсионное уравнение можно получить непосредственно из уравнения (6.86), подставляя в него $k_r^2 = -\nabla_1^2$ из (6.656) и предполагая, что $kb \ll \gamma_w$:

$$1 = \left\{ \frac{jZb}{Z_0} + \frac{kb}{\beta_w \gamma_w^2} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{q^2 a^2 \beta_w}{2\gamma^3 m_0 \epsilon_0 b c} \int \frac{\partial f_0(\beta\gamma)}{\partial \beta} \frac{d(\beta\gamma)}{(\omega - \beta c k)}; \quad (6.98)$$

здесь, как и прежде, $\int f_0(\beta\gamma) d(\beta\gamma) = n$. В обозначениях, принятых в теории ускорителей, соответствующий интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} 1 &= -(U+jV) \int \frac{\partial F}{\partial W} \frac{dW}{\omega - n\hat{b}} = \\ &= -\frac{U+jV}{nk_0} \int \frac{\partial F}{\partial W} \frac{dW}{W - W_1}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Все входящие сюда величины были определены в предыдущем разделе, за исключением $W_1 = (\omega - n\omega_0)/nk_0$; нормировка $F(W)$ выбирается из условия равенства единице интеграла от W по всей области определения $F(W)$. Не следует путать между собой частоту возмущений, обозначенную через ω , угловую скорость ω_0 частицы, движущейся по равновесной орбите, и угловую скорость волны $\hat{\omega}$.

Дисперсионное уравнение (6.99) имеет удобный вид для обсуждения баланса между тенденцией роста и затуханием Ландау. Мы будем следовать изложению, приведенному в статье [213], в которой задача рассмотрена в применении к циклическим ускорителям, хотя, конечно, аналогичные аргументы можно было бы применить к прямолинейным пучкам, проанализированным выше. В общем случае уравнение (6.99) аналитически решить не удастся. Единственное исключение представляет не отвечающее физической реальности "резонансное" распределение

$$F_0(W) = \frac{\Gamma}{\pi(W^2 + \Gamma^2)}, \quad (6.100)$$

для которого уравнение (6.99) легко интегрируется и дает

$$\omega = n\omega_0 \pm (nk_0 U)^{1/2} \{1 + \frac{1}{2}j(V/U)\} + jnk_0 \Gamma. \quad (6.101)$$

Для моноэнергетического пучка $\Gamma = 0$ и отрицательный знак соответствует нарастающей волне. В случае когда $\Gamma \neq 0$, неустойчивость вообще не может развиваться, если выполняется условие

$$nk_0 \Gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{nk_0 V^2}{U} \right]^{1/2} = \frac{1}{\tau_0}, \quad (6.102)$$

где τ_0 — время, за которое амплитуда волны увеличивается в e раз при $\Gamma = 0$. Вследствие того, что резонансное распределение имеет длинный "хвост", этот результат оказывается значительно менее строгим, чем тот, который получается в случае более реалистического распределения.

Следуя этому примеру, имеющему несколько академический интерес, мы рассмотрим теперь задачу для распределения произвольного вида, допуская, что k_0 может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Это соответствует режимам с положительной и отрицательной массами. В первую очередь следует помнить, что в циклических ускорителях следует с осторожностью пользоваться выводами, полученными для функций распределения, определенных в бесконечно большой области. В пределах конечной апертуры может существовать только конечный набор энергий частиц и, кроме того, между энергией и положением частицы в пучке существует определенная корреляция. В предельном случае, когда амплитуда бетатронных колебаний частиц в ускорителе равна нулю, энергия связана непосредственно с положением частицы в поперечном сечении пучка. Однако на практике из-за сильного перемешивания можно пренебречь корреляцией между энергией и положением частицы. Тем не менее функция распределения будет иметь с обеих сторон достаточно резкие границы, вне которых амплитуда равна нулю. Для волн, угловая фазовая скорость которых лежит вне интервала угловых скоростей частиц, разумеется, не может быть никакого затухания, способного противостоять нарастающей волне. Нейл и Сесслер обсудили этот вопрос и показали, что в большинстве встречающихся на практике случаев достаточное условие нарастания волны, указанное выше, является почти необходимым; для того чтобы создать достаточное затухание и подавить нарастание волны, необходимо относительно немного частиц, имеющих скорость, равную скорости волны.

Поведение любой функции распределения $F(W)$ в присутствии стенок, импеданс которых равен Z_b , можно определить из решения уравнения (6.99). Такие вычисления обычно громоздки. Однако часто нас будет интересовать только вопрос, существуют ли вообще неустойчивые моды, а не значения их инкрементов или частот. Такую информацию можно получить с помощью метода, который мы сейчас опишем. Применительно к плазме этот метод был рассмотрен Пенроузом [223]. Здесь мы изложим метод Пенроуза в общих чертах, но сохраним обозначения, принятые в уравнении (6.99), которое запишем в виде

$$\frac{n k_0 (U - jV)}{U^2 + V^2} = \int \frac{\partial F}{\partial W} \frac{dW}{W - W_1}, \quad (6.103)$$

где $W_1 = (\omega - n\omega_0)/nk_0$ — комплексная величина. При положительном n неустойчивость имеет место, если существует такое решение этого уравнения, для которого $\text{Im } W_1/k_0$ отрицательно. Определим функцию

$$z(W_1) = \int \frac{\partial F}{\partial W} \frac{dW}{W - W_1}. \quad (6.104)$$

Если F — "регулярная" функция, удовлетворяющая определенным условиям гладкости и интегрируемости, то можно показать, что

$$\begin{aligned} z(\text{Re } W_1 - j0) &= \lim_{\text{Im } W_1 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W - \text{Re } W_1 - \text{Im } W_1}{(W - \text{Re } W_1)^2 + (\text{Im } W_1)^2} \frac{\partial F}{\partial W} dW = \\ &= \int \frac{\partial F}{\partial W} \frac{dW}{W - W_1} - j\pi \left(\frac{\partial F}{\partial W} \right)_{W_1} \end{aligned} \quad (6.105)$$

[ср. с уравнением (6.54)]. Для регулярной функции распределения путь интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ на Z -плоскости представляет собой замкнутую кривую, которая начинается и заканчивается в начале координат. Очевидно, что число точек пересечения траектории с действительной осью равно числу точек, в которых $\partial F/\partial W = 0$, т.е. числу максимумов функции распределения.

Нижняя полуплоскость W отображается на внутреннюю область, охваченную этой траекторией, так что значения Z , принадлежащие этой области, соответствуют корням уравнения в нижней полуплоскости и, следовательно, неустойчивости. (В соответствии с принятым соглашением точкой, лежащей "внутри" многопетлевой кривой, считается точка, охваченная кривой, имеющей нечетное число пересечений.) Внешние по отношению к этой области точки соответствуют устойчивым волнам. На рис. 6.9 представлена соответствующая диаграмма отображения для гауссова распределения, заимствованная из статьи Пенроуза (в измененных обозначениях). Неустойчивость имеет место при небольших отрицательных значениях Z .

Эта область соответствует неустойчивости отрицательной массы. При больших отрицательных значениях Z затухание Ландау восстанавливает устойчивость. (Данный метод аналогичен методу диаграмм Найквиста, который применяется в теории устойчивости цепей.) Приводя в соответствие величины U и Z из уравнения (6.103) и выражения (6.104), получаем, что при $V = 0$ критерий стабилизации неустойчивости отрицательной массы имеет вид

$$-Z > -2 = - \left(\frac{2n\sigma^2 |k_0|}{U} \right)^{1/2} \quad (6.106)$$

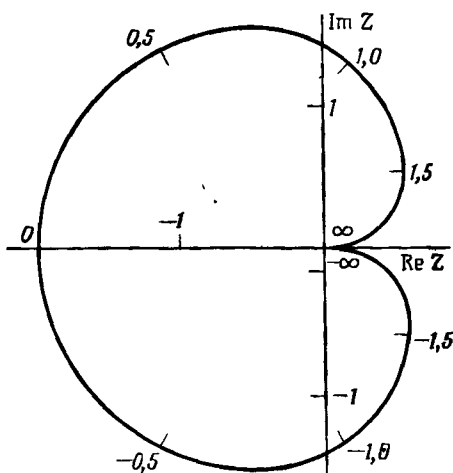


Рис. 6.9. График функции, определяемой правой частью уравнения (6.105) на плоскости Z , в котором W — функция Гаусса

$$F(W) = (W_0/\sqrt{\pi})\exp(-W^2/W_0^2),$$

а интеграл надо вычислять по контуру, лежащему ниже действительной оси W .

На контуре показаны значения W/W_0 . Для значений Z , расположенных внутри данного контура, ω имеет мнимую часть, соответствующую нарастающим волнам.

или

$$\sigma = \left(\frac{2U}{n|k_0|} \right)^{1/2}, \quad (6.107)$$

где σ — среднеквадратичная ширина гауссова распределения. В нерелятивистском пределе это условие можно записать в интересном виде. Если предположить, что $\gamma = \gamma_w = 1$, $\sigma^2/2\pi^2 = kT/m_0^2 R^2$, то, вводя параметр Будкера ν и эффективную массу m^* , можно написать

$$\frac{kT}{m^* c^2} > 2(21n\frac{b}{a} + 1)\nu. \quad (6.108)$$

Очень похожий метод был использован Руджиеро и Ваккаро [252] при вычислениях, проводившихся для пересекающихся накопительных колец в ЦЕРНе. Однако у них отображение производилось на

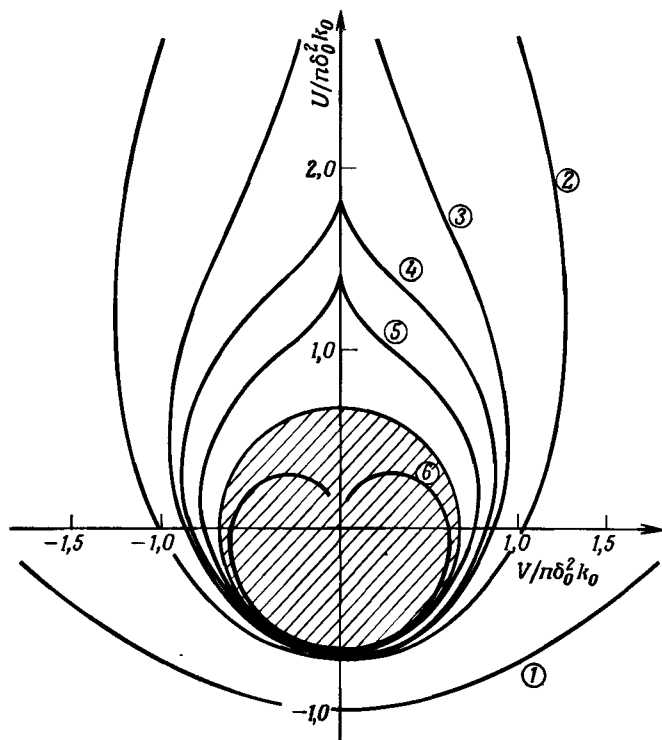


Рис. 6.10. Границы между устойчивыми и неустойчивыми областями на плоскости параметров $U/n\delta_0^2 k_0$, $V/n\delta_0^2 k_0$ для различных функций распределения $F(W)$ с нормализованной полушириной δ_0 .

В отличие от кривой, приведенной на рис. 6.9, точки, соответствующие неустойчивости, лежат *вне* кривых. Соответствующие функции распределения приведены ниже; x пропорционально W/δ_0 , однако для простоты эти функции не нормированы: ① $(1+x^2)^{-1}$; ② $\exp(-x^2)$; ③ $(1-x^2)^4$, ($|x| < 1$); ④ $\cos^2 x$, ($|x| < \pi/2$); ⑤ $(1-x^2)^2$, ($|x| < 1$); ⑥ $\cos x$, ($|x| < \pi/2$). Все кривые, за исключением нереального косинусного распределения, располагаются вне круга радиусом 0,7, показанного на рисунке штриховкой. Этот факт используется при выводе критерия устойчивости [выражение (6.109)].

плоскость $(V - jV)/n\delta_0 k_0$, так что диаграммы оказались как бы "вывернутыми". Полученные этими авторами результаты для различных функций распределения воспроизведены на рис. 6.10. Величина δ_0 определяется как нормализованная полуширина функции распределения на уровне половины ее максимального значения.

Приведенные зависимости позволяют вывести общий критерий устойчивости для большинства "приемлемых" распределений:

$$|U - jV| < 0,7n\delta_0^2 k_0. \quad (6.109)$$

Поскольку $\delta_0^2 = \sigma^2 \ln 4$, можно показать, что это условие согласуется с более частным соотношением (6.107).

Кейп и Шнель [142] представили этот критерий в более удобном для практического употребления виде, начиная с импеданса связи в ускорителе с замкнутой орбитой:

$$Z_{\parallel} = \oint_{\text{По орбите}} \frac{E_s}{I} ds = \frac{RE_z}{aH\phi} = -\frac{R}{a} Z_a, \quad (6.110)$$

где I — переменная составляющая тока. Используя выражения (6.85) и (6.96), получаем

$$Z_{\parallel} = \frac{j2\pi R}{q^2 N \beta_w c} (U - jV). \quad (6.111)$$

Записывая разброс импульсов частиц в пучке как $\Delta p/m_0 c$, где m_0 — масса покоя, а не эффективная масса m^* , критерий (6.109) можно переписать в виде

$$\frac{Z_{\parallel}}{n} < \frac{(\Delta p)^2}{m^* I_0 q}, \quad (6.112)$$

где I_0 — циркулирующий ток. Постоянная $0,7 \pi/2 \approx 1$, входящая множителем в правую часть, опущена, а β_w была выбрана равной β , что является хорошим приближением для релятивистских пучков. Неравенство (6.112) можно записать в другом виде, используя параметр Будкера ν :

$$\frac{Z_{\parallel}}{n} < \left(\frac{\Delta p}{m_0 c} \right)^2 \frac{m_0}{m^*} \frac{Z_0}{4\pi\nu\beta}. \quad (6.113)$$

До сих пор мы рассматривали стенку с однородным импедансом. Последнее же неравенство одинаково хорошо применимо и к случаю, когда стенка имеет локальные разрывы. В этом случае Z_{\parallel} представляет собой сумму ряда импедансов, соответствующих последовательности точек вдоль окружности ускорителя.

Не все разрывы можно представить в виде простого ряда импедансов. В качестве примера можно привести очищающий электрод, имеющий форму пластины, размещенной между пучком и стенкой, и присоединенный к камере в одной точке [269]. При этом важную роль начинают играть дисперсионные свойства структур. Та-

кой случай имеет место тогда, когда фазовая скорость волны (или одной из ее пространственных гармоник) в структуре близка к фазовой скорости волны, распространяющийся в пучке. В лампах бегущей волны (ЛБВ) и лампах обратной волны (ЛОВ) взаимодействие волн, распространяющихся в структуре и пучке, является необходимым условием их работы. Эту задачу наиболее изяшно можно решить на основе теории связанных мод, в которой уравнения, описывающие динамику и дисперсионные свойства структуры с соответствующим коэффициентом связи, можно записать в виде нормальных мод. В следующем разделе в качестве введения к изучению характеристик ламп СВЧ мы рассмотрим теорию связанных мод.

3.7. Цилиндрический пучок, слабо связанный со структурой; нормальные моды. В случае когда внутри камеры, окружающей пучок, распространяется бегущая волна, фазовая скорость которой близка к скорости волны в пучке, между этими волнами может возникнуть резонансное взаимодействие. Такое взаимодействие между волной в пучке и основной модой структуры или одной из ее пространственных гармоник используется в приборах СВЧ, таких, как ЛБВ и ЛОВ. Полное решение задачи требует, чтобы пучок и структура рассматривались как самостоятельные системы, которые можно описывать в терминах нормальных мод. Реальные задачи часто оказываются весьма сложными. Если допустить, что связь между волнами пучка и волнами структуры является слабой, то задачу можно существенно упростить. В данном разделе теория связанных мод будет развита в ее простейшем виде.

Прежде чем приступить к формальному решению задачи, обсудим наглядным образом поведение дисперсионных зависимостей на плоскости (ω, k) , по мере того как коэффициент связи постепенно увеличивается. В предельном случае отсутствия связи результирующую дисперсионную кривую можно представить в виде суперпозиции дисперсионных зависимостей для пучка и структуры. При очень слабой связи в любой точке, в которой пересекаются дисперсионные кривые, возникает зазор; пары линий, проходящих через эту точку, превращаются в гиперболы, которые соединяются на первоначальной кривой. Такое поведение показано на рис. 6.12. По мере увеличения коэффициента связи расстояние между двумя ветвями дисперсионной кривой увеличивается, и гиперболическая аппроксимация теряет силу. В конце концов "гиперболы", возникающие в соседних точках пересечения двух первоначальных дисперсионных кривых, начинают перекрываться и оказывать взаимное влияние. Этот случай соответствует границе применимости приближения слабой связи, и в дальнейшем рассмотрении уже необходимо учитывать более чем две волны. Аналогичный случай встре-

чался нам при исследовании двухпотоковой неустойчивости в разд. 2.6 и иллюстрируется на рис. 6.4, где в центральной области диаграммы не имеется никаких ветвей.

В теории ЛБВ и ЛОВ необходимо учитывать связь трех волн, т.е. рассматривать три ветви результирующей дисперсионной кривой. Однако существенные физические особенности можно исследовать на более простой модели, в которой учитываются только две волны.

Теперь мы в общих чертах исследуем случай слабой связи двух мод и попытаемся придать физический смысл четырем возможным типам гиперболической конфигурации, которые могут возникать в точке связи.

Вначале рассмотрим теорию нормальных мод для волн в отсутствие связи между ними. Такие волны описываются четырьмя дифференциальными уравнениями первого порядка для амплитуд, которые представляют собой линейные комбинации переменных, характеризующих волну. Например, для плоских электромагнитных волн, распространяющихся в свободном пространстве, существуют две такие переменные E и H . Уравнения должны быть записаны в комплексных переменных, а для реальных систем, которые описываются действительными переменными, амплитуды должны входить в виде комплексно-сопряженных пар. Эта форма записи уравнений удобна при рассмотрении связи волн, распространяющихся в двух системах, таких, как пучок и структура. В случае слабой связи следует рассматривать только одну из четырех волн каждого набора. Комплексные амплитуды удовлетворяют следующим уравнениям ¹⁾:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + jk \right) a^+ &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - jk \right) a^{+\ast} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - jk \right) a^- &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + jk \right) a^{-\ast} &= 0, \end{aligned} \quad (6.114)$$

где подразумевается присутствие четырех множителей $\exp j(\pm \omega t \mp kz)$ и $\exp j(\pm \omega t \pm kz)$ соответственно. В стационарной среде все четыре моды имеют одно и то же значение k . Первые две распространяются вперед, в то время как две другие распростра-

¹⁾ В линейной операторной алгебре эта форма иногда называется волновым или диагональным представлением. — *Прим. ред.*

няются с одинаковыми скоростями в обратном направлении. С другой стороны, в движущейся среде k^\pm имеет вид $(\omega \pm \omega_1)/V$. При $\omega_1 > \omega$ все волны (быстрые и медленные), которые мы рассматривали в разд. 2.4, распространяются вперед. Комбинации переменных для определения амплитуд нормальных мод можно выбрать и нормировать таким образом, чтобы мощность, переносимая двумя парами волн в прямом и обратном направлениях, равнялась соответственно $2|a^+|^2$ и $2|a^-|^2$. Если все моды распространяются вперед, то *медленные волны* переносят вперед *отрицательную* энергию.

Возвращаясь к очень простому примеру волны, распространяющейся в свободном пространстве, можно показать, что комбинация обоих наборов волн создает в некоторой точке z напряженности полей E и $Z_0 H$, которые в общем случае имеют различные амплитуды и фазы. Для поперечных составляющих этих полей простые, хотя и достаточно подробные, расчеты показывают, что поток мощности равен

$$\bar{W} = \frac{(E + Z_0 H)^2}{8Z_0}, \quad (6.115)$$

а соответствующие амплитуды нормальных мод даются выражением

$$a^\pm = \frac{E \pm Z_0 H}{4Z_0^{1/2}}. \quad (6.116)$$

Очевидно, что аналогичные выражения, в которых вместо E и H фигурируют напряжение V и ток I , можно применить для описания волн, распространяющихся в передающих линиях. В данном примере векторы потока мощности, групповой и фазовой скоростей направлены в одну сторону. В волне с положительной энергией поток мощности совпадает по направлению с групповой скоростью, и поэтому в диспергирующей среде он может стать отрицательным. Однако в случае волны с отрицательной энергией групповая скорость и поток энергии имеют противоположные направления, так что, когда групповая скорость положительна, поток мощности отрицательный. Эти возможности приводят к возникновению различных типов поведения при взаимодействии двух волн. Данный вопрос мы теперь и обсудим.

Две слабосвязанные системы описываются восемью уравнениями, аналогичными уравнениям (6.114). Волны взаимодействуют между собой, когда их фазовые скорости в двух системах достаточно близки друг к другу. Здесь мы рассмотрим взаимодействие двух волн, распространяющихся вперед, по одной из каждого набора, состоящего из четырех волн. Волновой вектор $k_{1,+}$ будем считать положительным, а в качестве $k_{2,-}$ можно выбрать k^+ в первом

уравнении или $-k^-$ в третьем. В приложении 5 показано, что, записывая вместо a^+ величину a^- и вводя коэффициент связи K , уравнения для связанных мод можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + jk_1 \right) a_1 - Ka_2 &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + jk_2 \right) a_2 \pm K^*a_1 &= 0; \end{aligned} \quad (6.117)$$

здесь верхний знак соответствует случаю, когда потоки мощности в двух системах имеют одно и то же направление, а нижний знак, — когда эти направления противоположны. Исключая k_1 , k_2 и K из этих уравнений и уравнений для комплексно-сопряженных величин, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} (|a_1|^2 \pm |a_2|^2) = 0 \quad (6.118)$$

(здесь соглашение о знаках такое же, как было принято выше). Это уравнение подтверждает тот факт, что в двухкомпонентной системе сумма или разность потоков мощности сохраняется в зависимости от того, имеют ли потоки в двух системах одинаковые или противоположные направления.

Заменяя в уравнениях (6.117) $\partial/\partial z$ на $-jk$ и исключая a_1 и a_2 , находим дисперсионное уравнение для системы:

$$\pm KK^* = \pm |K|^2 = \{k - k_1(\omega)\} \{k - k_2(\omega)\}. \quad (6.119)$$

При очень слабой связи, когда разности $k - k_1(\omega)$ и $k - k_2(\omega)$ малы по величине, дисперсионное уравнение незначительно отличается от уравнений вида

$$k - k_1(\omega) = 0, \quad (6.120)$$

$$k - k_2(\omega) = 0.$$

Дисперсионное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\pm |K|^2 = \left(\Delta k - \frac{\Delta \omega}{v_1} \right) \left(\Delta k - \frac{\Delta \omega}{v_2} \right), \quad (6.121)$$

где v_1 и v_2 — групповые скорости $\partial\omega/\partial k$ обеих волн в точке (ω_0, k_0) при $K = 0$, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta k = k - k_0$, а ω_0 и k_0 — значения ω и k , при которых $k_1 = k_2$.

Вследствие того что перед $|K|^2$ могут стоять два разных знака, соответствующих одинаковым и противоположным направлениям потоков мощности в двух системах, а групповая скорость


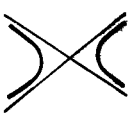


волны v_2 во второй системе может также иметь разные знаки, гипербола, описываемая уравнением (6.121), может иметь четыре различные формы. Они приведены в табл. 6.3 вместе со знаками членов уравнения и соответствующих физических величин. Во всех случаях, за исключением первого, комплексным значениям одной из переменных $\Delta\omega$ или Δk соответствуют действительные значения другой, так что возможно как затухание волн, так и конвективная или абсолютная неустойчивости. Какой из этих случаев имеет конкретное место, можно определить на основе физических соображений с помощью метода, изложенного в разд. 2.6. Волны затухают тогда, когда обе волны обладают положительной энергией, но их групповые скорости направлены в противоположные стороны. Это можно трактовать как наличие отрицательной обратной связи. С другой стороны, если одна из волн обладает отрицательной энергией, то обратная связь становится положительной и развивается абсолютная неустойчивость. Последний случай, когда волны имеют положительные групповые скорости, но разные знаки энергии, соответствует конвективной неустойчивости. При распространении волны непрерывно обмениваются энергией; амплитуды обеих волн возрастают с расстоянием, но в данной точке пространства не зависят от времени.

Эти результаты получены из простых физических аргументов. В случае когда связь больше не остается слабой, так что форма дисперсионных кривых не является больше гиперболической (как, например, на рис. 6.4), то критерий для выделения различных типов неустойчивости становится значительно сложнее. Ссылки на литературу, посвященную этой более общей задаче, были приведены выше (см. разд. Л.2). Барном [12] были составлены более расширенные таблицы, в которые сведены значения инкрементов и другая информация, не включенная в табл. 6.3.

Теперь мы вновь вернемся к задаче о взаимодействии пучка со структурой. Прежде чем приступить к ней, необходимо записать уравнения для волн, распространяющихся в пучке, в виде уравнений для нормальных мод. Сделать это совсем не так просто, как для структуры, поскольку нам надо точно представлять себе, что понимается под потоком мощности в пучке. Даже при отсутствии какой-либо волны пучок переносит "постоянную мощность", связанную с кинетической энергией зарядов. Поэтому необходимо соответствующим образом выделить постоянную и переменную составляющие. В следующем разделе мы решим такую задачу для системы, в которой распространяются продольные волны. Сделать это относительно нетрудно, хотя, как мы увидим ниже, в более общем случае, когда возможно поперечное движение, задача становится сложной.

Таблица 6.3

ЧЕТЫРЕ ТИПА СВЯЗИ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ДВУХ ПУЧКАХ (1 И 2),
И КРАТКАЯ СВОДКА ИХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Знаки в уравнении (6.121)	$\pm K ^2$	ν_2	+	+	-	-
Знак энергии	Система 1	Система 2	+	+	-	-
Знак групповой скорости	Система 1	Система 2	+	-	+	+
Физические свойства	Биеция	Затухание	Конвективная неустойчивость	Абсолютная неустойчивость		
Локальная форма дисперсионной кривой (зависимость ω от k) вблизи точки резонансного взаимодействия						

3.8. Теорема о кинетической мощности в потоке, удерживаемом магнитным полем. В плоской электромагнитной волне, распространяющейся в свободном пространстве, поток мощности можно выразить через напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . В данном разделе мы определим соответствующие величины, необходимые для расчета потока мощности в пучке. Для этого воспользуемся теоремой Чу [57] о потоке кинетической мощности.

Начнем с рассмотрения потока мощности в движущейся среде, находящейся в бесконечном магнитном поле B_z , в котором частицы движутся только в направлении оси z , а затем перейдем непосредственно к пучку. Как и в разд. 2.5 настоящей главы, представим все величины, связанные с полем, токи и скорости в виде суммы постоянной и гармонически изменяющейся компонент:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{A}}, \quad (6.122)$$

где $|\tilde{\mathbf{A}}| \ll A_0$.

Уравнения Максвелла для переменных составляющих полей и токов можно записать следующим образом:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{i} + j\omega \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.123)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}.$$

Если теперь комплексно-сопряженное первое уравнение умножить скалярно на $\tilde{\mathbf{E}}$, а второе уравнение — на $\tilde{\mathbf{H}}^*$, то, вычитая одно из другого и используя тождество $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, получаем

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = -\mathbf{i} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + j\omega(\epsilon_0 |\tilde{\mathbf{E}}|^2 - \mu_0 |\tilde{\mathbf{H}}|^2). \quad (6.124)$$

Это и есть теорема Пойнтинга в приближении малого сигнала, справедливая в случае $|\tilde{\beta}| \ll \beta_0$. Первый член правой части описывает обмен энергией между полем и зарядами. Чтобы продолжить наши вычисления, нам потребуются уравнения движения и непрерывности; мы их уже использовали в разд. 2.5. Эти уравнения записываются следующим образом:

$$q\tilde{\mathbf{E}}_z = j\gamma_0^3 m_0 \tilde{\beta}_c (\omega - \beta_0 c k), \quad (6.35)$$

$$(\omega - \beta_0 c k) \tilde{n} - k n_0 \tilde{\beta}_c = 0. \quad (6.37)$$

Определим теперь плотность тока

$$\tilde{\mathbf{i}} = qc(n_0 \tilde{\beta} + \beta_0 \tilde{n}) \quad (6.125)$$

и новую величину, а именно *кинетическое напряжение* V_k :

$$-q \tilde{V}_k = \gamma_0^3 \beta_0 \tilde{\beta} m_0 c^2. \quad (6.126)$$

Комбинируя эти четыре выражения, можно получить следующее уравнение:

$$\tilde{z}^* \tilde{E}_z = j \gamma_0^3 m_0 \omega n_0 |\tilde{\beta}|^2 c^2 - \nabla \cdot (\tilde{V}_k \tilde{z}^* \hat{e}_z). \quad (6.127)$$

Интегрируя действительную часть уравнения (6.124) с учетом (6.127) по объему, получаем

$$\operatorname{Re} \int \nabla \cdot (\tilde{E} \times \tilde{H}^* - \tilde{V}_k \tilde{z}^* \hat{e}_z) d\tau = 0 \quad (6.128)$$

По объему

(здесь $d\tau$ — элементарный объем). Для пучка объемный интеграл удобно преобразовать к поверхностному и перейти от плотности тока к полному току I . В обозначениях, указанных на рис. 6.11, это преобразование дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{S_1+S_2+S_c} \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* d\mathbf{S} &= [\operatorname{Re} \int_{S_1} - \operatorname{Re} \int_{S_2}] \frac{1}{2} (V_k i^* \hat{e}_z) dS \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} V_k I |_{S_1} - \frac{1}{2} V_k I |_{S_2} \right). \end{aligned} \quad (6.129)$$

Это и есть формулировка теоремы о потоке кинетической мощности, переносимой током, протекающим в направлении оси z . Теорема утверждает, что поток электромагнитной мощности из объема, ограниченного поверхностями $S_1 + S_2 + S_c$, равен разности между потоком кинетической мощности, входящим в объем через поверхность S_1 , и потоком, покидающим этот объем через поверхность S_2 .

Полезно рассчитать поток кинетической мощности, переносимый быстрой и медленной волнами в бесконечной среде (см. разд. 2.5 настоящей главы). Используя уравнения (6.35) и (6.37), а также выражения (6.125) и (6.126), поток кинетической энергии

$$W_k = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \tilde{V}_k \tilde{z}^* \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \beta_0 \tilde{\beta} \tilde{z}^* \gamma_0^3 m_0 c^2 / q \right) \quad (6.130)$$

можно записать в следующем виде:

$$W_k = \frac{\beta_0 c \omega \mu_p^2 \epsilon_0 |\tilde{E}_z|^2}{2 \gamma^2 (\omega - \beta_0 c k)^3}. \quad (6.131)$$

Используя дисперсионное уравнение (6.40) для волн в движущейся

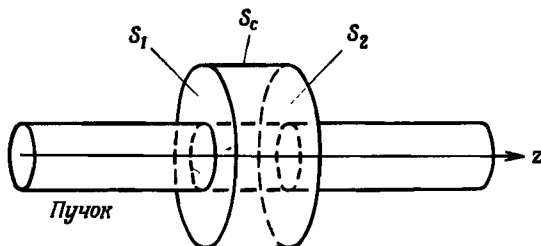


Рис. 6.11. Поверхность интегрирования в уравнении (6.129).

плазме, последнее выражение можно привести к более простому виду:

$$W_k = \frac{\frac{1}{2} \beta_0 c \epsilon_0 E^2}{1 - \beta_0 / \beta_w} \quad (6.132)$$

В зависимости от соотношения между скоростью пучка $\beta_0 c$ и фазовой скоростью волны ω/k поток может быть как отрицательным, так и положительным. Таким образом, поскольку групповая скорость является положительной, быстрая волна обладает положительной энергией, а медленная — отрицательной. По мере того как β_0 стремится к нулю, поток мощности также уменьшается до нуля, но плотность энергии $W_k / \beta_0 c$ остается конечной и равной $\epsilon_0 E^2 / 2$.

Эта величина представляет собой плотность энергии плазменных колебаний в стационарной среде.

Аналогичный результат получается из выражения для плотности энергии поля в диспергирующей среде, приведенного, например, в книге Ландау и Лифшица [156]. Его можно записать в виде

$$U = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \kappa) \epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \mu) \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \right], \quad (6.133)$$

где κ и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости. Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты, из которой можно получить дисперсионное уравнение, приравняв ее нулю, для движущейся среды записываются следующим образом:

$$\kappa = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - \beta_0 c k)^2} \quad (6.134)$$

Магнитная проницаемость μ равна единице. Подставляя κ и μ в выражение (6.133) и умножая последнее на групповую скорость $\beta_0 c$, получаем выражение для потока мощности W_k в виде, аналогичном (6.133),

Следует подчеркнуть, что это выражение для энергии волны в среде справедливо только для возмущений достаточно малой амплитуды, когда в уравнениях можно пренебречь членами более высоких порядков, в том числе и произведениями гармонических величин. Нетрудно убедиться в том, что при стремлении величины $\omega - \beta ck$ к нулю допустимая амплитуда поля становится пренебрежимо малой. В этом резонансном случае небольшие поля вызывают весьма значительные возмущения скорости.

Для того чтобы можно было вычислить действительную энергию всей системы, совсем недостаточно определить энергию волны, вычисленную выше, и среднюю скорость частиц с точностью до членов первого порядка малости. Если v_0 — средняя скорость частиц, а U — энергия волны, то невозможно утверждать (в нерелятивистском случае), что полная энергия равна $U + m_0 v_0^2/2$. В этом можно удостовериться, рассматривая пучок, частицы которого движутся со средней скоростью v_0 и по которому распространяется волна малой амплитуды, вызывающая модуляцию скорости частиц $\Delta \tilde{v}_0$. Таким образом, если средняя скорость частиц v_0 известна с точностью до членов первого порядка малости, но имеется неопределенность величины второго порядка ϵv_0 , то при вычислении энергии неопределенность $m_0 \epsilon v_0$ имеет тот же самый порядок малости, как и $m_0 \Delta v_0^2/2$, т.е. такую же величину, что и энергия волны. Значение этого вывода станет особенно очевидным после того, как мы вычислим энергию поперечных волн в разд. 4.3 настоящей главы.

