БИБЛИОТЕКА РУССКОЙ НАУКИ

математика
механика
физика
астрономия

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва-Ленинград
1951

Н. Н. ЛУЗИН

ИНТЕГРАЛ
И
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ
РЯД

•

Редакция и комментарии
Н. К. БАРИ
и Д. Е. МЕНЬШОВА

•

Вступительные статьи
Н. К. БАРИ, В. В. ГОЛУБЕВА
и Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · Ленинград
1951

ПРЕДИСЛОВИЕ

Диссертация Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», впервые опубликованная в 1915 г., замечательна не только богатством содержания и общностью идей, но и тем, что в ней указаны были пути, по которым должны итти исследования по метрической теории функций. Она послужила на многие годы основным источником идей для всех работавших в этой области. Поэтому переиздание этой книги в серии «Библиотека русской науки» является весьма полезным.

Но ввиду того что с момента первого издания диссертации Н. Н. Лузина прошло много лет и теория функций значительно продвинулась вперед, в частности, ряд проблем, поставленных Н. Н. Лузиным, теперь разрешен, представилось необходимым снабдить ее комментариями. Преждевременная смерть Н. Н. Лузина не позволила ему подготовить издание этой книги; таким образом, составление комментариев мы, его ученики, взяли на себя. Желая сделать материал доступным для возможно более широкого круга читателей, мы сочли полезным дать доказательства тех теорем, которые Н. Н. Лузиным были пропущены за недостатком места, а также построить указанные им примеры[1]).

---

[1]) В примечании 3 к стр. 31 своей диссертации Н. Н. Лузин пишет: «Все, кто писали по теории функций действительного переменного, все те хорошо знают, как трудно в такого рода вещах быть одновременно и строгим и кратким. Поэтому здесь и в дальнейшем мы часто ограничиваемся простым утверждением существования примера такой-то и такой-то функции или ограничиваемся указанием на справедливость такой-то теоремы (второстепенного значения), желая возможно сократить размер нашей работы. Построение примеров функций, о которых идет речь, не требует осо-

В построении этих доказательств и примеров нам оказали существенную помощь Г. П. Толстов, Е. М. Ландис и В. А. Ходаков; мы пользуемся случаем выразить им свою благодарность.

Для удобства читателя в настоящем издании публикуется еще ряд статей Н. Н. Лузина по метрической теории функции действительного переменного. Статьи «Об одном случае ряда Тейлора» и «К основной теореме интегрального исчисления» помещены здесь потому, что автор отсылает к ним читателя своей диссертации. Статья «Об особом интеграле» никогда не была опубликована Н. Н. Лузиным и найдена в его бумагах после его смерти (см. об этом подробнее в комментариях к этой статье). Статья «Об одном виде сходимости интеграла Дирихле», написанная автором еще в 1926 г. и лишь случайно попавшая в печать только в 1934 г., тесно связана с его идеями о причине сходимости тригонометрических рядов. Наконец, статьи «О последовательностях измеримых функций» и «О строении измеримых функций» были им помещены в качестве прибавлений к русскому изданию книги Лебега «Интегрирование и отыскание примитивных функций». Мы их помещаем также для удобства чтения, так как в них даны подробные доказательства ряда теорем, на которые Н. Н. Лузин лишь указал в своей диссертации; кроме того, там высказаны и некоторые более поздние его размышления.

Кроме указанных статей мы публикуем здесь список проблем, которые Н. Н. Лузин поставил перед собой в период, когда он подготовлял свою диссертацию. Подробнее об этом см. на стр. 365 настоящего издания.

В двух публикуемых ниже статьях содержатся биография Н. Н. Лузина и обзор его работ по метрической теории функций действительного переменного. Мы не говорим здесь совсем о работах Н. Н. Лузина по дескриптивной теории функций,

---

бого искусства, а лишь технического умения пользоваться методами теории функций действительного переменного. Опускание фактического построения примеров различных функций совершенно аналогично тем пропускам аналитических преобразований, которые часто делаются в работах в области классического анализа, когда эти преобразования слишком длинны и требуют только технического умения».

так как в скором времени будет издана книга Н. Н. Лузина «Теория аналитических множеств» с комментариями Л. В. Келдыш и вводной статьей о работах Н. Н. Лузина по дескриптивной теории функций.

Наконец, Н. Н. Лузин имел также ряд работ по теории функций комплексного переменного, по дифференциальным уравнениям, по дифференциальной геометрии; всех этих работ мы также не касаемся в настоящем издании, ограничиваясь лишь опубликованием полного списка научных трудов Н. Н. Лузина и отсылая читателя к статьям на соответствующие темы, которые должны появиться в «Успехах математических наук».

Цифры с круглыми скобками в тексте диссертации или статей Н. Н. Лузина — это сноски, сделанные самим автором; эти сноски, как и у автора, помещены в конце каждой страницы. Н. Н. Лузин иногда отсылал читателя к доказательствам, опубликованным в некоторых курсах по теории функций. Так как в его время не было таких курсов на русском языке, он ссылался на «Cours d'Analyse» Валле-Пуссена или «Leçons sur l'intégration» Лебега. Для удобства читателя мы в этих случаях указывали также соответствующий русский перевод или другой учебник советского автора. Цифры в квадратных скобках в тексте Н. Н. Лузина указывают на примечания редакторов; их надо искать в комментариях к диссертации (или соответствующей статье) в конце книги. Наконец, цифры в круглых скобках, помещенные в комментариях, — это указания на список цитированной литературы, помещенной в конце книги.

Н. К. Бари,

Д. Е. Меньшов.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

БИОГРАФИЯ Н. Н. ЛУЗИНА [1)]

В. В. ГОЛУБЕВ и Н. К. БАРИ

Николай Николаевич Лузин родился 9 декабря (27 ноября) 1883 года в Сибири в гор. Томске. Дед Николая Николаевича по отцу был крепостным крестьянином графа Строгонова, отец, Николай Митрофанович Лузин, родом из села Сепыч Томской губернии, был торговым служащим; мать, Ольга Николаевна Лузина, вела происхождение от забайкальских бурят. Ольга Николаевна была женщина болезненная, что отразилось и на здоровье сына.

«Начальное образование Н. Н. Лузин получил в частной школе гор. Томска, по окончании которой он был принят в Томскую губернскую гимназию еще до положенного возраста: ему едва минуло 8 лет. Среднее образование получил в гимназиях гор. Иркутска, куда отец Н. Н. Лузина уезжал на один год по делам службы, и затем снова в Томской гимназии». «Любимым чтением Н. Н. Лузина в эти годы были натуралисты и из романистов Жюль-Верн, влияние которого на интересы своего ума Н. Н. Лузин считал значительным. В старших классах гимназии Н. Н. Лузин читал очень много и в самых разнообразных направлениях; книги по чистой философии увлекали его, давая воображению обильную пищу. Но математики до самых последних лет гимназии Н. Н. Лузин недолюбливал и боялся, так как царившая тогда всюду

---

1) При составлении этой биографии была использована автобиография Н. Н. Лузина, охватывающая период его жизни до 1930 г. (В настоящее время эта автобиография находится в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.) Взятые из нее отрывки мы в нижеследующем тексте приводим в кавычках.

система преподавания ее была построена более на механической памяти: нужно было безукоризненно заучивать наизусть формулировки теорем и в точности памятью воспроизводить доказательства, по возможности не отступая от текста книги («Геометрия» Давыдова, «Алгебра» Киселева). Для Н. Н. Лузина это было трудно переносимой мукой, так как механической памятью он совершенно не обладал; по этой же причине для него были закрыты история, география и языки, требовавшие запоминания времени, места и форм. Его занятия по математике шли в гимназии хуже и хуже, так что он утратил репутацию хорошего ученика, и отец вынужден был взять для него «репетитора». К счастью, это был весьма талантливый студент только что тогда открывшегося в г. Томске Политехнического института; он произвел на Н. Н. Лузина сильнейшее впечатление тем, что показал ему математику не как систему механического заучивания, а как систему рассуждений, направляемую живым воображением. С тех пор он до некоторой степени утратил неприязнь к математике, перерешал самостоятельно все имевшиеся тогда задачники по элементарной математике и, естественно, в этом отношении стал в гимназии на первое место.

Из учителей Томской гимназии Н. Н. Лузин с теплым чувством вспоминал многих, особенно словесника П. М. Вяткина, «грека» К. А. Лалетина и математика В. К. Бобова, которые сердечно относились к молодежи. Из товарищей по гимназии Николай Николаевич был дружен с С. А. Вознесенским и Г. А. Бухвостовым, которые также увлекались естествознанием, особенно химией, астрономией и физикой, бывшей любимой наукой Н. Н. Лузина.

Н. Н. Лузин обладал очень слабым здоровьем и поэтому его почти все время переводили из класса в класс по хорошим отметкам без экзамена. По личному признанию Николая Николаевича это для него имело в дальнейшем самые плохие последствия, так как только при подготовке к серьезному испытанию можно научиться как следует работать, развить полную работоспособность, каковую средняя школа не смогла ему дать, щадя его слабое здоровье. Гимназию Н. Н. Лузин окончил в 1901 году и в том же году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Выбор этот был обусловлен желанием Николая Николаевича со временем сделаться инженером, для чего он хотел сперва заложить солидный математический фундамент, так как побаивался математики».

Московский университет переживал в эти годы период перелома. Если в восьмидесятых и девяностых годах даже такие передовые профессора, как знаменитый русский физик А. Г. Столетов, считали, что идеалом университетского преподавания является прочное и основательное усвоение утвержденных программ, если молодой и талантливый С. А. Чаплыгин ушел в середине девяностых годов из университета потому, что там нечего было читать, так как все обязательные курсы разобраны, то как раз к началу девятисотых годов начала все более и более проявляться совершенно другая тенденция: идеалом университетского преподавания стало вовлечение студентов в исследовательскую, научную работу. Как раз к этим годам относится зарождение знаменитой лаборатории П. Н. Лебедева, которая через десять лет превратилась во всероссийский признанный центр физической науки, а школа Лебедева дала десятки первоклассных физиков.

Те же тенденции, пока еще в робкой форме, проявились и у математиков. Как раз к первым годам текущего столетия относится начало чтения блестящим лектором, живым и красноречивым Б. К. Млодзеевским, факультативного курса по теории функций действительного переменного, по известному трактату Дини. В Московском университете впервые на лекциях Млодзеевского прозвучали такие термины, как «множества», «мощность», «счетные» (тогда говорили «счетовые») множества и т. д. Еще через год, в 1902 году, в число приват-доцентов вступил И. И. Жегалкин, и обо всех этих вещах вместе с «дедекиндовыми сечениями» услыхали уже не специалисты математики, а все студенты первокурсники математического отделения.

«В Московском университете Н. Н. Лузин сразу же попал под влияние блестящей плеяды профессоров, из которых прежде всего нужно указать геометров Б. К. Млодзеевского и К. А. Андреева, аналитика Н. В. Бугаева и физика Н. А. Умова.

Н. Н. Лузин сделал сначала попытку стать физиком, но в физической лаборатории Н. А. Умова тогда нехватило мест. Тем временем блестящие лекции по чистой математике стали производить на Н. Н. Лузина чарующее впечатление, и математика уже в первые же полгода ему внезапно открылась с совсем другой стороны, представ не как система заучивания сложившихся истин и решения бесчисленных задач с давно уже известными ответами, но как необъятное поле живого творчества. Николай Николаевич всегда сравнивал положение ученого, ведущего творческую жизнь, с состоянием Колумба, отправившегося искать новые страны и могущего каждый момент сделать крупное открытие. Пред ним математика открылась не как законченная наука, а как наука творческая, с далями, полными заманчивой тайны».

В Московском университете Н. Н. Лузин как одаренный студент сразу же обратил на себя внимание профессоров. Он, будучи еще студентом младших курсов, был избран секретарем студенческого Математического кружка, председателем которого был знаменитый механик Н. Е. Жуковский. В этом кружке разрабатывались вопросы, представлявшие в то время особую научную актуальность. Н. Н. Лузин и его университетский товарищ С. С. Бюшгенс были активными участниками этого кружка; у них преобладали в докладах вопросы обоснования математики, вопросы теории множеств, вопросы арифметизации математики, которые тогда привлекали внимание математиков, и начинавшие вызывать интерес вопросы аксиоматики. На заседания кружка часто приходили профессора Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров и только что вступивший в число приват-доцентов И. И. Жегалкин. Б. К. Млодзеевский огорчался тем, что студенты в кружке вместо изучения вопросов теории уравнений с частными производными, дифференциальной геометрии и т. п остановились на самых основных понятиях анализа и не идут дальше.

Теория функций тогда едва только начала проникать в Московский университет в виде отдельных докладов приват-доцентов, вызывая у одних глубокое изумление перед новизной идеи (учения об актуальной бесконечности), у других — чувство отвращения перед кажущимися экстравагантностями мышления.

В весеннем полугодии 1905 года, в связи с ростом революционного движения, университет забастовал; занятия прекратились. Революционные выступления рабочих и крестьян, восстания в армии и флоте, скандальные военные поражения царского правительства все более и более накаливали общественную атмосферу. Ни в какой мере не разрядили ее и половинчатые реформы правительства: булыгинская дума осени 1905 года. Университет шумел, как улей; занятия осенью 1905 года то начинались, то прекращались. Аудитории превратились в место сходок и массовой агитации.

В первые годы университетской учебы Н. Н. Лузин снимал номер в гостинице «Кокоревское подворье», там же, где жили и его родители. Теперь же, увлеченный бурным потоком общественного подъема, он тоже пытается принимать некоторое участие в революционном движении. В таких условиях проживание у всех на виду, в большой гостинице, было явно неудобным, и по рекомендации кого-то из товарищей Н. Н. Лузин снял комнату на Арбате, в семье вдовы врача Малыгина. Семья состояла из старушки-вдовы Малыгиной и ее дочери Надежды Михайловны. Дом был тихий, внимание полиции не привлекал, и в бурные дни октября 1905 года перед появлением виттевского манифеста «17-го октября» в комнате Н. Н. Лузина не только ночевали нелегальные лица, но под его кроватью одно время был даже склад бомб...

Как известно, манифест «17-го октября» не только не разрядил обстановки, но усилил общее недовольство и революционное напряжение. Университет, возобновивший работу с осени 1905 года, опять решительно забастовал. В стране шла подготовка к вооруженному восстанию, — было совершенно ясно, что ожидать возобновления занятий в университете в ближайшие месяцы не приходится.

Все это время Н. Н. Лузин не прерывал занятий под руководством профессора Д. Ф. Егорова, проявлявшего большое внимание к его научной работе. При создавшейся обстановке Д. Ф. Егоров посоветовал Н. Н. Лузину во время перерыва в университете поехать учиться в одном из заграничных университетов; Д. Ф. Егорову удалось найти другого студента, который бывал за границей и немного владел французским и немецким разговорным языком [1]), и в первых числах декабря Н. Н. Лузин и его спутник уехали в Париж.

В Париже Н. Н. Лузин пробыл до конца летнего семестра 1906 года, и все эти полгода пребывания за границей прошли в упорной и систематической работе. Лекций он слушал

---

[1]) В. В. Голубев.

немного. В Сорбонне он слушал Бореля, который читал теорию целых функций, лекции знаменитого Пуанкаре по разложениям в ряды пертурбационных функций небесной механики. По словам Н. Н. Лузина лекции Пуанкаре производили на него потрясающее впечатление вследствие живого творчества во время самого процесса лекций. Кроме того, в Collège de France Н. Н. Лузин слушал Адамара, который читал теорию распространения волн. Иногда ходил на лекции Дарбу по теории поверхностей. Но он упорнейшим образом работал над изучением математической литературы в библиотеке Сорбонны, в Национальной библиотеке и в библиотеке Св. Женевьевы. Изучению научных вопросов посвящалось буквально все время. В размышлениях над научными вопросами Н. Н. Лузин просиживал целые ночи; часто поздно восходящее зимнее солнце заставало его еще за работою.

Несомненно, что в это время у Н. Н. Лузина зрели те идеи, которые много спустя приобрели законченную форму в его замечательной диссертации. Вопросы теории множеств, теории функций действительного переменного занимали во всей этой работе основное место.

Жил он в это время очень скромно. Обедал в русской студенческой столовой на rue St. Jacques и на обед полагалось 40 сантимов.

В театры не ходил — было не по средствам. Единственным развлечением было посещение по праздникам замечательных парижских музеев, картинных галлерей Лувра и музея современной живописи и скульптуры Франции в Люксембургском дворце. Только изредка он позволял себе под праздник пойти в «танцульку», и за двадцать сантимов полюбоваться, как пляшут и веселятся французские студенты и прочее население Латинского квартала.

Н. Н. Лузин вернулся в Россию летом 1906 года. В конце того же года он сдал государственный экзамен и был оставлен Д. Ф. Егоровым при университете «для приготовления к профессорскому званию».

В 1907 году Н. Н. Лузин женился на Надежде Михайловне Малыгиной.

За время обучения в университете Н. Н. Лузиным было прочитано и изучено много труднейших и глубоких трактатов по самым различным областям математики, так что он был хорошо подготовлен к магистерским экзаменам еще на студенческой скамье. «Время же оставления при университете он употребил на слушание лекций на медицинском факультете, куда намеревался поступить, чтобы впоследствии итти в народ, но потом был вынужден оставить этот план, так как работа в анатомическом театре оказалась ему не по силам. Тогда он перешел к слушанию лекций на философском отделении историко-филологического факультета, который через год оставил, потому что лекции по философии не давали указания на возможность творчества».

После этого Н. Н. Лузин вернулся к математике. К 1909 году он сдал так называемые магистерские экзамены и получил существовавшее тогда звание «магистранта» вместе с правом преподавания в высшей школе по прочтении двух пробных лекций, одной по собственному выбору, второй по назначению факультета. Н. Н. Лузин прочел пробные лекции и предполагал с осени 1910 года читать в университете курс теории функций действительного переменного, но оказалось, что такой курс уже был объявлен С. С. Бюшгенсом, который держал экзамены одновременно с Н. Н. Лузиным; тогда по совету Б. К. Млодзеевского Н. Н. Лузин объявил курс по теории интегральных уравнений. Читать этот курс ему не пришлось, так как в это время он получил от факультета заграничную командировку в Геттинген и Париж для усовершенствования в математических науках.

Осенью 1910 года Н. Н. Лузин уехал в Геттинген.

В Геттингене Николай Николаевич работал, «отдаваясь главным образом самостоятельным изысканиям в теории тригонометрических рядов; к этому его влекли многие загадочные факты этой теории и богатейшие средства библиотеки Геттингена, дававшие ему неисчерпаемую возможность легко изучить всевозможные вопросы». Лекции профессоров он мало посещал, так как при его крайне самостоятельном мышлении они ему ничего не могли дать. Напротив, личное общение с учеными давало ему очень много, так как при этом выявлялось отношение того или другого ученого к различным математическим проблемам и выяснялся его творческий путь. Эти встречи Николай Николаевич ценил чрезвычайно высоко. «В Геттингене Н. Н. Лузин написал и по настоянию профессора Ландау опубликовал свою первую работу (в 1911 году, т. е. 28 лет).

До сих пор он, не будучи уверен в своих силах, остерегался выступать в печати и отказался, по этой же причине, писать сочинение на медаль на предложенную тему в Москве. В 1912 году Н. Н. Лузин переехал в Париж». Здесь он систематически работал в семинаре Адамара и завел личное знакомство с крупнейшими математиками (Пикар, Адамар, Борель, Лебег, Данжуа и ряд других).

Яркое представление о научных интересах Н. Н. Лузина в те годы дает следующий отрывок из отчета, представленного им в Министерство народного просвещения.

«Пробыв в заграничной командировке для научных занятий два года и получив продолжение этой командировки на третий год, сроком с 1/I—1913 по 1/I—1914 года, я в марте 1913 года отправился в Париж к началу весеннего семестра для продолжения научных занятий.

Из лекций, прослушанных мною в этом семестре, наиболее интересными лично для меня были лекции Пикара, читавшего избранные главы из теории функций комплексного переменного. В них лектор, между прочим, изложил конформное изображение многосвязных областей, дав при этом результат А. Пуанкаре и указав на позднейшие результаты по этому вопросу.

Следующий зимний семестр 1913 года и весенний семестр 1914 года я также провел в Париже, слушал лекции профессора Бохера, приглашенного в Сорбонну из Америки и читавшего о новых исследованиях в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, лекции Э. Пикара, продолжавшего излагать избранные главы из теории функций комплексного переменного и давшего некоторые интересные теоремы относительно аналитических функций двух независимых комплексных переменных, и лекции Бореля относительно обобщения понятия аналитической функции. Наиболее интересными лично для меня были лекции Бореля, в которых лектор дал новое, обобщенное определение понятия аналитической функции и в ярких и выпуклых чертах обрисовал недостатки классического определения Вейерштрасса аналитической функции, указав на известный формализм последнего.

Кроме того, посещал семинарий, устроенный Адамаром в Collège de France, и заседания двух конгрессов: математически-педагогического и математически-философского, открывшихся в Париже весною.

Вместе с тем я продолжал свою личную работу в области теории функций действительного переменного».

Приведенные далее сведения о полученных Н. Н. Лузиным научных результатах заслужили самую высокую оценку в следующем заявлении профессора Д. Ф. Егорова:

«Представляя при сем отчет о заграничной командировке приват-доцента И. М. У. Н. Н. Лузина, честь имею сообщить факультету, что по моему мнению отчет этот свидетельствует о факте, который известен и из других источников, а именно, что в лице Н. Н. Лузина мы имеем уже сложившегося талантливого ученого, получившего много важных и интересных результатов по теории интегрирования, теории тригонометрических рядов, теории функций действительного переменного...

Из отчета видно, что у Н. Н. Лузина в сущности вполне готов материал и для работ, которые могли бы послужить для получения научных степеней магистра и доктора, и только увлечение новыми и новыми результатами помешало ему до сих пор написать в окончательном виде диссертацию, которую, можно надеяться, он представит в ближайшем будущем.

Среди результатов, упоминаемых автором в отчете, мое внимание останавливает последний (заметка в Comptes Rendus «Sur un problème du M. Baire»). Мне думается, что на этом пути Н. Н. Лузин внесет что-либо новое и интересное в фундаментальную задачу о мощности континуума.

Я бы полагал признать отчет и занятия Н. Н. Лузина заслуживающими самой высокой оценки.

26 II 1914 г. Орд. проф. Д. Ф. Егоров»

Статьи, напечатанные Н. Н. Лузиным уже в этот первый период его научного творчества, ярко свидетельствуют и об исключительной самостоятельности его научного творчества и об очень большом напряжении его работы. Здесь, несомненно, повторялось в еще более яркой форме то необычайное вдохновение, которое охватывало Н. Н. Лузина в периоды продуктивной творческой работы. В такие периоды работа захватывала его целиком; в работе он не различал ни дня, ни ночи, на него находил какой-то порыв творческой «одержимости», который заставлял его забывать обо всем, что выходило за круг овладевших им научных идей.

За эти годы Н. Н. Лузиным была проделана огромная работа и, в частности, было напечатано десять научных работ в лучших русских и заграничных научных журналах.

Напряженная работа по изучению математической литературы дала ему широкие научные знания, подробнейшее знакомство с научною литературою; упорное размышление над труднейшими вопросами теории функций дало ему материал для его замечательной диссертации.

К осени 1914 года Н. Н. Лузин вернулся в Москву и приступил к преподаванию в университете на положении приват-доцента.

Десятилетие с 1914 по 1924 год было периодом блестящего расцвета научной и педагогической деятельности Н. Н. Лузина. Факультетом ему было поручено чтение общего курса аналитической геометрии, а затем высшей алгебры. Но не в этом был центр тяжести его работы. Из года в год неизменно читал он факультативный курс по теории функций действительного переменного и вел специальный исследовательский семинар. Именно этот читаемый из года в год специальный курс и сопровождающий его семинар и явились центром, из которого выросла московская школа теории функций — замечательный памятник славной научной деятельности Н. Н. Лузина.

Среди профессоров Московского университета едва ли можно указать кого-нибудь, чьи лекции пользовались бы таким исключительным успехом, как лекции Н. Н. Лузина. А, ведь, среди профессоров были такие блестящие лекторы, как Б. К. Млодзеевский, химик А. Н. Реформатский, астроном В. К. Церасский и ряд других. Естественно возникает вопрос, чем объяснить этот совершенно исключительный успех.

Установился обычай считать, что задачею лекций является систематическое изложение известного комплекса знаний. Чем этот комплекс больше, тем содержательнее лекции; чем в научном смысле строже изложение, тем выше уровень лекций. Согласно этому взгляду задача книги или печатного курса и лекций одна и та же. Единственным активным действующим лицом является при этом лектор; аудитория только пассивно воспринимает изложенное.

В противовес такому взгляду можно заметить, что научная истина поражает своею строгою законченностью, но и отталкивает своею безжизненною сухостью. Ведь эти законченные на данном этапе развития формы научной истины исторически сложились из бесчисленных исканий, заблуждений, в результате споров, столкновений мнений; наука жила и продолжает жить полною и напряженною жизнью неустанного труда бесчисленных творцов и строителей научного здания.

А если так, то не правильнее ли ввести учащихся в самую лабораторию научных исканий, показать все возникающие трудности, заставить аудиторию пережить всю горечь ошибок и разочарований и познать всю радость нахождения научной истины? В своем преподавании Н. Н. Лузин и попытался добиться того, чтобы излагаемый материал давался не в законченном, законсервированном виде, а в напряжении его создания, как говорят, in statu nascendi. При таком подходе главным действующим лицом на лекции и на семинаре является вся аудитория: она переживает муки научного творчества, она испытывает радость победы. Лектор — это искусный кормчий, который умело направляет аудиторию.

Лекции Н. Н. Лузина были менее всего дидактичны, менее всего лектор преподносил в законченном виде тот или другой отдел науки, но он непрерывно открывал перед аудиторией все новые и новые горизонты, непрерывно будировал мысль слушателей, непрерывно закалял аудиторию в преодолении трудностей, которыми так богато научное изыскание. Н. Н. Лузин не был одинок в своих методических идеях, таким же путем в несколько иной области, в области лабораторной, экспериментальной работы, шел и П. Н. Лебедев, тем же путем воспитывал учеников в своих лабораториях и Н. Е. Жуковский. Новым и совершенно оригинальным у Н. Н. Лузина было то, что этот метод он применил не только в своих семинарах, что было сравнительно понятно и легко, но и в своих лекциях, что было неизмеримо труднее.

Легко понять, какой успех могло иметь такое преподавание, в особенности если лектором был ученый, который сам находился в расцвете своего научного творчества. А как раз в этот период научное творчество Н. Н. Лузина достигло своего полного развития.

По возвращении из-за границы Н. Н. Лузин заканчивает, дополняет и приводит в систему огромный научный материал, который и составил содержание его капитального труда «Интеграл и тригонометрический ряд». Законченная в 1915 году эта замечательная работа была представлена как диссертация на соискание ученой степени магистра чистой математики. Защита ее в Ученом совете Физико-математического факультета 27 апреля 1916 года превратилась в блестящий научный триумф Н. Н. Лузина. В отзывах официальных оппонентов, профессоров Д. Ф. Егорова и Л. К. Лахтина, и в ряде других выступлений были отмечены совершенно исключительные достоинства работы. Совет единогласно постановил присудить Н. Н. Лузину степень доктора чистой математики, минуя обычную степень магистра, случай, — чрезвычайно редкий в практике русских университетов [1]).

Не меньшим напряжением научного творчества Н. Н. Лузина ознаменованы и последующие годы, причем наряду с большим количеством работ самого Николая Николаевича начинают все чаще и чаще появляться и работы его учеников.

Н. Н. Лузин обладал исключительным талантом вовлекать в научное творчество своих учеников. Как мы видели, самая форма преподавания носила у него такой характер, что, в сущности, вообще терялась грань между учением и научным исследованием. Но, кроме этого, он умел с исключительным успехом своим личным воздействием внушить учащимся

---

[1]) В архиве Московского университета имеются следующие сведения об этой защите.

«13 мая 1916 г. в Совете Университета

Слушали представление физ.-матем. фак-та от 13 мая:

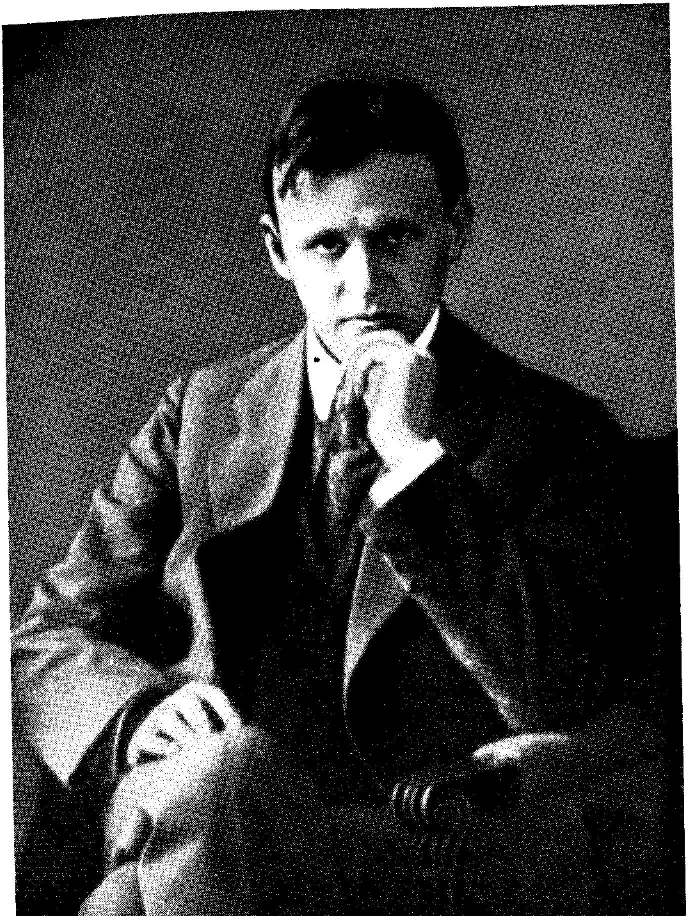
27-го апреля в заседании факультета происходила публичная защита Н. Н. Лузиным диссертации на степень магистра чистой математики под заглавием «Интеграл и тригонометрический ряд».

Оффиц. оппоненты: проф. Д. Ф. Егоров и засл. проф. Л. К. Лахтин.

Защита была признана удовлетворительной и Н. Н. Лузин достойным степени доктора чистой математики.

Факультет ходатайствует об утверждении Н. Н. Лузина в степени доктора чистой математики.

Постановили на основании ст. 30, § 1, стр. 3 Устава Университета утвердить магистранта Н. Н. Лузина в степени доктора чистой математики ввиду того, что представленная им диссертация отличается особенными научными достоинствами, и выдать ему надлежащий диплом».



Н. Н. ЛУЗИН в 1917 году

мысль, что каждый из них не только может, но и должен сам творить науку.

Для самого Николая Николаевича наука была главным содержанием жизни и этому же отношению к науке, как к самому главному, чему должны быть отданы все силы, он учил и своих учеников. Настойчиво внушал он, что занятие наукой есть трудное, тяжелое дело, требующее огромных усилий, большой настойчивости.

Лузин не мог работать «по часам»; научная идея полностью овладевала им, и эта «одержимость» чрезвычайно ярко сказывалась во всем его поведении. И своим ученикам он систематически внушал мысль, что научная работа может итти успешно только тогда, когда мысль непрерывно и упорно работает над научным вопросом, что научную работу нельзя вести «по часам», оставляя ее так, как снимают рабочий халат, уходя с работы. Лекции Николая Николаевича не кончались со звонком; научная беседа продолжалась и в перерыв между лекциями в коридоре, а весьма часто слушатели провожали его гурьбой по окончании лекций до его квартиры, продолжая напряженное обсуждение поднятых на лекции научных вопросов. Студенты, работавшие в семинарах у Н. Н. Лузина, и его ученики часто собирались у него на квартире для обсуждения научных докладов на семинарах, для бесед по проработанной научной литературе; образовалась дружная семья молодежи, охваченной горячим интересом к разработке научных вопросов. Это сплоченное товарищество начинающих ученых, группировавшихся вокруг Николая Николаевича, получило среди студентов шутливое название «Лузитания».

Из учеников Н. Н. Лузина, работавших под его руководством в первые годы его педагогической деятельности в Московском университете, многие выросли впоследствии в крупных ученых; среди них прежде всего надо указать М. Я. Суслина, Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, П. С. Александрова, П. С. Урысона, В. Н. Вениаминова, В. С. Федорова.

Параллельно с Н. Н. Лузиным, но под его непосредственным влиянием работали также его младшие товарищи: В. В. Степанов, И. И. Привалов, разрабатывавшие все новые и новые вопросы теории функций комплексного и действительного переменного.

Годы 1914—1918 были годами расцвета этого замечательного научного коллектива, быстро росшего под талантливым руководством Н. Н. Лузина. Вызванная империалистической войной разруха, естественно, сказалась на работе Н. Н. Лузина, как и на всей жизни Московского университета. Затруднения с продовольствием и отсутствие топлива, резко проявившиеся в 1918 году, повели к тому, что занятия в Университете свертывались, студенты разъезжались на родину, где экономические условия были лучше, чем в Москве. При таких условиях значительная часть профессуры искала приложения своих сил в других городах, где после Великой Октябрьской социалистической революции благодаря мероприятиям Советского правительства быстро росла сеть высших учебных заведений. В самые тяжелые годы разрухи, вызванной последствиями войны и интервенции, Н. Н. Лузин с рядом других профессоров Московского университета работает профессором в Иванове, крупном текстильном центре, где в 1918 году был открыт Политехнический институт; вместе с Николаем Николаевичем там же работали и некоторые из его учеников.

Работа в Иванове не прекращала работы Н. Н. Лузина и в Университете в Москве, куда он приезжал на более или менее длительные сроки. Всякий раз весть о приезде Лузина в Москву с чрезвычайной быстротой распространялась среди его московских учеников, и попрежнему бурлила жизнь в «Лузитании», работал семинар, чуть ли не каждый вечер в гостеприимной квартире Николая Николаевича собиралась московская математическая молодежь, шло оживленное обсуждение математических вопросов, кипела творческая научная мысль.

К этому же периоду относятся первые работы Н. Н. Лузина по прикладным вопросам. С. А. Чаплыгин привлек его к работе в Научно-экспериментальном институте путей сообщения.

Период с 1916 по 1920 год был периодом первых триумфов школы Н. Н. Лузина. Были получены замечательные результаты Д. Е. Меньшовым, М. Я. Суслиным, П. С. Александровым, А. Я. Хинчиным. Москва становится общепризнанным центром исследований в области теории функций. В диссертации И. И. Привалова методы теории функций действительного переменного прилагаются к классическим вопросам теории функций комплексного переменного. Идеи Н. Н. Лузина начинают проникать и в Петроград, где привлекают внимание Н. М. Гюнтера и Г. М. Фихтенгольца. В это же время Московская математическая школа понесла и первую тяжелую утрату: умер от тифа М. Я. Суслин, который вместе с Н. Н. Лузиным и П. С. Александровым явился одним из создателей целого направления — дескриптивной теории функций.

Идеи Н. Н. Лузина распространились и за рубежом, в особенности в Польше. Этому способствовал В. К. Серпинский, который провел первые годы мировой войны в Москве, работая под непосредственным и сильным влиянием Лузина. В дальнейшие годы идеи школы Лузина стали ведущими в польской математике, и их влияние сильно чувствуется и сейчас.

В июне 1921 года исполнилось сто лет со дня рождения одного из величайших русских математиков П. Л. Чебышева. Академия наук и Петроградский университет ознаменовали эту дату научной конференцией, на которой Н. Н. Лузин сделал один из основных докладов. На эту конференцию, продолжавшуюся с 9 по 15 июня, вместе с Николаем Николаевичем выехали и его уже тогда многочисленные ученики; так началось более близкое знакомство петроградских математиков с московской математической школой, созданной Н. Н. Лузиным.

С победою на фронтах гражданской войны и с изгнанием интервентов нормальная жизнь в Москве и нормальная работа в Московском университете быстро восстановились; в 1922 году Н. Н. Лузин оставил работу в Ивановском политехническом институте и вернулся в Москву.

С возвращением Н. Н. Лузина в Москву обычная учебная и научная жизнь созданной им школы вошла в нормальное русло; попрежнему систематически работал его замечательный семинар по теории функций, напряженно шла творческая научная жизнь, росла талантливая молодежь.

Начало двадцатых годов было периодом нового расцвета школы Н. Н. Лузина. Его учениками становятся: Л. А. Люстерник, Н. К. Бари, М. А. Лаврентьев, Л. Г. Шнирельман, П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, В. И. Гливенко и другие. Среди них были люди с большими научными дарованиями и ярко выраженной научной индивидуальностью.

Младшие товарищи и первые из учеников Н. Н. Лузина: И. И. Привалов, В. В. Степанов, П. С. Александров, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин, Д. Е. Меньшов в это время уже сами становятся крупными учеными и руководителями молодежи. У них появляются собственные ученики — «научные внуки» Николая Николаевича. Появляются новые школы. Истоком одной из них следует считать топологический кружок, руководимый П. С. Александровым и П. С. Урысоном, в котором работали как прямые ученики Николая Николаевича, так и его «научные внуки» (А. Н. Тихонов, В. В. Немыцкий, Н. Б. Веденисов, Л. А. Тумаркин и другие).

А. Я. Хинчин, начиная с 1922—1923 гг., стал прилагать теоретико-функциональные методы к теории чисел и получил ряд основных результатов в области так называемой метрической теории чисел. Его первые работы по теории вероятностей также носят теоретико-множественный характер. Впоследствии (в 1929 г.) Л. Г. Шнирельман перенес метрические понятия на арифметические последовательности и получил ряд глубоких результатов в теории чисел. И. И. Привалов как в совместной работе с Н. Н. Лузиным, так и независимо от него, произвел ряд важных исследований по граничным свойствам аналитических функций. Несколько позже начал систематическую работу в теории аналитических функций ученик Н. Н. Лузина М. А. Лаврентьев, вокруг которого впоследствии, в свою очередь, собрался большой коллектив молодых математиков.

Д. Е. Меньшов получил ряд фундаментальных результатов как в области действительного переменного, главным образом по теории ортогональных систем, так и в области комплексного переменного. В. В. Степанов перенес теоретико-функциональные методы в теорию почти-периодических функций.

В двадцатых же годах появились работы Л. А. Люстерника, а затем И. Г. Петровского по проблеме Дирихле, которыми началась работа московской математической школы по краевым задачам уравнений в частных производных.

Интересы самого Н. Н. Лузина в начале двадцатых годов лежат, главным образом, в области дескриптивной теории функций. Здесь он становится основоположником новой по существу математической дисциплины. Он не только получил в этой области фундаментальные результаты, но и предпринятые им исследования затронули сущность основ теории множеств. Он впервые высказал идеи о границах теоретико-множественного мышления. Заложенные им принципы и установки являются программой, послужившей для дальнейшей плодотворной работы в области современной теории функций. Эта программа далеко еще не выполнена, но получаемые результаты целиком подтверждают глубокие предвидения Н. Н. Лузина.

В середине двадцатых годов Н. Н. Лузин написал целый ряд работ по дескриптивной теории множеств и, в частности, в 1926 году большой мемуар об аналитических и проективных множествах.

Весной 1927 года в Москве состоялся Всероссийский съезд математиков. На этом съезде в известном смысле были подведены итоги огромной работы Н. Н. Лузина по созданию московской математической школы. Многие из учеников Н. Н. Лузина выступили здесь как крупные ученые, руководившие важными направлениями научной работы в советской математике. Сам Николай Николаевич сделал на этом съезде один из основных докладов: «О современных задачах теории функций действительного переменного». В октябре 1927 года он участвовал на съезде польских математиков во Львове.

В августе 1928 года на Международном математическом съезде в Болонье Н. Н. Лузин прочел доклад «О путях теории множеств», а затем до лета 1930 г. жил в Париже, где работал над своей книгой «Leçons sur les ensembles analytiques». В этой книге, вошедшей в коллекцию монографий по теории функций, включающей труды крупнейших ученых, он подытожил результаты свои и своих учеников (М. Я. Суслина, П. С. Александрова, П. С. Новикова, Л. В. Келдыш, Е. А. Селивановского) по теории аналитических и проективных множеств, составляющей одно из крупнейших достижений московской математической школы.

В эти годы крупнейшие научные заслуги Н. Н. Лузина и руководимой им школы получили мировое признание. Н. Н. Лузин получает почетное звание действительного члена Краковской Академии наук, звание почетного члена Математического общества в Калькутте, звание почетного члена

Бельгийского математического общества в Брюсселе. На конференции польских математиков во Львове в 1927 году он играет ведущую роль; на Международном съезде математиков в Болонье в 1928 году он избирается вице-президентом. В 1927 году он избирается членом-корреспондентом, а в 1929 году — действительным членом (академиком) Академии наук СССР, сначала по кафедре философии, а затем по кафедре математики.

В 1930 году Н. Н. Лузину было поручено заведывание отделом теории функций Физико-математического института имени В. А. Стеклова при Академии наук СССР; в связи с этим он часто ездил в Ленинград. Связь с Институтом стала более прочной с 1934 года, когда Академия наук и ее Математический институт были переведены в Москву. Н. Н. Лузин продолжал руководство отделом теории функций до конца жизни; все сотрудники этого отдела являются его ближайшими учениками.

