СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЛУЗИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Г-Т-Т-И

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ

Акад. Н. Н. ЛУЗИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Акад. Н. Н. ЛУЗИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ДОКЛАД, СДЕЛАННЫЙ НА 1-м ВСЕРОССИЙСКОМ СЪЕЗДЕ МАТЕМАТИКОВ В МОСКВЕ 29 АПРЕЛЯ 1927 г., ДОПОЛНЕННЫЙ АВТОРОМ ДЛЯ НАСТОЯЩЕГО ИЗДАНИЯ

МОСКВА — 1933 — ЛЕНИНГРАД

Начиная с середины прошлого века заботы математиков направились к достижению абсолютной строгости в их работах. Эта тенденция привела к ряду изысканий, объединяемых одним общим именем *теория функций действительного переменного*. Несмотря на то, что образующие ее исследования крайне многочисленны и имеют в настоящее время даже свой собственный орган, они группируются около сравнительно небольшого числа идей. И, сообразно этому, теория функций действительного переменного может быть разделена на три области: *метрическую*, *дескриптивную* и *топологическую*. Ввиду того, что топология послужит предметом специальной статьи, мы коснемся в настоящем обзоре лишь достижений, сделанных в последнее время первыми двумя областями.

I

Успех интеграла Лебега (H. Lebesgue), ставшего классическим инструментом анализа, и все возрастающее число его применений в самых разнообразных ветвях математики естественно вызвали появление ряда работ, имеющих своею целью дальнейшие обобщения понятия интеграла. Среди этих попыток выйти за границы интегрирования в смысле Лебега наблюдается большое разнообразие в отношении идей, так как самые различные свойства интеграла Лебега брались как точки отправления путей обобщения. И следует заметить, что многие из этих путей, не примыкая ни к какой общей и четко поставленной проблеме, выдвинутой какой-либо теорией, отличной от теорий интегрирования, являются, следуя выражению Лебега, не чем иным, как „пустым удовольствием обобщать ради обобщения“. Поэтому естественно проследить вкратце ход идей, приведших в свое время к открытию Лебега [1], дабы, идя дальше по этому пути, встретить проблемы, требующие уже не искусственных дальнейших расширений понятия интеграла.

[1] Для составления этой речи мы воспользовались содержанием курса Лебега, читанного им в Collège de France в 1925/26 г., о теориях интегрирования так же, как его сообщением, сделанным Копенгагенскому математическому обществу: *Sur le développement de la notion d'intégrale* (Matematisk Tidsskrift, 1926).

Идеи Коши (*Cauchy*). До Коши не имелось никакого „определения“, в современном смысле, понятия интеграла: делались лишь простые указания на то, что необходимо складывать или вычитать площади, дабы получить интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно, в этом круге идей отправлялись от концепции площади, как интуитивно непосредственной и самоценной.

Коши первый вышел из этого круга идей: он первый заявил о необходимости определения интеграла, отправляясь прямо от понятия величины и числа и не прибегая к геометрическим интуитивным данностям. Это же самое он требовал и от других понятий, усвоенных математикой начиная с эпохи Возрождения. В сущности, с Коши начинаются заботы о строгости, столь характерные для современной науки. Шаг, сделанный Коши, имеет такую философскую важность, что не будет излишним здесь несколько задержаться.

Часто заявляется, что Декарт свел геометрию на алгебру; но это, собственно, несколько неточно. То, что осуществил Декарт, это — сведение, при помощи метода координат, всякой геометрии к геометрии прямой линии, каковая, употребляя понятие непрерывности и иррационального числа, дозволила алгебре достигнуть широкого ее применения. Но чтобы эта редукция всяких геометрий к прямой была окончена, необходимо было исключить известное число самых основных для геометрии величин, среди которых важнейшими являлись длина кривой, площадь, объем. Это, собственно, и было сделано Коши. После Коши было достаточно лишь построить линейный континуум при помощи целого числа, чтобы арифметизация науки была закончена.

Эта арифметизация математики, на которой так настаивает современная наука, является научным течением неоспоримой ценности, связанным с глубочайшим философским вопросом: может ли быть сведенным всякое математическое познание к целому числу? Не пытаясь в данный момент вынести определенный и решающий приговор по этому делу ни путем утверждения, что *всякий* математический факт есть просто отображение соответствующего свойства целых чисел и может быть выраженным исключительно в терминах арифметики, ни путем указания на наличие несводимых на арифметику математических фактов, о котором говорит нарождающееся в последнее время течение „деарифметизации анализа“, — мы удовольствуемся лишь указанием на то, что концепция интуитивного или экспериментального характера обычно всегда имеет действенный интерес, даже в том случае, если она не очень хорошо поддается логическому определению, и что обычно имеет большую важность ее всестороннее изучение, и что, напротив, огромное большинство чисто логических сущностей и понятий, встреченных на путях логического порядка, обычно бесплодны и не могут оказать никакого влияния на прогресс науки. Именно в полной мере является справедливым то давно уже сделанное замечание, что на логических путях исследования как раз не встречают тех понятий, которые наиболее ценны, и если бы мы ограничились лишь исследованиями строго логического характера, мы никогда бы их не имели.

Возвращаясь к определению интеграла, данному Коши, следует заметить, что оно имелось в виду его автором лишь для *непрерывных* функций: после определения непрерывной функции, сделанного Коши так, как сейчас это делает современный анализ, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от непрерывной функции $f(x)$ определяется как *предел* сумм S

$$S = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Суммы этого рода давно до Коши употреблялись землемерами и математиками для оценки (приближенной) площадей. Новое, что сделал Коши, это было *доказательство существования* предела сумм S и вытекшая отсюда возможность логического определения интуитивного понятия площади.

Уточнения Римана и Дарбу. Определение Коши оказалось приложимым к некоторым разрывным функциям. Отсюда естественно родилась мысль Римана об отыскании полной границы приложимости определения Коши.

Обозначим через $\overline{f}_i$ и $\underline{f}_i$ верхнюю и нижнюю границы функции $f(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}). Тогда сумма Коши S заключена между

$$\underline{S} = \Sigma \underline{f}_i (x_{i+1} - x_i) \quad \text{и} \quad \overline{S} = \Sigma \overline{f}_i (x_{i+1} - x_i).$$

Риман показал, что достаточно, чтобы разность $\overline{S} - \underline{S}$ стремилась к нулю для одного частного способа деления интервала (a, b) на все более и более мелкие интервалы (x_i, x_{i+1}), чтобы определение Коши оказалось приложимым. Дарбу доказал, что суммы $\overline{S}$ и $\underline{S}$ при *всякой* функции $f(x)$ стремятся к определенным пределам, совпадающим, когда интеграл Коши-Римана существует.

Критика определения Коши. Каким бы логически безупречным ни было определение интеграла Коши-Римана, можно с уверенностью сказать, что для разрывных функций оно фактически не служит ни к чему. Действительно, для интегрируемости $f(x)$ нужно установить стремление разности

$$\overline{S}-\underline{S}=\Sigma(\overline{f_i}-\underline{f_i})(x_{i+1}-x_i)$$

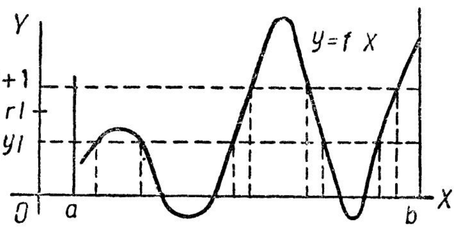
к нулю. Это стремление разности $\overline{S}-\underline{S}$ к нулю *теоретически* еще ясно для *непрерывной* функции $f(x)$, потому что достаточно разбить (a, b) на столь малые интервалы (x_i, x_{i+1}) дабы все разности $\overline{f_i}-\underline{f_i}$ оказались малыми, как вся разность $\overline{S}-\underline{S}$ сама в свою очередь станет малой. Но для случая *разрывной* $f(x)$ мелкость разбиения (a, b) уже не служит ни к чему, потому что в этом случае разности $\overline{f_i}-\underline{f_i}$ вообще весьма велики и не стремятся к нулю с уменьшением (x_i, x_{i+1}). Для разрывной функции $f(x)$ соседство x_i и x_{i+1} еще не означает близости $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$. Напротив, соседними $f(x_i)$ и $f(x_j)$ могут оказаться величины функции $f(x)$ для весьма удаленных друг от друга x_i и x_j. В соответствии с этим в сумме Коши

$$S=\Sigma f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

близкими друг к другу по величине оказываются вовсе не те слагаемые, которые имеют соседние нумера, а те, которые имеют близкие друг к другу множители $f(\xi'_i)$ и $f(\xi'_j)$, т. е. величины функции $f(x)$ в точках, выбранных в далеких вообще друг от друга делениях (x_i, x_{i+1}) и (x_j, x_{j+1}).

Это обстоятельство навело Лебега на мысль о *перегруппировке* слагаемых в сумме Коши S для наиболее компактной оценки ее величины, — подобно тому, как прежде чем оперировать с каким-нибудь многочленом, имеющим очень большое число членов, является целесообразным сначала выполнить *приведение подобных членов.* Сумма Коши S для разрывной функции $f(x)$ похожа на многочлен с беспорядочно или случайно выписанными членами, где соседство членов в строчке никак не связано с соседством их степени.

Идеи Лебега. Дабы проследить генезис идей Лебега рассмотрим эффект перегруппировки членов в сумме Коши для *непрерывной* функции; более того, рассмотрим сперва самый простой из всех случай — тот, когда $f(x)$ непрерывна и имеет только *конечное число maxima и minima.* Имея в виду соседство величин членов суммы S, т. е. близость значений функции $f(x)$, мы разбиваем интервал на оси Y, содержащий все значения функции $f(x)$, принимаемые ею на (a, b), на малые части (y_i, y_{i+1}). Всякому такому малому интервалу (y_i, y_{i+1}) отвечает на оси X определенное множество точек E_i — тех, в которых значения функции f попадают в (y_i, y_{i+1}). В силу того, что maxima и minima функции $f(x)$ имеются лишь в конечном числе, множество E_i есть конечное число интервалов (на чертеже — четыре). Если мы теперь *сгруппируем вместе* все те члены суммы Коши S, интервалы которых образуют множество E_i, то их общая сумма ничтожно мало отличается от величины



$$\eta_i \times \text{длина } E_i,$$

где η_i есть какая-либо величина, взятая в интервале (y_i, y_{i+1}) а длина E_i есть сумма длин всех интервалов, образующих множество E_i; мы, следовательно, уже просуммировали указанную группу членов суммы Коши S.

После этих замечаний ясно, что сумма Коши S, после перегруппировок и суммирований каждой группы, напишется в виде

$$S' = \Sigma\eta_i \times \text{длина } E_i.$$

Эта сумма носит имя *суммы Лебега.* Ясно, что предел суммы S' Лебега есть тот же самый, что и предел суммы Коши, т. е. это есть интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Это обстоятельство, т. е. совпадение предела суммы S' с пределом суммы Коши S, кажется сначала обескураживающим, так как естественно спрашивают себя — зачем производить перегруппировку членов в сумме Коши S с тем только, чтобы притти снова к тому же самому результату? На самом деле это не так: сумма Лебега S' обладает столь большой гибкостью по отношению даже к разрывным функциям, какую нельзя было и представить для сумм Коши. Это делается понятным, если заметить, что *сумма Лебега S' совпадает с суммою Коши S лишь для таких непрерывных функций $f(x)$, у которых имеется только* *конечное число maxima и minima.* Для общего же случая непрерывной функции $f(x)$ не только нет такого совпадения, но даже самое понятие суммы Лебега S' становится на первых порах не имеющим никакого математического смысла, так как ведь неизвестно тогда, что понимать под „длиной E_i“, особенно когда E_i есть очень сложное множество. И то обстоятельство, что для того, чтобы интегрировать методом Лебега произвольную непрерывную функцию, сначала пришлось преодолеть эту трудность, т. е. научиться отыскивать „длину“ сложных множеств — это обстоятельство оказалось целиком в пользу нового метода, потому что по приобретении умения отыскивать „длины“ множеств, стали тем же самым приемом Лебега (т. е. переходом к пределу суммою S') доступными для интегрирования не только непрерывные функции, но и такие разрывные, о способности которых подвергнуться „интегрированию“ невозможно было раньше и думать.

Известно, как это произошло исторически. Сначала Э. Борель указал, исходя из геометрических соображений, на „естественность“ приписывания некоторой положительной „протяженности“ или „меры“ даже таким множествам, которые не содержат никаких отрезков, и указал процесс получения этой „протяженности“ множества, исходя из той манеры, которою нам дано это множество. Впоследствии эти множества точек, для которых приложим процесс Э. Бореля, получили название „множеств измеримых B“. А затем сам Лебег дал новое определение „меры“ множества столь логически совершенное и тонкое, что, несмотря на все усилия, мы до сих пор еще не имеем неизмеримых в смысле Лебега множеств. В соответствии с этим, всякая *ограниченная* функция $f(x)$ фактически оказывается интегрируемой в смысле Лебега.

Таким образом, окончательно, интеграл Лебега явился определенным как предел суммы Лебега S'

$$S' = \Sigma \eta_i \times \operatorname{mes} E_i,$$

где $\operatorname{mes} E_i$ обозначает меру множества E_i.

Неделимые. Геометры XVII в. рассматривали интеграл не как *предел* суммы, а как самое *сумму* „элементов“ площади, за которые принимали просто ординаты кривой. Короче, говоря языком Кавальери, интеграл для них был просто *суммою неделимых*.

Мы видим, что эти неделимые подсчитываются в сумме Коши S в том порядке, который обусловливается их следованием по оси X и вовсе независимо от их природы и величины. В методе же Лебега подсчет неделимых совершается по группам, соединяя в одну группу те неделимые, величина которых одна и та же. В методе Коши, говорит Лебег, „оперируют так, как это делает коммерсант сильно неопытный, который подсчитывает монеты и кредитные билеты, предоставляя все случаю, т. е. сообразно тому, как они попадаются под руку; тогда как мы оперируем, как уже опытный и методический коммерсант, говорящий:

у меня mes E_1 монет по 1 франку, стоящих $1 \times \text{mes}\, E_1$
у меня mes E_2 монет по 2 франка, стоящих $2 \times \text{mes}\, E_2$
у меня mes E_3 билетов по 5 франков, стоящих $5 \times \text{mes}\, E_3$
. . . .

итого: у меня $1 \times \text{mes}\, E_1 + 2 \times \text{mes}\, E_2 + 5 \times \text{mes} E_3 + \ldots$ франков. Конечно, тот и другой коммерсант придут к одному и тому же результату, как бы велико ни было состояние, которое они подсчитывают, ибо число франков конечно. Но в случае суммы неделимых, число которых бесконечно, разница двух манер подсчитывать — капитальна“.

Первые расширения интеграла Лебега. Эти расширения относятся, прежде всего, к возможности определить *кратный интеграл* Лебега. Формула остается та же самая:

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = \lim \sum \eta_i \times \text{mes}\, E_i,$$

$$\int\int\int f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum \eta_i \times \text{mes}\, E_i$$

и т. д., только под mes E_i надо понимать уже меру плоского или трехмерного множества.