Если есть поток мощности на стенку, обладающую конечным импедансом, или на замедляющую структуру, окружающую пучок, то поток мощности внутри стенки или структуры равен

$$W = \operatorname{Re} \int_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s}. \quad (6.135)$$

Если в замедляющей структуре (передающей линии) $\omega/k \ll c$, а пучок тонкий, то большая часть электромагнитной энергии сосредоточена вблизи структуры, а большая часть кинетической энергии — в пучке. Выражая мощность в передающей линии через напряжение на линии \tilde{V}_C и ее характеристический импеданс Z_C , теорему о потоке кинетической мощности можно записать в простом виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tilde{V}_C^2 / Z_C - \tilde{v}_k \tilde{I}^*) \right\} = 0. \quad (6.136)$$

Теперь волны в пучке мы можем описать через нормальные моды, в таком же виде, что и для волн в замедляющей структуре, и рассматривать соответствующие устройства как лампу бегущей волны с помощью теории связанных мод, развитой в разд. 3.7. В следующем разделе мы попытаемся решить эту задачу.

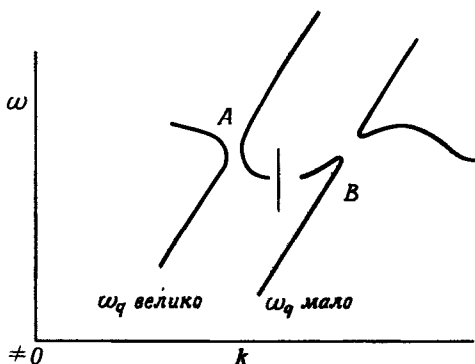


Рис. 6.12. Связь периодической структуры с медленной волной, распространяющейся в пучке.

Дисперсионная зависимость структуры описывается волнообразной кривой; боковые наклонные линии соответствуют дисперсионной зависимости медленной волны пучка. Показаны два случая с различными значениями ω_q , выбранными таким образом, чтобы кривые пересекались в области, где дисперсионная кривая структуры имеет соответственно отрицательный и положительный наклоны. Пересечения в точках *A* и *B* приводят к развитию абсолютной и конвективной неустойчивостей, что соответствует режимам работы ЛОВ и ЛБВ. (Диаграмма приводится лишь схематически, и оси не проходят через начало координат.)

3.9. Лампа бегущей волны и лампа обратной волны. О физических принципах работы этих двух устройств мы уже говорили; энергия непрерывно черпается из нарастающей медленной волны с отрицательной энергией, распространяющейся в пучке, и передается волне с положительной энергией, распространяющейся по структуре. Если групповые скорости обеих волн направлены вперед, то в результате возбуждается конвективно нарастающая волна и возникают условия, позволяющие использовать это устройство как усилитель. Если же групповая и фазовая скорости направлены навстречу друг другу, то развивается неустойчивость и колебания срываются.

Эти два типа взаимодействия иллюстрируются на рис. 6.12. Волну в пучке можно "подстраивать", регулируя напряжение и ток таким образом, чтобы получить зависимость в виде линии с изменяющимися крутизной и положением. Показанные зависимости соответствуют рабочим условиям ЛБВ и ЛОВ. Обеспечивая связь быстрой волны со структурой, можно добиться затухания или биений волны. Нагружая структуру волной с положительной энергией и регулируя параметры пучка таким образом, чтобы на выходе структуры амплитуда уменьшалась до нуля в некоторой точке лампы, можно экспериментально определить условия существования четвертьволновой

"длины волны биений". Это условие называется "условием спада Компфнера". Оно позволяет определить параметры связи лампы. Топология дисперсионных кривых в точке их пересечения для трех рассмотренных типов взаимодействия соответствует диаграммам, помещенным в третьей, четвертой и первой колонках табл. 6.3.

В действительности ситуация оказывается намного сложнее, чем мы рассматривали до сих пор. Во-первых, предположение о взаимодействии только двух волн часто не соответствует действительности. Во-вторых, в реальных устройствах имеются концы, и для точного описания поведения необходимо учитывать соответствующие граничные условия. Оказывается, например, что ЛОВ имеет минимально допустимую длину.

Надлежащее рассмотрение теории ЛБВ и ЛОВ требует подробного обсуждения. Здесь мы обсудим только связь между волнами, распространяющимися в пучке и периодической структуре, используя выражения для амплитуд нормальных мод, полученные в предыдущем разделе, и сделаем некоторые замечания относительно применения теории для расчета реальных устройств.

Рассмотрим вначале продольные волны, распространяющиеся в неограниченной дрейфующей среде. Записывая вместо $-jk$ производную $\partial/\partial z$, уравнения (6.35) и (6.37) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{\beta} &= \frac{j q}{\gamma^3 m_0 \omega \beta_0 c^2 \epsilon_0} \tilde{z}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{z} &= \frac{j \omega n_0 q}{\beta_0} \tilde{\beta}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

При выводе этих уравнений использовано соотношение (6.125), связывающее скорость и ток, и из уравнения (6.35) исключена напряженность электрического поля \tilde{E} с помощью уравнения (6.123), в котором полагается $\nabla \times \tilde{H} = 0$. Как уже объяснялось в разд. 2.4, $\nabla \times \tilde{H}$ обращается в нуль, поскольку \tilde{H} равно нулю и полный ток (конвекционный ток плюс ток смещения) равен нулю. Обозначим напряжение с релятивистской поправкой $-\beta^2 \gamma^2 m_0 c^2 / q$ (разд. 2.2 гл. 2) через V_B . Вводя кинетическое напряжение \tilde{V}_k [выражение (6.126)], систему уравнений (6.137) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{V}_k &= \frac{j \omega z_0}{\omega} \tilde{z}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{z} &= \frac{j \omega n_0 q}{\gamma V_B} \tilde{V}_k. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Теперь нам хотелось бы записать эти уравнения на языке нор-

мальных мод. Для этого необходимо найти новые переменные, которые являются линейными комбинациями величин \tilde{i} и \tilde{V}_k . Эти комбинации надо выбрать таким образом, чтобы уравнения (6.138) приняли вид уравнений (6.114), а новые переменные нормировать так, чтобы удовлетворить выражению (6.116) для потока мощности, записанного в переменных V_k и i , а не в переменных E и H . Одновременно применим полученный результат к пучку, имеющему конечное поперечное сечение, и вместо плотности тока будем оперировать с током пучка I_B . Определим импеданс пучка с постоянным током:

$$Z_B = V_B/I_B = V_B/2\pi f i r dr; \quad (6.139)$$

здесь I_B — средний по времени ток пучка. Тогда уравнения (6.138) примут вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{j}{\beta_0 c} (\omega - \omega_q) \right\} \tilde{\alpha}^+ = 0, \quad (6.140)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{j}{\beta_0 c} (\omega + \omega_q) \right\} \tilde{\alpha}^- = 0,$$

где

$$\tilde{\alpha}^\pm = \frac{1}{4} \left[\frac{\gamma^2 \omega}{2\omega_q Z_B} \right]^{1/2} \left[\tilde{V}_k \pm \frac{2\omega_q Z_B \tilde{I}_B}{\gamma^2 \omega} \right], \quad (6.141)$$

а вместо плазменной частоты ω_p подставлена редуцированная плазменная частота ω_q , которая учитывает конечность размеров пучка. Подставив в уравнения (6.140) выражения для $\tilde{\alpha}^\pm$ с учетом соотношения (6.139), нетрудно убедиться, что получается уравнение (6.138). Кроме того, произведение $2\tilde{\alpha}^+ \tilde{\alpha}^{*+}$ равно потоку кинетической мощности $\tilde{V}_k \tilde{I}_k^*/2$.

Таким образом, мы получили уравнения для нормальных мод пучка [уравнения (6.140) и (6.141)]. Уравнения для волн в структуре, с которыми должен взаимодействовать пучок, можно получить, заменяя в уравнениях (6.115) и (6.116) величины E , H и Z_0 на V_C , I_C и Z_C . Индексом C будем обозначать параметры "структуры", а индекс B будем использовать, как и выше, для обозначения величин, имеющих отношение к пучку. Поэтому впредь кинетическое напряжение \tilde{V}_k будем обозначать как \tilde{V}_B . Следующий шаг заключается в том, чтобы рассмотреть полную систему, состоящую из структуры и пучка, и найти соответствующую форму для постоянной связи между двумя этими подсистемами.

Для того чтобы установить вид постоянной связи, необходимо рассмотреть физическую природу взаимодействия между пучком и

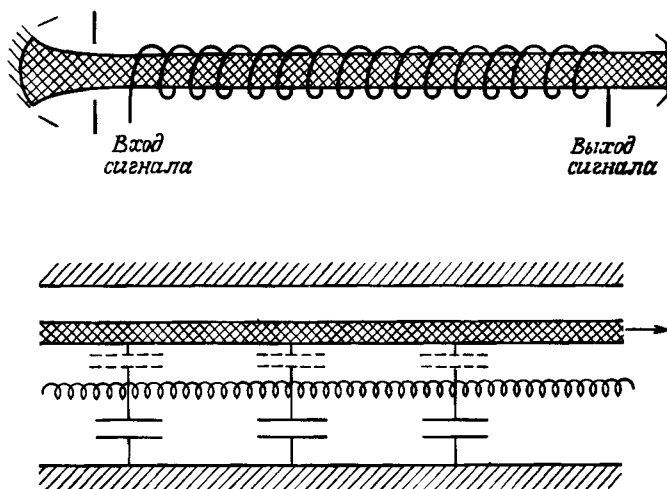


Рис. 6.13. Схематическое представление ЛВВ или ЛОВ и ее эквивалентная электрическая схема.

замедляющей структурой (передающей линией). Наиболее широко распространены спиральные замедляющие структуры, в которых волна распространяется со скоростью, равной приблизительно $c \sin \psi$, где ψ — угол спирали. Теория спиральной замедляющей структуры рассматривалась во многих учебниках (см., например, [60]). Здесь мы только отметим, что в области низких частот спиральную замедляющую структуру можно представить как нагруженную линию. Это показано на рис. 6.13.

Связь между пучком и замедляющей структурой является емкостной. Пучок индуцирует на единице длины структуры ток $d\tilde{I}_B/dz$. Кроме того, на частицы пучка действует сила со стороны электрического поля, обусловленного самой структурой. Члены, учитывающие эти связи, можно непосредственно ввести в ненормированные уравнения, описывающие распространение волн в замедляющей структуре и пучке. Уравнения волн в замедляющей структуре основаны на уравнениях (6.116) и (6.117). Для описания волн в пучке воспользуемся уравнением (6.138), в котором вместо плотности тока i подставим полный ток пучка I_B . Таким образом, необходимые нам уравнения можно написать в виде¹⁾

¹⁾ Здесь L и C — распределенные последовательная индуктивность и параллельная емкость на единицу длины. Подробный вывод уравнений и их физическое обоснование см. в книге [191]. — *Прим. ред.*

$$\begin{aligned}
 \partial \tilde{V}_C / \partial z &= -j\omega L \tilde{I}_C, \\
 \partial \tilde{I}_C / \partial z &= -j\omega C \tilde{V}_C - \partial \tilde{I}_B / \partial z, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{V}_B &= j \frac{\omega_q^2 V_B}{c\omega I_B} \tilde{I}_B + \frac{\partial \tilde{V}_C}{\partial z}, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{I}_B &= j \frac{\omega I_B}{c\gamma V_B} \tilde{V}_B.
 \end{aligned} \tag{6.142}$$

Используя определения величин a_B^\pm и Z_B в соответствии с выражением (6.141), а a_C^\pm — в соответствии с выражением (6.116), но в которых E и H заменены на I и V , запишем уравнения (6.142) в виде уравнений для нормальных мод:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{a}_C^\pm &= \pm \left(\frac{\omega_q Z_C}{8\omega Z_B} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{a}_B^+ - \tilde{a}_B^-), \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{j}{\beta_0 c} (\omega \mp \omega_q) \right\} \tilde{a}_B^\pm &= \left(\frac{\omega_q Z_C}{8\omega Z_B} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{a}_C^+ + \tilde{a}_C^-);
 \end{aligned} \tag{6.143}$$

здесь $1/\sqrt{LC} = \beta_0 c$. Уравнения (6.143) незначительно отличаются от тех уравнений, которые мы уже изучали в разд. 3.7 настоящей главы. Вместо двух взаимодействующих волн теперь имеются четыре, а именно \tilde{a}_B^\pm и \tilde{a}_C^\pm , а в правые части уравнений входят производные. Однако поскольку связь слабая и амплитуды мод медленно меняются с расстоянием z , мы получим хорошее приближение, если будем учитывать лишь гармонический характер изменений, т.е. если вместо $\partial/\partial z$ можно записать $-j\omega/\beta_0 c$. Используя также подстановку

$$c_{CB} = \frac{j\omega}{2\beta_0 c} \left(\frac{\omega_q Z_C}{2\omega Z_B} \right)^{1/2}, \tag{6.144}$$

где c_{CB} — постоянная связи между пучком и структурой, уравнения (6.143) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{j\omega}{\beta_0 c} \right) \tilde{a}_C^\pm &= \pm c_{CB} (\tilde{a}_B^+ - \tilde{a}_B^-), \\
 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{j}{\beta_0 c} (\omega \mp \omega_q) \right\} \tilde{a}_B^\pm &= c_{CB} (\tilde{a}_C^+ + \tilde{a}_C^-).
 \end{aligned} \tag{6.145}$$

В теории ЛБВ используются два параметра, которые связаны с постоянными, используемыми здесь, следующим образом. "Коэф-

коэффициент усиления" дается выражением¹⁾

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega Z_C}{\omega_q Z_B} \right)^{1/3}, \quad (6.146)$$

а "параметр пространственного заряда" $2(QC)^{1/2}$ — выражением

$$2(QC)^{1/2} = \omega/\omega_q. \quad (6.147)$$

В практически реализуемых случаях $C \approx 0,01$, а величина $2(QC)^{1/2} \approx 1$.

Система уравнений (6.145) состоит из четырех линейных связанных уравнений. Исключая амплитуды, как и в разд. 3.7, получаем биквадратное уравнение, которое невозможно решить аналитически. В случае когда связь очень слабая, можно ограничиться рассмотрением только двух интересующих нас волн в точке, где их скорости очень близки друг к другу. Вводя безразмерный параметр b , можно записать следующее приближенное равенство между $\omega/\beta_0 c$ и k_C :

$$\frac{\beta_0 c k_C}{\omega} = 1 + Cb. \quad (6.148)$$

Рассмотрим только волну \tilde{a}_C^+ , распространяющуюся вперед по структуре, и медленную волну \tilde{a}_B^- в пучке. Тогда в обозначениях, в которых записаны уравнения (6.146) и (6.147), уравнения (6.145) принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} (1 + Cb) \right\} \tilde{a}_C^+ = c_{CB} \tilde{a}_B^-, \quad (6.149)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{j\omega}{\beta_0 c} (1 + 2(CQ^3)^{1/2}) \right] \tilde{a}_B^- = c_{CB} \tilde{a}_C^+.$$

Эти уравнения соответствуют общей форме уравнений (6.117), рассмотренных в разд. 3.7, и их можно использовать для расчета характеристик ЛБВ и ЛОВ через параметры b , C и Q . Для практических целей такое приближение является слишком грубым, поскольку в анализе необходимо учитывать еще и быструю волну \tilde{a}_B^+ , распространяющуюся в пучке. Этот расчет приводит к кубическому дисперсионному уравнению. На рис. 6.14 приведены дисперсионные кривые, определяемые этим уравнением.

Анализ, проведенный в данном разделе, заимствован целиком из книги Люиселла [191]. Мы лишь изменили некоторые обозна-

¹⁾ Физически величина C есть мера отношения полного сопротивления структуры при отсутствии связи к полному сопротивлению свободного пучка по постоянному току. — *Прим. ред.*

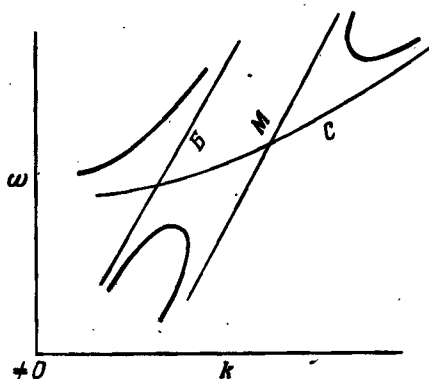


Рис. 6.14. Топология дисперсионных кривых для ЛБВ.

Буквами *B*, *M* и *C* обозначены дисперсионные кривые для быстрой и медленной волн в пучке и для волны, распространяющейся по структуре в отсутствие связи.

чения и соглашения о знаках (вместо символа Z_B , используемого Люисселлом, мы употребили $2\omega_q Z_B / \omega$). Люисселл дает более расширенное рассмотрение задачи и приводит подробный анализ трехволновых систем, а также более полно обсуждает теорию работы ЛБВ.

Таким образом, мы в общих чертах описали основные физические свойства ЛБВ и ЛОВ. Для реальных устройств существует множество более подробных теоретических расчетов, в которых учитывается точная картина полей в спиральной и других структурах. Они дополняются большим количеством экспериментальных данных. Интересный пример расчета с учетом полных полей можно найти в статье Чу и Джексона [58]. Метод расчета по существу является таким же самым, что и использованный нами в разд. 3.4, но с некоторыми осложнениями, состоящими в том, что для структуры пришлось рассматривать как k , так и ω и, кроме того, учитывать гибридные волны. Последние требуют анализа высших азимутальных мод. Коллин [60] дал более простое рассмотрение на этой же основе.

В данном разделе мы коснулись только основ взаимодействия пучка с замедляющей структурой в лампах СВЧ. Полное описание систем и обсуждения таких важных факторов, как коэффициент усиления и полоса пропускания, к.п.д. и т.п., можно найти в книгах, упомянутых в разд. Л.3 настоящей главы.

3.10. Взаимодействие пучка с плазмой в продольном направлении. В разд. 2.6 мы уже исследовали взаимодействие пучка с тяжелыми

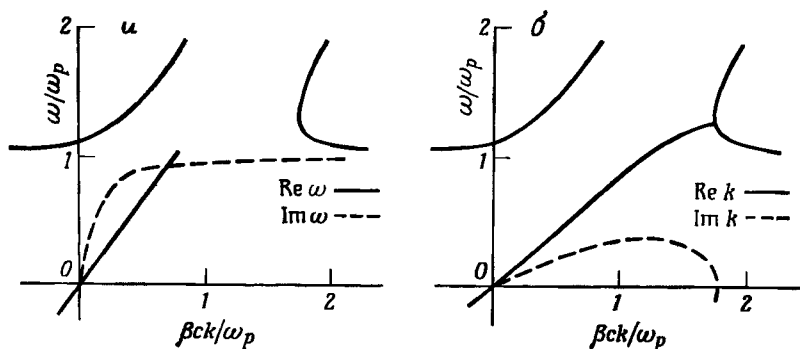


Рис. 6.15. Топология дисперсионных кривых волн, распространяющихся в неограниченной системе плазма – пучок.

a – действительные k и комплексные ω ; *b* – действительные ω и комплексные k .

ионами в бесконечной холодной плазме. В частном случае, когда скорость одного из потоков равна нулю, развивается двухпотоковая неустойчивость, дисперсионные зависимости для которой приведены на рис. 6.3, б. На рис. 6.15 построены эти кривые в области $\omega < \omega_p$, где показаны действительная и мнимая части k для действительных значений ω , и наоборот.

В области частот ниже ω_p пучок взаимодействует со средой, имеющей существенно "индуктивный" характер, и дисперсионное уравнение можно записать в виде (6.38), заменив ϵ_0 на $\epsilon_0(1 - \omega^2/\omega_p^2)$. По виду оно аналогично уравнению (6.45) при $\beta_p = 0$, но отличается от уравнения (6.93), которое описывает (при соответствующем выборе L_0) генератор типа "изитрон" или неустойчивость отрицательной массы.

В разд. 3.3 мы кратко рассмотрели вопрос о взаимодействии пучка с ограниченной в поперечном направлении плазмой. Плазма состоит из тяжелых ионов фона, через который проходит электронный пучок. Можно предположить, что в идеализированном случае, когда ионы неподвижны, при прохождении пучка через стационарную плазму или при наличии двух пучков, движущихся в одном или противоположном направлениях, возбудится двухпотоковая неустойчивость. Однако в отличие от случая бесконечного пучка в пучке конечных размеров неустойчивость имеет порог. В этом можно убедиться, рассматривая по отдельности дисперсионные зависимости для одного или другого потока. Две пары параллельных прямых линий, соответствующих дисперсионным зависимостям для неограниченной плазмы, обязательно пересекаются в четырех точках. Однако две пары дисперсионных кривых, показанных на

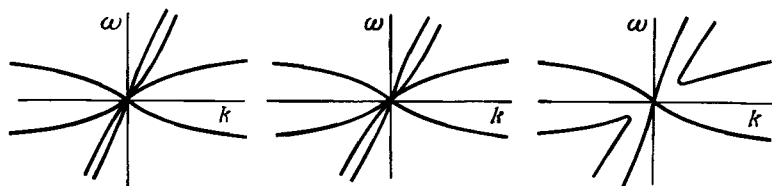


Рис. 6.16. Дисперсионные кривые вблизи начала координат для пучка, взаимодействующего с плазмой, в которой ионы неподвижны, а сама она имеет конечную цилиндрическую геометрию.

Три диаграммы построены для одних и тех же условий, за исключением того, что интенсивность пучка последовательно возрастает до величины, превышающей порог возбуждения неустойчивости.

рис. 6.7, пересекаются только в начале координат¹⁾. Комплексные корни появляются только при достаточно большой интенсивности пучка. Такое поведение показано на рис. 6.16, на котором приведены дисперсионные кривые вблизи начала координат, описывающие взаимодействие пучка со стационарной плазмой в цилиндрической проводящей камере. Предполагается, что ионы неподвижны. Видно последовательное изменение топологии зависимостей при увеличении плотности заряда пучка. На первой диаграмме каждому значению k соответствуют четыре действительных значения ω . На третьей диаграмме значению k из некоторого интервала могут соответствовать комплексные значения ω . Центральная диаграмма соответствует переходному случаю, который при заданной геометрии и скорости частиц пучка имеет место, если плотности пучка и плазмы достаточно велики.

Это идеализация реальной ситуации, поскольку ионы обладают конечной массой, а магнитное поле не бесконечно. Взаимодействие пучка с плазмой подробно исследовалось экспериментально; в таких исследованиях необходимо учитывать, кроме того, и другие свойства. Более общее обсуждение взаимодействия пучка с плазмой дается в разд. 4.6, после рассмотрения поперечных колебаний.

Л.3. Замечания и литература. Материал, изложенный в данном разделе, имеет важное значение в теории ламп СВЧ и ускорителей. Его применение для расчета микроволновых приборов достаточно хорошо отражено в ряде книг. Что касается ускорителей, то неустойчивости пучка подробно рассмотрены в книге Брука [44]. Следует заметить, что с момента ее опубликования появилось уже много новых работ, посвященных этому вопросу.

¹⁾ Это справедливо для ограниченной плазмы. — *Прим. ред.*

Изложение теории микроволновых ламп, аналогичное по духу приведенному в данном разделе, можно найти в учебниках Джонсона [133] и Коллина [60]. В более специализированных монографиях [13, 53, 96, 129, 227, 270, 272] по теории ламп СВЧ охвачены также многие аспекты, о которых ничего не говорилось здесь. Во всех этих книгах подробно рассматриваются волны в пучках, и многие из них содержат материал по фокусировке и влиянию пространственного заряда, ссылки на который можно найти в предыдущих главах нашей книги. Вопрос о взаимодействии пучка и волн в лампах СВЧ частично освещен в одном из первых обзоров, выполненных Пирсом [230]. Лампам СВЧ посвящено много других специализированных и популярных книг. Большое количество материала имеется в журналах по электронной технике, опубликованных до начала 60-х гг. Однако в последние годы в связи с развитием твердотельных микроволновых устройств интерес ко многим из этих ламп СВЧ значительно уменьшился.

Ссылки на литературу, посвященную вопросам применения теории к ускорителям, мы приведем несколько позже (разд. Л.5), после того как изучим поперечные неустойчивости и сгруппированные пучки. Теория связанных мод представляет собой одну из наиболее общих теорий, рассмотренных здесь, и применительно к лампам СВЧ составляет предмет книги Люиселла [191]. Впервые эта теория была развита Пирсом [229] для расчета параметров ламп СВЧ, а наиболее ясное физическое описание ее применения для расчета ЛБВ и ЛОВ имеется в статье Гоулда [102]. Ссылки на другие работы, в которых рассматривается теорема о потоке кинетической мощности и дается понятие энергии волн, мы приведем в разд. Л.4 после того, как изучим поперечные волны.

§ 4. Поперечные волны

4.1. Введение. До сих пор мы изучали только продольные волны. Хотя электрическое и магнитное поля волны имеют все три составляющие, мы считали, что частицы в волне движутся только в направлении ее распространения. Рассмотрим теперь поперечные волны, в которых частицы имеют составляющую скорости в направлении, перпендикулярном их распространению. В общем случае анализ поперечного движения является более сложным, чем продольного. Боковые смещения пучка в цилиндрической геометрии системы неизбежно нарушают аксиальную симметрию, поэтому решать уравнения для полей становится более трудно. В некоторых волнах скорость может иметь как поперечную, так и продольную составляющие.

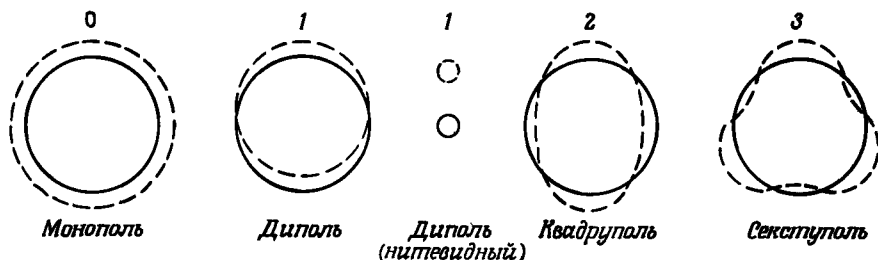


Рис. 6.17. Типы поперечного смещения в пучке

Рассматривая смещения границ пучка в азимутальном направлении, можно получить различные возможные конфигурации. Если такие смещения записать в виде

$$r = a_0 + \delta a_0 \cos m\theta, \quad (6.150)$$

то при $m = 0$ аксиальная симметрия сохраняется, но может меняться площадь поперечного сечения пучка. Если $m = 1$, то мы имеем боковые смещения пучка при сохранении площади его сечения неизменной ("изгибание" или "шланговая неустойчивость"). Более высокие моды приводят к искажению формы пучка. При $m = 2$ мы имеем квадрупольную моду, при которой пучок приобретает эллиптическое сечение. Эти конфигурации показаны на рис. 6.17. До сих пор мы рассматривали азимутальные выриации в виде стоячей волны. Возмущение δa имело вид $\delta a_0 \cos \omega t$; например, если $m = 2$, то в данном сечении пучок в течение полупериода колебаний сначала является эллиптическим, затем становится круговым и потом вновь эллиптическим, но при этом большая и малая оси эллипса меняются местами. Разумеется, возможно образование и бегущих волн, когда в выражении (6.150) аргумент косинуса равен $m\theta - \omega t$, т.е. фиксированное в пространстве возмущение начинает вращаться.

Поскольку $a \gg \delta a_0$, такое движение можно описать линейными дифференциальными уравнениями. В случае дипольного возмущения, когда поперечное сечение пучка не меняет своей формы, линейность описания можно сохранить даже для больших смещений при условии, что радиус пучка мал по сравнению с радиусом камеры. Во многих случаях полезно использовать приближение "нитевидного" пучка, в котором предполагается, что радиус пучка мал по сравнению с величиной смещения, а последняя в свою очередь мала по сравнению с диаметром камеры. В данный момент времени t и в данной точке z все частицы такого пучка имеют одни и те же значения x и y .

Начнем с изучения волн, распространяющихся в нитевидном пучке в отсутствие стенок, а затем посмотрим, как влияют на них стенки различного типа. Затем перейдем к рассмотрению пучков, в которых нельзя пренебрегать собственными полями и которые находятся в камере простой геометрии. Случай, когда необходимо учитывать как влияние пространственного заряда, так и комплексную проводимость стенки, с трудом поддается анализу.

4.2. Нитевидные пучки, когерентные бетатронные колебания и циклотронные волны. Особенно простой моделью, с которой мы начнем рассмотрение, является нитевидный пучок, диаметр которого предполагается малым по сравнению с характерной величиной смещения. Если фокусирующие силы, действующие на пучок в сторону оси, линейны, а плотность пучка невелика, то характерная частота колебаний не зависит от плотности пучка. Это отличается от случая продольных волн, в котором с уменьшением плотности пучка плазменная частота стремится к нулю.

Проанализируем вначале движение частиц в системе с двумя плоскостями симметрии xz и yz , причем, как обычно, ось z совпадает с осью пучка. Единственная сила, действующая на частицы пучка, имеет две составляющие, одна из которых направлена параллельно плоскости xz и пропорциональна x , а другая перпендикулярна этой плоскости и пропорциональна y . Эту силу можно записать через частоту колебаний одиночной частицы, измеренную в лабораторной системе координат. Обозначим частоту колебаний в соответствующих плоскостях как ω_x и ω_y . Поскольку движение отдельных частиц никак не скоррелировано, значение волнового числа k является произвольным. Частота колебаний волны в направлении оси x , измеренная в некоторой точке, испытывает доплеровский сдвиг относительно ω_x на величину βck и равна либо $\beta ck + \omega_x$, либо $\beta ck - \omega_x$ в зависимости от того, в каком направлении, — прямом или обратном, — распространяется волна в системе координат, движущейся со скоростью частиц. Обозначим эту частоту через ω и перегруппируем члены. Таким образом, имеем

$$\omega - \beta ck = \pm \omega_x \quad (6.151)$$

или, в более удобном виде, записывая $\omega_x = Q\omega_0$ (причины такой записи станут ясными из дальнейшего обсуждения), получаем

$$\frac{Q^2 \omega_0^2}{(\omega - \beta ck)^2} = 1. \quad (6.152)$$

Это уравнение имеет тот же самый вид, что и уравнение (6.39) для неограниченной плазмы. Плотность пучка в него не входит, и это уравнение следовало бы сравнить с соответствующим уравнением для продольных колебаний в пучке конечных размеров, в которое плотность пучка входит через ω_p , а дисперсионные зависимости сходятся вместе в начале координат, где $\omega = 0$, $k = 0$.

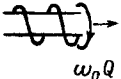
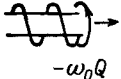
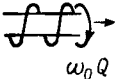
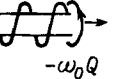
Аналогичное дисперсионное уравнение можно записать и для волн в плоскости yz , так что всего имеется четыре волны — по одной быстрой и одной медленной в каждой плоскости. Выбором обозначения в соответствии с теми, которые были приняты в разд. 5.3 гл. 2 для ускорителей частиц. Тогда z представляет собой расстояние, измеренное вдоль орбиты, а ω_0 равно $2\pi c/C$, где C — периметр орбиты. В данном случае ω_0 является функцией от β . Тип волн, о которых мы только что говорили, обычно называют "когерентными бетатронными колебаниями". Мы будем называть их бетатронными волнами.

В случае когда частоты колебаний в двух плоскостях одинаковы, движение можно анализировать с помощью комплексно-сопряженных переменных $\xi = x + jy$, $\xi^* = x - jy$, как мы это делали в разд. 2.2 гл. 2 (см. табл. 2.1). Они соответствуют волнам с левой и правой поляризациями, в которых частица движется по некоторой спиральной траектории. В данный момент времени частица находится на спирали, которая может вращаться либо в одну, либо в другую сторону. Кроме того, частица сама может вращаться в положительном или отрицательном направлении. В табл. 6.4 представлены эти четыре возможности, соответствующие четырем типам волн, в случае когда шаг спирали $2\pi/k = 2\pi c/\omega_0$. Эти четыре волны представляют основу для описания циклотронных волн в ларморовской системе координат в однородном магнитном поле, распространяющихся в направлении оси z , когда $Q\omega_0 = \Omega_L = \omega_c/2$. Две из них образованы частицами, вращающимися в поле с частотой $+\omega_c$, а две другие — частицами, движущимися по спиральным траекториям вдоль силовых линий поля. Эти волны называются "синхронными"¹⁾. Движение частиц в них аналогично движению струй воды, выпущенных из шланга, вращаемого с постоянной частотой по часовой стрелке или в противоположном направлении. Параметры циклотронных волн представлены в табл. 6.5. Интересно отметить, что из двух синхронных волн, фазовые скорости которых равны ω/k , одна медленная, а другая быстрая.

¹⁾ Синхронные волны представляют собой по существу волны поперечно-го смещения электронов в противоположность циклотронным волнам, являющимся волнами поперечной скорости. — *Прим. ред.*

Таблица 6.4

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В НИТЕВИДНОМ СФОКУСИРОВАННОМ ПУЧКЕ

Направление спирали	+	+	-	-
Частота вращения	$\omega_0 Q$	$-\omega_0 Q$	$\omega_0 Q$	$-\omega_0 Q$
Скорость волны	$(\omega + \omega_0 Q)/k$	$(\omega - \omega_0 Q)/k$	$(\omega - \omega_0 Q)/k$	$(\omega + \omega_0 Q)/k$
Тип волны	Быстрая	Медленная	Медленная	Быстрая
				

Шаг спирали показан в увеличенном масштабе; горизонтальными линиями показан гипотетический непрозрачный цилиндр, который позволяет представить трехмерную картину.