В тридцатых годах глубокие математические идеи, которые с таким успехом разрабатывались в ближайшем окружении Николая Николаевича, привели в трудах его учеников и продолжателей к замечательным результатам в самых различных областях математики, к широким научным направлениям в области качественных методов, в области теории вероятностей и ее разнообразнейших приложений, в вопросах гидродинамики и ее технических приложений. А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров создали московскую школу теории вероятностей, занимающую теперь в мировой науке одно из первых мест. М. А. Лаврентьев и М. В. Келдыш свои глубокие исследования в области теории аналитических функций применили к гидродинамике и аэродинамике. В. В. Степанов вовлек группу ученых в работу по качественной теории дифференциальных уравнений. Начинаются блестящие работы И. Г. Петровского по теории систем уравнений в частных производных. Во всех этих исследованиях применялись и углублялись методы Н. Н. Лузина.

Продолжающаяся работа в области метрической теории функций привела к созданию большой школы функционального анализа.

Сам Н. Н. Лузин в это время имел разнообразные научные интересы. С одной стороны, он продолжал в эти годы, как и вообще до конца жизни, размышлять над глубокими и трудными проблемами дескриптивной теории множеств и обоснования математики. В это время с ним оказался особенно близок более узкий круг математиков (П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунов, Е. А. Селивановский), работавших по проблематике, тесно связанной с интересами Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории функций. С другой стороны, Н. Н. Лузин, владея творчески и методами классического анализа, с успехом начал применять их к прикладным вопросам. Так, он занимался оценкой сходимости метода приближенного решения дифференциальных уравнений, предложенного С. А. Чаплыгиным; по предложению Сейсмологического института провел критический анализ методов предсказания погоды на основе метеорологических наблюдений за большой промежуток времени[1]).

В 1938 году Н. Н. Лузин начал работать в области дифференциальной геометрии и, в частности, занялся проблемой изгибания на главном основании. В этой классической области, которой, начиная с шестидесятых годов прошлого века, было посвящено много работ русских и иностранных математиков, он получил решающие результаты.

В тридцатых и сороковых годах, кроме Института им. В. А. Стеклова, Н. Н. Лузин работал и в других институтах Академии наук: в Сейсмологическом и в Институте автоматики и телемеханики. В этом последнем он прилагал к прикладным темам теорию дифференциальных уравнений.

В эти годы работы в институтах Академии наук Н. Н. Лузин уже не был связан с университетом систематически. Однако иногда он возобновлял там работу, и это неизменно оказывало влияние на молодых математиков, отталкивавшихся в своих исследованиях от его лекций и семинаров. Например, последний курс Н. Н. Лузина «Избранные главы теории функций комплексного переменного», прочитанный им в 1945 году, вызвал среди студентов интерес к теории функций двух действительных переменных, и с тех пор в стенах

[1]) Эта работа Н. Н. Лузина, содержавшая ценные математические результаты по представлению эмпирических кривых с помощью тригонометрических полиномов, к сожалению, осталась неопубликованной.

Московского университета целая группа молодых математиков, среди которых в первую очередь следует назвать А. С. Кронрода, разрабатывает эту новую и увлекательную область.

Хотя, начиная с 1930 года, Н. Н. Лузин уже сам мало преподавал, он всегда интересовался вопросами преподавания и много времени уделял писанию учебников. Сначала он редактировал перевод курса дифференциального и интегрального исчисления американского математика Грэнвиля. Этот курс благодаря переработкам, которым его подверг Н. Н. Лузин, выдержал семнадцать изданий и был широко распространен в высших технических учебных заведениях. В последних изданиях он уже превратился в совершенно оригинальное сочинение. Эта книга, как и все написанное Н. Н. Лузиным, отличается необычайной живостью и ясностью изложения, красочностью языка; автор не только доказывает, но и в живой образной форме разъясняет содержание курса.

В 1940 году Н. Н. Лузин написал курс теории функций действительного переменного (переизданный затем в 1949 году) Достаточно сравнить характер изложения в этой книге с аналогичными сочинениями на русском и иностранном языках, чтобы убедиться в оригинальности и своеобразии идей Н. Н. Лузина, в проявляющемся здесь, как и ранее в его лекциях, умении увлечь читателя, показать ему не только законченные результаты, но и процесс их создания.

Н. Н. Лузин проявлял живой интерес и к истории математики. Его перу принадлежат прекрасные статьи о Ньютоне (см. Н. Н. Лузин ([15]), ([16])), об Эйлере (см. Н. Н. Лузин ([17])), очень интересная статья, касающаяся развития понятия функции (см. Н. Н. Лузин ([13])) и статья о дифференциальном исчислении (Н. Н. Лузин ([14])).

Излагая биографию Н. Н. Лузина, мы не можем говорить о нем только как о математике. Он много читал и размышлял над самыми разнообразными вопросами физики, естествознания, истории. Он любил и хорошо знал русскую литературу, живо интересовался архитектурой и живописью, неизменно посещал музеи и выставки, во время пребывания за границей объездил даже ряд маленьких итальянских городов, изучая произведения искусства. Николай Николаевич имел свои глубокие и оригинальные взгляды на литературу и искусство. Это был человек исключительного духовного богатства.

Последние годы жизни научной работе Н. Н. Лузина мешало его болезненное состояние: он страдал сердечными припадками. Однако он продолжал упорно работать и, в частности, вернулся к исследованиям по дифференциальной геометрии. Смерть не дала ему возможности закончить этот труд. Среди бумаг, которые остались после его кончины, имеется большая еще не разобранная рукопись, относящаяся к этим вопросам. Последние страницы ее писались буквально в последние дни жизни Николая Николаевича.

28 февраля 1950 года Н. Н. Лузин неожиданно скончался после острого сердечного припадка.

Образ этого замечательного ученого, учителя целого поколения математиков, глубокого мыслителя оставит неизгладимый след в советской математической культуре.

О КНИГЕ Н. Н. ЛУЗИНА «ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД» И ЕГО РАБОТАХ ПО МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Н. К. БАРИ и Л. А. ЛЮСТЕРНИК

Научная деятельность Н. Н. Лузина относилась к разным областям математики: метрической теории функций действительного переменного, дескриптивной теории множеств, теории функций комплексного переменного, дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, вопросам численного решения математических задач.

Первый период работы Н. Н. Лузина был посвящен вопросам метрической теории функций, и центральной его работой в этом направлении была публикуемая сейчас вновь диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд».

На протяжении истории анализа математикам часто приходилось возвращаться к критическому пересмотру его основ: развитие конкретного материала перерастало рамки сложившихся ранее концепций и точек зрения на основные понятия анализа. В этом разрезе особенно поучительна история теории тригонометрических рядов и ее влияния на эволюцию основных понятий анализа: функции, интеграла. Достаточно вспомнить знаменитую дискуссию Эйлера, Даламбера и других математиков XVIII века о том, чтó считать «произвольной функцией», дискуссию, вызванную появлением тригонометрических рядов как орудия решения математических задач[1]). В тридцатых годах прошлого века, в связи с открытием

[1]) См., например, статью Н. Н. Лузина «Функция» (БСЭ, т. 59, 1934 г.).

факта изображения рядами Фурье не только непрерывных, но и разрывных функций, был снова пересмотрен вопрос о понятии функции. У Лобачевского, у Дирихле, именно в связи с работами по тригонометрическим рядам, возникает концепция функции как соответствия между элементами двух числовых прямых. Поскольку коэффициенты Фурье функции представляются через интегралы от нее и поскольку широкие классы разрывных функций представимы тригонометрическими рядами, которые естественно считать рядами Фурье для этих функций, возник вопрос об определении понятия интеграла для таких функций. В работе Римана «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» [1]) дается обобщение понятия интеграла на некоторый класс разрывных функций. И в том пересмотре основных концепций анализа, который имел место в начале текущего столетия, вопросы теории тригонометрических рядов играли выдающуюся роль. Не случайно поэтому появление фундаментальной работы Н. Н. Лузина под названием «Интеграл и тригонометрический ряд». В этой работе, между прочим, подчеркнута историческая связь между теорией тригонометрических рядов и понятиями функции и интеграла [2]).

Основную установку этой работы лучше всего охарактеризовать словами самого автора [3]):

«Имеют ли результаты теории функций существенное значение для других дисциплин и, прежде всего, для классического анализа? Нужно иметь в виду, что при современном состоянии знания метод классического анализа, метод употребления аналитических выражений, лежит в основе почти всякой математической дисциплины; поэтому та теория, которая не соприкасается, прямо или косвенно, с аналитическими выражениями, такая теория неизбежно занимает изолированное положение среди других ветвей математики.

Поэтому, если не хотят, чтобы теория функций действительного переменного была теорией, замкнутой в себе и не оказывающей влияния на другие математические теории, нужно

---

[1]) См. Риман ([1]), стр. 225.
[2]) См. Введение и § 80—82.
[3]) См. «Интеграл и тригонометрический ряд», стр. 4 (в настоящем издании стр. 50—51).

поставить в связь аналитические выражения с одной стороны, определения и понятия теории функций с другой стороны».

В связи с такой установкой Н. Н. Лузин выделяет две основные задачи: «Дано структурное свойство функции. Найти аналитические выражения, изображающие эту функцию». И задачу, обратную первой: «Дан класс аналитических выражений. Найти необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемых этим классом аналитических выражений» (последнюю задачу Н. Н. Лузин считает особенно существенной).

Тем классом аналитических выражений, которые с этой точки зрения изучаются в работе, является класс тригонометрических рядов, и в первую очередь, конечно, рядов Фурье. «Формулы Фурье имеют в виду решение следующей задачи анализа: зная сумму тригонометрического ряда, определить его коэффициенты» [1]). Но, как замечает Н. Н. Лузин [2]), «Понятие ряда Фурье не есть понятие вполне определенное и устойчивое, но всецело зависит от понятия определенного интеграла. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла..., мы расширяем все более и более класс тригонометрических рядов Фурье... Отсюда естественно найти наиболее общее определение понятия интеграла с тем, чтобы расширить до возможных пределов класс тригонометрических рядов Фурье. Этим задача о тригонометрических рядах, их сходимости, суммируемости и свойствах функций, изображаемых ими, тесно связывается с задачей о нахождении возможно более общего определения понятия интеграла».

Дадим сейчас краткое изложение основных результатов Н. Н. Лузина в обоих направлениях: общей метрической теории функций и, в частности, теории интеграла, и в связанной с ней теории тригонометрических рядов. Мы их изложим по главам настоящей книги, добавляя каждый раз относящиеся к ее содержанию результаты Н. Н. Лузина, которые в нее не вошли.

Первая глава посвящена общим вопросам структуры измеримых множеств и функций. Основным ее результатом

---

[1]) «Интеграл и тригонометрический ряд», стр. 7 (в настоящем издании см. стр. 54).

[2]) Там же, стр. 6 и 7 (в настоящем издании см. стр. 54).

является так называемое C-свойство, ныне вошедшее во все учебники теории функций: всякую измеримую функцию, конечную почти всюду на некотором отрезке, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала непрерывной на всем отрезке.

Это характеристическое свойство измеримых функций имеет исключительное значение и нашло себе приложения не только в теории функций действительного и комплексного переменного, но и в других вопросах анализа, например в теории почти-периодических функций. Простым следствием основного результата Н. Н. Лузина является ряд теорем, связывающих структуру функции с изображающим ее аналитическим аппаратом (например, теорема Фреше, теорема Витали и др.).

Но, что самое главное, C-свойство позволило Н. Н. Лузину дать полное решение ряда основных задач теории функций: задачи об отыскании примитивной функции, задачи об изобразимости функции тригонометрическим рядом и задачи о нахождении гармонической функции, голоморфной внутри круга и имеющей на окружности заданные значения. Об этом мы будем говорить подробнее дальше.

Заметим еще, что, исходя из C-свойства, можно естественно построить теорию интеграла Лебега, как это и было сделано Н. Н. Лузиным в его неопубликованных лекциях в 1920—1921 гг.[1]).

Исследования Н. Н. Лузина, о которых идет речь в первой главе его книги, послужили отправной точкой для работ других математиков и, прежде всего, его учеников. Укажем, например, на исследования А. Я. Хинчина ([3]) о строении измеримых функций.

Вторая глава посвящена вопросу об отыскании примитивной функции. Н. Н. Лузин назвал примитивной такую непрерывную функцию, которая имеет данную функцию своей производной почти всюду. Он отмечает, что было бы ошибочным рассматривать как примитивные только такие функции, которые имеют производную в каждой точке, так как неопределенный интеграл Лебега, ценность которого для анализа неоспорима, может, однако, не иметь производной в

[1]) Впоследствии такое построение было опубликовано Тонелли ([1]).

бесконечном множестве точек (и даже тогда, когда подинтегральная функция есть производная в каждой точке от некоторой непрерывной функции).

Приняв эту терминологию, Н. Н. Лузин ставит и решает во всей общности вопрос о том, какие функции имеют примитивную и как ее найти. Он доказывает, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, имеет примитивную. Требование конечности почти всюду является совершенно естественным, так как еще ранее[1]) Н. Н. Лузин доказал, что не существует непрерывной функции, имеющей бесконечную производную на множестве положительной меры.

Теорема о существовании примитивной была применена Н. Н. Лузиным в двух направлениях: во-первых, к решению задачи Дирихле и, во-вторых, к изображению функций тригонометрическими рядами. Для произвольной измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на окружности, Н. Н. Лузин доказал существование гармонической функции, голоморфной внутри круга и принимающей почти всюду на окружности значения $f(x)$ (слова «принимающая значения» здесь понимаются в смысле стремления к пределу по всем некасательным путям). До работы Н. Н. Лузина аналогичное предложение было доказано Фату лишь для случая суммируемой функции.

Этой теоремой начался важный цикл исследований Н. Н. Лузина по граничным свойствам аналитических функций[2]), с которого, в свою очередь, и началась столь широко развившаяся московская школа теории функций комплексного переменного.

О приложении теоремы о примитивной к изображению функций тригонометрическими рядами мы будем говорить дальше.

Так как у всякой функции имеется бесконечное множество примитивных, отличающихся не на постоянную величину, то встает задача о выделении из пучка примитивных той, которую «естественно» считать неопределенным интегралом. Этой задаче и посвящена третья глава.

---

[1]) См. Н. Н. Лузин (²) (в настоящем издании стр. 278).

[2]) См. А. Ф. Бермант и А. И. Маркушевич (¹).

Здесь Н. Н. Лузин, прежде всего, отмечает, что, хотя казалось бы естественным среди всех примитивных предпочесть точную, т. е. такую, которая имеет данную функцию своей производной всюду, но, во-первых, такой примитивной может не существовать даже для ограниченной функции, и, во-вторых, точных примитивных, отличающихся не на постоянную, может оказаться бесконечное множество.

Таким образом, выделение какой-то примитивной, наиболее тесно связанной с данной функцией, следует производить на основании других принципов. С этой целью Н. Н. Лузин подверг глубокому изучению те понятия неопределенного интеграла, которые уже получили признание в математике: интегралы Лебега и Данжуа. Для суммируемых функций в классе их примитивных, очевидно, существуют функции с ограниченным изменением. Н. Н. Лузин доказал, что неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с наименьшим полным изменением, или, говоря геометрически, если функция суммируема, то среди кривых, изображающих ее примитивные, неопределенный интеграл Лебега есть кривая с наименьшей длиной дуги. «Таким образом, нахождение неопределенного интеграла Лебега представляет аналогии с задачами вариационного исчисления» [1]).

Для решения вопроса о характеристическом свойстве интеграла Данжуа Н. Н. Лузин ввел ряд новых понятий, которые сами по себе оказались весьма плодотворными и которыми до сих пор пользуются в различных вопросах теории функций [2]): понятие полного изменения функции для совершенного множества P и функции с обобщенным ограниченным изменением (см. точные определения на стр. 103—107 [3])). Пользуясь этими понятиями, Н. Н. Лузин доказал теорему: для того чтобы непрерывная функция была неопределенным интегралом Данжуа, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией с обобщенным ограниченным изменением и ее полное изменение, если только оно существует, для всякого

---

[1]) «Интеграл и тригонометрический ряд», стр. 57 (в настоящем издании стр. 100).

[2]) О дальнейших применениях этих понятий см., например, книгу Сакса «Теория интеграла» ([1]), гл. VII.

[3]) Здесь и всюду в дальнейшем мы указываем страницы настоящего издания диссертации Н. Н. Лузина.

совершенного множества меры нуль было равно нулю. Если функция интегрируема по Данжуа, то в семействе всех ее примитивных есть одна и только одна, обладающая только что указанными свойствами, и она совпадает с неопределенным интегралом Данжуа.

Отметим, между прочим, что сама идея определения интеграла как примитивной, обладающей некоторым характеристическим свойством, в дальнейшем неоднократно использовалась в теории функций. Так, например, после введения интеграла Данжуа-Хинчина, для него тоже давали такого рода определение (см. Сакс (¹), гл. VII и VIII и комментарий 45 к диссертации Н. Н. Лузина[1])).

Наконец, так как почти одновременно с появлением работ Данжуа в математической литературе появились еще два определения интеграла, принадлежащие Борелю, Н. Н. Лузин подробно рассмотрел и эти определения. При этом он доказал, что одно из них эквивалентно интегралу Лебега, а второе не выходит за рамки интеграла Данжуа. Таким образом, необходимость исследовать структурные свойства этих интегралов отпала.

Четвертая глава посвящена дальнейшему изучению свойств примитивных. Отметив, что найденные им свойства интегралов Лебега и Данжуа, как характеристические, не дают возможности выделить неопределенный интеграл из семейства примитивных для $f(x)$ в том случае, когда $f(x)$ несуммируема или неинтегрируема по Данжуа, Н. Н. Лузин поставил себе целью найти более общие свойства интегралов Лебега и Данжуа, которые были бы уже не эквивалентны этим последним. Прежде всего он установил, что функция, имеющая производную, равную нулю почти всюду, и отличная от константы, т. е. функция, которая может «портить» неопределенный интеграл, отображает множество меры нуль во множество положительной меры.

В связи с этим он ввел понятие «N-свойства»[2]) и более сильное понятие — свойство нулевого изменения (см. опреде-

[1]) В дальнейшем, чтобы избежать повторений при ссылках на комментарии к диссертации Н. Н. Лузина, мы будем писать кратко: см. комментарии и № комментария.

[2]) Функция обладает «N-свойством», если она всякое множество меры нуль отображает опять во множество меры нуль.

Это свойство также широко применяется теперь в теории функций (см. книгу Сакса (¹), гл. VII). Изучению N-свойства и его приление на стр. 153). Н. Н. Лузин указал, что естественно искать неопределенный интеграл в классе функций с нулевым изменением. Оказалось, что для суммируемой функции неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с нулевым изменением, и аналогичное предложение имеет место для функций, интегрируемых по Данжуа, и интеграла Данжуа.

Далее Н. Н. Лузин поставил ряд проблем, касающихся обобщения понятия неопределенного интеграла; многие из них в результате исследований других авторов получили иногда положительное, иногда отрицательное решение. Но даже постановки задач, получивших отрицательное решение, оказались весьма плодотворными, так как они возбудили ряд исследований. Такова, например, задача об определении интеграла как суммы того ряда, который получается при интегрировании тригонометрического ряда, сходящегося к заданной функции. Эта задача, между прочим, привела к необходимости обобщить понятие производной. В связи с этим Н. Н. Лузин изучил и производные числа Дини, доказав, что если непрерывная функция имеет все четыре производных числа конечными всюду на некотором множестве положительной меры, то она имеет обыкновенную производную почти всюду на этом множестве.

Поставленная здесь задача обобщения понятия производной вызвала к жизни ряд исследований в этом направлении (см. комментарии 87, 88).

В пятой главе Н. Н. Лузин приступает к изучению свойств тригонометрических рядов. Отметив, что сходимость тригонометрического ряда на множестве меры, большей нуля, влечет стремление к нулю его коэффициентов[1]), Н. Н. Лузин указывает естественность вопроса, является ли условие стремления коэффициентов тригонометрического ряда к нулю достаточным для его сходимости почти всюду.

Здесь он формулирует без доказательства свой предыдущий результат, опубликованный в его первой печатной работе

менений был посвящен ряд работ. Отметим, например, работу Банаха (²). См. также комментарий 69.

[1]) Доказательство этого предложения, являющегося обобщением известной теоремы Лобачевского-Римана, было дано Лебегом, но оно имеется и в статье Н. Н. Лузина (⁴).

«Ueber eine Potenzreihe» ([1]) (см. также стр. 271 настоящего издания); именно, он построил степенной ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, расходящийся в каждой точке единичного круга, и как следствие этого получил тригонометрический ряд, расходящийся почти всюду, хотя его коэффициенты стремятся к нулю. Этот факт оказался в свое время крайне неожиданным, так как даже такие крупные специалисты в области тригонометрических рядов, как Фату, предполагали расходимость ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, возможной лишь на множестве меры нуль. Построенный Н. Н. Лузиным пример расходящегося ряда вызвал большой интерес и явился началом многочисленных исследований (см. комментарии 96, 97 и 99).

При изучении вопросов сходимости тригонометрических рядов важную роль играют точки абсолютной сходимости. Н. Н. Лузин доказал, что если у тригонометрического ряда точек абсолютной сходимости имеется бесконечное множество [1]), то ряд либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится. Кроме того, им получен весьма изящный и вместе с тем существенный результат: если тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве меры, большей нуля, или даже меры нуль, но второй категории, то он сходится абсолютно всюду.

Наиболее важным вопросом, рассматриваемым в пятой главе, является вопрос о сходимости рядов Фурье. Н. Н. Лузин получил необходимое и достаточное условие для сходимости почти всюду ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом (см. стр. 202). Это условие выражено через некоторый особый интеграл от функции, сопряженной с данной. Очень существенным при этом было доказательство существования почти всюду особого интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

для любой функции $g(x)$ с интегрируемым квадратом.

---

[1]) В частности, это будет тогда, когда у него есть две точки абсолютной сходимости на расстоянии, не соизмеримом с π.

Эта теорема послужила началом большой серии работ (А. Безикович, И. И. Привалов, А. И. Плеснер, Ж. Марцинкевич)[1].

Исследуя этот особый интеграл, Н. Н. Лузин получил новое глубокое метрическое свойство измеримых множеств, которое он образно сформулировал так (стр. 222): всякое измеримое множество всеми своими частями, включая части меры бесконечно малой порядка выше первого, расположено симметрично относительно почти каждой точки области, если пренебрегать бесконечно малыми расстояниями порядка выше первого.

Это свойство «почти симметричности» Н. Н. Лузин назвал дифференциальным свойством второго порядка измеримых множеств, так как оно является гораздо более тонким, чем известное свойство множеств положительной меры иметь почти все свои точки точками плотности (дифференциальное свойство первого порядка). Действительно, не всякая точка плотности или разрежения обладает указанным свойством симметрии.

Н. Н. Лузин надеялся, что, базируясь на этом свойстве симметрии, можно будет доказать сходимость почти всюду рядов Фурье для всех функций с интегрируемым квадратом. Высказанная им на этот счет гипотеза до сих пор не подтвердилась, но и не опровергнута[2]. Она, так же как и многие другие, поставленные Н. Н. Лузиным проблемы, вызвала целую серию работ. К этому кругу идей следует отнести и работы по так называемым признакам сходимости типа Вейля[3] (Меньшов, Колмогоров и Селиверстов, Плеснер; см. об этом подробнее в комментариях 125, 126).

Возвращаясь к особому интегралу, заметим, что Н. Н. Лузин, всегда глубоко анализировавший причины обнаруженных им математических явлений, неоднократно настаивал на том, что существование этого интеграла есть результат не малости подинтегральной функции, а лишь интерференции ее

---

[1] См. об этом подробнее в комментарии 114.

[2] Заметим, что построенный А. Н. Колмогоровым ([2]) пример ряда Фурье, расходящегося в каждой точке, относится к функции с неинтегрируемым квадратом.

[3] См. стр. 227 диссертации Н. Н. Лузина.

положительных и отрицательных значений (так как даже для ограниченных функций

$$\int_0^\pi \left| \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha$$

может почти всюду расходиться). Подчеркивая это обстоятельство, Н. Н. Лузин указывал на то, что проблема сходимости рядов Фурье тесно связана с этой интерференцией. В одной работе, напечатанной значительно позже (см. Н. Н. Лузин ([9])), он изучил интеграл Дирихле

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

(где ε_1 и ε_2 положительны и как угодно малы). Как известно, вопрос о сходимости ряда Фурье от функции $f(x)$ сводится к вопросу о поведении $I_n(x)$ при $n \to \infty$. Н. Н. Лузин построил такую непрерывную функцию $f(x)$, для которой $I_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на $[0, 2\pi]$ и, однако, каждый из интегралов

$$I'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{0} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

и

$$I''_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\varepsilon_2} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha,$$

сумма которых равна $I_n(x)$, расходится почти всюду и даже имеет бесконечные пределы неопределенности.

Наконец, отметим еще, что углубленное изучение особого интеграла позволило Н. Н. Лузину решить следующую задачу: зная значение $u(\theta)$ на окружности ($R=1$) гармонической функции $u(x, y)$, найти значения $v(\theta)$ на этой окружности для сопряженной гармонической функции $v(x, y)$. Он решил эту задачу полностью для случая, когда $u(\theta)$ есть любая функция с интегрируемым квадратом (см. стр. 213). Н. Н. Лузин рассмотрел также ряд случаев, когда по поведению функции можно судить о поведении ряда, сопряженного с ее рядом Фурье. Впоследствии вопросу о связи между данной и сопряженной функцией, а также о поведении тригонометрического ряда, сопряженного с данным, было посвящено много работ (см. комментарии 110 и 124).

Шестую главу своей диссертации Н. Н. Лузин посвятил вопросу об определении интеграла при помощи тригонометрического ряда. Основным результатом этой главы является теорема о том, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, может быть представлена тригонометрическим рядом, суммируемым к ней методами Римана и Пуассона почти всюду. В течение 25 лет этот результат не поддавался уточнению, и только в 1940 г. Д. Е. Меньшов показал, что в этой теореме можно суммируемость заменить на обычную сходимость почти всюду. Вопрос же о том, является ли наложенное здесь на функцию требование конечности почти всюду необходимым, до сих пор полностью не решен.

Интересно, что в этом круге вопросов мы приходим к разным ответам в зависимости от того, как понимать изобразимость функции тригонометрическим рядом. Именно, из совместной работы Н. Н. Лузина и И. И. Привалова ([7]) вытекает возможность построить тригонометрический ряд, суммируемый методом Пуассона к $+\infty$ почти всюду; для метода Римана это уже невозможно (не только почти всюду, но и на каком-либо множестве положительной меры; см. комментарий 137). Наконец, для обыкновенной сходимости вопрос все еще остается открытым.

При построении ряда, изображающего данную функцию, Н. Н. Лузин пользовался ее примитивной, а таких примитивных, как известно, бесконечное множество. Поэтому он отметил, что функция может быть изображена бесконечным множеством тригонометрических рядов, и таким образом еще не решена задача, которую он называет «задачей Фурье»: дана функция своими значениями; определить коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее. Изложив в сжатой форме историю связи теории тригонометрических рядов с развитием основных понятий анализа (связи этой мы коснулись в начале настоящей статьи), Н. Н. Лузин очень ярко поставил вопрос об интегрировании, как операции определения коэффициентов ряда по его сумме. Он указал (стр. 245—246), что задача Фурье распадается на две задачи: 1) выбор единственного ряда, наиболее тесно связанного с данной функцией, и 2) определение коэффициентов этого ряда, исходя непосредственно из значений функции.

Считая, что наиболее тесно связанным с данной функцией является такой ряд, который сходится к ней почти всюду, Н. Н. Лузин во всей остроте поставил вопрос о единственности разложения функции в тригонометрический ряд. В течение свыше 30 лет, прошедших с тех пор, этот вопрос служит предметом внимания ряда ученых (см. статью Н. К. Бари ([2]) и комментарий 138).

Определение коэффициентов ряда, изображающего данную функцию (если мы выделили каким-то образом один такой ряд, «особенно тесно связанный» с этой функцией), Н. Н. Лузин связал с обобщением понятия интеграла: естественно назвать неопределенным интегралом от $f(x)$ функцию $F(x)$, являющуюся суммой ряда, который получается от интегрирования ряда, изображающего $f(x)$. Создав таким образом «интеграл» от $f(x)$, можно уже коэффициенты изображающего ряда получать по формулам Фурье[1]).

Чтобы оправдать это определение, он доказал ряд интересных теорем и в том числе замечательную теорему о том, что если тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ почти всюду, то сумма $F(x)$ обинтегрированного ряда имеет асимптотическую производную, равную $f(x)$ почти всюду.

Заканчивая изложение содержания книги Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд», мы хотим отметить, что она, с одной стороны, разрешила многие основные задачи складывавшейся тогда теории функций и в то же время определила в значительной степени дальнейшее ее развитие. Поэтому справедливо считать этот труд классическим.

Оригинальность этой работы заключается не только в полученных результатах и новых постановках вопросов, но и в методе. Именно эту работу, как и другие работы Н. Н. Лузина,

---

[1]) Вопросу о том, как определить коэффициенты ряда, сходящегося к некоторой функции всюду, посвящен большой цикл работ Данжуа ([3]) (см. комментарии 3 и 144).

отличает чрезвычайно яркий характер геометрического изложения. Достаточно просто напомнить некоторые из результатов: «C-свойство», свойство графика неопределенного интеграла Лебега быть кратчайшей кривой среди всех примитивных, свойство симметрии в теореме об измеримых множествах и многие другие. Н. Н. Лузин умел находить в самых сложных и отвлеченных вопросах простое геометрическое ядро, которое во многих случаях и подсказывало решение задачи. Этот геометрический стиль свойствен и другим работам Н. Н. Лузина. Достаточно указать на яркие геометрические методы, которые он ввел в дескриптивную теорию функций (метод решета, метод проектирования и другие). Эти геометрически конструктивные методы многочисленные ученики Н. Н. Лузина переносили в самые разные области математики, казалось бы, очень далекие от теории функций действительного переменного.

Комментарии, приложенные к этой книге, показывают, какое большое число работ и у нас, и за рубежом вызвано появлением диссертации Н. Н. Лузина. Можно сказать, что с нее датируется создание московской школы теории функций действительного переменного, которая послужила в советское время базой развития других важнейших наших математических школ. И сейчас, уже через 35 лет после своего выхода, несмотря на быстрое развитие математики, эта книга не потеряла своей актуальности, и появление нового ее издания явится ценным вкладом в нашу математическую литературу.

Н. Н. ЛУЗИН

ИНТЕГРАЛ
И
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ
РЯД

(Диссертация)

ВВЕДЕНИЕ

1. Обычно противополагают классический анализ и теорию функций действительного переменного. Хотя главный объект, с которым имеет дело та и другая ветвь математики, один и тот же, именно, понятие *функции*, есть, однако, существенная разница в тех способах, которыми пользуются для изучения функции анализ и теория функций.

В то время как функции классического анализа являются данными посредством тех или других уравнений, разложений в ряды и т. д., говоря вообще, являются определенными тою или другою системой *аналитических выражений, формул*, в это самое время теория функций действительного переменного отправляется от самого общего определения понятия функции, данного Дирихле, понятия функции, как соответствия, совершенно независимо от того, каким образом это соответствие на самом деле может быть установлено.

Но понятие функции, ставящееся таким образом, слишком óбще, чтобы быть источником многих предложений. Почти не существует теорем, относящихся к этому общему определению функции. Поэтому, для того чтобы можно было итти вперед и строить различные теории, образующие математические дисциплины, теория функций действительного переменного вынуждена ограничить поле своих исследований и обратиться к рассмотрению более или менее широких *классов* функций.

Каждый такой класс функций определяется посредством некоторого данного à priori свойства, относящегося к течению величин функции, к ее строению, структуре. Зная это структурное свойство, характеризующее класс функций, теория функций действительного переменного выводит из него другие свойства, которыми обладают все функции рассматриваемого класса. Таким образом, например, изучаются классы функций непрерывных, монотонных, интегрируемых, функций с ограниченным изменением, точечно-разрывных, обладающих в каждой точке производною, и т. д.

Таким образом, основная разница в методе изучения функции анализом и теорией функций состоит в том, что классический анализ извлекает свойства функции из свойств тех аналитических выражений и формул, которыми она определена, тогда как теория функций действительного переменного выводит свойства функции из того свойства, которое à priori характеризует рассматриваемый класс функций.

Здесь вполне уместен вопрос: какова применимость результатов теории функций действительного переменного? Имеют ли результаты теории функций существенное значение для других математических дисциплин и, прежде всего, для классического анализа? Нужно иметь в виду, что при современном состоянии знания метод классического анализа, метод употребления аналитических выражений лежит в основе почти всякой математической дисциплины; поэтому та теория, которая не соприкасается, прямо или косвенно, с аналитическими выражениями, такая теория неизбежно занимает изолированное положение среди других ветвей математики.

Поэтому, если не хотят, чтобы теория функций действительного переменного была теорией, замкнутой в себе и не оказывающей влияния на другие математические теории, нужно поставить в связь аналитические выражения с одной стороны, определения и понятия теории функций действительного переменного — с другой стороны. Этим путем естественно приходим к следующей задаче, связывающей анализ и теорию функций:

Дано структурное свойство функции. Найти аналитические выражения, изображающие эту функцию.

Решение этой задачи в отдельных частных случаях вполне возможно. Достаточно указать на известную теорему Вейерштрасса о представимости всякой непрерывной функции равномерно-сходящимся рядом полиномов или на то, что всякая функция непрерывная с ограниченным изменением представима равномерно-сходящимся тригонометрическим рядом.

Но легко видеть, что для классического анализа эта только что поставленная задача не имеет основной важности.

В самом деле, эта задача отправляется от *класса* функций и ищет представляющее функцию аналитическое выражение. Но метод теории функций действительного переменного есть по преимуществу логический метод, и те классы функций, которые, следуя этому методу, встречаются первыми, являясь логически наиболее важными и простыми, могут совсем не играть важной роли для других математических дисциплин и для классического анализа, развитие которого, как известно, было в значительной степени обязано задачам, поставленным естествознанием. Поэтому для анализа несравненно бóльшую важность имеет следующая вторая задача, обратная первой:

Дан класс аналитических выражений. Найти необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемых этим классом аналитических выражений.

Возможность решения этой задачи в различных частных случаях показана важными работами Р. Бэра. В 1898 г. Бэр дал[1]) следующий замечательный результат: *для того чтобы функция $f(x)$ была суммою сходящегося всюду ряда полиномов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была точечно-разрывной на всяком совершенном множестве* [1].

Поставленная общая задача имеет большое значение для анализа. Всякий раз, как нам удается найти искомое необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемых данным классом аналитических выражений, мы вместе с тем получаем критерий для того, чтобы судить à priori о том, будет ли представима или нет какая-либо данная функция $f(x)$ этими аналитическими выражениями. Другими словами, найденное структурное свойство характеризует данный класс аналитических выражений и показывает изобразительную мощность рассматриваемых аналитических выражений.

2. Следуя этому пути, открытому Бэром, можно встретить много интересных проблем; среди этих проблем наибольший интерес представляют задачи, связанные с тригонометрическими рядами.

---

[1]) R. Baire, Comptes Rendus, т. 126, 1898, стр. 884—887; «*Sur les fonctions des variables réelles*» (Annali di Matematica, т. 3, сер. III 1899, стр. 62).

Хотя система тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx, \ldots;$$
$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots$$

является лишь частным случаем ортогональной системы функций, однако изучение этой частной системы функций представляет значительный интерес ввиду тех особенных свойств, которые присущи именно этой системе функций[1]). Так, подобно этому среди всех действительных чисел представляет особый интерес изучение *целых* чисел. Нужно заметить, что теории тригонометрических рядов математическое знание обязано многими общими понятиями и определениями; между прочим, теория тригонометрических рядов послужила исходным пунктом для работ Г. Кантора.

Следуя пути Бэра, естественно поставить следующую задачу относительно тригонометрических рядов:

Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x)$ была представима тригонометрическим рядом, т. е. чтобы мы имели

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\ ^{2)}.$$

Цель предлагаемой работы есть рассмотрение вопросов, группирующихся около этой задачи.

3. Поставленная таким образом задача эквивалентна задаче изучения тригонометрического ряда вообще и представляет большие трудности, так как анализ в настоящее

---

[1]) Дифференцирование и интегрирование тригонометрической системы функций приводят с точностью до постоянных множителей опять к этой же системе функций. Интересно было бы знать, существует ли *другая* ортогональная система функций с этим свойством [2].

[2]) Символ Гурвица; мы пишем

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

всякий раз как ряд, стоящий направо, суммируем каким-либо процессом к функции $f(x)$.

время не обладает достаточно общим методом для этого изучения. Относительно общего тригонометрического ряда у нас нет почти ничего, что можно было бы сказать. Поэтому естественно на первое время стараться ограничить область исследования и рассматривать классы тригонометрических рядов, наиболее доступные для изучения. Таким классом является *класс тригонометрических рядов Фурье.*

Как известно, *тригонометрическим рядом Фурье* называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты которого определены формулами Фурье

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Изучение тригонометрического ряда Фурье представляет несравненно бóльшую доступность, чем изучение общего тригонометрического ряда, так как сумма $S_n(x)$ первых $n+1$ членов ряда Фурье может быть написана в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\alpha)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

и, таким образом, многие вопросы, например, вопросы о сходимости, суммируемости ряда Фурье, сводятся к изучению *структуры* функции $f(x)$, рассмотрение же *коэффициентов* ряда делается в этих вопросах излишним [1]). Этим путем классической теорией получены многочисленные результаты.

[1]) Самое трудное в теории тригонометрических рядов — это исследование закона течения *величин* коэффициентов ряда. Проще иметь дело со строением функции, чем с законом величин коэффициентов.

Поэтому естественно желать ограничиться первое время изучением лишь класса рядов Фурье и искать границы этого класса или признак, отличающий тригонометрический ряд Фурье от тригонометрического ряда не-Фурье. Но, следуя этому пути, мы встречаемся с большою трудностью.

4. Понятие ряда Фурье не есть понятие вполне определенное и устойчивое, но всецело зависит от *понятия определенного интеграла*. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла (Коши, Римана, Дирихле, Гарнака, Лебега, Данжуа), мы расширяем все более и более класс тригонометрических рядов Фурье.

Формулы Фурье имеют в виду решение следующей задачи анализа:

Зная сумму тригонометрического ряда, определить его коэффициенты.

Но, как бы ни казалось общим определение интеграла, данное Данжуа[1]), оно не в силах решить этой задачи анализа, так как можно установить существование таких *сходящихся* тригонометрических рядов, сумма которых не интегрируема в смысле Данжуа ни в каком интервале, как бы мал он ни был [[3]]. И так как, с другой стороны, нет никакого характеристического свойства, которое отличало бы коэффициенты ряда Фурье от коэффициентов тригонометрического ряда не-Фурье[2]), то нужно думать, что деление тригонометрических рядов на ряды Фурье и не-Фурье не лежит в сущности вещей, а обязано вообще лишь незнанию в настоящий момент достаточно общей операции интегрирования [[4]].

Отсюда естественно желать найти наиболее общее определение понятия интеграла с тем, чтобы расширить до возможных пределов класс тригонометрических рядов Фурье. Этим задача о тригонометрических рядах, их сходимости, суммируемости и свойствах функций, изображаемых ими, тесно связывается с задачею о нахождении возможно более общего определения понятия интеграла.

Предлагаемая работа рассматривает вопросы в этом направлении.

---

[1]) A. Denjoy, Sur un extension de l'intégrale de M. Lebesgue (Comptes Rendus, 1 апреля 1912 г.) и Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale (Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г.).

[2]) С точки зрения их *числовых величин*.

5. Укажем вкратце план работы и задачи, которые мы наметили разрешить.

В *первой главе* мы делаем общий обзор строению и свойствам измеримых множеств и измеримых функций. Этот обзор нам необходим для дальнейшего. Основной результат этой главы, опубликованный нами ранее [1]), касается строения произвольной измеримой функции. Согласно этому результату *всякая измеримая функция есть непрерывная функция, когда пренебрегают множеством меры как угодно малой.*

Во *второй главе* мы приступаем к отысканию примитивных функций. Так как каждый неопределенный интеграл есть примитивная функция для данной, то, стремясь найти самое общее определение интеграла, мы естественно приходим к задаче: найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная функция имела примитивную.

Мы даем в этой главе полное решение этой задачи, которое формулируется так: *для того чтобы данная функция имела примитивную, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой и конечной почти всюду* [2]).

В качестве приложения этой теоремы мы даем общее решение задачи Дирихле о гармонической функции для круга в том ранее нерассматривавшемся случае, когда значения этой функции на окружности есть произвольная всюду разрывная неограниченная функция.

В *третьей главе* мы переходим к отысканию характеристических свойств неопределенных интегралов. Так как каждая данная функция имеет бесконечное множество примитивных функций, не отличающихся друг от друга на постоянную, то естественно возникает вопрос, какая именно из всех этих примитивных есть неопределенный интеграл, чем именно последний отличается от всех других примитивных? Мы даем полное решение этого вопроса для случая неопределенного интеграла Лебега и Данжуа. Для случая неопределенного интеграла Лебега характеристическое свойство таково: *неопределенный интеграл Лебега есть кривая* [3]) *с наименьшей*

---

[1]) «Sur les propriétés des fonctions mesurables» (Comptes Rendus 17 июня 1912 г.). См. также Математический сборник, т. 28, 1912 г., стр. 282.

[2]) «Почти всюду», т. е. за исключением множества меры нуль.

[3]) Мы прибегаем к языку геометрии.

длиною из всех примитивных кривых. Для того чтобы решить этот вопрос для неопределенного интеграла Данжуа, мы были вынуждены обобщить понятие функции с ограниченным изменением.

Конец этой главы посвящен определению интеграла, недавно предложенному Борелем[1]). Мы показываем, что это определение менее обще, чем определение Данжуа.