Затем, дальнейшим расширением явилась возможность *интегрировать функцию* не по отрезку, а *по множеству*, т. е. иметь

$$\int_E f(x)\, dx.$$

Формула, определяющая этот символ, остается еще та же самая, только здесь E_i есть всегда часть множества E, по которому интегрируют.

С другой стороны, определение Лебегом „меры“ *плоского* множества позволило возвратиться к концепции интеграла эпохи до Коши, но уже пользуясь точными определениями в современном смысле. Именно, обладая функцией $y = f(x)$, мы можем определить интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{mes} E_p - \operatorname{mes} E_n,$$

где E_p есть совокупность точек плоскости, образованная положительными ординатами y, а E_n — отрицательными.

Это определение интеграла, каким бы наивным оно ни казалось, влечет новое важное расширение интеграла, именно *интегрирование неограниченных функций* $f(x)$.

Действительно, наличие определенной конечной „меры" у плоского множества E вовсе не требует непременной его ограниченности.

Отсюда, считая E_p и E_n неограниченными множествами, но имеющими конечную плоскую меру, мы умеем интегрировать некоторый класс неограниченных функций $f(x)$. Лебег назвал их *суммируемыми функциями.*

Впрочем, интеграл от суммируемой функции $f(x)$ может быть определен опять по формуле Лебега, как предел сумм Лебега S':

$$S' = \Sigma \eta_i \times \operatorname{mes} E_i,$$

в которой только знак суммы Σ надо понимать в смысле абсолютно сходящегося ряда, происходящего от разбиения *всей* оси Y на малые интервалы (y_i, y_{i+1}). Отсюда получаются *аналитические* необходимые и достаточные условия для суммируемости функций $f(x)$.

Дальнейшее расширение интеграла Лебега было предпринято молодым французским ученым, убитым на войне, Гато (R. Gateaux)[1], впервые определившим интеграл функции бесконечного числа переменных. Эти изыскания, продолженные П. Леви (Lévy), Норбером Винером (Norbert Wiener), — стоят в связи с аксиоматическими попытками Фреше (Fréchet) и Даниэля (Daniell), расширяющими на абстрактные множества указанные выше определения.

Но чтобы указать самое ценное и самое естественное направление работ по теории интегрирования после Лебега — нам необходимы рассмотрения иного уже рода.

---

[1] *R. Gateaux*, „Bulletin de la Soc. Math. de France", 1919.
P. Lévy, Lecons d'Analyse fonctionelle, 1922.
N. Wiener, „Proc. of the London Math. Soc.", 1922.
M. Fréchet, „Bulletin de la S. M. de Fr.", 1915.
J. Daniell, „Ann. of Math.", 1918 and 1919.

Неопределенный интеграл Лебега как функция области. Обычно называют *неопределенными интегралами* функции $F(x)$, $F(x, y), \ldots$, даваемые формулами:

$$F(x) = C + \int_a^x f(x)\,dx;$$

$$F(x, y) = C_1(x) + C_2(y) + \int_\alpha^x \int_\beta^y f(x, y)\,dx\,dy \ldots$$

Нужно, однако, отметить, что это наименование создалось лишь на почве неправильного употребления речи. Притом первоначальный смысл термина „неопределенный интеграл" был совсем иной и к тому же совершенно естественный. Первоначально называли „определенным интегралом" и „неопределенным интегралом" одно и то же самое выражение

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

смотря по тому, очень ли было важным считать интервал (a, b) фиксированным, или он должен быть, напротив, произвольным.

Мы хотим возвратиться к этому первоначальному смыслу слов. Для этого, отметив, что между понятиями „неопределенного интеграла" и „определенного интеграла" такое же взаимоотношение, как между функцией и ее частным значением для фиксированного значения аргумента, — мы назовем *неопределенным интегралом* от $f(x)$ выражение

$$\int_E f(x)\,dx,$$

где E есть некоторое множество, измеримое [1] и притом произвольное, на которое распространен интеграл Лебега. Следовательно, „неопределенный интеграл" есть просто *функция области* $\psi(E)$, которая заставляет отвечать всякому множеству E число $\psi(E)$.

Сказанное немедленно расширяется на понятие кратного неопределенного интеграла: это есть опять просто *функция* $\psi(E)$

[1] Мы повторяем, что до сих пор неизвестно хотя бы одно неизмеримое множество; неизвестно, следовательно, имеются ли такие множества.

области E, по которой интегрируют в пространстве двух, трех, ... измерений:

$$\psi(E)=\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\psi(E)=\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,\ldots$$

Чтобы иметь единообразный язык и единообразие обозначения, несвязанного с числом измерений, мы вместо многих предыдущих формул пишем общую формулу

$$\psi(E)=\int\limits_E f(P)\,d\,\mathrm{mes}\,(e),$$

употребив символ $f(P)$ для понятия функции точки.

Данное определение отнюдь не является только вопросом слов, потому что здесь пред нами уже новая концепция: движимые ею мы, естественно, спрашиваем себя, всякая ли функция области есть неопределенный интеграл и какова связь ψ с f?

Ответом на первый вопрос служат два необходимых и достаточных свойства функции $\psi(E)$: *полная аддитивность и абсолютная непрерывность* [1].

Ответом же на второй вопрос является формула

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\psi(\Delta)}{\mathrm{mes}\,\Delta}=f(P),$$

где Δ есть, в зависимости от кратности интеграла, определяющего $\psi(\Delta)$, — или отрезок, или круг, или сфера, имеющие своим центром точку P. Это равенство имеет силу *почти всюду*, т. е. всюду, кроме исключительного множества точек P меры нуль.

Это равенство обобщает ту классическую теорему, в силу которой неопределенный интеграл от непрерывной функции есть ее примитивная.

---

[1] Термины Ш. Валлэ-Пуссэна (Ch. de la Vallée-Poussin) и Дж. Витали (G. Vitali): функция области $\psi(E)$ есть *вполне аддитивная*, если любое разбиение области E на конечное или счетное число неперекрывающихся областей $E_1, E_2, \ldots$ дает место равенству

$$\psi(E)=\psi(E_1)+\psi(E_2)+\psi(E_3)+\ldots;$$

функция области $\psi(E)$ есть *абсолютно непрерывная*, если $\lim\psi(E)=0$ всякий раз, как $\lim\,\mathrm{mes}\,E=0$.

Функция области и реальность. Новая концепция функции области, восходящая, правда, еще к Коши, имеет основное значение для натурфилософии. В частности, Коши был хорошо известен только что описанный способ диференцирования функции области.

Коши назвал „сосуществующими" величины, определенные в одно и то же самое время, т. е. в равных условиях. Если, например, мы имеем какую-нибудь неоднородную материальную среду и обозначим через D ее часть, то: объем $V(D)$ этой части материи, ее масса $M(D)$ и количество тепла $Q(D)$, необходимое для поднятия температуры части D на 1°, предполагая ее изолированной, — суть функции области.

Отнюдь не случайно выдвинулась в последнее время в науке концепция функции области. Напротив, нужно удивляться, что она заставила себя так долго ждать. Следует, в самом деле, заметить, что всякая физическая величина *всегда* дается непосредственным образом как функция области и оттого не как функция точки. И притом, это полностью относится не только к телам, доступным нашим органам чувств, но и к телам чисто математической концепции, когда в рассматриваемую величину привходят непространственные данные (каковы: время, температура, etc.).

Что же касается *функций точки*, то введение их в рассмотрение всегда происходит отнюдь не непосредственным образом, а путем предельного процесса: эти функции суть или производные, или, более обще, пределы отношения двух сосуществующих величин. Так, например,

$$\text{плотность} = \lim \frac{\text{масса}}{\text{объем}}; \text{удельная теплота} = \lim \frac{\text{кол. теплоты}}{\text{масса}}.$$

Таковы же суть функции точки: скорость, давление и т. д.

Итак, геометрия и физика заинтересованы в самостоятельном развитии теории функций областей таким же точно образом, как анализ заинтересован теорией функций действительного переменного; причем, в физике функции области даются *первоначально*, и лишь идеальным предельным процессом вводятся функции точки. Казалось бы поэтому, что теория функций области должна иметь в геометрии, механике и физике преобладающую роль. На самом же деле не только этого нет, но, напротив, даже там, где введение в рассмотрение функции области фактически почти уже осуществилось, — там всегда замечается сильнейшая тенденция к исключению этой концепции и к замене ее обыкновенным понятием функции точки, что достигается тем, что берут области частичного вида — параллелепипеды, ориентированные по осям —

и этим самым ограничиваются рассмотрением *функций от параметров*, хотя эта замена не всегда удовлетворительна для простоты дела.

Причина этому лежит, без сомнения, в совершенной неизученности математиками функций областей и в полном отсутствии самых основных обозначений для них и, следовательно, необходимой алгебры. Для того, чтобы оценить важность этого замечания Лебега, достаточно указать на то обстоятельство, что, хотя формула

$$\psi(E) = \int_E f(P)\, d\,\mathrm{mes}\,(e)$$

и дает алгебраическое обозначение для функции области $\psi(E)$, однако эта функция области, будучи неопределенным интегралом, должна обладать специальными свойствами. *Большинство же функций области, рассматриваемых физикой, не обладают этими специальными свойствами и, значит, не будучи неопределенными интегралами Лебега, не подпадают уже под указанное алгебраическое обозначение.*

Интеграл Радона (Radon). Предшествующие рассмотрения естественно привели нас к новой чрезвычайно широкой и важной концепции интеграла, полностью развитой Радоном в 1913 г. Правда, эта концепция была известна уже в 1894 г. Стильтьесу (Stiltjes), употребившему ее в его исследованиях по анализу и арифметике; хотя, таким образом, Стильтьес может быть рассматриваем как первый изобретатель этого расширения интеграла, однако арифметическая форма его изложения замаскировала его физическое значение и, следовательно, его естественный генезис. Много поэтому было употреблено усилий различными авторами для того, чтобы понять то, что теперь столь очевидно.

История этих усилий связана с именами Риса (F. Riesz), Лебега, Юнга (W. H. Young), Фреше, Валлэ-Пуссэна (Ch. de la Vallée-Poussin) [1] и обнаруживает соперничество в остроумии, проницательности и также то, что в конце концов движение идей происходило вслепую.

В указанном ходе идей интеграл Радона появляется одновременно с следующими вопросами, к которым мы теперь пришли:

---

[1] *J. Radon* „Sitz. d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien.“, t. 122, 1913.
T. J. Stieltjes, „Annales de la F. d. Sc. de Toulouse“, 1894.
F. Riesz, „Comptes Rendus de l'Ac. des Sc.“, 1909.
H. Lebesgue, Idem, 1910.
W. H. Young, „Proc. of the L. M. S.“, 1913.
M. Fréchet, „Nouv. Ann. des Math.“, 1909.
Ch. de la *Vallée-Poussin,* Integrale, Fonctions, Classes de Baire.

Если диференцирование, такое, какое мы выше описали, возможно относительно меры области, то нет ли более широкой идеи диференцирования по отношению ко всякой другой сосуществующей функции области? Какой алгорифм явится обратным к этому релятивному диференцированию? Нет ли возможности заменить функцию области mes (e) *в определении интеграла Лебега какой-либо другой функцией области и, следовательно, говорить уже об интеграле, дающемся символом*

$$\int_E f(P)\,d\varphi(e).$$

Утвердительный ответ на первый вопрос непосредственно ясен. Что же касается третьего вопроса, то для ответа на него приходится ввести новую идею — *измеримости множества* E *по отношению к данной функции области* $\varphi(e)$, затем потребовать *измеримости* предложенной к интегрированию *функции* $f(P)$ *относительно функции области* $\varphi(e)$ и, наконец, сходимости ряда

$$S' = \Sigma \mu_i \varphi(E_i).$$

В этом случае, когда все это выполнено и когда на функцию области $\varphi(e)$ наложено условие быть *с ограниченным изменением*[1], тогда определение релятивного интеграла Радона от функции точки $f(P)$ относительно функции области $\varphi(e)$ делается в точности так же, как и определение интеграла Лебега: это есть попрежнему предел суммы S'. Таким образом определяется интеграл Радона

$$\int_E f(P)\,d\varphi(e).$$

Введение интеграла Радона естественно потому, что физики никогда, в сущности, и не рассматривали иного интегрирования, кроме интегрирования относительно функций области.

Например, если хотят вычислить количество теплоты $\varphi(D)$, необходимой для поднятия на $1°$ температуры тела D, надо разделить D на малые тела $D_1, D_2, \ldots$, имеющие массами $M(D_1)$,

[1] Функция области $\varphi(e)$ есть функция *с ограниченным изменением*, если при любом способе разбиения E на счетное множество неперекрывающихся частей $E_1, E_2, \ldots$, ряд $\Sigma\,|\,\varphi(E_i)\,|$ сходится.

Заметим, что в силу данного выше определения, всякая вполне аддитивная функция есть тем самым функция с ограниченным изменением. Систематических попыток освободиться в интеграле Радона от ограниченности изменения функции области $\varphi(e)$ до сих пор не производилось.

$M(D_2), \ldots$, взять в каждом из них по точке $P_1, P_2, \ldots$ и написать приближенную сумму:

$$f(P_1)M(D_1)+f(P_2)M(D_2)+\ldots,$$

где $f(P)$ есть удельная теплота материи в точке P. Значит, имеем вычислить интеграл Радона:

$$\varphi(D)=\int_D f(P)\,dM(e).$$

Сами математики, в сущности, никогда не переставали рассматривать интегралы Радона: криволинейный интеграл $\int\limits_C f(x,y)\,dx$ есть интеграл Радона относительно функции $\varphi(e)$, определенной как длина проекции на ось OX дуги кривой C. То же самое следует сказать об интегралах поверхности. То обстоятельство, что имеют чаще всего дело не с одиночным интегралом, а с суммою вида

$$\int_C f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy,$$

только показывает, что имеют дело с еще более общей концепцией: интегрированием относительно нескольких функций областей. Несмотря на частные результаты Геллингера (Hellinger) и Теплица (Toeplitz) [1], общее изучение еще не начато.

Нерешенные проблемы. Изучение интеграла Радона не только еще не выполнено, но здесь не разрешены и даже не поставлены самые основные задачи. Первая среди них — та, которая спрашивает, каким образом по данной функции точки $f(P)$, являющейся производной относительно известной функции области $\varphi(e)$ от некоторой примитивной функции области $\psi(E)$, — отыскать эту примитивную?

Неизвестно, каким образом решается эта проблема. Повидимому, интеграл Стильтьеса совершенно недостаточен. В самом деле идеи Стильтьеса относятся лишь к функциям с ограниченным изменением, а определение релятивной производной вовсе не предполагает такого ограничения.

Неизвестен также произвол в определении примитивной, неизвестно, каким образом должна быть поставлена общая задача о розыскании примитивной, дабы быть вполне определенной.

[1] „Journal de Crelle", t. 144.

Идеи Данжуа (*A. Denjoy*). Возвратимся от этих общих рассмотрений к обращению задачи диференцирования: *зная, что $f(x)$ есть точная производная, найти ее примитивную $F(x)$.*

Если данная производная $f(x)$ конечна в каждой точке, произвол примитивных $F(x)$ не очень велик: все они отличаются друг от друга на некоторую постоянную величину. Таким образом требование, чтобы кривая $y=f(x)$ прошла через начало координат, т. е. чтобы имели $0=F(0)$, вполне определяет примитивную $F(x)$. Отсюда совершенно уместен вопрос, каким образом получить эту единственную примитивную прямо чрез величины функции $f(x)$, т. е. чрез ординаты кривой $y=f(x)$?