4.3. Поведение волн в нитевидном пучке при наличии резистивных стенок.

Влияние сопротивления стенок на распространение волн в нитевидном пучке можно понять на основе простых физических аргументов. Рассмотрим симметрично изогнутый нитевидный пучок, который находится между двумя пластинами, перпендикулярными плоскости колебаний, как показано на рис. 6.18. Предположим вначале, что пластины сделаны из идеально проводящего материала. Частицы индуцируют в пластинах заряды изображения, которые имеют противоположные знаки, и токи изображения, которые текут в направлении, обратном реальному току пучка. Эти заряды и токи притягивают и отталкивают соответственно частицы пучка с силой, которая при условии малости смещения пропорцио-

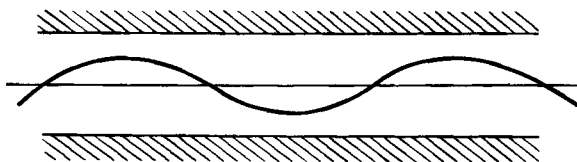
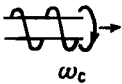
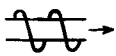
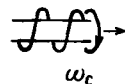
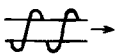


Рис. 6.18. Нитевидная волна тока между бесконечными проводящими плоскостями.

Если пучок распространяется слева направо, то в плоскостях индуцируется ток, равный току пучка, но текущий в обратном направлении. При вертикальном смещении пучка в плоскостях индуцируются дополнительные токи, которые при взаимодействии с током пучка создают силу, направленную внутрь; если пучок не нейтрализован, то индуцированные заряды создают значительно большую силу в обратном направлении.

Таблица 6.5

**ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В НИТЕВИДНОМ ПУЧКЕ
В ПРИСУТСТВИИ АКСИАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Направление спирали	+	+	-	-
Частота вращения ω_c	ω_c	0	ω_c	0
Скорость волны	$(\omega + \omega_c)/k$	ω/k	$(\omega - \omega_c)/k$	ω/k
Тип волны	Быстрая	Медленная	Медленная	Быстрая
				

нальна расстоянию x от оси. В случае заряженного пучка доминирующее влияние оказывают заряды изображения, и результирующая фокусировка становится более сильной. Частота волны испытывает "когерентный Q -сдвиг" в сторону меньших значений.

Если теперь предположить, что в пластинах имеется определенная диссипация энергии, то поведение волн несколько изменяется. Силы изображений в некоторой точке больше не пропорциональны смещению пучка в этой точке; ступенчатое смещение части пучка не приводит к ступенчатому же возрастанию силы. Сила вначале резко возрастает до той же величины, которую она должна была бы иметь в случае идеально проводящих поверхностей, а затем уменьшается. Ступенчатое смещение пучка приводит к форме поля, показанной на рис. 6.19. Перемещающаяся ступенька оставляет за собой спадающий "хвост", который влияет на следующие частицы. Если последующие частицы смещены *больше*, чем первоначальные, то результирующая сила, действующая на них, будет *меньше*, и наоборот. Ясно, что для волны при некотором значении амплитуды x сила пропорциональна dx/dt . Это означает, что в среде с небольшими потерями на синусоидальную волну действует дополнительная сила, направленная в сторону оси и сдвинутая по фазе на $\pi/2$. Знак этой силы таков, что она направлена *внутрь* и имеет наибольшую величину в тех местах, где волна движется от оси, и наоборот. Теперь, хотя волна может распространяться назад, это отнюдь не означает, что частицы, образующие данную волну, будут также двигаться назад. В самом деле, если волна распространяется с меньшей скоростью, чем частицы пучка, то наблюдатель, находящийся в системе координат, движущейся вместе с пучком, будет

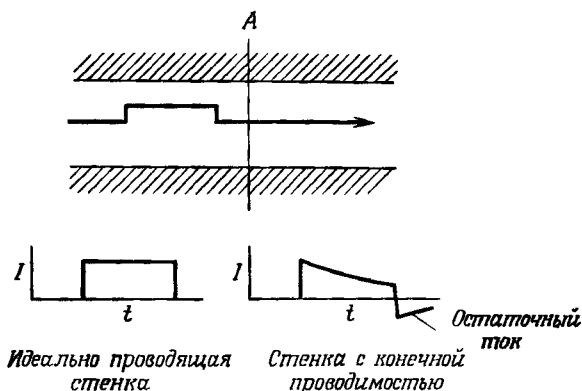


Рис. 6.19. Пучок со "ступенчатым" профилем бокового смещения, которое приводит к возникновению импульса тока в некотором сечении A окружающих стенок.

Если стенки обладают идеальной проводимостью и длина импульса велика по сравнению с уменьшенным в γ раз радиусом камеры, то форма индуцированного импульса имеет вид, показанный на левой диаграмме, если же в стенках имеются потери, то, как показано на правой диаграмме, после прохождения ступеньки остается "хвост" (остаточный ток).

видеть частицы перемещающимися в сторону к оси, в то время как волна будет распространяться в обратном направлении. Если же скорость волны больше, чем скорость частиц, то частицы движутся в направлении от оси. Такое поведение показано на рис. 6.20. Таким образом, если волна медленная, то частицы при

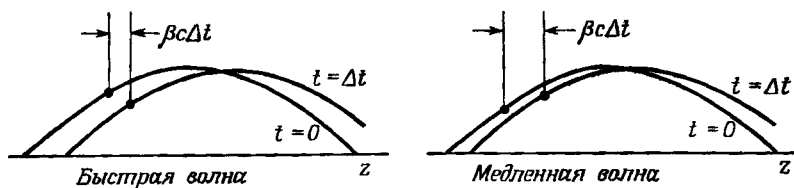


Рис. 6.20. Относительное движение частиц и волн в быстрой и медленной поперечных волнах.

Для обеих волн — быстрой и медленной — показано смещение в зависимости от положения в два момента времени $t = 0$ и $t = \Delta t$. Наблюдатель, движущийся со скоростью частиц пучка, видит, что в случае быстрой волны как волна, так и частицы движутся вместе к оси; с другой стороны, в случае медленной волны он увидит, что волна и частицы движутся в противоположных направлениях.

движении от оси ускоряются, и амплитуда волны растет. В быстрой волне сила направлена в сторону, противоположную движению частиц, и волна затухает. Так же как и в случае продольных волн, диссипация энергии приводит к росту медленной волны и затуханию быстрой.

Аналогичные рассуждения можно провести и для циклотронных волн. На первый взгляд может показаться, что две синхронные волны должны быть симметричными, поскольку ни одна из них не ответственна за взаимодействие пучка с магнитным полем. Однако в табл. 6.5 показано, что одна из этих волн является медленной, а другая — быстрой. В присутствии стенок возникает электрическое поле, имеющее азимутальную составляющую. Направление этого поля, а следовательно, и радиальной скорости, пропорциональной произведению $E_{\theta} B_z$, зависит от направления спирали. Полное исследование поведения циклотронных волн дается в книге Льюиселла [191]. Они могут взаимодействовать с поперечными составляющими поля в структуре таким же образом, как взаимодействовали волны с продольными составляющими полей, связь которых мы исследовали в разд. 3.9 настоящей главы.

Здесь уместно пояснить, в каком смысле можно говорить о том, что эти поперечные волны обладают отрицательной энергией. Ясно, что если каждой частице пучка придать соответствующую поперечную скорость, не изменяя ее продольной скорости, то система, в которой распространяется волна, будет обладать большей энергией, чем в ее отсутствие, независимо от того, быстрая это волна или медленная. Однако если учесть реальные методы возбуждения волны, то оказывается, что продольная скорость все же изменяется во втором порядке малости. Этого изменения достаточно (при поперечной скорости, имеющей первый порядок малости), чтобы полная энергия всей системы изменилась. Такое изменение является положительным в случае быстрой волны и отрицательным в случае медленной. В приложении 6 мы рассмотрим простой частный пример, иллюстрирующий это поведение.

Если продольная и поперечная скорости частиц известны с точностью до членов первого порядка, то, как показано в разд. 3.8 настоящей главы, однозначно определить энергию волны невозможно. Этот вопрос вносит определенные трудности при попытке обобщить теорему о кинетической мощности с учетом поперечного движения. Эта формальная трудность была преодолена Стэрроком [289, 290], который ввел величину, называемую псевдоэнергией. Данная величина однозначно определяется членами первого порядка, и, следовательно, ее не обязательно идентифицировать с реальной энергией, переносимой пучком. Сугубо формальная процедура начинается с постулирования соответствующей плотности лагранжиана и приводит

к следующим соотношениям между псевдоэнергией и псевдоимпульсом волн:

$$E = J\omega, \quad p = Jk, \quad (6.153)$$

где J — плотность действия. В примере, который мы обсудим в приложении 6, используется интересное предположение о том, что частота волны с отрицательной энергией считается отрицательной. Муша [209] провел параллель между этим явлением и квантовым явлением, когда при "поглощении квантов отрицательной энергии" возбуждается волна с отрицательной энергией.

Пирс [231] провел интересное рассмотрение физического смысла волн с отрицательной энергией, которое отличается от формального рассмотрения Стэррока. Обобщение на релятивистский случай было выполнено Бриггсом [38]. В обзоре [25] приведена более общая формулировка теоремы о кинетической мощности и имеются ссылки на ранее опубликованные работы, а также обсуждаются некоторые вопросы, связанные с затруднениями в интерпретации теоремы.

4.4. Поперечная неустойчивость в ускорителях. В предыдущем разделе мы исследовали физическую природу волн в нитевидных пучках и качественно обсудили взаимодействие таких волн со стенками. Было обнаружено, что эти волны имеют некоторые аналогии и в то же время различия по сравнению с продольными волнами. В обоих случаях появление проводящих стенок вблизи пучка приводит к сдвигу частот колебаний, причем стенки с конечным сопротивлением подавляют быстрые волны и вызывают нарастание медленных волн. Однако существенное отличие состоит в том, что с уменьшением плотности частиц частота продольных волн стремится к нулю, в то время как частота поперечных волн остается конечной (за исключением небольшого Q -сдвига).

Хотя исследование поперечных циклотронных волн проводилось с целью создания ламп на бегущей поперечной волне и "лампы Адлера" (параметрического усилителя на поперечной волне), описанной, в частности, Симсом и Стефенсоном [272], эти устройства не получили широкого распространения. Во время написания данной книги поперечные волны представляли интерес главным образом в области ускорителей частиц, причем не с точки зрения возбуждения таких волн, а с целью их подавления.

Метод изучения этих волн является аналогичным тому, который был разработан для продольных волн.¹⁾ В этом методе определяют

¹⁾ Подробное рассмотрение поперечной неустойчивости пучка в циклических ускорителях содержится в следующих работах В.И. Балбеков и А.А. Коломенский. — Атомная энергия, 1965, т. 19, с. 126; 1966, т. 20, с. 270. — *Прим. ред.*

величины U_{\perp} и V_{\perp} , а имеющий практическое значение критерий возбуждения неустойчивости выражают через определенный соответствующим образом импеданс. Описанию такого метода посвящена статья Ласлета, Нейла и Сесслера [168]. Здесь мы используем несколько другой подход, а именно будем следовать импедансному формализму, разработанному в ЦЕРНе. В этом рассмотрении волны не являются волнами нитевидного пучка; предполагается, что пучок сохраняет свое круговое сечение и смещается на величину, малую по сравнению с его радиусом. Наличие поперечных волн вносит дополнительные осложнения, поскольку существует не только распределение частиц по скоростям, но также и распределение амплитуд колебаний частиц в пучке. Ради сохранения простоты изложения введем некоторые упрощающие предположения, которые тем не менее должны позволить сформулировать полезную теорию, имеющую практическое значение.

В предыдущем разделе мы рассмотрели физическую природу сил, которые действуют на смещенный пучок. Сила, действующая на синусоидальную волну зарядов, имеет составляющую, пропорциональную смещению пучка, которая приводит к сдвигу частоты колебаний, и составляющую, пропорциональную скорости, которая может приводить к затуханию или нарастанию волн. Рассчитаем теперь величину этой силы, которая зависит от геометрии и интенсивности пучка, а также от геометрии и проводимости стенок. Для прямоугольной и цилиндрической конфигурации такие вычисления проводились Ласлетом и др. [168]. Здесь мы рассмотрим только последнюю конфигурацию пучка, показанную на рис. 6.21. Для вывода воспользуемся приближением тонкого пучка, которое соответствует малости b/γ_w по сравнению с

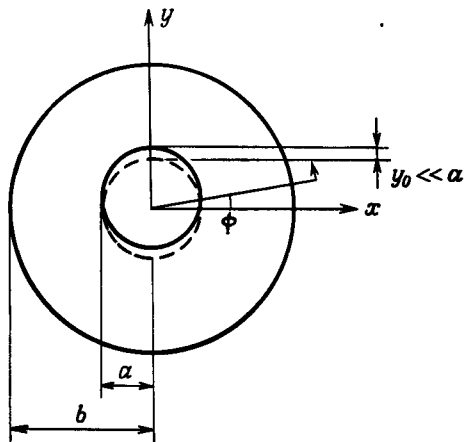


Рис. 6.21 Геометрия и обозначения, используемые при анализе поперечной неустойчивости.

длиной волны возмущения. Это означает, что при расчете поперечных полей, обусловленных смещением пучка, задача сводится к двумерной и k_z можно всюду, за исключением аргумента экспонент, выбрать равным нулю. Плотность частиц в пучке равна n_0 , а геометрия и величина смещения пучка приведены на рис. 6.21. Предположим, что движение частиц происходит в плоскости yz и соответствует вертикальному движению в ускорителе.

Источниками полей служат следующие величины:

$$n_1 q = n_0 q y_0 \sin \phi \delta(r-a) \exp[j(\omega t - kz)], \quad (6.154)$$

$$i_{1z} = n_1 q v c.$$

Вычислим теперь поля внутри и вне пучка, предполагая вначале, что стенки обладают идеальной проводимостью. Внутри пучка поля являются однородными, чего нельзя сказать для области, расположенной вне пучка. Удобно выбрать цилиндрическую систему координат и согласовать поля на внутренней и внешней границах. Здесь мы будем близко следовать подходу, используемому Ласлетом и др. в статье [168]. Выразим вначале поля через неизвестные их составляющие E_{1y} , H_{1x} , E_{20} и H_{20} , а затем найдем эти значения, сшивая поля с полями источников, заданных выражениями (6.154). Внутри пучка напряженности полей можно записать в виде

$$E_1 = E_{1y} (\sin \phi \hat{r} + \cos \phi \hat{\phi}), \quad (6.155)$$

$$H_1 = H_{1x} (\cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi}),$$

а вне пучка —

$$E_2 = E_{20} [\{(b/r)^2 + 1\} \sin \phi \hat{r} - \{(b/r)^2 - 1\} \cos \phi \hat{\phi}], \quad (6.156)$$

$$H_2 = H_{20} [\{(b/r)^2 - 1\} \cos \phi \hat{r} + \{(b/r)^2 + 1\} \sin \phi \hat{\phi}].$$

Сшивая поля на границе источника и на стенке, получаем следующие выражения для неизвестных составляющих поля внутри пучка:

$$E_{1y} = \frac{-\frac{1}{2} n_0 q y_0 \{1 - (a/b)^2\}}{\epsilon_0}, \quad (6.157)$$

$$Z_0 H_{1x} = -\beta E_{1y}$$

и вне пучка:

$$E_{20} = \frac{n_0 q y_0 (a^2/b^2)}{\epsilon_0},$$

$$Z_0 H_{20} = -\beta E_{20}. \quad (6.158)$$

Если же стенки камеры не идеально проводящие и их проводимость равна σ , то вводя небольшие дополнительные составляющие полей, которые удовлетворяют новым граничным условиям на стенке, можно учесть и проводимость (с точностью до членов первого порядка). Условие, которому нужно удовлетворить, записывается следующим образом:

$$E'_{1z} = -(1+j)Z_0 \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2} H_{1\phi}. \quad (6.159)$$

Из этого условия мы хотим определить дополнительные составляющие E_y и H_x при $r < a + \gamma_0$. Подставляя $H_{1\phi}$ из выражений (6.157) и (6.158), уравнение (6.159) можно свести к уравнению (при этом мы опускаем экспоненциальный множитель)

$$E'_{1z} = (1+j)n_0 q \beta \gamma_0 \frac{a^2 r}{b^3} \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2} \sin \phi, \quad (6.160)$$

которое справедливо для всех значений r . Напряженность магнитного поля можно найти из уравнения $\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = -\partial \mathbf{E} / \partial t$. Она записывается следующим образом:

$$H'_1 = -(1-j)n_0 q \beta \gamma_0 c \frac{a^2}{b^3} \left(\frac{1}{2\sigma \omega \epsilon_0} \right)^{1/2} (\cos \phi \hat{r} - \sin \phi \hat{\phi}). \quad (6.161)$$

Отсюда мы видим, что магнитное поле не зависит от r и не уменьшается до нуля при $r = b$. Следовательно, уравнение (6.159) удовлетворяется только в первом порядке.

Запишем теперь силу, действующую на частицу в пучке, смещенном на расстояние y_0 , как

$$\begin{aligned} F_y &= (E_y + \beta c B_x) q = \\ &= -\frac{1}{2} n_0 q^2 y_0 \left\{ \frac{(a^2 - b^2)}{b^2 \epsilon_0 \gamma^2} - 2(1-j) \frac{\beta^2 a^2 c}{b^3} \left(\frac{1}{2\sigma \omega \epsilon_0} \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.162)$$

Следуя Ласлету и др., переищем это выражение следующим образом:

$$F_y = 2\gamma m_0 \omega Q_y \{U_1 + (1-j)V_1\} y_0; \quad (6.163)$$

здесь

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{-\omega^2 \{1 - (a/b)^2\}}{4Q_y \omega_0 \gamma^2}, \\ V_1 &= \frac{\omega^2 a^2 \beta c}{2\omega \omega_0 b^3 Q_y} \left(\frac{\epsilon_0 \omega}{2\sigma} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.164)$$

[По-другому силу F_y можно бы было записать непосредственно через импеданс Z_{\perp} , определяемый выражением (6.172).] Величины (6.164) имеют размерность частоты. Параметр U_{\perp} существенно зависит от плотности частиц пучка, т.е. от величины ω_p^2 , а V_{\perp} зависит от произведения $a^2 \omega_p^2$, которое пропорционально полному числу частиц. В отличие от разд. 3.4 настоящей главы, в выражение для плазменной частоты вместо m^* входит поперечная масса γm_0 . Из выражения (6.163) следует, что силы изображения сдвигают величину Q_y^2 на (опускаем индексы)

$$\Delta Q^2 = \frac{-2Q\{v_{\perp} + (1-j)V_{\perp}\}}{\omega_0}, \quad (6.165)$$

так что дисперсионное уравнение (6.152) для поперечных волн приобретает следующий вид:

$$\frac{\omega_0^2 Q^2 - 2\omega_0 Q(U_{\perp} + V_{\perp}) + 2j\omega_0 QV}{(\omega - \beta ck)^2} = 1. \quad (6.166)$$

В циклических ускорителях ω_0 представляет собой частоту вращения частиц по орбите, и вместо βck надо подставить $n\theta$, где n — целое число.

В встречающихся на практике случаях всегда выполняется условие $V_{\perp} \ll \omega_0 Q$. Тогда, вводя вместо k величину n , уравнение (6.165) можно переписать в виде

$$\omega = (n \pm Q)\omega_0 \mp (U_{\perp} + V_{\perp} - jV_{\perp}). \quad (6.167)$$

При $n > Q$ нижний знак соответствует медленной волне, время нарастания которой (в e раз) V_{\perp}^{-1} обратно пропорционально числу частиц, приходящихся на единицу длины пучка. При $n < Q$ это уравнение описывает быструю заглушающую волну с отрицательной фазовой скоростью. Члены $U_{\perp} + V_{\perp}$ приводят к уменьшению эффективного сдвига частоты Q на величину $(U_{\perp} + V_{\perp})/\omega_0$. Помимо опасности, связанной с потерями пучка вследствие появления нарастающей волны, существует также возможность сдвига частоты Q к резонансному значению и возникновения потерь, обусловливаемого механизмом, описанным в разд. 7.3 гл. 2.

Как и при рассмотрении продольных волн, полученный результат (6.167) нетрудно обобщить на случай наличия разброса скоростей частиц в пучке; в этом случае дополнительно возникает разброс амплитуд колебаний y_0 . Интегрируя соответствующую функцию распределения, как и выше, и сохраняя обозначения, принятые в теории ускорителей (разд. 3.5 настоящей главы), диспер-

сионное уравнение можно записать в виде

$$1 = Q\omega_0 \{U_{\perp} + (1-j)V_{\perp}\} \int \frac{(\partial h / \partial y_0)(y_0) y_0^2 dy_0 f(W) dW}{(\omega - n\hat{\theta})^2 - Q^2 \hat{\theta}^2} \quad (6.168)$$

где $y_0 h(y_0) dy_0$ — число частиц, находящихся в интервале dy_0 , а $f(W) dW$ — число частиц в интервале dW вблизи $W = 2\pi(P_{\theta} - P_0)$.

Таким образом,

$$\int (\partial h / \partial y_0)(y_0) y_0^2 dy_0 = 1, \quad \int f(W) dW = 1. \quad (6.169)$$

Как и в уравнении (6.99), угловая скорость $\hat{\theta}$ равна $\omega_0 - k_0 W$. Дисперсионное уравнение (6.168) приведено в оригинальной статье Ласлета и др., однако там оно получено на основе уравнения Власова.

По форме уравнение (6.168) отличается от уравнения (6.99). Однако с помощью некоторых предположений их можно свести к одному виду и решать единым образом. Во-первых, следует заметить, что выполнить интегрирование по y_0 нетрудно, если не принимать во внимание нелинейную зависимость Q от y_0 . Во-вторых, поскольку нас интересуют только нарастающие волны, достаточно ограничиться исследованием значений ω , лежащих вблизи $(n - Q)\omega_0$. Разложим подынтегральное выражение в (6.168) на отдельные части:

$$\{(\omega - n\hat{\theta})^2 - Q^2 \hat{\theta}^2\}^{-1} = (2Q\hat{\theta})^{-1} [\{\omega - (n+Q)\hat{\theta}\}^{-1} - \{\omega - (n-Q)\hat{\theta}\}^{-1}] \quad (6.170)$$

Сингулярность, имеющаяся в первом члене правой части, лежит в области значений, которые не представляют для нас интереса; следовательно, этот член будет пренебрежимо мало влиять на окончательные результаты. Записывая интеграл в приближенном виде, получаем

$$1 \approx -\frac{1}{2}(U_{\perp} + V_{\perp} - jV_{\perp}) \int \frac{h'(y_0) y_0^2 dy_0 f(W) dW}{\{\omega - (n-Q)\hat{\theta}\}}; \quad (6.171)$$

здесь $\hat{\theta} = \omega_0 - kW$.

Теперь можно проделать такие же выкладки, как и в разд. 3.6 настоящей главы, и найти порог неустойчивости при наличии затухания Ландау. Мы не будем здесь рассматривать этот вопрос, который изложен в оригинальной статье [128] и сопровождается, как и при анализе продольных колебаний, подробными расчетами.

Член, содержащий U_{\perp} и V_{\perp} , можно, как и прежде, записать через импеданс и найти условие устойчивости волн в терминах разброса энергии. Поперечный импеданс удобно определить следую-

щим выражением:

$$Z_{\perp} = \frac{\oint (E_y + \beta c B_x) ds}{I \gamma_0 \beta}, \quad (6.172)$$

где qE_y/γ_0 и $q\beta c B_x/\gamma_0$ — интегрируемые по орбите электрическая и магнитная силы, действующие на пучок в ускорителе при единичном смещении, а I — ток пучка. Импеданс имеет размерность величины Z_{σ} , деленной на длину. Поэтому имеет смысл умножить правую часть уравнения (6.172) на периметр установки.

Интересно отметить, что хотя такой импеданс введен здесь в связи с анализом неустойчивостей в циклических ускорителях, его использовали также при анализе высокочастотных сепараторов пучков частиц [162]. В таком устройстве пучки частиц, обладающих одним и тем же импульсом, разделяются полем бегущей волны, имеющей поперечную составляющую электрического поля. Сепаратор настраивается таким образом, чтобы фазовая скорость этого поля примерно совпадала со скоростью желаемой (или нежелаемой) составляющей потока, которая отклонялась бы этим полем более сильно, чем остальные составляющие потока.

Проводя вычисления, аналогичные тем, что описаны в разд. 3.6, можно снова найти критерий устойчивости, справедливый для "разумно" выбранных функций распределения. На этот раз он имеет вид

$$Z_{\perp} \leq \frac{\pi \beta m_0 c \omega_0 Q}{q I} \left| (n-Q) \eta + \frac{\partial Q}{\partial (\Delta p/p)} \right| \frac{\Delta p}{m_0 c}, \quad (6.173)$$

где $\eta = \gamma_t^{-2} - \gamma^{-2} = -\gamma m_0 / m^*$. Подставляя $I = Nq\beta c$, $v = Nq^2 / 4\pi \epsilon_0 m_0 c^2$, $\partial Q / \partial (\Delta p/p) = Q\xi$ [выражение (2.139)], выражение (6.173) можно переписать следующим образом:

$$\frac{v}{\gamma} Z_{\perp} \leq \frac{\omega_0 Q Z_0}{4c} \left| (n-Q) \eta + Q\xi \right| \frac{\Delta p}{m_0 c}. \quad (6.174)$$

Кейл [141] на основе численных расчетов нашел пределы, в которых стенки ограничивают режим работы пересекающихся накопительных колец, действующих в ЦЕРНе. Для того чтобы поддерживать на возможно низком уровне как продольный, так и поперечный импедансы вакуумной камеры, надо предпринимать определенные усилия.

В электронных накопительных кольцах и во всех циклических ускорителях, за исключением бетатрона, обычно работают с бунчируемыми пучками. Как мы увидим в § 5, рассчитать критерии устойчивости таких пучков является делом намного более трудным.

4.5. Взаимодействие пучка с поперечными бегущими волнами; "срыв" пучка. В предыдущем разделе мы проанализировали взаимодействие

поперечных волн с гладкой стенкой, обладающей конечной проводимостью. Как и продольные волны, они также могут взаимодействовать с волноводными структурами. Анализ связанных мод в структурах с продольными волнами, рассмотренный в разд. 3.7, был дан Льюиселлом [191], а в книге Пирса [227] имеется глава, посвященная лампам с поперечной бегущей волной.

В линейных ускорителях электронов поперечная неустойчивость ограничивает максимально достижимый ток пучка. Аналогичное поведение характерно и для лампы с поперечной бегущей волной; в замедляющей структуре типа диафрагмированного волновода могут распространяться всевозможные моды, среди которых имеется мода с поперечным электрическим полем на оси и отрицательной групповой скоростью. Как было показано в разд. 3.7, она распространяется вдоль волновода в обратную сторону и осуществляет положительную обратную связь электронов пучка по энергии. Однако эта мода не взаимодействует с волнами в пучке, и учесть ее влияние можно, рассматривая обмен энергией между отдельными частицами. Этот эффект подробно анализировался в обзорных статьях [124, 125]; имеется также обширный обзор, выполненный Лоевом [189]. Поскольку внешняя фокусировка используется не всегда, при этом нельзя отличить быстрые и медленные волны, распространяющиеся в пучке.

Аналогичная, но не идентичная по природе, неустойчивость развивается также при прохождении пучка через ряд резонаторов или группы резонаторов, которые не связаны между собой. В такой системе не может распространяться обратная волна, а неустойчивость аналогична продольной неустойчивости, развивающейся при взаимодействии пучка со стенкой, имеющей индуктивный импеданс (изитрон), которую мы обсуждали в разд. 3.4 настоящей главы. Энергия непрерывно вводится в резонаторы или материал стенок, до тех пор пока нарастание волны не будет ограничено диссипацией или нелинейностями (такими, например, которые возникают при столкновении пучка со стенкой). Эти вопросы также анализируются в упомянутых выше обзорах.

4.6. Поперечная двухпотоковая неустойчивость. В ускорителях частиц иногда представляет опасность поперечная двухпотоковая неустойчивость. Образующие за счет ионизации остаточного газа ионы, заряд которых противоположен заряду частиц пучка, удерживаются в потенциальной яме, образованной циркулирующим несгруппированным пучком. На движущиеся частицы пучка действуют возвращающие силы со стороны фокусирующего поля ускорителя и поля захваченных частиц; с другой стороны, захваченные частицы испытывают силу, создаваемую только движущимися частицами. Поскольку мы хотим рассчитать лишь порог неустойчивости и ее инкремент,

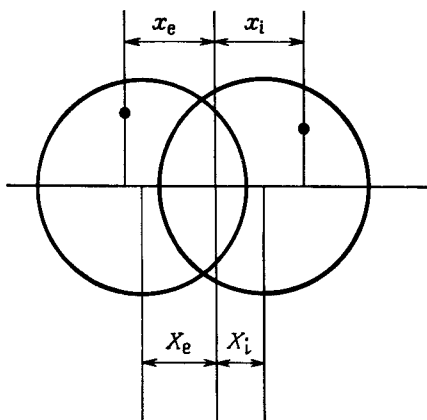


Рис. 6.22. Обозначения, используемые при анализе двухпотоковой неустойчивости.

Координаты центра пучка и отдельной частицы обозначены соответственно через X и x .

ограничимся одним линейным приближением, т.е. будем считать, что амплитуды малы. Эффекты, обусловленные искажением формы пучка (монопольная, квадрупольная моды и моды более высоких порядков), рассматриваться непосредственно нами не будут. Для определенности предположим, что пучок радиусом a состоит из подвижных электронов и стационарных положительно заряженных ионов, плотности которых распределены однородно в поперечном сечении пучка, а их отношение (для однозарядных ионов) равно f . Пусть x_e и x_i — это смещения электронов и ионов от оси, а X_e и X_i — смещения центров масс пучков (рис. 6.22).

В задачу входят три частоты: Частота колебаний электронов в фокусирующем поле ускорителя $Q\omega_0$; частота колебаний ионов в поле электронного пучка $Q_i\omega_0$ и частота колебаний электронов в поле ионного пучка $Q_e\omega_0$, которую должны были бы иметь электроны при отсутствии фокусирующего поля, когда $Q\omega_0 = 0$. Рассчитывая поля пространственных зарядов частиц обоих знаков, нетрудно показать, что эти частоты определяются выражениями

$$Q_e^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}f\omega_{pe}^2, \quad (6.175)$$

$$Q_i^2\omega_0^2 = \omega_{pi}^2/2f,$$

где ω_{pe} и ω_{pi} — плазменные частоты электронов и ионов. Движение

двух пучков описывается связанными уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{x}_e + Q^2 \omega_0^2 x_e &= Q_e^2 \omega_0^2 (x_e - X_i), \\ \ddot{x}_i &= Q_i^2 \omega_0^2 (x_i - X_e).\end{aligned}\quad (6.176)$$

Если предположить, что все частицы данного сорта имеют одну и ту же частоту колебаний Q , то, выполняя суммирование по всем ионам и электронам, можно найти уравнения движения центров масс пучков. Они имеют тот же самый вид, что и уравнения (6.176), но вместо x надо записать X . Подставляя решение в виде бегущей поперечной волны

$$X = X_0 \exp\{(\omega - \beta c k)t - kz\}, \quad (6.177)$$

получаем

$$\begin{aligned}\{-(\omega - \beta c k)^2 + \omega_0^2 Q^2\} X_e &= Q_e^2 \omega_0^2 (X_e - X_i), \\ -\omega^2 X_i &= Q_i^2 \omega_0^2 (X_i - X_e),\end{aligned}\quad (6.178)$$

где βc — скорость частиц пучка, равная $C\omega_0/2\pi$. Исключая величину X_i/X_e , находим дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 - \omega_0^2 Q^2) \{(\omega - \beta c k)^2 - \omega_0^2 (Q^2 + Q_e^2)\} = \omega_0^4 Q_e^2 Q_i^2, \quad (6.179)$$

которое можно переписать в другом виде следующим образом:

$$\frac{\omega_0^2 Q_i^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2 Q_e^2}{(\omega - \beta c k)^2 - \omega_0^2 Q^2} = 1. \quad (6.180)$$

Это уравнение аналогично по виду дисперсионному уравнению для продольной двухпотоковой неустойчивости (6.46), но не совпадает с ним тождественно. Отличие заключается в появлении во втором знаменателе члена $\omega_0^2 Q^2$, который приводит к эффекту ослабления связи. Внутри центрального параллелограмма (см. рис. 6.3), сформированного асимптотами, появляется петля.

Подробный анализ дисперсионного уравнения был выполнен Кошкаревым и Зенкевичем [153], которые построили области устойчивости на плоскости $Q_e Q_i$ для различных значений Q . Эти авторы рассмотрели также квадрупольную моду и эффекты затухания Ландау. Влияние токов изображения, возбуждаемых в стенке, а также затухания Ландау изучалось Ласлетом, Сесслером и Мёлем [167]. Как и для неустойчивостей других типов, затухание Ландау приводит к появлению порога неустойчивости, но ни кату-

хание, ни изображения не оказывают существенного влияния на ограничения, налагаемые неустойчивостью. С другой стороны, введение ионов в чисто электронный пучок все же значительно снижает порог возбуждения поперечной неустойчивости.

В ускорителях электронных колец эта неустойчивость налагает существенные ограничения на допустимые значения параметров [202]. Обратная картина, когда неустойчивость развивается при появлении электронов в протонном пучке, наблюдалась в протонном ускорителе [110] и в протонных накопительных кольцах ЦЕРНа [141]. Хотя в некоторых случаях такие колебания представляют опасность, они все же менее разрушительны, чем в электронном кольце.

В установках, в которых пучок сгруппирован в сгустки, ионы, сформированные в одном из сгустков, успевают уйти до прихода следующего сгустка, так что для них этот эффект не имеет никакого значения.