Вопрос, изучаемый в *четвертой главе*, далеко не решен нами с тою полнотою, с какой решены задачи в предыдущих главах. В этой главе мы ставим задачу об отыскании в самом общем случае неопределенного интеграла в семействе всех примитивных для данной функции. Не решив этой задачи во всей общности, мы ограничиваемся изложением частных результатов, найденных нами по этому вопросу: именно, мы определяем тот узкий класс примитивных, в котором *естественнее всего* искать неопределенный интеграл.

Далее, мы показываем, что в бесконечном множестве случаев примитивные, получаемые почленным интегрированием рядов, принадлежат именно к этому узкому классу примитивных, определенному нами в этой главе.

В конце главы мы приходим к обобщению понятия о производной, имеющему значение для теории тригонометрических рядов.

В *пятой главе* мы изучаем вопросы, на первый взгляд не связанные с предыдущими, а именно, вопросы о сходимости тригонометрических рядов. Цель этой главы — подготовка к задаче изображения функций тригонометрическими рядами. После краткого обзора найденных нами ранее результатов о расходящихся тригонометрических рядах[2]) мы даем необходимое и достаточное условие для сходимости тригонометрических рядов Фурье-Лебега.

Это условие приводит нас к новому свойству измеримых множеств, не выводимому из известных свойств множеств.

---

[1]) Borel, Comptes Rendus, т. 150 (1910), стр. 375 и 508. См. особенно: Borel, Le calcul des intégrales définies (Journ. de Math., 1914, стр. 201).

[2]) См. нашу статью: «Ueber eine Potenzreihe» (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911 г.) или Математический сборник, т. 28, 1912 г., стр. 295.

Вместе с тем мы получаем решение задачи: *зная значения гармонической функции на окружности, найти значения на окружности сопряженной гармонической функции.* Мы даем формулы, непосредственно решающие вопрос.

Конец главы посвящен результатам Вейля, Гобсона и Планшереля относительно сходимости ортогональных рядов и невозможности обобщения теоремы Парсеваля.

Наконец, в *шестой главе* мы доказываем основную теорему, согласно которой *всякая данная измеримая функция представима тригонометрическим рядом, суммируемым одновременно методами Пуассона и Римана к данной функции.*

Так как всякая измеримая функция имеет бесконечное множество тригонометрических рядов, изображающих ее, то законно поставить задачу: *среди множества всех тригонометрических рядов, изображающих данную функцию, определить один, наиболее тесно связанный с изображаемой функцией.* Мы не смогли решить этой задачи в общем случае и ограничиваемся лишь указанием на то, что всякое частное решение этой задачи дает решение задачи отыскания неопределенного интеграла, и указанием вероятных результатов. Далее мы даем теорему о возможности интегрирования почленно тригонометрических рядов *не*-Фурье-Лебега. Глава кончается рассмотрением теории Римана тригонометрических рядов, тесно связанной с поставленными задачами.

Часть результатов, содержащихся в этой работе, была напечатана в Comptes Rendus в сообщениях Академии от 17 июня 1912 г., 23 сентября 1912 г., 23 декабря 1912 г., 2 июня 1913 г. и в статьях, помещенных в Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911 г. и в Математическом сборнике, т. 28, 1912 г., стр. 266—294, 295—302, 461—472.

Николай Лузин

ГЛАВА I

СТРОЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Прежде чем приступить к главному предмету исследования, мы вынуждены предварительно рассмотреть строение и свойства измеримых множеств и измеримых функций. Мы ограничиваемся классом *измеримых* функций и множеств потому, что никогда не встретимся с неизмеримыми функцией и множеством [1]). В силу работ Бэра и Лебега [2]) всякая определенная операция анализа, всякое аналитическое выражение приводят в результате непременно к измеримому множеству и измеримой функции [3]). Так например, множество всех точек, где существует конечная производная от какой-

---

[1]) Самое *существование* неизмеримого множества не является общепризнанным. Всякое построение *примера* неизмеримого множества *необходимо* должно употребить принцип произвольного выбора (аксиома Цермело). А этот последний принцип вызывает серьезные сомнения, так как, повидимому, он стоит в тесной связи с парадоксами абстрактной теории множеств.

Никакой частный пример неизмеримого множества не может быть определенным с тою полнотою, которую Кронекер требовал вообще для всякого математического определения. См. по этому поводу [5]: Cinq lettres sur la théorie des ensembles (Bull. de la Soc. math. 1905, **33**, стр. 261—273). Lebesgue, Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo (Bull. de la Soc. math. 1907, **35**, стр. 202—212). Russel, Sur les axiomes de l'infini et du transfini (Bull. de la Soc. math. 1911 г.) и Borel, Le calcul des intégrales définies (Journ. de Math. 1914, стр. 159—210).

[2]) Baire, Sur les fonctions de variables réelles (Annali di mat. 1899 г.). Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement (Journ. de Math. 1905, стр. 139—216).

[3]) Точнее: к множествам и функциям, измеримым в смысле Бореля [6].

нибудь непрерывной функции $F(x)$, есть всегда измеримое множество. Измеримым же множеством будет множество всех точек сходимости какого-либо ряда, например, тригонометрического; множество всех точек *абсолютной* сходимости какого-нибудь тригонометрического ряда тоже есть измеримое множество, и т. д., и т. д.

Никакая определенная операция анализа не выведет нас за пределы области измеримых функций и множеств. Можно сказать, что границы области измеримых множеств и функций суть, вместе с тем, и границы анализа.

Строение измеримых множеств

2. Назовем *нуль-множеством* всякое множество, мера которого равна нулю. Во многих вопросах теории функций и анализа можно абсолютно пренебрегать нуль-множествами. Так например, интеграл Лебега $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ не меняет своей величины, если мы произвольно изменим функцию $f(x)$ на каком-нибудь нуль-множестве. Многие теоремы анализа продолжают иметь силу, когда пренебрегают нуль-множествами. В дальнейшем, именно в теории тригонометрических рядов, мы не раз встретимся с такого рода теоремами.

Строение нуль-множеств не поддается изучению [1]). Но если отвлечься от нуль-множеств, изучение строения измеримых множеств легко может быть доведено до конца. Здесь имеют место следующие два предложения [2]):

---

[1]) Причина этому вполне понятна. Чтобы видеть это, рассмотрим совершенное множество P меры нуль, лежащее в области $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Известно, что точки множества P можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с точками области $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ столь простым образом, что, зная строение множества Y, лежащего на $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, мы знаем и строение соответствующего ему множества X, лежащего на P. Но в то время как множество Y может быть *произвольным* точечным множеством, даже неизмеримым, соответствующее ему множество X есть всегда *нуль-множество*, будучи частью P. Отсюда изучение строения нуль-множества эквивалентно изучению произвольного точечного множества, вообще неизмеримого.

[2]) Оба эти предложения [7] легко выводятся из теоремы Ш. Валле-Пуссена, данной в его Cours d'Analyse Infinitésimale (второе издание, т. I, стр. 250, § 269). [В русском переводе: Курс анализа бесконечно малых, I ТТИ, 1933, § 78, стр. 63. *Ред.*]

Теорема 1. *Во всяком измеримом множестве* $\mathfrak{M}$ *меры* μ, $\mu > 0$, *содержится такое совершенное множество* P, *что*

$$\operatorname{mes} P > \mu - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, *как угодно мало.*

Теорема 2. *Всякое измеримое множество* $\mathfrak{M}$ *меры, большей нуля, есть сумма конечного или счетного числа совершенных множеств* P_1, P_2, P_3, ..., *не имеющих попарно общих точек, и нуль-множества* $\mathfrak{N}$.

Следовательно, в силу этой теоремы, можем писать:

$$\mathfrak{M} = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) + \mathfrak{N},$$

где $\operatorname{mes} \mathfrak{N} = 0$.

Эта теорема имеет большое значение, выясняя строение измеримого множества меры, большей нуля. Важность этого предложения заключается в том, что каждое совершенное множество нужно рассматривать как абсолютно элементарное множество, понятие и свойства которого столь же просты, как понятие и свойства отрезка прямой. Множество же, которое есть сумма счетного числа совершенных множеств, есть множество, наиболее простое после совершенного. Таким образом, согласно предыдущему в каждом измеримом множестве $\mathfrak{M}$ меры, большей нуля, всегда можно выделить *простую главную часть* $(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)$, мера которой равна мере $\mathfrak{M}$. Что касается до нуль-множества $\mathfrak{N}$, то, как было сказано, во многих вопросах анализа им можно абсолютно пренебрегать.

3. Точки плотности и точки разрежения[1]). Пусть $\mathfrak{M}$ есть измеримое множество, лежащее в области $[0, 1]$. Пусть ξ есть какая-нибудь точка, находящаяся внутри этой области, и пусть δ есть интервал, содержащий ξ внутри. Обозначим через $\mu(\delta)$ меру множества всех точек $\mathfrak{M}$, лежащих на δ. Мы говорим, что ξ есть *точка плотности* множества $\mathfrak{M}$, если отношение $\frac{\mu(\delta)}{\operatorname{mes}\delta}$ стремится к единице, когда длина δ стремится к нулю. Аналогично, скажем, что ξ есть *точка разрежения* множества $\mathfrak{M}$, если это отношение стремится к нулю вместе с длиной δ.

[1]) См. A. Denjoy, Comptes Rendus, 1913 г.

Чтобы выяснить смысл введенных определений и терминологии, рассмотрим какую-либо точку плотности ξ_1. В этом случае, начиная с достаточно малого δ, имеем всегда неравенство

$$\frac{\mu(\delta)}{\operatorname{mes}\delta} > 1 - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ как угодно мало. Отсюда заключаем, что всякий достаточно малый интервал δ, охватывающий точку плотности, является настолько *насыщенным* точками множества $\mathfrak{M}$, что мера множества их лишь бесконечно мало отличается от меры всего интервала δ, принимая длину последнего за единицу. Аналогично, если ξ_2 есть точка разрежения, имеем

$$\frac{\mu(\delta)}{\operatorname{mes}\delta} < \varepsilon,$$

откуда видим, что интервал δ настолько *беден* точками $\mathfrak{M}$, что множество их имеет меру, бесконечно малую относительно длины интервала δ.

Если $\operatorname{mes}\mathfrak{M} = 1$, всякая точка области $[0, 1]$ есть точка плотности, и если $\operatorname{mes}\mathfrak{M} = 0$, всякая точка есть точка разрежения. Относительно же множеств с промежуточной мерой имеет место предложение:

Теорема. *Всякая точка множества* $\mathfrak{M}$, $0 < \operatorname{mes}\mathfrak{M} < 1$, *кроме нуль-множества, есть точка плотности, и каждая точка, не принадлежащая к* $\mathfrak{M}$, *кроме нуль-множества, есть точка разрежения* [8].

В самом деле, пусть $f(x)$ есть функция, равная 1 на $\mathfrak{M}$, и равная 0 вне $\mathfrak{M}$. Интеграл Лебега $F(x) = \int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть, очевидно, непрерывная функция, имеющая $F'(x) = 1$ почти всюду [1]) на $\mathfrak{M}$ и имеющая $F'(x) = 0$ почти всюду вне $\mathfrak{M}$. Пусть ξ есть точка, для которой $F'(\xi) = 1$. Обозначая через

---

[1]) Выражение *почти всюду* имеет здесь и в дальнейшем точный, строго определенный смысл: мы говорим, что какое-либо явление имеет место «почти всюду» всякий раз, когда это явление происходит всюду, кроме, быть может, множества меры нуль.

$\delta = (a, b)$, $a < b$, интервал, содержащий ξ внутри, видим, что отношение

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

стремится к 1, когда точки a и b стремятся к ξ. Но в силу определения интеграла Лебега приращение $F(b) - F(a)$ в данном случае есть мера всех точек множества $\mathfrak{M}$, находящихся на (a, b); отсюда заключаем, что отношение $\frac{\mu(\delta)}{\text{mes}\,\delta}$ стремится к 1, когда δ стремится к нулю. Следовательно, ξ есть точка плотности для $\mathfrak{M}$. Аналогично находим, что всякая точка ξ, для которой $F'(\xi) = 0$, есть точка разрежения для $\mathfrak{M}$.

4. Выше (§ 2) мы рассмотрели строение измеримого множества с точки зрения входящих в него множеств. Теперь естественно спросить, каково геометрическое расположение измеримого множества на отрезке [0, 1]? Здесь мы встречаемся с тем интересным фактом, что *никакое измеримое множество* $\mathfrak{M}$ *меры* μ, $0 < \mu < 1$, *не может геометрически быть равномерно расположенным на области* [0, 1]. В самом деле, для такого множества $\mathfrak{M}$ в силу предшествовавшей теоремы существует на [0, 1], по крайней мере, одна точка плотности ξ_1 и одна точка разрежения ξ_2. Отсюда заключаем, что в области [0, 1] имеются два интервала δ_1 и δ_2 равной длины и неперекрывающиеся, из которых один насыщен точками $\mathfrak{M}$, а другой, наоборот, беден ими. Таким образом, всякое измеримое множество меры не 0 и не 1 не будет равномерно покрывать область [0, 1], но будет лежать на ней как бы *сгустками*, неоднородно, будучи слишком уплотненным в одних частях этой области и слишком разреженным в других[1]). Это дает представление о характере геометрического расположения измеримых множеств на отрезках. Из всех измеримых множеств, лежащих в области [0, 1], одни только множества меры 0 или 1 являются однородно расположенными на этой области.

---

[1]) На этом именно свойстве и основан пример Ван-Влека неизмеримого множества. См. Van Vleck, Non-measurable sets of points with an exemple (Trans. Am. Math. Soc., 1908, 9, стр. 237—244). Lennes, Concerning Van Vleck's non-measurable set (там же, 1913, т. 14, стр. 109—112). Пример Ван-Влека неизмеримого множества, как и всякий другой, требует допущения принципа произвольного выбора [9].

Аналогия измеримых множеств с отрезками

5. Уже из предыдущего параграфа можно отметить сходство измеримого множества, лежащего в области [0, 1], с конечной системой Σ отрезков, лежащих на этой же области, если их сумма будет меньше единицы. В самом деле, в этих условиях имеем в области [0, 1] частные интервалы то сплошь покрытые точками системы Σ, то совершенно пустые, лишенные совсем точек этой системы Σ Аналогично обстоит дело и с измеримыми множествами, как мы видели выше; только в этом случае в области [0, 1] имеются частные интервалы то *почти* сплошь состоящие из одних только точек этого измеримого множества, то *почти* лишенные этих точек.

Но эта аналогия имеет еще смутный качественный характер и лишена точного метрического определения. Можно, однако, видеть больше. Свойства измеримого множества $\mathfrak{M}$ меры μ, $\mu > 0$, представляют почти совершенную аналогию с свойствами одного целого *отрезка* той же самой длины μ. Из многих аналогичных свойств мы укажем два главнейших в следующей схеме:

1) Два лежащих на [0, 1] отрезка Δ_1 и Δ_2, сумма *длин* которых есть S, $S > 1$, пересекаются по отрезку *длины* $\geqslant S-1$.	1) Два лежащих на [0, 1] измеримых множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, сумма *мер* которых есть S, $S > 1$, имеют общую часть *меры* $\geqslant S-1$.
2) Если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ есть счетная последовательность отрезков, *длина* каждого из которых превышает α, $\alpha > 0$, то существует на [0, 1] отрезок δ, *длины* $\geqslant \alpha$, каждая точка которого покрывается бесконечным числом отрезков Δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.	2) Если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ есть счетная последовательность измеримых множеств, *мера* каждого из которых превышает α, $\alpha > 0$, то существует на [0, 1] измеримое множество m *меры* $\geqslant \alpha$, каждая точка которого покрывается бесконечным числом измеримых множеств $\mathfrak{M}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Эти свойства [1]) и другие позволяют рассматривать измеримое множество $\mathfrak{M}$ меры μ, $\mu > 0$, как отрезок длины μ, находящихся, выражаясь образно, в раздробленном состоянии. В теории тригонометрических рядов мы не раз встретимся с подтверждением правильности такого взгляда.

Теорема о последовательностях функций

6. Прежде чем перейти к строению измеримых функций, мы должны рассмотреть теорему Д. Ф. Егорова относительно сходимости последовательности измеримых функций. Эта теорема имеет большое значение для многих вопросов анализа (например, в вопросах сходимости тригонометрических рядов) и для теории функций, в особенности для тех ее отделов, где пренебрегают нуль-множествами, как, например, в общей теории интеграла. Эта же теорема позволяет проникнуть почти до конца в строение произвольной измеримой функции.

Мы ограничиваемся лишь формулированием теоремы, отсылая для ее доказательства к работе автора.

Рассмотрим последовательность измеримых функций f_1, $f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$, каждая из которых есть конечная и определенная почти всюду на некотором измеримом множестве $\mathfrak{M}$ меры μ, $\mu > 0$ функция. Пусть эта последовательность сходится к конечному определенному числу $f(x)$ для всякого x из $\mathfrak{M}$, кроме, быть может, нуль-множества. В этих условиях имеет место следующее предложение [2]):

Теорема Д. Ф. Егорова [11]. *Каково бы ни было малое положительное число ε, множество $\mathfrak{M}$ всегда содержит в себе такое совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > \mu - \varepsilon$, на котором последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ равномерно сходится.*

---

[1]) Доказательства которых можно найти, например, у Ш. Валле-Пуссена, Cours d'Analyse Infinitésimale (второе издание, т. I, стр. 251, § 270). [В русском переводе: Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, § 81, стр. 66. *Ред.*]

[2]) D. T. Egoroff, Sur les suites des fonctions mesurables (Comptes Rendus, **152**, 1911, стр. 244—246). См. также: W. H. Young, On successions whose oscillation is usually finite (The quarterly Journal of Mathematics, **44**, 1913, стр. 129, 133); Encyclopédie des Sciences mathématiques, т. II, ч. 1, вып. 2, стр. 223 [10].

Этот результат сильно упрощает всю сложность сходимости последовательностей измеримых функций, так как понятие равномерной сходимости есть наиболее простое понятие.

Как очевидное следствие этой теоремы имеем: *Если последовательность измеримых функций* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ *сходится почти всюду на множестве* $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M} = \mu > 0$, *множество* $\mathfrak{M}$ *есть сумма счетного числа совершенных множеств* P_1, P_2, P_3, ..., *не имеющих попарно общих точек, и таких, что на каждом из них в отдельности последовательность сходится равномерно, и нуль-множества* $\mathfrak{N}$, *т. е.*

$$\mathfrak{M} = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) + \mathfrak{N}, \quad \operatorname{mes}\mathfrak{N} = 0.$$

Строение измеримых функций

7. Измеримые функции, которые мы будем рассматривать, мы предполагаем определенными и *конечными* почти всюду на $[0, 1]$. Все теоремы, которые мы имеем в виду здесь привести, легко могут быть обобщены на тот случай, когда функции заданы не на области $[0, 1]$, а на произвольном измеримом множестве $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M} = \mu > 0$. Но мы не станем вводить этого обобщения, чтобы не усложнить изложения.

Введем для изучения структуры измеримых функций следующее определение, имеющее для нас большое значение. Мы говорим, что функция $f(x)$, рассматриваемая *in abstracto*, определенная и конечная почти всюду на $[0, 1]$, *обладает на* $[0, 1]$ *(C)-свойством*, если, каково бы ни было положительное число ε, малое по желанию, существует на $[0, 1]$ совершенное множество P, обладающее следующими двумя свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \text{Функция } f(x) \text{ есть функция, непрерывная на } P. \\ 2^\circ.\ \operatorname{mes} P > 1 - \varepsilon. \end{array}\right\} \quad (C)$$

В нашей работе [12], помещенной в журнале «Математический сборник» 1)), мы доказали следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы функция* $f(x)$, *конечная почти всюду на* $[0, 1]$, *была измеримой функцией*,

1) См. «Математический сборник», т. 28, стр. 280. См. также Comptes Rendus: «Sur les propriétés des fonctions mesurables», 17 июня 1912 г.

необходимо и достаточно, чтобы она обладала (C)-свойством.

Следовательно, (C)-свойство является характеристическим свойством для класса всех измеримых функций, конечных почти всюду. Таким образом, принимая во внимание определение (C)-свойства, мы приходим к следующему основному результату:

Основная теорема. *Для того чтобы функция* $f(x)$, *конечная почти всюду на* $[0, 1]$, *была измеримой функцией, необходимо и достаточно, чтобы, как бы мало ни было положительное число* ε, *существовало на* $[0, 1]$ *совершенное множество* P, *обладающее свойствами:*

1°. $f(x)$ *непрерывна на* P.

2°. $\text{mes}\, P > 1 - \varepsilon$.

Как очевидное следствие этой теоремы имеем: *Если* $f(x)$ *есть измеримая функция, конечная почти всюду на измеримом множестве* $\mathfrak{M}$, $\text{mes}\, \mathfrak{M} = \mu > 0$, *множество* $\mathfrak{M}$ *есть сумма счетного числа совершенных множеств* $P_1, P_2, P_3, \ldots$, *не имеющих попарно общих точек, и таких, что на каждом из них в отдельности функция* $f(x)$ *есть непрерывная функция, и нуль-множества* $\mathfrak{N}$, т. е.

$$\mathfrak{M} = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) + \mathfrak{N}, \quad \text{mes}\, \mathfrak{N} = 0.$$

8. Эти результаты [1]) позволяют глубоко проникнуть в строение *произвольной* измеримой функции, конечной почти всюду. Рассмотрим, в самом деле, какую-нибудь измеримую функцию $f(x)$, конечную почти всюду на $[0, 1]$. Пусть P есть совершенное множество, на котором $f(x)$ есть непрерывная функция, $\text{mes}\, P > 1 - \varepsilon$. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ суть все смежные [2]) к множеству P интервалы. Строим в каждом δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ линейную функцию, имеющую в концах δ_n те же самые значения, как и функция $f(x)$. Рассмотрим теперь новую функцию $f_1(x)$, определенную на $[0, 1]$ следующими условиями:

1°. $f_1(x) = f(x)$, если x принадлежит к P.

---

[1]) Мысль об этих свойствах измеримых функций была сообщена мне Д. Ф. Егоровым. См. Математический сборник, т. 28, стр. 282.

[2]) Термин Бэра «intervalle contigu».

2°. $f_1(x)$ равна значению соответствующей линейной функции, построенной на δ_n, если x принадлежит к δ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Очевидно, в силу построения функция $f_1(x)$ есть *непрерывная* функция на целой области $[0, 1]$. Отсюда приходим к результату: *какова бы ни была измеримая функция* $f(x)$, *конечная почти всюду на* $[0, 1]$, *ее значения на некотором совершенном множестве меры, большей* $1-\varepsilon$, *получаются путем взятия значений от непрерывной на всей области* $[0, 1]$ *функции* $f_1(x)$.

Это можно выразить еще несколько иначе, сказав, что *всякая измеримая функция* $f(x)$, *конечная почти всюду на* $[0, 1]$, *получается из непрерывной на всей области функции* $f_1(x)$ *путем деформации последней на счетном множестве отрезков, сумма длин которых не превышает* ε.

Этот результат дает представление о *течении* значений измеримой функции в области $[0, 1]$. Но можно пойти и далее.

Рассмотрим совершенное множество P_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), о котором была речь в конце § 7. Образуя [1]) для множества P_n только что указанным приемом непрерывную на всей области $[0, 1]$ функцию $f_n(x)$, совпадающую с $f(x)$ на P_n, и линейную на смежных к P_n интервалах, приходим, очевидно, к результату:

Значения произвольной измеримой функции $f(x)$, *конечной почти всюду на* $[0, 1]$, *получаются всюду за исключением множества меры нуль путем взятия значений от счетного числа функций* $f_1, f_2, \ldots, f_3, \ldots$, *из которых каждая непрерывна на всей области* $[0, 1]$.

Легко видеть, что справедливо и обратное, именно, что всякая функция $f(x)$, получающаяся этим путем, есть *измеримая* функция, потому что обладает (C)-свойством.

Таким образом, в тех вопросах, где пренебрегают множествами меры, меньшей ε, или нуль-множествами, вместо измеримой функции $f(x)$ достаточно рассматривать одну только функцию, непрерывную на всей области $[0, 1]$, или счетное число таких функций. Так как понятие и свойства непрерывной на $[0, 1]$ функции суть наиболее простые, то этим замечанием во многих вопросах анализа и теории функций

---

1) Принимая за множество $\mathfrak{M}$ всю область $[0, 1]$.

достигается значительное упрощение, потому что этим обходят рассмотрение всей сложности *разрывов* измеримых функций и сводят дело к рассматриванию только *непрерывных* функций. Произвольная измеримая функция, т. е. наиболее общая и единственно возможная[1]) функция анализа, оказывается, не содержит, несмотря на все свои разрывы, ничего в своей структуре кроме классической непрерывности, если, понятно, пренебрегают нуль-множествами.

9. Дифференциальное свойство измеримых функций. Основная теорема § 7 об измеримых функциях дает возможность притти к определенным заключениям и относительно течения произвольной измеримой функции $f(x)$ в бесконечной близости с точкой области [0, 1].

Рассмотрим для этого совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > 1 - \varepsilon$, на котором $f(x)$ есть непрерывная функция. Пусть ξ есть точка плотности (§ 3) этого множества. Возьмем какой-либо малый интервал δ, содержащий ξ внутри, и будем рассматривать длину δ как бесконечно малое *первого* порядка. Так как ξ есть точка плотности множества P, то сумма длин всех смежных к P интервалов, имеющих точки на δ, есть бесконечно малое порядка *выше* первого. Отсюда заключаем, что функция $f(x)$ получена из непрерывной функции путем деформации последней около точки ξ на счетном числе отрезков, общая сумма которых есть бесконечно малое порядка выше первого.

Множество всех точек ξ, обладающих этим свойством, есть множество меры 1, так как часть этого множества, лежащая на P, имеет меру P (§ 3), а $\operatorname{mes} P > 1 - \varepsilon$, и ε мало как угодно.

Отсюда заключаем, что, *отвлекаясь от бесконечно малых порядка выше первого, измеримая функция тождественна с непрерывной функцией в бесконечной близости со всякой точкой области* [0, 1], *кроме, быть может, нуль-множества.*

Это дифференциальное свойство измеримых функций позволит нам впоследствии вывести необходимый и достаточ-

---

[1]) Всякая аналитически представимая функция [[13]] есть измеримая функция. См. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement (Journ. des Math., 1905, стр. 139—216).

ный признак сходимости тригонометрических рядов Фурье-Лебега для функций с интегрируемым квадратом.

10. Дифференциальное свойство второго порядка измеримых множеств. Все рассмотренные до сих пор общие свойства измеримых множеств и функций, а также только что описанное дифференциальное свойство измеримых функций, суть в сущности следствие только двух теорем: теоремы Лебега о его интеграле и теоремы Д. Ф. Егорова. Но обе эти теоремы доказываются с помощью рассмотрения *абсолютных величин* некоторых аналитических выражений. И, повидимому, пользуясь рассмотрением только абсолютных величин, нельзя получить еще каких-либо новых свойств измеримых множеств и функций.

Но, однако, существует еще одно общее свойство, принадлежащее всем измеримым множествам без исключения и измеримым функциям с интегрируемым квадратом. Этому свойству соответствует новое дифференциальное свойство измеримых множеств и функций с интегрируемым квадратом. Это свойство было обнаружено нами [1]) и доказано лишь помощью теорем Парсеваля-Фату и Фишера-Рисса о тригонометрических рядах. Повидимому, оно не может быть получено путем рассмотрения абсолютных величин: наши попытки вывести это свойство из теорем Лебега и Д. Ф. Егорова не имели успеха.

Это свойство имеет большую важность для учения о сходимости тригонометрических рядов Фурье-Лебега и, вероятно, для единственности изображения функций тригонометрическими рядами и, следовательно, для общей теории интеграла. Поэтому было бы важно и интересно доказать это свойство непосредственно из определения измеримого множества.

Так как соответствующее дифференциальное свойство измеримых множеств является более тонким, чем указанное ранее (§ 3), и делающим счет бесконечно малым порядка выше первого, то его можно назвать *дифференциальным свойством второго порядка.* Мы встретимся с этим свойством в главе V (§§ 70, 71).

---

[1]) См. «Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier», Comptes Rendus, 2 июня 1913 г.

11. Следствия основной теоремы. Укажем несколько важных следствий этой теоремы.

Теорема 1. *Предел последовательности непрерывных функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., *сходящейся почти всюду на* $[0, 1]$, *есть измеримая функция.*

В самом деле, как бы мало ни было положительное ε, всегда существует в силу теоремы Д. Ф. Егорова совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > 1 - \varepsilon$, на котором последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ сходится равномерно. Но так как f_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) непрерывна на $[0, 1]$ и, значит, на P, то предельная функция $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ есть тоже непрерывная на P функция, т. е. обладающая на $[0, 1]$ (C)-свойством (§ 7), что доказывает теорему.

Теорема 2. *Всякая измеримая функция* $f(x)$, *конечная почти всюду на* $[0, 1]$, *есть предел последовательности непрерывных функций* $f_1, f_2, f_3, \ldots$, *сходящейся почти всюду на* $[0, 1]$.

В самом деле, обращаясь к следствию основной теоремы (§ 7), обозначим [1]) через π_n совершенное множество $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$; пусть $f_n(x)$ есть функция, совпадающая с $f(x)$ на π_n и линейная в смежных к множеству π_n интервалах. Ясно, что $f_n(x)$ есть непрерывная на всей области $[0, 1]$ функция. Ясно также, что имеем $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ (ч. т. д.).

Теорема Витали [2]). *Для всякой измеримой функции* $f(x)$, *конечной почти всюду на* $[0, 1]$, *существует такая функция* $f_1(x)$, *конечная во всякой точке* x *области* $[0, 1]$ *и класса не выше* 2 *по классификации* Бэра, *с которой* $f(x)$ *совпадает почти всюду на* $[0, 1]$.

В самом деле [14], обращаясь к следствию основной теоремы (§ 7), обозначим через $f_n(x)$ функцию, совпадающую с $f(x)$ на P_n и равную нулю вне P_n. Очевидно [3]), что $f_n(x)$ есть функция класса не выше 1. Ряд $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$

---

[1]) Принимая за множество $\mathfrak{M}$ всю область $[0, 1]$.

[2]) См. Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre, т. II.

[3]) Применяя основную теорему Бэра о функциях классов 0 и 1. См. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, 1905, Paris (стр. 124 и 126).

сходится *во всякой* точке x на $[0, 1]$. Следовательно, его сумма есть функция класса не выше 2. Обозначим ее через $\Phi(x)$. Ясно, что имеем $f(x) = \Phi(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ (ч. т. д.).

Эта теорема имеет значение для общей теории интеграла, так как в последней всегда пренебрегают нуль-множествами. Следовательно, для указанной теории достаточно ограничиться рассмотрением функций классов 0, 1 и 2.

Теорема Фреше[1]). *Для всякой измеримой функции* $f(x)$, *конечной почти всюду на* $[0, 1]$, *существует ряд полиномов* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x)$, *абсолютно сходящийся к* $f(x)$ *почти всюду на* $[0, 1]$.

В самом деле, пусть $f_n(x)$ есть непрерывная функция теоремы 2 настоящего параграфа. Согласно теореме Вейерштрасса существует полином $Q_n(x)$, такой, что

$$|f_n(x) - Q_n(x)| < \frac{1}{2^n} \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ясно, что ряд полиномов $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x)$, где $\mathfrak{P}_1(x) = Q_1(x)$ и $\mathfrak{P}_{n+1}(x) = Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$ удовлетворяет теореме (ч. т. д.).

Эта теорема имеет значение для теории тригонометрических рядов. В самом деле, если бы существовала такая измеримая функция $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, которая была бы непредставимой никаким рядом непрерывных функций на $[0, 2\pi]$, сходящимся к $f(x)$ почти всюду, тогда относительно этой $f(x)$ можно было бы заведомо утверждать, что $f(x)$ непредставима никаким тригонометрическим рядом. В силу же теоремы 2 и теоремы Фреше видим, что нельзя отвергать à priori разложимость произвольной измеримой функции $f(x)$ в тригонометрический ряд [15].

1) M. Fréchet, Thèse, Paris, 1905. См. также «Encyclopédie des Sciences Mathématiques», т. II, ч. 1, вып. 2, стр. 222.

ГЛАВА II

ОТЫСКАНИЕ ПРИМИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Обращение задачи дифференцирования

12. Обычно интегрирование определяют как операцию, обратную дифференцированию; это есть операция, позволяющая решить следующую задачу примитивных функций:

Найти функцию $F(x)$, имеющую данную функцию $f(x)$ своей производной.

Коши первый нашел решение этой задачи для того случая, когда данная функция $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, 1]$. Он первый дал регулярный процесс, весьма известный процесс определенного интеграла, позволяющий, отправляясь от данной непрерывной функции $f(x)$, получить ее примитивную $F(x)$. Но вскоре же процесс, предложенный Коши, оказался недостаточным; потребности механики, геометрии (определение величины площади, заключенной между кривой и ее асимптотой), анализа (определение коэффициентов тригонометрического ряда в случае, когда его сумма оказывалась разрывной функцией) и теории функций (собственно задача отыскания примитивной функции) привели к необходимости искать примитивную функцию и в том случае, когда данная функция $f(x)$ была разрывной или неограниченной. Таким образом возник ряд работ, позволяющих определять примитивную функцию для все более и более широкого класса задаваемых функций $f(x)$. Среди авторов, способствовавших, таким образом, расширению понятия интеграла, мы должны, прежде всего, привести имена Римана, Дирихле, Дюбуа-Реймона, Гарнака, Лебега и Данжуа.

Этот длинный ряд работ [1]), расширяющих более и более понятие интеграла, оканчивается в данный момент работами Данжуа [2]). Данжуа предложил регулярный процесс интегрирования, названный им *тотализацией* (la totalisation), позволяющий находить примитивные функции и в тех случаях, когда все ранее предложенные процессы интегрирования оказывались неприменимыми; в том же случае, когда оказывается применимым один из этих процессов, тогда применим и процесс Данжуа. Таким образом, определение интеграла, данное Данжуа, есть самое широкое из полученных до сих пор, включающее в себя все данные ранее как частные случаи [16].

Но процесс Данжуа оказывается далеко недостаточным для решения общей задачи отыскания примитивной функции. Все функции $f(x)$, к которым применим процесс Данжуа, обладают достаточно частными свойствами. Так, например, для того чтобы $f(x)$ была интегрируема в смысле Данжуа во всяком интервале Δ, лежащем в области $[0, 1]$, необходимо [3]) должен находиться интервал δ, на котором $f(x)$ интегрируема в смысле Лебега. Уже это одно условие показывает, что класс функций, интегрируемых в смысле Данжуа, есть лишь небольшая часть класса всех вообще измеримых функций $f(x)$. И так как, существуют, с одной стороны, сходящиеся тригонометрические ряды, сумма которых не интегрируема в смысле Лебега ни в каком интервале [4]), и существуют, с другой стороны, непрерывные функции $F(x)$, производная которых $F'(x)$, будучи конечной почти всюду

---

[1]) Мы ограничиваемся лишь самыми краткими историческими указаниями. Полное изложение с исторической точки зрения расширения понятия интеграла могло бы служить предметом отдельной работы. Относительно упомянутых авторов см. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris, 1904, стр. 9, 13—14, 24, 112; Hobson, The Theory of Functions of a real variable, Cambridge, 1907, стр. 366, 367, 377, 378.

[2]) Denjoy, Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue (Comptes Rendus, 1 апреля 1912 г.); Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale (Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г.).

[3]) Это условие необходимо, но далеко не достаточно для интегрируемости функции в смысле Данжуа.

[4]) В главе V мы даем пример такого тригонометрического ряда. См. § 74.

на [0, 1], опять не интегрируема ни в каком интервале, лежащем на [0, 1] [17], то мы видим отсюда, что процесс Данжуа не в состоянии решить ни упомянутой выше задачи анализа относительно тригонометрических рядов, ни задачи теории функций — отыскания примитивной функции для данной. Поэтому законно искать более общий процесс интегрирования, более полное решение задачи отыскания примитивной.

13. В этой главе мы имеем в виду дать общее решение поставленной в предыдущем параграфе задачи о примитивных функциях. Решение это нам кажется полным и исчерпывающим вопрос.

Прежде чем приступить к этому решению, нам нужно точно выяснить условия поставленной задачи отыскания примитивной и ввести точную терминологию.

Пусть $F(x)$ есть *непрерывная* функция в области [0, 1]. Пусть ξ есть какая-либо внутренняя точка этой области. Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}.$$

Пусть h стремится к нулю, проходя *все* значения. Здесь могут быть три случая:

1°. Отношение не стремится ни к какому пределу, колеблясь между конечными или бесконечными границами. Скажем в этом случае, что функция $F(x)$ *совсем не имеет в точке* ξ *производной.*

2°. Отношение стремится к конечному пределу. Мы говорим, что в этом случае $F(x)$ имеет производную в точке ξ, равную пределу этого отношения, и обозначаем этот предел через $F'(\xi)$.

3°. Отношение стремится к $+\infty$ (или к $-\infty$). В этом случае мы также говорим, что $F(x)$ имеет производную в точке ξ, равную $+\infty$ (или равную $-\infty$) [1]).

---

[1]) Мы рассматриваем, по определению, $+\infty$ как число, *большее* всех конечных чисел, и соответственно $-\infty$ как число, *меньшее* всех конечных чисел. Введение этих двух символов очень полезно для многих вопросов теории функций. См. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris, 1905, стр. 120—121.

Таким образом, мы присоединяем к области всех конечных чисел две бесконечные величины: $+\infty$ и $-\infty$.

Если непрерывная на $[0, 1]$ функция $F(x)$ имеет производную почти всюду в области $[0, 1]$, то, обозначая через $f(x)$ эту производную там, где она существует, мы говорим, что $f(x)$ есть *производная функция от* $F(x)$ и $F(x)$ есть *примитивная функция для* $f(x)$.

Можно думать, что это определение примитивной слишком обще и что нужно рассматривать как примитивные функции только такие функции $F(x)$, которые *в каждой* без исключения точке x области $[0, 1]$ имеют производную. Но это мнение было бы ошибочным по следующим основаниям: во-первых, неопределенный интеграл [1]) Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, ценность которого для анализа и теории функций неоспорима, часто есть непрерывная функция, не имеющая производной в бесконечном множестве точек x (но всегда, понятно, меры нуль). Можно даже построить [2]) такую *ограниченную* измеримую функцию $f(x)$,

---

[1]) Слегка уклоняясь от обычной терминологии, мы здесь и в дальнейшем называем *неопределенным интегралом* от $f(x)$, заданной в области $[0, 1]$, интеграл $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, рассматриваемый как *функция* верхнего предела, независимого переменного x. Эта терминология для нас удобна в дальнейшем.

[2]) Мы ограничиваемся указанием на то, что такую функцию можно построить, и не даем ее построения потому, что *действительное построение* этой функции взяло бы у нас много места [18]. Все, кто писали по теории функций действительного переменного, все те хорошо знают, как трудно в такого рода вещах быть одновременно и строгим и кратким. Поэтому здесь и в дальнейшем мы часто ограничиваемся простым утверждением существования примера такой-то и такой-то функции или ограничиваемся указанием на справедливость такой-то теоремы (второстепенного значения), желая возможно сократить размер нашей работы. Построение примеров функций, о которых идет речь, не требует особого искусства, а лишь технического умения пользоваться методами теории функций действительного переменного. Опускание фактического построения примеров различных функций совершенно аналогично тем пропускам аналитических преобразований, которые часто делаются в работах в области классического анализа, когда эти преобразования слишком длинны и требуют только технического умения.

что интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ не имеет производной на множестве, *всюду плотном* на [0, 1] и *всюду категории* II [19] [1]). Во-вторых, можно построить [2]) такую функцию $f(x)$, определенную *в каждой точке* x области [0, 1], суммируемую на [0, 1] и являющуюся производною в каждой точке x области [0, 1] от некоторой непрерывной функции $F(x)$, что неопределенный интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть уже непрерывная функция, не имеющая производной в бесконечном множестве точек [21]. Таким образом, даже тогда, когда подинтегральная функция $f(x)$ *есть* производная *в каждой* точке, интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, тем не менее, *не имеет в некоторых точках производной*, будучи примитивной в данном выше смысле. Но всякий неопределенный интеграл $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ в смысле Данжуа и в любом другом смысле есть всегда непрерывная функция, имеющая $f(x)$ своей производной почти всюду [22]. Это вполне оправдывает нашу терминологию.

Теперь, приняв эти определения, возвратимся к задаче отыскания примитивной:

А) *Найти функцию $F(x)$, имеющую данную функцию $f(x)$ своей производной.*

Эта задача, очевидно, эквивалентна совокупности двух следующих задач:

В) *Найти необходимые и достаточные условия, чтобы $f(x)$ имела примитивную функцию.*

---

[1]) Известно, что множество всюду категории II, лежащее в области [0, 1], должно быть рассматриваемо как точечное образование, чрезвычайно сгущенное даже тогда, когда мера его равна нулю. Так, всякие два множества E_1 и E_2, оба всюду категории II на [0, 1], непременно имеют общие точки, образующие опять множество всюду категории II на [0, 1]. Всякое множество категории II имеет мощность континуума [20]. См. Baire, Sur les fonctions de variables réelles Annali di Matematica, сер. III, т. 3, стр. 66.

[2]) Относительно этого примера см. еще далее, гл. III, § 22.

C) *Зная, что эти условия удовлетворены для* $f(x)$, *найти примитивную функцию.*

Мы переходим к решению этих задач.