Известно, что А. Данжуа указал некоторый правильный процесс для этой цели, манипулируя которым, приходят чрез счетное число шагов к знанию примитивной $y=f(x)$; процесс этот назван им *тотализацией*. Тотализация есть предельный процесс, в состав которого входят интегрирования в смысле Лебега, располагаемые уже в *трансфинитном* порядке. Процессу тотализации подпадает всякая точная производная $f(x)$, конечная для всякого x. Но имеется бесчисленное множество функций, совершенно нетотализируемых. Интересно отметить, как это выяснено недавними работами в Москве, среди нетотализируемых функций имеются и точные производные, бесконечные в некоторых точках (множество которых имеет всегда меру нуль). Если заметить, что интеграл Лебега дает всегда примитивную, когда данная точная производная $f(x)$ везде конечна и интегрируема в смысле Лебега, процесс тотализации А. Данжуа является подлинным расширением интегрирования Лебега.

Успех полного решения обрашения задачи диференцирования внушил А. Данжуа рассмотреть еще другую задачу: *определить коэфициенты тригонометрического ряда по его сумме.*

Известно в самом деле, что два тригонометрических ряда, имеющих для всякого x одну и ту же самую конечную сумму, являются тождественными (Кантор). Отсюда, знание суммы тригонометрического ряда должно каким-то образом определять его коэфициенты. Данжуа поставил себе задачею открытие процесса, определяющего коэфициенты чрез сумму. Так как сумма $S(x)$, тригонометрического ряда

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сходящегося везде к конечному числу $S(x)$, есть вообще нетотализируемая функция, то ясно, что процесс, определяющий коэфициенты (и, прибавим, совпадающий с тотализацией, когда $S(x)$ тотализируема), должен быть рассматриваемым как еще более общий, чем тотализация А. Данжуа. Этот процесс, открытый А. Данжуа в 1921 г.,[1] назван автором *тотализацией с двумя индексами*, потому что он позволяет непосредственно переходить от данной суммы $S(x)$ сходящегося всюду тригонометрического ряда

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{I}$$

к сумме $S_2(x)$ такого тригонометрического ряда, который получают, интегрируя формальным образом почленно *дважды* тригонометрический ряд (I):

$$S_2(x)=\frac{a_0 x^2}{4}+C_1 x + C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \tag{II}$$

в котором есть две произвольные постоянные и в котором тригонометрический ряд есть заведомо *абсолютно сходящийся*, так как a_n и b_n стремятся к нулю в силу того условия, что $S(x)$ есть сумма сходящегося *всюду* тригонометрического ряда (Кантор-Лебег).

Прогресс, внесенный Данжуа, состоит в том, что им указан процесс, позволяющий непосредственно подняться от $S(x)$ к функции $S_2(x)$, *минуя всякие тригонометрические ряды*. И так как $S_2(x)$ есть функция *с ограниченным изменением* (à variation bornée), то разложение ее в ряд формы (II) хорошо известно, так что коэфициенты $\frac{a_n}{n^2}$ и $\frac{b_n}{n^2}$ определены, а значит, определены и самые коэфициенты a_n и b_n.

Благодаря личной любезности А. Данжуа, я имею возможность сообщить, что в самое недавнее время им найден процесс, позволяющий непосредственно переходить от данной функции $S(x)$, являющейся суммою сходящегося всюду тригонометрического ряда, к функции $S_1(x)$, долженствующей быть суммою того тригонометрического ряда

$$S_1(x)=C+\frac{a_0 x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}, \tag{III}$$

[1] „Comptes Rendus", t. 172, 1921.

который получается формальным интегрированием почленно тригонометрического ряда (I). В силу того, что $\lim a_n = \lim b_n = 0$, когда n стремится к бесконечности, ряд (III) сходится почти всюду [Фату (Fatou)] и определяет функцию $S_1(x)$ с интегрируемым квадратом. Разложение найденной функции $S_1(x)$ в ряд (III) хорошо известно, раз $S_1(x)$ имеет интегрируемый квадрат. Отсюда, прежняя возможность иметь коэфициенты a_n и b_n.

Этот процесс перехода от $S(x)$ к $S_1(x)$ назван А. Данжуа *тотализацией с одним индексом.* Тот факт, что функция $S_1(x)$, получаемая процессом тотализации с одним индексом, есть вообще функция *разрывная* от x, этот важный факт, по словам автора, как будто бы указывает на то неожиданное обстоятельство, что „всякая общая теория интегрирования, преследующая не кажущуюся гладкость и подражательное сходство с прежним, но имеющая в виду истинный прогресс в решении очень точно поставленных и естественным образом выдвинутых проблем, необходимо должна нас приучать к мысли, что неопределенный интеграл есть вообще всюду разрывная функция своего верхнего предела".

К этим идеям А. Данжуа естественно присоединяются работы польских и наших московских математиков о единственности изображения функций тригонометрическими рядами.

Исходная точка идей А. Данжуа, это — полная определимость коэфициентов тригонометрического ряда чрез его сумму. Но для этого приходится отправляться от тригонометрических рядов, *сходящихся всюду*, и, значит, от функций $S(x)$, служащих суммою тригонометрического ряда *в каждой точке x,* так как в основе всего лежит та теорема Кантора, что нет двух различных тригонометрических рядов, сходящихся *в каждой точке* к одной и той же самой функции $S(x)$. Но это требование представляет значительные неудобства, так как в теории интегрирования Лебега, например, всегда пренебрегают множествами меры нуль, что значительно развязывает руки при исследовании многих частных вопросов. Однако дальнейшие исследования обнаружили, что лежащая в основе теорема Кантора лишь с чрезвычайным трудом поддается расширению и притом, не полному.

Если, с одной стороны, работы Юнга и Валлэ Пуссена показали, что всегда можно пренебрегать множеством точек x *счетной мощности,* то работа Д. Е. Меньшова, наоборот, обнаружила, что имеется тригонометрический ряд, сходящийся к нулю вне некоторого определенного *совершенного множества P меры нуль* и имеющий коэфициенты не все нули.

Этот удивительный результат Д. Е. Меньшова приобретает тем большую остроту, что множество точек, где тригонометрический ряд, рассматриваемый произвольно, не сходится к нулю, есть непременно множество измеримое B и, как таковое, в силу теоремы Александрова-Гаусдорфа, есть: *либо* счетное множество, *либо* содержит совершенное множество меры нуль.

Вместе с тем, в последнее время обнаружен и диаметрально противоположный факт, неожиданным образом разрушающий гармонию в наших представлениях о серьезности явлений в тригонометрических рядах: одновременные и независимо проведенные в Варшаве и в Москве работы доказали, что *некоторыми* совершенными множествами меры нуль не возможно пренебрегать таким же точно образом, как в теории Лебега пренебрегают всяким множеством меры нуль.

Отсюда естественно возникает проблема о точном распознании тех множеств, которыми еще возможно пренебрегать.

Эта теория представляет еще до сих пор чрезвычайные трудности даже в отношении *качественном:* мне лично думается, что при определении необходимых и достаточных признаков множеств, которыми можно пренебрегать, доминирующую роль играют *диофантовы законы.*

Но Райхман недавно сообщил мне, что его предчувствия иные и что, по его мнению, все дело решится не диофантовым анализом, а в обычных *теоретико-функциональных* понятиях и терминах.

Как бы то ни было, процессы тотализации Данжуа со временем должны будут учесть возможность пренебрежения некоторыми множествами мощности континуума.

II

Квази-аналитические и почти периодические функции. Недостаток места не дозволяет мне коснуться другого важного процесса метрической теории функций действительного переменного — открытия и изучения двух больших и чрезвычайно важных классов функций: квази-аналитических и почти периодических, так тесно связанных с именами их первых авторов и исследователей Сергея Натановича Бернштейна и Бора.

Следует, впрочем, сказать, что эти функции, открывая неограниченную перспективу самых разнообразных приложений основной важности к различным ветвям естествознания, лежат, в сущности, на границе уже самого классического анализа, так как изучение их выполняется теми самыми тотальными приемами, которые так характерны для классического анализа и которые отличаются от тех по преимуществу микроскопических методов, которые употребляет теория функций действительного переменного.

III

Дескриптивная теория функций. Нам осталось рассмотреть наиболее деликатный пункт теории функций действительного переменного — успехи ее *дескриптивной части.* Уже с первых же шагов мы должны оговориться: слово „успех“ имело очень ясный смысл по отношению к метрической ветви теории функций, обозначая в ней, как, впрочем, и во всякой другой ветви математики, установление новых фактов и таких сближений и аналогий, которые не сразу бросаются в глаза, но которые обнаруживаются пытливою мыслью за сменою явлений и течением вещей. В этом отношении слово „успех“ для дескриптивной ветви теории функций имеет совсем особый смысл, так как трудно, на самом деле, дать имя успеха такой деятельности, которая сводится к разрушению установленных ранее фактов путем ли заявления об ошибочности их, или путем до такой степени последовательного отрицания какого-либо смысла за ними, что необходимо встает вопрос о ненужности целой хорошо развитой ветви науки и о тщетности более чем полувековых усилий многочисленной плеяды ученых, работавших в ней. Вопрос стоит в настоящее время до такой степени остро, что не нашлось протестующих голосов против произнесенных уже слов *„кризис теории функций“*.

Недоумения и недоразумения начались уже давно, еще со времени знаменитого спора относительно так называемой „Аксиомы Цермело“ (принцип произвольного выбора). В 1904 г. Цермело „доказал“, что всякое множество, в частности и континуум, „может быть сделан“ вполне упорядоченным. Это рассуждение Цермело немедленно было опротестовано частью ученых, причем математики с изумлением констатировали радикальное отсутствие единомыслия в своей среде: все в математике до тех пор заставляло думать, что всякое наличие разногласия обусловлено либо недостаточностью сведений, либо плохой постановкой вопроса. Здесь же оказалось непримиримое различие взглядов при полной внутренней очевидности дела. Эта разница взглядов получила наиболее точное и наиболее яркое выражение в тех знаменитых *Cinq lettres sur la théorie des Ensembles* [1], кото-

---

[1] См. например, *Borel*, Leçons sur la théorie des fonctions, 2-ième éd., Note IV, стр. 150.

рыми обменялись по поводу рассуждения Цермело между собою Адамар, Борель, Бэр, Лебег в следующем 1905 г.

Какими бы ни были личные симпатии того или иного автора этих *Cinq lettres* и его философские вкусы, каждому из них непререкаемо ясно было одно: рассуждение Цермело отнюдь не устанавливает мощности континуума; если ввериться рассуждению Цермело, мощность континуума есть, в самом деле, алеф; но найти ее местоположение на шкале алефов — не только не допускалось рассуждением Цермело, но, напротив того, это представлялось абсолютно безнадежным делом, и не вследствие сложности обстановки, а напротив, благодаря ее простоте. Не следует упускать из вида, что рассуждение Цермело много бы потеряло в своей сомнительности и остроте, если бы из него вытекли новые математические факты, устанавливающие новые соотношения между *давно известными вещами* или, по крайней мере, новые привлекательные богатые соотношениями перспективы. Но этого не было: просто утверждалось, что мощность континуума находится на алефической шкале, без того, чтобы знать точно, в каком именно ее месте. И так как вся обстановка указывала на то, что никакое указание не может быть достигнуто конечным путем, то впервые в математике встал вопрос во всей его остроте о существенной необходимости делать различие между „тем, что есть на самом деле“ (= реальность) и „тем, что может быть доказуемо для человеческого интеллекта“ (= познание) — вопрос мало новый для философии, прибавим. Едва только появился на горизонте этот вопрос, как не стало обычного единомыслия математиков, тотчас же разбившихся на толки. Для одних, получивших название *идеалистов*, „все это — слишком антропоморфично: надо ни на одну минуту не забывать о самом предмете и поменьше говорить о человеческой возможности его охватить, — говорит же нам палеонтология о фауне третичной эпохи или астрофизика — о строении всей поверхности луны, хотя в первом случае тогда не было человека, и во втором случае имеется невидимая половина у нашего спутника. Это мнимое злоупотребление категориями времени и пространства не мешает быть упомянутым дисциплинам истинными науками“. „Мало ли вещей на свете, о которых мы не знаем и о которых мы никогда не узнаем. Вот, например, капля воды. Число молекул конечно, — но какое оно? Я не знаю и никогда не узнаю — и это еще не резон уничтожать кинетическую теорию материи. Все это — слишком антропоморфично“ (Адамар).

Для других, по иронии судьбы получивших прозвище *реалистов,* необходимо избегать жонглирования с символами, которые не соответствуют ничему. Истинная наука никогда не будет сборищем пустых слов и чисто логических понятий без концепций. Наука не есть логомахия. За словами всегда должна скрываться сама реальность. Рассуждение Цермело — только греза, так как каждый из идеалистов, говоря о выборах, выбирает и грезит по-своему, и нет не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но и быть согласным даже с самим собою. Построение, которое нельзя описать, рассуждение, немогущее быть выполненным во всех его шагах до конца, — все это находится вне науки. Победы и горести в мире призраков не окажут никогда никакого эффекта — ни задерживающего, ни ускоряющего — на ход науки, занятой открытием конечных соотношений между вещами мира чувств или мира концепций (Борель).

Эта, к изумлению самих математиков, обнажившаяся разница взглядов с течением времени не смягчилась, но была просто отмечена и констатирована. По молчаливому соглашению решено было не настаивать на ней и не углублять ее, но подождать новых фактов.

Так прошло около двух десятков лет. За это время произошло следующее: не только не выяснилась *математическая* природа рассуждения Цермело, но, напротив того, к проблеме установления места континуума на алефической шкале были прибавлены еще и другие проблемы, частью связанные с трансфинитными числами, частью свободные от них — проблемы, вся обстановка которых представляет ту же самую степень безнадежности в смысле разрешения конечным рассуждением, каковая имеется в вышеуказанной проблеме об алефе континуума. При этом нисколько не смягчившемся положении дела вполне следовало ожидать возобновления спора. Не нужно думать, что здесь доминирующую роль играет психологический момент, связанный с неудавшимися попытками разрешения и с немногими имеющимися в науке прецедентами „доказательств невозможности“. Всякая наука имеет свои собственные временно недоступные проблемы, решения которых приходится иногда ждать веками — теория чисел, например. Но обстановка таких проблем всегда в высшей степени сложная, и внимательный глаз, исследующий ее, вскоре подмечает многочисленные нити, тянущиеся от исследуемой проблемы к многим вопросам и проблемам — решенным или нет — самых разнообразных математических областей, на первый взгляд совершенно чуждых области рассматриваемой проблемы. Ничего похожего нет в обсуждаемой обстановке: рассматриваемые проблемы теории функций характеризуются крайней простотой и полной изолированностью обстановки. Нет никаких нитей, связывающих их с проблемами вне теории функций: каждая из этих проблем формулирована в терминах теории функций и *должна* решиться в этих же терминах и методами и рассуждениями только теории функций. Решение должно произойти внутри области почти простыми средствами элементарной логики, причем число испытуемых комбинаций обычно *весьма ограничено.* И если такого решения уже вскоре же не находится, то в этом и повод к тревоге за прочность основ области.