Л.4.1 – 6. Замечания и литература. Изучение поперечных волн в пучках было предпринято вначале в связи с разработкой ламп СВЧ. Сигмэн [273] описал циклотронные волны в нитевидном пучке и проанализировал вопрос о знаке энергии. Однако, поскольку оказалось, что такие лампы не нашли большого применения, интерес к ним упал. К этому вопросу вновь появился интерес в связи с дальнейшей разработкой ускорителей частиц. В начале 60-х гг. были обнаружены неустойчивости в экспериментальных установках, построенных группой из Исследовательской ассоциации университетов Среднего Запада (США). В статье Ласлета и др. [168], которую мы обсуждали в разд. 4.4, приведено сравнение этих экспериментальных результатов с теорией.

Хотя в начале исследований при расчете обычно использовались параметры U и V , в настоящее время более принято использовать поперечный импеданс. Как будет показано в § 5 настоящей главы, упрощение понятий при переходе к импедансу особенно заметно в случае анализа бунчированных пучков, который был выполнен Сахерером.

Дальнейший обзор литературы, посвященной неустойчивостям пучков в ускорителях, мы дадим в разд. Л.5, после того как рассмотрим сгруппированные (бунчированные) пучки.

4.7. Аксиально-симметричные поперечные волны в ламинарном параксиальном пучке Распространение поперечных волн малой амплитуды можно изучать относительно просто в параксиальном приближении. В этом приближении пренебрегается продольными составляющими полей, возникающими при смещении зарядов. Поверхностные волны, аналогичные тем, которые были рассмотрены в разд.2.3 и в которых заряды движутся как в поперечном, так

и в продольном направлениях, мы изучим в следующем разделе. В разд. 3.1 гл. 3 уже обсуждался вопрос о "пульсации" пучков, удерживаемых магнитным полем. В данном разделе этот вопрос обсуждается значительно шире, причем упор делается на вывод дисперсионного уравнения, учитывающего как бегущие, так и стоячие волны.

Рассмотрим вначале электронный пучок, в котором поток является ламинарным. Предположим, что в отсутствие волнового движения расталкивающие силы пространственного заряда пучка компенсированы неподвижными ионами фона, которые находятся и вне области, занятой пучком. Со стороны ионов на электроны действует сила, направленная в сторону оси и пропорциональная расстоянию, на котором электроны находятся от оси. В дальнейшем обсуждении будем рассматривать ионы как внешнюю фокусирующую систему, в которой возвращающая сила, действующая на электрон, отклоненный от оси, пропорциональна его смещению. Ниже мы введем в рассмотрение также и магнитное поле; как отмечалось выше, две системы, одна с неподвижным ионным фоном, а другая — с внешним магнитным полем, фактически эквивалентны друг другу, поскольку, переходя в ларморовскую систему координат, можно одну систему преобразовать в другую.

Параксиальное уравнение огибающей пучка (3.57) (которое в данном случае ламинарного потока идентично уравнению движения граничного электрона) записывается в виде

$$a'' + \kappa_e a - \frac{K}{a} - \left(\frac{P_{\theta a}}{\beta \gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{a^3} = 0. \quad (6.181)$$

Внешние фокусирующие силы, включая силу, действующую со стороны ионного фона, учитываются величиной κ_e , а обобщенный первеанс (см. разд. 2.5 гл. 3) обозначается через K . Поскольку $V_z = 0$, имеем $P_{\theta a} = p_{\theta a}$. Нижний индекс a , который означает, что величина измеряется на границе пучка, в дальнейшем изложении будем опускать.

Будем решать задачу так, как мы это делали в § 3 гл. 3. Линеаризация уравнения осуществляется в предположении, что $a = a_0 + \rho$, где $\rho \ll a$. Первеанс дается выражением (3.30):

$$K = \frac{2v}{\beta^2 \gamma^3} = \frac{a_0^2 \omega_p^2}{2\beta^2 \gamma^2 c^2}. \quad (6.182)$$

(Как уже отмечалось выше, это выражение определяет первеанс заряженного пучка, поскольку влияние ионного фона учитывается как вклад во внешнюю фокусирующую силу.) Момент импульса дается выражением $\gamma m_0 \dot{\theta} a_0^2$, так что последний член уравнения

(6.181) становится равным $a_0^4 \dot{\theta}^2 / a^3 \beta^2 c^2$. Подставляя вместо a величину $a_0 + \rho$ и линеаризуя уравнение, получаем два уравнения, описывающих равновесное состояние и возмущенное движение соответственно:

$$\kappa_e - \frac{\omega_p^2}{2\beta^2 \gamma^2 c^2} - \frac{\dot{\theta}^2}{\beta^2 c^2} = 0 \quad (6.183)$$

и

$$\rho'' + \left[\kappa_e + \frac{\omega_p^2}{2\beta^2 \gamma^2 c^2} + \frac{3\dot{\theta}^2}{\beta^2 c^2} \right] \rho = 0. \quad (6.184)$$

Производя в последнем уравнении замену $d^2\rho/dt^2 = \beta^2 c^2 \rho''$ и подставляя в него κ_e из выражения (6.183), имеем

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \left[\frac{\omega_p^2}{\gamma^2} + 4\dot{\theta}^2 \right] \rho = 0. \quad (6.185)$$

Из этого уравнения следует, что при $\omega_p = 0$ в нарастающем линейно по r радиальном поле эффективное значение Q_r равно 2, как и ожидалось из рассмотрения в разд. 5.3 гл. 2. Проекции траекторий отдельных частиц на плоскость xu представляют собой эллипсы. Из уравнения (6.185) следует, что

$$\omega^2 = \left(\frac{\omega_p}{\gamma} \right)^2 + 4\dot{\theta}^2. \quad (6.186)$$

Проводя преобразования, как и в разд. 4.2 настоящей главы, и записывая частоту в лабораторной системе координат, т.е. заменяя ω на $\omega - \beta ck$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - \beta ck)^2 = \left(\frac{\omega_p}{\gamma} \right)^2 + (2\dot{\theta})^2. \quad (6.187)$$

В случае когда $\dot{\theta} = 0$, оно аналогично дисперсионному уравнению для продольных волн в неограниченной плазме. Необходимо отметить, что при выводе этого уравнения предполагалось наличие фокусирующей системы, поддерживающей пучок в равновесном состоянии.

Хотя, переходя во вращающуюся систему координат, относительно нетрудно найти свойства волн, распространяющихся в продольном магнитном поле, более поучительно провести эти расчеты непосредственно. Займемся теперь этими вычислениями. Канонический момент импульса частиц в таком пучке (за исключением бриллюэновского потока) имеет конечное значение. Для частиц, расположен-

ных на границе пучка, момент импульса дается выражением

$$P_{\theta} = \gamma m_0 a_0^2 (\dot{\theta} - \frac{1}{2} \omega_c) = -\frac{1}{2} \gamma m_0 a_0^2 \omega_v, \quad (6.188)$$

где ω_v — частота вихря, определенная в § 6 гл.3. Соответствующее парааксиальное уравнение записывается в виде [см. выражение (4.48)]

$$a'' + \frac{\omega_c^2}{4\beta^2 c^2} a - \left(\frac{P_{\theta}}{\beta \gamma m_0 c} \right)^2 \frac{1}{a^3} - \frac{K}{a} = 0.$$

Подставляя сюда выражение (6.188) для P_{θ} и делая замену $d^2 a / dt^2 = \beta^2 c^2 a''$, получаем

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{\omega_c^2 a}{4} - \frac{(\omega_c - 2\dot{\theta})^2 a_0^4}{4a^3} - \frac{\beta^2 c^2 K}{a} = 0. \quad (6.189)$$

Полагая первый член равным нулю и подставляя $a = a_0$, можно, как и прежде, найти условия существования равновесия. Используя выражение (6.182), находим следующее уравнение:

$$\frac{1}{4} \omega_c^2 - \frac{1}{4} (\omega_c - 2\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2} \omega_p^2 / \gamma^2 = 0, \quad (6.190)$$

которое можно переписать в виде

$$\dot{\theta}^2 - \omega_c \dot{\theta} + \omega_p^2 / 2\gamma^2 = 0. \quad (6.191)$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.42) за исключением члена, содержащего γ^2 . [Уравнение (3.42) получено также для нерелятивистского случая, но при отказе от парааксиального приближения. В случае релятивистского движения следует учитывать составляющую силы, указанную в п. 3 списка, приведенного в начале разд. 2.8 гл. 3. Эта составляющая приводит к уменьшению силы пространственного заряда, направленной от оси, т.е. оказывает такое же действие, что и соответствующая сила в пучке, изученная в разд. 2.6 гл. 3.]

Разлагая величины, входящие в уравнение (6.189), в ряд по малому отклонению и подставляя величину $a = a_0 + \rho$, приходим к уравнению, соответствующему (6.186):

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} + \left[\frac{1}{4} \omega_c^2 + \frac{3}{4} (\omega_c - 2\dot{\theta})^2 + \frac{\omega_p^2}{2\gamma^2} \right] \rho = 0. \quad (6.192)$$

В случае бриллиэновского потока $\omega_c = 2\dot{\theta}$ имеем $\omega_c^2 = 2\omega_p^2 / \gamma^2$, и при $\dot{\theta} = 0$ уравнение (6.192) сводится к уравнению (6.185),

что и следовало ожидать. Исключая из уравнений (6.192) и (6.191) величину $\omega_c^2/4$, входящую в выражение в квадратных скобках, можно получить по аналогии с выводом уравнения (6.187) дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} (\omega - \beta c k)^2 &= \left(\frac{\omega_p}{\gamma} \right)^2 + (\omega_c - 2\dot{\theta})^2 = \\ &= \left(\frac{\omega_p}{\gamma} \right)^2 + \omega_v^2. \end{aligned} \quad (6.193)$$

Случаи, описываемые уравнениями (6.191) и (6.193), являются полностью эквивалентными. Удобнее проводить рассмотрение в более простой системе координат, в которой отсутствует магнитное поле, поскольку в этом случае задача симметрична относительно $\dot{\theta}$. При этом путем простого преобразования $\dot{\theta} \rightarrow \omega_v$ можно получить уравнение, описывающее свойства заряженного пучка в магнитном поле.

Полученные в данном разделе результаты справедливы только для параксиальных пучков, причем дополнительно предполагалось, что продольными составляющими переменного поля можно пренебречь. Для реальных значений k такие составляющие поля являются величинами второго порядка малости. Это означает, что вне пучка поля остаются неизменными и пучок не взаимодействует со стенками. Однако при распространении продольных волн линейная плотность заряда меняется в первом порядке, т.е. продольные поля также являются величинами первого порядка малости. Такие волны мы обсудим в следующем разделе. До сих пор наше исследование ограничивалось только ламинарными, или холодными пучками. Уравнения (6.187) и (6.193) нетрудно обобщить на случай конечного эмиттанса пучка с КВ-распределением [см. выражение (4.26)]. Как объяснялось в разд. 3.5 гл. 4, если $P_\theta/\beta\gamma m_0 c$ положить равным ϵ , то эмиттанс ламинарного пучка, частицы которого обладают конечным каноническим моментом импульса P_θ , эквивалентен эмиттансу пучка ϵ , описываемого КВ-распределением. В отсутствие магнитного поля $P_\theta/\beta\gamma m_0 c = a^2 \dot{\theta}/\beta c$. При этом в уравнении (6.187) член $(2\dot{\theta})^2$ можно заменить на величину $4\beta^2 c^2 \epsilon^2/a^4$.

Дисперсионные уравнения (6.187) и (6.193) нельзя применять к пучкам частиц с максвелловским распределением по поперечным скоростям, поскольку в них плотность заряда распределена по сечению неоднородно и ω_p не является постоянной величиной. Однако можно было бы предположить, что дисперсионное уравнение останется справедливым, если использовать некоторые средние значения. В этом случае эмиттанс записывается в виде

$$\epsilon \approx 2a \left[\frac{kT}{\gamma m_0 \beta^2 c^2} \right]^{1/2}, \quad (4.42)$$

а второй член в правой части уравнения (6.187) определяется выражением

$$\frac{4\beta^2 \epsilon^2 \epsilon^2}{a^4} = \frac{4kT}{\gamma m_0 a^2} \quad (6.194)$$

Условие того, что этот член должен оказывать слабое влияние, записывается в виде

$$\frac{4kT}{\gamma m_0 a^2} < \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} \quad (6.195)$$

или

$$a > \lambda_D, \quad (6.196)$$

где λ_D — дебаевский радиус экранирования. Это условие имеет место в плазменном столбе и в пучках с идеальным бриллюэновским потоком. В случае когда $\lambda_D \gg a$, дисперсионное уравнение требует другой интерпретации. Эмиттанс можно выразить через фокусирующую силу; тогда дисперсионное уравнение приобретает вид, эквивалентный уравнению (6.151) для нитевидного пучка.

4.8. Поверхностные волны в немагнитном пучке. В разд. 2.3 настоящей главы мы рассмотрели свойства поверхностных волн в полубесконечной плазменной среде. Эти свойства были найдены непосредственно путем согласования импеданса и фазовой скорости на границе плазмы; плазма при этом рассматривалась как диэлектрик с отрицательным значением κ , а токи вблизи поверхности протекали так же, как и в диэлектрике, за исключением того, что нормальная составляющая E меняла знак на поверхности. Как отмечалось выше, в плоской геометрии это приводило к отрицательной групповой скорости. В таких волнах продольное электрическое поле оказывает эффект первого порядка малости; имеется продольное электрическое и магнитное поля, направленные параллельно поверхности. Фаза магнитного поля совпадает с фазой нормальной составляющей электрического поля, но находится в противофазе с продольной составляющей электрического поля.

Решим теперь задачу для цилиндрической геометрии в системе координат, в которой пучок покоится. Рассмотрим диэлектрический стержень радиусом a , диэлектрическая проницаемость которого $\kappa = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ и который находится в идеально проводящем волноводе. Задача решается довольно просто и была рассмотрена в частности Трайвелписом и Гоулдом [298]. Они получили дисперсионное уравнение, которое в наших обозначениях можно записать

следующим образом (для азимутально-симметричных мод):

$$\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right) \frac{I_1(k_r a)}{k_r a I_0(k_r a)} = \quad (6.197)$$

$$= \frac{\gamma_w}{ka} \frac{I_1(ka/\gamma_w) K_0(kb/\gamma_w) + K_1(ka/\gamma_w) I_0(kb/\gamma_w)}{I_0(ka/\gamma_w) K_0(kb/\gamma_w) - K_0(ka/\gamma_w) I_0(kb/\gamma_w)},$$

где

$$k_r^2 = \frac{k^2}{\gamma_w^2} + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (6.198)$$

а индекс в k_z опущен. При очень больших значениях k это уравнение дает те же волновые характеристики, что и уравнение для поверхностных волн, изученное в разд. 2.3 настоящей главы.

В случае когда $b = \infty$, что соответствует стационарному пучку в свободном пространстве, правую часть уравнения (6.197) можно значительно упростить. При этом само уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right) \frac{I_1(k_r a)}{k_r a I_0(k_r a)} = \frac{\gamma_w}{ka} \frac{K_1(ka/\gamma_w)}{K_0(ka/\gamma_w)}. \quad (6.199)$$

Трайвелпис и Гоулд построили кривые зависимости ω от k . Они нашли, что при небольших значениях k частота ω быстро растет, причем наклон $d\omega/dk$ соответствует скорости света, а при больших значениях k частота ω асимптотически стремится к величине $\omega_p/\sqrt{2}$, как это и предсказывается уравнением (6.27). При очень больших значениях k характер зависимости слабо зависит от величины b ; однако в случае малых значений k и ω имеются различия. Для того чтобы исследовать случай малых k , воспользуемся приближением "тонкого пучка", согласно которому ka/γ_w , $kb/\gamma_w \ll 1$, и используем разложения функций Бесселя, перечисленные в разд. 3.3.

Рассмотрим вначале стационарный пучок в свободном пространстве, т.е. случай $b = \infty$. В этом случае уравнение (6.199) принимает вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right) = - \frac{\gamma_w^2}{k^2 a^2} \frac{1}{\ln(ka/2\gamma_w) - \Gamma}, \quad (6.200)$$

где Γ — постоянная Эйлера. При $\omega \ll \omega_p$ это уравнение можно переписать следующим образом:

$$2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = - \frac{k^2 a^2}{\gamma_w^2} \left(\ln \frac{ka}{2\gamma_w} - \Gamma \right) \quad (6.201)$$

или в другом виде

$$2\beta_w^2 \gamma_w^2 = \frac{\omega_p^2 a^2}{c^2} \left[\ln \frac{2\beta_w \gamma_w c}{\omega a} + \Gamma \right]. \quad (6.202)$$

Если $k \rightarrow 0$, то $\gamma_w \rightarrow \infty$, так что при малых значениях ω и k фазовая скорость почти равна скорости света. Подставляя для β_w и γ_w их выражения через ω , c и k (за исключением логарифмического члена), уравнение (6.202) можно переписать следующим образом:

$$c^2 k^2 - \omega^2 = \frac{2\omega c^2 / \omega_p^2 a^2}{\frac{1}{2} \ln(4\beta_w^2 \gamma_w^2 c^2 / \omega^2 a^2) + \Gamma} \quad (6.203)$$

или при $\gamma = 1$ его можно записать через параметр Будкера [см. выражение (3.2)]:

$$c^2 k^2 = \omega^2 \left\{ 1 + \frac{2}{2\nu \ln(\beta_w^2 \gamma_w^2 \omega_p^2 / \omega^2 \nu) + 4\nu\Gamma} \right\}. \quad (6.204)$$

Поскольку аргумент логарифма велик, то, используя разложение в ряд, можно получить следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\omega}{k} \approx c \left[1 - \frac{1}{2\nu \ln(\beta_w \gamma_w \omega_p / \omega \nu^{1/2})} \right], \quad \frac{\omega}{p} \ll 1. \quad (6.205)$$

Используя преобразования (6.41), нетрудно перейти в систему координат, движущуюся со скоростью βc . Этот переход приводит к несколько громоздкому виду уравнения, и мы не будем его записывать здесь в явном виде. Как и следовало ожидать, при небольших значениях ω/ω_p остается справедливым условие $\beta_w \approx 1$.

В области вне пучка поля спадают с характерным расстоянием, которое в свободном пространстве равно $x = \gamma_w \lambda$. При $\omega \rightarrow 0$ величина x стремится к бесконечности, что соответствует полевой зависимости вида $1/r$. Из уравнения (6.198) видно, что, когда $\gamma_w \rightarrow \infty$, внутри пучка $x \approx c/\omega_p$, т.е. величина x равна глубине бесстолкновительного скин-слоя. Из соотношения [см. выражение (3.2)] $c^2/\omega_p^2 = a^2 \gamma / 4\nu$ следует, что в параксиальном пучке с $\nu/\gamma \ll 1$ справедливо неравенство $x \gg a$. Это означает, что составляющая поля E_z по существу распределена однородно по сечению пучка, в то время как составляющие E_r и H_ϕ сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно E_z и изменяются пропорционально r . В такой волне частицы движутся как в продольном, так и в радиальном направлениях.

Исследуем теперь дисперсионное уравнение в случае, когда b имеет

конечные значения, а отношение b/a не велико. В этом случае в правой части уравнения (6.200) второй множитель меняется и уравнение принимает вид

$$\omega_p^2/\omega^2 - 1 = (2\gamma_w^2/k^2 a^2)[1/\ln(b/a)]. \quad (6.206)$$

Интересно посмотреть, что произойдет в случае $b/a \rightarrow 1$. Для этого предположим, что $b = a + \Delta a$. Подставляя в (6.206) это выражение для b и величину γ_w , получаем

$$\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{2}{a\Delta a}. \quad (6.207)$$

При всех значениях k , в случае когда $\Delta a \rightarrow 0$, имеем $\omega \rightarrow 0$.

4.9. Волны в пучках в конечном магнитном поле. В разд. 4.7, опираясь на параксиальное приближение и приближение тонкого пучка, мы рассмотрели общий случай распространения волн в пучках с нулевой и конечной скоростями вращения. В разд. 4.8 проанализирован другой тип волны в частном случае, когда магнитное поле отсутствует, а пучок является нейтрализованным и ламинарным с нулевой температурой и нулевой скоростью вращения.

Более общий случай распространения поверхностной волны в пучке в присутствии магнитного поля, т.е. $B_z \neq 0$, в котором ω_v имеет отличное от нуля значение, является сложным, и провести точный анализ такого случая довольно трудно. В квазистатическом приближении задачу можно свести к обозримому виду, по крайней мере в предельном случае полного заполнения камеры пучком, т.е. в случае, когда $b = a$. Проанализируем теперь эти волны и найдем две ветви дисперсионной кривой. При $\omega_v \rightarrow 0$ в случае $b = a$ одна из этих ветвей исчезает. Однако, когда $b \neq a$, имеются обе ветви, которые соответствуют двум типам волн, рассмотренным в разд. 4.7 и 4.8 настоящей главы. Однако это соответствие несколько затеняется различными допущениями, принятыми при анализе.

Имеются две работы, которые при описании этих пучков дают одинаковые результаты. Мы воспользуемся анализом, данным Трайвеллсом и Гоулдом [298] для распространения волн в плазменном столбе, а затем с помощью преобразования в движущуюся прямолинейно или во вращающуюся системы координат получим соответствующие результаты для пучка, удерживаемого магнитным полем. Этот синтез был впервые достигнут в окончательной статье Пётцля [235], в которой он связал теорию, развитую Трайвеллсом и Гоулдом, с теорией, развитой в целом ряде работ, посвященных изучению распространения волн в пучках, удерживаемых магнитным полем. В этих последних работах не все было сделано

правильно, что вызвало определенные споры, окончательно разрешенные Пётцлем, к статье которого следует обращаться для подробного ознакомления с этим вопросом или для отыскания ссылок на ранее опубликованные работы.

Следуя Трайвелпису и Гоулду, найдем дисперсионное уравнение способом, аналогичным тому, который мы использовали в разд. 3.2. Поскольку возможно существование поперечных токов, решение уравнений Максвелла имеет более сложный вид. Поэтому мы упростим задачу, воспользовавшись квазистатическим приближением, согласно которому $\gamma_w = 1$. Поскольку это приближение соответствует предположению о бесконечности скорости света, электрическое поле можно описывать электростатическим потенциалом: $E = -\nabla\phi$. Плазму будем рассматривать как диэлектрик. Таким образом, можно написать следующее уравнение:

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\kappa \cdot E) = 0. \quad (6.208)$$

Используя тензор диэлектрической проницаемости [выражения (6.15) и (6.16)], уравнение для потенциала в цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$\kappa_{\perp} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right\} + \kappa_{\parallel} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.209)$$

Запишем его решение, справедливое внутри плазмы:

$$\phi = A_1 J_n(k_r r) \exp\{-j(m\theta + k_z z)\}, \quad (6.210)$$

где

$$k_z^2 = -\frac{k_z^2 \kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp}} = -k_z^2 \left\{ \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \right\}. \quad (6.211)$$

В области между плазмой, радиус которой равен a , и проводящей стенкой радиусом b решение должно удовлетворять на стенке условию равенства нулю потенциала:

$$\phi = A_2 \{I_n(k_z r) K_n(k_z b) - I_n(k_z b) K_n(k_z r)\} \exp[-j(m\theta + k_z z)]. \quad (6.212)$$

На границе плазмы ($r = a$) нормальная составляющая вектора смещения и тангенциальная составляющая электрического поля должны быть непрерывными. Это дает два соотношения между постоянными A_1 и A_2 . Как и прежде, выберем азимутально-симметричную низшую радиальную моду, хотя в общем случае анализ оказывается не намного более сложным. В данном случае соотношение между A_1 и A_2 приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\kappa_{\perp} k_r \frac{J_1(k_r a)}{J_0(k_r a)} = \kappa_{\perp} k \frac{I_1(ka)K_0(kb) + I_0(kb)K_1(ka)}{I_0(ka)K_0(kb) - I_0(kb)K_0(ka)}, \quad (6.213)$$

где в k_z опущен индекс, а κ_1 — диэлектрическая проницаемость среды в области между плазмой и стенкой. Уравнение (6.213) аналогично уравнению (6.72), за исключением лишь того, что оно получено в квазистатическом приближении. В предельном случае $\omega = \infty$, $\kappa = 1$ и $\gamma_w = 1$ уравнение (6.213) полностью совпадает с уравнением (6.72).

В случае когда плазма полностью заполняет камеру, т.е. $a = b$, уравнение (6.213) существенно упрощается, и мы имеем уравнение $J_0(k_r a) = 0$. Выразим, как и в разд. 3.3, соответствующую величину k через величину $T = 2,4/a$. Тогда дисперсионное уравнение, полученное из (6.211), принимает вид

$$k_z^2 = T^2 \left\{ \frac{-\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_p^2) (\omega^2 - \omega_c^2)} \right\}. \quad (6.214)$$

В плазме с неограниченными радиальными размерами $T = 0$, что дает $\omega = \omega_p$ или $\omega = \omega_c$, как и следовало ожидать из квазистатического приближения. При $\omega_c \ll \omega_p$ в плазме, радиус которой конечен, для каждого значения k существуют два действительных значения ω , расположенных в областях $0 < \omega < \omega_p$ и $\omega_c < \omega < (\omega_c^2 + \omega_p^2)^{1/2}$. Если $\omega_c > \omega_p$, то в этих двух неравенствах ω_p и ω_c надо поменять местами.

Для того чтобы перейти теперь к пучку, все, что необходимо сделать, — это преобразовать полученный результат в движущуюся систему координат. В квазистатическом приближении такой переход обеспечивается заменой ω на $\omega - \beta c k$. (Некоторое понятие о сложности задачи при отказе от квазистатического приближения можно получить на примере уравнения (22), приведенного в статье [109].) Чтобы применить полученные результаты к пучку в магнитном поле, нужно найти только соответствующее значение θ , которое при одних и тех же значениях ω_p и ω_c обеспечивает существование вращающегося равновесного пучка в отсутствие ионов, и затем определить истинное магнитное поле и циклотронную частоту ω_{c2} в этой системе координат. Полученное значение ω_{c2} следует подставить затем в дисперсионное уравнение. Из выражения (2.21), полагая в нем $\omega_f = \theta$, получаем искомое соотношение $\omega_{c2} = \omega_{c1} - 2\omega_f = \omega_{c1} - 2\theta$, откуда видно, что $\omega_c \rightarrow \omega_v$. Этот же результат был получен в разд. 4.7 настоящей главы.

Здесь уместно сопоставить свойства волн, которые только что были нами проанализированы, и волн, изученных в разд. 4.7 и 4.8. В разд. 4.7 мы предполагали, что основную роль играют только поперечные поля, т.е. k мало. При этом можно видеть, что в случае $k = 0$ обе дисперсионные зависимости имеют аналогичный вид. Если $b \neq a$, то дисперсионное уравнение имеет более

сложный вид, чем уравнение (6.213); тем не менее они имеют один и тот же общий вид, за тем лишь исключением, что при больших значениях k нижняя ветвь (в системе координат, в которой пучок покоится, $\beta = 0$) асимптотически стремится к величине, несколько большей, чем ω_v . В частности, когда $\omega_v = 0$, нижняя ветвь не исчезает. В этом случае волна эквивалентна поверхностной волне, рассмотренной в разд. 4.7. На рис. 6.23 приведены дисперсионные зависимости для волн, обсуждаемых в данном и предыдущих разделах; соответствующие пояснения приведены в подписи к рисунку.

4.10. Мультипольные волны и поперечные волны более высокого порядка.¹⁾ В разд. 4.1 мы кратко описали мультипольные поперечные возмущения пучков кругового сечения и проиллюстрировали их на рис. 6.17. В присутствии пространственного заряда и стенок такие волны ведут себя аналогично волнам, описанным выше, хотя их анализ является несколько более сложным [178]. Эти волны возникают в виде пары быстрой и медленной волн и могут нарастать, затухать, испытывать биения и т.п., т.е. они проявляют все те свойства, которые мы изучали в предыдущих разделах, когда между самими волнами и внешней структурой существует связь. Поскольку вклад собственных полей пучка в результирующее фокусирующее поле зависит от амплитуды поперечных колебаний, возможна параметрическая связь таких волн между собой или с фокусирующей структурой ускорителя. Некоторые из этих эффектов были изучены Смитом [275] и Сахерером [253], которые вычислили нормальные моды с различными азимутальными и радиальными номерами в однородном пучке, распространяющемся в однородно-фокусирующем канале. В высших радиальных модах плотность пучка оказалась модулированной по радиусу, что, по-видимому, вряд ли может случиться на практике.

Возникает один интересный вопрос о том, могут ли существовать неустойчивые моды этого типа в пучке, распространяющемся в камере с гладкими стенками при условии малости внешних фокусирующих полей по сравнению с собственными. Глакстерн [99] в своем анализе показал, что в пучке с резкой границей, описываемом КВ-распределением, азимутально-симметричная мода с радиальным номером 2 становится неустойчивой, если $\omega_0 Q / \omega_p < 1/4$. Однако этот результат имеет отчасти академический интерес, поскольку выбранное распределение мало соответствует реальному. Если функция распределения монотонно спадает с увеличением скорости или радиуса, то пучок, по-видимому, будет устойчивым.

¹⁾ Под мультипольными волнами здесь понимаются низшие радиальные моды с вариациями по азимуту, а под поперечными волнами более высокого порядка — моды с вариациями как по азимуту, так и по радиусу. — *Прим. ред.*

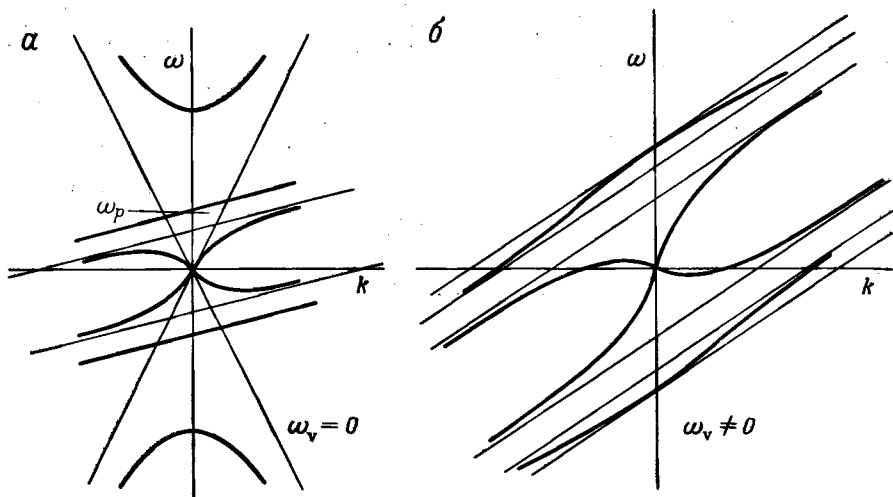


Рис. 6.23. Дисперсионные кривые для некоторых волн, рассмотренных в разд. 4.7 – 4.9.

Зависимости приведены только для нижней моды, распространяющейся в системе, которую следует рассматривать не как стационарную плазму, а как пучок. a – волны в электронном пучке, находящемся в камере, радиус которой $b > a$. Три ветви соответствуют волне, описываемой уравнением (6.191) при $\omega_v = 0$, волне, описываемой уравнением (6.203), которое преобразовано так, чтобы его можно было применять к движущемуся пучку, и высокочастотной "волноводной" моде. При $b/a \rightarrow 1$ центральная ветвь вырождается в прямую линию $\omega - \beta c k = 0$; b – волны в пучке с конечным значением ω_v , полученные в квазистатическом приближении при замене в уравнении (6.213) ω на $\omega - \beta c k$ или при $a = b$ в уравнении (6.214).

При $a = b$ асимптоты и верхняя кривая пересекают ось ординат соответственно в точках $\pm \omega_p, \pm \omega_v$ и $\pm (\omega_p^2 + \omega_v^2)^{1/2}$ или, если $\omega_p > \omega_c$, в точках, определяемых этими же выражениями, в которых надо поменять местами ω_p и ω_c . Когда одна из этих частот равна нулю, на дисперсионной диаграмме остаются только линейные зависимости $\omega = \beta c k \pm \omega_p$ и 0 или $\omega = \beta c k \pm \omega_v$ и 0. С другой стороны, если $b > a$ и $\omega_v = 0$, то топология зависимостей остается той же самой. При $\omega_v = 0$ центральная ветвь не исчезает, а становится такой же, как на первой диаграмме; остальные же ветви исчезают. В начале координат дисперсионная кривая составляет прямой угол с осью абсцисс, тогда как точный расчет дает $\omega/k = c$. При $\omega_p = 0$ кривые расщепляются на три прямые линии $\omega = \beta c k$ и $\omega = \beta c k \pm \omega_c$. На второй диаграмме ω_v может иметь любой знак, в то время как для зависимостей, приведенных на рис. 6.1, a , например, выбирались только положительные значения ω_c . Это объясняется тем, что в ограниченной системе волны имеют эллиптическую поляризацию, т.е. их частота может быть как отрицательной, так и положительной.

Очевидно, что присутствие мультипольных и радиальных волн вносит много степеней свободы в поведение пучков в присутствии фокусирующей структуры и полей изображения в неоднородных стенках. Многие из этих проблем изучались при создании сильноточных ускорителей и накопительных колец на высокие энергии.

4.11. Взаимодействие пучка с неограниченной в поперечном направлении плазмой. В данном разделе рассмотрим вначале неограниченную двухпотоковую систему, находящуюся в магнитном поле. Затем в следующем разделе изучим пучок конечных размеров в ограниченной или неограниченной плазме.