Отыскание примитивных фуикций

Необходимые условия

14. Найдем сначала необходимые условия для того, чтобы функция $f(x)$, определенная почти всюду на $[0, 1]$, имела примитивную функцию. Здесь имеют место два предложения.

Теорема 1. *Если* $f(x)$ *имеет примитивную функцию, то* $f(x)$ *есть измеримая функция.*

В самом деле, пусть $F(x)$ есть примитивная для $f(x)$. Обозначая через $f_n(x)$ непрерывную функцию

$$\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{\frac{1}{n}},$$

видим, что последовательность $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ непрерывных функций сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$, что, вследствие теоремы 1, § 11, доказывает предложение.

Теорема 2. *Не существует непрерывной функции* $F(x)$, *имеющей* $F'(x) = +\infty$ *и* $F'(x) = -\infty$ *на множестве точек меры, большей нуля.*

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы [28], так как оно уже было нами опубликовано в журнале «Математический сборник» 1).

Эти две теоремы дают нам искомые необходимые условия существования примитивной. Эти условия можно формулировать в следующей форме: *для того чтобы функция* $f(x)$ *имела примитивную, необходимо, чтобы* $f(x)$ *была измеримой функцией, конечной почти всюду на* $[0, 1]$.

1) *К основной теореме интегрального исчисления* (Математический сборник, т. 28, стр. 275). Sur les propriétés des fonctions mesurables (Comptes Rendus, 17 июня 1912 г.). См. также относительно этой теоремы: M-me Young, A note on Derivates and Differential Coefficients (Acta Mathematica, т. 37, стр. 147).

Достаточные условия

15. Теперь мы имеем в виду доказать, что эти условия являются и *достаточными* [1]). Чтобы видеть это, мы прямо построим примитивную для $f(x)$, предполагая удовлетворенными эти необходимые условия. Этим мы одновременно решим задачи (B) и (C) § 13. Но сначала нам нужен один предварительный результат.

Лемма. *Какова бы ни была непрерывная функция* $\Phi(x)$, *данная на области* $[0, 1]$, *всегда существует в этой области непрерывная функция* $\Psi(x)$, *обладающая свойствами*:

1°. $\Psi'(x) = 0$ *почти всюду на* $[0, 1]$.

2°. $\Psi(0) = \Phi(0)$ и $\Psi(1) = \Phi(1)$.

3°. $|\Phi(x) - \Psi(x)| < \varepsilon$ *на* $[0, 1]$, *где* $\varepsilon > 0$, *малое по желанию*.

В самом деле, так как $\Phi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то область $[0, 1]$ можно разделить на конечное число (пусть λ) столь малых отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_\lambda$, что колебание функции $\Phi(x)$ на каждом из них есть $< \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть концы отрезка Δ_i суть a_i, b_i. Строим теперь над отрезком $\Delta_i = [a_i, b_i]$ монотонную ступенчатую кривую, проходящую через обе точки:

$$[x = a_i, \quad y = \Phi(a_i)] \quad \text{и} \quad [x = b_i, \quad y = \Phi(b_i)]$$

и имеющую касательную почти всюду на $[a_i, b_i]$, параллельную оси x-ов. Такую ступенчатую кривую легко построить [25], хотя бы методом Кантора, деля Δ_i на три части [2]).

Совокупность λ таких кривых, построенных над Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \ldots, \Delta_\lambda$ дает непрерывную на $[0, 1]$ кривую $y = \Psi(x)$; функция $\Psi(x)$, очевидно, удовлетворяет лемме (ч. т. д.).

Переходим теперь к доказательству главного результата.

Основная теорема. *Для всякой измеримой функции* $f(x)$, *конечной почти всюду на* $[0, 1]$, *существует ее примитивная* $F(x)$.

---

[1]) Доказательство достаточности этих условий уже было нами опубликовано в Математическом сборнике (т. 28, стр. 293—294). Здесь мы имеем в виду дать новое доказательство достаточности этих условий; это последнее доказательство кажется нам значительно проще первого [24].

[2]) Cantor, Acta Mathematica, т. 4, стр. 386. См. также Scheeffer'а; Acta Mathematica, т. 5, стр. 289.

Доказательство.

а) Элементы построения примитивной. Рассмотрим для данной функции $f(x)$ совершенные множества $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$, на каждом из которых в отдельности функция $f(x)$ непрерывна. Согласно § 7 множества P_n могут быть предположенными не имеющими попарно общих точек и такими, что

$$\operatorname{mes}(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n + \ldots) = 1.$$

Далее можно, очевидно, всегда предполагать, что концы области [0, 1] не принадлежат ни одному P_n.

Пусть все смежные к множеству P_n интервалы суть

$$\delta_1^{(n)},\ \delta_2^{(n)},\ \delta_3^{(n)},\ \ldots,\ \delta_\lambda^{(n)} \ldots$$

Выберем число λ_n столь большим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mes} \delta_{\lambda_n+i}^{(n)} < \operatorname{mes} P_n.$$

Удалим из области [0, 1] интервалы

$$\delta_1^{(n)},\ \delta_2^{(n)},\ \delta_3^{(n)},\ \ldots,\ \delta_{\lambda_n}^{(n)}.$$

Оставшиеся точки области [0, 1] образуют систему $\lambda_n - 1$ отрезков, из которых длина каждого *не* равна нулю. Пусть эти отрезки суть

$$\Delta_1^{(n)},\ \Delta_2^{(n)},\ \ldots,\ \Delta_{\lambda_n-1}^{(n)}. \tag{1}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{\lambda_n-1} \operatorname{mes} \Delta_i^{(n)} < 2 \operatorname{mes} P_n$. Пусть длина наименьшего из этих отрезков есть g_n, $g_n > 0$.

Определим последовательность измеримых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ условием, чтобы

$$f_n(x) = f(x) \text{ на множестве } P_n,$$
$$f_n(x) = 0 \text{ вне } P_n.$$

Далее, пусть функция $\Phi_n(x)$ есть интеграл Лебега от $f_n(x)$, т. е. $\Phi_n(x) = \int\limits_0^x f_n(\alpha)\, d\alpha$. Ясно, что $\Phi_n(x)$ есть непрерывная функция на $[0, 1]$, постоянная в каждом смежном интервале $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_\lambda^{(n)}, \ldots$

Пусть, наконец, функция $\Psi_n(x)$ есть функция, обладающая свойствами:

1°. $\Psi_n(x)$ непрерывная на $[0, 1]$.

2°. $\Psi_n(x) = \Phi_n(x)$ на интервалах $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \delta_3^{(n)}, \ldots, \delta_{\lambda_n}^{(n)}$.

3°. $\Psi'_n(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$.

4°. $|\Phi_n(x) - \Psi_n(x)| < \frac{g_n}{2^n}$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Согласно лемме этого параграфа такие $\Psi_n(x)$ существуют. Полагая

$$F_n(x) = \Phi_n(x) - \Psi_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

получаем, очевидно, функции, обладающие свойствами:

1°. $F_n(x)$ непрерывна на $[0, 1]$.

2°. $|F_n(x)| < \frac{g_n}{2^n}$ на всей области $[0, 1]$.

3°. $F_n(x) = 0$ на интервалах $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{\lambda_n}^{(n)}$.

4°. $F'_n(x) = f(x)$ почти всюду на P_n.

Последовательность построенных таким образом функций

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots, F_n(x), \ldots$$

дает возможность непосредственно получить искомую примитивную функцию для данной функции $f(x)$. Для этого полагаем

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x). \tag{2}$$

В силу свойства 2° функции $F_n(x)$ ($g_n < 1$) ясно, что ряд (2) абсолютно и равномерно сходится всюду на $[0, 1]$. Значит, $F(x)$ есть *непрерывная* функция. Мы желаем доказать, что $F(x)$ *есть искомая примитивная функция для данной* $f(x)$.

b) С в о й с т в а с и с т е м ы ф у н к ц и й $F_1(x), F_2(x), \ldots$ $\ldots, F_n(x), \ldots$ Рассмотрим функции $F_n(x)$. Согласно свойству 4° имеем $F'_n(x) = f(x)$ почти всюду на P_n. Обозначим множество всех точек множества P_n, где $F'_n(x) \neq f(x)$, через K_n:

$$\operatorname{mes} K_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ясно, что вне множества P_n имеем $F'_n(x) = 0$, кроме, быть может, некоторого нуль-множества. Обозначим это нуль-множество через L_n:

$$\operatorname{mes} L_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Назовем через S множество

$$K_1 + L_1 + K_2 + L_2 + \ldots + K_n + L_n + \ldots$$

Имеем

$$\operatorname{mes} S = 0.$$

Из построения множества S следует, что во всякой точке x, не принадлежащей к S, каждая из функций $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ имеет производную и притом так, что непременно одна и только одна из этих производных $F'_1(x), F'_2(x), \ldots, F'_n(x), \ldots$ равна $f(x)$, все же остальные непременно равны нулю.

c) Построение основного множества R. Возьмем рассмотренные выше отрезки (1):

$$\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \ldots, \Delta_{\lambda_n - 1}^{(n)}.$$

Присоединяем к каждому из этих $\lambda_n - 1$ отрезков два равных отрезка, справа и слева, длины каждый g_n. Обозначим полученную этим образом систему отрезков (частью, может быть, и пересекающихся) через

$$U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)}, \ldots, U_{\lambda_n - 1}^{(n)}. \tag{3}$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{\lambda_n - 1} \operatorname{mes} U_i^{(n)} \leqslant 3 \sum_{i=1}^{\lambda_n - 1} \operatorname{mes} \Delta_i^{(n)} \leqslant 3 \cdot 2 \operatorname{mes} P_n = 6 \operatorname{mes} P_n.$$

Значит, все точки, принадлежащие системе отрезков (3), образуют множество меры $\leqslant 6 \operatorname{mes} P_n$. Обозначим это множество через E_n; $\operatorname{mes} E_n \leqslant 6 \operatorname{mes} P_n$. Отсюда видим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} E_n$ есть сходящийся. Поэтому множество, образованное из всех точек области [0, 1], принадлежащих каждая к *бесконечному числу* множеств $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$, есть нуль-множество [1]).

Назовем через $\mathfrak{M}$ множество всех точек области [0, 1], не принадлежащих к этому нуль-множеству. Ясно, что всякая точка $\mathfrak{M}$ встречается лишь в *конечном* числе множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$

Имеем

$$\operatorname{mes} \mathfrak{M} = 1.$$

Удалим, наконец, из множества $\mathfrak{M}$ все точки, принадлежащие к построенному выше множеству S. Обозначая полученное этим путем множество через R, имеем:

$$\operatorname{mes} R = 1.$$

Назовем это множество R *основным.*

d) Существование примитивной функции. Нам остается теперь доказать, что *во всякой точке этого основного множества R непрерывная функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$.*

Пусть, в самом деле, ξ есть какая-либо точка множества R.

Имеем

$$\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\xi+h)-F_n(\xi)}{h}.$$

Так как по условию точка ξ принадлежит к R и, значит, к $\mathfrak{M}$, то, самое большее, лишь *конечное* число множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ содержит эту точку. Следовательно,

---

[1]) В самом деле, это множество есть часть множества $E_{n+1} + E_{n+2} + E_{n+3} + \ldots$, каково бы ни было n, а это последнее множество имеет меру, стремящуюся к нулю с $\frac{1}{n}$. Множество, о котором идет речь в тексте, есть [26] верхний предел последовательности множеств. См. Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, т. I, § 270, стр. 251. [В русском переводе: Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, т. I, § 81, стр. 65. *Ред.*]

можно взять целое число N столь большим, что ξ не будет содержаться в множествах $E_{N+1}, E_{N+2}, E_{N+3}, \ldots$ Следовательно, для каждого $n > N$ точка ξ есть непременно внутренняя точка для одного из интервалов $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{\lambda_n}^{(n)}$.

Отсюда по свойству 3° функции $F_n(x)$ имеем

$$F_n(\xi) = 0, \quad n > N,$$

и, значит:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{F_n(\xi+h) - F_n(\xi)}{h} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{F_n(\xi+h)}{h}.$$

Пусть для какого-нибудь n $(n > N)$ имеем $|F_n(\xi+h)| > 0$. Это значит, что точка $\xi+h$ находится вне интервалов $\delta_1^{(n)}$, $\delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{\lambda_n}^{(n)}$, т. е. внутри одного из отрезков $\Delta_1^{(n)}$, $\Delta_2^{(n)}, \ldots, \Delta_{\lambda_n-1}^{(n)}$. Но точка ξ находится вне множества E_n, следовательно, вне отрезков $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_{\lambda_n-1}^{(n)}$. Отсюда необходимо заключаем, что $|h| > g_n$.

Поэтому можем писать

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{F_n(\xi+h)}{h} \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|F_n(\xi+h)|}{|h|} < \sum_{n>N} \frac{|F_n(\xi+h)|}{g_n},$$

удерживая в последней сумме только те члены, для которых $|F_n(\xi+h)| > 0$. Но так как по свойству 2° функции $F_n(x)$ имеем для всякого n на области $[0, 1]$

$$|F_n(x)| < \frac{g_n}{2^n},$$

то

$$\sum_{n>N} \frac{|F_n(\xi+n)|}{g_n} < \sum_{n>N} \frac{g_n}{g_n \cdot 2^n} \leqslant \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^N}.$$

Отсюда приходим к неравенству:

$$\left| \frac{F(\xi+h) - F(\xi)}{h} - \sum_{m=1}^{N} \frac{F_m(\xi+h) - F_m(\xi)}{h} \right| < \frac{1}{2^N}.$$

Здесь N есть постоянное число, число же h произвольное. Устремляя h к нулю, видим из последнего неравенства, что каждое из четырех производных чисел функции $F(x)$ в точке $x=\xi$ отличается от

$$F_1'(\xi)+F_2'(\xi)+\ldots+F_N'(\xi)$$

на величину, меньшую $\frac{1}{2^N}$. Число N можно делать сколь угодно великим. Кроме того, по свойству множества R, к которому ξ принадлежит, известно, что, начиная с определенного достаточно большого числа N_1, имеем для $N>N_1$

$$F_1'(\xi)+F_2'(\xi)+\ldots+F_N'(\xi)=f(\xi).$$

Отсюда заключаем, что все четыре производные числа от функции $F(x)$ в точке $x=\xi$ равны $f(\xi)$, т. е.

$$F'(\xi)=f(\xi)$$

(ч. т. д.).

Таким образом, найденные в § 14 необходимые условия оказываются также и достаточными. Этим разрешаются [1]) задачи (B) и (C) § 13.

Приложения основной теоремы о существовании примитивной

I. Невозрастающая функция с положительной производной

16. Пусть $f(x)$ есть измеримая функция, конечная для всякого x области $[0, 1]$, и такая, что $f(x)>+1$ всюду на $[0, 1]$. Пусть, кроме того, $f(x)$ не суммируема ни в каком интервале δ, лежащем на $[0, 1]$. Такие $f(x)$ легко построить.

Пусть согласно основной теореме $F(x)$ есть примитивная для $f(x)$. Легко видеть что $F(x)$ не есть функция, монотонная ни в каком интервале δ области $[0, 1]$, так как

---

[1]) Множество R, $\operatorname{mes} R=1$, во всякой точке ξ которого имеем $F'(\xi)=f(\xi)$, есть, очевидно, множество категории I. Интересно было бы знать, в каких условиях существует непрерывная $F(x)$, имеющая $F'(x)=f(x)$ в точках множества *категории* II (хотя бы и меры нуль) [[27]].

в противном случае $f(x)$ была бы суммируемой [1]) на δ, что противоречит предположению относительно функции $f(x)$.

Следовательно, примитивная $F(x)$ дает нам *пример непрерывной функции, имеющей почти всюду производную $> +1$ и не возрастающей ни в каком интервале δ области* $[0, 1]$.

Существование таких непрерывных функций не является очевидным à priori.

II. Общее решение задачи Дирихле для круга

17. Известно, что интеграл Пуассона

$$P(\rho, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - x)} d\alpha$$

дает решение задачи Дирихле для круга в случае, когда функция $f(x)$ есть *непрерывная* функция. В этих условиях $P(\rho, x)$ есть гармоническая функция, голоморфная внутри круга радиуса 1 и принимающая на окружности в точке аргумента x значение $f(x)$.

Но случай *непрерывной* функции $f(x)$ есть лишь частный случай общей задачи Дирихле, которая должна ставиться следующим образом: *дана на окружности* ($R = 1$) *функция $f(x)$, вообще, разрывная, аргумента x. Найти гармоническую функцию $P(\rho, x)$, голоморфную внутри этой окружности и принимающую в точке аргумента x значение $f(x)$.*

Чтобы поставленная задача была вполне определенной, нужно дать точный смысл выражению «*принимать значение*». Скажем, что гармоническая функция $P(\rho, x)$ принимает значение $f(x)$ в точке x окружности, если число $P(\rho, x)$ стремится к пределу, равному $f(x)$, когда точка (ρ, x) приближается к точке $(1, x)$, *следуя по кривой, не касающейся окружности.*

Фату решил [2]) [29] эту задачу Дирихле для того случая, когда функция $f(x)$ суммируема на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. В этом

---

[1]) Всякая монотонная функция имеет производную непременно суммируемую [28]. См. Hobson, The Theory of Functions etc., стр. 557.

[2]) Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Math. т. 30, стр. 363 и 373).

случае произведение

$$f(\alpha)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-x)}$$

есть опять суммируемая функция, и Фату доказал, что тогда интеграл Пуассона, взятый в смысле Лебега, дает решение поставленной задачи.

Заметим еще, что в случае интеграла Пуассона-Лебега гармоническая функция $P(\rho, x)$ принимает значение $f(x)$ для всех x *кроме*, может быть, *нуль-множества*. Во многих случаях это нуль-множество является необходимым исключением [1]).

Доказанная нами выше основная теорема дает решение задачи Дирихле для того случая, когда данная функция $f(x)$ есть измеримая функция, *конечная* почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Условие *измеримости* функции $f(x)$ есть *необходимое* условие, так как, если существует искомая гармоническая $P(\rho, x)$, то имеем почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$\lim_{\rho\to 1} P(\rho, x) = f(x),$$

и, значит, функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций, а это доказывает (§ 11) ее измеримость.

Напротив, то условие, чтобы $f(x)$ была *конечной* почти всюду, это условие при настоящем состоянии теории функций комплексного переменного является еще *невыясненным*. Неизвестно, в самом деле, существует ли функция комплексного переменного $\varphi(z)$, голоморфная внутри круга $(R=1)$, модуль которой $|\varphi(z)|$ принимает значение $+\infty$ на окружности круга в точках множества меры, *большей* нуля. Но существование таких $\varphi(z)$ кажется сомнительным [81].

---

1) Легко видеть это à priori. В самом деле, если бы мы имели равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(1-\frac{1}{n},\ x\right)=f(x)$ для *всякой* точки x, находящейся на дуге σ окружности $(R=1)$, то ясно, что тогда $f(x)$ есть функция класса 0 или 1 на этой дуге σ. А вообще измеримая функция $f(x)$ не есть класса 0 или 1 и не может быть превращена в функцию класса 0 или 1 путем изменения ее величин на каком-либо нуль-множестве [30]. См. относительно этого гл. III, § 20.

После этих замечаний переходим к общему решению задачи Дирихле.

Теорема. *Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, конечная почти всюду на окружности ($R=1$), всегда существует гармоническая функция $P(\rho, x)$, голоморфная внутри этой окружности и принимающая в точке аргумента x значение $f(x)$ почти всюду на окружности.*

Возьмем согласно основной теореме примитивную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$. Рассмотрим выражение

$$P(\rho, x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-x)}d\alpha.$$

Так как функция $F(\alpha)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, то написанный интеграл есть обычный интеграл Коши. Ясно, что $P(\rho, x)$ есть гармоническая функция, голоморфная внутри круга ($R=1$). Фату доказал[1]), что для тех точек x_0, где существует $F'(x_0)$, необходимо имеем

$$\lim P(\rho, x)=F'(x_0),$$

когда точка (ρ, x) стремится к точке $(1, x_0)$, следуя любому пути, не касающемуся окружности [82].

И так как $F'(x)=f(x)$ почти всюду, то теорема доказана.

Задача отыскания неопределенного интеграла

18. Понятие регулярного процесса. Ближайшей нашей целью является изучение примитивных функций $F(x)$, существование которых доказано в основной теореме. Прежде всего ясно, что если $F(x)$ есть примитивная функция для данной $f(x)$, то примитивной же функцией будет и $F(x)+K$, где K — произвольная постоянная. Важно поэтому исключить раз навсегда эту аддитивную константу, не играющую никакой роли в свойствах примитивной. Этого достигаем, полагая $K=-F(0)$. Таким образом, в последующем мы будем рассматривать только такие примитивные $F(x)$, для которых $F(0)=0$. Этим не уменьшается общность рассмотрений.

---

1) Fatou, Acta Math., т. 30, стр. 348.

Если $f(x)$ есть интегрируемая функция в каком-либо данном ранее смысле (Коши, Римана, Дюбуа-Реймона, Гарнака, Лебега или Данжуа), то *неопределенный интеграл*

$$\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha,$$

взятый в этом смысле, дает именно примитивную, уничтожающуюся для $x=0$, что соответствует принятому только что ограничению $F(0)=0$.

Теперь перейдем к нашей основной теореме. Легко видеть, что ее нельзя рассматривать как *универсальный метод интегрирования.* Для этого достаточно обратить внимание на понятие *регулярного процесса.* В самом деле, хотя в каждом методе интегрирования и имеются элементы произвола (в интеграле Коши, например, деление отрезка $[0, 1]$ на малые интервалы), но эти элементы произвола входят только *до завершения процесса* интегрирования. Когда же процесс закончен, эти элементы произвола исчезают и не оказывают *никакого влияния на результат процесса.* Таким образом, всякий процесс интегрирования дает всегда *одну и ту же вполне определенную* примитивную функцию, от каких бы элементов произвола мы ни исходили. Это можно выразить, сказав, что *процесс интегрирования есть регулярный процесс.*

Совсем другое представляет процесс отыскания примитивной функции, даваемый основной теоремой. Здесь элементы произвола, которые суть выбор множеств P_1, P_2, $P_3, \ldots, P_n, \ldots$ и подбор функций $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots$, *не исчезают* в конце процесса. Отправляясь от разных систем P и Ψ, мы получаем в результате *разные* примитивные $F(x)$, не отличающиеся на аддитивную постоянную. Это заставляет сказать, что процесс основной теоремы есть *иррегулярный процесс.*

19. Задача отыскания неопределенного интеграла. Рассмотрим две различные примитивные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для одной и той же данной $f(x)$. Пусть $F_1(0)=0$ и $F_2(0)=0$. Разность

$$F_2(x)-F_1(x)$$

есть, очевидно, непрерывная функция, уничтожающаяся для $x=0$ и имеющая производную, равную нулю почти всюду на $[0, 1]$. Обозначим эту функцию через $\Psi(x)$; $F_2(x) - F_1(x) = \Psi(x)$, откуда

$$F_2(x) = F_1(x) + \Psi(x).$$

Обратно, сумма $F_1(x) + \Psi(x)$, где $F(x)$ есть примитивная для $f(x)$, уничтожающаяся в $x = 0$, и где $\Psi(x)$ есть непрерывная функция, $\Psi(0) = 0$, такая, что $\Psi'(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$, есть всегда примитивная функция для $f(x)$. Значит, получаем все примитивные функции для данной $f(x)$, прибавляя к одной какой-нибудь частной примитивной $F_1(x)$ все функции $\Psi(x)$, имеющие почти всюду $\Psi'(x) = 0$.

Но таких функций $\Psi(x)$ есть бесконечное множество (мощности континуума). Значит, все примитивные $F(x)$, $F(0) = 0$ образуют бесконечное семейство функций, и основная теорема при изменении множеств P_1, P_2, P_3, ... дает тоже бесконечное число таких примитивных, но не *одну* вполне определенную, как это дает процесс интегрирования.

Выше (§ 12) мы определили процесс интегрирования как операцию, обратную дифференцированию, т. е. как процесс отыскания примитивной. Но на практике ценно не то, что интегрирование дает *какую-нибудь* примитивную $F(x)$, $F(0) = 0$, а ценно то, что интегрирование дает одну только *определенную* примитивную, $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, обладающую особыми свойствами, отличающими ее от всех других примитивных, — примитивную, особенно тесно связанную с интегрируемой функцией $f(x)$.

Задача интегрирования не возникла исторически из одной только задачи теории функций — задачи обращения дифференцирования. Правда, процесс *определенного интеграла*, который есть отыскание предела сумм, приводит к особой примитивной функции — к неопределенному интегралу $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, но на практике дело обстоит как раз наоборот: зная эту особую примитивную, мы именно и находим с помощью нее предел сумм, что в интересах механики, геометрии и анализа.

Таким образом, хотя задача отыскания примитивной и решена, но не решена задача *отыскания неопределенного интеграла.* Эта последняя задача может быть поставлена так:

Задача А (задача определенного интеграла).

Найти регулярный процесс, с помощью которого, исходя из величин данной функции $f(x)$, мы всегда получаем одну и ту же самую примитивную $F(x)$.

Эта задача А может быть обращена и заменена другой, ей эквивалентной. Пусть $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, есть семейство всех примитивных для данной $f(x)$. Спрашивается, какая именно из этих примитивных функций есть неопределенный интеграл? Другими словами, каково то характеристическое свойство, в силу которого из семейства *всех* примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, можно выделить одну и только одну примитивную $F_0(x)$, которую следует назвать неопределенным интегралом? Итак, приходим ко второй задаче:

Задача В (задача неопределенного интеграла).

Зная все примитивные функции $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, для данной функции $f(x)$, найти неопределенный интеграл.

Ясно, что задача В обратна задаче отыскания примитивных функций (§ 12). Там целью процесса интегрирования было определение примитивной. В задаче В, наоборот, зная примитивные, мы ищем одну из них — неопределенный интеграл. Следующая глава III будет посвящена этой задаче: мы постараемся найти те структурные свойства, которые отличают неопределенные интегралы Лебега и Данжуа от всякой другой примитивной; мы постараемся найти их характеристические свойства с тем, чтобы далее, в гл. IV, постараться обобщить их и исследовать этим путем возможность более общего определения интеграла, чем определение Данжуа.

ГЛАВА III

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Точная производная и точная примитивная

20. Мы называем функцию $f(x)$ *точной производной* от непрерывной функции $F(x)$, когда $f(x)$ есть производная от $F(x)$ *в каждой* точке x области $[0, 1]$, без всякого исключения. В этом случае скажем, что функция $F(x)$ есть *точная примитивная* для $f(x)$.

Пусть $f(x)$ есть точная производная, *конечная* для всякого x на $[0, 1]$. Легко видеть тогда, что среди всех ее примитивных

$$\{F(x)\}, \quad F(0) = 0,$$

существует одна и только одна ее точная примитивная функция $F_0(x)$, $F_0(0) = 0$. В самом деле, если бы существовала еще вторая ее точная примитивная $F_1(x)$, $F_1(0) = 0$, то тогда разность $F_1(x) - F_0(x)$ была бы непрерывной функцией, уничтожающейся для $x = 0$ и имеющей производную, равную нулю *всюду* на $[0, 1]$, т. е. была бы нулем.

Отсюда естественно было бы пытаться всякую данную функцию $f(x)$, измеримую и конечную почти всюду на $[0, 1]$, изменить на нуль-множестве так, чтобы она стала *точной* производной $f_1(x)$, конечной всюду на $[0, 1]$, и после этого выбрать среди всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0) = 0$, единственную точную примитивную $F_0(x)$. Если бы это возможно было сделать всегда, то тогда выбор неопределенного интеграла из семейства всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0) = 0$, был бы сделан самым естественным образом во всех случаях и, следовательно, была бы построена самая общая теория интегрирования. Но легко видеть, что эта попытка обречена на неуспех. В самом деле, всякая точная производная функция $f_1(x)$ есть непременно функция класса 0 или класса 1 на $[0, 1]$, по классификации Бэра, потому что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{F_0\left(x+\frac{1}{n}\right)-F_0(x)}{\frac{1}{n}}\right]=f_1(x)$$

для всякого x на $[0, 1]$, а выражение, стоящее в квадратных скобках, есть непрерывная функция на $[0, 1]$. Но всякая функция классов 0 или 1 согласно теореме Бэра[1]) обладает специальными свойствами. Так например, всякая функция $f_1(x)$, класса 0 или 1, непременно имеет на $[0, 1]$ бесконечное множество точек, в которых она непрерывна на $[0, 1]$. Пусть ξ есть одна из таких точек. Так как $f_1(x)$ непрерывна для $x=\xi$, то существует всегда такой малый интервал δ, содержащий ξ внутри, на котором $f_1(x)$ есть ограниченная функция и, следовательно, суммируемая на δ. Но данная функция $f(x)$ совпадает с $f_1(x)$ почти всюду на $[0, 1]$; следовательно, и $f(x)$ суммируема на δ. А вообще говоря, измеримая функция $f(x)$ не суммируема ни в каком интервале δ области $[0, 1]$. Это обнаруживает невозможность в общем случае указанной операции.

Кроме того, если даже данная функция $f(x)$ ограничена вообще, ее нельзя сделать функцией класса 0 или класса 1 путем изменения ее на нуль-множестве. Легко можно построить пример такой функции $f(x)$ [34].

Таким образом, приходим к результату: *среди всех примитивных* $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, *для данной* $f(x)$, *вообще говоря, не существует ни одной точной примитивной* $F_0(x)$, $F_0(0)=0$, *даже в том случае, когда данная* $f(x)$ *есть ограниченная функция на* $[0, 1]$ *и, следовательно, суммируемая.*

21. Выше мы видели, что в семействе всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, может находиться лишь *одна* точная примитивная, имеющая *конечную* производную для *всякого* x

---

1) См. Baire [33], Leçons sur les fonctions discontinues, стр. 83 и 125.

на [0, 1]. Интересно отметить, что это предложение перестает быть верным, когда речь идет о *точных* примитивных, имеющих *бесконечную* производную.

В самом деле, пусть $\Phi(x)$ есть непрерывная функция на [0, 1], имеющая в *каждой* точке x области [0, 1] $\Phi'(x) > 0$. Пусть $\Phi'(x) = +\infty$ на совершенном множестве P, лежащем на [0, 1]. Такую функцию $\Phi(x)$ легко построить[1]; очевидно, она есть точная примитивная для своей производной $\Phi'(x)$. Согласно теореме 2 § 14 имеем $\operatorname{mes} P = 0$; следовательно, P есть нигде неплотное множество на [0, 1]. Пусть δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n, ... суть все смежные к P интервалы на [0, 1]. Обозначим через $\Psi(x)$ непрерывную функцию на [0, 1], обладающую следующими свойствами:

1°. $\Psi(0) = 0$.

2°. $\Psi(x)$ нигде не убывает на [0, 1].

3°. $\Psi(x)$ постоянная на каждом δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

4°. $\Psi(1) > 0$.

Такие функции легко построить[2]. Рассмотрим теперь новую непрерывную функцию $\Phi_1(x)$, определенную равенством

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) + \Psi(x).$$

Ясно, что, если ξ лежит *внутри* какого-либо δ_n, имеем

$$\Phi_1'(\xi) = \Phi'(\xi).$$

Но если ξ есть точка множества P, тогда

$$\frac{\Phi_1(\xi + h) - \Phi_1(\xi)}{h} = \frac{\Phi(\xi + h) - \Phi(\xi)}{h} + \frac{\Psi(\xi + h) - \Psi(\xi)}{h}.$$

И так как первое слагаемое направо стремится к $+\infty$, когда h стремится к нулю, а второе всегда положительно, то имеем опять

$$\Phi_1'(\xi) = \Phi'(\xi).$$

---

[1]) См. нашу статью [35] «К основной теореме интегрального исчисления» (Математический сборник, т. 28, стр. 276) и добавление к ней (там же, стр. 544).

[2]) О функциях этого рода мы уже говорили [36]. См. главу II, § 15, примечание 2 на стр. 78.

Итак: *существуют непрерывные функции, имеющие равные производные в каждой точке x области* $[0, 1]$ *и, однако, не отличающиеся на аддитивную постоянную.*

Этот пример служит ответом на поставленную Лебегом задачу [1]).

22. Итак, возвращаясь к семейству примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, видим, что имеют место и такие случаи, когда в этом семействе оказывается *бесконечное* множество точных примитивных, уничтожающихся в $x=0$. Это сильно усложняет выбор неопределенного интеграла, если хотят, чтобы он был точной примитивной. Но можно встретить еще и бо́льшие затруднения. В самом деле, можно всегда построить [[38]] такой пример *точной* производной $f(x)$, *суммируемой на* $[0, 1]$, для которой неопределенный интеграл Лебега

$$\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$$

уже *не есть* точная примитивная, хотя таковая и существует в семействе $\{F(x)\}$, $F(0)=0$ [2]).

Таким образом, требование *точности* примитивной не служит ни к чему в отыскании неопределенного интеграла, потому что, вообще, точных примитивных в семействе $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, не имеется совсем, даже тогда, когда $f(x)$ интегрируема в смысле Римана, или таких точных примитивных оказывается в семействе бесконечное множество и притом

---

[1]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris, 1904, стр. 75, строка 7. Цитируем текстуально автора: «Было бы очень интересно узнать, во всех ли случаях функция определена с точностью до аддитивной постоянной одним из своих производных чисел; этот вопрос еще не был разрешен. Следует заметить, что вопрос не решен даже в случае обыкновенной производной, если допускать, что производная может быть бесконечной: известно, что две функции, имеющие всегда одну и ту же производную, различаются лишь на постоянную, когда эта производная конечна; но в общем случае ничего неизвестно». Построенный нами в тексте пример решает, очевидно, этот вопрос Лебега [[37]].

[2]) Мы не даем построения этого интересного примера точной производной потому, что это взяло бы у нас много места. О существовании этого примера упоминалось выше. См. гл. II, § 13. См. также примечание 2, стр. 75.

иногда так, что неопределенный интеграл Лебега находится вне этого пучка точных примитивных.

Это делает неизбежным детальное рассмотрение свойств неопределенных интегралов Лебега и Данжуа.

Характеристические свойства неопределенного интеграла Лебега

23. Пусть $f(x)$ есть данная измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 1]$. Пусть K есть семейство всех ее примитивных, уничтожающихся для $x=0$:

$$K=\{F(x)\}, \quad F(0)=0.$$

Известно [1]) [89] тогда, что для того, чтобы функция $f(x)$ была суммируемой на $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы в семействе K была хотя одна примитивная функция *с ограниченным изменением*. Следовательно, в случае суммируемости $f(x)$ семейство K распадается на два класса примитивных K_1 и K_2; к первому классу K_1 принадлежат все примитивные $F(x)$ с ограниченным изменением; таких примитивных всегда бесконечное множество (мощности континуума); ко второму же классу K_2 принадлежат все примитивные функции $F(x)$ *с бесконечным полным изменением* на $[0, 1]$; таких примитивных тоже всегда бесконечное множество.

Так как неопределенный интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть всегда функция с ограниченным изменением, то он принадлежит к классу K_1. Посмотрим, чем он отличается от остальных примитивных класса K_1.

---

[1]) В самом деле, с одной стороны, всякая непрерывная функция $F(x)$ с ограниченным изменением имеет почти всюду конечную производную $F'(x)$, и эта производная $F'(x)$ есть суммируемая функция. С другой стороны, всякая суммируемая функция $f(x)$ имеет примитивные с ограниченным изменением, например неопределенный интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$. См. Hobson, The Theory of Functions etc., стр. 557 и Lebesgue, Leçons sur l'intégration, стр. 120.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл Лебега есть примитивная функция с наименьшим полным изменением на* $[0, 1]$ *среди других примитивных.*

Заметим сначала, что согласно теории Лебега полное изменение неопределенного интеграла $\int\limits_a^x f(\alpha)\,d\alpha$ на каком-либо отрезке $[a, b]$, $a < b$, равно $\int\limits_a^b |f(\alpha)|\,d\alpha$.

Возьмем число ε, $\varepsilon > 0$, малое как угодно. Пусть $F(x)$ есть какая-нибудь примитивная для $f(x)$. Пусть P есть совершенное множество, $\operatorname{mes} P > 1 - \varepsilon$, такое, что в каждой точке ξ множества P имеем $F'(\xi) = f(\xi)$ и при этом функция $f(x)$ есть непрерывная функция на P. Согласно (C)-свойству (§ 7) такие множества P существуют.

Пусть ξ есть какая-либо точка P. Так как $F'(\xi) = f(\xi)$, то каково бы ни было малое число η, $\eta > 0$, всегда можно найти такой отрезок $\delta = [c, d]$, $c < d$, заключающий ξ *внутри*, что имеем

$$\left|\frac{F(d) - F(c)}{d - c} - f(\xi)\right| < \eta,$$

откуда

$$|F(d) - F(c)| > |f(\xi)| \cdot (d - c) - \eta \cdot (d - c).$$

Так как *каждая* точка ξ множества P находится внутри соответствующего ей отрезка $[c, d]$, то все множество P может быть заключено в *конечное* число таких отрезков $[c, d]$, и притом неперекрывающихся, так как приближение точек c и d к точке ξ не изменяет предыдущих неравенств. Пусть эти отрезки суть

$$[c_1, d_1], \quad [c_2, d_2], \quad \ldots, \quad [c_\lambda, d_\lambda].$$

Строя для каждого отрезка $[c_i, d_i]$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, \lambda)$ предыдущее неравенство и суммируя, имеем

$$\sum_{i=1}^{\lambda} |F(d_i) - F(c_i)| > \sum_{i=1}^{\lambda} |f(\xi_i)| \cdot (d_i - c_i) - \eta \cdot \sum_{i=1}^{\lambda} (d_i - c_i).$$

Называя через V полное изменение $F(x)$ на $[0, 1]$, имеем вследствие свойств полного изменения

$$V \geqslant \sum_{i=1}^{\lambda} | F(d_i) - F(c_i) |,$$

откуда

$$V \geqslant \sum | f(\xi_i) | (d_i - c_i) - \eta,$$

так как множитель при η, очевидно, < 1. Пусть теперь η стремится к нулю. Тогда сумма в правой части неравенства стремится, очевидно, к интегралу Лебега $\int\limits_P |f(\alpha)|\, d\alpha$, распространенному на множество P. Отсюда

$$V \geqslant \int\limits_P |f(\alpha)|\, d\alpha.$$

Устремляя же ε к нулю, имеем окончательно [1])

$$V \geqslant \int\limits_0^1 |f(\alpha)|\, d\alpha$$

(ч. т. д.).

Теорема 2. *Неопределенный интеграл Лебега есть единственная примитивная с наименьшим изменением.*

В самом деле, пусть $F_0(x)$ есть примитивная, имеющая полное изменение на $[0, 1]$, равное $\int\limits_0^1 |f(\alpha)|\, d\alpha$. Тогда, повторяя рассуждения предыдущей теоремы, легко видеть, что полное изменение функции $F_0(x)$ на отрезке $[0, a]$ необходимо равно $\int\limits_0^a |f(\alpha)|\, d\alpha$.

---

[1]) В силу того что интеграл Лебега есть *абсолютно непрерывная функция* (согласно терминологии Витали). См. об этом [40] Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, т. II, стр. 108, строка 7 и стр. 109. [В русском переводе: Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, т. I, стр. 74. *Ред.*]

Строим на отрезке $[0, a]$ совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > a - \varepsilon$, обладающее свойствами, описанными в предыдущей теореме. Повторяя те же самые рассуждения, мы приходим к отрезкам $[c_1, d_1], [c_2, d_2], \ldots, [c_\lambda, d_\lambda]$ неперекрывающимся, заключающим внутри себя точки множества P, и таким, что справедливы неравенства

$$\left| \frac{F_0(d_i) - F_0(c_i)}{d_i - c_i} - f(\xi_i) \right| < \eta \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \lambda).$$

Отсюда

$$f(\xi_i) \cdot (d_i - c_i) + \eta \cdot (d_i - c_i) > F_0(d_i) - F_0(c_i) >$$
$$> f(\xi_i) \cdot (d_i - c_i) - \eta (d_i - c_i)$$

и, суммируя,

$$\sum_{i=1}^{\lambda} f(\xi_i) \cdot (d_i - c_i) + \eta > \sum_{i=1}^{\lambda} F_0(d_i) - F_0(c_i) >$$
$$> \sum_{i=1}^{\lambda} f(\xi_i) \cdot (d_i - c_i) - \eta.$$

Точки отрезка $[0, a]$, не принадлежащие к $[c_i, d_i]$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, \lambda)$, образуют конечную систему интервалов, сумма которых $< \varepsilon$. Полное изменение функции $F_0(x)$ на каждом из них равно полному изменению неопределенного интеграла Лебега. Пусть $\sigma(\varepsilon)$ есть сумма полных изменений функции $F_0(x)$ на этих интервалах. Имеем, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{\lambda} f(\xi_i)(d_i - c_i) + \eta + \sigma(\varepsilon) > F_0(a) - F_0(0) >$$
$$> \sum_{i=1}^{\lambda} f(\xi_i)(d_i - c_i) - \eta - \sigma(\varepsilon).$$

Пусть η стремится к нулю. Тогда неравенства превращаются в

$$\int_P f(\alpha)\, d\alpha + \sigma(\varepsilon) > F_0(a) > \int_P f(\alpha)\, d\alpha - \sigma(\varepsilon),$$

так как $F_0(0)=0$. Но согласно теореме [41] Ш. Валле-Пуссена [1]) $\sigma(\varepsilon)$ стремится к нулю с ε; отсюда имеем окончательно, заставляя ε стремиться к нулю:

$$F_0(a)=\int_0^a f(\alpha)\,d\alpha$$

(ч. т. д.).