Возобновление спора произошло в два-три последние года, и это произошло в столь подчеркнутой и ни перед чем не останавливающейся форме, что дало повод Адамару говорить о подлинном „землетрясении в математике". И при том это потрясение отнюдь не ограничивается „окраинными владениями математического царства" — что было бы простою болезнью роста науки, связанною с неладами и неустройствами при недавней ассимиляции какого-нибудь нового понятия, — но идет в самую глубь его, опрокидывая и разрушая все, что́ считалось прочным со времени Ренессанса.

Атака повелась „реалистами" на этот раз на *принцип исключенного третьего,* и авторами ее явились Брауэр (Brouwer) и Вейль (Weyl). Этот принцип поставлен ими под категорическое сомнение. Так как он все-таки действенен для текущей жизни, то Брауэр считал его законным лишь для *конечных* множеств, отрицая его применимость к каким бы то ни было бесконечным множествам — включая сюда и натуральный ряд. И дабы объяснить его действенность в области обыкновенной логики, Брауэр изменяет порядок вещей, объявляя логику лишь частью теории конечных множеств.

Дабы дать некоторое представление об аргументации этих „неокартезианцев" — как характеризует это течение Адамар, — рассмотрим один пример Вейля.

Речь идет о целых и положительных числах вида

$$2^{2n+4}+1, \text{ где } n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

„Мнение, будто *либо* все эти числа суть простые, *либо* среди них должно иметься составное число — основывается вот на чем: станем исследовать одно за другим эти числа; если встретимся с составным, вопрос уже решен; если же мы не встретим такого числа, в чем мы будем уверены лишь тогда, когда переберем одно за другим *все* числа, вопрос тоже решен. Но неразумно думать, что мы можем исчерпать бесконечность чисел" (Вейль).

С точки зрения последователей этого учения, получившего название *интуиционизма*, принцип исключенного третьего неприменим ни к какому бесконечному множеству: следует признать заблуждением всякое математическое предложение, в доказательстве которого имеется фраза: „так как случай, когда все элементы e множества E имеют свойство P, уже приводит нас к истинности доказываемого предложения, то нам остается рассмотреть случай, когда это не так. Пусть же e' есть элемент E, не обладающий свойством P; в этом случае..." и т. д.

Ясно, что с запрещением пользоваться такого рода доказательствами разрушительный вихрь проносится нами над большинством классических рассуждений, не говоря уже о теории функций, от развалин которой остается столь мало, что возникает вопрос: „стоит ли восстанавливать то, что осталось после этого землетрясения, тем более, что почва продолжает еще колебаться" (Адамар).

В частности, геометрическая точка на прямой есть не что иное, как *бесконечная* последовательность стягивающихся интервалов. Отсюда ясно, с какою осторожностью приходится оперировать с точками, дабы не попасть в положение, в котором мы будем *вынуждены* применить принцип исключенного третьего к бесконечной последовательности. Но такое незаконное применение необходимо будет иметь место, если мы будем настаивать на концепции континуума, как множества точек. Следовательно, необходимо отказаться от этой концепции.

Континуум не есть множество точек: это есть чистая протяженность, в которую мы можем помещать точки, стягивая интервалы, но которая не состоит из точек. „Континуум — это есть среда свободного становления" (Вейль).

Общего обмена мнений по поводу выступлений Брауэра и Вейля еще не произошло. В печати высказался лишь один Адамар в тонкой пессимистически написанной статье [1]. В ней он, констатируя возвращение математики к метафизике средних веков и появление среди нас элеатов и Пиррона, еще раз настаивает на полном прекращении каких-либо споров, которые здесь, по его мнению, совершенно бесполезны. Принцип исключенного третьего для него столь же ясен, как и принцип тождества, и столь же ясно, что никто никогда не может обходиться без них,

[1] Статья является предисловием к книге *Gonseth*, Les fondements des Mathématiques, Paris 1926.

даже когда называют себя интуиционистами. Ввиду совершенной ясности и непреложности для него логики Port Royal'я, различие мнений должно обусловливаться — по словам Адамара — не заблуждением, а тем обстоятельством, что в соприкосновение вошли по-иному устроенные умы. Наше воспитание сообщает известное однообразие нашему мозговому устройству, открывая, вследствие достигнутой этим ценной однородности, нашим мозгам возможность общения между собою. Наше воспитание и образование — это есть не что иное, как феномен приспособления, и никогда не следует забывать о его регулирующей силе. Но несмотря на значение воспитания, достигающаяся им однородность мозгов не носит абсолютного характера, и там, куда регулирующие силы еще не успели внести однородность, там сказывается природная естественная неоднородность. „Кто знает, мое различие мнений с Лебегом об идеализме и реализме — не обусловливается ли оно некоторой разностью осмотического давления p_h в той или иной категории клеток моего мозга и мозга Лебега?" После беглых указаний на то, что манера обходиться без тех или иных принципов пришла из геометрии, где имеет смысл, при доказательствах первоначальных предложений („все прямые углы равны" и т. д.), *забывать* об имеющихся соотношениях и понятиях, Адамар говорит, что подобное „забвение" никогда не может быть искренним в столь больших вещах, каковы принцип тождества и принцип исключенного третьего, и что petitio principii здесь неизбежно.

Не с критикой Брауэра и Вейля, но с направленной против их учений большой теорией выступил Д. Гильберт (D. Hilbert). Целью его усилий, по его собственным словам, было сохранение всего того „цветущего прекрасного математического рая, который был открыт и предоставлен для нас нашими предшественниками". Согласно теории Гильберта следует признать существующим все то, что непротиворечиво. И в соответствии с этим главные усилия автора направлены на выработку метода доказывать непротиворечивость той или иной системы основоположений. Теория автора им полностью еще не изложена, но по предварительным очеркам дело представляется в следующем виде: всякий акт математической мысли может быть формализирован, т. е. записан в виде символов. Самые нормы мышления, т. е. „аксиомы" логики также могут быть выписаны в виде формул, аксиомы арифметики — также.

Всякое математическое доказательство есть просто конечная система или цепь формул, выводимых, в момент его создания, согласно нормам мышления, т. е. согласно выписанной системе аксиом логики и другим принятым аксиомам предметного (не формального) характера. Если система аксиом противоречива, то должно иметься доказательство с противоречивым выводом, за который всегда можно принять $1 = 0$. И автор сообщает, что начертание и свойства формальных символов логики и арифметики таково, что не может осуществиться никогда такое конечное сцепление символов логики и арифметики, которое было бы развито согласно выписанным аксиомам логики и арифметики и которое привело бы к выводу $1 = 0$.

Это обстоятельство доказывает, по мнению Гильберта, непротиворечивость аксиом не только арифметики, но и самой логики — притом без какого-либо petitio principii.

В частности, имея в виду нужды теории функций, автор набрасывает эскиз доказательства непротиворечивости аксиомы Цермело аксиомам логики и арифметики, удостоверяя этим право пользоваться ею в анализе невозбранно, не опасаясь могущего последовать какого-нибудь противоречия. Наконец, в своем последнем мемуаре *L'infini* („Acta Mathematica", t. 48), следуя своей обычной манере искать доказательства непротиворечивости, Гильберт сообщает, что ему удалось найти доказательство непротиворечивости того, что мощность континуума есть алеф, следующий за счетным (алеф-один).

Сейчас является еще преждевременным, до полного изложения теории Гильберта, высказываться о ее действенности. Сделаем только несколько замечаний общего характера относительно теории Гильберта, поскольку это дозволяют определившиеся ее контуры.

Прежде всего, привлекательным в этой теории является ее творческий характер, хотя несколько и своеобразный: в то время, когда теории Брауэра и Вейля имеют собственно только разрушительный характер и, не созидая новых соотношений и новых предложений, воздвигают всюду бесчисленные баррикады в виде непрерывной цепи запрещений, — в это самое время теория Гильберта несет в себе интересные творческие возможности. Одну из них автор указывает, как уже реализированную: это — установление места мощности континуума на алефической шкале. С другой стороны, именно как раз своеобразие творческих возможностей теории Гильберта и заставляет быть очень осторожным в ее оценке; в частности, для мощности континуума автором сделано не совсем то, что нужно для теории функций.

Для теории функций мало знать, что совпадение мощности континуума с первым за-счетным алефом — непротиворечиво: для теории функций необходимо фактическое знание индивидуального перечисления точек трансфинитными числами 2-го класса Кантора. А этого как раз нет в теории Гильберта. Совпадение мощности континуума с алеф-один непротиворечиво; но исключается ли этим возможность того, что совпадение мощности континуума с алеф-два также непротиворечиво? И что произойдет, если будет доказана в самом деле и эта последняя противоречивость? Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности континуума есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то время как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Эвклида и при варьировании аксиомы о параллелях *меняется самый смысл произнесенных или написанных* слов: *точка, прямая*, etc. — смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность континуума подвижной на алефической шкале, всё время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность континуума, *если только мыслить его, как множество точек,* есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы Адамар, „даже невозможно для нас, людей“. Аналогичная трудность проистекла бы для анализа, если была бы доказана непротиворечивость того, что эйлерова постоянная C есть рациональное число без того, чтобы указать, каково оно, или, еще хуже, если одновременно с этим доказать непротиворечивость и того, что C есть квадратическая иррациональность.

Таким образом для творческих возможностей теории Гильберта, повидимому, серьезно встает вопрос о том, чего именно достигают *в отношении реальности,* устанавливая непротиворечивость того или другого и ограничиваясь только этим?

Относительно же самого существа теории Гильберта какие-либо суждения еще затруднительны, ввиду отсутствия полных о ней сведений. Наиболее деликатным моментом является, без сомнения, вопрос о petitio principii: избегнуто ли это? Без сомнения, некоторые движения нашей мысли могут быть „формализированы“, т. е. отмечены символами. Гильберт говорит о превращении в символы всякой математической мысли. Без сомнения, мы имеем возможность оперировать живою мыслью, непосредственным (не символизированным) рассуждением над этими символами, как бы над некоторыми окаменелыми остатками некогда также живой мысли. Нет сомнения, далее, что мы, как это делается в теории инвариантов, можем приходить, принимая во внимание форму и вид этих символов, к определенным заключениям о возможности или невозможности иметь

„правильное“ сочетание этих символов, оканчивающееся фигурою $1 = 0$. Нет сомнения, что все это можно проделать без petitio principii. *Но когда мы хотим вывести отсюда определенные заключения об отсутствии противоречия в живой мысли внутри ее самой, мы должны оживить эти окаменелости, превратив их в процессы живой мысли.* Имеется ли гарантия, что на некотором месте ожившего узора мы не встретим конфликта живой мысли с самою собой?

На затруднении иметь аксиоматику целых чисел без petitio principii весьма настаивал в свое время А. Пуанкаре, который выражал сомнения относительно возможности без petitio principii определить число 2, когда число аксиом арифметики заведомо более двух. По этому поводу памятен вопрос А. Пуанкаре, обращенный к математику, пытавшемуся символически обосновать ему арифметику: „Как я могу сомневаться в существовании числа, раз вы мне тут написали Ω?“

Следует еще обратить большое внимание на основное положение теории Д. Гильберта, связанное у него с моментом символизирования до конца всякого математического рассуждения: *наша мысль конечна.* Обычно философы как будто протестуют против такого рода заявлений, утверждая, что они лишены какого-либо содержания и смысла. Различие категорий конечного и не конечного осуществлено тогда, когда мысль направлена на внешний мир или мир концепций, но когда мысль направлена на самое себя, эти категории утрачивают всякий смысл. Формация концепций есть иррациональный акт; хотеть, чтобы он был „конечным“ — это значит желать, чтобы он перестал быть самим собой.

С другой стороны, присоединиться к точке зрения Брауэра и Вейля также представляется затруднительным. Интуиционизм в тех его формах, которые он принял у последователей Брауэра и Вейля и в которых, прибавим, неповинны его инициаторы, представляет из себя скорее игру ума, чем науку. Он есть, в сущности, смесь обостренной критики и догматизма теологического характера. Он возводит конечное в догму; но та „революция“, которую он обещал внести в математику, является не освобождением мысли, но загромождением путей исследования, т. е. в сущности, одним из реакционных запретов мысли. Притом, в самое последнее время получены оттиски имеющего появиться в „Bulletin de l'Académie de Bruxelles“ небольшого мемуара двух бельгийских математиков Барзэна (Barzin) и Эррера (Errera). В этой работе авторы выводят, отправляясь от принципов теории Брауэра, выраженных ими символически, формальное противоречие логике Аристотеля: терциональное состояние p' какого-либо предложения p влечет его ложность $\sim p$. Так как терциональное состояние при известных условиях все-таки, как будто, имеет место (мы уже указывали на случай предложения о существовании параллельной прямой при сохранении остальных аксиом геометрии Эвклида), хотя оно и должно сопровождаться, в случае замены терционального состояния положительным или отрицательным предложением, изменением смысла всех терминов — необходимо подождать дальнейшего выяснения значения результатов Барзэна и Эррера.

Лично мне кажется, что мнение Адамара о необходимости прекращения бесполезных и не могущих ничего выяснить споров — вполне справедливо. Необходимо в самом деле подождать новых *фактов*, касающихся возможности полной арифметизации континуума. Из всех тезисов Брауэра и Вейля самым интересным является утверждение, что *континуум не есть множество точек*. Эта идея в истории мысли не представляет первой новизны: она восходит еще к Аквинату, дабы не цитировать древних. Притом, до появления работ Кантора, с которого начинается перевод всех основных понятий математики на язык множеств, большинство математиков, чтобы не сказать *все*, именно и мыслили континуум как чистую бесточечную протяженность. И еще после Кантора А. Пуанкаре, обсуждая смысл теоремы Кантора о том, что континуум имеет мощность высшую счетной, усумнился в том, имеет ли он вообще какую-либо мощность.

Недостаток места не дозволяет мне изложить более подробно результаты ведущихся в настоящее время в Москве исследований по арифметизации континуума [1]. Повидимому, если только здесь нами не сделано каких-либо упущений, установленное нами существование индивидуально определенных проективных множеств, пустота или непустота которых оказывается зависящей от специальной аксиомы, явится, если только мы не ошибаемся, *experimentum crucis* в пользу упомянутого тезиса Брауэра.

Обычно длящаяся деятельность вулкана не препятствует, все-таки, окрестному населению заниматься текущими делами. Так же точно текущая работа дескриптивной теории функций продолжается, несмотря на колебание ее основ. Из главного мы остановимся на немногом.

---

[1] См. мои предварительные заметки о проективных множествах от 4 мая, 25 мая, 15 июня, 20 июля и 17 августа („Comptes Rendns de l'Académie de Paris") и также мемуар *Sur les ensembles analytiques* („Fundamenta Math." t. X, 1927).

Здесь прежде всего следует весьма отметить систематическую деятельность сильной и прекрасно-организованной польской школы, поставившей себе задачею установление *новых фактов* из теории алефов и континуума *без ограничения себя определенным кругом методов*. Этим в самом деле полнее всего может быть характеризована математическая природа таких рассуждений, каково рассуждение Цермело.