Прежде чем перейти к анализу дрейфующей плазмы, обсудим дисперсионное уравнение для стационарной плазмы, полученное выше:

$$1 - \frac{e^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \quad (6.20)$$

или

$$1 = \frac{-\beta_w^2 \gamma_w^2 \omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}; \quad (6.22)$$

здесь, как и прежде, $\beta_w = \omega/c k$, $\gamma_w^2 = (1 - \beta_w^2)^{-1}$. Два знака в уравнениях соответствуют волнам с правой и левой поляризацией. При $\omega = \omega_c$ возникает резонанс с левополяризованной волной, и фазовая скорость ее становится бесконечной. На рис. 6.1 мы уже приводили дисперсионные кривые, соответствующие различным значениям ω_p/ω_c . В квазистатическом приближении $\gamma_w = 1$, а $\beta_w = 0$. При этом дисперсионное уравнение имеет простой вид:

$$\omega^2 = \omega_c^2 \quad (6.215)$$

и не зависит от ω_p . Если $\omega_p = 0$, то уравнение (6.215) является точным. Оно имеет такой же вид, как уравнение для волн в нитевидном пучке при $\beta = 0$, которое мы рассматривали выше. Нетрудно проверить, что в рассматриваемых волнах электроны движутся по круговым орбитам; по мере приближения ω к ω_c радиус орбиты растет до тех пор, пока не станет выполняться условие $\omega = \omega_c$, что соответствует резонансу, и орбиты не превратятся из плоских в спиральные. Как и в циклотроне, дальнейшее увеличение радиуса ограничивается ростом релятивистской массы. Ясно, что для плазмы конечных размеров необходимо тщательно учитывать граничные условия на краях.

Используя преобразования Лоренца (6.41) для плазмы, дрейфующей со скоростью βc в направлении, параллельном полю, можно

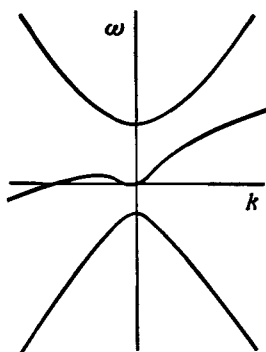


Рис. 6.24. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в неограниченной плазме, дрейфующей вдоль магнитного поля конечной величины.

Центральная ветвь пересекает ось k . В этой точке фазовая скорость волны проходит через нуль и меняет знак. Однако, если отношение ω_c/ω_p мало или β велико, эта ветвь пересекает ось только в начале координат и фазовая скорость всюду положительна.

получить следующее уравнение:

$$1 - \frac{\sigma^2 k^2}{\omega^2} = \frac{1}{\beta_w^2 \gamma_w^2} = \frac{\omega_p^2 (\omega - \beta c k)}{\omega^2 (\omega \pm \omega_c - \beta c k)} \quad (6.216)$$

При преобразовании ω_p остается инвариантом, поскольку эта величина всегда измеряется в собственной системе отсчета плазмы; с другой стороны, ω_c в движущейся системе координат уменьшается в γ раз. Это изменение можно объяснить увеличением поперечной массы. На рис. 6.24 приведены соответствующие дисперсионные кривые. Они представляют собой обобщение дисперсионных зависимостей, показанных на рис. 6.1, на случай отличной от нуля скорости дрейфа βc .

Если одновременно существуют и дрейфующая, и стационарная плазма, то взаимодействие имеет место только тогда, когда дисперсионные кривые, характеризующие по отдельности дрейфующую и стационарную плазму, пересекаются. Очевидно, что в зависимости от относительных значений параметров ω_c , ω_{p1} , ω_{p2} и β могут реализоваться самые разнообразные возможности. Некоторые из них рассматривались Бриггсом в его книге [37] с учетом присутствия ионов и конечности температуры стационарной плазмы.

4.12. Дальнейшее обсуждение взаимодействия пучка с плазмой. В предыдущих разделах данной главы было идентифицировано много типов волн, распространяющихся в пучках заряженных частиц, а также рас-

смотрено взаимодействие некоторых самых простейших из них со стенками, обладающими конечной проводимостью или собственными дисперсионными свойствами. В плазме могут распространяться волны различного рода; они достаточно хорошо изучены и описаны, например, Аллисом и др. [2]. При прохождении пучков через неограниченную плазму или через ограниченный в поперечном направлении плазменный столб возникают разнообразные возможности для связи волн. Тем не менее любые взаимодействия пучка с плазмой приводят к двухпоточковой неустойчивости, основные свойства которой мы уже изучили.

На практике как пучок, так и плазма имеют ограниченные в поперечном направлении размеры. Обычно плазма создается в диэлектрической (стеклянной) трубе, расположенной внутри металлического лайнера, вдоль оси которого и распространяется пучок. В связи с проведением конкретных экспериментов исследовалось большое количество таких конфигураций. Если плазма создается в обычной газоразрядной трубке, то необходимо учитывать как потери энергии на столкновения, так и влияние температурных эффектов, а также возможные вариации плотности по сечению столба. Совместное рассмотрение перечисленных эффектов приводит к недопустимым осложнениям; поэтому обычно учитывают только некоторые из них. Обусловленные этими эффектами осложнения не приводят к существенному отличию любых физических свойств от изученных ранее. Как мы уже обсуждали в разд 2.7, конечная температура плазмы стремится подавить нарастающие волны или уменьшить их инкременты.

Столкновения между частицами плазмы приводят к диссипации энергии, что вызывает подавление волн с положительной энергией в пучке и нарастание волн с отрицательной энергией. Такие выводы были получены в результате общих наблюдений; каждую же конкретную ситуацию нужно тщательно анализировать. Различные типы взаимодействий описаны в книге [37]. В ней имеется хорошо подобранная библиография работ, опубликованных до 1963 г. Работы в данной области проводились главным образом в (неосуществленной) надежде использовать в качестве замедляющей структуры ЛБВ и ЛОВ плазменный столб. Такие устройства имеют кажущиеся преимущества, в частности, связанные с простым получением однородной среды, по сравнению со сложной и порой имеющей весьма малые размеры периодической структурой. Однако основная трудность заключалась в создании соответствующего стационарного состояния плазмы. В обзоре, выполненном Крауфордом [68], рассматриваются физические принципы взаимодействия пучка с плазмой и обсуждаются вопросы его применения в устройствах СВЧ, причем этот обзор содержит также обширную библиографию. Другая причина изучения этих неустойчивостей связана с различными схемами нагре-

ва плазмы в экспериментах по управляемому термоядерному синтезу.

Помимо таких практических целей часть экспериментов проводилась для проверки согласия с теоретическими представлениями, которые всегда построены на достаточно идеализированных моделях, в то время как детальное поведение "практической" плазмы является исключительно сложным. В общем обнаружено "разумное" согласие. Хорошим примером работ в этой области служат две статьи Селфа [264]; в них обсуждаются факторы, которые необходимо учитывать при сравнении экспериментальных данных с теоретическими расчетами.

Большая работа была выполнена по изучению прямолинейных систем; однако в связи с исследованием плазменных бетатронов и предполагаемых конструкций термоядерных реакторов рассматривались и тороидальные конфигурации. Для последнего приложения изучались также свойства цилиндрических слоев частиц, вращающихся в плазменной фоне. Оказывается, в режимах с отрицательной массой на частотах ниже плазменной индуктивная природа плазменной среды, как и следовало ожидать, приводит к стабилизации неустойчивости [170]. Однако в диссипативной среде, что следовало также ожидать, наблюдается рост амплитуды бетатронных колебаний. Этот вопрос рассматривался Фертом [92] в связи с более общим изучением плазмы. В линейной геометрии аналогичный эффект проявляется в виде "шланговой неустойчивости", исследованной, например, Кино и Герцбергом [146].

Поскольку мы достаточно полно исследовали поведение пучково-плазменных систем в линейном приближении, можно было бы систематическим образом рассмотреть нелинейные эффекты, такие как трехволновая параметрическая связь и ограничения на рост амплитуды в неустойчивых системах. Однако эта важная, но сложная область исследования выходит за рамки нашего обсуждения.

4.13. Неустойчивости, обусловленные широм скоростей в ламинарных пучках
Неустойчивости, изучаемые до сих пор в настоящей главе, были связаны с пучками, которые имеют существенно однородное распределение плотности в поперечном сечении. В ламинарных или почти ламинарных пучках с неоднородным распределением плотности, в которых имеется шир скоростей между слоями потока, существует важный класс неустойчивостей. Несколько конфигураций подобного типа рассматривалось в гл. 3, причем мы не исследовали вопрос о том, являются ли эти конфигурации устойчивыми или нет. Слои могут перемещаться как параллельно внешнему (или собственному) магнитному полю, так и под углом к нему. (В заряженном пучке направление потока не может быть параллельным собственному магнитному полю.) Неустойчивость, возникающую в случае, когда направ-

ления скорости, электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны, иногда называют "диокотронной".

Потоки в скрещенных полях, которые мы рассматривали в разд. 4.1 гл. 3 и 5.6 гл. 4, используются в генераторах и усилителях магнетронного типа. В этих устройствах частота, на которой развивается неустойчивость, определяется свойствами замедляющей структуры, вблизи которой проходит пучок. В них можно достичь высокого к.п.д. преобразования энергии пучка в ВЧ-мощность; движение частиц для этого должно быть нелинейным; поэтому получить удовлетворительное теоретическое описание такого поведения исключительно трудно.

Многообразие параметров, необходимых для адекватного описания различных систем с широким диапазоном скоростей, затрудняет обсуждение этой задачи с общей точки зрения. Даже в хорошо известной конфигурации, такой, как пучок с однородным распределением плотности заряда в двумерной плоской геометрии, получаются уравнения, которые трудно решить; действительно, общего решения этой задачи до сих пор не найдено. Однако для некоторого диапазона параметров были изучены различные стороны движения. Данная проблема обсуждалась, например, Бунеманом [50] и Кнауэром [149]; эти авторы приводят также ссылки на ранее опубликованные работы. Леви [181] изучал конфигурацию в виде двух проводящих коаксиальных цилиндров, между которыми находится пучок, в случае $\omega_c \gg \omega_p$ и нашел соответствующий критерий устойчивости. В более обширной статье Бунемана, Леви и Линсона [51] содержится подробное физическое обсуждение и анализ задачи, в частности внимание уделяется роли параметра $q = \omega_p^2 / \omega_c^2$, который может изменяться от нуля до единицы. Различные свойства волн рассматриваются в зависимости от параметров q и ka при изменении величины ka от очень малого значения до очень большого по сравнению с единицей. Выводы этих статей трудно сформулировать в сжатом виде. Мы не будем пытаться делать этого, однако в качестве иллюстрации приведем упрощенный анализ данного эффекта в тонком ленточном пучке.

В предельном случае нулевой интенсивности пучка траектории частиц, движущихся в скрещенных полях B_x и $E_y = \dot{z}B_x$, являются прямолинейными. Удобно проводить рассмотрение в системе координат, в которой частицы пучка покоятся. При этом $E_y = 0$, а поле B_x остается отличным от нуля. В такой системе могут существовать "модуляционные" волны, аналогичные волнам в нитевидном пучке, частота которых $\omega = \omega_c$. Эти волны можно возбудить, если все частицы привести во вращение с последовательной задержкой по фазе. В отличие от волн, рассмотренных в разд. 6.2, в этих волнах в дополнение к поперечному движению может также возникать продольная модуляция плотности. В предельном случае нулевой плотности заряда может существовать волна другого типа, в общем достаточно тривиальная. Заряды могут быть стационарными, но размещаться

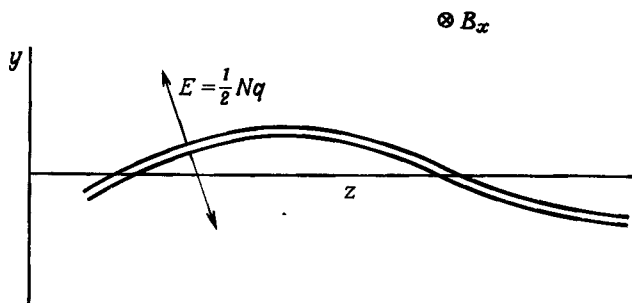


Рис. 6.25. Модулированный ленточный пучок.

Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка, а электрическое поле вблизи поверхности пучка направлено перпендикулярно магнитному.

вдоль синусоидальной кривой. Частота такой "волны" равна нулю, а k может принимать любые значения.

Исследуем теперь, что произойдет в случае, когда заряд пучка имеет конечную величину, а толщина пучка очень мала. В возмущенном состоянии такой пучок представляет модулированную периодическим образом плоскость с пространственным периодом модуляции, который будем считать большим по сравнению с толщиной пучка. Эта конфигурация показана на рис. 6.25. Чтобы упростить анализ, предположим, что частота волны мала, и рассмотрим только моду, которая соответствует моде с нулевой частотой в пучке с нулевой плотностью заряда.

Рассмотрим вначале стационарное состояние пучка. Направления осей системы координат выберем так, чтобы ось x совпадала с направлением магнитного поля, а плоскость xz совпадала с плоскостью симметрии пучка. В ленточном пучке с линейной плотностью заряда Nq z -составляющая скорости частиц меняется линейно по координате y и достигает максимума, равного $E_y/B_x = \pm Nq/2\epsilon_0$ на краях. Предположим, что первоначально заряд возмущается в точке $y = 0$. На заряды, расположенные на краях пучка, действует сила, которая незначительно отличается от силы, действующей на частицы в центре пучка, и, следовательно, они также приобретают небольшую скорость дрейфа. В качестве эффективного поля, испытываемого зарядом, выберем среднее значение полей, имеющихся на внешней верхней и нижней границах, т.е. положим $E = (E_+ + E_-)/2$. Это является хорошим приближением, если амплитуда возмущения, которая хотя и предполагается малой, велика по сравнению с толщиной пучка.

Уравнения движения заряда, расположенного в начальный момент

времени в точке $y = 0$, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \omega_c \dot{y} &= \frac{qE_z}{m_0}, \\ \ddot{y} - \omega_c \dot{z} &= \frac{qE_y}{m_0}.\end{aligned}\quad (6.217)$$

В невозмущенном состоянии все эти величины равны нулю. В случае гармонического возмущения уравнения (6.217) принимают вид

$$\begin{aligned}-\omega^2 \tilde{z} + j\omega \omega_c \tilde{y} &= \frac{q\tilde{E}_z}{m_0}, \\ -\omega^2 \tilde{y} - j\omega \omega_c \tilde{z} &= \frac{q\tilde{E}_y}{m_0}.\end{aligned}\quad (6.218)$$

Считая $\omega \ll \omega_c$ по причинам, указанным выше, и подставляя $E = (E_+ + E_-)/2$, уравнения (6.218) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{z+} + \tilde{E}_{z-} &= 2j\omega B_x \tilde{y}, \\ \tilde{E}_{y+} + \tilde{E}_{y-} &= -2j\omega B_x \tilde{z}.\end{aligned}\quad (6.219)$$

Для продолжения расчетов нам необходимо записать уравнение непрерывности и выразить поля через возмущения. Уравнение непрерывности по аналогии с уравнением (6.4) записывается в виде

$$jNk\tilde{z} = \tilde{N}.\quad (6.220)$$

В этом уравнении, а также в выражениях для полей будем предполагать, что $ky \ll 1$. Из геометрии, показанной на рис. 6.25, и уравнения Пуассона можно заметить, что составляющие поля E должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\tilde{E}_{z+} - \tilde{E}_{z-} = \frac{jkNq\tilde{y}}{\epsilon_0},\quad (6.221)$$

$$\tilde{E}_{y+} - \tilde{E}_{y-} = \frac{\tilde{N}q}{\epsilon_0} = \frac{jNqk\tilde{z}}{\epsilon_0},$$

где правая часть второго уравнения переписана с учетом уравнения (6.220). Исключая из уравнений (6.219) и (6.221) величины \tilde{z} и \tilde{y} , получаем

$$\frac{\tilde{E}_{y+} + \tilde{E}_{y-}}{\tilde{E}_{y+} - \tilde{E}_{y-}} = \frac{2\omega B_x \epsilon_0}{kNq},$$

$$\frac{\tilde{E}_{z+} + \tilde{E}_{z-}}{\tilde{E}_{z+} - \tilde{E}_{z-}} = \frac{\omega B_x \epsilon_0}{k N q} . \quad (6.222)$$

Эти поля нужно теперь шить на границах пучка. Вначале рассмотрим систему в свободном пространстве, так что лишь переменное поле представляет собой собственное поле пучка. На расстояниях, много больших по сравнению с y , определяющий вклад в поле дает не поперечная модуляция плотности заряда пучка, а бунчировка заряда в продольном направлении. В случае синусоидального возмущения с длиной волны $(2\pi k)^{-1} \gg c/\omega$ поле вне пучка спадает экспоненциально в $+y$ - и $-y$ -направлениях, а $k_y^2 \approx -k_z^2$. Кроме того,

$$\tilde{E}_{z\pm} = \pm j \tilde{E}_{y\pm} . \quad (6.223)$$

Следовательно, $\tilde{E}_{z\pm}$ и $\tilde{E}_{y\pm}$ можно исключить из четырех уравнений (6.221) и (6.222). В результате получаем

$$\frac{\omega}{k} = \pm j \frac{Nq}{2B_x \epsilon_0} . \quad (6.224)$$

Таким образом в этом случае пучок внутренне неустойчив, и амплитуда возмущений растет со скоростью, пропорциональной k . Если ширина пучка равна a , то коэффициент в правой части можно записать как $2E_{ya}/B_x$, где E_{ya} — поле на границе невозмущенного пучка. Это как раз и есть относительный шир скорости между зарядами, расположенными на обеих сторонах слоя. На рис. 6.26 схематически поясняется, каким образом происходит развитие неустойчивости.

Для трубчатых пучков этот эффект подробно описан Килом и Вебстером [154], которые проиллюстрировали его прекрасными фотографиями. Эти авторы указали также на то, что аналогичный эффект проявляется в трубчатых пучках, удерживаемых электростатическим полем. Такие пучки мы рассматривали в разд. 4.5 гл. 3. Капетанакос и др. [139] сообщили об аналогичном поведении в интенсивных релятивистских пучках.

Метод анализа, используемый здесь, следует методу, разработанному Бунеманом [49]. Гоулд [103] рассмотрел по существу ту же самую задачу для пучка с конечной скоростью частиц в z -направлении; она представляет интерес с точки зрения согласования волн со структурой, как это делается в лампах с поперечной бегущей волной. Мы не будем рассматривать здесь этот метод, который ничем принципиально не отличается от метода, развитого в разд. 3.4 настоящей главы для продольных волн.

Если средняя скорость дрейфа пучка велика по сравнению с широм скорости (относительной скоростью движения частиц), то дисперсион-

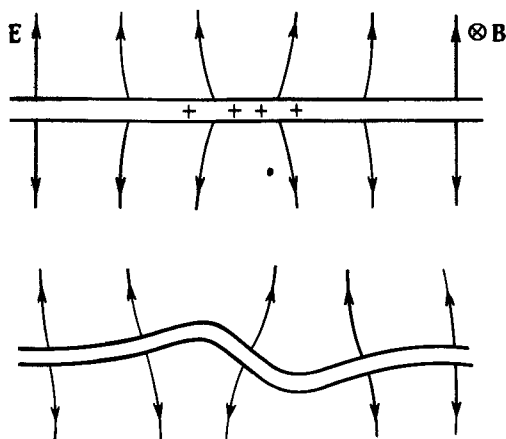


Рис. 6.26. К иллюстрации роста возмущения в заряженном ленточном слое.

Локальное увеличение плотности заряда приводит к изгибанию слоя. Если это происходит, то конфигурация становится неустойчивой и возмущение растет.

ное уравнение можно записать в виде

$$\omega = k \left(\beta c \pm \frac{j N q}{2 B_x \epsilon_0} \right), \quad (6.225)$$

где βc — отношение y -составляющей внешнего электрического поля к B_x . Внешнее поле E_{y0} велико по сравнению с собственным полем E_{ya} , определенным выше. Через эти поля уравнение (6.225) можно переписать следующим образом:

$$\omega = \frac{k (E_{y0} \pm j E_{ya})}{B_x}. \quad (6.226)$$

Уравнение (6.225) аналогично по форме уравнению, описывающему неустойчивость отрицательной массы в пучке, циркулирующем в ускорителе (разд. 3.4). Действительно, как показали Нейл и Гекротт [212], между этими двумя типами неустойчивостей существует тесная связь. Выше отмечалось, что основным направлением исследований таких неустойчивостей было стремление понять и использовать их для создания магнетрона и других устройств с потоками в скрещенных полях. В двухтомном сборнике [217] содержится большой по объему материал по данному вопросу. Эти исследования продолжались в связи с разработкой установки "НІРАС", о которой мы упоминали в разд. 5.6 гл. 4. Некоторые экспериментальные результаты приведены в статье [73].

Этот эффект проанализирован также и в цилиндрической геометрии с целью объяснения результатов экспериментов, проводимых с заряженной плазмой. Анализ и литература по этому вопросу приведены в книге Дэвидсона [75]. Неустойчивость, обусловленная широм скорости в продольном направлении, изучалась Ромом и Бриггсом [246]. Бриггс, Догерти и Леви [40] провели подробные аналогии между потоками в скрещенных полях и невязкими потоками с широм скорости.

Л.4.7 – 13. Замечания и литература. Большая часть материала, изложенного в предыдущих разделах, разработана в отдельных статьях. Содержание работ, опубликованных до 1963 г., отражено в книге Бриггса [37]; некоторые замечания, касающиеся плазменных волноводов, имеются в небольшой монографии Трайвеллписа [297], хотя в ней нет ссылок на работы, опубликованные до 1957 г. Более современные сведения о волнах в заряженных пучках, распространяющихся в магнитном поле, содержатся в статье [294], в которой имеется обширная библиография. Основные свойства взаимодействия пучка с плазмой рассмотрены в некоторых учебниках по физике плазмы. С тех пор вышло очень много работ, посвященных детальному исследованию этого вопроса. Однако обзоров этих работ, опубликованных позже, чем упомянутые в соответствующих разделах книги, не имеется.

§ 5. Динамические явления в сгруппированных пучках

5.1. Введение. В данной главе пучки и плазма считались однородными в направлении распространения, а волны и неустойчивости рассматривались в приближении малых линейных возмущений. Однако во многих применяемых на практике устройствах пучки являются сгруппированными и представляют собой последовательность сгустков.

Работа ЛБВ и ЛОВ анализировалась в линейном режиме "малого сигнала" (разд 3,9 настоящей главы), в то время как для обеспечения высокой эффективности эти устройства должны работать в нелинейном режиме "большого сигнала". Хотя по традиции работу ЛБВ и ЛОВ принято изучать на основе рассмотрения волн, клистроны обычно исследуют с совсем других позиций. В первом приближении пренебрегают пространственным зарядом пучка и строят теорию на основе анализа динамики движения частиц. При прохождении электронов через ускоряющий промежуток их энергия гармонически модулируется во времени, в результате после ускоряющего промежутка структура пучка становится негармонической во времени и пучок модулируется в пространстве непериодическим образом в продольном направлении. В самом деле, в некоторых точках основная часть тока протекает в течение небольшой доли периода. Характерной чертой такого поведения является обгон частиц, замедлен-

ных в промежутке, другими ускоренными частицами на участке после ускоряющего промежутка. Это явление, используемое в клистро-нах и группирователях, предназначенных для увеличения эффективности захвата частиц в линейных ускорителях, можно очень просто проанализировать в случае, когда пренебрегается силами пространственного заряда. Однако если силы пространственного заряда существенны, то задача становится исключительно трудной даже при условии пренебрежения поперечными вариациями. Было выполнено много работ для частных случаев с привлечением численных расчетов, хотя большая доля информации была получена из систематически проводившихся экспериментов. Разнообразные задачи этого типа обсуждаются в книге [251], в которой рассмотрены как аналитические, так и численные методы решения.

В большинстве ускорителей используются сгруппированные пучки. Поведение отдельных сгустков низкой плотности, в которых можно пренебречь влиянием пространственного заряда и сил изображения, определяется свойствами бетатронных и синхротронных колебаний. Протяженность сгустка в азимутальном направлении не может превосходить размеры фазовой области устойчивости, вычисленной в разд. 8.2 гл. 2 и показанной на рис. 2.20. Если размеры сгустка меньше размеров этой области, то колебания являются линейными и на фазовой плоскости частицы движутся по эллипсам с синхротронной частотой Ω_s [выражение (2.171)]. В разд. 8.2 гл. 2 было показано, что частицы могут также смещаться и в радиальном направлении; следовательно, простой идеализированный сгусток, в котором частицы не испытывают бетатронных колебаний, будет представлять в плоскости орбиты эллиптический слой частиц. Кроме того, поскольку бетатронные колебания возможны в обеих плоскостях, нетрудно заметить, что "разумное" распределение имеет примерно эллипсоидальную форму. При учете пространственного заряда распределение должно быть самосогласованным. В этой связи интересно отметить, что не существует распределения, аналогичного КВ-распределению (разд. 3.3 гл. 4), описывающего эллипсоидальный пучок. Тем не менее были построены различные приближенные модели; обсуждение этой задачи и ссылки на ранее опубликованные работы по линейным ускорителям имеются в статье Глакстерна, опубликованной в книге [99] под редакцией Лапостоля и Септье. Наличие сил пространственного заряда в таком сгустке приводит к уменьшению глубины внешней потенциальной ямы, в которой находятся частицы, и уменьшению частоты колебаний. Исключение составляет режим отрицательной массы в циклических установках, где продольные силы пространственного заряда приводят к увеличению частоты колебаний. Однако неустойчивость отрицательной массы не развивается, по мере роста плотности частиц в сгустке увеличиваются скорости, связанные с фазовыми колебаниями, которые приводят к

подавлению тенденции развития неустойчивости. Поля изображений в гладких идеально проводящих стенках камеры сдвигают частоты колебаний, так же как и в однородном пучке; если же проводимость стенок конечна или в них имеются локальные разрывы, то возникают более сложные эффекты, часть которых мы опишем ниже.

В исчерпывающем обзоре [276], выполненном Соренсенем и который относится к более ранней работе, посвященной этому вопросу, проанализировано влияние пространственного заряда и гладких идеально проводящих стенок на фазовое движение частиц в синхротроне. Анализ проведен на основе материала, изложенного в опубликованных работах. В нем также подробно рассмотрено прохождение пучка через критическую энергию, когда $1/m^*$ проходит через нуль из области положительных значений в область отрицательных, в результате чего образуется резкий "скачок" синхронной фазы.

До сих пор обсуждение относилось к одиночному сгустку. В случае когда имеется много сгустков, между ними может возникнуть сильное взаимодействие через поля, которые создают токи, индуцированные в стенках камеры, когда они не являются идеально проводящими и гладкими. Как будет показано ниже, токи изображений могут даже привести к взаимодействию между частицами одного и того же сгустка. При бетатронных и синхротронных колебаниях может меняться не только относительное положение частиц в пределах одного сгустка, но также периодически изменяться положение и форма самого сгустка. Это происходит в том случае, если колебания отдельных частиц являются "когерентными" и распределение фазы для данной амплитуды колебаний частиц сгустка неоднородно. Очевидно, что когерентные колебания обладают большим числом степеней свободы как в продольном, так и в поперечном направлениях, однако, если учитывать взаимодействие между сгустками, то в общем случае ситуация становится действительно весьма сложной. Провести анализ в общем случае вряд ли возможно, но для целого ряда идеализированных случаев такой анализ был проведен и результаты его хорошо совпадают с теми характеристиками пучка, которые наблюдаются в экспериментах. Это достаточно специальная задача, которую мы не будем здесь излагать подробно. Однако обсудим физический механизм некоторых эффектов и проанализируем несколько простых частных случаев.

5.2. Остаточное поле. В последующем обсуждении мы будем исходить из позиций, физическая суть которых значительно отличается от использованных выше. В некоторых случаях легче понять характеристики поведения бунчированных пучков качественным путем, чем пробовать их вычислять количественно.

Обсудим теперь понятие "остаточного" поля, с которым мы уже встречались в разд. 4.3. При прохождении сгустка вдоль камеры с

идеально проводящими стенками в них индуцируются токи; если в камере радиусом b сгусток имеет длину l , такую, что $l \ll b/\gamma$, то токи индуцируются в стенке на длине, примерно равной b/γ , в непосредственной близости от частиц; с другой стороны, если $l \gg b/\gamma$, то соответствующая длина равна $\sim l$. В ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \rightarrow \infty$, сгусток, представляющий собой постоянный ток I_0 , протекающий в течение времени Δt , индуцирует в стенке ток $-I_0$ на длине $l = c\Delta t$; всюду в других местах ток равен нулю.

Если же проводимость стенок конечная, то ток, индуцированный в стенке, не спадает резко до нуля после прохождения сгустка. В этом можно убедиться, если представить импульс тока конечной амплитуды в виде суммы двух ступенчатых функций Хевисайда $I_0 U(ct - z)$ и $-I_0 U(ct - z - l)$. Функция U равна нулю для отрицательных значений аргумента и единице для остальных. Рассмотрим вначале, что произойдет, если стенки будут обладать бесконечной проводимостью. В точке $z = 0$ первая составляющая тока "включает" ток в стенке в момент времени $t = 0$, а вторая - "выключает" его в момент $t = l/c$. Однако если проводимость стенок конечная, то возбуждаемый первой ступенькой ток не остается постоянным после ее прохождения; поле проникает внутрь стенки, и его амплитуда уменьшается со временем. Вторая ступенька не может поэтому полностью уничтожить индуцированный ток, и после прохождения импульса тока пучка в стенке остается медленно убывающий ток, а в камере - созданное им поле. Это поле имеет радиальную и продольную составляющие, которые могут воздействовать на последующие импульсы тока пучка или на тот же самый импульс при последующих его прохождениях в циклической установке. В реальных условиях, например когда величина γ достаточно большая, но не бесконечная, рассчитать форму остаточного поля трудно даже в простой цилиндрической геометрии. Эта задача рассматривалась Мортонем, Нейлом и Сесслером [204]; они получили различные формулы и объяснили пределы их применимости. Здесь мы только воспроизведем асимптотический вид зависимостей, справедливых в течение достаточно большого промежутка времени, после того как прошел сгусток. Для трубы с внутренним радиусом b , проводимостью σ (Ом \cdot м) $^{-1}$ и бесконечно толстыми стенками продольное электрическое поле E_z и поперечное магнитное поле B_y , возникающие при смещении x_0 сгустка, состоящего из N_0 частиц, можно записать следующим образом:

$$E_z = \frac{N_0 q \mu_0^{1/2}}{4\pi^{3/2} \sigma^{1/2} b t^{3/2}},$$

$$B_y = \frac{-N_0 q \mu_0^{1/2} c \pi^{3/2} y}{b^3 \sigma^{1/2} t^{1/2}}.$$
(6.227)

Электрическое поле направлено так, чтобы ускорять следующий сгусток, а магнитное поле, — чтобы отклонить его в том же самом направлении, в котором был смещен первоначальный сгусток.

В циклическом ускорителе, в котором циркулирует только один сгусток, влияние остаточных полей зависит от частоты бетатронных колебаний Q . Остаточное поле вносит соответствующий вклад в фокусирующий член, входящий в уравнение движения, который приводит к сдвигу частоты при нарастании или затухании колебаний.

Существует ряд коллективных мод колебаний конечного числа сгустков, часть которых оказывается устойчивой, а часть — неустойчивой. В следующем разделе мы рассмотрим эту задачу более подробно.

До сих пор мы обсуждали возникновение остаточных полей в камере с неидеально проводящими гладкими стенками. Другим часто встречающимся на практике случаем является прохождение сгустка через резонатор. Это может быть ускоряющий резонатор установки или "случайный" резонатор, образованный камерой с изменяющимся поперечным сечением или боковыми отводами. В общем случае такой резонатор характеризуется спектром собственных частот, часть которых возбуждается при прохождении пучка. Эти возбуждения можно рассматривать как локализованное, затухающее, периодическое остаточное поле, амплитуда, конфигурация и время спада которого зависят от геометрии. Если длина сгустков мала по сравнению с диаметром камеры, то частицы могут излучать энергию, которая не локализуется в каком-либо месте, а распространяется по камере впереди или позади частицы. Если излучение от ряда таких неоднородностей распространяется с той же самой фазовой скоростью, что и сгусток, то энергия непрерывно черпается из сгустка и трансформируется в энергию поля, а сам эффект можно трактовать как эффект Черенкова. Излучению частиц внутри резонаторов или излучению на отдельных объектах соответствует сила реакции, которая меняется по длине сгустка и может привести к изменению его формы, если сгусток не жесткий. Любая попытка провести расчет в каждом конкретном случае требует учета множества факторов.

Особенно важное значение эти задачи имеют в электронных накопительных кольцах, рассчитанных на высокую энергию, в которых пучок представляет собой последовательность коротких интенсивных сгустков. Однако анализ является сложным даже в самой простой геометрии, а провести экспериментальные исследования не просто. Наиболее часто в теоретических работах исследовалось поведение точечного заряда, проходящего через последовательность резонаторов. Численные расчеты, которые основаны на более ранней (преимущественно аналитической) работе, были выполнены Кейлом [140].

В следующем разделе мы кратко прокомментируем одну из первых моделей "жесткого сгустка", в которой пренебрегалось хроматичностью.

5.3. Приближение жесткого сгустка¹⁾. Как уже объяснялось в предыдущем разделе, поля, возникающие при взаимодействии проходящего сгустка со стенкой вакуумной камеры ускорителя, можно рассматривать как сумму остаточных полей, индуцированных частицами. Имеет смысл выделить "медленные остаточные поля", посредством которых один сгусток влияет на последующие, и "быстрые остаточные поля", когда остаточное поле, индуцированное головной частью сгустка, оказывает влияние на его хвостовую часть. Курант и Сесслер [65] проанализировали задачу о взаимодействии между гипотетическими "жесткими" сгустками, которое осуществляется посредством медленных остаточных полей. В случае одного сгустка взаимодействие в нем осуществляется через его собственное остаточное поле; поэтому вычисляется сходящаяся сумма спадающих во времени остаточных полей, которые накладываются на остаточные поля от предыдущих проходов. Устойчивость или неустойчивость движения зависит от того, как изменяется фаза бетатронных колебаний между последовательными прохождениями; если l — ближайшее к Q целое число, то нетрудно вывести условия устойчивости

$$(l + 1/2) > Q > 1 \quad (6.228)$$

и неустойчивости

$$l > Q > (l - 1/2), \quad (6.228 \text{ а})$$

а также с использованием выражений (6.227) вычислить инкременты неустойчивости. Для цепочки одинаковых сгустков одна половина возможных нормальных мод устойчива, а другая — неустойчива. Если сгустки имеют различные размеры или находятся на различных расстояниях друг от друга, то эти условия будут иметь более сложный вид.