Эти две теоремы вполне характеризуют неопределенный интеграл Лебега. Именно, если $f(x)$ есть суммируемая на $[0, 1]$ функция, тогда среди всех ее примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, имеются примитивные с ограниченным полным изменением, и среди последних существует одна и только одна примитивная $F_0(x)$ с *наименьшим* полным изменением на $[0, 1]$; эта единственная примитивная и есть неопределенный интеграл Лебега $F_0(x) = \int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$.

24. Геометрическая характеристика. Легко дать в соответствии с этим геометрическую характеристику интеграла Лебега. Рассмотрим семейство всех непрерывных кривых, проходящих через точку $(0, 0)$:

$$y=F(x),$$

где $F(x)$ есть примитивная функция для $f(x)$. Если $f(x)$ есть несуммируемая на $[0, 1]$ функция, все эти кривые будут иметь бесконечную длину на отрезке $[0, 1]$. Но если $f(x)$ суммируема на $[0, 1]$, среди этих кривых непременно имеются кривые *конечной* длины, и *среди этих последних непременно существует одна и только одна кривая с наименьшей длиной дуги на* $[0, 1]$. *Эта единственная кривая и будет интегральной кривой Лебега* $y=\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$.

Доказательство этого предложения совершенно аналогично предыдущему; нужно только заменить «полное изменение»

---

[1]) Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, т. II, стр. 117. [В русском переводе: Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, т. I, стр. 282. *Ред.*]

«длиною дуги», и интеграл $\int\limits_0^1 |f(\alpha)|\,d\alpha$ заменить интегралом $\int\limits_0^1 \sqrt{1+f^2(\alpha)}\,d\alpha$.

Таким образом, нахождение неопределенного интеграла Лебега представляет много аналогии с задачами *вариационного исчисления*.

25. Мы должны сказать, что уже теорема Ш. Валле-Пуссена, на которую мы ссылались (§ 23), дает решение задачи B (§ 19) для интеграла Лебега. Формулировка этой теоремы такова: для того чтобы непрерывная функция $F(x)$ с ограниченным изменением была неопределенным интегралом Лебега, необходимо и достаточно, чтобы сумма полных изменений функции $F(x)$ на системе неперекрывающихся отрезков стремилась к нулю вместе с суммой длин этих отрезков.

Разница между характеристическим свойством Валле-Пуссена и нашим заключается в том, что первое относится к течению функции $F(x)$ на малых интервалах, т. е. есть *дифференциальное* свойство, тогда как второе есть свойство функции $F(x)$ на *целом* отрезке $[0, 1]$.

Теория функции неоднократно дает примеры подобных эквивалентных свойств. Так, например, эквивалентны свойство функции быть непрерывной в любой данной точке отрезка и свойство *равномерной непрерывности* той же самой функции на целом отрезке [1]) [42].

Характеристическое свойство неопределенного интеграла Данжуа

26. Интеграл Данжуа. В нижеследующем мы ограничиваемся лишь определением интеграла Данжуа и кратким описанием процесса, которым он получается, не приводя доказательства его выполнимости. Для последнего мы отсылаем

---

[1]) См. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris, 1905, стр. 149—150 («Note» Лебега).

к личным сообщениям автора Французской Академии [1]). Ввиду сжатости этих сообщений строгое изложение процесса интегрирования Данжуа потребовало бы от нас полного перевода работ автора [48].

Мы называем *определенным интегралом* Данжуа от функции $f(x)$ на интервале (a, b), $a < b$, конечное число $V(a, b)$, получающееся в силу следующих определений.

Первое определение. Если $f(x)$ суммируема на (a, b), тогда по определению $V(a, b) = \int\limits_a^b f(\alpha)\, d\alpha$.

Второе определение. Если (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n) есть конечное число интервалов, примыкающих друг к другу и неперекрывающихся, и если число V вычислено для каждого из них, то по определению

$$V(a_1, a_n) = V(a_1, a_2) + V(a_2, a_3) + \ldots + V(a_{n-1}, a_n).$$

Третье определение. Если $f(x)$ есть суммируемая функция на совершенном множестве P, лежащем на (a, b); если, обозначая через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ все смежные к P на (a, b) интервалы, число V вычислено уже для всякого δ_n и для всякого интервала δ'_n, лежащего на δ_n, и если, обозначая через W_n верхнюю грань всех чисел $|V(\delta'_n)|$, где δ'_n принимает все возможные положения внутри δ_n, имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} W_n$ сходящимся, тогда по определению $V(a, b) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} V(\delta_n) + \int\limits_P f(\alpha)\, d\alpha$. В соответствии с этим мы говорим, что функция $f(x)$ *интегрируема на (a, b) в смысле Данжуа*, если она удовлетворяет следующим трем условиям.

Условие I. Каково бы ни было совершенное множество P (плотное или нет), во всяком интервале Δ всегда есть такой интервал Δ', что $f(x)$ есть суммируемая функция на всей части P, находящейся в Δ'.

---

[1]) A. Denjoy, Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue (Comptes Rendus, 1 апреля 1912 г.) и Calcul de la primitive de la fonction dérivée à plus générale (Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г.).

Условие II. Если $V(c', d')$ вычислено для всякого интервала (c', d'), лежащего внутри (c, d), и если c' стремится к c, а d' стремится к d, тогда число $V(c', d')$ непременно стремится к единственному пределу, который мы по определению полагаем равным $V(c, d)$: $V(c, d) = \lim V(c', d')$.

Условие III. Каково бы ни было совершенное множество P, во всяком интервале Δ найдется всегда такой интервал Δ', на котором ряд $\sum W_n$ (см. третье определение) сходится.

Покажем, каким образом, если $f(x)$ удовлетворяет этим трем условиям на $[0, 1]$, вычисляется интеграл Данжуа $V(0, 1)$. Сначала в силу условия 1 всюду на $[0, 1]$ имеются интервалы, на каждом из которых $f(x)$ суммируема. Эти интервалы суть смежные интервалы к некоторому замкнутому нигде неплотному множеству E. Значит, число V вычисляется согласно первому определению для каждого из этих интервалов.

Теперь, пользуясь одновременно вторым определением и условием II, мы можем удалить изолированные точки у множества E и вычислить число V в более широких интервалах, смежных к E'. Повторяя этот прием счетное число раз и пользуясь при этом свойствами трансфинитов 2-го класса, мы доходим до совершенного множества P, заключенного в E. Числа V являются теперь уже вычисленными в смежных к P интервалах.

В силу условий I и III существуют такие интервалы, содержащие внутри точки P, на которых число V может быть вычислено согласно третьему определению. Этим препятствующее к вычислению $V(0, 1)$ множество P уменьшается, лишаясь своей части, и обращается в замкнутое множество E_1. Повторяя тот же самый процесс счетное число раз и опираясь опять на свойства трансфинитов 2-го класса, мы заставляем в конце концов растаять препятствующее множество и достигаем до вычисления $V(0, 1)$.

Вычисляя V для отрезка $[0, x]$, мы получаем неопределенный интеграл Данжуа $V(0, x)$, который будем писать, как обычно, $\int\limits_0^x f(\alpha)\, d\alpha$. Данжуа доказал, что функция $\int\limits_0^x f(\alpha)\, d\alpha$ есть непрерывная функция от x, имеющая почти всюду на $[0, 1]$ функцию $f(x)$ своей производной.

27. Процесс Данжуа есть в сущности остроумная и счастливая комбинация идей Гарнака [44] и Лебега. Всякая функция, интегрируемая в каком-нибудь данном ранее смысле, непременно интегрируема и в смысле Данжуа. Таким образом, определение Данжуа включает в себя как частные случаи все другие предложенные ранее обобщения интегрирования. Особую важность дает интегралу Данжуа то обстоятельство, что всякая точная производная $f(x)$, *конечная всюду* на $[0, 1]$, оказывается непременно интегрируемой в смысле Данжуа, и неопределенный интеграл $\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ дает точную примитивную $F_0(x)$, которая в этом случае единственная. Если же $f(x)$ есть хотя и точная производная, но принимающая бесконечные значения, тогда, как мы указали (§ 22), неопределенный интеграл Данжуа $\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, вообще говоря, не дает *точной* примитивной, которых в этом случае бесконечное множество в семействе примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$.

Вообще интеграл Данжуа $\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ не дает, как и интеграл Лебега, точной примитивной и, таким образом, должен быть поставлен вопрос, чем отличается неопределенный интеграл Данжуа от других примитивных. Мы теперь переходим к решению этого вопроса.

28. Функции с обобщенным ограниченным изменением [1]). Известно, насколько тесно связано понятие интеграла Лебега с понятием функции с ограниченным изменением. Изучение интеграла Данжуа аналогично приводит к новому классу непрерывных функций, которые естественно называть *функциями с обобщенным ограниченным изменением.* Изучение этого класса функций даст нам искомую характеристику неопределенного интеграла Данжуа.

---

[1]) Определения и результаты, изложенные в §§ 28—30, были сообщены нами в Comptes Rendus: «Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy» (23 декабря 1912 г.).

Интересно заметить еще, что, в то время как процесс Данжуа опирается на свойства трансфинитов 2-го класса, определение функций с обобщенным ограниченным изменением и характеристическое свойство неопределенного интеграла Данжуа свободны от введения трансфинитов [1]).

Пусть $F(x)$ есть непрерывная функция на $[0, 1]$. Пусть P есть совершенное множество (плотное или нет), лежащее на $[0, 1]$.

Обозначим через (Σ) систему N отрезков

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_N, \qquad (\Sigma)$$

обладающих следующими свойствами:

1°. Отрезки Δ_i и Δ_j $(i \neq j)$ не имеют двух общих точек.

2°. Всякая точка множества P есть точка одного из этих отрезков (включая их концы).

3°. Всякий отрезок Δ_i содержит внутри (в широком смысле) по крайней мере одну точку множества P.

Обозначим через M_i и m_i максимум и минимум функции $F(x)$ на отрезке Δ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ и образуем сумму

$$v = \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i).$$

Мы говорим, что функция $F(x)$ есть *функция с ограниченным изменением для совершенного множества P*, если существует такое конечное число K, что имеем всегда

$$v < K,$$

какова бы ни была система отрезков (Σ), удовлетворяющая приведенным выше свойствам.

Мы говорим, что непрерывная функция $F(x)$ есть *функция с обобщенным ограниченным изменением* на $[0, 1]$, если,

---

[1]) В связи с этим было бы интересно дать другое определение интеграла Данжуа, такое, в котором совсем не встречались бы трансфиниты 2-го класса. Известен тот факт, что всякая теорема теории функций, доказанная сперва с помощью трансфинитов 2-го класса, получала впоследствии другое доказательство, уже свободное от трансфинитов 2-го класса. Таковы, например, теорема Кантора-Бендиксона о замкнутых множествах (доказательство Линделефа в «Acta Mathematica») и теорема Бэра о функциях I-го класса (доказательство Лебега, см. его «Note» в книге Бореля Leçons sur les fonctions de variable réelles, стр. 149) [45].

каково бы ни было совершенное множество P, лежащее на $[0, 1]$, всегда существует отрезок Δ, обладающий двумя следующими свойствами:

1°. Точки, общие отрезку Δ и множеству P, образуют совершенное множество. Обозначим его через P_Δ.

2°. Функция $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для совершенного множества P_Δ.

29. Существование полного изменения функции $F(x)$ для совершенного множества P. Очевидно, что определение функции с ограниченным изменением для совершенного множества P совпадает с классическим определением *функции с ограниченным изменением* $F(x)$, когда берут за множество P всю область $[0, 1]$. В этом случае число v стремится к единственному определенному пределу, когда длина наибольшего интервала системы (Σ) стремится к нулю. Известно, что этот предел называется в этом случае *полным изменением функции* $F(x)$ *на области* $[0, 1]$.

Но легко доказать, что и в случае произвольного совершенного множества P предел чисел v всегда существует, что дает место аналогичному определению.

Теорема. *Если непрерывная функция $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для совершенного множества P, тогда число v стремится к единственному определенному пределу, когда мера системы (Σ) стремится к мере множества P, в то время как длина наибольшего отрезка системы (Σ) стремится к нулю.*

В самом деле, пусть функция $F(x)$, непрерывная на $[0, 1]$, есть функция с ограниченным изменением для P. Если имеем на $[0, 1]$ только *конечное* число всех смежных к P интервалов, теорема тогда очевидна, потому что в этом случае определение функции с ограниченным изменением для P совпадает с классическим определением функции с ограниченным изменением. Итак, пусть все смежные интервалы к P суть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ Назовем максимум $F(x)$ на δ_n через H_n, минимум же через h_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

а) Мы утверждаем, что *ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (H_n - h_n)$$

есть ряд сходящийся. В самом деле, пусть этот ряд расходится. Пусть $\varepsilon > 0$, малое по желанию. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} \delta_n$ сходится, то, очевидно, можно найти такие два целые числа p и q $(p < q)$, что будут иметь место одновременные неравенства:

$$\sum_{i=p}^{q} \operatorname{mes} \delta_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\sum_{i=p}^{q} (H_i - h_i) > L,$$

где L — положительное число, как угодно большое.

Рассмотрим замкнутые интервалы $\delta_p, \delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_q$. Очевидно, что они удовлетворяют свойствам 1° и 3° системы (Σ). Ясно, что можно найти такие отрезки в области $[0, 1]$ $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_r$, чтобы система отрезков

$$\delta_p, \delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots \delta_q, U_1, U_2, U_3, \ldots, U_r$$

была системой (Σ). Ясно также, что для этой системы (Σ) имеем

$$v > L,$$

где L есть как угодно большое положительное число. Следовательно функция $F(x)$ не есть функция с ограниченным изменением для P, и значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (H_n - h_n)$ есть сходящийся ряд.

b) Установив это, рассмотрим значения непрерывной функции $F(x)$ на совершенном множестве P. Строим в каждом смежном к P интервале δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ линейную функцию, имеющую в концах δ_n те же самые значения, как и функция $F(x)$. Пусть $F_1(x)$ есть новая функция, определенная на $[0, 1]$ следующими условиями.

1°. $F_1(x) = F(x)$, если x принадлежит к P.

2°. Если x принадлежит к какому-нибудь интервалу δ_n, $F_1(x)$ равна значению соответствующей линейной функции, построенной на δ_n.

Ясно, что $F_1(x)$ есть непрерывная на $[0, 1]$ функция. Мы утверждаем теперь, что $F_1(x)$ есть *функция с ограниченным изменением на* $[0, 1]$ в классическом смысле.

Пусть, в самом деле, η есть положительное число, малое по желанию. Разделим область $[0, 1]$ на m делений:

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m,$$

таких, что длина каждого отрезка $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m$ меньше η. Пусть колебания функции $F_1(x)$ в этих отрезках будут соответственно $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m$. Образуем сумму

$$v' = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_m.$$

Отрезки $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m$ могут быть разбиты на два класса: отрезки i, не содержащие, включая концы, точек множества P, и отрезки i, содержащие точки P. Ясно, что общая сумма колебаний ω, соответствующих отрезкам i первого класса, меньше чем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(H_n - h_n).$$

Рассмотрим отрезки i второго класса. Пусть i_r есть один из них. Ясно, что колебание ω_r функции $F(x)$ на i_r будет меньше суммы трех колебаний: двух колебаний на смежных интервалах к P, заключающих концы i_r, и колебания на остающейся центральной части отрезка i_r. Отсюда общая сумма колебаний ω, соответствующих всем отрезкам i второго класса, будет меньше чем

$$K + 2\sum_{n=1}^{\infty}(H_n - h_n),$$

откуда

$$v' < K + 3\sum_{n=1}^{\infty}(H_n - h_n),$$

т. е. есть всегда ограниченное число. Поэтому непрерывная функция $F_1(x)$ есть функция с ограниченным изменением на $[0, 1]$.

c) Выведем из предыдущего одно следствие. Пусть η стремится к нулю. Известно, что тогда число v' стремится к определенному пределу, который есть полное изменение функции $F_1(x)$ на $[0, 1]$. Обозначим его через W. Ясно, что общая сумма колебаний ω, соответствующих отрезкам i первого класса, стремится к определенному пределу. Назовем его через W_1:

$$W_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(H_n - h_n).$$

Ясно, что W_1 есть полное изменение функции $F_1(x)$ на множестве всех смежных интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ Отсюда заключаем, что сумма всех ω, соответствующих отрезкам i второго класса, стремится к пределу

$$W - W_1.$$

d) Возвратимся теперь к функции $F(x)$. Рассмотрим какую-нибудь систему отрезков (Σ)

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_N. \qquad (\Sigma)$$

Ясно, что эта система отрезков (Σ) есть система всех отрезков второго класса для функции $F_1(x)$. Называя колебание функции $F_1(x)$ на Δ_i через ω_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$, легко видим, что разность

$$\left| \sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i) - \sum_{i=1}^{N}\omega_i \right|$$

стремится к нулю, если мера системы (Σ) стремится к мере множества P, в то время как длина наибольшего отрезка системы (Σ) стремится к нулю. Отсюда заключаем что, сумма

$$v = \sum_{i=1}^{N}(M_i = m_i)$$

стремится к вполне определенному единственному пределу

$$W - W_1,$$

(ч. т. д.).

Обозначим этот предел чисел v через v_P и будем называть его *полным изменением функции $F(x)$ для совершенного множества P.*

30. Свойства функций с обобщенным ограниченным изменением на [0, 1]. Известно, насколько тесно связаны два понятия: понятие интеграла Лебега и понятие функции с ограниченным изменением. Теперь мы покажем, что в таком же точно тесном отношении стоят: понятие интеграла Данжуа и понятие функции с обобщенным ограниченным изменением. Здесь мы имеем почти совершенную аналогию, определяемую тремя следующими теоремами.

Теорема I. *Всякий неопределенный интеграл Данжуа есть функция с обобщенным ограниченным изменением.*

В самом деле, пусть $f(x)$ интегрируема на [0, 1] в смысле Данжуа. Пусть $F(x)$ есть ее неопределенный интеграл Данжуа

$$F(x) = \int_0^x f(\alpha)\, d\alpha.$$

Рассмотрим какое-нибудь совершенное множество P, лежащее на [0, 1.] Здесь возможны два случая:

1°. Во-первых, множество P может быть плотным на каком-нибудь интервале U. В этом случае в силу условия I (§ 26) в интервале U существует такой интервал Δ, на котором $f(x)$ есть суммируемая функция. Поэтому на Δ функция $F(x)$ совпадает с неопределенным интегралом Лебега. т. е. $F(x)$ на Δ есть функция с ограниченным изменением,

2°. Во-вторых, множество P может быть нигде не плотным на области [0, 1]. В этом случае в силу условий I и III § 26 существует интервал Δ, имеющий свойства:

1°. Точки P, находящиеся на Δ, образуют совершенное множество. Обозначим его через P_Δ.

2°. Функция $f(x)$ есть суммируемая на P_Δ функция.

3°. Обозначая через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ все смежные интервалы к множеству P_Δ на Δ и обозначая колебание $F(x)$ на δ_n через ω_n, имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n$ сходящимся.

Обозначим концы интервала Δ через a и b, $a < b$, и соответственно концы δ_n через a_n и b_n, $a_n < b_n$. В силу *третьего определения* (§ 26) имеем для всякого x, находящегося на $\Delta = (a, b)$, равенство:

$$F(x) = F(a) + \sum\nolimits^x [F(b_n) - F(a_n)] + \int_a^x \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

где $\varphi(x) = f(x)$ для x на P_Δ и $\varphi(x) = 0$ вне P_Δ; сумма же $\sum^x$ распространена на все смежные интервалы δ_n, заключенные в интервале (a, x), и на член $F(x) - F(a_p)$, если точка x лежит в интервале (a_p, b_p) [1]).

Так как, очевидно, непрерывная функция от x

$$\sum^x [F(b_n) - F(a_n)]$$

есть функция с ограниченным изменением для совершенного множества P_Δ и так как, очевидно, ее полное изменение для совершенного множества P_Δ равно нулю, то полное изменение функции $F(x)$ для совершенного множества P_Δ равно полному изменению неопределенного интеграла Лебега $\int\limits_a^x \varphi(\alpha)\, d\alpha$ для этого множества P_Δ, т. е. равно *конечной* величине.

В обоих, следовательно, случаях существует для функции $F(x)$ интервал Δ, удовлетворяющий определению функции с обобщенным ограниченным изменением (§ 28) (ч. т. д.).

Теорема II. ***Всякая функция*** $F(x)$, ***непрерывная и с обобщенным ограниченным изменением в области*** $[0, 1]$, ***имеет почти всюду конечную производную.***

Допустим обратное. Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек области $[0, 1]$, где не существует $F'(x)$. Множество $\mathfrak{M}$ есть измеримое множество (§ 1); пусть $\operatorname{mes}\mathfrak{M} > 0$. В этих условиях существует в $\mathfrak{M}$ совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > 0$ (§ 2). Так как $F(x)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на $[0, 1]$, то существует в области $[0, 1]$ отрезок Δ, имеющий свойства (§ 28):

1°. Точки, общие отрезку Δ и множеству P, образуют совершенное множество. Обозначим его через P_Δ; $\operatorname{mes} P_\Delta > 0$ [2]).

---

[1]) Относительно этого равенства см. цитированное сообщение Данжуа [[46]], Calcul de la primitive etc., Comptes Rendus, 1912 г., стр. 1075—1078.

[2]) Неравенство $\operatorname{mes} P_\Delta > 0$, не встречающееся в § 28, требует пояснений.

Мы говорим, что измеримое множество E есть *приведенное множество*, если всякий интервал δ, содержащий *внутри* точку множества E, содержит часть множества E, имеющую меру, *большую* нуля. Это определение влечет следующие два предложения:

2°. Функция $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для совершенного множества P_Δ.

Пусть все смежные интервалы к P_Δ на Δ суть

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$$

Пусть $F_1(x)$ есть функция, совпадающая с $F(x)$ на P_Δ и линейная в каждом интервале δ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). В § 29, b), мы показали, что $F_1(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением на области $[0, 1]$. Поэтому $F_1'(x)$ существует и конечна почти всюду на $[0, 1]$.

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x).$$

Все сводится к доказательству, что $\Phi(x)$ имеет производную почти всюду на P_Δ.

Ясно, что $\Phi(x)$ есть непрерывная на Δ функция, равная нулю на P_Δ и на концах Δ. Кроме того, в силу свойств функций $F(x)$ и $F_1(x)$ [§ 29, a)], обозначая через μ_n максимум функции $\Phi(x)$ на δ_n, имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$ сходящимся. Поэтому всегда можно найти последовательность положительных чисел

$$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots,$$

Теорема 1. *Всякое измеримое множество* $\mathfrak{M}$ *меры* μ, $\mu > 0$, *содержит приведенное множество* E *меры* μ.

В самом деле, назовем через E совокупность всех точек *плотности* (§ 3) множества $\mathfrak{M}$, принадлежащих к множеству $\mathfrak{M}$. Согласно теореме § 3 имеем $\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \mathfrak{M}$. Ясно, что множество E есть приведенное множество.

Теорема 2. *Всякое совершенное множество* P меры p, $p > 0$, *содержит одно и только одно приведенное совершенное множество* π *меры* p.

В самом деле, назовем через π совокупность всех точек плотности множества P и предельных к ним точек. Так как множество P есть совершенное по условию, то множество π содержится в P. Легко видеть, что множество π обладает всеми свойствами, указываемыми теоремой.

Таким образом в той теории, где пренебрегают нуль-множествами, всегда можно ограничиться рассмотрением приведенных измеримых множеств и приведенных совершенных множеств. В частности, совершенное множество P текста мы можем предполагать приведенным. Отсюда следует неравенство $\operatorname{mes} P_\Delta > 0$.

стремящихся к $+\infty$ с n и таких, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n \mu_n$$

есть ряд сходящийся.

Присоединим к интервалу δ_n справа и слева два равных интервала длины каждый $H_n \mu_n$; пусть полученный таким образом новый интервал есть U_n. Ясно, что последовательность интервалов

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$$

такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} U_n$ есть сходящийся. Отсюда множество E, образованное из всех точек, принадлежащих каждая к бесконечному числу интервалов U, есть нуль-множество.

Удалим из P_Δ все точки множества E. Пусть образованное таким образом множество есть R. Имеем

$$\operatorname{mes} R = \operatorname{mes} P_\Delta > 0.$$

Теперь мы утверждаем, что для всякой точки ξ, принадлежащей к R, мы имеем $\Phi'(\xi) = 0$. В самом деле, пусть ξ есть точка R. Рассмотрим

$$\frac{\Phi(\xi + h) - \Phi(\xi)}{h}$$

для h, достаточно малого. Прежде всего имеем $\Phi(\xi) = 0$. Далее, очевидно, что, если точка $\xi + h$ принадлежит к P_Δ, мы имеем

$$\Phi(\xi + h) = 0.$$

Пусть $|\Phi(\xi + h)| > 0$. Это значит, что точка $\xi + h$ попала внутрь некоторого интервала δ_p. Тогда

$$|\Phi(\xi + h)| \leqslant \mu_p.$$

Но так как ξ принадлежит только к *конечному* числу интервалов $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$, будучи вне множества E, то имеем для достаточно малого h

$$|h| \geqslant H_p \mu_p.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\Phi(\xi+h)-\Phi(\xi)}{h}\right| \leqslant \frac{\mu_p}{H_p \mu_p} = \frac{1}{H_p}.$$

Если h стремится к нулю, число p стремится к $+\infty$. Отсюда

$$\Phi'(\xi)=0$$

(ч. т. д.).

Теорема III. *Условие, необходимое и достаточное, чтобы функция $F(x)$, непрерывная и с обобщенным ограниченным изменением, была неопределенным интегралом Данжуа, заключается в том, чтобы полное изменение функции $F(x)$, v_P, если оно только существует, для всякого совершенного множества P меры нуль было равно нулю.*

а) Условие необходимо. Пусть, в самом деле, $F(x)=\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть неопределенный интеграл Данжуа. Пусть, далее, $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для совершенного множества P, $\operatorname{mes} P=0$. Обозначим все смежные к P интервалы на $[0, 1]$ через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ Пусть колебание функции $F(x)$ на δ_n есть W_n. Согласно теореме § 29, а), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} W_n$ сходится. Отсюда в силу *третьего определения* (§ 26) имеем равенство[1]):

$$\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha = \sum\nolimits^x V(\delta_n) + \int\limits_0^x \varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

где φ равна f на множестве P и $\varphi=0$ вне P; сумма же $\sum^x$ распространена на интервалы δ_n, заключенные в $(0, x)$, и на член $V(\alpha_p, x)$, если x принадлежит к интервалу $\delta_p=(\alpha_p, \beta_p)$. Ясно, что $\sum^x V(\delta_n)$ есть непрерывная функция на всей области $[0, 1]$, имеющая полное изменение для совершенного множества P, v_P, равное нулю. Член же $\int\limits_0^x \varphi(\alpha)\,d\alpha$ всегда

[1]) Относительно этого равенства [47] см. Denjoy, Calcul de la primitive etc. (Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г., стр. 1075—1078.)

равен нулю для любого x, так как $\operatorname{mes} P = 0$, и следовательно, $\varphi(x)$ равна нулю почти всюду на $[0, 1]$. Отсюда полное изменение функции $F(x)$ для P равно нулю.

b) Условие достаточно. Пусть $F(x)$ есть непрерывная функция с обобщенным ограниченным изменением на $[0, 1]$. Тогда в силу теоремы II видим, что $F'(x)$ существует и конечна почти всюду на $[0, 1]$. Все сводится, очевидно, к тому, чтобы доказать, во-первых, что $F'(x)$ есть функция, интегрируемая на всей области $[0, 1]$ в смысле Данжуа, и, во-вторых, что разность

$$F(b) - F(a),$$

где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, есть определенный интеграл Данжуа $\int\limits_a^b F'(\alpha)\, d\alpha$. Чтобы показать это, мы поступим так: мы докажем, что и функция $F'(x)$, и разность $F(b) - F(a)$ удовлетворяют всем *трем определениям и трем условиям* § 26, которые лежат в основе определения интеграла Данжуа.

1°. Условие I § 26. Пусть P есть какое-либо совершенное множество (плотное или нет) на $[0, 1]$. Тогда в силу определения функции с обобщенным ограниченным изменением (§ 28) существует на $[0, 1]$ такой отрезок Δ, что для части множества P, заключенной в Δ, функция $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением. Назовем эту часть множества P через P_Δ. Из доказательства теоремы II видим, что можем писать

$$F(x) = F_1(x) + \Phi(x),$$

где $F_1(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением (в классическом смысле) на всей области $[0, 1]$, а непрерывная функция $\Phi(x)$ имеет $\Phi'(x) = 0$ почти всюду на P_Δ. Отсюда заключаем, что $F'(x)$ равна почти всюду на P_Δ производной от непрерывной функции с ограниченным изменением на $[0, 1]$. А эта последняя производная есть согласно теории Лебега суммируемая функция всюду на $[0, 1]$ и, значит, на P_Δ. Таким образом видим, что *функция $F'(x)$ удовлетворяет условию* I § 26 *интегрируемости в смысле Данжуа.*

2°. Первое определение § 26. Пусть $F'(x)$ есть суммируемая на (a, b) функция. Функция $F(x)$ есть примитивная для $F'(x)$; мы теперь утверждаем, что $F(x)$ есть неопределенный интеграл Лебега от $F'(x)$ на (a, b). В самом деле, если $F'(x)$ не есть неопределенный интеграл Лебега от $F'(x)$ на (a, b), то легко можно доказать[1]), что существует на (a, b) такое совершенное множество P, $\operatorname{mes} P=0$, которое обладает следующим свойством: каков бы ни был интервал Δ, лежащий на (a, b) и содержащий внутри точки P, функция $F(x)$ или не имеет ограниченного полного изменения v для части множества P, заключенной в Δ, или это полное изменение непременно есть число, большее нуля: $v>0$.

Но, с другой стороны, $F(x)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на $[0, 1]$. А по определению такой функции (§ 28), каково бы ни было множество P, всегда есть такой интервал Δ, что $F(x)$ имеет ограниченное полное изменение для части совершенного множества P, содержащейся в Δ.

Отсюда выводим, что существует на (a, b) такое совершенное множество π, $\operatorname{mes} \pi=0$, для которого полное изменение v_π функции $F(x)$ существует и

$$v_\pi>0.$$

Это же последнее неравенство противоречит свойству функции $F(x)$, предполагаемому теоремой.

Итак, $F(x)$ есть неопределенный интеграл Лебега от $F'(x)$ в интервале (a, b). Следовательно, можем писать

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(\alpha)\,d\alpha,$$

что указывает на осуществление *первого определения* (§ 26).

3°. Второе определение § 26. Пусть имеем на $[0, 1]$ интервалы (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{n-1}, a_n), примыкающие друг к другу и неперекрывающиеся. Пусть функция $F'(x)$ на каждом из них интегрируема в смысле Данжуа и пусть имеем

$$F(a_{i+1})-F(a_i)=\int_{a_i}^{a_{i+1}} F'(\alpha)\,d\alpha \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1),$$

[1]) Ниже (гл. IV, §§ 48 и 49) мы дадим точное доказательство этого утверждения.

где интеграл написан в смысле Данжуа. В этих условиях функция $F'(x)$ есть интегрируемая в смысле Данжуа функция на всем интервале (a_1, a_n) (§ 26), и имеем

$$\int_{a_1}^{a_n} F'(\alpha)\, d\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F'(\alpha)\, d\alpha.$$

Отсюда в силу предыдущих равенств находим

$$\int_{a_1}^{a_n} F'(\alpha)\, d\alpha = F(a_n) - F(a_1),$$

что показывает на осуществление *второго определения* § 26.

4°. Условие II § 26. Пусть функция $F'(x)$ интегрируема в смысле Данжуа на всяком интервале (a', b'), лежащем вместе со своими концами *внутри* интервала (a, b). Пусть, далее, имеем

$$\int_{a'}^{b'} F'(\alpha)\, d\alpha = F(b') - F(a').$$

Тогда в силу непрерывности функции $F(x)$ число $\int\limits_{a'}^{b'} F'(\alpha)\, d\alpha$ стремится к пределу $F(b) - F(a)$, когда a' стремится к a и b' стремится к b. Отсюда (§ 26) заключаем, что $F'(x)$ интегрируема в смысле Данжуа на (a, b) и что имеем

$$\int_{a}^{b} F(\alpha)\, d\alpha = F(b) - F(a),$$

а это указывает на осуществление *условия* II § 26.

5°. Условие III § 26. Пусть P есть произвольное совершенное множество на $[0, 1]$; пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ суть все смежные к нему интервалы на $[0, 1]$. Пусть, далее, $F'(x)$ интегрируема в смысле Данжуа на каждом δ_n, так что, обозначая через (a', b') какой-либо интервал, лежащий на δ_n, имеем равенство:

$$\int_{a'}^{b'} F'(\alpha)\,d\alpha = F(b') - F(a').$$

В этих условиях ясно, что верхняя грань всех чисел $\left|\int_{a'}^{b'} F'(\alpha)\,d\alpha\right|$ есть *колебание* функции $F(x)$ на δ_n. Обозначим это колебание через W_n. Но функция $F(x)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на $[0, 1]$. Следовательно (§ 28), всегда существует такой интервал Δ, содержащий внутри точки P, что функция $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением для части P_Δ множества P, находящейся на Δ. Поэтому в силу теоремы § 29, a), ряд $\sum W_n$ сходится для всех δ_n, находящихся на Δ. Это указывает на осуществление *условия* III § 26.

6°. Третье определение § 26. Нам остается теперь рассмотреть это определение. Пусть $F'(x)$ суммируема на совершенном множестве P, лежащем на интервале (a, b). Обозначим смежные к множеству P на (a, b) интервалы через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ Пусть, далее, функция $F'(x)$ интегрируема в смысле Данжуа на δ_n, так что, обозначая через (a', b') какой-либо интервал, лежащий на δ_n, имеем равенство:

$$\int_{a'}^{b'} F'(\alpha)\,d\alpha = F(b') - F(a').$$

Пусть, наконец, обозначая через W_n верхнюю грань чисел $\left|\int_{a'}^{b'} F'(\alpha)\,d\alpha\right|$, имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ сходящимся.

Ясно, что в этих условиях W_n есть колебание функции $F(x)$ на δ_n и что поэтому, обозначая через α_n, β_n концы интервала δ_n, имеем неравенство:

$$|F(\beta_n) - F(\alpha_n)| \leqslant W_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим теперь следующую функцию $\psi(x)$ переменного x на интервале (a, b):

$$\psi(x) = F(x) - F(a) - \sum^{x} [F(\beta_n) - F(\alpha_n)] - \int_a^x \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

где $\varphi(x) = F'(x)$ для x на P и $\varphi(x) = 0$ вне P; так как $\varphi(x)$ есть, очевидно, суммируемая на (a, b) функция, то интеграл $\int_0^x \varphi(\alpha)\, d\alpha$ есть интеграл Лебега; что же касается суммы $\sum^x$, то она распространена на все смежные интервалы δ_n, заключенные в интервале (a, x), и на член $F(x) - F(\alpha_p)$, если точка x лежит на интервале (α_p, β_p).

Мы хотим теперь доказать, что $\psi(x)$ тождественно равна нулю всюду на (a, b).

Прежде всего ясно, что $\psi(x)$ есть непрерывная функция на (a, b), $\psi(a) = 0$, сохраняющая постоянное значение внутри каждого интервала δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Так как производная непрерывной функции $\sum^x$ равна нулю почти всюду на P[1]) [48] и так как производные обеих функций: $F(x)$ и $\int_a^x \varphi(\alpha)\, d\alpha$, совпадают почти всюду на P, то имеем $\psi'(x) = 0$ почти всюду на (a, b). Пусть теперь функция $\psi(x)$ не равна тождественно нулю на (a, b). Тогда существует[2]) на (a, b) совершенное множество π, $\operatorname{mes} \pi = 0$, обладающее следующим свойством: каков бы ни был интервал Δ, лежащий на (a, b) и содержащий внутри точки π, функция $\psi(x)$ или не имеет ограниченного полного изменения v для части множества π, заключенной в Δ, или же это полное изменение есть число, непременно большее нуля: $v > 0$. Так как $\psi(x)$ есть постоянная внутри каждого δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то множество π заключено в множестве P.

---

[1]) См. Denjoy, Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale, Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г., стр. 1075—1078. В этом сообщении Данжуа, желая доказать, что неопределенный интеграл в его смысле имеет производную почти всюду, показывает, что $\sum^x$ имеет производную, равную нулю почти всюду на P.

[2]) Далее (глава IV, § 48) мы доказываем справедливость этого.

Но функция $F(x)$ есть функция с обобщенным ограниченным изменением на $[0, 1]$. Отсюда (§ 28) существует такой интервал Δ', что $F(x)$ имеет ограниченное полное изменение для части $\pi_{\Delta'}$ совершенного множества π, содержащейся в Δ'. Так как $\operatorname{mes}\pi_{\Delta'}=0$, то в силу свойства функции $F(x)$, предполагаемого теоремой, это полное изменение функции $F(x)$ для $\pi_{\Delta'}$ есть нуль. Далее, полное изменение $\sum^{x}$ для $\pi_{\Delta'}$ есть нуль, потому что эта функция имеет, очевидно, полное изменение для всего множества P, равное нулю, а $\pi_{\Delta'}$ есть часть P.

Наконец, полное изменение $\int\limits_{a}^{x}\varphi(\alpha)\,d\alpha$ для $\pi_{\Delta'}$ равно нулю в силу теоремы Ш. Валле-Пуссена[1]). Значит, полное изменение и функции $\psi(x)$ для $\pi_{\Delta'}$ есть нуль, что противоречит свойству множества π, указанному выше.

Отсюда заключаем, что имеем тождественно $\psi(x)=0$ на (a, b), или

$$F(x)=F(a)+\sum^{x}[F(\beta_n)-F(\alpha_n)]+\int\limits_{a}^{x}\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

что показывает на осуществление *третьего определения* § 26.

Итак, мы доказали, что функция $F'(x)$ есть функция, интегрируемая на $[0, 1]$ в смысле Данжуа, и что разность $F(b)-F(a)$ есть число $V(a, b)$, удовлетворяющее определению Данжуа. Отсюда заключаем, что $F(x)$ есть неопределенный интеграл Данжуа от $F'(x)$ (ч. т. д.).

Доказанная теорема III дает искомое характеристическое свойство для неопределенного интеграла Данжуа. В самом деле, если данная функция $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ в смысле Данжуа, тогда в семействе всех ее примитивных

$$\{F(x)\},\quad F(0)=0$$

---

[1]) См. его «Cours d'Analyse Inf.», т. II, стр. 117. [В русском издании: Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, т. I, стр. 282. *Ред.*] Теорема, о которой идет речь, касается свойств функций *абсолютно непрерывных* (согласно терминологии Витали) [49].

есть непременно одна и только одна примитивная функция $F_0(x)$, $F_0(0)=0$, имеющая свойства, указанные теоремой III. Эта примитивная $F_0(x)$ и есть неопределенный интеграл Данжуа.

Анализ интеграла Бореля

31. Почти одновременно с появлением работ Данжуа в математической литературе опубликовано еще одно общее определение интеграла, принадлежащее Борелю[1]). Имея в виду наиболее общее определение интеграла, мы поставлены в необходимость подробно рассмотреть определение Бореля и достигнутую им общность.

Определение интеграла Бореля имеется в литературе в двух различных редакциях: одна дается в статье Монтеля: Intégration et dérivation, помещенной в Encyclopédie des Sciences Mathématiques[2]); другая содержится и развивается в интересной работе Бореля: Le calcul des intégrales définies, напечатанной в Journal de mathématiques[3]). Обе эти редакции, с виду похожие, приводят после анализа их к совершенно различным результатам; это нас вынуждает рассмотреть оба определения.

Определение интеграла в Encyclopédie

32. Мы цитируем текстуально отрывок статьи Монтеля:

«Мы обязаны также Э. Борелю новым обобщением понятия интеграла. Пользуясь принципами, которые он ввел в меру множеств, и сближая их с идеями А. Лебега, он дал определение интеграла, которое для случая ограниченных аналитически определимых функций и конечного интервала интеграции дает такие же результаты, как определение Лебега, и приводит для функций неограниченных или для бесконечного интервала интеграции к новому обобщению понятия интеграла. Вот это определение: если функция $f(x)$ определена

---

[1]) Encyclopédie des Sciences Mathématiques, т. II, кн. 1, вып. 2, стр. 187.

[2]) Том II, кн. 1, вып. 2, стр. 187.

[3]) 1914 г., стр. 201.

на интервале (a, b), мы исключаем из этого интервала счетное множество интервалов (α_n, β_n), сумма длин которых равна σ; образуем сумму Римана S при помощи точек a_i и x_i, лежащих вне исключенных интервалов, заменяя в этой сумме длину интервала (a_{i-1}, a_i) разностью между этой длиной и суммой длин интервалов (α_n, β_n), содержащихся в нем; эту разность мы будем называть приведенной длиной (a_{i-1}, a_i). Если суммы S имеют предел, когда максимум приведенной длины (a_{i-1}, a_i) стремится к нулю, в то время как интервалы (α_n, β_n) остаются неизменными, и если этот предел сам стремится к пределу, когда σ стремится к нулю, то мы скажем, что функция f суммируема методом Бореля».