Из результатов этого рода упомянем прежде всего работу Банаха (Banach) и Тарского (Tarski) о разбиении сферы. Оказывается, можно разбить сферу радиуса R на *конечное* число таких неперекрывающихся частей, перемещая которые, как твердые тела, и прикладывая их друг к другу надлежащим образом, можно получить новую сферу вдвое большего радиуса ($=2R$), причем мы не теряем ни одной точки прежней сферы и не вводим новой. Конечно, эти части суть неизмеримые множества (в смысле Лебега), и следовательно, пока получаемые помощью аксиомы Цермело. Этот факт, которым без сомнения воспользовался бы Зенон, если бы он ему был известен, имеет большую важность: если бы мы могли без аксиомы Цермело указать или определить (nommer) эти множества, это послужило бы поводом для избежания парадоксов ввести какую-то атомистическую структуру для пространства.

Далее, проф. В. Серпинский (W. Sierpinski) доказал, что множество значений, каждое из которых непрерывная везде функция $f(x)$ принимает несчетное число раз, может быть произвольным аналитическим множеством, и, в частности, любым множеством измеримым B; и так как эти последние образуют классы Бэра, (Baire), то явилась возможность расклассифицировать по классам Бэра и *непрерывные* функции, что было до сих пор осуществлено лишь для разрывных функций.

Эти результаты стоят в близкой связи с вопросом о возможности получать непрерывные функции путем итераций или суперпозиций функций, течение которых и свойства хорошо известны, например, функций с ограниченным изменением. На этом пути Г. М. Фихтенгольцем получены ценные результаты о суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций, положенные им в основу теории замены переменных в интеграле Лебега. Эти рассмотрения были продолжены учеником Г. М. Фихтенгольца, Зарецким, поставившим вопрос о характеристических свойствах таких суперпозиций; частично эти последние рассмотрения совпали с результатами польских и московских математиков.

ДОПОЛНЕНИЕ.

Предыдущая статья, дающая обзор состояния теории функций действительного переменного, написана в 1927 г. В настоящее время мне остается указать вкратце лишь самое *направление* работ по ней за истекшие пять лет, насколько это позволяет столь незначительный срок [1].

I

Как я уже указал в предыдущей статье, значительное число идей в теории функций действительного переменного было сосредоточено около понятия интеграла, в направлении его расширения наиболее „естественным“ путем за пределы интеграла Лебега.

За истекшие пять лет попытки в этом направлении продолжались.

Здесь мы имеем прежде всего продолжающееся изучение той группы определений интеграла („определения A, B и C“ — следуя терминологии Данжуа), которые были предложены еще в 1919 г. А. Данжуа [2], и попытка систематического изучения которых была потом предпринята Боксом (T. J. Boks) [3]. Все эти определения имеют ввиду получение интеграла Лебега и его расширений „чисто римановским путем“, т. е. дроблением на уменьшающиеся до нуля части не оси OY зависимого переменного, а оси OX аргумента.

Так как вопрос относительно первого определения интеграла („определение A“) выяснился лишь в самое последнее время, после ряда предшествовавших сообщений Кемписти [4] (Kem-

---

[1] Полного нового „обзора“ состояния теории дать, конечно, невозможно, так как для этого необходимо иметь некоторое историческое расстояние. В этом отношении вполне целесообразна практика математических международных конгрессов, хотя и собирающихся через каждые четыре года, но не ставящих обзорные доклады под-ряд, каждый раз *по одной и той же самой* ветви математики.

[2] „Comptes Rendus“, t. 169, стр. 219—220, 1919.

[3] „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo“, 1921, стр. 1—54.

[4] „Comptes Rendus“, t. 180, стр. 812—815, 1011—1014, 1925 и t. 185, стр. 749—751, 1927.

pisty), в результате совсем недавней работы А. Данжуа [1], то для характеристики указанного направления следует остановиться на этой последней.

Интеграл Коши. Известно, что интегралом Коши $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от функции $f(x)$, непрерывной в каждой точке отрезка $[a \leqslant x \leqslant b]$, называется предел суммы

$$S = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \tag{1}$$

когда наибольший из отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, b]$ стремится к нулю; здесь ξ_i обозначает *любую* точку отрезка.

Если $f(x)$ есть *какая-нибудь* функция, определенная на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$ и конечная в каждой его точке, тогда сумма S, хотя и имеет конечную величину, однако, вообще говоря, не стремится ни к какому конечному пределу, когда наибольшее из делений $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю. Открытие Коши, исторически вполне подготовленное, и состояло в установлении того первостепенной важности *факта*, что сумма S в указанных условиях всегда имеет предел, когда функция $f(x)$ есть не какая-нибудь, а *непрерывная* в каждой точке отрезка $[a, b]$, включая его концы. В этом случае сумма S имеет *единственный* вполне определенный предел, совершенно не зависящий ни от употребляемого способа разделения отрезка $[a, b]$, на части $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$, ни от выбора точки ξ_i на делении $[x_i\, x_{i+1}]$; влияние этих произвольных элементов на сумму S ощутительно, но исчезает в пределе, так что он уже перестает зависеть от этих употребленных элементов.

Из самого определения интеграла Коши следует, что *процесс его вычисления есть счетный.* Этим мы хотим сказать, что, зная величину функции $f(x)$ в каком-нибудь счетном, всюду плотном множестве точек E, мы узнаем величину интеграла Коши

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

посредством простого однократного перехода к пределу. Например, взяв за E множество всех точек, происходящих от разделения рассматриваемого отрезка $[a, b]$ на *равные части*, мы

[1] „Comptes Rendus", заседание 19 октября 1931 г.

можем определить величину интеграла Коши как предел среднего арифметического:

$$(b-a)\left[\frac{f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)+\ldots}{n}\right.$$

$$\left.\frac{\ldots+f\left(a+\frac{b-a}{n}n\right)}{n}\right], \qquad (2)$$

когда целое положительное n безгранично возрастает.

Условия Римана. Заслуга Римана заключается в том, что он точным образом определил условия применимости процесса интегрирования Коши к *произвольной* функции $f(x)$, а не только к *непрерывной.* На современном языке теории множеств условия эти выражаются следующим образом:

1. *Функция $f(x)$ должна быть ограниченной.*
2. *Множество разрывов функций $f(x)$ должно иметь меру нуль.*

Совокупность обоих этих условий является необходимой и достаточной для применимости к рассматриваемой функции $f(x)$ процесса Коши; в этих и только в этих условиях предел суммы

$$S=\Sigma f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) \qquad (1)$$

не зависит от употребленных точек деления x_i и от выбора на делениях $[x_i, x_{i+1}]$ точек ξ_i.

Указанные условия иногда чрезвычайно удобны для приложений, так как дают немедленный ответ на вопрос: *интегрируема ли рассматриваемая функция $f(x)$ процессом* Коши. Так, например, сразу ясно, что всякая функция $f(x)$ с счетным лишь множеством E точек разрыва есть интегрируемая процессом Коши.

В частности, следовательно, интегрируемой процессом Коши окажется всякая *монотонная* (т. е. *возрастающая* или *убывающая*) *функция.* Но в *общем случае,* когда рассматриваемая функция $f(x)$ имеет *несчетное* множество E точек разрыва, вопрос об интегрируемости в смысле Коши функции $f(x)$ сводится к вопросу о *мере* множества E. Для определения же этой меры у нас не имеется никакого счетного процесса, и следовательно, констатирование равенства нулю или отличия от нуля меры множества E должно как-то следовать из самого *задания* функции $f(x)$, минуя счетные процессы.

Тем не менее, если мы уже знаем, что рассматриваемая функция $f(x)$, непрерывная или разрывная, интегрируема процессом Коши, то самое *вычисление* интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ требует лишь *счетного* процесса: для этого достаточно просто хотя бы взять предел предыдущего среднего арифметического (2).

Метод Дарбу. Известно, наконец, что интеграл Коши-Римана подвергся пересмотру геометром Дарбу, который дал ему новое освещение. Пусть $f(x)$ какая-нибудь ограниченная функция, определенная на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$. Обозначим чрез M_i и m_i соответственно верхнюю и нижнюю границы рассматриваемой функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и составим две суммы Дарбу:

$$S = \Sigma M_i\,(x_{i+1} - x_i) \tag{3'}$$

и

$$s = \Sigma m_i\,(x_{i+1} - x_i). \tag{3''}$$

Дарбу доказал, что когда наибольший из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, то обе указанные суммы S и s стремятся к вполне определенным пределам, зависящим только от самой функции $f(x)$ и от отрезка (a, b) и совершенно не зависящим от употребляемого способа разделения отрезка $[a, b]$ на части $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$. Пределы эти получили названия *верхнего и нижнего интеграла* Дарбу и обозначаются чрез $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ и $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, причем мы имеем очевидное неравенство:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

В случае когда оба эти предела равны друг другу

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

тогда функция $f(x)$ интегрируема в смысле Коши-Римана, и мы имеем общую величину обоих этих пределов просто равной интегралу Коши. Если же эти пределы отличны друг от друга, тогда *функция $f(x)$ не интегрируема процессом* Коши. Это обстоятельство приобретает совершенно ясный смысл, если мы заметим, что при надлежащем выборе точки ξ_i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сумма Коши (1) может быть сколь угодно приближена, смотря по желанию, либо к первой сумме S, либо ко второй сумме s Дарбу.

Следует отметить то обстоятельство, что обе суммы Дарбу S и s содержат меньше произвольных элементов, чем сумма Коши (1), так как в них уже не встречается произвольно избираемая на делении $[x_i, x_{i+1}]$ точка ξ_i: она заменена у Дарбу числом M_i в сумме S и числом m_i в сумме s, *определяемыми единственно чрез отрезок* $[x_i, x_{i+1}]$.

Интеграл А. Напомнив это, перейдем к рассмотрению последней работы Данжуа. Пусть $f(x)$ есть какая нибудь измеримая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и конечная почти всюду на нем. Пусть $[c, d]$ есть какой-нибудь отрезок, лежащий на $[a, b]$.

Назовем *максимумом* до ε функции $f(x)$ на отрезке $[c, d]$ вполне определенное действительное число, обозначаемое чрез $M(f, c, d, \varepsilon)$ и получаемое в силу следующего определения:

1. Имея на отрезке $[c, d]$ фиксированное множество точек E меры меньшей $\frac{\varepsilon}{d-c}$, мы ищем *верхнюю границу* функции $f(x)$ на дополнительном до отрезка $[c, d]$ множестве CE; обозначим чрез $M(f, c, d, E, \varepsilon)$ эту верхнюю грань.

2. Заставляя всяческим образом изменяться указанное множество E, мы ищем *нижнюю грань* чисел $M(f, c, d, E, \varepsilon)$ и обозначаем ее чрез $M(f, c, d, \varepsilon)$. Эта нижняя грань $M(f, c, d, \varepsilon)$ и есть *максимум до* ε функции $f(x)$ на отрезке $[c, d]$.

Аналогично, *минимумом до* ε функции $f(x)$ на отрезке $[c, d]$ называется число $m(f, c, d, \varepsilon)$, получаемое следующим образом:

1. Имея на $[c, d]$ фиксированное множество E меры меньшей $\frac{\varepsilon}{d-c}$, ищем нижнюю грань функции $f(x)$ на дополнении CE; обозначаем чрез $m(f, c, d, E, \varepsilon)$ эту нижнюю грань.

2. Заставляя всячески изменяться множество E, на $[c, d]$, ищем верхнюю грань чисел $m(f, c, d, E, \varepsilon)$, которую и обозначаем чрез $m(f, c, d, \varepsilon)$. Это и есть *минимум* до ε.

Установив эти определения, разделим данный отрезок $[a, b]$ произвольным образом на части $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_i, x_{i+1}]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ и, обозначив чрез $M_i(\beta)$ и $m_i(\alpha)$ соответственно максимум до β и минимум до α функции — $f(x)$ на отрезке $[x_{i+1}]$, составим две суммы Дарбу-Данжуа:

$$S(\beta) = \Sigma\ M_i(\beta)\cdot(x_{i+1} - x_i) \tag{4'}$$

и

$$s(\alpha) = \Sigma m_i(\alpha)\cdot(x_{i+1} - x_i),, \tag{4''}$$

где числа α и β есть два какие-нибудь положительные числа, столь малые, чтобы их сумма $\alpha+\beta$ была меньше единицы, $\alpha+\beta<1$.

Вот теперь основное определение Данжуа:

Функция $f(x)$ называется интегрируемой А *на $[a, b]$, если обе суммы $S(\beta)$ и $s(\alpha)$ при каком-нибудь выборе чисел α и β стремятся к одному и тому же пределу, когда наибольший из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю.*

В этом случае этот общий предел сумм $S(\beta)$ и $s(\alpha)$ называется интегралом А от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается чрез $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

На первый взгляд может показаться, что предел сумм $S(\beta)$ и $s(\alpha)$, предполагая, что он существует, должен зависеть от чисел α и β. В действительности никакой зависимости этого предела от чисел α и β нет, и если интегрируемость А наступает хотя при одной паре чисел α и β, то она имеет силу и для всех пар α и β. Основным результатом работы Данжуа является следующий:

Для того чтобы какая-нибудь функция $f(x)$ была интегрируема А *на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была суммируемой в смысле Лебега; в этом случае интеграл* $A\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *численно равен интегралу Лебега* (L)$\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Анализ интеграла А. Я не вступаю на почву фактического доказательства только что приведенной теоремы Данжуа, для которого отсылаю читателя к последнему сообщению Данжуа Академии наук [1], и перехожу теперь к рассмотрению самой цели, которая преследуется „интегралом А".

Уже самое название указанного сообщения Данжуа *(о римановском определении интеграла* Лебега) показывает, что имелось в виду получение интеграла Лебега „чисто римановским" путем, т. е. как простого предела суммы S Коши

$$S=\Sigma\, f(\xi_i)\,(x_{i+1}-x_i), \tag{1}$$

при надлежащем выборе точки ξ_i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Для достижения этой цели автор отправляется от представления римановского интеграла, данного Дарбу, как *общего предела* сумм:

---

[1] *A. Denjoy*, Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue, „Comptes Rendus", 19 oct. 1931.

$$S = \Sigma M_i (x_{i+1} - x_i) \quad (3')$$

и

$$s = \Sigma m_i (x_{i+1} - x_i), \quad (3'')$$

где M_i и m_i обозначают соответственно верхнюю и нижнюю границу функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. Беря в качестве модели или образца указанное представление Дарбу, автор вводит вместо чисел M_i и m_i, числа $M_i(\beta)$ и $m_i(\alpha)$, названные им соответственно „максимумом до β“ и „минимумом до α“ функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ и, построив две суммы

$$S(\beta) = \Sigma M_i(\beta) \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad (4')$$

и

$$s(\alpha) = \Sigma m_i(\alpha) \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad (4'')$$

аналогичные суммам Дарбу, определяет интеграл Лебега как *общий предел* этих сумм. Числа α и β предполагаются положительными и такими, что $\alpha + \beta < 1$.

Нельзя не видеть, что аналогия с представлением римановского интеграла Дарбу получилась в самом деле полная.