Однако приближение жесткого сгустка представляет ограниченный интерес, поскольку существенную роль играет хроматичность, которую не учитывают в данном приближении и считают равной нулю.

5.4. Общее исследование неустойчивостей сгруппированных пучков. В предыдущем разделе мы обсудили поведение идеализированного "жесткого" сгустка. В случае когда хроматичность имеет конечное значение, отличное от нуля, движение частиц внутри сгустка приводит к развитию важного класса неустойчивостей, которые представляют определенную опасность в накопительных кольцах. Точное теоретическое описание поведения сгустков с учетом их внутренней структуры и взаимодействия посредством остаточных полей требует решения весьма сложной самосогласованной задачи. Тем не менее

¹⁾ В данном приближении предполагается, что форма сгустков и период следования заданы и не меняются при взаимодействии пучка со стенками, т.е. используется приближение заданного тока. — *Прим. ред.*

с помощью соответствующим образом подобранных упрощающих предположений можно построить теорию, из которой можно будет получить полезные результаты.

Обсудим теперь качественно основные свойства такого пучка¹⁾. Следует заметить вначале, что, поскольку хроматичность ξ имеет конечное значение, частота бетатронных колебаний частицы зависит от ее энергии и поэтому меняется в процессе синхротронных колебаний. В результате бетатронные колебания частицы опережают или отстают по фазе от синхронной частицы, энергия которой не осциллирует. Если сдвиг фазы равен нулю, когда частица находится в головной части сгустка, то величина этого сдвига χ принимает максимальное значение в хвостовой части сгустка и затем вновь уменьшается до нуля, когда частица возвращается в переднюю часть сгустка.

Предположим вначале, что большинство частиц имеют одну и ту же амплитуду синхротронных колебаний, а фазы их бетатронных колебаний в момент времени $t = 0$ линейно изменяются от нуля в головной части сгустка до χ в хвостовой части. Такое распределение фаз вдоль сгустка будет поддерживаться во времени. Например, если некоторая частица уходит из хвостовой части сгустка, то на ее место всегда приходит другая частица с соответствующим правильным сдвигом фазы χ колебаний относительно головной части сгустка. Таким образом, частицы, находящиеся в головной и хвостовой частях сгустка, осциллируют со сдвигом по фазе χ , который равен $\xi Q \omega_0 \tau_b / \eta$, где ω_0 — частота обращения частицы по орбите, а η определяется выражением (2.145), τ_b — длина сгустка в секундах. В электронных ускорителях величина χ обычно меньше, чем один радиан, в то время как в протонных ускорителях сдвиг фазы χ может быть значительно больше и стремится к бесконечности при критической энергии ($\eta = 0$).

Тот факт, что различные части сгустка осциллируют в различных фазах, приводит к новому механизму неустойчивости, который называется неустойчивостью "голова — хвост". В жестком сгустке при $\xi = 0$ остаточное поле, индуцированное головной частью сгустка, не может влиять на его хвостовую часть, поскольку остаточное поле и сгусток осциллируют в одинаковых фазах, а для развития неустойчивости необходимо наличие составляющей, осциллирующей со сдвигом по фазе. Таким образом, если остаточное поле быстро спадает, до того как сгусток завершит один оборот, неустойчивость возникнуть не может. Однако, если хроматичность имеет конечное значение, отличное от нуля, то возникает необходимый для развития неустойчивости сдвиг фаз. Неустойчивость развивается, когда хвостовая часть от-

¹⁾ В оставшейся части данного раздела мы в основном используем материал, любезно предоставленный Сахерером.

стает от головной (величина χ отрицательная). В случае нормальной (отрицательной) хроматичности установки неустойчивость возникает при энергии выше критической, а в случае положительной хроматичности — ниже критической. (Такое поведение отличается от поведения несгруппированного пучка, когда хроматичность помогает подавить неустойчивость за счет увеличения затухания Ландау.)

Этот тип неустойчивости, обусловленный влиянием короткоживущих остаточных полей, впервые обнаружили и проанализировали Пеллегрини [222] и Сэндс [259]. Оказалось, что свойства неустойчивости зависят от хроматичности и не зависят от частоты бетатронных колебаний Q . Конечно, на такое нежесткое движение сгустков могут влиять также и долгоживущие остаточные поля, так что свойства неустойчивости могут одновременно зависеть как от ξ , так и от Q . Сравнительно недавно Сахерер [255, 257] дал подробный анализ этой задачи.

Возможны также другие типы колебаний голова — хвост. Один из них, который мы рассматривали до сих пор и который сводится в пределе $\xi = 0$ к движению жесткого сгустка, называется "нулевой модой". В "первой моде" при $\xi = 0$ головная и хвостовая части сгустка движутся в противоположных направлениях, а его центр остается в покое; иными словами, мы имеем картину стоячих волн с одним узлом. Аналогичным образом моды более высокого порядка образуют картину стоячих волн, имеющих приблизительно синусоидальную форму с числом узлов, равным номеру моды. Для таких систем стоячих волн любые две части сгустка движутся либо синфазно, либо в противофазе и поэтому неустойчивость голова — хвост не развивается. В случае когда хроматичность имеет конечное значение, появляется дополнительный сдвиг фазы в колебаниях любых двух частей сгустка, но распределение амплитуд колебаний вдоль него остается все еще тем же самым, что и для стоячей волны, и число узлов не меняется. Результаты экспериментальных измерений, полученные из анализа сигналов со следящих электродов, показаны на рис. 6.27.

Зная структуру мод и импеданс связи, которым в данном случае является определенный выражением (6.173) поперечный импеданс $Z_{\perp}(\omega)$ окружающей структуры (вакуумной камеры, резанаторов, сифонов и т.п.), нетрудно рассчитать инкременты или декременты различных мод [255, 257]. Для подавления этих неустойчивостей приходится прилагать значительные усилия. Например, чтобы в электронных накопительных кольцах предотвратить неустойчивость голова — хвост, необходимо поддерживать хроматичность близкой к нулю или иметь ее равной небольшой положительной величине. Подавление неустойчивостей, обусловленных долгоживущими остаточными полями, осуществляется соответствующим выбором частот бетатронных

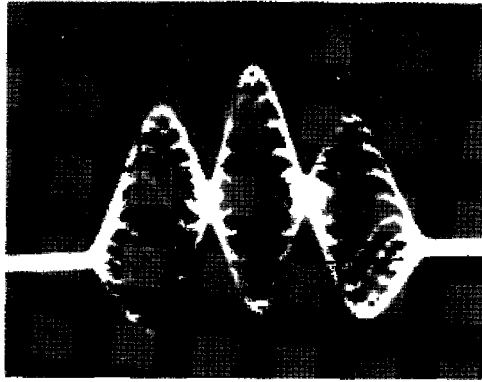
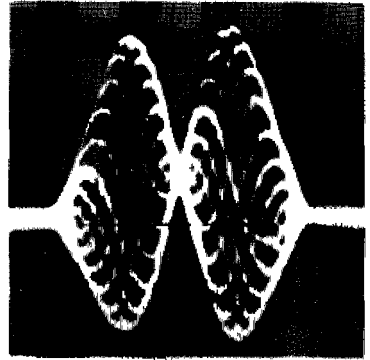
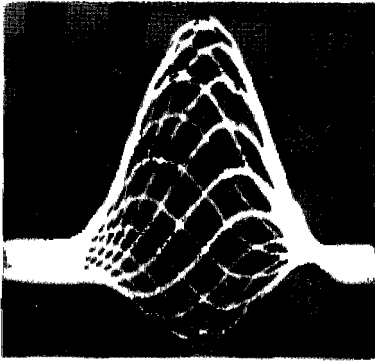


Рис. 6.27. На фотографиях показаны три из многочисленных мод неустойчивости, которые могут наблюдаться в циклических ускорителях.

Циркулирующий в "бустерном" синхротроне ЦЕРНа протонный пучок имеет форму сгустка длиной 15 м и диаметром в несколько мм. Здесь показана синусоидальная структура, развивающаяся в течение нескольких миллисекунд и заканчивающаяся в момент времени, когда частицы попадают на стенку вакуумной камеры. Каждый след луча соответствует прохождению сгустка через точку наблюдения. Чтобы показать, как развиваются различные моды неустойчивости, на каждом рисунке наложено около 20 сигналов, полученных при последовательном прохождении сгустка. Такое поведение называется неустойчивостью "голова – хвост".

колебаний Q , введением октупольных магнитов для увеличения затухания Ландау, введением ВЧ-квадрупольных магнитов для развязки сгустков и использованием активных систем обратной связи.

Продольные неустойчивости можно рассматривать аналогичным образом. Сгустки могут двигаться, не изменяя своей формы, "дышать", т.е. расширяться или сжиматься, и испытывать колебания более высоких мод. На плоскости нормализованных фазовых переменных, на которой траектории частиц имеют вид правильных окружностей, распределение частиц, не зависящее от их фазы, является стационарным. Если стационарное распределение смещается от начала координат, то сгусток осциллирует в дипольной моде или не меняет своей формы. В то же время, если распределение имеет удлиненную или уширенную форму, то наблюдаются квадрупольная мода или колебания частей сгустка (сгустки как бы "дышат"). В общем случае мода с номером m имеет m -кратную симметрию вращения в фазовой плоскости.

Если рассмотреть распределение линейной плотности частиц в различных модах, мы увидим знакомую структуру. В режиме заданного тока (жесткого сгустка) такое распределение представляет собой стационарное распределение $N_0(s)$ плюс осциллирующее возмущение $N_1(s)$ с избытком заряда на одном конце и недостатком — на другом. Иными словами, возникает структура типа синусной волны с одним узлом в центре сгустка. Аналогично, в квадрупольной моде для возмущенной линейной плотности $N_2(s)$ существуют два узла и избыток заряда на обоих концах и недостаток в центре, или наоборот. В более высоких модах число узлов больше, а в их спектре присутствуют более высокие частоты. Резонансный элемент, введенный в вакуумную камеру, будет в первую очередь возбуждать те моды, спектр частот которых перекрывается с частотой резонатора. Суммируя произведение спектра частот мод с соответствующими значениями продольного импеданса связи $Z_{||}(\omega)$, можно вычислить инкремент. Некоторые примеры приведены в статье [256], где имеются ссылки на ранее опубликованные работы. Эффекты, относящиеся к этому же классу, но имеющие более высокий порядок, зависят от "продольной хроматичности", а также, возможно, от асимметрии вакуумной камеры, но они пока еще не рассматриваются как имеющие практическое значение.

В то время когда писалась настоящая книга, существовала все еще некоторая неясность относительно эффекта аномального удлинения сгустка в электронных накопительных кольцах. Возможно, что сейчас физическая природа этой неустойчивости, которая имеет практическое значение, уже стала понятной.

Л.5. Замечания и литература. Неустойчивости бунчируемых пучков, рассмотренные в предыдущем разделе, представляют интерес в

сильноточных колец. Ссылки на наиболее важные статьи мы уже привели в тексте.

Здесь имеет смысл кратко остановиться на работах, в которых рассмотрены все типы неустойчивостей в ускорителях. Ряд ссылок был приведен в соответствующих местах книги, однако об обзорных работах мы ничего не говорили. К сожалению, многие важные работы представляют собой отчеты больших ускорительных лабораторий, и они почти не доступны для использования.

Исторически работа в данной области началась с середины 50-х гг., наиболее ранний анализ устойчивости пучков имеется в статье Будкера [45]. Работы в этой области велись параллельно в СССР и США и ссылки на большинство пионерских работ можно найти в обзорах Сесслера [267] и Коломенского и Лебедева [152]. На более поздней стадии большой вклад внесли ученые из ЦЕРНа (Женева) и других европейских лабораторий. В 1972 г. Сесслер опубликовал новый обзор по этому вопросу [268]. Многие статьи, посвященные рассмотрению неустойчивостей, как теоретические, так и экспериментальные, вошли в труды конференций, состоявшихся позже.

§ 6. Заключительные замечания

В данной главе мы попытались связать свойства волн в пучках со свойствами волн в более широкой и более общей области плазмы. Хотя многие из рассмотренных задач относятся к специальным приложениям, они иллюстрируют основные линейные свойства прямолинейных и кольцевых, однородных и сгруппированных пучков, причем некоторые из задач представляют, возможно, лишь исторический интерес. Целью данной главы, как и всей книги, было стремление изложить материал в такой форме, чтобы были проиллюстрированы существенные физические свойства пучков. При этом автор полностью сознавал, что это не лучшая форма изложения с точки зрения помощи в решении конкретных задач. Наше внимание было сконцентрировано на подробном описании различных типов волн, использующем как анализ возмущений, накладываемых на равновесный пучок, так и рассмотрение дисперсионных уравнений.

В практических приложениях всегда злободневным является вопрос о пространственном или временном нарастании волн. В изолированном пучке такое нарастание может быть вызвано неустойчивостью отрицательной массы. Оно может также наблюдаться при прохождении пучка через или вблизи резистивной структуры, независимо от знака эффективной массы. Кроме того, в зависимости от того, положительна или отрицательна эффективная масса, неустойчивость возбуждается структурой с индуктивным или емкостным импедансом.

При наличии двух пучков, пучка и плазмы или пучка и расположен-

ной вблизи волноводной структуры возникает связь волн, которая опять-таки может привести к росту амплитуды колебаний. Мы рассмотрели упрощенные случаи, когда эта связь является слабой. Такой эффект нарастания волн необходим для работы ламп СВЧ, однако в ускорителях частиц он является весьма нежелательным и его приходится подавлять. Это осуществляется либо с помощью обратной связи, либо с использованием затухания Ландау, которое имеет место при наличии разброса частиц в пучке по энергии. Рассмотренные явления достаточно хорошо изучены, хотя их детальные свойства во многих практически реализуемых случаях всегда оказываются намного сложнее, особенно, если связь между более чем двумя волнами не является слабой.

Нелинейные волны обладают рядом существенно новых свойств, таких, как параметрическая связь, пределы, в которых происходит рост амплитуды неустойчивости в неустойчивых конфигурациях, и колебания релаксационного типа. Круг явлений, который необходимо охватить, слишком разнообразен и специален, а сами явления часто с трудом поддаются пониманию, чтобы их можно было с достаточной полнотой изложить в небольшой по объему книге.

ПОЛЯ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЧАСТИЦУ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Силы, действующие на частицу в однородном магнитном поле B_1 , можно записать следующим образом:

$$F_r = m_0 (\ddot{r} - r\dot{\theta}_1^2) = qB_1 r \dot{\theta}_1, \quad (\text{П 1.1})$$

$$F_\theta = m_0 (r\ddot{\theta}_1 + 2\dot{r}\dot{\theta}_1) = -qB_1 \dot{r}, \quad (\text{П 1.2})$$

где r и θ — цилиндрические координаты в направлениях, перпендикулярных магнитному полю, причем движение частиц в r - и θ -направлениях предполагается нерелятивистским. (Если частица имеет релятивистскую скорость в z -направлении, как в параксиальном пучке, то вместо m_0 надо было бы записать γm_0 .) Нижний индекс 1 означает, что углы измеряются в лабораторной системе координат. В системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω_f и для обозначения величин в которой используется индекс 2, имеем

$$\theta_1 = \theta_2 + \omega_f t. \quad (\text{П 1.3})$$

Подставляя это выражение в (П 1.1) и (П 1.2) и записывая Ω_L вместо выражения $-qB_1/2m_0$, получаем уравнения для сил, действующих на частицу в новой системе координат:

$$F_{r2} = m_0 (\ddot{r} - 2r\dot{\theta}_2^2) = -m_0 r \omega_f (2\Omega_L - \omega_f) - 2m_0 r \dot{\theta}_2 (\Omega_L - \omega_f), \quad (\text{П 1.4})$$

$$F_{\theta 2} = m_0 (r\ddot{\theta}_2 + 2\dot{r}\dot{\theta}_2) = 2m_0 \dot{r} (\Omega_L - \omega_f). \quad (\text{П 1.5})$$

Сила F_{r2} имеет одну составляющую, которая не зависит от скорости частицы во вращающейся системе координат, и вторую составляющую, перпендикулярную скорости частицы. Их можно идентифицировать с радиальным электрическим полем E_2 и аксиальным магнитным полем B_2 :

$$B_2 = -\frac{2m_0}{q} (\Omega_L - \omega_f) = \left[1 - \frac{\omega_f}{\Omega_L} \right] B_1, \quad (\text{П 1.6})$$

$$E_2 = \frac{m_0}{q} r \omega_f (-2\Omega_L + \omega_f) = -r \omega_f \left[1 - \frac{\omega_f}{2\Omega_L} \right] B_1. \quad (\text{П 1.7})$$

Величина B изменяется в зависимости от ω , по линейному закону, а E имеет параболическую зависимость. В представляющих интерес частных случаях можно записать

$$\omega_f = \Omega_L, \quad B_2 = 0, \quad E_2 = -\frac{1}{2}r\Omega_L B_1 \quad (\text{П 1.8})$$

и

$$\omega_f = \omega_c = 2\Omega_L, \quad B_2 = -B_1, \quad E_2 = 0. \quad (\text{П 1.9})$$

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНОГО ЛУЧА ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Принцип наименьшего действия гласит, что в системе с сохраняющимся гамильтонианом H

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (\text{П 2.1})$$

где x_1 и x_2 — координаты начала и конца пути, \mathbf{P} — канонический импульс, а через δ обозначена вариация функции, обладающей следующими ограничениями. Система является консервативной, и физически в ней возможны любые пути с различными значениями H . Координаты конечных точек x_1 и x_2 фиксированы, но *время*, которое необходимо для прохождения этого пути, изменяется.

В цилиндрически-симметричной системе с электрическим и магнитным полями существует только одна составляющая A_θ вектор-потенциала. Соответствующее вариационное уравнение, в котором в качестве независимой переменной выбрана координата z , можно записать в виде

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (\beta \gamma m_0 c + qA) \cdot d\mathbf{l} = m_0 c \delta \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \beta \gamma (r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1) \right\}^{1/2} + \frac{qA_\theta}{m_0 c} r \theta' \Big| dz = 0, \quad (\text{П 2.2})$$

где штрих означает производную d/dz .

Чтобы решить уравнение (П 2.2), перепишем его в форме уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial r'} (\beta \gamma m_0 c + qA) - \frac{\partial}{\partial r} (\beta \gamma m_0 c + qA) = 0 \quad (\text{П 2.3})$$

и аналогичного уравнения, в которое вместо r подставлена величина θ . Интегрируя сразу же уравнение, зависящее от θ , получаем

$$\frac{\beta \gamma r^2 \theta' m_0 c}{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)^{1/2}} + qA_\theta r = \text{const.} \quad (\text{П 2.4})$$

Переписывая это выражение через $\dot{\theta}$, нетрудно убедиться, что оно представляет собой теорему Буша [выражение (2.5) или (2.6)] и что константа равна P_{θ} .

Первое уравнение имеет гораздо более сложный вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{r' \beta \gamma}{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)^{1/2}} - \frac{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)^{1/2}}{2 \beta \gamma} \frac{\partial}{\partial r} (\beta \gamma) -$$

$$- \frac{\beta \gamma r \theta'^2}{(r'^2 + r^2 \theta'^2 + 1)^{1/2}} + \frac{q}{m_0 c} \theta' \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) = 0. \quad (\text{П } 2.5)$$

Исключив отсюда θ' с помощью выражения (П2.4), мы получим довольно громоздкое уравнение, которое можно записать в более простом виде:

$$r'' + \frac{1+r'^2}{\lambda^2} \left\{ (1+r'^2) \frac{\partial \lambda}{\partial r} - r' \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right\} = 0. \quad (\text{П } 2.6)$$

где

$$\lambda = \beta^2 \gamma^2 (1 - \eta^2), \quad (\text{П } 2.7)$$

$$\eta = \frac{1}{\beta \gamma m_0 c} \left(\frac{P_{\theta}}{r} - q A_{\theta} \right) = \frac{r \dot{\theta}}{\beta c}. \quad (\text{П } 2.8)$$

Уравнение (П2.6) является точным и определяет радиальную координату частицы при заданных функциях A_{θ} и Φ от r и z . Зная величину Φ , можно найти β и γ , которые в свою очередь совместно с A_{θ} и начальным условием для P_{θ} определяют величину η , а следовательно, и λ . Угловую координату частицы вычисляют из выражения (П2.4).

Пренебрегая в уравнении (П2.6) величиной r' и считая, что $A_{\theta} \sim r$ (т.е. B , а следовательно, и Ω_L не зависят от r), а также выражая λ через β , γ и Ω_L , нетрудно получить параксиальное уравнение (2.14). Приведенный здесь вывод взят из книги Пановски и Филлипса [219].

Приложение 3

ПАРАКСИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА

Выведем параксиальное уравнение, описывающее движение частиц в криволинейном ленточном пучке, однородном в направлении оси γ , в присутствии полей B_y , E_x и E_s . Вывод во многом аналогичен приведенному Кирштейном и др. в книге [147], за исключением того, что рассмотрение теперь является релятивистским и изменены обозначения координат, показанных на рис. 2.16. Точка O , принадлежащая лучу, идущему по осевой поверхности, которая характеризуется постоянным значением γ , расположена от точки O' на расстоянии x . Точка P смещена от точки O' в направлениях осей s и x на расстояния ds' и dx соответственно. Точка C является центром кривизны осевого луча, так что $CO = R$.

Используя следующие преобразования: $r \rightarrow -x$, $z \rightarrow -\gamma$, $s \rightarrow s$, $R \rightarrow R$, можно перейти от системы координат, использованной Кирштейном и др., в систему, используемую нами. Метрика данной системы координат определяется выражением

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2 ds^2, \quad (\text{П } 3.1)$$

где $R(s)$ — радиус кривизны осевого луча. Радиус кривизны считается положительным, если x -координата центра кривизны отрицательна.

Электрическое поле можно записать через его интеграл, т.е. через потенциал ϕ . Для этого воспользуемся следующим разложением в окрестности осевого луча:

$$\phi = \phi^{(0)}(s) + x\phi^{(1)}(s) + \frac{1}{2}x^2\phi^{(2)}(s). \quad (\text{П } 3.2)$$

Уравнение движения частицы найдем из лагранжиана. Чтобы построить лагранжиан, необходимо вычислить произведение $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$. Нетрудно показать, что

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} = 1/2 B_y [\dot{x}s - x\dot{s} (1 + x/R)]. \quad (\text{П } 3.3)$$

Следовательно, лагранжиан [выражение (4.1)] можно записать

следующим образом:

$$L = -m_0 c \{c^2 - \dot{s}^2 (1+x/R)^2 - \dot{x}^2\}^{1/2} - q\phi - \\ - \frac{1}{2} q V_y \{x\dot{s} - x\dot{s} (1+x/R)\} . \quad (\text{П } 3.4)$$

Подставляя его в уравнение (4.2), можно сразу же получить уравнение движения.

В обычных предположениях о параксиальном распространении пучка уравнение движения в направлении оси x имеет вид

$$\gamma \ddot{x} + \dot{\gamma} \dot{x} - \frac{\gamma \dot{s}^2 (1+x/R)}{R} + \frac{qV_y}{2m_0} \dot{s} (1 + \frac{x}{R}) + \frac{q}{m_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (\text{П } 3.5)$$

Условием того, что возможная траектория лежит на осевой поверхности, является требование равенства нулю суммы членов, пропорциональных x . Используя разложение (П3.2), для ϕ получаем следующее уравнение:

$$- \frac{\gamma m_0 \beta^2 c^2}{R} - q V_y \beta \dot{s} + q \phi^{(1)} = 0. \quad (\text{П } 3.6)$$

Чтобы найти параксиальное уравнение, надо знать энергию частицы, движущейся на некотором расстоянии от осевого луча. Уравнение для энергии записывается в виде

$$1 - \frac{q\phi}{m_0 c^2} = \gamma = \frac{c}{\{c^2 - (1+x/R)^2 \dot{s}^2 - \dot{x}^2\}^{1/2}} . \quad (\text{П } 3.7)$$

Разложение величин в ряд в окрестности осевой поверхности и использование снова разложения (П3.2), а также соотношения

$$\dot{s} = \beta c + \dot{s}^{(1)} x \quad (\text{П } 3.8)$$

дает

$$\dot{s}^{(1)} \beta c - \frac{\beta^2 c^2}{R} - \frac{q\phi^{(1)}}{\gamma^3 m_0} = 0. \quad (\text{П } 3.9)$$

Опуская в уравнении (П3.5) члены нулевого порядка и исключая из него с помощью уравнения (П3.9) величину $\dot{s}^{(1)}$, можно получить параксиальное уравнение, в котором независимой переменной будет время.

Потенциалы удобно также выразить через производные по координате, отсчитываемой вдоль осевого луча. Из уравнения

$\nabla^2 \phi = 0$, записанного в криволинейных координатах, имеем

$$\phi^{(2)} = -\phi^{(1)}/R - \phi^{(0)''} . \quad (\text{П } 3.10)$$

Наконец, используя разложение для потенциала (П3.2), выражение (П3.10) для исключения $\phi^{(2)}$, уравнение (П3.9) для исключения s и разлагая γ в ряд $\gamma = \gamma^{(0)} + q\phi^{(1)}x/m_0c^2$, получаем уравнение

$$\ddot{x} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{x} + \left[\frac{2\beta^2 c^2}{R^2} - \frac{2q\beta c B_y}{\gamma m_0 R} + \frac{q^2}{\gamma^2 m_0^2} (B_y^2 + \phi^{(1)2}) - \right. \\ \left. - \frac{q}{\gamma m_0} \left\{ \phi'' + \frac{\beta^2 \phi^{(1)}}{R} \right\} - \frac{2q^2 B_y \phi^{(1)} \beta}{\gamma^2 m_0 c} \right] x = 0, \quad (\text{П } 3.11)$$

где верхний индекс (0) мы опустили.

Используя соотношение (2.24), это уравнение можно переписать через независимую переменную s . Чтобы привести его к тому же виду, какой имеют, например, уравнения (2.13) и (2.94), потенциалы надо выразить через поля [см. выражение (2.15)] и записать ϕ через γ . Тогда уравнение (П3.11) приобретает следующий вид:

$$\beta^2 x'' + \frac{\gamma'}{\gamma} x' + \left\{ \frac{2\beta^2}{R^2} - \frac{2q}{\gamma m_0 c^2 R} (\beta c B_y - \beta^2 E_x) + \frac{\gamma''}{\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{q^2}{\gamma^2 m_0^2 c^4} (c^2 B_y^2 + \beta^2 E_x^2 - 2\beta c E_x B_y) \right\} x = 0. \quad (\text{П } 3.12)$$

Преобразуя в нем члены соответствующим образом, можно прийти к уравнению (2.129).

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Если при бетатронных колебаниях возвращающая сила не пропорциональна смещению частицы, то это смещение не синусоидально и период колебаний зависит от амплитуды. Здесь мы рассмотрим, как влияют на амплитуду и период колебаний два простых отклонения от линейности. Возмущение предполагается имеющим такой вид, что уравнение движения можно записать следующим образом:

$$\ddot{x} + Q^2 \omega_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right\} x = 0. \quad (\text{П } 4.1)$$

Будем считать, что смещение x мало по сравнению с x_0 , и, следовательно, амплитуда и частота возмущаются лишь незначительно. При $n = 1$ возмущение по-разному влияет на движение частицы в положительном и отрицательном полупериодах колебаний, в то время как при $n = 2$ оно действует симметрично. Чтобы рассчитать этот эффект, решим уравнение (П4.1). Пусть при $1/x_0 = 0$ амплитуда колебаний равна a ; при этом нетрудно найти первый интеграл уравнения (П4.1):

$$\dot{x}^2 = Q^2 \omega_0^2 \left\{ a^2 - x^2 + \frac{2}{(n+2)x_0^n} (a^{n+2} - x^{n+2}) \right\}. \quad (\text{П } 4.2)$$

В случае когда $x = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Q \omega_0 \left\{ a^2 + \frac{2a^{n+2}}{(n+2)x_0^n} \right\}^{1/2} \approx \\ &\approx Q \omega_0 a \left(1 + \frac{a^n}{(n+2)x_0^n} \right). \end{aligned} \quad (\text{П } 4.3)$$

По сравнению с простым гармоническим движением той же амплитуды частица должна иметь в точке $x = 0$ большую относительную скорость $\Delta \dot{x} / \dot{x}$, равную $a^n / (n+2)x_0^n$. Следовательно, для одного и того же значения \dot{x} в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta a}{a} = - \frac{1}{n+2} \left(\frac{a}{x_0} \right)^n. \quad (\text{П } 4.4)$$

В случае $n = 1$ знаки величин $\Delta a/a$ и x_0 в положительном полупериоде противоположны, а в отрицательном — одинаковы. Однако если $n = 2$, то по сравнению со случаем простого гармонического движения амплитуда колебаний в положительном и отрицательном полупериодах уменьшается симметрично. Чтобы рассчитать изменение периода колебаний, разложим в ряд члены уравнения (П4.2):

$$\dot{x} \approx Q\omega_0 (a^2 - x^2)^{1/2} \left[1 - \frac{a^{n+2} - x^{n+2}}{(n+2)(a^2 - x^2)x_0^n} \right]^{-1}, \quad (\text{П 4.5})$$

откуда, интегрируя, получаем

$$Q\omega_0 t = \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{a^{n+2} - x^{n+2}}{(n+2)(a^2 - x^2)x_0^n} \right] dx. \quad (\text{П 4.6})$$

По сравнению со случаем простых гармонических колебаний период изменяется на величину

$$Q\omega_0 \Delta t = - \int \frac{a^{n+2} - x^{n+2}}{(n+2)(a^2 - x^2)^{3/2} x_0^n} dx. \quad (\text{П 4.7})$$

При нечетном значении n это выражение меняет знак в промежутке между положительным и отрицательным полупериодами; при $n = 1$ полное изменение Δt за один период с точностью до членов первого порядка равно нулю. С другой стороны, если $n = 2$, то Δt отрицательно в обоих полупериодах. Интеграл вычислить нетрудно, но это достаточно утомительное занятие. Окончательный результат имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta t}{t} = - \frac{\Delta Q}{Q} = - \frac{3}{8} \frac{a^2}{x_0^2}. \quad (\text{П 4.8})$$

ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ МОД

Теорию связанных мод, которая аналогична теории возмущений в квантовой механике, впервые использовал Пирс [228] для описания пучков и структур. Подробно она изложена Льюиселлом в книге [191] и более кратко — Джонсоном [133].

Если несколько линейных подсистем связаны между собой, то для описания всей системы в целом всегда можно найти набор нормальных мод, представляющих собой линейные комбинации координат, описывающих подсистемы. Однако, если связь слабая, часто более удобно описывать поведение системы с помощью непрерывного медленного обмена энергией между подсистемами. Условие "медленности" в данном контексте означает, что величина энергии, которой обмениваются подсистемы за один период колебаний, мала по сравнению с полной энергией системы. Хотя теорию нетрудно сформулировать для произвольного числа связанных подсистем, мы ограничимся рассмотрением только того случая, который представляет для нас интерес, а именно рассмотрим случай, когда имеются две подсистемы.

Нас будет интересовать связь волн, которая может осуществляться как через переменную k , так и через ω . Пусть k_1 и k_2 — постоянные распространения двух подсистем в отсутствие связи. При наличии связи будем обозначать коэффициент связи моды 1 с модой 2 через c_{12} , а коэффициент связи моды 2 с модой 1 — через c_{21} . При этом уравнения связи запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial z} &= jk_1 a_1 + c_{12} a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= jk_2 a_2 + c_{21} a_1. \end{aligned} \tag{П 5.1}$$

К этим уравнениям добавляются аналогичные уравнения для комплексно-сопряженных переменных. Найдем связь между c_{12} и c_{21} . Для этого рассмотрим стационарный поток мощности в системе, который в отсутствие диссипации не должен зависеть от z и t . Амплитуды нормализуются таким образом, чтобы мощность можно было записать в виде

$$W = a_1 a_1^* + a_2 a_2^*, \tag{П 5.2}$$

где нижний знак означает, что вторая подсистема переносит отрицательную энергию. Это может иметь место в волне с положительной энергией, но отрицательной групповой скоростью, и наоборот. Если моды связаны, то поток мощности любой из них меняется с координатой z :

$$\frac{\partial}{\partial z} (aa^*) = a_1 \frac{\partial a_1^*}{\partial z} + a_1^* \frac{\partial a_1}{\partial z} . \quad (\text{П } 5.3)$$

Используя уравнения (П5.1) и комплексно-сопряженные им уравнения, получаем для обеих мод следующее уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 = \{(c_{12} \pm c_{21}^*) a_1^* a_2 + (c_{12}^* \pm c_{21}) a_1 a_2^*\} . \quad (\text{П } 5.4)$$

Фазы переменных a_1 и a_2 взаимно не зависимы, так что $a_1^* a_2 \neq a_1 a_2^*$. Следовательно, уравнение (П5.4) будет справедливо, только если

$$c_{12} = \pm c_{21}^* . \quad (\text{П } 5.5)$$

Это условие использовано в уравнении (6.117), в котором вместо c_{12} стоит K .

ЭНЕРГИЯ , СВЯЗАННАЯ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛНАМИ В НИТЕВИДНОМ ПУЧКЕ

Рассматривая конкретный механизм возбуждения поперечных волн в нитевидном пучке, можно рассчитать энергию и показать, что ее знак зависит от того, какова волна, быстрая она или медленная. Для простоты предположим, что число частиц на единице длины пучка равно N и частицы движутся с нерелятивистской скоростью v вдоль оси фокусирующей системы. Пренебрежем взаимным влиянием частиц и обозначим частоту поперечных колебаний через ω .