Рассмотрим ближе это определение интеграла. Когда мы удалим из (a, b) все интервалы исключения (α_n, β_n), сумма длин которых есть σ, *мы получим на области* (a, b) *совершенное множество* P, $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes}(a, b) - \sigma$. В дальнейшем мы имеем дело только с этим совершенным множеством P и со значениями функции $f(x)$ на нем. Получив совершенное множество P, мы поступаем так: делим с помощью точек a_i множество P на конечное число частей и образуем сумму S:

$$S = \sum_i h_i f(x_i),$$

где h_i есть мера части множества P, содержащейся на делении (a_{i-1}, a_i), а x_i есть *произвольная* точка этой части множества P. Если сумма S стремится к определенному пределу S', когда, оставляя неизменным множество P, мы заставляем все h_i равномерно стремиться к нулю, и если число S' стремится к определенному единственному пределу S'', когда σ стремится к нулю, тогда этот предел S'' и есть интеграл Бореля от $f(x)$ на (a, b).

33. Выбор интервалов исключения. Весьма важно в цитированном определении интеграла обратить внимание на выбор интервалов исключения (α_n, β_n). Этот выбор подчинен только одному ограничению: он должен быть таков, чтобы *существовал* предел S' сумм Римана S. В самом деле, если интервалы исключения (α_n, β_n) таковы, что не существует предела сумм S, когда h_i стремятся к нулю, то это отнюдь не доказывает, что $f(x)$ не интегрируема на (a, b) в смысле Бореля, а показывает лишь на то, что выбор интервалов исключения (α_n, β_n) сделан нами неудачно и что надо искать другой выбор, при котором бы существовало число S'. Итак, выбор (α_n, β_n) ограничен существованием предела чисел S. Наоборот, существование предела S'' чисел S' не есть ограничение, налагаемое на выбор интервалов (α_n, β_n), но есть уже условие интегрируемости функции $f(x)$ в смысле Бореля. В самом деле, если при одном выборе интервалов (α_n, β_n) число S' стремится к пределу S_1'', когда σ стремится к нулю, а при другом выборе (α_n, β_n) число S' стремится к S_2'', и если $S_1'' \neq S_2'$, то мы не знаем, какое из двух чисел S_1'' и S_2'' принять за интеграл Бореля от $f(x)$ на (a, b). Следовательно, существование единственного предела S'' чисел S' есть ограничение, налагаемое на *саму функцию* $f(x)$, а не на выбор интервалов исключения (α_n, β_n). Интервалы (α_n, β_n) должны быть только таковы, чтобы существовало число S', в остальном же произвольны.

34. Условие существования предела S' сумм Римана S. Здесь имеет место следующее предложение.

Лемма. *Для того чтобы существовал предел S' сумм Римана S, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ограниченной на P и непрерывной почти всюду на P.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой леммы: оно вполне аналогично доказательству предложения Лебега [1]) относительно функций, интегрируемых в смысле Римана на отрезке. Для доказательства леммы достаточно лишь заменить отрезок (a, b) совершенным множеством P [2]).

Заметим, что, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы на совершенном множестве P, предел S' сумм Римана S совпадает с интегралом Лебега $\int\limits_P f(\alpha)\, d\alpha$, распространенным на множество P. Этот предел S' можно назвать *интегралом Римана от $f(x)$, распространенным на совершенное множество P.*

---

[1]) См. Lebesgue, Leçons sur l'Intégration, стр. 29. [В русском переводе: Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных, ГТТИ, 1934, стр. 32. *Ред.*]

[2]) Совершенное множество P мы предполагаем, конечно, приведенным. См. относительно этого примечание 2 на стр. 110.

Ясно, что условия леммы удовлетворены, если $f(x)$ есть непрерывная на совершенном множестве P функция.

35. Эквивалентность интеграла Бореля, определенного в Encyclopédie, и интеграла Лебега. Пусть $f(x)$ есть несуммируемая функция на $[0, 1]$. Пусть E^+ есть совокупность всех точек области $[0, 1]$, где $f(x) \geqslant 0$, и E^- есть совокупность точек $[0, 1]$, где $f(x) < 0$. Так как по условию $|f(x)|$ есть несуммируемая на $[0, 1]$ функция, то, по крайней мере, один из интегралов Лебега

$$\int_{E^+} |f(\alpha)|\, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_{E^-} |f(\alpha)|\, d\alpha$$

есть $+\infty$.

а) Допустим сначала, что только один из этих интегралов равен $+\infty$ (например, первый), а другой есть конечная величина. Ясно, что в этих условиях имеем: $\operatorname{mes} E^+ > 0$. Так как $f(x)$ есть функция, измеримая на E^+, то (§ 7) всегда можно найти в E^+ совершенное множество P_1, обладающее свойствами:

1°. $\operatorname{mes}(E^+ - P_1) = \sigma'$, где $\sigma' > 0$, малое как угодно.

2°. Функция $f(x)$ есть непрерывная на P_1 функция.

Точно так же, если $\operatorname{mes} E^- > 0$, в множестве E^- содержится совершенное множество P_2, $\operatorname{mes}(E^- - P_2) = \sigma''$, на котором $f(x)$ есть непрерывная функция. Если же $\operatorname{mes} E^- = 0$, мы совсем не рассматриваем множества P_2, полагая в дальнейшем $P_2 \equiv 0$.

Рассмотрим теперь совершенное множество P:

$$P = P_1 + P_2.$$

Ясно, что $f(x)$ непрерывна на P; кроме того, имеем

$$\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} P_1 + \operatorname{mes} P_2 = 1 - (\sigma' + \sigma'').$$

Полагая $\sigma' + \sigma'' = \sigma$ и обозначая все смежные интервалы к P через (α_n, β_n), видим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes}(\alpha_n, \beta_n) = \sigma$.

Примем теперь эти интервалы (α_n, β_n) за *интервалы исключения*, употребленные в цитированном выше (§ 32) определении интеграла. Так как $f(x)$ есть непрерывная на P

функция, то в силу предыдущей леммы предел S' сумм Римана S существует и равен

$$\int_P f(\alpha)\,d\alpha = \int_{P_1} f(\alpha)\,d\alpha + \int_{P_2} f(\alpha)\,d\alpha.$$

Если σ стремится к нулю, ясно, что первый интеграл правой части стремится к $+\infty$, второй же имеет своим пределом $\int\limits_{E^-} f(\alpha)\,d\alpha$ величину *конечную*. Значит, $\int\limits_P f(\alpha)\,d\alpha$ стремится к $+\infty$, когда σ стремится к нулю. Следовательно, $f(x)$ есть *неинтегрируемая* в цитированном смысле функция.

b) Переходим теперь ко второму случаю, когда имеем одновременно

$$\int_{E^+} |f(\alpha)|\,d\alpha = +\infty \quad \text{и} \quad \int_{E^-} |f(\alpha)|\,d\alpha = +\infty.$$

В этом случае имеем, очевидно, $\operatorname{mes} E^+ > 0$ и $\operatorname{mes} E^- > 0$.

Строим, как выше, совершенные множества P_1 и P_2. Очевидно, что интеграл $\int\limits_{P_1} f(\alpha)\,d\alpha$ стремится к $+\infty$, когда σ' стремится к нулю, и, равным образом, интеграл $\int\limits_{P_2} f(\alpha)\,d\alpha$ стремится к $-\infty$, когда σ'' стремится к нулю. Но выбор множества P_1 не зависит от выбора множества P_2. Следовательно, мы можем заставить стремиться числа σ' и σ'' одновременно к нулю, так что сумма

$$\int_{P_1} f(\alpha)\,d\alpha + \int_{P_2} f(\alpha)\,d\alpha$$

будет колебаться между $+\infty$ и $-\infty$ так, как это нам будет угодно. Обозначая через P сумму $P_1 + P_2$ и через (α_n, β_n) смежные интервалы к множеству P, находим, что предел S' сумм Римана S есть

$$\int_P f(\alpha)\,d\alpha = \int_{P_1} f(\alpha)\,d\alpha + \int_{P_2} f(\alpha)\,d\alpha.$$

Отсюда этот предел колеблется между $+\infty$ и $-\infty$, когда $\sigma = \sigma' + \sigma''$ стремится к нулю. Следовательно, $f(x)$ неинтегрируема в цитируемом выше смысле.

c) Обратно, легко можно было бы доказать, что [50] если $f(x)$ есть суммируемая на [0, 1] функция, то тогда $f(x)$ всегда интегрируема в данном в Encyclopédie смысле. Отсюда *данное определение интеграла Бореля эквивалентно определению Лебега.*

Таким образом, если хотят указанным выше путем получить определение интеграла более общее, чем определение Лебега, *необходимо ограничить произвол выбора интервалов исключения* (α_n, β_n), наложив на них еще дополнительные условия, кроме того, что их сумма σ стремится к нулю. Это ограничение должно быть формулировано в виде точного закона, не допускающего никакой неопределенности, дабы процесс интегрирования был регулярным процессом. Попытка подобного ограничения имеется в определении интеграла Бореля, опубликованном в «Journal de Mathématiques»; мы теперь переходим к нему.

Определение интеграла в «Journal de Mathématiques»

36. Цитируем это определение текстуально: «Пусть $f(x)$ — неограниченная функция, не интегрируемая в смысле Римана; допустим, что мы можем определить на области интегрирования счетное (énumérable) множество [1]) точек $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n, \ldots$, обладающих следующим свойством: если мы

---

[1]) Борель называет ensemble énumérable всякое множество E, для которого *мы* действительно *знаем* соответствие между элементами множества и натуральными числами. Это соответствие должно быть нам известно в форме точного закона, не допускающего никакой неопределенности и формулируемого при помощи *конечного* числа слов и конечного числа вполне определенных логических операций. Другими словами, это соответствие должно быть установлено без помощи принципа произвольного выбора (аксиомы Цермело) [51]. Термину «ensemble énumérable» Борель противополагает термин «ensemble dénombrable non effectivement énumérable» (см. его «Paradoxes de la théorie des ensembles», Annales de l'École Normale», 1908 г.). Присоединяясь к мысли Бореля о необходимости различения этих двух понятий, мы удерживаем, однако, в этой работе прежний термин «счетное множество» (ensemble dénombrable), так как это не приведет здесь к принципиальным неудобствам.

окружим точку A_n интервалом исключения B_nC_n таким, что ряд $\sum B_nC_n$ сходится и имеет сумму ε, то обобщенные суммы Римана стремятся к пределу, *каковы бы ни были интервалы*, и этот предел сам стремится к пределу, когда ε стремится к нулю; этот последний предел есть по определению обобщенный интеграл в смысле Римана. Обобщенные суммы Римана это — суммы

$$\sum h_i f(\xi_i),$$

в которых по предположению

1° точки деления x_i не принадлежат интервалам исключения,

2° h_i равно $x_i - x_{i-1}$, из которого вычитается, если это нужно, длина интервалов исключения,

3° ξ_i лежит между x_{i-1} и x_i, но также не принадлежит интервалам исключения.

Предел этих сумм Римана ищется в предположении, что h_i стремится к нулю, а затем стремятся к нулю интервалы исключения».

Относительно этого определения интеграла Борель утверждает, что оно более общее, чем определение Лебега. Мы хотим теперь исследовать степень общности данного определения.

37. Выбор интервалов исключения. Рассматривая данное определение интеграла, мы замечаем, что оно в главных чертах тождественно предыдущему. Существенное отличие заключается лишь в выборе интервалов исключения. В предыдущем определении интервалы исключения были такими, чтобы, во-первых, их сумма была равна σ и, во-вторых, чтобы существовал предел S' сумм Римана S; в остальном же эти интервалы были произвольны. В данном же определении интеграла интервалы исключения B_nC_n должны, во-первых, иметь сумму, равную ε, и, во-вторых, должны содержать некоторую счетную строго определенную систему точек A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Эта система точек A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ является строго определенной для данной функции $f(x)$, является тесно связанной с природой этой функции; точки A_n играют роль особых точек для функции $f(x)$. Назовем систему точек A_n *базисом интегрируемости функции* $f(x)$.

Никаких других условий данное определение интеграла не налагает на интервалы исключения B_nC_n; удовлетворяя двум перечисленным условиям, эти интервалы B_nC_n являются в остальном произвольными. Что же касается до существования предела S' сумм Римана S, то данное определение интеграла категорически требует, чтобы этот предел S' *всегда* существовал, *каковы бы ни были интервалы исключения* B_nC_n, удовлетворяющие двум перечисленным условиям. Следовательно, это есть условие, налагаемое не на выбор интервалов B_nC_n, а на строение самой функции $f(x)$. Условимся называть этот выбор интервалов исключения *выбором* (B). Это есть выбор, указанный Борелем в только что цитированном определении интеграла.

Условимся, далее, называть *выбором* (B') такой выбор интервалов исключения B_nC_n, при котором к двум перечисленным только что условиям присоединяется требование существования предела S' сумм Римана S. Хотя этот выбор интервалов исключения не указан Борелем, однако рассмотрение его является наиболее естественным.

Мы хотим теперь исследовать общность данного определения интеграла при выборах (B) и (B').

38. Общность определения интеграла Бореля. Рассмотрим область $[0, 1]$. Пусть E есть измеримое множество на $[0, 1]$, обладающее следующим свойством: каков бы ни был интервал Δ, лежащий на $[0, 1]$, точки интервала Δ, принадлежащие к E, и точки интервала Δ, не принадлежащие к E, образуют два множества, мера каждого из которых *больше* нуля. Можно многими способами построить [1]) такое множество E.

Пусть, далее, $f(x)$ есть функция, равная 1 на E и равная 0 вне E. Ясно, что $f(x)$ есть измеримая функция; мы всегда можем предположить ее функцией класса 2, следуя классификации Бэра (§ 11). Мы хотим теперь доказать, что $f(x)$ есть неинтегрируемая функция в смысле Бореля.

В самом деле, пусть $f(x)$ интегрируема в смысле Бореля на $[0, 1]$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ есть базис интегрируемости функции $f(x)$. Так как $f(x)$, очевидно, не интегрируема

---

[1]) Одно из построений таких множеств E было указано И. И. Приваловым в заседании Московского математического общества.

в классическом смысле Римана ни на каком интервале Δ, лежащем на $[0, 1]$, то поэтому базис интегрируемости $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ есть множество, всюду плотное на $[0, 1]$. А в этих условиях легко можно построить совершенное нигде неплотное множество P, обладающее свойствами:

1°. P не содержит ни одной точки базиса $\{A_n\}$.

2°. $\text{mes}\, P = 1 - \varepsilon$.

3°. Функция $f(x)$, рассматриваемая на P, имеет множество точек разрыва меры, *большей* нуля.

Согласно свойствам 1° и 2° множества P смежные интервалы к множеству P всегда можно рассматривать как интервалы исключения B_nC_n. С другой же стороны, согласно лемме § 34 не существует предела S' сумм Римана S; это же противоречит свойству функции $f(x)$, которое требуется выбором (B) интервалов исключения B_nC_n (§ 37).

Итак, *существует ограниченная функция $f(x)$, интегрируемая в смысле Лебега и не интегрируемая в смысле Бореля.*

39. Чтобы исследовать до конца общность определения интеграла Бореля, введем одно понятие. Мы говорим, что функция $f(x)$ *несуммируема в точке* ξ, если $f(x)$ несуммируема во всяком интервале δ, содержащем внутри точку ξ, как бы мал он ни был [1]). Из этого определения непосредственно следует, что множество всех точек, в которых $f(x)$ несуммируема, есть всегда замкнутое множество на $[0, 1]$.

Если функция $f(x)$ суммируема на всей области $[0, 1]$, то не существует ни одной точки ξ, в которой $f(x)$ была бы несуммируемой. Наоборот, если $f(x)$ несуммируема на $[0, 1]$, тогда непременно должна существовать хотя одна точка ξ, в которой $f(x)$ несуммируема. Эти предложения непосредственно следуют из только что данного определения.

Пусть теперь $f(x)$ есть функция, интегрируемая в смысле Бореля на $[0, 1]$. Предположим $f(x)$ несуммируемой на области $[0, 1]$ и обозначим через F множество всех точек ξ, в которых $f(x)$ несуммируема. Согласно предыдущему F есть замкнутое множество. Так как $f(x)$ по предположению интегрируема в смысле Бореля на $[0, 1]$, то существует хотя

---

[1]) Понятие, введенное Данжуа; см. его «Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue» (Comptes Rendus, 1 апреля 1912 г.).

один базис интегрируемости. Пусть счетная система точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ есть один какой-нибудь из базисов интегрируемости функции $f(x)$.

Мы теперь утверждаем, что *множество F содержится всеми точками в базисе интегрируемости* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ В самом деле, если какая-либо точка ξ, в которой $f(x)$ несуммируема, не принадлежит к базису $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, тогда можно корректно показать [^{52}], что существует совершенное множество P, содержащее точку ξ и обладающее свойствами:

1°. P не содержит ни одной точки базиса $\{A_n\}$.

2°. $\text{mes}\, P = 1 - \varepsilon$.

3°. Функция $f(x)$, рассматриваемая на P, есть несуммируемая на P функция [1]).

Согласно свойствам 1° и 2° множества P смежные интервалы к P удовлетворяют всем требованиям выбора (B) интервалов исключения. С другой же стороны, функция $f(x)$ есть функция, не суммируемая на P и, следовательно, неограниченная. Поэтому (§ 34, лемма) не существует предела S' сумм Римана S, что противоречит свойству функции $f(x)$, которое требуется выбором (B) интервалов исключения (§ 37). Следовательно, множество F содержится в базисе $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, и поэтому F есть *счетное* множество. Но F есть замкнутое множество; отсюда выводим, что F есть *приводимое множество* [2]), следовательно, нигде не плотное на $[0, 1]$.

Таким образом мы оказываемся в условиях применимости метода интегрирования Дирихле [3]) к нашей функции $f(x)$; только нужно пользоваться для этого не интегралом Коши, а интегралом Лебега. Отсюда приходим к предложению: *всякая функция $f(x)$, интегрируемая на* $[0, 1]$ *в смысле Бореля,*

---

[1]) Такое множество P легко построить, пользуясь методом, употребленным в § 35, b). Множество P всегда можно предположить приведенным; см. примечание 2 на стр. 110.

[2]) То-есть такое, что одно из производных от него множеств $F^{(\alpha)}$ не содержит ни одной точки. Термин «приводимое множество» не имеет ничего общего с данным нами выше (примечание 2 на стр. 110) термином «приведенное множество».

[3]) См. L e b e s g u e, Leçons sur l'intégration, стр. 13—14. [В русском переводе: Л е б е г, Интегрирование и отыскание примитивных, ГТТИ, 1934, стр. 17—18. *Ред.*]

непременно интегрируема методом Дирихле-Лебега и, следовательно, методом Данжуа.

40. Общность определения интеграла при выборе (B') интервалов исключения. Определение интеграла, данное Борелем, становится значительно шире, если мы будем пользоваться выбором (B') интервалов исключения, Так, легко можно было бы показать [53], что всякая суммируемая функция $f(x)$ непременно интегрируема в смысле (B'). Однако общность этого последнего определения интеграла является значительно меньшей общности определения интеграла Данжуа. Это мы теперь хотим показать.

Теорема 1. *Если $f(x)$ есть функция, интегрируемая на* $[0, 1]$ *в смысле* (B'), *и если базис интегрируемости* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *есть множество, всюду плотное на* $[0, 1]$, *то функция $f(x)$ непременно суммируема на* $[0, 1]$.

Допустим, в самом деле, обратное. Обозначая попрежнему (§ 35) через E^+ множество всех точек $[0, 1]$, где $f(x) \geqslant 0$, и через E^- — множество всех точек, где $f(x) < 0$, видим, что, по крайней мере, один из интегралов Лебега

$$\int\limits_{E^+} |f(\alpha)|\,d\alpha \quad \text{и} \quad \int\limits_{E^-} |f(\alpha)|\,d\alpha$$

обращается в $+\infty$. Поступая, как в § 35, видим, что легко построить последовательность совершенных нигде не плотных, не содержащих точек базиса $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, множеств

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\lambda, \ldots,$$

обладающую свойствами:

1°. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \operatorname{mes} P_\lambda = 1$.

2°. Функция $f(x)$ непрерывна на P_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$.

3°. Интеграл Лебега $\int\limits_{P_\lambda} f(\alpha)\,d\alpha$, распространенный на множество P_λ, когда λ беспредельно возрастает, или стремится к $+\infty$, или стремится к $-\infty$, или колеблется между $+\infty$ и $-\infty$ так, как нам угодно.

Очевидно, что совокупность всех смежных к множеству P_λ интервалов удовлетворяет всем трем условиям выбора (B') интервалов исключения (§ 37); и так как предел S' сумм

Римана S есть, очевидно (§ 34), $\int\limits_{P_\lambda} f(\alpha)\,d\alpha$, то теорема доказана (ч. т. д.).

Приложим эту теорему к одному частному случаю. Рассмотрим две функции

$$\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)\chi(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\chi(x),$$

где $\chi(x)$ есть известная функция Дирихле, равная 0 для x рационального и равная 1 для x иррационального. Каждая точка x области $[0, 1]$ есть, очевидно, точка разрыва обеих этих функций. Отсюда (§ 34), если эти функции интегрируемы на $[0, 1]$ в смысле (B'), их базис интегрируемости $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ есть непременно множество, всюду плотное на $[0, 1]$. И так как обе эти функции несуммируемы на $[0, 1]$, то согласно предыдущей теореме они не могут быть интегрируемы в смысле (B') на $[0, 1]$. Отсюда: *существуют функции, не интегрируемые в смысле (B'), но интегрируемые методом Дирихле-Лебега, и, следовательно, методом Данжуа.*

Теорема 2. *Если $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ в смысле (B'), множество всех точек, в которых $f(x)$ несуммируема, нигде неплотно на $[0, 1]$.*

В самом деле, в противном случае существовал бы на $[0, 1]$ такой интервал (a, b), в каждой точке x которого $f(x)$ была бы несуммируемой. Следовательно, $f(x)$ разрывна в каждой точке интервала (a, b); отсюда базис интегрируемости $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ должен быть всюду плотным на (a, b). Но $f(x)$ есть не суммируемая на (a, b) функция, следовательно, согласно предыдущей теореме $f(x)$ не интегрируема в смысле (B') на (a, b), что противоречит допущению интегрируемости в смысле (B') на $[0, 1]$ (ч. т. д.).

Из этой теоремы видим, что если $f(x)$ интегрируема в смысле (B') на $[0, 1]$, во всяком интервале Δ, лежащем на $[0, 1]$, имеется такой интервал Δ_1, на котором $f(x)$ есть суммируемая функция. Отсюда все функции, интегрируемые в смысле (B'), обладают весьма частными свойствами.

Пользуясь приемами, аналогичными употребленным выше, можно было бы корректно доказать следующее общее предложение: *всякая функция* $f(x)$, *интегрируемая в смысле* (B') *на* $[0, 1]$, *непременно интегрируема на* $[0, 1]$ *в смысле Данжуа, причем числовые величины интегралов* (B') *и Данжуа совпадают.*

Мы не останавливаемся на доказательстве этого предложения [54].

41. Расширение предыдущего определения Борелем. Возьмем функцию

$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\chi(x),$$

рассмотренную нами в § 40. Каждое слагаемое этой суммы, очевидно, интегрируемо в смысле Бореля на $[0, 1]$; вся же сумма, как мы показали, не интегрируема в смысле Бореля на этой области. Предвидя это неудобство и желая расширить свое определение интеграла, Борель дал[1]) следующее обобщение своему определению: функцию $f(x)$ он назвал *интегрируемой* на $[0, 1]$, если $f(x)$ может быть написана в виде суммы

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)$$

конечного числа слагаемых, из которых каждое интегрируемо на $[0,1]$ в смысле, данном им ранее. При этом он полагает *по определению*, что интеграл суммы равен сумме интегралов. Легко показать, что это новое расширение понятия интеграла не выведет нас за пределы класса функций, интегрируемых в смысле Данжуа. В самом деле, если $f_i(x)$ интегрируема в смысле Бореля, то $f_i(x)$ непременно интегрируема и в смысле Данжуа. Но сумма конечного числа функций, интегрируемых в смысле Данжуа, есть функция, также интегрируемая в смысле Данжуа. Следовательно, $f(x)=\sum\limits_i f_i(x)$ интегрируема в смысле Данжуа, и определение Бореля не приводит к новому расширению понятия интеграла.

42. Задача общего выбора интервалов исключения. Хотя процесс интегрирования, предложенный Борелем, и не

---

[1]) В цитированной работе: «Le calcul des intégrales définies» (Journal de Mathématiques, 1914 г., стр. 203).

расширяет интеграл Данжуа, однако, он представляет большой интерес, так как приводит к ряду новых задач.

Заметим прежде всего, что употребление сумм Римана в процессе Бореля не имеет внутренней необходимости в теоретико-функциональном отношении, но имеет лишь методологический интерес, как стремление получить расширение интеграла приемом, напоминающим классические приемы Коши и Римана. Если отказаться от этой аналогии, то можно немного обобщить определение Бореля, что естественно сделать следующим образом.

Условимся называть *выбором* (B'') такой выбор интервалов исключения $B_n C_n$, который удовлетворяет следующим требованиям:

1°. Интервалы $B_n C_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ содержат все точки базиса интегрируемости $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots$

2°. $\sum \operatorname{mes} B_n C_n = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, малое как угодно.

3°. Функция $f(x)$ суммируема на совершенном множестве P, образующемся по удалении из $[0, 1]$ всех интервалов $B_n C_n$.

Обозначим через T' интеграл Лебега:

$$T' = \int_P f(\alpha)\, d\alpha.$$

Мы говорим, что данная функция $f(x)$ *интегрируема* на $[0, 1]$ *в смысле* (B''), если число T' стремится к единственному вполне определенному пределу T'', когда ε стремится к нулю; этот предел T'' мы называем *интегралом* (B'') от $f(x)$ на $[0, 1]$.

Легко видеть, что хотя это определение интеграла значительно шире определений (B) и (B'), однако оно также не приводит к расширению интеграла Данжуа. Тем не менее это определение интеграла представляет интерес, так как, повидимому, оно *эквивалентно* определению Данжуа. Повидимому, всякая функция, интегрируемая в смысле Данжуа, интегрируема также и в смысле (B''). Если так [1]), то опре-

---

[1]) Во время просмотра корректур этой работы Д. Е. Меньшовым был указан на заседании Московского математического общества (1914 г., декабрь) пример функции, интегрируемой методом Дирихле и, однако, неинтегрируемой в смысле (B''). Этот пример решает, очевидно, вопрос текста в *отрицательном* смысле [55].

деление (B'') *дает нам интеграл Данжуа без помощи трансфинитов 2-го класса*. Это же может представлять интерес [1]).

Но несравненно больший интерес представляет вопрос о том, можно ли найти такой выбор интервалов исключения $B_n C_n$, который давал бы возможность выйти за пределы класса функций, интегрируемых методом Данжуа. Некоторые факты указывают, что, повидимому, такой выбор существует.

Рассмотрим, например, два ряда

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[(x - r_n)^2 \sin \frac{1}{(x - r_n)^2} \right] \qquad \text{(I)}$$

и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d}{dx} \left[(x - r_n)^2 \sin \frac{1}{(x - r_n)^2} \right], \qquad \text{(II)}$$

где $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ суть все рациональные числа на $[0, 1]$. В следующей главе (§§ 52—57) мы докажем, что если ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ есть ряд, достаточно быстро сходящийся, то тогда ряд (II) сходится почти всюду на $[0, 1]$, и функция $f(x)$ не суммируема ни в каком интервале Δ, лежащем на $[0, 1]$, и, значит, *неинтегрируема в смысле Данжуа*; что же касается непрерывной функции $F(x)$, то она является в этих условиях всегда *примитивной* для $f(x)$.

Естественно спросить, *какая* это примитивная. Является ли эта примитивная $F(x)$ особенно тесно связанной с функцией $f(x)$ в структурном отношении, отвлекаясь от аналитического выражения? Аналитическая связь функций $F(x)$ и $f(x)$ состоит в том, что одна функция получается из другой с помощью дифференцирования почленно ее аналитического выражения. Эта аналитическая связь отражается ли в чем-либо на их строении, переходит ли она в сродство их структур? Или, наоборот, *любая другая* примитивная $F_1(x)$ может

---

1) См. примечание на стр. 104.

быть связа́на с $f(x)$ аналитическими выражениями указанного типа?

Повидимому, существует органическая связь структур $f(x)$ и $F(x)$, и, таким образом, примитивная $F(x)$ является особенной для $f(x)$. Далее, повидимому, примитивная $F(x)$ может быть получена из функции $f(x)$ путем надлежащего выбора интервалов исключения B_nC_n при базисе $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ Но, *действительно указать* такой выбор интервалов исключения B_nC_n является задачей значительной трудности [56].

ГЛАВА IV

СВОЙСТВА ПРИМИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Несуществование общего процесса интегрирования

43. После того как нами были рассмотрены свойства процессов интегрирования, предложенных до настоящего времени, мы переходим к вопросу о существовании общего процесса интегрирования.

То общее, что мы замечаем во всех этих процессах, это есть следующее: каждый процесс интегрирования выделяет из совокупности всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, одну примитивную $F_0(x)$, обладающую особыми свойствами, особенно тесно связанную с данной функцией $f(x)$, — примитивную, называемую «неопределенным интегралом». Тогда определенный интеграл вычисляется как разность двух значений этой примитивной, т. е.

$$\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = F_0(b) - F_0(a).$$

Хотя в силу основной теоремы для всякой $f(x)$, измеримой и конечной почти всюду, существуют примитивные $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, однако легко видеть, что не для каждой $f(x)$ возможно выделение из семейства примитивных неопределенного интеграла $F_0(x)$, если хотят, чтобы была какая-либо аналогия между этим интегралом и интегралом в смысле Коши.

Пусть, в самом деле, $f(x)$ есть *положительная* функция на $[0, 1]$, не интегрируемая на $[0, 1]$ в смысле Лебега. Пусть

$F_0(x)$ есть какая-нибудь примитивная для $f(x)$. Ясно, что $F_0(x)$ не может быть монотонной функцией на $[0, 1]$, так как в противном случае $f(x)$ была бы интегрируемой в смысле Лебега[1]). Отсюда на области $[0, 1]$ имеется такая пара точек a и b, $a < b$, что $F_0(b) - F_0(a) < 0$. Следовательно, имеем

$$\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha < 0, \quad a < b, \quad f(x) > 0,$$

что является противоречием главному свойству определенного интеграла, так как здесь все его элементы положительны.

Правда, $f(x)$ есть функция, определенная на $[0, 1]$ всюду, *кроме нуль-множества*; можно поэтому думать, что отрицательная величина определенного интеграла $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ обязана отрицательным значениям функции $f(x)$ на каком-либо нуль-множестве. Но эта мысль становится в противоречие с *принципом пренебрежения нуль-множеством*, на который мы систематически опирались все время. Нет никаких оснований думать, чтобы теория, в которой величина определенного интеграла изменяется при изменении интегрируемой функции в *одной только точке*, или на *счетном множестве точек*, или на *нуль-множестве*, представила бы научную ценность, была бы естественной и полезной для каких-либо вопросов анализа; напротив, мы знаем, что все теоремы теории функций, связанные с метрической характеристикой множеств, всегда не зависят от привходящих нуль-множеств.

Таким образом, вышеприведенная функция $f(x)$ является *примером функции, абсолютно не интегрируемой на* $[0, 1]$ *ни в каком возможном смысле*[2]).

44. Но кроме этого класса абсолютно неинтегрируемых функций можно указать примеры другого рода, из которых ясно, что если мы настаиваем на получении самого общего процесса интегрирования, то мы, на известных стадиях общности, должны искать неопределенный интеграл уже не

---

[1]) См. Hobson, The Theory of Functions, etc., стр. 557 [57].

[2]) При удержании операций интегрирования ее основных свойств.

в семействе примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, а среди *разрывных измеримых функций*.

Рассмотрим отрезок $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ длины 1. Пусть $f(x)$ дана на нем формулой

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{1}{2}.$$

Если интервал (a, b) не содержит точки $x=0$, интеграл $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ есть обычный интеграл Коши. Но если (a, b) содержит внутри точку $x=0$, то приходится или объявить функцию $f(x)$ не интегрируемой на (a, b), или дать какое-либо другое определение интегралу. Такое определение может быть дано на основании *принципа симметрии*.

Действительно, рассмотрим какой-либо интервал $(-c,+c)$, $0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$. Так как интеграл

$$\int\limits_{-c}^{+c} f(\alpha)\,d\alpha$$

имеет *все* свои элементы симметричными и попарно уничтожающимися, то единственная величина интеграла, которая может быть приписана ему каким-либо методом, есть *нуль*. Если мы примем это определение, тогда ясно, что неопределенный интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{x} f(\alpha)\,d\alpha$ есть функция, определенная и конечная для всякого x в интервале $\left(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right)$, кроме $x=0$. Но в этом случае неопределенный интеграл есть уже *разрывная функция* от x в точке $x=0$.

Легко построить аналогичные примеры, где неопределенный интеграл (получаемый по принципу симметрии) есть функция от x, разрывная в конечном числе точек; пользуясь же *методом сгущения особенностей* Кантора [1]), легко по-

[1]) Относительно этого метода см. Hobson, The Theory of Functions, etc., стр. 618 [[58]].

лучить такую функцию $f(x)$, для которой единственно возможным пониманием неопределенного интеграла $\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ является рассматривание его как функции переменного x, *разрывной в каждой точке области* $[0, 1]$. В этом случае определенный интеграл $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ есть величина, конечная для всякой пары точек a и b некоторого вполне определенного множества E *меры* 1 [[59]].

Мы увидим далее, что многие факты из теории сходящихся рядов функций и, особенно, все факты из теории тригонометрических рядов приводят к мысли искать неопределенный интеграл именно среди разрывных измеримых функций. Но, как и в случае примитивных, нужно и здесь, чтобы «неопределенным интегралом» была названа функция, хотя и разрывная, однако особенно тесно связанная с природой и свойствами данной функции $f(x)$.

Недостаточность аксиом Лебега

45. Известно, что Лебег после того, как конструктивным путем получил свое определение интеграла, дал еще второе, чисто логическое определение своего интеграла как системы чисел, удовлетворяющих известным аксиомам [1]). Естественно желать применить эту систему аксиом к отысканию более общего определения интеграла. Однако этот путь не может привести к цели; мы хотим теперь показать это.

Определение интеграла посредством аксиом заключается в следующем.

«Всякой функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b), $a \gtreqless b$, мы ставим в соответствие конечное число $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$, которое мы называем *«определенным интегралом» от* $f(x)$

---

[1]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration, стр. 98—100. [В русском переводе: Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных, ГТТИ, 1934, стр. 91—92. *Ред.*]

на (a, b) и которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_{a+h}^{b+h} f(\alpha - h)\,d\alpha$, где a, b и h — любые числа;

2. $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_b^c f(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_c^a f(\alpha)\,d\alpha = 0$, где a, b, c — любые числа;

3. $\int\limits_a^b [f(\alpha) + \varphi(\alpha)]\,d\alpha = \int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_a^b \varphi(\alpha)\,d\alpha$;

4. $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha \geqslant 0$ если $f(\alpha) \geqslant 0$, $a < b$;

5. $\int\limits_0^1 1\;d\alpha = 1$.

6. Если $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ возрастая, то интеграл от $f_n(x)$ стремится к интегралу от $f(x)$».

Заметим, прежде всего, что эта система аксиом указывает одновременно со свойствами интеграла еще и свойства *класса интегрируемых функций*; назовем последний через K. С этой точки зрения вся система аксиом Лебега делится на две качественно различные группы.

Группа I (аксиомы 1, 2 и 4) *суживает* определение интеграла, указывая, среди каких именно чисел нужно искать число $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha$.

Группа II (аксиомы 3, 5 и 6) *расширяет* класс K, заявляя, что 1 принадлежит к классу K (акс. 5), что сумма $f + \varphi$ принадлежит к K, если f и φ входят в K (акс. 3), и, наконец, что при известных условиях [60] предел f_n принадлежит к K, когда функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ входят в K [1]) (акс. 6).

---

[1]) Мы должны сказать, что лишь в общих чертах мы намечаем в аксиомах Лебега эти две группы. Некоторые аксиомы Лебега носят смешанный характер, не позволяющий отнести их только к одной группе. Так, например, аксиома 3 не только говорит относи-

Таким образом класс интегрируемых функций K в силу аксиом Лебега обладает следующими свойствами:

1°. 1 принадлежит к K.

2°. Если f входит в K, то функция λf, где λ есть постоянное число, тоже принадлежит к K [1]).

3° Если f и φ принадлежат к K, то и сумма $f+\varphi$ войдет в K.

4°. Если $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ суть функции из K и если $f_n \leqslant f_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ войдет в K [61].

тельно интегрируемости суммы $f+\varphi$, что вынуждает записать ее в группу II, но, вместе с тем, дает точную величину интеграла от от этой суммы $f+\varphi$, что тесно связывает рассматриваемую аксиому с группой I. Но какова бы ни была неопределенность очертаний той или другой группы, остаются в силе указываемые нами два момента, именно: момент сужения определения интеграла путем выбора его значений из определенной категории чисел и момент расширения класса K интегрируемых функций.

Следует еще заметить, что указанная неопределенность групп сильно зависит от неясности, присущей самой системе аксиом Лебега и вовлекшей ее автора в неточные утверждения. Так, неточным является утверждение Лебега, что система его аксиом влечет существование равенства

$$\int_a^b \lambda f(\alpha)\, d\alpha = \lambda \int_a^b f(\alpha)\, d\alpha,$$

где λ есть постоянное число. Действительно, даже в простом случае $\lambda=\frac{1}{2}$ из аксиом Лебега можно вывести лишь только то, что, *если функция* $\frac{1}{2} f(x)$ *интегрируема*, ее интеграл должен определяться равенством

$$\int_a^b \frac{1}{2} f(\alpha) = \frac{1}{2} \int_a^b f(\alpha)\, d\alpha.$$

Но самый факт интегрируемости функции $\frac{1}{2} f(x)$ не может быть выведен из интегрируемости данной функции $f(x)$ при посредстве аксиом Лебега и должен быть содержанием дополнительного утверждения.

Вероятно логический анализ лебеговой системы аксиом должен привести к внесению в нее дополнительных утверждений или к распадению некоторых аксиом на более простые аксиомы, между собой независимые [62].

[1]) См предыдущее примечание.

Уже сейчас можно заключить, что система аксиом Лебега не дает возможности расширить класс K за пределы того класса функций f, которые Лебег назвал ***суммируемыми*** функциями (fonctions sommables). Действительно, если K есть класс всех суммируемых функций, то известно, что λf, $f+\varphi$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ суть опять суммируемые функции [63]. Следовательно, все операции, указанные в системе аксиом Лебега, не расширяют класса суммируемых функций, и для расширения его, таким образом, *нужны еще новые аксиомы*.

Это же самое можно показать другим способом, более выясняющим вопрос о системе аксиом Лебега.

Возьмем какую-нибудь определенную функцию $\omega(x)$, измеримую и конечную почти всюду, обладающую следующим свойством: какова бы ни была конечная сумма $\sigma(x)$ вида

$$\sigma(x) = \sum \lambda_i \omega(x + h_i),$$

где λ_i и h_i суть какие-нибудь постоянные числа, лишь бы h_i были разные и λ_i не равные нулю, обе функции

$$|\sigma(x)| + \sigma(x) \quad \text{и} \quad |\sigma(x)| - \sigma(x)$$

имеют интеграл Лебега $\int\limits_a^b$ равным $+\infty$ в любом интервале (a, b), $a < b$, лежащем на $[0, 1]$.

Функции $\omega(x)$, обладающие этим свойством, существуют; ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n^n}} \frac{d}{dx}\left[(x - r_n)^2 \sin \frac{1}{(x - r_n)^2}\right],$$

где $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ суть все рациональные числа оси x-ов, есть ряд, абсолютно сходящийся почти всюду на $[0, 1]$, и его сумма обладает свойством функции $\omega(x)$ [1]).

Назовем через K_0 класс *всех* функций $f(x)$, обладающих следующим свойством: всегда можно разделить область $[0, 1]$ на конечное число таких интервалов:

$$\Delta_1 = (a_1, b_1), \quad \Delta_2 = (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad \Delta_N = (a_N, b_N),$$

[1]) Относительно таких рядов см. дальше, §§ 52—55 [64].

что в каждом из них, пусть в Δ_i ($i=1, 2, 3, \ldots, N$), имеем тождественно:

$$f(x)\equiv f_i(x)+\sum_p \lambda_p^{(i)}\omega\left(x+h_p^{(i)}\right)$$

$$(a_i \leqslant x \leqslant b_i), \quad i=1, 2, 3, \ldots, N,$$

где $f_i(x)$ есть суммируемая функция на Δ_i, числа $\lambda_p^{(i)}$, $h_p^{(i)}$ суть постоянные, причем $h_1^{(i)}$, $h_2^{(i)}$, $h_3^{(i)}$, ... суть разные, сумма же $\sum\limits_p$ распространяется на конечное число слагаемых.

Можно без труда убедиться в том, что класс K_0 удовлетворяет всем требованиям, налагаемым аксиомами Лебега на класс интегрируемых функций K [65].

Выберем для нашей функции $\omega(x)$ *произвольно* одну какую-нибудь ее примитивную $\Omega(x)$, уничтожающуюся в $x=0$. Ясно, что разность $\Omega(b)-\Omega(a)$ есть вполне определенное конечное число, зависящее только от a и b.

Пусть теперь $f(x)$ есть какая-нибудь функция из класса K_0 и (a, b) — какой-нибудь интервал на $[0, 1]$. В силу свойств функций, составляющих класс K_0, интервал (a, b) можно разделить на конечное число N таких интервалов

$$\Delta_1=(a_1, b_1), \quad \Delta_2=(a_2, b_2), \quad \ldots, \quad \Delta_N(a_N, b_N),$$

что на каждом из них, пусть на Δ_i ($i=1, 2, 3, \ldots, N$), имеем тождественно:

$$f(x)\equiv f_i(x)+\sum_p \lambda_p^{(i)}\omega\left(x+h_p^{(i)}\right)$$

$$(a_i \leqslant x \leqslant b_i), \quad i=1, 2, 3, \ldots, N,$$

где $f_i(x)$ есть суммируемая функция на Δ_i, числа же $\lambda_p^{(i)}$, $h_p^{(i)}$ суть постоянные, причем $h_1^{(i)}$, $h_2^{(i)}$, $h_3^{(i)}$, ... все разные.