Действительно, если мы положим $\alpha = \beta = 0$ и не позволим себе, при определении „максимума до β“ и „минимума до α“ функции $f(x)$, пренебрегать никаким множеством точек (не только меры нуль, но даже содержащими хотя бы одну только точку), то тогда $M_i(\beta)$ становится просто M_i и $m_i(\alpha)$ делается равным m_i. В этом случае суммы Данжуа переходят в суммы Дарбу, являющиеся, таким образом, их естественным частным случаем, и в результате достигают получения интеграла Лебега методом, скопированным с метода Дарбу.

При анализе этого интересного результата следует вспомнить о тех причинах, которые послужили поводом для возникновения этой попытки и других менее удачных попыток, сделанных раньше в этом направлении [1].

---

[1] Огромная заслуга Данжуа состоит в том, что числа $M_i(\beta)$ и $m_i(\alpha)$ определены им *эффективно*, т. е. *единственным образом*, при задании отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ и функции $f(x)$ *без употребления аксиомы Цермело*. Попытки определить интеграл Лебега суммами, аналогичными суммам Дарбу, делались весьма рано и восходят еще к работам Риса (1910 г.). Но во всех таких попытках неизменно употреблялась аксиома Цермело, которая, помимо вносимого ею ничем не ограниченного и не направляемого никаким правилом произвола, была должна, *по самой своей природе*, ставить дело так, что для того, чтобы получить интеграл Лебега способом Дарбу, т. е. как предел суммы типа $\Sigma \mu_i (x_{i+1} - x_i)$, надо было знать числа μ_i, а для знания этих чисел μ_i нужно было предварительно знать величину интеграла Лебега и других сопутствующих ему чисел той же самой природы.

Общей причиной их является некоторое неудовлетворение, сознательное или бессознательное, процессом Лебега.

Для того чтобы видеть, какой оно природы, предположим функцию $f(x)$ *ограниченной* на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$, и пусть мы имеем

$$A < f(x) < B$$

для всякой точки x отрезка $[a, b]$. Процесс самого Лебега состоит в следующем: отрезок $[A, B]$, помещаемый на ось OY зависимого переменного Y, $Y = f(x)$, делится на части $[A, Y_1]$, $[Y_1, Y_2], \ldots, [Y_i, Y_{i+1}], \ldots, [Y_{n+1}, B]$ и множество точек x, удовлетворяющих неравенству

$$Y_i \leqslant f(x) < Y_{i+1}$$

обозначается чрез E_i. Обозначим чрез μ_i меру множества E_i:

$$\mu_i = \text{mes}\, E_i, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, (n-1).$$

Лебег определяет свой интеграл просто как предел суммы

$$\sigma = \Sigma \mu_i Y_i, \tag{5}$$

когда наибольший из отрезков $[A, Y_1]$, $[Y_1, Y_2], \ldots, [Y_i, Y_{i+1}], \ldots$, $[Y_{n-1}, B]$ стремится к нулю.

В случае, если данная функция $f(x)$ есть неограниченная на отрезке $[a, b]$, тогда в формуле (5) конечная сумма Σ должна быть заменена бесконечным *рядом* и деления $[Y_i, Y_{i+1}]$, $(-\infty < i < +\infty)$ всей оси OY, должны *равномерно* стремиться к нулю.

В смысле *формальной* простоты определение Лебега не оставляет желать ничего большего. И в самом деле вначале было непривычным лишь деление на части оси *зависимого* переменного OY, а не оси аргумента OX, как это делается в методе Коши-Римана.

Следовательно, вначале были затруднения лишь *психологического* порядка [1]. Но потом стали выступать на передний план

[1] Интересно отметить, что деление оси зависимого переменного OY было впервые сделано для интегрирования *непрерывных* функций („слишком волнистых, чтобы применение обычного метода Коши было практичным“) инженерами еще до появления работ Лебега. На этом основании в литературе проскользнули было признаки попыток отнести к ним приоритет открытия интеграла Лебега. Но эти попытки не удержались ввиду того, что, хотя процесс Лебега и был отчетливо употреблен инженерами, однако ими ничего не было сделано в смысле возведения их приема *в принцип*, таким образом, этот прием получил

соображения *принципиального характера.* И поиски римановского изображения интеграла Лебега обусловлены не одним лишь стремлением возвратиться к привычному приему деления на части оси *аргумента* OX.

Чтобы понять сущность дела, нужно обратить внимание на то, что самый *процесс вычисления* интеграла Лебега вовсе не заключается в одном лишь действии перехода к пределу. Это действие составляет лишь финальную часть интегрирования по Лебегу, *главная же часть процесса* Лебега *состоит в вычислении коэфициентов* μ_i в сумме σ Лебега (5), т. е. *в определении мер множеств* E_i.

Определение меры $\text{mes}\, E$ какого-нибудь множества точек E, лежащего на отрезке $[a, b]$, состоит из двух действий: 1) определения *верхней* меры, $\text{mes}\, E$ множества E; 2) определения *верхней* меры $\text{mes}\, CE$ множества CE дополнительного к E до отрезка $[a, b]$.

Если окажется, что $\text{mes}\, E + \text{mes}\, CE = b - a$, то множество E измеримо по Лебегу, и в этом случае его мера $\text{mes}\, E$ полагается равной верхней мере $\text{mes}\, E$ рассматриваемого множества E.

Если же оказалось бы, что $\text{mes}\, E + \text{mes}\, CE > b - a$, то такое множество E неизмеримо по Лебегу и такое множество [и порождающая его функция $f(x)$] не может служить ни к чему[1].

Таким образом определить число μ_i в сумме Лебега (5) — это означает: найти верхнюю меру множества E_i. Но определение верхней меры какого-нибудь несчетного множества E является операцией *существенно-трансцендентной*, для которой мы не имеем никакого счетного процесса [2]. Отсюда следует, что главное затруднение при доведении до конца процесса вычисле-

у них характер *частного*, как бы случайно проделанного процесса, каких появляется очень много.

На естественность деления оси зависимого переменного OY, в свете *неделимых* Кавальери, обратил внимание сам Лебег.

[1] До сих пор не известно ни одного множества неизмеримого по Лебегу. Самое существование таких множеств не признается бесспорно установленным.

[2] Чтобы учесть трудность этой операции, достаточно сделать следующие наблюдения. Назовем *покрышкой* данного линейного множества точек E систему Σ неперекрывающихся попарно интервалов $\delta_i = (a_i, b_i)$ с рациональными концами, *содержащую целиком в себе множество* E.

Обозначим чрез u длину покрышки Σ, т. е. сумму длин всех входящих в нее интервалов δ_i; ясно, что число u зависит от покрышки Σ и изменяется, вообще говоря, с изменением этой покрышки. Если мы станем теперь всячески изменять покрышку Σ данного множества E, то ния интеграла Лебега состоит вовсе не в переходе к пределу суммы Лебега σ, а в вычислении ее коэффицинтов μ_i еще до перехода к пределу.

Именно это наличие столь тягостной трансцендентной операции заставляло и теперь еще заставляет исследователей искать иных определений интеграла Лебега и прежде всего влечет их на покинутый путь Коши-Римана. Здесь же заметим, что мы пока еще не имеем определения интеграла Лебега *строго римановским* путем: то, что сделано в рассматриваемой работе Данжуа, есть собственно путь Дарбу, а не Римана.

Строго римановским путем было бы определение интеграла Лебега как простого (не общего) предела суммы S Коши:

$$S = \Sigma f(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i),$$

при *надлежащем* выборе точки ξ_i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Этот путь был еще давно испробован Рисом, но эффективного определения точек ξ_i тогда не удалось сделать, не употребляя аксиомы Цермело и не зная *заранее* численной величины интеграла Лебега.

Не имеем мы указанного выбора точек ξ_i и в рассматриваемой работе Данжуа; следовательно, в ней собственно нет римановского пути в точном смысле этого слова. Но путь Дарбу проведен с большим искусством и силою.

нижняя граница полученного множества *и* чисел и называется *верхнею мерою множества.*

Легко сообразить, что все сводится к определению нижней границы некоторой положительной функции $\varphi(t)$. Действительно, системы Σ, составленные из неперекрывающихся попарно интервалов с рациональными концами, образуют множество, имеющее мощность континуума, и можно *фактически* привести их во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка $[0 \leqslant t \leqslant 1]$; пусть Σ_t будет системой, соответствующей действительному числу t.

Определим теперь функцию $\varphi(t)$ следующими двумя условиями:

1. $\varphi(t) = b - a$, если система Σ_t не содержит множества E.

2. $\varphi(t)$ равно длине системы Σ_t, если Σ_t содержит E.

Ясно, что функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[0 \leqslant t \leqslant 1]$, есть положительная, ограниченная. Ясно, наконец, что *нижняя граница функции $\varphi(t)$ есть в точности верхняя мера* mes E *множества E.*

Определение нижней границы заданной функции $\varphi(t)$ не есть счетная операция; хотя она и разбивается на счетное число следующих шагов: *имея рациональное число r, узнать, справедливо ли для всех точек x отрезка $[a, b]$ неравенство $f(x) > r$,* однако невозможно каким-либо счетным процессом констатировать для *разрывной* функции $f(t)$ соблюдение неравенства $f(x) > r$ во *всех* точках отрезка $[a \leqslant x \leqslant b]$.

Если мы теперь проанализируем коэфициенты $M_i(\beta)$ и $m_i(\alpha)$, то тотчас же заметим, что, хотя определение их и эффективное, но оно требует для своего выполнения процесса еще более тягостного, чем отыскание меры Лебега: здесь мы имеем и определение верхней границы функции на фиксированном множестве, и затем отыскание нижней границы получающихся таким образом величин при изменяющемся множестве. Короче говоря, определение чисел Данжуа $M_i(\beta)$ и $m_i(\alpha)$ требует операции гораздо более сложной, чем у Лебега.

Отметим здесь же, что лишь у Коши и у Римана мы имеем одну лишь операцию простого перехода к пределу.

Но даже у самого Дарбу определение его чисел M_i и m_i представляет огромную трудность и не может быть выполнено никакой счетной операцией, так как вычисление коэфициентов Дарбу M_i и m_i является отысканием верхней и нижней границ *разрывной*, вообще говоря, функции $f(x)$, т. е. распадается на континуум элементарных процессов.

Здесь уместно ввести следующие обозначения: обозначим чрез $o(E)$ операцию отыскания верхней грани *счетного* точечного множества E и чрез $O(E)$ операцию отыскания верхней грани *несчетного* множества E. С этим обозначением, учтя все то, что было нами изложено выше, мы теперь можем сказать:

Интеграл Коши-Римана требует лишь одной операции o; интеграл Дарбу одной операции O и одной операции o; интеграл Лебега одной операции O, осложненной отысканием покрышек для множеств, и двух операций o; *интеграл* A — двух осложненных операций O и одной операции o.

Сказанное, конечно, не мешает признать по справедливости работу Данжуа чрезвычайно интересной и имеющей значение для дальнейших попыток: если бы удалось определить числа, аналогичные числам Дарбу M_i и m_i другим образом, пусть сколь угодно сложным, лишь бы эффективным, и если новое определение дало бы существенное расширение интеграла Лебега, например, с охватом метода тотализации, тогда это было бы значительным успехом, оправдывающим все усилия, затраченные на преодоление сложности [1].

Взаимоотношение мер Бореля и Лебега. В этом же круге идей стоит еще неразрешенный вопрос о взаимоотношении мер Бореля и Лебега. Что вопрос о *мере* множеств стал в центре

---

[1] В этом смысле очень интересны определения „B“ и „C“, дающие несомненное расширение интеграла Лебега. См. указанное сообщение Данжуа („C. R.“ 1919) и цитированный мемуар Бокса.

внимания — в этом нет удивительного, так как вычисление интеграла Лебега, охватывающего большинство случаев, нужных математическому анализу, сводится просто к вычислению *меры* множеств, как мы это видим из формулы (5). Коснемся прежде всего некоторых общих соображений.

То, что называется в настоящее время *теорией функций действительного переменного* — есть совокупность предложений, тесно соединенных между собою связями следующего характера:

Предложение P_k говорит о том, что некоторая проблема A будет разрешена до конца, если будут разрешены проблемы B, B', B'', B''', ..., из которых основной (и, чаще всего, *единственной*, стоящей в центре внимания) считается проблема B.

Предложение P_{k-1} говорит о том, что проблема B доводится решением до конца, если будут разрешены проблемы C, C', C'' C''', ..., из которых основной признается проблема C, а об остальных либо забывают, либо умалчивают, считая их решения индивидуальными в различных частных случаях.

Предложение P_{k-2} говорит о том, что проблема C решится немедленно, если будут решены проблемы D, D' D'', D''', ..., из которых центральная есть D и т. д.

Это можно иллюстрировать на любой частной теории, входящей в состав теории функций действительного переменного. Например, в теории интегрирования по Лебегу интеграл Лебега $\int\limits_b^a f(x)\,dx$ — будет найден, если мы умеем определять меру множеств и выполнить операцию o; мера множества найдется, если мы умеем находить верхнюю меру множеств; верхняя мера множеств найдется, если мы умеем найти нижнюю границу множества (операция O) и *находить покрышки для множества*. Набранная курсивом проблема обычно не ставится, потому что признается, что в различных частных случаях мы сумеем довести дело до конца, смотря по создающейся обстановке, поступая в каждом случае по-разному.

Короче говоря, в теории функций действительного переменного необъятно многие проблемы рассматриваются как слишком элементарные, и о них либо совсем умалчивают, либо считают как-то разрешаемыми. Если приглядеться к делу, то идеалом считается тот случай, когда удается отбросить все на проблемы арифметики, т. е. на натуральный ряд чисел. Так, например, проблема о том, имеется ли рациональная точка, принадлежащая всем отрезкам δ_1, δ_2, ..., δ_n, ..., — охватывающим эйлерову постоянную C и стремящимся по длине к нулю, — эта проблема уже выходит из области теории функций.

Таким образом в теории функций действительного переменного молчаливо стараются фактически использовать закон исключенного третьего там, где он скрывается в форме:

Проблема А разрешена, потому что решение проблемы В должно иметь единственный ответ.

В этом отношении теория функций действительного переменного имеет много общего с общей теорией функционалов: так, например, верхняя мера $\mathrm{mes}\,E$ множества E есть просто функционал от *переменного* множества E. Такая точка зрения, безраздельно опирающаяся на принцип исключенного третьего, вполне законна. Но здесь возникают трудности вот какого порядка: пока функционал привлекается к разрешению *фактической* (это слово употреблено в том смысле, в каком английские математики, работающие в теории функций, употребляют слово *материальный*) проблемы теории функций, и пока он фигурирует в единственном числе, все идет хорошо. Но когда проблема начинает ставиться о взаимоотношении двух функционалов, тут чаще всего встречаются непреодолимые трудности, проистекающие, на мой личный взгляд, из необходимости отхода от формального принятия функционала и из необходимости, по удалении формального покрова функционала, войти глубоко в сущность тех операций и возможностей, которые он молчаливо предполагает. Такова, например, проблема о существовании неизмеримых множеств по Лебегу.

Ввиду сказанного, в теории функций стараются всегда избавиться от операций несчетного характера и сводить все дело к употреблению операции o, взятой в конечном или счетном числе. И здесь, прежде всего, сталкиваются с проблемой взаимоотношения меры Бореля и меры Лебега.