Пусть теперь вдоль пучка со скоростью V перемещается короткий плоскопараллельный конденсатор, как показано на рис. П6.1. Волна возбуждается впереди или позади конденсатора в зависимости от того, какова величина v по сравнению с V , т.е. соответственно больше или меньше, чем V . Фазовая скорость волны равна V , так что эти два случая соответствуют возбуждению быстрой или медленной волн. Чтобы рассчитать энергию волны, перейдем в систему координат, в которой конденсатор покоится. В этой системе координат энергия частиц сохраняется, а энергия поперечных колебаний и связанная с ними вариация скорости частиц меняется в первом порядке:

$$\dot{y}_2 = (v-V) \sin \theta_2, \tag{П 6.1}$$

$$\dot{z}_2 = V + (v-V) \cos \theta_2.$$

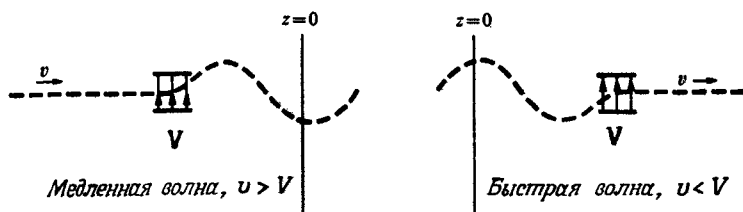


Рис. П6.1. Возбуждение медленной и быстрой поперечных волн с помощью подвижного конденсатора.

В лабораторной системе координат изменение энергии в пересчете на одну частицу дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} m (v^2 - \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_2^2) = \\ &= m v (1 - \cos \theta_2) (V - v) . \end{aligned} \quad (\text{П } 6.2)$$

Если предположить, что θ_c мало, то

$$\Delta U = \frac{1}{2} m v^2 \theta_c^2 \left(1 - \frac{v}{V} \right) . \quad (\text{П } 6.3)$$

Изменение энергии положительно или отрицательно в зависимости от того, больше или меньше V по сравнению с v .

Для конденсатора данной геометрии с фиксированным зарядом величина θ_c обратно пропорциональна величине $|V - v|$. Производя в уравнении (П6.3) замену $\theta_c |V - v| = k$, получаем

$$\Delta U = \frac{m v k^2}{2(V - v)} . \quad (\text{П } 6.4)$$

Если теперь считать, что скорость частиц пучка постоянна, и варьировать скорость перемещения конденсатора, то при $v \rightarrow V$ имеем $\Delta U \rightarrow \infty$. В этом предельном случае линейность сил нарушается, поскольку при фиксированном значении k величина θ возрастает настолько, что приближение $\theta \approx \sin \theta$ становится несправедливым. При $v = V$ взаимодействие имеет резонансный характер типа затухания Ландау.

Интересно заметить, что наблюдатель, находящийся в лабораторной системе координат, увидит максимумы и минимумы быстрой волны в той последовательности, в которой они возбуждались, а медленной волны — в обратной последовательности. Таким образом, медленная волна имеет в некотором смысле отрицательную частоту. Аналогичные наблюдения в квантовых системах, где $E = \hbar \omega$, обсуждаются в работе [209].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alfvén H.*, On the motion of cosmic rays in interstellar space, *Phys. Rev.*, **55**, 425 (1939).
2. *Allis W.P., Buchsbaum S.J., Bers A.*, Waves in anisotropic plasmas, MIT Press, Cambridge, Mass., 1963. (Имеется перевод: *Эллис В., Бухсбаум С., Берс А.* Волны в анизотропной плазме. — М.: Атомиздат, 1966.)
3. *Amboss K.*, The analysis of dense electron beams, *Adv. Electronics electron. Phys.*, **26**, 1 (1969).
4. *Andrews M.L. et al.*, Generation of Astron-type *E* layers using very high current electron beams, *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1428 (1971).
5. *Ash E.A.*, Limiting-current densities in the presence of a magnetic field, *Journ. Appl. Phys.*, **35**, 298 (1964).
6. *Ash E. A.*, Electron Optics, в книге: "Handbook of vacuum physics" (ed. A.H. Beck), Pergamon Press, Oxford, 1968, vol. 2, p. 399.
7. *Ashkin A.*, Dynamics of electron beams from magnetically shielded guns, *Journ. Appl. Phys.*, **29**, 1594 (1958).
8. *Atkinson H.H.*, A new type of high vacuum gauge, Tenth Nat. Vacuum Symp., American Vacuum Society, Boston, Mass., 1963, p. 213.
9. *Baker F. A., Hasted J.B.*, Electron collision studies with trapped positive ions, *Phil. Trans. R. Soc.*, **261**, 33 (1966).
10. *Bakish R.*, Introduction to electron beam technology, John Wiley, New York, 1962.
11. *Banford A.P.*, The transport of charged particle beams, Spon, London, 1966. (Имеется перевод: *Бенфорд А.* Транспортировка пучков заряженных частиц. — М.: Атомиздат, 1969.)
12. *Barnes C.W.*, Conservative coupling between modes of propagation — a tabular summary, *Proc. IEEE*, **52**, 64, 295 (1964). (Имеется перевод в ТИИЭР. — М.: Мир, 1964, т. 52.)
13. *Beck A.H.W.*, Space-charge waves and slow electromagnetic waves, Pergamon Press, Oxford, 1958.
14. *Beck P. A. et al.*, Shifts in betatron frequencies due to energy spread, betatron amplitudes and closed orbit excursions, *Proc. 6th Intern. Confer. on High Energy Accelerators, Cambr. Electr. Acceler. Lab., Rep. No. CEAL 2000*, 1967, p. A63.
15. *Bekefi G.*, Radiation processes in plasmas, John Wiley, New York, 1966. (Имеется перевод: *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971.)

16. *Benford G., Book D.L., Relativistic beam equilibria, Adv. plasma Phys., 4, 125 (1971).* (Имеется перевод в сб.: Достижения физики плазмы. — М.: Мир, 1974, с. 32.)
17. *Benford G., Book D.L., Sudan R.N., Relativistic beam equilibria and back currents, Phys. Fluids, 13, 2621 (1970).*
18. *Bennett W.H., Magnetically self-focusing streams, Phys. Rev., 45, 89 (1934).*
19. *Bernel W., Elektronenbeschleunigung in einem Plasma-betatron mit und ohne hohem Leitungsstrom, Zs. Phys., 237, 345 (1970).*
20. *Bick J.H., The first-order theory of quadrupole lenses including the effects of space charge, IEEE Trans. Electr. Devices, 12, 408 (1965).*
21. *Birdsall C.K., Bridges W.B., Electron dynamics of diode regions, Academic Press, New York, 1966.*
22. *Birdsall C.K., Whinnery J.R., Waves in an electron stream with general admittance walls, Journ. Appl. Phys., 24, 314 (1953).*
23. *Blauth E.W., Dynamic mass spectrometers, Elsevier, Amsterdam, 1966.*
24. *Blewett J. P., Radiation losses in the induction accelerator, Phys. Rev., 69, 87 (1946).*
25. *Bobroff D.L., Haus H.A., Kluver J.A., On the small signal power theorem of electron beams, Journ. Appl. Phys., 33, 2932 (1962).*
26. *Boersch H., Experimentelle Bestimmung der Energieverteilung in thermisch ausgelosten Elektronenstrahlen, Zs. Phys., 139, 115 (1954).*
27. *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Устойчивость релятивистских электронных пучков в плазме и проблема критических токов. — УФН, 1971, т. 103, с. 609.*
28. *Bohm D., Foldy L., Theory of the synchrotron, Phys. Rev., 70, 249 (1946).* (Имеется перевод в сб. статей: Резонансные циклические ускорители элементарных частиц. — М.: ИЛ, 1950.)
29. *Born M., Wolf E., Principles of optics (3rd edn.), Pergamon Press, Oxford, 1965.* (Имеется перевод: Борн М., Вольф Е. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.)
30. *Boussard D., Radiofrequency focusing in heavy ion linear accelerators, в книге: "Linear accelerators" (eds. P.M. Lapostolle, A. Septier), North-Holland, Amsterdam, 1970, p. 1073.*
31. *Брагинский С.И. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле. — ЖЭТФ, т. 33, с. 645.*
32. *Branch G.M., Mihran T.G., Plasma reduction factors in electron beams, IRE Trans. Electr. Devices, ED-2, 3 (1955).*
33. *Brewer G.R., Some characteristics of a magnetically focused electron beams, Journ. Appl. Phys., 30, 1022 (1959).*
34. *Brewer G.R., High-intensity electron guns, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 2, p. 23.*
35. *Brewer G.R., Focusing of high density electron beams, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 2, p. 73.*

36. *Brewer G.R.*, Ion propulsion. Technology and applications, Gordon & Breach, New York, 1970.
37. *Briggs R.J.*, Electron stream interaction with plasmas, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.
38. *Briggs R.J.*, Transformation of small-signal energy and momentum of waves, *Journ. Appl. Phys.*, **35**, 3268 (1964).
39. *Briggs R.J.*, Two-stream instabilities, *Adv. Plasma Phys.*, **4**, 43 (1971). (Имеется перевод в сб. Достижения физики плазмы. — М.: Мир, 1974, с. 132.)
40. *Briggs R.J.*, *Daugherty J.D.*, *Levy R.H.*, Role of Landau damping in crossed-field electron beams and inviscid shear flow, *Phys. Fluids*, **13**, 421 (1970).
41. *Briggs R.J. et al.*, Radial self-focusing of relativistic electron beams, *Phys. Fluids*, **19**, 1007 (1976).
42. *Briggs R.J.*, *Neil V.K.*, Negative-mass instability in a cylindrical layer of relativistic electrons, *Journ. Nucl. Energy*, **9**, 209 (1967).
43. *Brillouin L.*, A theorem of Larmor and its importance for electrons in magnetic fields, *Phys. Rev.*, **67**, 260 (1945).
44. *Bruck H.*, Accélérateurs circulaires de particules, Presses Universitaires de France, Paris, 1966. (Имеется перевод: *Брук Т.* Циклические ускорители заряженных частиц. — М.: Атомиздат, 1970.)
45. *Буджер Г.И.*, CERN Symp. on High Energy Accelerators, CERN, Geneva, 1956, vol. 1, p. 68. (См. также: *Буджер Г.И.* Релятивистский стабилизированный электронный пучок. — Атомная энергия, 1956, т. 1. с. 9.)
46. *Буджер Г.И.* Эффективный метод подавления колебаний частиц в протонных и антипротонных накопительных кольцах. — Атомная энергия, 1967, т. 22, с. 438.
47. *Буджер Г.И.* и др. Experiments on electron cooling, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-22**, 1093 (1975).
48. *Busch H.*, Berechnung der Bahn von Kathodenstrahlen in axial symmetrischen electromagnetischen Felde, *Zs. Phys.*, **81** (5), 974 (1926).
49. *Buneman O.*, Ribbon beams, *Journ. Electr. Contr.*, **3**, 507 (1957).
50. *Buneman O.*, The RF theory of crossed-field devices, в книге: "Crossed-field microwave devices" (ed. E. Okress), Academic Press, New York, 1961, vol. 1, p. 367.
51. *Buneman O.*, *Levy R.H.*, *Linson L.M.*, Stability of crossed-field electron beams, *Journ. Appl. Phys.*, **37**, 3203 (1966).
52. *Chen F.F.*, Introduction to plasma physics, Plenum Press, New York, 1974.
53. *Chodorov M.*, *Susskind C.*, Fundamentals of microwave electronics, McGraw-Hill, New York, 1964.
54. *Christofilos N.C.*, Focussing system for ions and electrons, U. S. Patent No. 2 736 799; см. также в сб. статей: The development of high-energy accelerators (ed. M.S. Livingston), Dover Publication, New York, 1966.
55. *Christofilos N.C.*, Astron thermonuclear reactor, Proc. 2nd U.N. Intern. Confer. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, 32, p. 279.

56. *Christofilos N.C. et al.*, Trapping experiments in the Astron, Proc. 4th Int. Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion Research, IAEA, Vienna, 1971, p. 119.
57. *Chu L.J.*, A kinetic power theorem, Annual IRE Confer. on Electron Tube Research, N.H., Durham, 1951.
58. *Chu L.J., Jackson J.D.*, Field theory of travelling-wave tubes, Proc. Inst. Radio Engrs., 36, 853 (1948).
59. *Clemmow P.C., Dougherty J.P.*, Electrodynamics of particles and plasmas, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
60. *Collin R.E.*, Foundations for microwave engineering, McGraw-Hill, New York, 1966,
61. *Colonias J.S.*, Particle accelerator design: computer programs, Academic Press, New York, 1974.
62. *Connor J.W., Hastie R.J.*, Relativistic limitation on runaway electrons, Nucl. Fusion, 15, 415 (1975).
63. *Corben H.C., Stehle P.*, Classical mechanics (2nd ed.), John Wiley, New York, 1960.
64. *Courant E.D., Livingston M.S., Shyder H.S.*, The strong-focusing synchrotron — a new high energy accelerator, Phys. Rev., 88, 1190 (1952). (Имеется перевод в сб. статей: Проблемы современной физики, 1954, № 11, с. 169.)
65. *Courant E.D., Sessler A.M.*, Transverse coherent resistive instabilities of azimuthally bunched beams in particle accelerators, Rev. Sci. Instrum., 37, 1579 (1966).
66. *Courant E.D., Snyder H.S.*, Theory of the alternating gradient synchrotron, Ann. Phys., 3, 1 (1958). (Имеется перевод в сб. статей: Проблемы современной физики, 1958, № 4, с. 91.)
67. *Cox J.L., Bennett W.H.*, Reverse current induced by injection of a relativistic electron beam into a pinched plasma, Phys. Fluids, 13, 182 (1970).
68. *Crawford F.W.*, Microwave plasma devices — promise and progress, Proc. Inst. Electr. Electron. Engrs., 59, 4 (1971).
69. *Creedon J.M.*, Relativistic flow in the high v/γ diode, Journ. Appl. Phys., 46, 2946 (1975).
70. *Cutler C.C.*, Spurious modulation of electron beams, Proc. Inst. Radio Engrs., 44, 61 (1956).
71. *Cutler C.C., Hines M.E.*, Thermal velocity effects in electron guns, Proc. Inst. Radio Engrs., 43, 307 (1955).
72. *Daugherty J.D., Levy R.H.*, Equilibrium of electron clouds in toroidal magnetic fields, Phys. Fluids, 10, 155 (1967).
73. *Daugherty J.D., Eninger J.F., Janes G.S.*, Experiments on the injection and containment of electron clouds in a toroidal apparatus, Phys. Fluids, 12, 2677 (1969).
74. *Daugherty J.D. et al.*, The HIPAC as a source of highly stripped heavy ions, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-16, 51 (1969).
75. *Davidson R.C.*, Theory of non-neutral plasmas, Benjamin Reading, Mass.,

1974. (Имеется перевод: Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. — М.: Мир, 1978.)
76. *Davidson R.C., Lawson J.D.*, Self-consistent Vlasov description of relativistic electron ring equilibria, *Particle Acceler.*, **4**, 1 (1972).
 77. *Dawson J.M.*, Plasma oscillations of a large number of electron beams, *Phys. Rev.*, **118**, 381 (1960).
 78. *Dawson J.M., Whetten N.R.*, Mass spectroscopy using RF quadrupole fields, *Adv. Electronics Electron. Phys.*, **27**, 59 (1969).
 79. *Dow W.G.*, Non-uniform d-c electron flow in magnetically focused cylindrical beams, *Adv. Electronics Electron. Phys.*, **10**, 1 (1958).
 80. *Dunn D.A., Self S.* Static theory of density and potential distribution in a beam-generated plasma, *Journ. Appl. Phys.*, **35**, 113 (1964).
 81. *Enge H.A.*, Deflecting magnets, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. 'A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 2, p. 203.
 82. *Faulkner J.E., Ware A.A.*, The effect of finite ion mass on the stability of a space-charge-neutralized electron beam, *Journ. Appl. Phys.*, **40**, 366 (1969).
 83. *Ferrari L.A., Rogers K.C.*, Experimental study of runaway electrons in a plasma betatron, *Phys. Fluids*, **10**, 1319 (1967).
 84. *Ferrari L.A., Rogers K.C., Landau R.W.*, Observation of the negative-mass instability in a plasma betatron, *Phys. Fluids*, **11**, 691 (1968).
 85. *Ferrari L.A., Zucker M.S.*, Stability of orbits in combined betatron and azimuthal magnetic fields, *Phys. Fluids*, **12**, 1312 (1968).
 86. *Field L.M., Spangenberg K., Helm R.*, Control of electron beam dispersion at high vacuum by ions, *Elect. Comm.*, **24**, 108 (1947).
 87. *Fink J.H., Schumacher B.W.*, Characterization of charged particle beam sources, *Nucl. Instrum. Meth.*, **130**, 353 (1975).
 88. *Fleischmann H.H.*, High-current electron beams, *Phys. Today*, **28**, 35 (1975).
 89. *Fleischmann H.H., Kammash T.*, Systems analysis of the ion-ring-compression approach to fusion, *Nucl. Fusion*, **15**, 1143 (1976).
 90. *Forsyth E.G., Lederman L.M., Sunderland J.*, The Brookhaven-Columbia plasma lens, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-12, 872 (1965).
 91. *Frey J., Birdsall C.K.*, Instabilities in neutralized electron stream in finite-length drift tube, *Journ. Appl. Phys.*, **37**, 2051 (1966).
 92. *Furth H.P.*, Unstable precession under the influence of drag forces, *Phys. Fluids*, **8**, 2020 (1965).
 93. *Gabor D.*, Dynamics of electron beams. Applications of the Hamiltonian dynamics to electronic problems, *Proc. Inst. Radio Engrs.*, **33**, 792 (1945).
 94. *Garren A.A.*, Thin lens optics with space charge, Lawrence Berkeley Lab. Rep., No. UCRL-19313, 1969.
 95. *Garren A.A. et al.*, Electrostatic deflector calculations for the Berkeley 88-inch cyclotron, *Nucl. Instr. Meth.*, **18**, 525 (1962).
 96. *Gewartowski J.W., Watson H.A.*, Principles of electron tubes, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965.
 97. *Ginzton E.L., Wadia B.H.*, Positive-ion trapping in electron beams, *Proc. Inst. Radio Engrs.*, **42**, 1548 (1954).

98. *Glaser W.*, *Grundlagen der Electronenoptik*, Springer Verlag, Vienna, 1952. (Имеется перевод: *Глазер В.* Основы электронной оптики. — М.: Гостехиздат, 1957.)
99. *Gluckstern R.L.*, Space charge effects, в книге: "Linear accelerators" (eds. P.M. Lapostolle, A. Septier), North-Holland, Amsterdam, 1967, p. 827.
100. *Gluckstern R.L.*, Oscillation modes in two dimensional beams, Proc. 1970 Proton Linear Accelerator Confer., National Accelerator Lab., Batavia, Ill, 1970, vol. 2, p. 133.
101. *Goldstein H.*, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950. (Имеется перевод: *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Гостехиздат, 1957.)
102. *Gould R.W.*, A coupled mode description of the backward wave oscillator and the Kompfner dip condition, IRE Trans. Electron. Devices, ED-2, 37 (1955).
103. *Gould R.W.*, Space charge effects in beam-type magnetrons, Journ. Appl. Phys., 28, 599 (1957).
104. *Graybill S.E.*, *Nablo S.V.*, Observations of the magnetically self-focusing electron streams, Journ. Appl. Phys. Lett., 8, 18 (1966).
105. *Green T.S.*, Intense ion beams, Rep. Progr. Phys., 37, 1257 (1974).
106. *Green T.S.*, Beam formation and space charge neutralization, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-23, 918 (1976).
107. *Greenway T.J.L.*, *Hyder H.R.M.*, The influence of extraction geometry on a negative helium ion source with an extended plasma, Proc. Symp. Ion Sources and Formation of Ion Beams, Brookhaven National Lab., New York, 1971, p. 277.
108. *Grivet P.*, *Septier A.*, *Electron optics* (2nd ed.), Pergamon Press, Oxford, 1972.
109. *Groendijk H.*, *Vlaardingerbroek M.T.*, *Weimer K.R.U.*, Waves in cylindrical beam-plasma systems immersed in a longitudinal magnetic field, Philips Res. Rep., 20, 485 (1965).
110. *Grunder H.*, *Lombertson G.*, Transverse beam instabilities at the bevatron, Proc. 8th Confer. on High Energy Accelerators, CERN, Geneva, 1971, p. 308.
111. *Haeff A.V.*, Space-charge effects in electron beams, Proc. Inst. Radio Engrs., 27, 586 (1939).
112. *Hagedorn R.*, Stability and amplitude ranges of two dimensional non-linear oscillations with periodical Hamiltonian applied to betatron oscillations in circular particle accelerators, Rep. No. CERN 57-1, GERN, Geneva, 1957.
- 112a*. *Hagedorn H.L.*, *Verster N.F.*, Nucl. Instr. Meth., 18, 19, 201 (1962).
113. *Hahn W.C.*, Small signal theory of velocity-modulated electron beams, Gen. Elec. Rev., 42, 258 (1939).
114. *Halsted A.S.*, *Dunn D.A.*, Electrostatic and magnetic pinch effects in beam-generated plasmas, Journ. Appl. Phys., 37, 1810 (1966).

115. *Hammer D.A., Rostoker N.*, Propagation of high current relativistic electron beams, *Phys. Fluids*, **13**, 1831 (1970).
116. *Hardt W.*, A few simple expressions for checking vacuum requirements in proton synchrotrons, Rep. No. CERN ISR-300/GS/68-11, CERN, Geneva, 1968.
117. *Harker K.J.*, Non laminar flow in cylindrical electron beams, *Journ. Appl. Phys.*, **28**, 645 (1957).
118. *Harris L.A.*, Axially symmetric electron beam and magnetic field systems, *Proc. Inst. Radio Engrs.*, **40**, 700 (1952).
119. *Harrison E.R.*, On the space-charge divergence of an axially symmetric beam, *Journ. Electron. Control*, **4**, 193 (1958).
120. *Hawkes P.W.*, Quadrupole optics, Springer tracts in modern physics, (ed. Hohler G.), Springer-Verlag, Berlin, 1966, vol. 42.
121. *Hawkes P.W.*, Quadrupoles in electron lens design, *Adv. Electron. and electron. Phys. Suppl.* **7**, 1970.
122. *Hawkes P.W.*, Electron optics and electron microscopy, Taylor & Francis, London, 1972.
123. *Heitler W.*, The quantum theory of radiation (3rd ed.), Clarendon Press, Oxford, 1954, Ch. 5. (Имеется перевод: Гайтлер В. Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ, 1956.)
124. *Helm R.H., Loew G.A.*, Beam breakup, в книге: "Linear accelerators" (eds. P.M. Lapostolle, A. Septier), North-Holland, Amsterdam, 1970, p. 173.
125. *Helm R.H., Loew G.A., Panofsky W.K.H.*, Beam dynamics, в книге: "The Stanford two-mile accelerator" (ed. R.B. Neal), Benjamin, Reading, Mass., 1968, p. 163.
126. *Herrmann G.*, Optical theory of thermal velocity effects in cylindrical electron beams, *Journ. Appl. Phys.*, **29**, 127 (1958).
127. *Hines M.E., Hoffman G.W., Saloom J.A.*, Positive-ion drainage in magnetically focused electron beams, *Journ. Appl. Phys.*, **26**, 1157 (1955).
128. *Hübner K., Ruggiero A.G., Vaccaro V.G.*, Stability of the coherent transverse motion of a coasting beam for realistic distribution functions and any given coupling with its environment, *Proc. 7th Int. Confer. on High Energy Accelerators*, USSR Academy of Sciences, Yerevan, 1969, vol. 2, p. 343.
129. *Hutter R.G.E., Harrison S.W.*, Beam and wave electronics in microwave tubes, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.
130. *Jackson J.D.*, Longitudinal plasma oscillations, *Journ. Nucl. Energy*, **1**, 171 (1960).
131. *Jackson J.D.*, Classical electrodynamics, John Wiley, New York, 1963. (Имеется перевод: Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.)
132. *Jepson R.L.*, Magnetically confined cold-cathode gas discharges at low pressures, *Journ. Appl. Phys.*, **32**, 2619 (1961).
133. *Johnson C.C.*, Field and wave electrodynamics, McGraw-Hill, New York, 1965.

134. *Johnston T.W.*, Nonlaminar flow in magnetically focused electron beams from magnetically shielded guns, *Journ. Appl. Phys.*, **30**, 1456 (1959).
135. *Jory H.R.*, *Trivelpiece A.W.*, Exact relativistic solution for one-dimensional diode, *Journ. Appl. Phys.*, **40**, 3924 (1969).
136. *Kampen N.G., van*, On the theory of stationary waves in a plasma, *Physica*, **21**, 949 (1955).
137. *Капчинский И.М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях.— М.: Атомиздат, 1966.
138. *Капчинский И.М.*, *Владимирский В.В.* Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge, *Proc. Inter. Confer. on High Energy Accelerators*, CERN, Geneva, 1959, p. 274.
139. *Kapetanacos C.A. et al.*, Destructive instabilities in hollow intense relativistic beams, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1303 (1973).
140. *Keil E.*, Diffraction radiation of charged rings moving in a corrugated cylindrical pipe, *Nucl. Instr. Meth.*, **100**, 419 (1972).
141. *Keil E.*, Intersecting storage rings, Rep. No. CERN 72-14, CERN, Geneva, 1972.
142. *Keil E.*, *Schnell W.*, Concerning longitudinal stability in the ISR, CERN Rep. No. CERN-ISR-TH-RF/69 48, CERN, Geneva, 1969.
143. *Kellogg O.D.*, Foundations of potential theory, Frederick Ungar, New York, 1930 (см. также 2-е изд. этой книги: Dover Publications, New York, 1953).
144. *Kerst D.W.*, *Serber R.*, Electronic orbits in the induction accelerator, *Phys. Rev.*, **60**, 53 (1941).
145. *King N.M.*, Theoretical techniques of high energy beam design, *Prog. Nucl. Phys.*, **9**, 71 (1964).
146. *Kino G.S.*, *Gerchberg R.*, Transverse field interactions of a beam and plasma, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 185 (1963).
147. *Kirstein P.T.*, *Kino G.S.*, *Waters W.E.*, Space charge flow, McGraw-Hill, New York, 1967. (Имеется перевод: *Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У.* Формирование электронных пучков.— М.: Мир, 1970.)
148. *Klemperer O.*, *Barnett M.E.*, *Electron optics* (3rd edn.), Cambridge University Press, London, 1971.
149. *Knauer W.*, Diocotron instability in plasmas and gas discharges, *Journ. Appl. Phys.*, **37**, 602 (1966).
150. Particle accelerators (ed. R. Kollath), Pitman, London, 1967.
151. *Коломенский А.А.*, *Лебедев А.Н.* Теория циклических ускорителей.— М.: Физматгиз, 1962.
152. *Коломенский А.А.*, *Лебедев А.Н.* Коллективные эффекты в ускорителях.— Труды Всесоюзной конференции по ускорителям заряженных частиц.— М.: ВИНТИ, 1970, т. 2, с. 261.
153. *Кошкарёв Д.Г.*, *Зенкевич П.Р.*, Resonance of coupled transverse oscillations in the two circular beams, *Particle Acceler.*, **3**, 1 (1972).

154. *Kyhl R.L., Webster H.R.*, Breakup of hollow cylindrical electron beams, IRE Trans. Electron. Devices, ED-3, 172 (1956).
155. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы. — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.
156. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
157. *Langmuir D.B.*, Theoretical limitations of cathode ray tubes, Proc. Inst. Radio Engrs., 25, 977 (1937).
158. *Lapostolle P.*, Les sources d'ions dans les grands accélérateurs, Première Confer. Int. sur les sources d'ions, INSTN, Saclay, France, 1969, p. 165.
159. *Lapostolle P.*, Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-18, 1101 (1971).
160. *Lapostolle P.*, Possible ion beam quality deterioration due to non linear space charge effects, Proc. 2nd Int. Confer. on Ion Sources, Osterreichische Studentengesellschaft für Atomenergie, Vienna, 1972, p. 133.
161. Linear accelerators (eds. P. Lapostolle, A. Septier), North-Holland, Amsterdam, 1970.
162. *Larsen R.R., Altenmueller O.A., Loew G.A.*, Investigation of travelling-wave separators for the Stanford two-mile linear accelerator, Proc. Inter. Confer. on High Energy Accelerators, Dubna, Atomizdat, 1964, p. 804.
163. *Laslett L.J.*, Proc. 1963 Summer Study on Storage Rings, Rep. No. BNL 7534, Brookhaven National Lab., New York, 1963, p. 324.
164. *Laslett L.J.*, Strong focusing in circular particle accelerators, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 2, p. 355.
165. *Laslett L.J.*, On the focusing effects arising from the self fields of a toroidal beam, Lawrence Berkeley Lab., Rep. No. ERAN-30, 1969.
166. *Laslett L.J.*, "Stochasticity", Proc. 9th Inter. Confer. on High Energy Accelerators, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, Calif., 1974, p. 394.
167. *Laslett L.J., Möhl D., Sessler A.M.*, Transverse two-stream instability in the presence of strong species-species and image forces, Lawrence Berkeley Lab., Rep. No. LBL 1072, 1972.
168. *Laslett L.J., Neil V.K., Sessler A.M.*, Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators, Rev. Sci. Instrum., 36, 436 (1965).
169. *Laslett L.J., Resegotti L.*, The space-charge intensity limit imposed by coherent oscillation of a bunched synchrotron beam, Proc. 6th Inter. Confer. on High Energy Accelerators, Cambridge Electron Accelerator Lab., Rep. No. CEAL 2000, 1967, p. 150.

170. *Lau Y.Y., Briggs R.J.*, Effects of cold plasma on the negative mass instability of a relativistic electron layer, *Phys. Fluids*, **14**, 967 (1971).
171. *Lawson J.D.*, Electron trajectories in strip beams constrained by a magnetic field, *Proc. Inst. Elect. Radio Engrs.*, **42**, 1147 (1954).
172. *Lawson J.D.*, On the classification of electron streams, *Journ. Nucl. Energy*, **C1**, 31 (1959).
173. *Lawson J.D.*, Simple models of solid and hollow relativistic electron beams with arbitrarily high current, *Phys. Fluids*, **16**, 1298 (1973); Comments by Hon-Ming Lai and correction, *Phys. Fluids*, **19**, 1068 (1973).
174. *Lawson J.D.*, Optical and hydrodynamical approaches to charged particle beams, *Plasma Phys.*, **17**, 567 (1975).
175. *Lawson J.D., Lapostolle P.M., Gluckstern R.L.*, Emittance, entropy and information, *Particle Acceler.*, **5**, 61 (1973).
176. *Lee E.P.*, Kinetic theory of a relativistic beam, *Phys. Fluids*, **19**, 60 (1976).
177. *Lee E.P., Cooper R.K.*, General envelope equation for cylindrically symmetric charged particle beams, *Particle Acceler.*, **7**, 83 (1976).
178. *Lee M.J., Morton P.L., Mills F.E.*, Throbbing beam instabilities in particle accelerators and storage rings, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-14**, 602 (1967).
179. *Lehnert B.*, Dynamics of charged particles, North-Holland, Amsterdam, 1964. (Имеется перевод: *Ленерт Б.* Динамика заряженных частиц. — М.: Атомиздат, 1967.)
180. *Levine L.S., Vitkovitsky I.M., Hammer D.A., Andrews M.L.*, Propagation of an intense relativistic electron beam through a plasma background, *Journ. Appl. Phys.*, **42**, 1863 (1971). (Имеется перевод: *Левин Л., Витковичский И., Хаммер Д., Эндрю М.* Распространение интенсивного электронного пучка в плазме. — Атомная техника за рубежом, 1972, № 2, с. 39.)
181. *Levy R.H.*, Diocotron instability in cylindrical geometry, *Phys. Fluids*, **8**, 1288 (1965).
182. *Lichtenberg A.J.*, Phase-space dynamics of particles, John Wiley, New York, 1969. (Имеется перевод: *Лихтенберг А.* Динамика частиц в фазовом пространстве. — М.: Атомиздат, 1972.)
183. *Lindsay P.A.*, Velocity distribution in electron streams, *Adv. Electr. Electron. Phys.*, **13**, 182 (1960).
184. *Livingood J.J.*, Principles of cyclic particle accelerators, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1961. (Имеется перевод: *Ливингуд Дж.* Принципы работы циклических ускорителей. — М.: ИЛ, 1963.)
185. *Livingood J.J.*, The optics of dipole magnets, Academic Press, New York, 1969.
186. The development of high-energy accelerators (ed. M.S. Livingston), Dover Publications, New York, 1966.
187. *Livingston M.S., Blewett J.P.*, Particle accelerators, McGraw-Hill, New York, 1962.