Полагая *по определению* [1])

$$\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{a_i}^{b_i} f_i(\alpha)\,d\alpha + \sum_p \lambda_p^{(i)} [\Omega(h_p^{(i)} + b_i) - \Omega(h_p^{(i)} + a_i)] \right\},$$

убеждаемся без труда, что построенные таким образом класс K_0 функций $f(x)$ и числа $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ удовлетворяют всем аксиомам Лебега [66], и так как примитивная функция $\Omega(x)$ была выбрана произвольно, то приходим к следующему результату: *существует такой класс K_0 функций $f(x)$ и такая система чисел $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$, которые удовлетворяют таблице аксиом Лебега и притом так, что для одной из функций класса K_0, именно для $\omega(x)$, неопределенный интеграл $\int_0^x \omega(\alpha)\,d\alpha$ есть* произвольно выбранная *ее примитивная* $\Omega(x)$, *уничтожающаяся для* $x = 0$.

Отсюда ясна недостаточность аксиом Лебега для дальнейших обобщений понятия интеграла.

Таким образом, если желают итти дальше, представляется два пути: или пополнить таблицу аксиом Лебега, введя новые аксиомы, расширяющие класс K; такой аксиомой может, например, служить упомянутый выше (§ 44) *принцип симметрии*; или, оставив на время аксиоматический метод, искать конструктивным путем наиболее «естественное» расширение интеграла [67].

---

[1]) Интегралы $\int_{a_i}^{b_i}$, стоящие в правой части этой формулы, суть интегралы Лебега.

Функции, имеющие производную, равную нулю почти всюду

46. Найденные нами в §§ 23, 24, 30 (теорема III) характеристические свойства неопределенных интегралов Лебега и Данжуа являются *эквивалентными* этим определениям интеграла и не дают возможности сделать выбор особенной примитивной $F_0(x)$ из семейства $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, в случае, когда $f(x)$ не интегрируема в смысле Данжуа. Для того чтобы осуществить такой выбор в более общих случаях, мы должны снова обратиться к изучению примитивных функций и искать более общие свойства, отличающие неопределенный интеграл Лебега и Данжуа от всякой другой примитивной, — свойства, которые не были бы эквивалентными этим определениям интеграла.

Для этого рассмотрим сначала свойства непрерывных функций $\psi(x)$, $\psi(0)=0$, имеющих $\psi'(x)=0$ почти всюду на $[0, 1]$. Это рассмотрение является тем более уместным, что каждая примитивная функция $F_2(x)$ для $f(x)$ может быть получена из всякой другой примитивной $F_1(x)$ для $f(x)$ по формуле

$$F_2(x)=F_1(x)+\psi(x),$$

где, очевидно, $\psi(x)$ есть непрерывная функция, имеющая

$$\psi'(x)=0$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Итак, ставим вопрос: *чем* именно по своему строению отличается функция 0 от всякой непрерывной функции $\psi(x)$, $\psi(0)=0$, имеющей $\psi'(x)=0$ почти всюду на $[0, 1]$?

Теорема 1. *Если $\psi(x)$ есть непрерывная функция, имеющая $\psi'(x)=0$ почти всюду на $[0, 1]$, тогда существует на $[0, 1]$ такое множество E, $\operatorname{mes} E=1$, что совокупность всех значений функции $\psi(x)$ на E есть множество меры нуль.*

В самом деле, пусть E есть множество точек, где $\psi'(x)=0$. Имеем согласно условию $\operatorname{mes} E=1$. Пусть ξ есть какая-нибудь точка множества E.

а) Свойство колебаний функции $\psi(x)$. Мы хотим сначала найти свойство функции $\psi(x)$ вблизи точки ξ.

В силу равенства $\psi'(\xi)=0$ существует такое малое число H, $H>0$, что для $|h|<H$ имеем

$$\left|\frac{\psi(\xi+h)-\psi(\xi)}{h}\right|<\eta,$$

где $\eta>0$, малое как угодно. Пусть δ есть какой-нибудь интервал, содержащий точку ξ и заключенный в $(\xi-H, \xi+H)$. Обозначим через ω колебание функции $\psi(x)$ на интервале δ.

Имеем

$$\omega=\psi(x'')-\psi(x'),$$

где x'' и x' суть некоторые точки, находящиеся на δ. Отсюда

$$\omega\leqslant|\psi(x'')-\psi(\xi)|+|\psi(x')-\psi(\xi)|.$$

Но x'' и x' суть точки на δ и, следовательно, лежат на интервале $(\xi-H, \xi+H)$. Поэтому имеем неравенства:

$$\left|\frac{\psi(x'')-\psi(\xi)}{x''-\xi}\right|<\eta \quad \text{и} \quad \left|\frac{\psi(x')-\psi(\xi)}{x'-\xi}\right|<\eta,$$

откуда

$$|\psi(x'')-\psi(\xi)|<\eta|x''-\xi| \quad \text{и} \quad |\psi(x')-\psi(\xi)|<\eta|x'-\xi|.$$

Следовательно,

$$\omega\leqslant\eta|x''-\xi|+\eta|x'-\xi|.$$

Так как x'' и x' лежат на δ и этот интервал содержит точку ξ, то получаем окончательно

$$\omega\leqslant 2\eta\cdot\text{длина }\delta,$$

т. е. колебание функции $\psi(x)$ на достаточно малом интервале δ, содержащем точку ξ, меньше произведения η на удвоенную длину интервала δ, где $\eta>0$, малое как угодно.

b) Возвратимся к множеству E. Так как согласно предыдущему можно *каждую* точку ξ множества E заключить ***внутрь*** интервала δ, соответствующего неравенству $\omega\leqslant 2\eta\times$ $\times$ длина δ, то отсюда следует[1]) [68], что *все* множество E

1) В силу теоремы Юнга (Proc. Lond. Math. Soc. т. 35, стр. 387).

можно заключить в конечное или счетное множество *открытых* интервалов

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots,$$

не имеющих попарно общей точки и соответствующих неравенствам:

$$\omega_n \leqslant 2\eta \cdot \text{длина } \delta_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где ω_n есть колебание $\psi(x)$ на δ_n. Складывая эти неравенства, имеем

$$\sum \omega_n \leqslant 2\eta \cdot \sum \text{длина } \delta_n = 2\eta,$$

так как $\operatorname{mes} E = 1$.

Полученное неравенство показывает, что множество значений функции $\psi(x)$ на множестве E можно заключить в систему интервалов, сумма длин которых $\leqslant 2\eta$. И так как η можно сделать произвольно малым, то множество значений функций $\psi(x)$ на E имеет меру, строго равную нулю (ч. т. д.).

Теорема 2. *Если $\psi(x)$ есть непрерывная функция на* $[0, 1]$, *не тождественная постоянной и имеющая $\psi'(x) = 0$ почти всюду на* $[0, 1]$, *тогда существует на* $[0, 1]$ *такое множество G меры нуль, что совокупность всех значений функции $\psi(x)$ на G есть множество меры, большей нуля.*

В самом деле, пусть попрежнему E есть множество точек, где $\psi'(x) = 0$. Обозначим через G множество, дополнительное к E.

Функция $\psi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ и не тождественна постоянной. Поэтому значения функции $\psi(x)$ на всей области $[0, 1]$ образуют интервал, длина которого равна колебанию функции $\psi(x)$ на всей области $[0, 1]$; обозначим через Ω это колебание. Имеем

$$\Omega > 0.$$

Так как значения функции $\psi(x)$ на множестве E образуют множество меры нуль, то отсюда следует, что значения функции $\psi(x)$ на множестве G образуют множество меры $\Omega > 0$ (ч. т. д.).

Теорема 3. *Если $\psi(x)$ есть непрерывная функция на* $[0, 1]$, *не тождественная постоянной и имеющая* $\psi'(x) = 0$

почти всюду на [0, 1], ***то существует на*** [0, 1] ***такое совершенное множество*** π ***меры нуль, что значения функции*** $\psi(x)$ ***на*** π ***образуют множество меры, как угодно близкой к колебанию*** Ω ***функции*** $\psi(x)$ ***на всей области*** [0, 1].

В самом деле, возьмем систему открытых интервалов

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots,$$

о которой шла речь в предыдущей теореме 1. Удаляя все эти интервалы δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ из области [0, 1], получим, очевидно, некоторое замкнутое множество g.

В силу неравенства

$$\sum \omega_n \leqslant 2\eta$$

значения функции $\psi(x)$ на интервалах δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, смежных к множеству g, образуют множество меры, меньшей 2η. Отсюда значения функции $\psi(x)$ на самом множестве g образуют множество меры $> \Omega - 2\eta$, т. е. множество меры *не нуль*, так как η малое по желанию. Поэтому множество g не может быть счетным. Значит, оно есть сумма некоторого счетного множества точек e и совершенного множества π, т. е.

$$g = e + \pi.$$

Имеем, очевидно,

$$\text{mes}\, \pi = 0,$$

что доказывает теорему (ч. т. д).

Эти предложения показывают, что в наиболее простом случае, когда мы имеем тождественно

$$f(x) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

неопределенный интеграл $\int\limits_0^x 0\, dx$ отличается от всякой другой примитивной $\psi(x)$, $\psi(0) = 0$, тем, что значения неопределенного интеграла $\int\limits_0^x 0\, dx$ на любом нуль-множестве образуют опять нуль-множество, тогда как для всякой другой примитивной $\psi(x)$ всегда существует такое нуль-множество E, на котором значения примитивной функции $\psi(x)$ образуют уже измеримое множество меры, ***большей нуля.*** Это дает нам мысль изучать вообще непрерывные функции на множествах меры нуль и классифицировать их соответственно их свойствам на нуль-множествах.

Свойства непрерывных функций на множествах меры нуль

47. Пусть $F(x)$ есть какая-нибудь непрерывная функция на области $[0, 1]$. Мы говорим, что $F(x)$ обладает на $[0, 1]$ ***N-свойством*** («нуль-свойством»), если, каково бы ни было множество $\mathfrak{M}$ меры нуль, лежащее на $[0, 1]$, значения функции $F(x)$ на $\mathfrak{M}$ образуют множество непременно меры нуль.

Прежде всего ясно, что *не все* непрерывные функции $F(x)$ обладают N-свойством: в самом деле, функции $\psi(x)$, имеющие $\psi'(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ и не тождественные постоянной, уже не обладают N-свойством, как это мы видели в предыдущем параграфе.

Относительно непрерывных функций $F(x)$, *не* обладающих N-свойством, имеет место следующее общее предложение.

Теорема. ***Если непрерывная функция $F(x)$ не обладает на $[0, 1]$ N-свойством, всегда существует на $[0, 1]$ такое совершенное множество π меры нуль, что значения функции $F(x)$ на π образуют множество меры, большей нуля.***

В самом деле, пусть непрерывная функция $F(x)$ не обладает на $[0, 1]$ N-свойством. Это значит, что существует на $[0, 1]$ такое множество $\mathfrak{M}$ меры нуль (в смысле Лебега), что значения функции $F(x)$ на $\mathfrak{M}$ не образуют множества меры нуль. Обозначая через m_e внешнюю меру этого множества значений функции $F(x)$ на $\mathfrak{M}$, имеем $m_e > 0$.

Заключим множество $\mathfrak{M}$ в счетное множество замкнутых отрезков $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$, не имеющих общих точек, и таких, что $\sum\limits_1^\infty$ длина $\delta_n < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$, малое как угодно.

Среди этих отрезков δ_n должен иметься по крайней мере *один*, пусть δ_i, такой, что множество значений функции $F(x)$

на части множества $\mathfrak{M}$, содержащейся в δ_i, имеет внешнюю меру, *бо́льшую* нуля. В самом деле, в противном случае множество значений функции $F(x)$ на $\mathfrak{M}$ имело бы меру, равную нулю.

Теперь мы утверждаем, что можно выбрать число ε_1 столь малым, что в последовательности $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ у нас будет иметься не один отрезок δ_i, обладающий этим свойством, а по крайней мере два. Действительно, функция $F(x)$ есть непрерывная функция; поэтому всегда можно найти такое малое число ε_1, что колебание функции $F(x)$ на *всяком* интервале (a, b), лежащем на $[0, 1]$, длина которого не превышает ε_1, будет меньше $\frac{m_e}{2}$. Выбрав ε_1 именно таким, заключаем немедленно, что в последовательности $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n, \ldots$ имеется, по крайней мере, *два* отрезка, таких, что совокупность значений функции $F(x)$ на части множества $\mathfrak{M}$, заключенной в каждом из них, имеет внешнюю меру, *бо́льшую* нуля.

Возьмем число ε_1 именно таким и обозначим через

$$\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}, \ldots, \delta_{i_N}, \ldots \qquad (N \geqslant 2)$$

совокупность *всех* отрезков, содержащихся в последовательности $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ и обладающих упомянутым свойством. Если этих отрезков имеется лишь конечное число, пусть N_1 $(N_1 \geqslant 2)$, берем их все и обозначим их новыми символами, именно, через $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots, u_{N_1}^{(1)}$. Если же этих отрезков δ_{i_N} бесконечное множество, тогда ясно, что можно выбрать число N_1 столь большим, чтобы совокупность всех значений функции $F(x)$ в точках множества $\mathfrak{M}$, содержащихся в системе N_1 интервалов

$$\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{i_3}, \ldots, \delta_{i_{N_1}},$$

имела внешнюю меру $> m_e - \frac{m_e}{3}$. Обозначая и теперь эти отрезки через $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots, u_{N_1}^{(1)}$, видим, что в том и другом случае имеем систему (Σ_1) N_1 отрезков:

$$u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots, u_{N_1}^{(1)} \qquad N_1 \geqslant 2, \qquad (\Sigma_1)$$

обладающую свойствами:

1°. $\sum\limits_{1}^{N_1}$ длина $u_i^{(1)} < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$, малое как угодно.

2°. Совокупность значений функции $F(x)$ на части множества $\mathfrak{M}$, содержащейся в $u_i^{(1)}$, имеет внешнюю меру >0. Обозначим эту внешнюю меру через $\mu_i^{(1)}$, $\mu_i^{(1)}>0$.

3°. Совокупность значений функции $F(x)$ в точках множества $\mathfrak{M}$, содержащихся в системе (Σ_1) отрезков, имеет внешнюю меру $> m_e - \frac{m_e}{3}$.

Теперь мы можем оперировать с каждым отрезком $u_i^{(1)}$ и с частью множества $\mathfrak{M}$, заключенной в нем, таким же точно образом, как мы оперировали с областью $[0, 1]$ и со всем множеством $\mathfrak{M}$. Значит, мы можем всегда найти в $u_i^{(1)}$ такую конечную систему отрезков (по крайней мере *два*), которая по отношению к $u_i^{(1)}$ и к части множества $\mathfrak{M}$, заключенной в $u_i^{(1)}$, обладает теми же тремя свойствами, какими обладает система (Σ_1) по отношению к области $[0, 1]$ и множеству $\mathfrak{M}$. Только в этом случае число ε_1 мы заменяем числом ε_2, $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2N}$, и разность $m_e - \frac{m_e}{3}$ заменяем разностью $\mu_i^{(1)} - \frac{\mu_i^{(1)}}{3^2}$, что всегда возможно согласно предыдущему. Обозначим систему всех образованных таким образом отрезков для различных $u_i^{(1)}$ через

$$u_1^{(2)},\ u_2^{(2)},\ u_3^{(2)},\ \ldots,\ u_{N_2}^{(2)}, \qquad N_2 \geqslant 2^2. \qquad (\Sigma_2)$$

Из этой системы (Σ_2) таким же точно образом мы образуем новую систему (Σ_3) отрезков

$$u_1^{(3)},\ u_2^{(3)},\ u_3^{(3)},\ \ldots,\ u_{N_3}^{(3)}, \qquad N_3 \geqslant 2^3, \qquad (\Sigma_3)$$

только для этого образования мы заменяем число ε_1 числом ε_3, $\varepsilon_3 < \frac{\varepsilon_2}{2N_2}$, и разность $m_e - \frac{m_e}{3}$ заменяем разностью $\mu_i^{(2)} - \frac{\mu_i^{(2)}}{3^3}$. Затем мы образуем последовательно системы (Σ_4), (Σ_5) и т. д.

Процесс образования систем, очевидно, не закончится на конечном числе шагов, и таким образом мы получим последовательность

$$(\Sigma_1),\ (\Sigma_2),\ (\Sigma_3),\ \ldots,\ (\Sigma_n),\ \ldots$$

систем отрезков.

Обозначим теперь через π совокупность всех точек области $[0, 1]$, принадлежащих одновременно ко всем этим системам отрезков (Σ_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Мы утверждаем, что π есть искомое совершенное множество, оправдывающее теорему.

Действительно, в каждом отрезке системы (Σ_n) содержится по крайней мере *два* отрезка системы (Σ_{n+1}); и так как система (Σ_{n+1}), рассматриваемая как множество точек, есть часть системы (Σ_n), то отсюда следует, что множество π существует и есть *совершенное* множество[1]). Но сумма длин отрезков, образующих систему (Σ_n), меньше чем $\frac{\varepsilon_1}{2^n}$. Отсюда $\operatorname{mes}\pi = 0$.

Наконец, обозначая через Q_n совокупность всех значений функции $F(x)$ во всех точках системы (Σ_n), видим, что

$$\operatorname{mes} Q_n \geqslant m_e - \frac{m_e}{3} - \frac{m_e}{3^2} - \ldots = \frac{m_e}{2} > 0.$$

И так как множество Q_n содержит, очевидно, множество $Q_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$, то совокупность значений функции $F(x)$ на совершенном множестве π, будучи общею частью множеств

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n, \ldots,$$

имеет меру $\geqslant \frac{m_e}{2} > 0$ (ч. т. д.).

Легко видеть, что доказательство этой теоремы дает больше, чем то, что содержится в ее формулировке. Дабы показать это, введем одно понятие. Мы называем *порцией множества* $\mathfrak{M}$ совокупность точек множества $\mathfrak{M}$, содержащихся *внутри* какого-нибудь интервала (a, b). В силу этого

---

[1]) Так как оно, очевидно, получается путем последовательного удаления из области $[0, 1]$ интервалов, не имеющих общих точек, включая концы.

определения легко видеть справедливость следующего предложения.

Значения функции $F(x)$ на любой порции множества π образуют множество меры, большей нуля.

Действительно, всякий интервал (a, b), содержащий внутри точку множества π, должен, очевидно, содержать внутри отрезок системы (Σ_n), когда n есть достаточно большое число. Пусть этот отрезок есть $u_i^{(n)}$. А из доказательства предшествующей теоремы ясно, что значения функции $F(x)$ на части множества π, содержащейся в $u_i^{(n)}$, образуют множество меры $\geqslant \frac{\mu_i^{(n)}}{2} > 0$, так как в этом доказательстве вся область $[0, 1]$ и число m_e играют ту же самую роль, как отрезок $u_i^{(n)}$ и число $\mu_i^{(n)}$ (ч. т. д).

Эти предложения имеют то значение, что сводят изучение непрерывных функций на самых общих множествах меры нуль к изучению этих функций на *совершенных* множествах меры нуль, что во многих вопросах представляет существенное упрощение.

Было бы весьма интересно изучить более подробно класс всех непрерывных функций $F(x)$, обладающих N-свойством, поставив, например, вопрос о том, когда сумма двух функций $F_1(x) + F_2(x)$ обладает N-свойством, если им обладают $F_1(x)$ и $F_2(x)$, или ставя вопрос о существовании производных у таких функций $F(x)$ [69].

Не останавливаясь на этом изучении, мы переходим к рассмотрению другого интересного класса непрерывных функций, заключенного в классе функций, обладающих N-свойством.

48. Функции с нулевым изменением. Мы говорим, что непрерывная функция $F(x)$ есть *функция с нулевым изменением* на области $[0, 1]$, если, каково бы ни было множество $\mathfrak{M}$ меры нуль и как бы мало ни было число ε, $\varepsilon > 0$, всегда можно заключить множество $\mathfrak{M}$ в такую последовательность отрезков $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots, \sum\limits_1^\infty$ длина $\delta_n < \varepsilon$, что, обозначая колебание функции $F(x)$ на δ_n через ω_n, имеем

$$\sum_1^\infty \omega_n < \varepsilon.$$

Для того чтобы сделать ясным смысл данного определения, введем несколько понятий.

Пусть на области [0, 1] имеем некоторое измеримое множество $\mathfrak{M}$. Будем обозначать через (Σ) всякую счетную систему отрезков, не имеющих попарно общих точек и лежащих на [0, 1].

Мы говорим, что *последовательность* (S) *систем*

$$(\Sigma_1),\ (\Sigma_2),\ \ldots,\ (\Sigma_n),\ \ldots \tag{S}$$

эквивалентна множеству $\mathfrak{M}$, *если множество* $\mathfrak{M}$ *содержится в каждой системе* (Σ_n) *и если*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(\Sigma_n) = \operatorname{mes}\mathfrak{M}.$$

Пусть $F(x)$ есть непрерывная функция на [0, 1]. Обозначая через

$$\delta_1^{(n)},\ \delta_2^{(n)},\ \delta_3^{(n)},\ \ldots,\ \delta_\lambda^{(n)},\ \ldots$$

все отрезки системы (Σ_n) и через $\omega_\lambda^{(n)}$ колебание функции $F(x)$ на отрезке $\delta_\lambda^{(n)}$, видим, что каждой системе (Σ_n) соответствует положительное число (конечное или бесконечное) Y_n:

$$Y_n = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \omega_\lambda^{(n)}.$$

Вследствие этого каждой последовательности (S), эквивалентной множеству $\mathfrak{M}$, соответствует последовательность чисел

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \ldots,\ Y_n,\ \ldots$$

Обозначим через $y^{(S)}$ нижний предел этой последовательности чисел. Ясно, что $y^{(S)}$ есть положительное число (конечное или нет), зависящее от S. Меняя S, мы получаем, вообще, различные числа $y^{(S)}$. Обозначим через $w_{\mathfrak{M}}$ нижнюю грань всех чисел $y^{(S)}$, получающихся при рассмотрении совокупности *всех* систем S, эквивалентных данному множеству $\mathfrak{M}$. *Это число* $w_{\mathfrak{M}}$, *зависящее, очевидно, только от функции* $F(x)$ *и множества* $\mathfrak{M}$, *мы будем называть минимумом изменения функции* $F(x)$ *для множества* $\mathfrak{M}$.

Из этого определения следует, что функция с нулевым изменением есть функция, имеющая минимум изменения для всякого нуль-множества равным нулю.

Относительно непрерывных функций $F(x)$, не обладающих нулевым изменением, имеет место следующее общее предложение.

Теорема. *Если непрерывная функция $F(x)$ не есть функция с нулевым изменением на* $[0, 1]$, *всегда существует на* $[0, 1]$ *такое* ***совершенное*** *множество* π *меры нуль, что минимум изменения функции $F(x)$ на любой порции множества π есть число,* ***большее нуля.***

Доказательство этого предложения совершенно аналогично доказательству теоремы предыдущего параграфа. Достаточно, в самом деле, заменить там термин «внешняя мера» термином «минимум изменения», оставив все остальное без перемен.

Отношение класса всех функций с нулевым изменением к N-свойству характеризуется следующим предложением.

Теорема. *Всякая функция $F(x)$ с нулевым изменением на* $[0, 1]$ *обладает N-свойством.*

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ есть какое-нибудь множество меры нуль на $[0, 1]$. Пусть Q есть множество значений функции $F(x)$ на $\mathfrak{M}$. Так как по предположению $F(x)$ есть функция с нулевым изменением на $[0, 1]$, то множество $\mathfrak{M}$ можно заключить в такую систему отрезков $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$, что имеем $\sum_1^\infty \omega_n < \varepsilon$, где ω_n есть колебание функции $F(x)$ на δ_n.

Пусть M_n и m_n суть максимум и минимум функции $F(x)$ на δ_n. Обозначим на оси Y-ов отрезок (m_n, M_n) через Δ_n. Ясно, что все множество Q заключено в системе отрезков Δ_1, $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$ И так как $\sum_1^\infty$ длина $\Delta_n = \sum_1^\infty \omega_n < \varepsilon$, то имеем точно: $\operatorname{mes} Q = 0$, т. е. $F(x)$ обладает на $[0, 1]$ N-свойством (ч. т. д.).

Следствие. *Никакая непрерывная функция $\psi(x)$, имеющая $\psi'(x) = 0$ почти всюду и не тождественная постоянной, не есть функция с нулевым изменением.*

В самом деле, обращаясь к теореме 2 (§ 46), видим, что $\psi(x)$ не обладает на $[0, 1]$ N-свойством; поэтому в силу предшествующего предложения она не может быть функцией с нулевым изменением (ч. т. д.).

Было бы весьма интересно изучить более детально свойства функций $F(x)$ с нулевым изменением, ставя хотя бы те же вопросы, которые были формулированы выше, по поводу N-свойства [70]. Мы не будем останавливаться на этом изучении; теперь мы имеем в виду только показать значение этих двух классов непрерывных функций для общей теории неопределенного интеграла. В главе VI мы покажем, какую роль играет N-свойство для общей теории тригонометрических рядов.

О выборе неопределенного интеграла

49. Общее свойство неопределенных интегралов Лебега и Данжуа. Рассмотрим какое-нибудь совершенное множество π, $\operatorname{mes}\pi=0$, лежащее на $[0, 1]$. Пусть $F(x)$, $F(0)=0$, есть непрерывная функция на $[0, 1]$, неубывающая, постоянная внутри всякого интервала, смежного к множеству π, и не тождественная нулю[1]). Ясно, что $F(x)$ есть примитивная функция для $f(x)\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Первый пример подобной функции $F(x)$ был построен Кантором; свойства таких функций $F(x)$ достаточно хорошо известны [71].

Множество значений функции $F(x)$ на множестве π образует на оси Y-ов отрезок длины $F(1)>0$. Эту примитивную $F(x)$ можно рассматривать как получившуюся из неопределенного интеграла $\int\limits_0^x 0\,d\alpha$ путем резкой деформации последнего на нуль-множестве π, тогда как в смежных к множеству π интервалах примитивная $F(x)$ имеет то же самое строение, как и неопределенный интеграл $\int\limits_0^x 0\,d\alpha$.

Вообще в силу теорем § 46 всякую примитивную $\psi(x)$, $\psi'(x)=0$, почти всюду на $[0, 1]$ можно рассматривать, как образовавшуюся путем резкой деформации неопределенного

---

[1]) Относительно таких функций см. примечания к § 15.

интеграла $\int\limits_0^x 0\,d\alpha$ на множестве G меры нуль. На этом множестве G значения функции $\psi(x)$ образуют множество меры, равной колебанию функции $\psi(x)$ на целой области $[0, 1]$. И на этом же множестве G функция $\psi(x)$ уже не имеет нулевого изменения согласно теореме § 48.

Это, естественно, наводит на мысль рассматривать любую примитивную функцию $F(x)$, $F(0)=0$, для $f(x)$, как образовавшуюся путем резкой деформации неопределенного интеграла $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ (когда таковой есть) на некотором нуль-множестве, на котором примитивная $F(x)$ вследствие этого уже не имеет ни N-свойства, ни нулевого изменения. Отсюда естественно приходим к мысли *выбирать неопределенный интеграл только среди тех примитивных, которые суть функции с нулевым изменением.*

Эта мысль совершенно подтверждается предложением:

Теорема. *Неопределенный интеграл Лебега или Данжуа есть единственная из семейства* $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, *примитивная функция, обладающая нулевым изменением.*

а) Рассмотрим сначала случай неопределенного интеграла Лебега. Пусть $f(x)$ есть суммируемая функция на $[0, 1]$. Ясно, что неопределенный интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть непрерывная функция с нулевым изменением на $[0, 1]$. Действительно, в силу теорем Витали и Валле-Пуссена[1]) о функциях «абсолютно непрерывных» [72] сумма колебаний $\sum\limits_1^{\infty} \omega_n$ функции $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ на счетном множестве интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ стремится к нулю, когда сумма длин этих интервалов, $\sum\limits_1^{\infty}$ длина δ_n, стремится к нулю. Отсюда следует, что $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть функция с нулевым изменением.

---

[1]) См. примечания к § 23.

Мы теперь утверждаем, что $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть *единственная* примитивная функция с нулевым изменением из семейства всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, функций для данной $f(x)$. В самом деле, всякая примитивная $F(x)$, отличная от $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, имеет форму

$$F(x)=\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha+\psi(x),$$

где непрерывная функция $\psi(x)$, $\psi(0)=0$, имеет $\psi'(x)=0$ почти всюду на $[0, 1]$ и не тождественна постоянной. Отсюда в силу теоремы 2 (§ 46) существует такое множество G меры нуль, на котором значения функции $\psi(x)$ образуют множество меры Ω, где Ω есть колебание функции $\psi(x)$ на целой области $[0, 1]$, т. е. $\Omega>0$. Отсюда следует, что, в какую бы систему интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ мы ни заключали наше множество G, сумма $\sum\limits_1^\infty \omega_n$, где ω_n есть колебание $\psi(x)$ на δ_n, всегда превышает или равна Ω.

С другой стороны, обозначая через ω_n' колебание функции $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ на δ_n, получаем, что сумма $\sum\limits_1^\infty \omega_n'$ стремится к нулю, когда сумма длин интервалов, $\sum\limits_1^\infty$ длина δ_n, стремится к нулю в силу упомянутой теоремы Витали — Валле-Пуссена.

Обозначая, наконец, через ω_n'' колебание примитивной $F(x)$ на δ_n, имеем, очевидно, $\omega_n''\geqslant\omega_n-\omega_n'$, откуда

$$\sum_1^\infty \omega_n''\geqslant\sum_1^\infty \omega_n-\sum_1^\infty \omega_n'.$$

Так как первая сумма, стоящая в правой части, всегда превышает $\Omega>0$, вторая же сумма стремится к нулю с

$\sum\limits_1^\infty$ длина δ_n, то отсюда следует, что $\sum\limits_1^\infty \omega_n''$ не может стремиться к нулю, когда $\sum\limits_1^\infty$ длина δ_n стремится к нулю, т. е. что примитивная $F(x)$ не есть функция с нулевым изменением.

b) Обратимся теперь к случаю неопределенного интеграла Данжуа. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ в смысле Данжуа и пусть неопределенный интеграл Данжуа $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть функция, не обладающая нулевым изменением. Тогда в силу теоремы § 48 существует такое совершенное множество π, $\text{mes}\,\pi = 0$, что минимум изменения функции $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ на всякой порции множества π не есть нуль. А из теоремы III (a) § 30 (глава III) мы, напротив, знаем, что, каково бы ни было совершенное множество π меры нуль, всегда существует такая порция π_1 множества π, для которого «полное изменение» v_{π_1} функции $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ существует и равно нулю. И так как минимум изменения для множества меры нуль совпадает, очевидно, с «полным изменением», когда последнее существует[1]), то отсюда следует, что $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ есть функция с нулевым изменением.

Мы теперь утверждаем, что неопределенный интеграл Данжуа есть *единственная* примитивная функция с нулевым изменением из семейства всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0) = 0$. Действительно, представив попрежнему примитивную $F(x)$, отличную от $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$, в форме

$$F(x) = \int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha + \psi(x),$$

[1]) О полном изменении см. § 29.

видим, что существует (§ 48) такое совершенное множество π, $\operatorname{mes}\pi = 0$, что минимум изменения функции $\psi(x)$ на всякой порции множества π отличен от нуля. И так как, с другой стороны, существует [§ 30, теорема III (а)] такая порция π_1 множества π, для которой «полное изменение» v_{π_1} функции $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ равно нулю, то таким же точно образом, как и для интеграла Лебега, мы убеждаемся в том, что минимум изменения примитивной $F(x)$ на π_1 *больше* нуля (ч. т. д.).

В главе III мы дали свойства, названные нами «характеристическими», принадлежащие всем неопределенным интегралам Лебега и Данжуа. Свойства эти «эквивалентны» указанным определениям интеграла, так как всякая примитивная $F(x)$, обладающая ими, является, как мы показали там, неопределенным интегралом Лебега или Данжуа. Найденное же теперь общее свойство интегралов Лебега и Данжуа уже не является эквивалентом этих определений интеграла, потому что, и это самое интересное, *существуют примитивные функции $F(x)$ с нулевым изменением, производная которых $F'(x)$ не интегрируема ни в смысле Лебега, ни в смысле Данжуа ни в каком интервале (a, b)*. Существование таких примитивных $F(x)$ далее будет обнаружено.

50. Выбор неопределенного интеграла. Согласно предшествовавшему естественно воспользоваться определением функции с нулевым изменением для расширения понятия неопределенного и определенного интеграла.

Пусть $f(x)$ есть измеримая функция, данная на области $[0, 1]$. Обозначим, как прежде, через $\{F(x)\}$, $F(0) = 0$, пучок всех ее примитивных, уничтожающихся в $x = 0$. Если в этом семействе примитивных находится одна и *только одна* примитивная функция $F_0(x)$ с нулевым изменением [[78]], скажем тогда, что $f(x)$ есть *интегрируемая функция* и что $F_0(x)$ есть *ее неопределенный интеграл*, и условимся писать

$$F_0(x) = \int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha.$$

Что же касается *определенного интеграла* $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$, то его мы определяем как разность двух значений неопределенного интеграла $F_0(x)$, т. е. по формуле

$$\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = F_0(b) - F_0(a).$$

В силу всего того, что предшествовало, это определение интеграла является наиболее естественным. В самом деле, если в семействе всех примитивных $\{F(x)\}$ примитивная $F_0(x)$ есть единственная примитивная с нулевым изменением, мы тогда в праве ожидать, что эта примитивная $F_0(x)$ особенно тесно связана со своей производной $f(x)$, что $F_0(x)$ наиболее полно отражает в себе строение функции $f(x)$, и что поэтому разность $F_0(b) - F_0(a)$ является числом, характеризующим только свойства функции $f(x)$ на отрезке (a, b).

Это вполне подтверждается тогда, когда $f(x)$ интегрируема в смысле Лебега или Данжуа, так как тогда разность $F_0(b) - F_0(a)$ совпадает с интегралом Лебега или Данжуа $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$.

Это же подтверждает еще и следующее предложение.

Теорема. *Если $f(x)$ есть положительная функция, не интегрируемая на* $[0, 1]$ *в смысле Лебега, тогда в в семействе всех ее примитивных не существует ни одной примитивной с нулевым изменением.*

В самом деле, допустим обратное. Пусть $F_0(x)$, $F_0(0) = 0$, есть примитивная функция для $f(x)$, обладающая нулевым изменением. Пусть, далее, множество $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех точек x, где нет производной $F_0'(x)$ или где не имеем равенства $F_0'(x) = f(a)$. Согласно определению примитивной $\operatorname{mes}\mathfrak{M} = 0$.

В силу нулевого изменения функции $F_0(x)$ множество $\mathfrak{M}$ можно заключить в такую счетную систему интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$, что, обозначая колебание функции $F_0(x)$

на δ_n через ω_n, имеем одновременно неравенства:

$$\sum_1^{\infty} \text{длина } \delta_n < \varepsilon$$

и

$$\sum_1^{\infty} \omega_n < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ малое по желанию.

Назовем через P множество, остающееся от области $[0, 1]$ после удаления из нее интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ В каждой точке x множества P имеем равенство $F_0'(x) = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$. Это нас немедленно приводит к неравенству[1]) [74]

$$|F_0(1)| \geqslant \int_P f(\alpha)\, d\alpha - \sum_1^{\infty} \omega_n,$$

где $\int\limits_P$ есть интеграл Лебега от $f(x)$, распространенный только на множество P. И так как этот интеграл стремится, очевидно, к $+\infty$, когда ε стремится к нулю, а сумма $\sum\limits_1^{\infty} \omega_n$ стремится к нулю, то отсюда выводим, что $|F_0(1)|$ есть бесконечно большое число, что невозможно (ч. т. д.).

Выше (§ 43) мы назвали такие функции $f(x)$ функциями, не интегрируемыми ни в каком возможном смысле. Теперь мы видим, что это соответствует несуществованию примитивной $F_0(x)$ с нулевым изменением.

В силу предшествовавшего естественно спросить, насколько это определение интеграла шире определения Данжуа? К сожалению, мы не можем дать исчерпывающий ответ на этот вопрос. Все, что нам удалось установить, это то, что, во-первых, в каждом семействе примитивных $\{F(x)\}$, $F(0) = 0$, для всякой $f(x)$ непременно содержатся примитивные, не обладающие нулевым изменением, и, во-вторых, что существуют $f(x)$, не интегрируемые нигде в смысле Данжуа, но

---

[1]) Это неравенство вытекает из леммы Данжуа; см. его «Calcul de la primitive etc.» (Comptes Rendus, 22 апреля 1912 г., стр. 1078).

обладающие примитивной $F_0(x)$ с нулевым изменением. К сожалению, мы не знаем, *единственная* ли эта примитивная с нулевым изменением [75].

Далее, существует широкий класс рядов, почленное интегрирование которых приводит нас именно к примитивным с нулевым изменением, что говорит в пользу рассмотрения примитивных с нулевым изменением. Мы рассмотрим немного ниже этот интересный класс рядов.

Наконец, легко установить, что данное определение интеграла удовлетворяет всем аксиомам Лебега, *кроме, может быть, аксиомы* 3, относительно которой ничего неизвестно [76].

51. Тригонометрический выбор неопределенного интеграла. Для того чтобы показать связь теории интеграла с теорией тригонометрических рядов, мы теперь же сообщим результат, к которому мы приходим в главе VI относительно выбора неопределенного интеграла.

Заметим сначала, что вместо области [0, 1] мы можем рассматривать область $[0, \pi]$, так как размер областей не имеет значения.

После этого замечания результат, который мы имеем в виду, может быть формулирован следующим образом: *в семействе всех примитивных* $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, *для данной функции* $f(x)$ *следует назвать «неопределенным интегралом» и обозначить через* $\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha$ *ту примитивную* $F_0(x)$, *для которой справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi} F_0(\alpha)\, n\cos n\alpha\, d\alpha = 0.$$

К сожалению, мы не знаем, содержится ли в семействе примитивных *только одна* такая примитивная $F_0(x)$ или же таких примитивных может быть несколько; однако чрезвычайно вероятно, что такая примитивная $F_0(x)$ единственна [77].

Если примитивная $F_0(x)$, удовлетворяющая предыдущему равенству, действительно единственна, тогда, как мы увидим далее, понятие интеграла приобретает чрезвычайную общность *вместе с понятием тригонометрического ряда Фурье.*

Это выдвигает следующую важную задачу: *найти структурное свойство всех непрерывных функций* $F_0(x)$, *удовлетворяющих предыдущему предельному равенству* [78].

В самом деле, если бы удалось найти искомое структурное свойство функций $F_0(x)$, удовлетворяющих этому равенству, тогда мы имели бы возможность сделать выбор неопределенного интеграла, не прибегая к данному выше *аналитическому* условию, по природе чуждому задаче определения интеграла.

Заметим, наконец, что иногда в семействе примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, совсем нет примитивной $F_0(x)$, удовлетворяющей этому равенству, но зато имеется *разрывная* суммируемая функция $F_0(x)$, удовлетворяющая этому равенству и особенно тесно связанная с данной функцией $f(x)$. Оказывается, что тогда можно так обобщить *понятие производной*, что разрывная функция $F_0(x)$ продолжает иметь $f(x)$ своей производной (в обобщенном смысле) и, следовательно, есть для $f(x)$ примитивная в обобщенном смысле [79]. Случай этот наиболее обычен для теории тригонометрических рядов. Это показывает, что на известных стадиях обобщения понятия интеграла приходится его искать не среди непрерывных примитивных, а уже среди разрывных, что вполне согласуется с тем, что нами было сказано в начале этой главы (§ 44) [80].

Таким образом задача обобщения понятия интеграла и понятия тригонометрического ряда Фурье тесно связана с задачей обобщения понятия производной. Мы рассмотрим эту последнюю в конце этой главы.

Об одном классе рядов

52. Рассмотрим ряд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n (x-r_n)^2 \sin\frac{1}{(x-r_n)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1), \qquad (1)$$

где числа A_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ суть постоянные, такие, что ряд $\sum\limits_1^{\infty}|A_n|$ сходится, а $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ суть все рациональные числа области $[0, 1]$.

Ясно, что в этих условиях ряд (1) сходится и его сумма $F(x)$ есть непрерывная функция.

Обозначая через $S_n(x)$ сумму n первых членов ряда (1) и через $R_n(x)$ остаток, имеем

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{2}$$

Допустим теперь, что ряд $\sum\limits_1^\infty |A_n|$ есть чрезвычайно быстро сходящийся ряд. Тогда функция $|R_n(x)|$ становится чрезвычайно малой для всякого x на $[0, 1]$. Поэтому можно предвидеть, что вследствие чрезвычайной малости коэффициентов $|A_{n+1}|$, $|A_{n+2}|$, ... добавочный член $R_n(x)$ в формуле (2) очень мало изменяет («возмущает») функцию $S_n(x)$ таким образом, что у непрерывной функции $F(x)$ сохраняются почти все индивидуальные структурные свойства функции $S_n(x)$ на области $[0, 1]$.