Определение меры Лебега есть *несчетная операция.*

Мы видели, что она сводится к операции O, примененной к специальной функции или множеству. Стремление удержать удаляющуюся от математического анализа теорию функций в его пределах заставило Бореля до начала работ Лебега предложить иную концепцию меры множеств.

Борель отказывается с самаго начала от концепции *произвольного* точечного множества как такой, которая лежит „вне математики“. Согласно его взглядам, в виду абсолютно различных в качественном смысле способов определять множества, ввиду невозможности иметь однородную рамку для удержания в ней всех качественно разнородных определений различных индивидуальных множеств, необходимо сосредоточить свое внимание лишь на определенных *классах* множеств, существенных для развития математического анализа.

Ясно, что этот прием есть истинно научный, тот, который приводил математический анализ к его лучшим открытиям.

Достаточно вспомнить хотя бы эллиптические функции. Согласно Борелю стремление создать общую теорию точечных множеств вполне беспредметно, не менее, чем попытки создать общую теорию всех приемов мышления.

Семейство множеств, выделенное Борелем, оказалось необычайно плодотворным и творческим. Это — так называемые *множества измеримые* В.

Не касаясь сейчас несравнимой ни с чем роли, которую играют эти множества в математическом анализе, ни их классификации, я ограничусь лишь необходимым для указания *проблемы меры.*

Множество точек E, лежащее на отрезке $[0 \leqslant x \leqslant 1]$, называется *измеримым* В, если оно определимо, *отправляясь от отрезков*, при помощи следующих двух операций, *повторенных конечное или счетное число раз*:

1. Образовать разность двух множеств E_1 и E_2, ранее уже определенных и таких, что E_1 содержится в E_2:

$$E_2 - E_1.$$

2. Образовать сумму счетного числа множеств E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$, ранее уже определенных и не имеющих попарно общей точки:

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

Указанные две элементарные операции могут комбинироваться между собою как угодно сложно, лишь бы не была допущена никакая новая третья операция. Всякий раз, как мы получим два или счетное число множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ измеримых В, составляя разность $E_2 - E_1$ или сумму $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$, мы выводим новые множества измеримые В, и т. д.

Данное определение, обязанное самому Борелю, имеет несколько расплывчатый характер, потому что не делает ясным ни переплетение указанных операций, которые надо повторно проделывать, чтобы получить искомое множество E, измеримое В, ни говорит о том, какие по пути промежуточные множества, также измеримые В, придется образовать для получения в окончательном итоге искомого множества.

Более точно определение ставится так:

Множество E называется *измеримым* В, если оно является последним членом счетной вполне упорядоченной последовательности (цепочки) множеств:

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots,\ E_\omega, \ldots,\ E_\alpha \ldots\ E, \tag{6}$$

всякий член которой, не являющийся отрезком, выводится: либо из двух предыдущих применением операции разности *1*, либо из счетного числа предыдущих применением операции суммы *2*.

Данное определение ясно указывает, что множество E, измеримое B получается *счетным числом условий*, т. е. *счетной операцией.*

Естественно думать, что и мера множества E определима счетным процессом.

Борель ответил на этот вопрос утвердительным образом. *Вот его мероопределение:*

I. Всякому отрезку $[a, b]$, лежащему на $[0,1]$ приписывается *мера, равная его длине $b-a$.*

II. Если мы уже определили меры $\mathrm{m}E_1$ и $\mathrm{m}E_2$ множеств E_1 и E_2, и если E_1 содержится в E_2, то $\mathrm{m}(E_2-E_1)=\mathrm{m}E_2-\mathrm{m}E_1$, т. е. *мера разности равна разности мер.*

III. Если мы уже определили меры $\mathrm{m}E_1$, $\mathrm{m}E_2$,... $\mathrm{m}E_n$... множеств $E_1, E_2,..., E_n$ и если эти множества не имеют попарно общей точки, то $\mathrm{m}(E_1+E_2+\dots E_n+\dots)=\mathrm{m}E_1+\mathrm{m}E_2+\dots$ $\dots+\mathrm{m}E_n+\dots$, т. е. *мера суммы равна сумме мер.*

Ясно, что, идя по последовательности (6) мы, таким образом, шаг за шагом будем находить, в силу мероопределения Бореля меры ее членов, пока, наконец, придя к последнему ее члену E, мы не получим его меры

$$\mathrm{m}E.$$

Мы видим, что процесс получения меры Бореля есть *счетный*. Но здесь может встретиться три и только три возражения:

1) применение операции разности мер II $\mathrm{m}E_2-\mathrm{m}E_1$ может дать *отрицательный* результат;

2) применение операции суммы мер III $\mathrm{m}E_1+\mathrm{m}E_2+\dots+\mathrm{m}E_n$ может дать *расходящийся* ряд;

3) ни откуда не следует, что мероопределение Бореля даст для множества E измеримого B единственный результат: a priori возможно, что, определяя одно и то же самое множество E, измеримое B, двумя различными цепочками (6), мы придем к численно разным мерам Бореля.

Впрочем, более подробный анализ показывает, что преодоление этих трех затруднений сводится лишь к одному: невозможности получения отрицательной меры для какого-нибудь члена цепочки (6). Однако до сих пор эта невозможность, *оставаясь при употреблении лишь счетных процессов,* еще не обнаружена. Это и есть знаменитая *проблема меры* Бореля.

Однако, если мы допустим употребление несчетных процессов, в частности, *мероопределения* Лебега, все три указанные затруднения устраиваются мгновенно. Чтобы в этом убедиться достаточно просто констатировать, что мера Лебега mes E есть *по самому своему определению единственное* для данного множества E *неотрицательное число.* Далее уже не в силу соглашения, а в силу *теорем*, вытекающих немедленно из определения меры Лебега:

1) мера Лебега отрезка $[a, b]$ равна его длине $b-a$ $\text{mes}\,[a, b] = b - a$;

2) мера Лебега разности $\text{mes}\,(E_2 - E_1)$ равна разности мер Лебега, $\text{mes}\,(E_2 - E_1) = \text{mes}\,E_2 - \text{mes}\,E_1$;

3) мера Лебега суммы $\text{mes}\,(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots)$ равна сумме мер Лебега, $\text{mes}\,(E_1 + E_2 + \ldots) = \text{mes}\,E_1 + \text{mes}\,E_2 + \ldots$[1] Таким образом для меры Лебега мы имеем и *неотрицательность*, и заведомую сходимость ряда $\text{mes}\,E_1 + \text{mes}\,E_2 + \ldots$ и, наконец, по самой природе его определения, *единственность.*

Отсюда следует, что, применяя к цепочке (6) мероопределение Лебега, мы будем двигаться по ней, все время получая *численно* те же самые меры Лебега ее членов, $\text{mes}\,E_\alpha$ которые давал и метод Бореля, $\text{m}\,E_\alpha$. Следовательно, имеем $\text{mes}\,E = \text{m}E$, и таким образом доказывается, что счетный процесс мероопределения Бореля не может встретить никаких указанных выше затруднений и даст, в результате, то же самое число $\text{m}E$, которое дает и метод Лебега $\text{mes}\,E$:

$$\text{m}\,E = \text{mes}\,E.$$

Эта необходимость обращения к несчетному процессу Лебега для того, чтобы оправдать счетный по своей природе процесс Бореля, представляется загадочной. Имеем ли мы здесь лишь трудности технического порядка, или же здесь дело глубже и касается принципов? Ответ, без сомнения, будет дан дальнейшими изысканиями.

Другие изыскания по метрической теории функций. Мы сосредоточили свое внимание на так называемых „теориях интегрирования“. Эти теории до сих пор являются одним из центральных нервов метрической теории функций: проблемы, разрешаемые в этом направлении и вопросы, ставящиеся здесь, ясно говорят, что речь идет вовсе не об „интегрировании“ все более

[1] Предполагаются, разумеется, те же самые условия, что и у Бореля, т. е. что E_1 содержится в E_2 и что E_m не имеет общей точки с E_n, при $m \neq n$.

и более широких классов функций, а об открытии нового предельного процесса, не опирающегося на понятие трансцендентного числа и столь могущественного, что один он был бы достаточен для разрешения столь разнородных задач, каковы отыскание примитивных, определение коэфициентов тригонометрических рядов. Еще Данжуа заметил, что работа в метрической теории функций сильно напоминает изучение микроструктур. При изучении работ по теориям интегрирования и близким к ним областям открывается трудно поддающееся описанию богатство взаимоотношений математических микроструктур; эти взаимоотношения математических микроструктур в последнее время начинают все чаще и чаще служить *моделями* уже для взаимоотношений в математическом мире конечного.

Однако за истекшие пять лет не было недостатка в работах и в других направлениях метрической теории функций.

Здесь прежде всего упомянем о работах по дробному числу измерений и по расширению понятия линейной меры плоских множеств (Безикович, Цермело); метрическому строению плоских множеств [Булиган (Bouligand), Келлог (Kellog), Василеско (Vasilesco)]; асимптотическому изучению точечных множеств [Леви (P. Lévy)]; теории интегрирования и меры множеств [Руссель (Roussel), Риддер (Ridder), Юнг (L. C. Young)]; непрерывным преобразованиям с ограниченным изменением [Стоилов (Stoïlow)]; функциям à écart fini [Брай (Bray)]; по тригонометрическим рядам [Гилл (Hille) и Тамаркин, Szasz, Вольф (Wolf), Гарди (Hardy), Литтльвуд (Littlewood), Алекситс (Alexits), Коплэнд (Copeland), Гагаев].

Мы оставляем в стороне работы по почти периодическим и квази-аналитическим функциям, как более близкие к классическому анализу.

II

Нам осталось рассмотреть те направления, по которым двигалась в течение последних пяти лет *дескриптивная теория функций*.

Здесь мы имеем работы гораздо более многочисленные и более принципиального значения, чем в метрической теории функций, где технический момент играет все же заметную роль.

Большая часть работ по дескриптивной теории функций отведена вопросам обоснования анализа, обоснования теории множеств [Стьюди (E. Study), Френкель (A. Fraenkel), Ласло (Làszlo), Кальмар (Kalmár), Сцего (Szego) Баер (Baer), Гейтинг (Heyting), Нейман (v. Neumann), Брауэр (L. E. J. Brouwer), Горак (Horák), Ло (Leau), Кассина (Cassina), Лагаж (Lagage), Аккерман (Ackermann), Бернайс (Bernays), Шенфинкель (Schönfinkel), Менгер (Menger), Гербранд (Herbrand), Жегалкин] Затем следуют работы по вполне упорядоченным множествам [Журдэн (Jourdain), Френкель, Патаи (Patai)]; по общим свойствам функций действительного переменного [Вереис (Vereis), Бэр (Baire), Ло, Фрода (Froda), Скоцца (Scozza), Серпинский (Sierpinski); по теории эффективных точечных множеств [Блю (Blue), Гаусдорф, Гуревич (Hurewicz), Куратовский (Kuratowski), Серпинский и работы польской школы; в СССР: Лузин, Колмогоров, Канторович, Ливенсон, Новиков, Келдыш, Селивановский].

Не претендуя на полноту списка, мы опускаем все работы по *топологической теории множеств*, ввиду естественности отнесения их к топологии, как ее приложений.

Мы ограничимся здесь тем, что коснемся лишь работ по обоснованию анализа. Центральное место в этих работах занимает по объективной важности и по уделяемому всеми вниманию, теория Д. Гильберта и критика его взглядов и диаметрально противоположных взглядов Л. Брауэра.

Трудно найти достаточно сильные слова, которые охарактеризовали бы всю существенную важность этого направления. Важность и ценность самой теории Гильберта и поднявшейся сейчас полемики вокруг его взглядов и взглядов Брауэра могут быть сравнены с важностью того момента (1904 г.), когда Цермело дал свою знаменитую „теорему" о том, что *всякое множество может быть „сделано" вполне упорядоченным*, и важностью тотчас же поднявшейся полемики 1905—1914 гг. В обоих этих моментах имеется много общего, не говоря уже о том, что самые истоки теорий и споров — *одни и те же.*

Я уже достаточно полно высказался по поводу взглядов Гильберта и Брауэра в моей предыдущей статье[1], к которой и отсылаю читателя за подробностями: новейшие работы не только не пролили света на чрезвычайно глубокие и еще совсем темные пункты теории Гильберта но, напротив, запутали дело, потому что там, где была кажущаяся ясность, в настоящее время оказывается либо проблема, либо дефект.

[1] Однако, повидимому, моя личная точка зрения представляется не совсем ясной. По поводу этого я должен сказать, что я не рассматриваю ни теории Гильберта ни взглядов Брауэра достигшими той степени зрелости, начиная с которой можно уверенно говорить о математической теории как осуществившейся. Всякая осуществившаяся теория характеризуется творчеством новых теорем, открытием новых фактов, которые одни только и могут служить к ее признанию. Теория, не дающая новых фактов, ни к чему не может служить и в дальнейшем осуждена на забвение.

Здесь мы укажем лишь один пункт, стоящий в тесной связи с генезисом идей Гильберта и Брауэра.

Известно, что Максвелл в целях наиболее яркой интерпретации своих взглядов прибег к помощи некоторого воображаемого существа, получившего у физиков имя δαίμων Максвелла: это воображаемое существо, находясь у форточки, проделанной в перегородке, разделяющей сосуд с газом, пропускает в одну сторону перегородки лишь молекулы с большой скоростью, и в другую сторону — молекулы, имеющие малую скорость; в результате в сосуде, без *затраты работы*, одна половина будет горячей, другая — холодной.

Это воображаемое существо было привлечено для наглядного изображения его идей.

Аналогично, если анализировать взгляды творцов современной теории функций, легко подметить, что каждый из них в процессе своей работы исходит из определенной концепции возможного и допустимого, за пределами которого кончается область математики и начинается область, лежащая, по выражению Бореля, „вне математики“ („en dehors des Mathématiques“). Если, следуя примеру Максвелла, приписать область возможного и исполнимого того или иного автора соответствующему воображаемому существу, то получится следующая схема:

1. δαίμων Брауэра. Его область есть область целого *конечного* и притом *ограниченного* путем указания верхнего конечного предела. За этой областью все лежит „вне математики“.

2. δαίμων Бэра. Его область есть просто область целого *конечного* без указания верхней конечной границы. Бесконечное — это лишь façon de parler и находится „вне математики“.

3. δαίμων Бореля. Его область есть область счетной бесконечности. Всякое несчетное множество — „вне математики“.

4. δαίμων Лебега. Его область есть область *мощности* континуума. Всякая операция, требующая континуум простых шагов, доступна этому δαίμων'у, поэтому определение верхней меры еще лежит в области математики.

Но мощность 2^c, мощность совокупности всех функций — уже отрицается Лебегом и не по силам его δαίμων'у.

5. δαίμων Цермело. Его поле операций всякие мощности; в частности, всякое множество δαίμων Цермело может „сделать“ вполне упорядоченным.

Мы видим, что по мере увеличения нумера этого воображаемого существа, все увеличивается его „сила“. И однако при всей логической стройности точки зрения Цермело наличие „W-парадокса“ и других служит непреодолимым препятствием для принятия всерьез этой точки зрения. Но, отступая с этой позиции на более „умеренную", трудно, вследствие отсутствия принципиальных соображений, где-либо остановиться посредине, и вот, таким образом, здесь, вероятно, кроется причина, по которой часть математиков оказывается вместе с Брауэром: в указанной классификации нет места соображениям умеренности, и интересны лишь ее фланги.