188. *Loeffler K.H.*, Energy-spread generation in electron-optical instruments, *Zs. Angew. Phys.*, **27**, 145 (1969).
189. *Loew G.A.*, Electron linac instabilities, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-14**, 529 (1967).
190. *Longmire C.L.*, Elementary plasma physics, Interscience, New York, 1963. (Имеется перевод: *Лонмайр К.* Физика плазмы. — М.: Атомиздат, 1966.)
191. *Louisell W.H.*, Coupled mode and parametric electronics, John Wiley, New York, 1960. (Имеется перевод: *Лоуселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. — М.: ИЛ, 1963.)
192. *Lynden-Bell D.*, Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **136**, 101 (1967).
193. *Manickam J., Carr W., Rosen B., Seidl J.*, Convective and absolute instabilities in beam plasma systems, *Phys. Fluids*, **18**, 369 (1975).
194. *Marcuse D.*, Light transmission optics, Van Nostrand, New York, 1972. (Имеется перевод: *Маркузе Д.* Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.)
195. *McCorkle R.A., Bennett W.H.*, Thin electrostatically self-focusing streams, *Plasma Phys.*, **13**, 1153 (1971).
196. *McLachlan N.W.*, Theory and application of Mathieu functions, Oxford University Press, Oxford, 1947. (Имеется перевод: *Мак Лаклан Н.* Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953.)
197. *McMillan E.M.*, The relation between phase stability and first order focusing in linear accelerators, *Phys. Rev.*, **80**, 493 (1950).
198. *Meer S., van der*, A directive device for charged particles and its use in an enhanced neutrino beam, CERN 61-7, Geneva, 1961.
199. *Meleka A.H.*, Electron-beam welding. Principles and practice, McGraw-Hill, London, 1971.
200. *Meltzer B.*, Single component space-charge flow, *Journ. Electron. Control*, **2**, 118 (1956).
201. *Mihran T.G., Andal K.B.*, The growth of peak velocity, noise and signals in O-type electron beams, *IEE Trans. Electron. Devices*, **ED-12**, 208 (1965).
202. *Mohl D., Laslett L.J., Sessler A.M.*, On the performance characteristics of electron ring accelerators, *Particle Acceler.*, **4**, 159 (1973).
203. *Montgomery D.C., Tidman D.A.*, Plasma kinetic theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
204. *Morton P.L., Neil V.K., Sessler A.M.*, Wake fields of a pulse of charge moving in a highly conducting pipe of circular cross section, *Journ. Appl. Phys.*, **37**, 1375 (1966).
205. *Moss H.*, Narrow angle electron guns and cathode ray tubes, *Adv. Electr. electron. Phys.*, **Suppl. 3** (1968).
206. *Муховатов В.С., Шафранов В.Д.*, Plasma equilibrium in a Tokamak, *Nucl. Fusion*, **11**, 605 (1971).
207. *Mulvey T.*, Electron microprobes, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 1, p. 469.

208. *Mulvey T., Wallington M.J.*, Electron lenses, Rep. Progr. Phys., **36**, 347 (1973).
209. *Musha T.*, Amplification of waves due to guanta with negative energy, Journ. Appl. Phys., **35**, 137 (1964).
210. *Nagy G.A., Szilgyi M.*, Introduction to the theory of space charge optics, Macmillan, London, 1974.
211. The Stanford two-mile accelerator (ed. R.Neal), Benjamin, New York, 1968, p. 1169.
212. *Neil V.K., Heckrotte W.*, Relation between diocotron and negative mass instabilities, Journ. Appl. Phys., **36**, 2761 (1965).
213. *Neil V.K., Sessler A.M.*, Longitudinal resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators, Rev. Sci. Instr., **36**, 429 (1965).
214. *Neugebauer W.*, Equilibrium solutions for partially immersed relativistic electron beams, IEEE Trans. Electr. Devices, **14**, 686 (1967).
215. *Незлин М.В.*, Plasma instabilities and compensation of space charge in an ion beam, Plasma Phys., **10**, 337 (1968).
216. *Northrup T.G.*, The adiabatic motion of charged particles, Interscience, New York, 1963. (Имеется перевод: Нортруп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. — М.: Атомиздат, 1957.)
217. Crossed-field microwave devices (ed. E. Okress), Academic Press, New York, 1961.
218. *Pachk D.C. de, Ulrich P.B.*, Brillouin flow in relativistic beams, Journ. Electr. Control, **10**, 139 (1961).
219. *Panofsky W.K.H., Phillips M.*, Classical electricity and magnetism (2nd edn.), Addison Wesley, Reading, Mass., 1962. (Имеется перевод: Пановский В., Филлипс М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963.)
220. *Parzen G.*, Accelerators with a general magnetic field, Ann. Phys., **15**, 22 (1961).
221. *Pease R.S.*, Equilibrium characteristics of a pinched gas discharge cooled by bremsstrahlung radiation, Proc. Phys. Soc., B-70, 11 (1957).
222. *Pellegrini C.*, On a new instability in electron positron storage rings. (The head-tail effect), Nuovo Cim., **64A**, 447 (1969).
223. *Penrose O.*, Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxvillian plasma, Phys. Fluids, **3**, 258 (1960).
224. *Pfeiffer H.C.*, Experimental investigation of energy broadening in electron optical instruments, Rec. 11th Symp. on Electron, Ion and Laser Beam Technology, San Francisco Press, San Francisco, 1970.
225. *Pfeiffer H.C.*, Basic limitation of probe forming systems due to electron-electron interaction, Proc. 5th Annual Scanning Electron Microscopy Symp., IIT Research Institute, Chicago, 1972.
226. *Pierce J.R.*, Limiting stable current in electron beams in the presence of ions, Journ. Appl. Phys., **15**, 721 (1944).
227. *Pierce J.R.*, Traveling-waves tubes, Van Nostrand, New York, 1950.

- (Имеется перевод: *Пирс Дж.* Лампы бегущей волны. — М.: Советское радио, 1957.)
228. *Pierce J.R.*, Theory and design of electron beams (2nd edn.), Van Nostrand, Princeton, N.J., 1954. (Имеется перевод: *Пирс Дж.* Теория и расчет электронных пучков. — М.: Советское радио, 1956.)
 229. *Pierce J.R.*, Coupling of modes of propagation, *Journ. Appl. Phys.*, **25**, 179 (1954).
 230. *Pierce J.R.*, The wave picture of microwave tubes, *Bell Syst. Tech. Journ.*, **33**, 343 (1954).
 231. *Pierce J.R.*, Momentum and energy of waves, *Journ. Appl. Phys.*, **32**, 2580 (1961).
 232. *Pierce J.R., Walker L.R.*, "Brillouin flow" with thermal velocities, *Journ. Appl. Phys.*, **24**, 1328 (1953).
 233. *Piwnski A.*, Intra-beam scattering, Proc. 9th Int. Confer. on High Energy Accelerators, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, Calif., 1974, p. 347.
 234. *Pöschl K., Veith W.*, Generalized Brillouin flows, *Journ. Appl. Phys.*, **33**, 1013 (1962).
 235. *Pötzl H.*, Wellentypen in magnetisch focussierten Elektronenstrahlen, *Ark. electr. Ubertr.*, **19**, 367 (1965).
 236. *Poukey J.W., Toepfer A.J.*, Theory of superpinched relativistic electron beams, *Phys. Fluids*, **17**, 1582 (1974).
 237. *Ramo S.*, Space charge and field waves in an electron beam, *Phys. Rev.*, **56**, 276 (1939).
 238. *Redhead P.A.*, Multiple ionization of the rare gases by successive electron impacts (0 – 250 eV), *Canad. Journ. Phys.*, **45**, 1791 (1967).
 239. *Redhead P.A.*, Multiple ionization by sequential electron impact, *Jap. Journ. Appl. Phys., Suppl.*, **2**, **13**, 403 (1974).
 240. *Regenstreif E.*, Focusing with quadrupoles, doublets, and triplets, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 1, p. 353.
 241. *Reiser M.*, First-order theory of electrical focusing in cyclotron-type two-dimensional lenses with static and time-varying potentials, *Journ. Appl. Phys.*, **42**, 4128 (1971).
 242. *Reiser M.*, On the equilibrium orbit and linear oscillations of charged particles in axisymmetric $\underline{E} \times \underline{B}$ fields and application to the electron ring accelerator, *Particle Acceler.*, **4**, 239 (1973).
 243. *Reiser M.*, Laminar-flow equilibria and limiting currents in magnetically focused relativistic beams, *Phys. Fluids*, **20**, 477 (1977).
 244. *Robinson K.W.*, Radiation effects in circular electron accelerators, *Phys. Rev.*, **111**, 373 (1958).
 245. *Rognlien T.d., Self S.A.*, Interpretation of dispersion relations for bounded systems, *Journ. Plasma Phys.*, **7**, 13 (1972).

246. *Rome J.A., Briggs R.J.*, Stability of sheared electron flow, *Phys. Fluids*, **15**, 796 (1972).
247. *Roos B.W.*, Analytic functions and distributions in physics and engineering, John Wiley, New York, 1969.
248. *Rose M.E.*, Focusing and maximum energy of ions in the cyclotron, *Phys. Rev.*, **53**, 392 (1938).
249. *Rossi B.*, High-energy particles, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1952, ch. 2. (Имеется перевод: *Росси Б.* Частицы больших энергий. — М.: Гостехиздат, 1955.)
250. *Rossi B., Greisen K.*, Cosmic-ray theory, *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).
251. *Rowe J.E.*, Nonlinear electron-wave interaction phenomena, Academic Press, New York, 1965. (Имеется перевод: *Роу Дж.* Теория нелинейных колебаний в приборах сверхвысоких частот. — М.: Советское радио, 1969.)
252. *Ruggiero A. G., Vaccaro V.G.*, Solution of the dispersion relation for longitudinal stability of an intense coasting beam in a circular accelerator (application to the ISR), Rep. No. ISR/TH/68-33, CERN, Geneva, 1968.
253. *Sacherer F.J.*, Transverse space-charge effects in circular accelerators, Rep. No. UCRL-18454, Lawrence Radiation Lab., Berkeley, 1968.
254. *Sacherer F.J.*, RMS envelope equations with space charge, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-18**, 1105 (1971).
255. *Sacherer F.J.*, Methods for computing bunched-beam instabilities, Rep. No. CERN/SI — BR/ 72-5, CERN, Geneva, 1972.
256. *Sacherer F.J.*, A longitudinal stability criterion for bunched beams, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-20**, 825 (1973).
257. *Sacherer F.J.*, Transverse bunched beam instabilities theory, Proc. 9th Inter. Confer. on High Energy Accelerators, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, Calif., 1974, p. 347.
258. *Sanuel A.L.*, On the theory of axially symmetric electron beams in an axial magnetic field, *Proc. Inst. Radio Engrs.*, **37**, 1252 (1949).
259. *Sands M.*, The head-tail effect: an instability mechanism in storage rings, Rep. No. SLAC TN — 69-8, Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, 1969.
260. *Sands M.*, The physics of electron storage rings: an introduction, Proc. Int. School "Enrico Fermi", Course XLVI, Academic Press, New York, 1971.
261. *Scherzer O.*, Über einige Fehler von Elektronenlinsen, *Zs. Phys.*, **101**, 593 (1936).
262. *Scherzer O.*, Die schwache elektrische Einzellinse geringster sphärischer Aberration, *Zs. Phys.*, **101**, 23 (1936).
263. *Schock A.*, Theory of linear and non-linear perturbations of betatron

- oscillations in alternating gradient synchrotrons, Rep. No. CERN 57-21, CERN, Geneva, 1958.
264. *Self S.A.*, Interaction of a cylindrical beam with a plasma. I. Theory II. Experiment and comparison with theory, Journ. Appl. Phys., **40**, 5217 (1969).
265. *Septier A.*, The struggle to overcome spherical aberration in electron optics, Adv. Opt. Electron. Microsc., **1**, 204 (1966).
266. Focusing of charged particles (ed. A. Septier), Academic Press, 1967, vols. 1, 2.
267. *Sessler A.M.*, Instabilities of relativistic particle beams, Proc. 5th Inter. Confer. on High Energy Accelerators, Comitato Nazionale per l'Energia Nucleare, Rome, 1966.
268. *Sessler A.M.*, Collective phenomena in accelerators, Proc. 1972 Proton Linear Accelerator Confer., Rep. No. LA5115, Los Alamos Lab., N.M., 1972, p. 291.
269. *Sessler A.M.*, *Vaccaro V.G.*, Longitudinal instabilities of azimuthally uniform beams in circular vacuum chambers with walls of arbitrary electrical properties, Rep. No. ISR 67-2, CERN, Geneva, 1967.
270. *Шевчик В.Н.*, *Шедов Г.Н.*, *Соболева А.В.*, Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. - Саратов: Изд. Саратовского университета, 1962.
271. *Shohet J.L.*, The plasma state, Academic Press, New York, 1971.
272. *Sims G.D.*, *Stephenson I.M.*, Microwave tubes and semiconductor devices, Blackie, London, 1963, p. 271.
273. *Sieglman A.E.*, Waves on a filamentary electron beam in a transverse-field slow-wave circuit, Journ. Appl. Phys., **31**, 17 (1960).
274. *Сувухин Д.В.*, Coulomb collisions in fully ionized plasma, Rev. plasma Phys., **4**, 93 (1966).
275. *Smith L.*, Effect of gradient errors in the presence of space charge forces, Proc. Int. Confer. on High Energy Accelerators, Dubna, 1963, p. 1232.
276. *Sprengsen A.*, Crossing the phase transition in strong-focusing proton synchrotrons, Particle Acceler., **6**, 141 (1975).
277. *Spitzer L.*, Physics of fully ionized gases, Interscience, New York, 1962, ch. 5. (Имеется перевод: *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. - М.: ИЛ, 1957.)
278. *Spong D.A.*, *Clarke J.F.*, *Rome J.A.*, *Kammash T.*, Runaway electrons the Ormak device, Nucl. Fusion, **14**, 397 (1974).
279. *Steele M.C.*, *Vural B.*, Wave interactions in solid state plasmas, McGraw-Hill, New York, 1969. (Имеется перевод: *Стил М.*, *Вюраль Б.* Взаимодействие волн в плазме твердого тела. - М.: Атомиздат, 1973.)
280. *Steenbergen A., van*, Recent developments in high intensity ion beam production and preacceleration, IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-12**, 746 (1965).
281. *Steenbergen A., van*, Evaluation of particle beam phase space measurement techniques, Nucl. Instrum. Meth., **51**, 245 (1967).
282. *Steffen K.G.*, High energy beam optics, John Wiley, New York, 1965. (Имеется перевод: *Штеффен К.* Оптика пучков высокой энергии. - М.: Мир, 1969.)

283. *Stix T.H.*, The theory of plasma waves, McGraw-Hill, New York, 1962. (Имеется перевод: *Стикс Т.* Теория плазменных волн. — М.: Атомиздат, 1965.)
284. *Sturrock P.*, The aberrations of magnetic electron lenses due to asymmetries, *Phil. Trans. R. Soc., A* **243**, 387 (1951).
285. *Sturrock P.*, The imaging properties of electron beams in arbitrary static electromagnetic fields, *Phil. Trans. R. Soc., A* **245**, 387 (1952).
286. *Sturrock P.*, Static and dynamic electron optics, Cambridge University Press, London, 1955. (Имеется перевод: *Стэррок П.* Статистическая и динамическая электронная оптика. Теория фокусировки в линзах, отклоняющих устройствах и ускорителях. — М.: ИЛ, 1958.)
287. *Sturrock P.*, Kinematics of growing waves, *Phys. Rev.*, **112**, 1488 (1958).
288. *Sturrock P.*, Magnetic deflection focusing, *Journ. Electr. Contr.*, **7**, 162 (1959).
289. *Sturrock P.*, In what sense do slow waves carry negative energy? *Journ. Appl. Phys.*, **31**, 2052 (1960).
290. *Sturrock P.*, Energy and momentum in the theory of waves in plasmas, в сб. статей: "Plasma hydromagnetics, 6th Lockheed Symp, on Magneto-hydrodynamics" (ed. D. Bershader), Stanford University Press, Calif., 1962.
291. *Sudan R.N.*, Accelerators for the fusion program, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-22**, 1736 (1975).
292. *Sutherland A.D.*, Relaxation instabilities in high-perveance electron beams, *IRE Trans. Electron. Devices*, **ED-7**, 268 (1960).
293. *Symon K.R.*, *Kerst D.W.*, *Jones L.W.*, *Laslett L.J.*, *Terwilliger K.M.*, Fixed-field alternating gradient particle accelerators, *Phys. Rev.*, **103**, 1837 (1956).
294. *Theiss A.J.*, *Mahaffey R.A.*, *Trivelpiece A.W.*, Rigid-rotor equilibria and wave propagation characteristics of magnetically-confined plasmas (в печати).
295. *Thomas L.H.*, The paths of ions in the cyclotron. I. Orbits in the magnetic field, *Phys. Rev.*, **54**, 580 (1938).
296. *Thonemann P.C.*, *Cowhig W.T.*, The role of the self-magnetic field in high current gas discharges, *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 345 (1951).
297. *Trivelpiece A.W.*, Slow wave propagation in plasma waveguides, San Francisco Press. San Francisco, 1967.
298. *Trivelpiece A.W.*, *Goold R.W.*, Space charge waves in cylindrical plasma columns, *Journ. Appl. Phys.*, **30**, 1784 (1959).
299. *Бекслер В.И.*, Коллективное линейное ускорение ионов, *Атомная энергия*, **24**, 317 (1968).
300. *Власов А.А.*, On the kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction, *Journ. Phys. (USSR)*, **9**, 25 (1945).
301. *Walcher W.*, Space charge neutralization in ion beams, в книге: "Electromagnetic isotope separators and applications of electromagnetically enriched isotopes" (ed. J. Koch), North-Holland, Amsterdam, 1958, p. 275.
302. *Walcher W.*, Some remarks on emittance and brightness of ion sources

- and ion beams, Proc. 2nd Inter. Confer. on Ion Sources, Osterreichische Studentengesellschaft für Atomenergie, Vienna, 1972, p. 111.
303. *Walker L.R.*, Generalizations of Brillouin flow, *Journ. Appl. Phys.*, **26**, 780 (1955).
304. *Walsh T.R.*, A normal beam with linear focusing and space-charge forces, *Journ. Nucl. Energy*, **5**, 17 (1963).
305. *Weber C.*, The electron beam in a cathode-ray tube, *Proc. Inst. Electr. Electron. Engrs.*, **52**, 996 (1964).
306. *Webster H.F.*, Structure in magnetically confined electron beams, *Journ. Appl. Phys.*, **28**, 1388 (1957).
307. *Wilson R.G., Brewer C.R.*, Ion beams with application to ion implantation, John Wiley, New York, 1973.
308. *Wollnik H.*, Electrostatic prisms, в книге: "Focusing of charged particles" (ed. A. Septier), Academic Press, New York, 1967, vol. 2, p. 163.
309. *Wu T.Y.*, Kinetic equations of gases and plasmas, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
310. *Yadavalli S.V.*, Focusing in high voltage beam-type devices, *Journ. Electron. Contr.*, **5**, 65 (1958).
311. *Yonas G., Poukey J.M., Prestwich K.R., Freeman J.R., Toepfer A.J., Clauser M.J.*, Electron beam focusing and application to pulsed fusion, *Nucl. Fusion*, **14**, 731 (1974).
312. *Zimmermann B.*, Energy broadening in accelerated electron beams by Coulomb interaction, *Rec. 10th Symp. on Electron, Ion and Laser Beams*, San Francisco Press, San Francisco, 1969, p. 297.
313. *Zimmermann B.*, Broadened energy distributions in electron beams, *Adv. Electr. Electron. Phys.*, **29**, 257 (1970).
314. *Zworykin V.K., Morton G.A., Ramberg E.G., Hillier J., Vance A.W.*, Electron optics and the electron microscope, John Wiley, New York, 1945.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация сферическая** 61
— — коэффициент 62
— хроматическая 59, 63
— — коэффициент 63
Автофазировка 118
Адиабатические инварианты для электронного кольца в бетатронном поле 242
Аксептанс 185
— диаграмма 186
Альвена ток 125
Аналог формулы Гельмгольца — Лагранжа 50
Аналогия между удержанием плазмы и заряженного пучка в магнитном поле 147
Астрон 26
Барбера правило 82
Беннета пинч 142, 209 — 212
— — распределение параметров по сечению 211
— — условие существования 206, 211
Бетатронное условие 2 1 243
Бетатронные колебания в гравитационном поле 78
— — — магнитном поле 75
— — — электрическом и магнитном полях 79
— — — электростатическом поле 76
— — когерентные 353
— — связь на нелинейностях поля 105
Бетатрон с азимутальным магнитным полем 104
Больцмана распределение 202
Бриллюэна поток 144
— — пенточный 155
— — — в скрещенных полях 157
— — предельный ток 147
— — лространственная модуляция 153
— — — — длина волны 156
— — трубчатый 154
Бриллюэна поток, условие существования 144, 146
— — эллиптический 159
Будкера параметр 124
— — для пучка однородной плотности 125
— пучок 272
Бурша эффект 256, 267
— — в кроссовере пучка 268
Буша теорема 33, 168
Видерое условие см. Бетатронное условие 2 1
Вина фильтр 80
Власова уравнение 247, 308
— — нерелятивистское 248
Волны бетатронные 353
— в бесконечной дрейфующей в магнитном поле плазме 382
— поверхностные в незамагниченном пучке 373
— — — полубесконечной стационарной плазме 290
— поперечные в стационарной плазме 282
— продольные быстрые и медленные 295
— — в стационарной плазме 284
— — — дрейфующей плазме 294
— — — пучках с конечным поперечным сечением 310
— синхронные 353
— с положительной и отрицательной энергиями 297
— циклотронные 353
Гамильтониан 171, 173
Гамильтонов формализм 173
Гидродинамическое описание пучков заряженных частиц 167
Главный параксиальный луч 60
Гладкая аппроксимация магнитного поля 237
Глубина бесстолкновительного скин-слоя 286, 293

Г-пространство 172

Давление 203

Дебаевская сфера 203

Дебаевский радиус экранирования 201 — 203

Декременты радиационные бетатронных колебаний 279

— — коэффициенты распределения по степеням свободы 279

— — связь 279

— — фазовых колебаний 278

Диамagnetизм цилиндрического токового слоя 240

Дисперсионное уравнение 282

— — для двухпотоковой неустойчивости в холодной плазме 298, 348

— — — — поперечной неустойчивости 365

— — — — ЛБВ 347

— — — — плазмы с непрерывным распределением частиц по скоростям 301

— — — — — поверхностных волн в плазме 290

— — — — — незамагниченном пучке 378

— — — — — неограниченной плазме в магнитном поле 382

— — — — — поперечных волн в стационарной плазме 286

— — — — — циклических ускорителях 362

— — — — — продольных волн в стационарной плазме 285

— — — — — дрейфующей плазме 295

— — — — — пучка в камере с конечной проводимостью стенок 320

Диэлектрическая проницаемость плазмы 286

Жгут траекторий 30

Жесткий ротатор 143

Жесткость пучка 153

Импеданс 310, 320

— связи 364

Капчинского — Владимирского (КВ) распределение 187

— — уравнения 192

Катод виртуальный 132, 134

— иммерсионный 33

— экранированный 33

Кинетическое напряжение 338

Классический радиус частицы 28

Компфнера условие 342

Коэффициент бунчировки 237

— зарядовой нейтрализации 130

— расширения орбит 91, 94

— редукции плазменной частоты 313

— усиления ЛБВ 346

Критерий стабилизации неустойчивости отрицательной массы затуханием Ландау 327, 328, 329

— устойчивости пучка по отношению к поперечным колебаниям в циклических ускорителях 364

Критическая энергия в циклических ускорителях 95

Ландау затухание 304

— — условие возникновения 306

Ларморовская система координат 37

ЛБВ, физические принципы 341

— уравнения 345

Линза, дублет 70

— квадрупольная 69

— — магнитная 69

— — электростатическая 69

— — — фокусное расстояние 70

— — магнитная 56

— — — фокусное расстояние 56

— — со сторонним током 57

— оптическая сила 49

— плазменная 57

— секстульная 72

— толстая 48

— — параметры 49

— тонкая 48

— электростатическая 51

— — апертурная 55, 135

— — плоская 66

— — с сеткой 55

Магнитная бутылка 229

— призма 80

Магнитный горн 57

Матрица преобразования 40

— — единичного элемента сильнофокусирующей системы 87

— — квадрупольного дублета 71

— — секторного магнита 82

— — тонкой линзы 50

Матье уравнение 165

Минимальный диаметр сфокусированного пучка в отсутствие внешних полей 140

- Минимальный диаметр сфокусированного пучка, наличие тепловых скоростей частиц 222
 Многопоточное приближение 304
 Мощность потерь энергии на излучение электроном в магнитном поле 272
- Напряжение с релятивистской поправкой** 342
 Неустойчивость абсолютная 300
 — голова — хвост 396
 — двухпоточная 298
 — — поперечная 365
 — диокотронная 385
 — конвективная 300
 — отрицательной массы 321
 — шланговая 351
 Нитеобразование эмиттанта 195
 Нормальные моды 332
- Обратный ток в плазме и газе 141
 Орбита равновесная 89
 — замкнутая 91, 107
 Осевая плоскость 65, 85
 Остаточные поля, индуцируемые в стенках камеры 393
- Параметр пространственного заряда в теории ЛБВ** 346
Первеанс пучка 128
 — — максимальный в бесконечном магнитном поле 129
 — — обобщенный 138
 Переменные, фазовые и амплитудные 182
 — приведенные 41
 Переход через критическую энергию 117
 Плазма, определение 22, 101
 Плазменный бетатрон 271
 — параметр 203
 Плоскость изображений 217
 — кроссоверов 217
 — медианная 57
 — осевая 65
 Плотность тока в кроссовере пучка в одно-одно-фокусирующей системе 218
 Подобное поле 92
Пойнтинга теорема для малого сигнала 337
 Показатель поля 76
 Поляризация электронного кольца, нагруженного ионами 233
 Постоянная связи пучка и структуры 345
 Поток бриллюэновский 144, 155
- Поток конгруэнтный 169
 — косоконгруэнтный 169
 — ламинарный 124
 — мощности, переносимый быстрой и медленной волнами в бесконечной среде 339
 — потенциальный 168
 Прецессия орбит 241
 Приближение заданного тока 395
 — квазистатическое 310
 — многопоточное 304
 — тонкого пучка 313
 Применения лучков 150
 Продольная масса частицы 94
 Пучок в бетатронном фокусирующем поле 162
 — ламинарный 31, 124
 — пенточный 21
 — — в бесконечном магнитном поле 136
 — свойства в отсутствие внешних полей 137
 — согласованный с каналом 184
 — с отрицательной продольной температурой 266
 — трубчатый 21
 — — вращающийся 161
 — — в электростатическом поле 163
 — "убегающих электронов" 270
 — цилиндрический 21
 — — в бесконечном магнитном поле 126
 — — — — — предельный ток 130
 — — — — — конечном магнитном поле 143
- Равновесие пучка в продольном электрическом поле см. Будкера пучок
 Равновесный радиус пучка в однородном магнитном поле 153
 — — самосжатого пучка с конечным эмиттансом 192
 Радиальная передающая линия 311
 Радиационная длина 259
 Радиус равновесной орбиты частицы в циклическом ускорителе 75
 Распределение потенциала в плоском диоде 214
 Рассеяние частиц взаимное в пучке 263
 — — максимальный и минимальный углы 258, 259
 — — при наличии фокусирующих сил 261
 — — среднеквадратичный угол 259
 — — функция распределения частиц пучка по углам и поперечным координатам

- в газе 261
Резерфорда формула 257
Резонанс "одна треть" 99
 — половинный 93
 — связи в периодической структуре 102
 — — на нелинейностях поля 106
 — целый 92
Резонансное распределение 325
- Самуэля поток см. Бриллюэна поток**
Сепаратриса 115
Силы, действующие на частицу в пучке
 143, 161
Синхронная фаза 112
 — частица 110
Скорость волны групповая 284
 — — фазовая 283
- Температура пучка** 204
 — — поперечная 204
 — — — для вращающегося потока с конечным эмиттансом 206
 — — — с КВ-распределением 205
 — — продольная 204
Теория связанных мод 331, 411
 — — — случай слабой связи 333
Типы поперечного смещения в пучках 351
 — связи волн в двух пучках 356
Токовый слой 228
Топология фазовых портретов пучка в нелинейных системах 97 — 99
Тушека эффект 256, 264
- Увеличение линзы** 47
Уравнение огибающей пенточного пучка в отсутствие внешних полей 140
 — — цилиндрического пучка в отсутствие внешних полей 140
 — — — в периодическом магнитном поле 156
 — — — — приведенных переменных, общий вид 193
 — — — — с конечным эмиттансом 191
 — — — — учетом пространственного заряда 152
 — параксиального луча 31
 — — — в комплексном виде 39
 — — — — приведенных переменных 43
 — — — — — фундаментальные решения 43
 — — — — вронскиан 41
 — — — вывод 405
 — — — для пенточного пучка 66
- Уравнение параксиального луча для системы с аксиальной симметрией** 36
 — — — нерелятивистское 42
 — — — фундаментальные решения 40
 — сепаратрисы 115
 — фазовых колебаний 112
Условие устойчивости в сильнофокусирующих системах 88
Установка HIPAC 245
- Фазовое пространство** 172
 — — "бетатронное" 177
 — — "синхротронное" 177
Фазовые колебания 112
 — — адиабатические инварианты 118
 — — адиабатическое затухание 117
Фазотрон кольцевой 99
Факторы, ограничивающие минимальный радиус сфокусированного пучка 224 — 226
Фокусировка бетатронная 75
 — газовая 149
 — краевая 73
 — отклоняющая 86
 — переменного-градиентная 86, 113
 — переменного-фазовая 121
 — поперечная в линейных ускорителях 120
 — — — центральной области циклотрона 119
 — сеточная 121
 — сильная 86
 — слабая 77
 — слаломная 86
Фокусирующая система с разделенными функциями 89
Функция действия 169
 — распределения для равновесия тила жесткого ротатора 255
- Хаммера — Ростокера пучок** 249
 — — — распределение параметров по сечению 253
Хроматичность 91
- Цепочка ББГКИ-уравнений** 175
 — — замыкание 175
Циклотрон изохронный 99
 — с азимутальной вариацией поля 99
 — секторно-фокусирующий 100
- Чайльда закон** 130

- Чайльда закон, обобщение на релятивистский случай 131
 Частота бетатронных колебаний 77
 — вихря 168
 — гибридная 288
 — ларморовская 34
 — плазменная 125, 284
 — редуцированная 313
 — циклотронная 34
 Чу теорема о кинетической мощности 338, 340

 Электронное охлаждение 256, 270
 — время релаксации 270
 Эмиттанс 176
 — диаграмма 177

 Эмиттанс и энтропия 198
 — макро 195
 — микро 195
 — нормализованный 177, 256
 — скорость изменения при рассеянии пучка в газе 262
 — связь с яркостью пучка 180
 — среднеквадратичный 197, 261
 — при рассеянии пучка в газе в присутствии фокусирующих сил 261
 — эффективный 176
 Энтропия 198
 Эффект отрицательной массы 94

 Яркость пучка 179
 — связь с энтропией 180

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие к русскому изданию	9
Предисловие	10
Список обозначений	13
ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ	20
§ 1. Вводные замечания	20
§ 2. Понятие пучка	20
§ 3. Некоторые применения пучков заряженных частиц	22
§ 4. Обозначения и способ изложения	27
§ 5. Замечания по использованию основных физических теорий	29
ГЛАВА 2. ОПТИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ФОКУСИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ	30
§ 1. Введение	30
§ 2. Аксиально-симметричные системы	32
§ 3. Двумерные системы	65
§ 4. Системы с двумя плоскостями симметрии	67
§ 5. Криволинейные системы с одной плоскостью симметрии	73
§ 6. Криволинейные ленточные пучки	84
§ 7. Теория орбит в ускорителях	86
§ 8. Фокусировка в полях, изменяющихся во времени	108
ГЛАВА 3. ЛАМИНАРНЫЕ ПУЧКИ С СОБСТВЕННЫМИ ПОЛЯМИ	124
§ 1. Введение	124
§ 2. Свойства различных типов потока	125
§ 3. Параксиальное уравнение для пучков с пространственным зарядом, распространяющихся в аксиальных магнитных полях	151
§ 4. Некоторые другие типы потоков пространственного заряда	154
§ 5. Пространственный заряд в периодических структурах	163
§ 6. Гидродинамическое описание потоков пространственного заряда	166
ГЛАВА 4. НЕЛАМИНАРНЫЕ ПУЧКИ В ОТСУТСТВИИ СТОЛКНОВЕНИЙ	171
§ 1. Введение	171
§ 2. Гамильтонов формализм и теорема Лиувилля	171
§ 3. Эмиттанс	176
§ 4. Тепловые распределения	201
§ 5. Кольцевые пучки и цилиндрические токовые слои	228
§ 6. Более общий подход; уравнение Власова	246

ГЛАВА 5. ПУЧКИ С РАССЕЯНИЕМ И ДИССИПАЦИЕЙ	256
§ 1. Введение	256
§ 2. Многократное рассеяние пучка в остаточном газе или плазме	257
§ 3. Многократное рассеяние при наличии фокусировки	261
§ 4. Взаимное рассеяние частиц пучка в накопительных кольцах	263
§ 5. Некоторые свойства пучков, обладающих конечной температурой	265
§ 6. Эффект Бурша	267
§ 7. Электронное охлаждение	270
§ 8. Формирование пучков убегающих электронов	270
§ 9. Релятивистский стабилизированный лучок Будкера	272
§ 10. Радиационные эффекты в электронных синхротронах и накопительных кольцах	276
§ 11. Заключительные замечания	281
 ГЛАВА 6. ВОЛНЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПУЧКАХ	 282
§ 1. Введение	282
§ 2. Волны в неограниченной плазме	283
§ 3. Продольные волны в лучках с конечным поперечным сечением	307
§ 4. Поперечные волны	350
§ 5. Динамические явления в сгруппированных лучках	390
§ 6. Заключительные замечания	400
 ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ПОЛЯ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЧАСТИЦУ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	 402
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНОГО ЛУЧА ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ	404
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПАРАКСИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА	406
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ НА ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА	409
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ МОД	411
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ЭНЕРГИЯ, СВЯЗАННАЯ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛНАМИ В НИТЕВИДНОМ ПУЧКЕ	413
ЛИТЕРАТУРА	415
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	432

Дж. Лоусон

ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Научный редактор *А. Куксенко*

Мл. редакторы *Г. Сорокина, Р. Зацепина*

Художник *Н. Дронова*

Художественный редактор *Л. Безрученко*

Технические редакторы *Е. Потапенкова, Л. Бронзберг*

Ст. корректор *И. Максимова*

ИБ № 1933

Подписано к печати 9.04.80 г.

Формат 60 × 90¹/₄. Бумага офсетная № 1.

Печать ротапринтная. Объем 13,75 бум. л.

Усл. печ. л. 27,50. Уч.-изд. л. 27,14. Изд. № 2/0406.

Тираж 3500 экз. Зак. Цена 4 р. 40 к.

Издательство "Мир"

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли г. Тула, проспект им. В.И. Ленина, 109.