Соображения этого порядка и привлекли внимание Гильберта.

Гениальный мыслитель задумал спасти все *положительное*, что сделано было в анализе и теории функций, путем создания глубокой логической теории, стремящейся оправдать все то, что непротиворечиво, и с ним все положительное анализа и теории функций.

В настоящее время трудно судить об истинности взглядов Гильберта и ценности его теории.

Сведения, поступающие из литературы, весьма неполны, отрывочны и туманны; сведения идущие с мест, противоречивы. Без личного контакта с деятелями в теории Гильберта нет возможности составить себе правильное представление о сущности этой теории. Поэтому будет правильным подождать дальнейших, уже по существу, сведений.

В этом же самом направлении протекают в настоящее время работы у нас в СССР И. И. Жегалкина, с тем лишь различием, что исходя, как и Гильберт, из системы Ресселя (Russel), И. И. Жегалкин ищет исключить из нее произвол и случайность и внести в нее алгорифм, который позволил бы в некотором роде *алгебраически* разрешать Entscheidungsproblem Гильберта.

На этом пути автором получены чрезвычайно интересные и ценные результаты. Объем и глубина их могут быть оценены лишь по установлении точных взаимоотношений теорий Гильберта и И. И. Жегалкина.

С другой точки зрения к исследованию *объема* математического анализа подходит то направление дескриптивной теории функций, которое ищет расширения пределов „эффективизма" множеств.

Сюда относятся и наши работы. Течение это ищет осуществить более медленным путем нахождения фактов то, к чему стремятся теории, исходящие из априорных соображений.

ЛИТЕРАТУРА.

Математическая логика.

Russel, Einführung in die mathematische Philosophie, deutsch., München 1923.
Hölder, Die mathematische Methode, Berlin 1924.

Аксиоматика.

Hilbert, Grundlagen der Geometrie.
Hilbert, Axiomatisches Denken, „Math. Ann.", 78, 1918.
Geiger, Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie, 1924.

Арифметика.

Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Leipzig 1914.
Husserl, Philosophie der Arithmetik, Halle, 1891.

Теория множеств.

Weyl, Das Kontinuum, 1918.
Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 1933.
Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1927.

Интуиционизм.

Brouwer, Intuitionisme en formalisme, „Bulletin Americ. Math. Soc.", t. 20, 1913.
Weyl, Neue Grundlagenkrise der Mathematik, „Math. Zeitschr.", t. 10, 1921.
Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen.
Husserls Jahrbuch für Philosophie, 6 (стр. 398—436, 459—477).
Rollin Wavre, Три статьи в „Revue de métaphysique et de morale", 1924 и сл.

Теория Гильберта.

Hilbert, Neubegründung der Mathematik, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1, 1922.
Hilbert, Die logischen Grundlagen der Mathematik, „Math, Annalen", 88, 1922.
Hilbert, L'infini, „Acta Mathematica", t. 48.
Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, „Math. Zeitschr.", 1926.

Общие книги.

A. Voss, Über das Wesen der Mathematik, 1913.
Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 1927.
Gonseth, Les fondements des Mathématiques, 1926.

ЛИТЕРАТУРА К ДОПОЛНЕНИЮ.

Метрическая теория функций.

A. S. *Besicovitch*, On linear sets of points of fractional dimension, „Math. Annalen", t. C. I., p. 161—193, 1929.

G. *Bouligand*, Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. Georges Durand, „C. R.", t. 189, p. 446—448, 1929.

G. *Bouligand*, Sur l'ordre de mesure d'un ensemble fermé, „C. R.", t. 187, p. 592—594, 1928.

D. *Kellog* et F. *Vasilesco*, Contribution à l'étude de la capacité et de la série de Wiener, „C. R.", t. 188, p. 135—137, 1929.

L. C. *Young*, Note on the Theory of Measure, „Proc. of the Cambridge Philosoph. Society", t. 26, p. 88—93, 1930.

A. *Roussel*, Primitive généralisée d'une fonction, „C. R." t. 189, p. 677—678, 1929.

J. *Ridder*, Sur un théorème dans la théorie de la totalisation, „Nieuw Archief voor Wiskunde", 2e reeks, deel XVI (3) 1930.

H. E. *Bray*, Functions of „écart fini", „Amer. Journ. of Mathem." vol. L. I, 149—164, 1929.

A. *Roussel*, Primitive de seconde espèce, „C. R.", t. 187, p. 926—927, 1928.

E. *Hille* and J. D. *Tamarkin*, On the sommability of Fourier series, „Proceed. of the Nation. Acad. of Sciences", vol IV, 1928, p. 915—918.

O. S. *Szasz*, Über die Fourierschen Reihen gewisser Funktionsklassen, „Math. Annalen", C (3—5) S. 530—536, 1928—29.

Fr. *Wolf*, Theorèmes d'unicité des séries trigonométriques représentant des fonctions presque périodiques, „C. R.", t. 187, p. 706—708, 1928.

B. *Gagaeff*, Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation, „C. R.", t. 188, p. 222—224, 1929.

A. *Besicovitch*, On linear sets of points of fractional dimension, „Math. Annalen", CI, p. 161—193, 1929.

G. *Bouligand*, Sur l'ordre de mesure d'un ensemble fermé, „C. R.", t. 187, p. 593—594, 1928.

L. C. *Young*, Note on the Theory of Measure, „Proc. of the Cambr. Philosoph. Society", vol. XXVI, p. 88—93, 1930.

G. *Bouligand*, Sur certains aspects de notions fondamentales en analyse, „L'Enseignement Mathématique", t. 27, p. 224—229, 1928.

P. *Lèvy*, Sur un point de vue asymptotique dans l'étude des ensembles de points sur une droite, „C. R.", t. 186, p. 674—676, 1929.

G. *Bouligand*, Ordre de mesure et dimension des ensembles fermés, „C. R." t. 187, p. 524—525, 1928.

O. *Onicescu*, Représentation d'une fonction sur un ensemble de saturation de mesure nulle, „C. R.", t. 185, p. 27—29, 1927.

G. *Roncali*, Sugli insiemi non misurabil'i, „Annali della R. Scuola norm. sup. univ. di Pisa", t. 15, 1927.

L. *Holzer*, Zur Bestimmung des Lebesgueschen Masses linearer Punktmengen, deren Elemente durch systematische Entwicklung gegeben sind, Sitzungsber. der Akad. der Wissensch. in Wien, t. 137, S. 421—453.

A. *Roussel*, Une généralisation de la notion de primitive, „C. R.", t. 186, p. 1096—1097, 1928.

A. Roussel, Pseudo-dérivée d'une fonction, „C. R.", t. 186, p. 1807—1808, 1928.
J. Ridder, Über das Riemannsche Integral, „Nieuw Archief voor Wiskunde", 2e reeks, deel XV (4), S. 321—329, 1928.
G. H. Hardy and *J. E. Littlewood*, A convergence criterion for Fourier series, „Math. Zeitschrift", t. 28, p. 612—634, 1928.
G. Alexits, Sur la divergence des séries de Fourier de fonctions continues, „C. R.", t. 185, p. 751—753, 1927.
G. Alexits, Remarque sur la divergence des séries de Fourier de fonctions continues, „C. R.", t. 185, p. 1105, 1927.
S. Stoïlow, Sur une classe, de transformations continues à variation bornée, „C. R.", t. 186, p, 621—623, 1928.
T. Wazewski, Contribution à la théorie de la longueur, „Annales de la Société Polonaise des Mathématiques", t. VII, 1928.
P. Lèvy, Fonctions à croissance régulière et itération d'ordre fractionnaire, „Annali di Matematica", t. 5, p. 269—298, 1928.
S. Kempisty, Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy, „C. R", t. 185, p. 749—751, 1927.
L. Tonelli, Una proprietà delle funzioni integrabili, „Atti della R. Accad. dei Lincei (Rendiconti)", serie 6a, t. V, p. 533—536, 1928.
A. H. Copeland, Note on the Fourier developpement of continuous functions, „Bullet. of the Amer, Math. Soc.", t. XXXIII, p. 1689—1692, 1927.
A. S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, „Math, Annalen", t. XCVIII, p. 422—464, 1927—1928.
E. Zermelo, Über das Mass und die Diskrepanz von Punktmengen, „Journ. für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 158, S. 154; 167.
A. Kolmogorow, Untersuchungen über den Integralbegriff, „Math. Ann.", Bd. 105, S. 654—696, 1930.

Дескриптивная теория функций.

N. Lusin, Sur une propriété des fonctions à carré sommable, „Bullet. of the Calcutta Mathem. Society", vol. XX, p. 139—154, 1930.
E. Study, Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre, Sitz. der Preusischen Akad. der Wissensch., 1929.
A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Leipzig, Teubner, 1927.
A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, J. Springer, 1928.
B. Lagage, Over het continuiteits begrip, „Wisen Natuurkundig. Tijdschrift", deel IV, p. 153—160, 1928—29.
L. Kantorovitch, Sur les ensembles projectifs de deuxième classe, „C. R.", t. 189, p. 1233—1235, 1929.
R. C. Young, Théorème sur les ensembles d'intervalles linéaires au sens général avec applications aux fonctions à limites unilatérales uniques et finies en tout point, „Journal de Mathém.", t. 7, p. 231—247, 1928.
László Kalmar, Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, „Acta Litterarum ac scientiarum", t. V., fasc. III—IV, S. 222—236.
R. Baer, Eine Anwendung der Kontinuumhypothese in der Algebra, „Crells Journal,", Bd. 162, S. 132—133.
A. Heyting, Les prédicats de dénombrabilité de M. Brouwer, „Nieuw Archief voor Wiskunde", 2e reeks, deel XVI, p. 47—58, 1929.

A. H. Blue, On the structure of „Sets of Points of Classes 1, 2 and 3, „Math. Annalen", t. CII, p. 624–632, 1930.
L. Leau, Les suites de fonctions en général. Domaine réel, „Mémorial des sciences mathématiques", Fasc. XLIV, 1930.
L. Kantorovitch et *Livenson*, Sur les δ_s fonctions de M. Hausdorff, „C. R.", t. 190, p. 352–354, 1930.
J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, „Math. Zeitschr.", t. 27, S. 669–752, 1928.
L. E. J. Brouwer, Beweis, dass jede Menge in einer individualisierten Menge enthalten ist, „Koninklijke Akademie van Wetenschappen Amsterdam, Proceedings", t. 31, S. 380—381.
P. Vereis, Über die Baireschen Klassen, „Matematikai és fizikai lapok", t. 32, S. 2ɜ–31.
Ph. E. B. Jourdain, A proof that every aggregate can be well ordered, „Acta Mathematica', t. 43, p. 239–261.
J. M. Horák, Sur la notion de „tous" dans la théorie des emsembles, „Časopis pro pestovani matematiky a fysiky", Prague, t. 57, 1928.
L. Patai, Über die Reihe der unendlichen Kardinalzahlen, „Math. Zeitschr.", t. 28, 1928.
L. Leau, Méthode de récurrence ou d'induction complète applicable à l'espace, „C. R.", t. 184, p. 1154—1155, 1927.
P. Verets, Uber die Baireschen Klassen, „Matematikai és fizika ilapoc", t. 32, p. 26—31.
A. Froda. Sur quelques propriétés descriptives des fonctions de variables réelles, „C. R.", t. 187, p. 274–276, 1928.
A. *Froda*, Sur une classification nouvelle des discontinuités d'une fonction uniforme de variables réelles, „C. R.", t, 186, p. 1350—1351, 1928.
R. Baire, Sur l'origine de la notion de semi-continuité, „Bullet. de la Société Mathém. de France", t. LV, p, 141—142, 1927.
G. Scorza, Dragoni, Sulla quasi-continuità delle funzioni composte, „Atti dei Lincei", t. 7, p. 326—328, 1928.
U. Cassina, Sul concetto di limite, „Atti della R. Accademia dei Lincei (Rendiconti)", serie 6a, t. VIII, sem. 2, 1928, p. 639—645.
A. Fraenkel, Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen, Sitzungsber., der Preussisch. Akad., (1—12), S. 90—91, 1928.
J. v. Neumann, Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre, „Math. Ann.", XCIX, S. 279—391, 1928.
A. Fraenkel, Zusatz zu dem vorstehenden Aufsatz Herrn von Neumanns, „Math. Ann.", XCIX, S. 392—393, 1928.
W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen „Math. Ann.", t. XCIX, S. 118—133, 1928.
P. Bernays und *M. Schönfinkel*, Zum Entscheidungsproblem der Mathematischen Logik, „Math Ann, XCIX, S. 342—372, 1928.
K. Menger, Bemerkungen zu Grundlagenfragen: 1) Über Verzweigungsmengen S. 213—226, 2) Die Mengentheoretischen Paradoxien, S. 298–302, 3) Über Potenzmengen, S. 303–308, 4) Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen, S. 309—325, Jahresbericht der deutsehen Math. Vereinigung, XXXVII, 1928.
A. Fraenkel, Axiomatische Begründung der geordneten Mengen, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, Bd. XXIX, S. 29—37, 1925.
G. T. Whyburn, Concerning accessibility in the plane and regular acces-

sibility in n-dimensions, „Bull. Amer. Math. Soc.", XXXIV, p. 504—510, 1928.

G. T. Whyburn, Concerning plane closed point sets which are accessible from certain subsets of their complements, „Proceed. Nation. Acad. Sc.", vol. XIV, p. 1657—1666.

J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, „Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", t. XXIV, p. 1—45, 1931.

J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 166, S. 1—8, 1931.

L. Kantorovitch, Un exemple d'une fonction semi-continue, universelle pour les fonctions continues, „Fundamenta Mathematicae", t. XVIII, p. 178, 1932.

L. Kantorovitch and *E. Livenson,* Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets.

P. Novikoff, Sur les fonctions implicites mesurables *B*. „Fundamenta Mathem.", t. XVII, p. 12—25, 1931.

W. Hurewicz, Zur Theorie der analitischen Mengen, „Fundamenta Mathem.", t. XV, S. 4.

И. И. Жегалкин, Арифметизация символической логики, „Матем. Сборник", т. 34, вып. 3—4, стр. 310—347, 1928 и т. 35, вып. 3—4, 1929.

И. И, Жегалкин, О технике вычисления предложений в символической логике, „Матем. Сборник", т. 34, вып. 1, стр. 9—28, 1927.

N. Lusin, Leсons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, Gauthiers-Villars, 1930.

N. Lusin, Analogies entre les ensembles mesurables *B* et les ensembles analytiques, „Fundamenta Mathem.", t. XVI, p. 48—76, 1930.

СОДЕРЖАНИЕ

I

Отв. редактор В. Контовт. Техн. редактор О. Персиянинова.

ОНТИ № 500/Л. Индекс Т-21-5-4. Тираж 3000. Сдано в набор 21/II-33 г. Подп. в печ. 3/VI 1933 г. Формат бумаги 82 × 110. Печатн. $3^3/_4$ л. Колич. бумажн. л. $^7/_8$. Колич. печатн. зн. в бум. л. 170 000 б. Заказ № 270. Ленгорлит № 13395. Выход в свет август 1933 г.

3 я тип. Онги им. Бухарина, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.