Но непрерывная функция $S_n(x)$ есть неопределенный интеграл от своей производной $S_n'(x)$, и эта производная $S_n'(x)$ не суммируема в соседстве с точками $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. И так как точки $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ суть всюду плотны на $[0, 1]$, то можно предвидеть, что при чрезвычайно быстрой сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty |A_n|$ функция $F(x)$ имеет производную $F'(x)$, не суммируемую ни в каком интервале δ, лежащем на $[0, 1]$.

Далее можно предвидеть, что эта производная $F'(x)$ получается почленным дифференцированием ряда (1), потому что отношение

$$\left| \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \right|$$

чрезвычайно мало при большом n.

Таким образом можно предвидеть, что чем быстрее сходится ряд коэффициентов $\sum\limits_1^\infty |A_n|$, тем резче выступают и сохраняются инвариантными какие-то определенные структурные свойства непрерывной функции $F(x)$, или, еще иначе, можно предвидеть, что существует такой «предел сходимости» рядов $\sum_{1}^{\infty}|A_n|$, т. е. такой быстро сходящийся *числовой* ряд $\sum_{1}^{\infty} B_n$, что всякий раз, как коэффициенты A_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) удовлетворяют неравенствам

$$|A_1| < B_1,\ |A_2| < B_2, \ldots, |A_n| < B_n, \ldots$$

функция $F(x)$, представленная рядом (1), имеет вполне определенные инвариантные структурные свойства, уже не зависящие от $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Мы хотим найти эти инвариантные свойства, и для этого мы обобщаем ряд (1), отбрасывая индивидуальность функции $(x - r_n)^2 \sin \frac{1}{(x - r_n)^2}$ как таковой.

53. Возьмем область [0, 1]. Пусть последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (X)$$

есть множество точек, всюду плотное на [0, 1]. Пусть последовательность

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots \qquad (F)$$

есть последовательность функций, обладающих свойствами:

1°. $F_n(x)$ непрерывна на [0, 1].

2°. $|F_n(x)| \leqslant 1$ на [0, 1] ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

3°. Как бы мало ни было ε, $\varepsilon > 0$, в обеих областях $[0, x_n - \varepsilon]$ и $[x_n + \varepsilon_n, 1]$ функция $F_n(x)$ имеет непрерывную производную $F'_n(x)$.

4°. $\int_0^1 |F'_n(\alpha)|\, d\alpha = +\infty$.

Обозначим производную $F'_n(x)$ через $f_n(x)$. Ясно, что функция $|f_n(x)|$ есть непрерывная функция всюду, кроме одной только точки $x = x_n$. Пусть $M_n(\varepsilon)$ есть максимум функции $|f_n(x)|$ в обеих областях $[0, x_n - \varepsilon]$ и $[x_n + \varepsilon, 1]$. В силу свойства 4° имеем, понятно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_n(\varepsilon) = +\infty.$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n, \ldots$ с одним только условием, чтобы ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_n$ был сходящимся, и определим последовательность постоянных чисел

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$$

равенствами:

$$B_n = \frac{1}{1+M_n(\varepsilon_n)} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим, наконец, два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(x) \tag{R_1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x), \tag{R_2}$$

где *коэффициенты* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *удовлетворяют одному лишь условию*

$$|A_n| \leqslant B_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Формально ряд (R_1) имеет смысл везде на $[0, 1]$ и ряд (R_2) везде на $[0, 1]$, кроме счетного множества точек (X). Изучим ближе эти два ряда.

54. Сходимость ряда (R_1). Ясно, что ряд $\sum\limits_1^\infty |A_n|$ сходится. Так как $F_n(x)$ есть непрерывная функция на $[0, 1]$ и, кроме того, $|F_n(x)| \leqslant 1$, то *ряд* R_1 *есть абсолютно и равномерно сходящийся* всюду на $[0, 1]$. Пусть $F(x)$ есть его сумма. Имеем

$$F(x) = \sum_1^\infty A_n F_n(x),$$

и *функция* $F(x)$ *непрерывна на* $[0, 1]$.

Сходимость ряда (R_2). Назовем через δ_n интервал длины $2\varepsilon_n$, имеющий центром точку x_n. Имеем

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ длина $\delta_n = 2\sum\limits_{1}^{\infty}\varepsilon_n$. В силу сходимости этого последнего ряда, каково бы ни было малое число η, $\eta > 0$, всегда найдется такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \text{длина } \delta_n < \eta.$$

Удалим из области $[0, 1]$ все точки интервалов δ_{N+1}, δ_{N+2}, δ_{N+3}, ... и все точки (X). Тогда останется измеримое множество $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M} > 1-\eta$.

Пусть ξ есть точка множества $\mathfrak{M}$. Так как ξ находится *вне* каждого из интервалов δ_{N+1}, δ_{N+2}, δ_{N+3}, ..., то имеем

$$|f_n(\xi)| \leqslant M_n(\varepsilon_n) \quad \text{для} \quad n > N,$$

откуда

$$|A_n f_n(\xi)| \leqslant B_n \cdot |f_n(\xi)| \leqslant B_n \cdot M_n(\varepsilon_n) < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_n \quad \text{для } n > N.$$

Следовательно, ряд (R_2) есть абсолютно сходящийся в каждой точке ξ множества $\mathfrak{M}$. И так как η может быть сделано малым по желанию, то *ряд* (R_2) *есть абсолютно сходящийся почти всюду на* $[0, 1]$. Называя через $f(x)$ сумму ряда (R_2), имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

55. Несуммируемость функции $f(x)$ ни в каком интервале. Выше мы не сделали никакого предположения относительно чисел ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, ..., кроме сходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}\varepsilon_n$. Теперь для доказательства несуммируемости функции $f(x)$ всюду мы налагаем на числа ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, ... еще одно условие.

Точки x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... мы предполагаем геометрически *различными* друг от друга. Отсюда функция

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)|$$

есть непрерывная около точки x_{n+1}. Поэтому можно выбрать число ε_{n+1} столь малым, дабы эта функция была непрерывной на интервале δ_{n+1} и чтобы одновременно с этим мы имели

$$\int\limits_{\delta_{n+1}} (|f_1(\alpha)| + |f_2(\alpha)| + \ldots + |f_n(\alpha)|)\, d\alpha < \frac{1}{2^{n+1}},$$

где $\int\limits_{\delta_{n+1}}$ есть интеграл Коши, распространенный на весь интервал δ_{n+1}.

Допустим, что выбор чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ сделан именно таким. Пусть теперь Δ есть любой интервал, лежащий на $[0, 1]$. Так как множество $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ всюду плотно на $[0, 1]$, то всегда найдется такое N, что по крайней мере одна из точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ будет *внутри* Δ.

Обозначая через $\sigma_n(x)$ сумму n первых членов ряда (R_2) и через $\rho_n(x)$ остаток, имеем

$$f(x) = \sigma_N(x) + \rho_N(x).$$

Удалим из интервала Δ интервалы $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}, \ldots$, мы получаем тогда на Δ некоторое измеримое множество e и имеем

$$\int\limits_e |f(\alpha)|\, d\alpha \geqslant \int\limits_e |\sigma_N(\alpha)|\, d\alpha - \int\limits_e |\rho_N(\alpha)|\, d\alpha,$$

где $\int\limits_e$ есть интеграл Лебега, распространенный на e. Но мы имеем на множестве e

$$|A_n f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_n \qquad (n > N),$$

откуда

$$\int\limits_e |\rho_N(\alpha)|\, d\alpha < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_n = \lambda_N,$$

где λ_N стремится, очевидно, к нулю с $\frac{1}{N}$. Значит,

$$\int_e |f(\alpha)|\,d\alpha \geqslant \int_e |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha - \lambda_N.$$

С другой стороны, имеем

$$\int_e |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha = \int_\Delta |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha - \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{\delta_n} |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha,$$

или в силу выбора чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$

$$\int_e |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha \geqslant \int_\Delta |\sigma_N(\alpha)|\,d\alpha - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = +\infty,$$

так как функция $\sigma_N(\alpha)$ не суммируема на Δ, потому что Δ содержит хотя бы одну точку $x_1, x_2, \ldots, x_N$ внутри.

Итак,

$$\int_\Delta |f(\alpha)|\,d\alpha \geqslant \int_e |f(\alpha)|\,d\alpha = +\infty - \lambda_N = +\infty,$$

что доказывает *несуммируемость функции $f(x)$ нигде на* $[0, 1]$.

56. Дифференцируемость функции $F(x)$. Мы знаем, что функции $F(x)$ и $f(x)$ суть суммы рядов (R_1) и (R_2), из которых второй *образован почленным дифференцированием первого*. В этом состоит *аналитическая* связь функций $F(x)$ и $f(x)$ друг с другом.

Это аналитическое отношение функций $F(x)$ и $f(x)$ друг к другу, — сопровождается ли оно каким-нибудь глубоким структурным отношением или же, наоборот, оно есть чисто формальное, так что любая пара функций $F(x)$ и $f(x)$ может быть связана таким аналитическим отношением?

Мы желаем показать, что глубокое структурное отношение действительно существует, и именно, непрерывная функция $F(x)$ имеет своей производной функцию $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.

Чтобы обнаружить это, строим на области $[0, 1]$ последовательность интервалов

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots,$$

таких, что Δ_n есть интервал длины $6\varepsilon_n$ с центром x_n. В силу сходимости ряда $\sum_1^\infty$ длина Δ_n, существует такое N, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \text{длина } \Delta_n < \eta,$$

где $\eta > 0$, малое как угодно.

Удаляя из $[0, 1]$ интервалы $\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \Delta_{N+3}, \ldots$ и точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, мы получаем измеримое множество E, такое, что $\operatorname{mes} E > 1 - \eta$.

Пусть ξ есть точка множества E. Имеем

$$\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{F_n(\xi+h)-F_n(\xi)}{h}.$$

Обозначая, как прежде, через δ_n интервал с центром x_n и длины $2\varepsilon_n$, видим, что интервалы

$$\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}, \ldots$$

не содержат точки ξ и делятся по отношению к интервалу $(\xi, \xi+h)$ на два класса:

I класс: интервалы $\delta_{n'}$ $(n' > N)$, целиком внешние к интервалу $(\xi, \xi+h)$.

II класс: интервалы $\delta_{n''}$ $(n'' > N)$, содержащие точки интервала $(\xi, \xi+h)$.

Рассмотрим интервалы II класса; пусть $\delta_{n''}$ — один из них. Так как точка ξ находится вне интервала $\delta_{n''}$, а этот последний содержит точки интервала $(\xi, \xi+h)$, то отсюда следует, что расстояние точки ξ от интервала $\delta_{n''}$ меньше $|h|$. С другой стороны, точка ξ находится вне интервала $\Delta_{n''}$, имеющего ту же самую середину, что и интервал $\delta_{n''}$, а длину — втрое большую. Поэтому имеем

$$\text{длина } \delta_{n''} \leqslant |h|.$$

Рассмотрим теперь

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \frac{F_n(\xi+h)-F_n(\xi)}{h}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда (R_1) можем писать

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \frac{F_n(\xi+h)-F_n(\xi)}{h} = \sum_{\text{I кл.}} + \sum_{\text{II кл.}}.$$

Но имеем, очевидно,

$$\left|\sum_{\text{II кл.}} A_{n''} \frac{F_{n''}(\xi+h)-F_{n''}(\xi)}{h}\right| \leqslant 2 \sum_{\text{II кл.}} \frac{|A_{n''}|}{|h|} = \frac{2}{|h|}\cdot \sum_{\text{II кл.}} |A_{n''}|.$$

И так как $|A_n| \leqslant B_n$, то вследствие значения B_n и вследствие неравенства $|h| \geqslant$ длина $\delta_{n''} = 2\varepsilon_{n''}$, имеющего место для II класса, находим

$$\frac{2}{|h|}\sum_{\text{II кл.}} |A_{n''}| \leqslant 2 \sum_{\text{II кл.}} \frac{1}{1+M_{n''}(\varepsilon_{n''})}\cdot\frac{1}{2^{n''-1}}\cdot\frac{1}{n''}.$$

Но ξ есть внешняя по отношению к δ_n точка $(n > N)$; поэтому с убыванием $|h|$ до нуля наименьшее из чисел n'' стремится к $+\infty$. Значит:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{\text{II кл.}} A_{n''} \frac{F_{n''}(\xi+h)-F_{n''}(\xi)}{h}\right| = 0.$$

Рассмотрим, наконец,

$$\sum_{\text{I кл.}} A_{n'} \frac{F_{n'}(\xi+h)-F_{n'}(\xi)}{h}.$$

Так как теперь интервал $(\xi, \xi+h)$ есть уже внешний к $\delta_{n'}$, то

$$\frac{F_{n'}(\xi+h)-F_{n'}(\xi)}{h} = F'_{n'}(\xi'_{n'}) = f_{n'}(\xi'_{n'}),$$

где $\xi'_{n'}$ есть точка, лежащая на $(\xi, \xi+h)$ и внешняя к $\delta_{n'}$. Отсюда

$$\sum_{\text{I кл.}} A_{n'} \frac{F_{n'}(\xi+h)-F_{n'}(\xi)}{h} = \sum_{\text{I кл.}} A_{n'} f_{n'}(\xi'_{n'}).$$

Ряд, стоящий направо, таков, что

$$|A_{n'} f_n(\xi'_{n'})| \leqslant \frac{1}{1+M_{n'}(\varepsilon_{n'})} \frac{1}{2^{n'-1}} \frac{1}{n'} \cdot 2\varepsilon_{n'} M_{n'}(\varepsilon_{n'}) < \frac{1}{2^{n'}}.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{\text{I кл.}} A_{n'} f_{n'}(\xi'_{n'})$$

сходится быстрее ряда $\sum \frac{1}{2^n}$, и $\xi'_{n'}$ есть функция переменного h, такая, что $\lim\limits_{h\to 0} \xi'_{n'} = \xi$.

Значит, в силу равномерной сходимости этого ряда[1]), имеем

$$F'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(\xi).$$

Но точка ξ есть любая точка множества E, и $\operatorname{mes} E > 1 - \eta$, где $\eta > 0$ как угодно мало.

Отсюда приходим к результату: *непрерывная функция $F(x)$ имеет $f(x)$ своей производной почти всюду на* $[0, 1]$, *т. е. есть ее примитивная.*

57. Основное свойство примитивной $F(x)$. Мы хотим теперь показать, что $F(x)$ есть примитивная функция с *нулевым изменением.* Для этого мы нуждаемся в предварительном предложении.

Лемма. *Если непрерывная функция $F(x)$ имеет ограниченную производную $F'(x)$ во всех точках множества $\mathfrak{M}$ меры нуль, тогда минимум изменения функции $F(x)$ для множества $\mathfrak{M}$ равен нулю.*

В самом деле, пусть непрерывная функция $F(x)$ имеет производную $F'(\xi)$ во всякой точке ξ множества $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes} \mathfrak{M} = 0$. Далее, пусть эта производная на множестве $\mathfrak{M}$ ограничена, т. е. пусть имеем неравенство

$$|F'(\xi)| < M$$

всюду на множестве $\mathfrak{M}$.

---

[1]) Относительно переменного h.

Заключим все множество $\mathfrak{M}$ в счетную систему (Σ) открытых интервалов

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots, \tag{Σ}$$

не имеющих попарно общей точки и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{длина } \Delta_n < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ как угодно мало.

Рассмотрим какую-нибудь точку ξ множества $\mathfrak{M}$; эта точка находится *внутри* одного из интервалов системы (Σ). Пусть этот интервал есть Δ_i.

В точке ξ имеем $|F'(\xi)| < M$; поэтому для достаточно малого интервала δ, содержащего ξ внутри, мы имеем неравенство

$$\omega_\delta < 4M \cdot \text{длина } \delta,$$

где ω_δ обозначает колебание функции $F(x)$ на интервале δ.

Этот интервал δ мы, очевидно, всегда можем взять достаточно малым, чтобы он целиком заключался в интервале Δ_i, и кроме этого мы можем предположить, что его концы суть *рациональные точки*. Выбрав именно таким образом интервал δ, обозначим его через δ_ξ.

Множество таких интервалов δ_ξ, построенных для всех точек ξ множества $\mathfrak{M}$, есть *счетное*, потому что счетной будет совокупность всех пар рациональных точек. Отсюда, отбрасывая те из интервалов δ_ξ, которые целиком содержатся в других интервалах δ'_ξ, мы легко в конце концов приходим к счетной системе (σ) неперекрывающихся интервалов:

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu, \ldots, \tag{σ}$$

заключающей множество $\mathfrak{M}$ и содержащейся всеми точками в системе (Σ).

Так как в системе (σ) нет перекрывающихся интервалов, то, очевидно,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \text{ длина } \delta_\nu < \varepsilon. \tag{1}$$

Далее, обозначая через ω_ν колебание функции $F(x)$ на интервале δ_ν, имеем

$$\omega_\nu < 4M \cdot \text{длина } \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Суммируя все эти неравенства, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu < 4M\varepsilon; \tag{2}$$

неравенства (1) и (2) доказывают нашу лемму (§ 48) (ч. т. д.).

Установив это, возвратимся к примитивной функции $F(x)$. Обозначим, следуя § 54, через δ_n интервал с центром x_n и длины $2\varepsilon_n$, причем числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, мы предполагаем выбранными согласно указанию § 55.

а) Докажем сначала, что колебание примитивной $F(x)$ на интервале δ_{n+1} не превышает $\frac{4}{2^{n+1}}$.

Действительно, обозначая через $S_n(x)$ сумму n первых членов ряда

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n(x)$$

и через $R_n(x)$ — остаток, имеем

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Отсюда видим, что колебание функции $F(x)$ на δ_{n+1} меньше суммы колебаний на этом интервале двух функций: $S_n(x)$ и $R_n(x)$.

Но для интервала δ_{n+1} имеем в силу § 55 неравенство

$$\int\limits_{\delta_{n+1}} (|f_1(\alpha)| + |f_2(\alpha)| + \ldots + |f_n(\alpha)|)\, d\alpha < \frac{1}{2^{n+1}},$$

откуда, помня, что все числа B_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ меньше 1, получаем

$$\int\limits_{\delta_{n+1}} |S'_n(\alpha)|\, d\alpha < \frac{1}{2^{n+1}},$$

а это показывает, что колебание функции $S_n(x)$ на δ_{n+1} не превышает $\frac{1}{2^{n+1}}$.

С другой стороны имеем, очевидно,

$$|R_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

всюду на области [0, 1]. Следовательно, колебание функции $R_n(x)$ на интервале δ_{n+1} не может превысить $\frac{2}{2^{n+1}}$. Отсюда выводим, что колебание примитивной $F(x)$ на интервале δ_{n+1} не превышает $\frac{4}{2^{n+1}}$.

b) Возьмем теперь число η, $\eta > 0$, малое как угодно. Выбрав целое число N настолько большим, чтобы

$$4\left[\frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \ldots\right] < \frac{\eta}{3},$$

видим, что сумма колебаний примитивной $F(x)$ на интервалах δ_{N+1}, δ_{N+2}, δ_{N+3}, ... не превышает $\frac{\eta}{3}$.

С другой стороны, N точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ можно заключить в N столь малых интервалов $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N$, чтобы сумма колебаний примитивной $F(x)$ на этих интервалах не превысила опять $\frac{\eta}{3}$.

Следовательно, на системе интервалов

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_N,\ \delta_{N+1},\ \delta_{N+2},\ \delta_{N+3},\ \ldots \qquad (\tau)$$

сумма колебаний функции $F(x)$ не превышает $\frac{2}{3}\eta$. При этом ясно, что сумма длин всех интервалов этой системы (τ) может быть взята сколь угодно малой при достаточном увеличении числа N и при надлежащем выборе интервалов u.

c) Удалим из области [0, 1] систему интервалов (τ) и обозначим оставшееся множество через E. Мы теперь утверждаем, что функция $F(x)$ имеет ограниченную производную $F'(x)$ всюду на множестве E.

В самом деле, функция $S_N(x)$ имеет ограниченную производную на множестве E. Достаточно поэтому обнаружить это для функции $R_N(x)$.

Но в силу § 56 во всякой точке ξ множества E функция $R_N(x)$ имеет производную $R'_N(\xi)$ и, кроме того,

$$R'_N(\xi)=\sum_{N+1}^{\infty} A_n f_n(\xi)\ ^{1)},$$

откуда согласно § 54 находим для всякой точки ξ множества E

$$|R'_N(\xi)| \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\varepsilon_n,$$

что доказывает ограниченность производной для $R_N(x)$ и, следовательно, для $F(x)$ на множестве E.

d) Теперь исследование примитивной $F(x)$ легко доводится до конца. Действительно, возьмем *произвольное* множество $\mathfrak{M}$ меры нуль, лежащее в области [0, 1].

Тогда вся часть множества $\mathfrak{M}$, лежащая на множестве E, согласно предшествующей лемме может быть заключена в счетное множество таких интервалов, что, во-первых, сумма длин их мала по желанию и, во-вторых, сумма колебаний примитивной $E(x)$ на них не превышает $\frac{\eta}{3}$.

Отсюда, принимая во внимание свойства системы (τ), видим, что *все* множество $\mathfrak{M}$ можно заключить в систему интервалов, удовлетворяющих определению функции с нулевым изменением (§ 48).

Итак, *примитивная функция $F(x)$ есть функция с нулевым изменением.*

К сожалению, мы не знаем, единственная ли это такая примитивная в семействе $\{F(x)\}$ [81].

---

[1]) В § 56 при построении множества точек, в которых существует производная $F'(x)$ от функции $F(x)$, мы употребили для удобства систему интервалов Δ_n, имеющих центрами точки x_n и длинами $6\varepsilon_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Но легко заметить, что замена числа ε_n числом $\frac{1}{3}\varepsilon_n$ не изменяет ничего в рассуждениях § 56, что приводит к возможности заменить интервалы Δ_n интервалами δ_n. Это замечание доказывает существование производной $R'_N(\xi)$ и справедливость рассматриваемого равенства.

Расширение понятия производной

58. Задача обобщения производной. Рассмотрим снова ряд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[(x-r_n)^2\sin\frac{1}{(x-r_n)^2}\right]. \tag{0}$$

Мы видели (§ 54), что при достаточно быстрой сходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}|A_n|$ будет сходящимся и ряд

$$F^{[1]}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{d}{dx}\left[(x-r_n)^2\sin\frac{1}{(x-r_n)^2}\right], \tag{1}$$

образованный формально из ряда (0) почленным дифференцированием. Далее, мы доказали, что функция $F^{[1]}(x)$ есть производная от непрерывной функции $F(x)$ почти всюду на $[0, 1]$:

$$F^{[1]}(x)=F'(x).$$

Пользуясь методом, употребленным в § 54, легко точно так же показать, что *при достаточно быстрой сходимости ряда* $\sum\limits_{1}^{\infty}|A_n|$ не только ряд (1) сходится, но *будет сходящимся и всякий ряд* (λ):

$$F^{[\lambda]}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\left[(x-r_n)^2\sin\frac{1}{(x-r_n)^2}\right], \tag{λ}$$

образованный формально из ряда (0) *почленным* λ*-кратным дифференцированием, каково бы ни было целое* λ [82].

Так как каждая из функций

$$F^{[1]}(x),\ F^{[2]}(x),\ \ldots,\ F^{[\lambda]}(x),\ \ldots$$

не суммируема нигде в области $[0, 1]$, то нет на области $[0, 1]$ ни одной точки, где бы $F^{[\lambda]}(x)$ была непрерывной. Отсюда нельзя пытаться доказывать, что функция $F^{[\lambda+1]}x$ есть производная от функции $F^{[\lambda]}(x)$.

Это естественно приводит к вопросу: существует ли связь между *структурными* свойствами обеих функций $F^{[\lambda]}(x)$ и $F^{[\lambda+1]}(x)$? Или же, наоборот, такой связи структур нет, и любая пара функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ может быть связана аналитическим соотношением, имеющимся у $F^{[\lambda]}(x)$ у $F^{[\lambda+1]}(x)$?

Ближайший анализ вопроса обнаруживает, что функции $F^{[\lambda]}(x)$ и $F^{[\lambda+1]}(x)$, рассматриваемые независимо от представляющих их аналитических выражений, тесно связаны между собой. Именно, можно дать такое расширение понятию производной, при котором функция $F^{[\lambda+1]}(x)$ является производной от функции $F^{[\lambda]}(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. Таким образом, мы приходим к задаче расширения понятия производной.

Задача обобщения понятия производной была поставлена в математической литературе недавно Борелем [1]). Эта же самая задача ранее была точно формулирована Б. К. Млодзеевским [2]) следующим образом:

данной недифференцируемой функции $F(x)$ и данному значению ξ переменного x поставить в соответствие число $F^{[1]}(\xi)$, обладающее основными свойствами обыкновенной производной.

Мы имеем в виду дать решение задачи Б. К. Млодзеевского для широкого класса недифференцируемых функций; решение это является наиболее естественным. Но сначала мы хотим рассмотреть одно обобщение производной, ставшее классическим, именно, понятие производного числа Дини [3]); мы сейчас покажем, что, когда пренебрегают нуль-множествами, понятие производного числа Дини совпадает с понятием обыкновенной производной.

59. Производные числа Дини. Докажем следующее предложение.

---

[1]) Comptes Rendus, 29 апреля 1912 г.

[2]) В одной из лекций по теории функций действительного переменного, читанных в Московском университете в 1904 г.

[3]) О производных числах Дини [83] см., например, Lebesgue, Leçons sur l'intégration, стр. 63—73. [В русском переводе: Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных, ГТТИ, 1934, стр. 65—66. *Ред.*] или Hobson, The Theory of Functions, стр. 265, 283, 285—293.

Теорема. *Всякая функция* $\Phi(x)$, *имеющая все четыре производные числа Дини конечными в каждой точке множества* $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M}>0$, *необходимо имеет в каждой точке множества* $\mathfrak{M}$ *обыкновенную производную, кроме, быть может, множества меры нуль.*

В самом деле, обозначим через μ меру множества $\mathfrak{M}$; имеем $\operatorname{mes}\mathfrak{M}=\mu>0$.

а) Пусть ξ есть какая-либо точка множества $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\lambda_g(\xi)$, $\Delta_g(\xi)$, $\lambda_d(\xi)$, $\Delta_d(\xi)$ четыре производных числа Дини[1]) от функции $\Phi(x)$ в точке ξ. Пусть $L(\xi)$ есть наибольшее из четырех чисел

$$|\lambda_g(\xi)|,\quad |\Delta_g(\xi)|,\quad |\lambda_d(\xi)|,\quad |\Delta_d(\xi)|.$$

Ясно, что $L(\xi)$ есть измеримая функция, конечная в каждой точке множества $\mathfrak{M}$. Отсюда, как бы ни было мало число ε, $\varepsilon>0$, всегда существует[2]) такое совершенное множество P, содержащееся в $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}P>\mu-\frac{\varepsilon}{2}$, на котором функция $L(\xi)$ есть непрерывная и, следовательно, ограниченная функция. Обозначим через M верхнюю грань функции $L(\xi)$ на P.

Из определения числа M следует, что для любой точки ξ множества P мы имеем неравенство

$$\left|\frac{\Phi(\xi+h)-\Phi(\xi)}{h}\right|<M+1,$$

лишь бы $|h|$ было достаточно малым. Поэтому величины $|h|$, для которых это неравенство *не* удовлетворяется, не могут стремиться к нулю и, значит, имеют нижнюю грань, отличную от нуля. Назовем ее через $H(\xi)$; имеем $H(\xi)>0$. Ясно, что для $|h|<H(\xi)$ предыдущее неравенство удовлетворяется.

Число $H(\xi)$ есть, очевидно, измеримая функция на P. Отсюда всегда можно найти такое совершенное множество π, содержащееся в P, $\operatorname{mes}\pi>\operatorname{mes}P-\frac{\varepsilon}{2}>\mu-\varepsilon$, на котором

---

[1]) Обозначения употребляемые Лебегом; Гобсон пользуется обозначениями D^+, D_+, D^-, D_-, предложенными Шеффером (Acta Mathematica, т. 5).

[2]) В силу «C-свойства», § 7.

функция $H(\xi)$ будет *непрерывной*. И так как имеем всегда $H(\xi) > 0$, то отсюда следует, что минимум функции $H(\xi)$ на множестве π отличен от нуля. Назовем его через θ, $\theta > 0$.

Из определения числа θ следует, что неравенство

$$\left|\frac{\Phi(\xi+h)-\Phi(\xi)}{h}\right| < M+1$$

удовлетворяется *равномерно* для всех точек ξ множества π, лишь бы $|h| < \theta$.

Мы хотим теперь показать, что данная функция $\Phi(x)$ имеет производную $\Phi'(x)$ почти всюду на π.

b) Из предыдущего неравенства видно, что функция $\Phi(x)$ непрерывна во всякой точке ξ множества π.

Назовем через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ все смежные интервалы к множеству π. Пусть $\Phi_1(x)$ есть функция, совпадающая с $\Phi(x)$, когда x находится на π, и линейная на каждом смежном интервале δ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ясно, что $\Phi_1(x)$ есть непрерывная функция на всей области $[0, 1]$. Мы желаем теперь показать, что $\Phi_1(x)$ *есть функция с ограниченным изменением на целой области* $[0, 1]$.

Действительно, среди интервалов $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ имеется только *конечное* число таких интервалов, длина которых превосходит θ. Пусть эти интервалы будут $\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \delta_{n_3}, \ldots, \delta_{n_p}$. Функция $\Phi_1(x)$ на них линейная, следовательно, с ограниченным изменением.

Точки области $[0, 1]$, не принадлежащие к этим p интервалам, образуют, в свою очередь, конечное число отрезков. Обозначим их через

$$U_1, U_2, \ldots, U_q \qquad (p+1 \geqslant q \geqslant p-1).$$

Рассмотрим какой-нибудь из этих отрезков, например, U_i. Пусть x_0 есть точка, принадлежащая к U_i. Возможны два случая:

1°. Точка x_0 находится на множестве π. В этом случае абсолютные величины всех четырех производных чисел Дини от функции $\Phi_1(x)$ в точке x_0 не превосходят $M+1$. В самом деле, это справедливо для функции $\Phi(x)$ согласно определению множества π. А функция $\Phi_1(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ на множестве π и есть линейная вне π. Отсюда следует справедливость утверждения.

2°. Точка x_0 не принадлежит к π. В этом случае точка x_0 находится внутри какого-нибудь интервала δ_j, смежного к π. Ясно, что длина этого интервала δ_j не может превзойти θ, так как δ_j не совпадает ни с каким $\delta_{n_1}, \delta_{n_2}, \ldots, \delta_{n_p}$. Называя через α_j и β_j концы интервала δ_j, имеем поэтому

$$\left|\frac{\Phi(\beta_j)-\Phi(\alpha_j)}{\beta_j-\alpha_j}\right| \leqslant M+1.$$

И так как функция $\Phi_1(x)$ есть линейная на интервале δ_j и, кроме того, $\Phi_1(\alpha_j)=\Phi(\alpha_j)$ и $\Phi_1(\beta_j)=\Phi(\beta_j)$, то отсюда следует, что производная от функции $\Phi_1(x)$ в точке x_0 не превосходит $M+1$.

В обоих, следовательно, случаях все четыре производные числа Дини от функции $\Phi_1(x)$ всюду в интервале U_i не превосходят $M+1$. Но всякая функция с *ограниченными* производными числами есть функция с ограниченным изменением [1]) [[84]]. Отсюда заключаем, что функция $\Phi_1(x)$ есть функция с ограниченным изменением на каждом интервале U_i $(i=1, 2, 3, \ldots, q)$ и, следовательно, на всей области $[0, 1]$. Поэтому непрерывная функция $\Phi_1(x)$ имеет во всякой точке области $[0, 1]$ конечную вполне определенную обыкновенную производную $\Phi_1'(x)$, исключая, быть может, некоторое множество меры нуль.

c) Рассмотрим, наконец, разность

$$\Phi(x)-\Phi_1(x),$$

обозначив ее через $\psi(x)$. Ясно, что $\psi(x)$ есть функция, непрерывная в точках множества π и равная нулю на этом множестве.

Возьмем какой-нибудь интервал δ_i, смежный к множеству π. Обозначим через ω_i колебание функции $\psi(x)$ на интервале δ_i и рассмотрим величину этого колебания. Если длина интервала δ_i не превосходит числа θ, тогда, называя через α_i и β_i концы интервала δ_i, имеем одновременно очевидные неравенства:

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(\alpha_i)}{x-\alpha_i}\right| < M+1, \quad \left|\frac{\Phi_1(x)-\Phi_1(\alpha_i)}{x-\alpha_i}\right| < M+1$$

1) См. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, стр. 73.

для всякого x, расположенного на δ_i. Отсюда заключаем, что колебания функций $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ на интервале δ_i не превосходят $2(M+1)\cdot\delta_i$. Поэтому колебание функции $\psi(x)$ на δ_i не превосходит $4(M+1)\cdot\delta_i$.

Таким образом, имеем неравенство

$$\omega_i \leqslant 4(M+1)\cdot\delta_i$$

всякий раз, как длина интервала δ_i не превосходит постоянного числа θ. И так как среди последовательности δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n, ... имеется только *конечное* число интервалов, длина которых превышает θ (в силу сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty \delta_n$), то отсюда выводим, что будет сходящимся и ряд колебаний

$$\sum_1^\infty \omega_n$$

функции $\psi(x)$.

d) Легко видеть, что теперь мы находимся в условиях применимости метода, употребленного нами при доказательстве теоремы II § 30 (стр. 111—113). Действительно, функция $\psi(x)$ непрерывна и равна нулю в точках совершенного множества π; кроме того, ряд колебаний этой функции на смежных к множеству π интервалах есть ряд сходящийся. Отсюда заключаем (как в упомянутой теореме), что функция $\psi(x)$ имеет обыкновенную производную, равную нулю во всякой точке множества π, кроме, быть может, некоторого множества меры нуль.

С другой стороны, непрерывная функция $\Phi_1(x)$ имеет, по доказанному, производную $\Phi_1'(x)$ всюду, кроме, быть может, нуль-множества. Отсюда в силу равенства

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \psi(x)$$

заключаем, что данная функция $\Phi(x)$ имеет обыкновенную производную $\Phi'(x)$ почти всюду на π.

И так как

$$\operatorname{mes}\pi > \operatorname{mes}\mathfrak{M} - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, малое по желанию, то отсюда выводим, что данная функция $\Phi(x)$ имеет конечную обыкновенную производную всюду на данном множестве $\mathfrak{M}$, кроме, быть может, множества меры нуль (ч. т. д.).

Следствие[1]). *Всякая функция* $\Phi(x)$, *имеющая четыре производные числа конечными почти всюду на* $[0, 1]$, *необходимо имеет почти всюду на* $[0, 1]$ *обыкновенную конечную производную* $\Phi'(x)$.

При доказательстве общей теоремы мы предполагали все *четыре* производные числа Дини конечными. Ближайший анализ показывает, что нет необходимости делать столь сильное допущение. Оказывается, что достаточно допущения конечными *двух правых производных Дини* $\lambda_d(\xi)$ и $\Lambda_d(\xi)$ или *двух левых производных Дини* $\lambda_g(\xi)$ и $\Lambda_g(\xi)$, чтобы имела место та же самая теорема о существовании обыкновенной производной. Доказательство этой более общей теоремы остается в общем тем же самым (за несущественным изменением).

Эта теорема о производных числах Дини позволяет проникнуть несколько глубже в строение непрерывных функций, не имеющих производной. В самом деле, пусть $F(x)$ есть непрерывная функция, нигде не имеющая производной на $[0, 1]$. Тогда в силу только что доказанной теоремы в каждой точке x (кроме нуль-множества) одна из правых производных бесконечна, и одновременно с этим одна из левых производных также бесконечна. Более точно, в силу теоремы о бесконечных производных, доказанной нами ранее[2]), в каждой точке x (кроме нуль-множества) имеем одновременно:

I. Или $\lambda_g(x) = -\infty$ и $\Lambda_d(x) = +\infty$.

II. Или $\Lambda_g(x) = +\infty$ и $\lambda_d(x) = -\infty$.

Легко можно было бы построить примеры функций $F(x)$, соответствующие только случаю I или только случаю II, или, наконец, совмещающие сразу оба случая I и II [[86]].

Доказанная теорема о производных числах Дини обнаруживает ненужность введения производных чисел Дини в те теории, в которых пренебрегают нуль-множествами. Действительно, или мы имеем почти всюду производные числа Дини

---

[1]) Этот частный случай общего предложения был получен ранее Монтелем (Comptes Rendus, 1912 г.). Метод Монтеля не позволяет доказать общей теоремы о производных числах Дини, изложенной нами в тексте.

[2]) Математический сборник, т. 28, стр. 275 [[85]].

бесконечными; в этом случае из них нельзя извлечь никаких интересных количественных соотношений; или мы имеем производные числа Дини конечными на каком-нибудь множестве. Но в этом последнем случае почти всюду на этом же множестве существует и обыкновенная производная, и значит, рассмотрение производных чисел Дини является излишним, так как достаточно обычного понятия производной.

60. Общее понятие производной. Перейдем теперь к решению поставленной выше (§ 58) задачи Б. К. Млодзеевского относительно общего определения производной. Мы даем это решение, следуя мысли А. Я. Хинчина [1]).

Мы говорим, что *данная функция* непрерывная или разрывная, $\Phi(x)$ *имеет обобщенную производную* [87] *в точке* x_0, *если существует измеримое множество* E, *имеющее точку* x_0 *точкой плотности, и такое, что отношение*

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

стремится к вполне определенному единственному пределу, когда точка x *стремится к* x_0, *оставаясь все время на множестве* E. Этот предел мы называем *обобщенной производной* функции $\Phi(x)$ в точке x_0 и обозначаем его через $\Phi^{[1]}(x_0)$.

Для того чтобы сделать это определение корректным, мы обязаны показать, что число $\Phi^{[1]}(x_0)$ *не зависит* от того или другого выбора множества E и, следовательно, выражает свойство строения данной функции $\Phi(x)$ в бесконечной близости с точкой x_0. Это действительно имеет место.

В самом деле, пусть существуют на области $[0, 1]$ два множества E_1 и E_2, оба имеющие точку x_0 точкой плотности и такие, что отношение

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

стремится к пределу L_1, когда x стремится к x_0, оставаясь на множестве E_1, и стремится к пределу L_2, когда x стремится к x_0, оставаясь на множестве E_2. Покажем, что $L_1 = L_2$.

---

[1]) Предложенной им в сообщении студенческому Математическому кружку 6 ноября 1914 г.

Рассмотрим для этого множество точек, принадлежащих одновременно к множествам E_1 и E_2. Обозначим это множество через E. Из свойств измеримых множеств и из определения точки плотности (§ 3) следует, что E есть измеримое множество, также имеющее точку x_0 точкой плотности.

Пусть теперь x стремится к x_0, оставаясь на E. Тогда написанное выше отношение стремится к единственному пределу, потому что множество E есть часть E_1, а когда точка x находится на множестве E_1, отношение стремится только к одному пределу в силу определения обобщенной производной. Этот предел, соответствующий множеству E, должен быть равен L_1, так как E есть часть E_1, и в то же самое время должен равняться L_2, так как E есть часть E_2. Отсюда

$$L_1 = L_2.$$

Основные формулы, устанавливаемые дифференциальным исчислением для обыкновенной производной, имеют силу и для обобщенной производной. В самом деле, при выводе какой-нибудь формулы, дифференциальное исчисление предполагает, что точка x стремится к x_0, пробегая все положения. Но заставляя x стремиться к x_0 не путем пробега через все значения, а принуждая x оставаться во время стремления к x_0 на множестве E, имеющем x_0 точкой плотности, мы, очевидно, сохраним те же самые формулы, только вместо обычной производной мы теперь имеем право писать обобщенную производную. Таким, например, образом легко доказываются формулы

$$[C \cdot \varphi(x)]^{[1]} = C\varphi^{[1]}(x),$$

$$[\varphi(x) + \psi(x)]^{[1]} = \varphi^{[1]}(x) + \psi^{[1]}(x),$$

$$[\varphi(x) \cdot \psi(x)]^{[1]} = \varphi(x) \cdot \psi^{[1]}(x) + \varphi^{[1]}(x) \cdot \psi(x)$$

и т. д.

Единственное сомнение возникает при рассмотрении производной «функции от функции», так как здесь дело идет о преобразовании переменного. Но и здесь легко показать, что имеем опять почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 1)$

$$\{\varphi[\psi(x)]\}^{[1]} = \varphi^{[1]} \cdot \psi^{[1]},$$

если только обобщенная производная $\psi^{[1]}(x)$ *не равна нулю.* Что будет в этом последнем случае — неизвестно [88].

Понятие обобщенной производной включает в себя как частный случай обычное понятие производной и *не эквивалентно* этому последнему. Действительно, легко построить сколько угодно примеров непрерывных функций $\Phi(x)$, не имеющих нигде обыкновенной производной и, напротив, имеющих почти в каждой точке конечную обобщенную производную $\Phi^{[1]}(x)$ [89].

Понятие обобщенной производной решает вполне вопрос, поставленный нами в § 58. Именно, ближайший анализ обнаруживает, что *рассмотренная там нами последовательность функций*

$$F^{[1]}(x),\ F^{[2]}(x), \ldots,\ F^{[n]}(x), \ldots$$

такова, что функция $F^{[n+1]}(x)$ *есть обобщенная производная от функции* $F^{[n]}(x)$, *каково бы ни было* n. Это решает вопрос о связи строений пары функций $F^{[n+1]}(x)$ и $F^{[n]}(x)$. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого предложения, так как это вовлекло бы нас в детальные рассмотрения [90]. Заметим только, что понятие обобщенной производной влечет за собой соответственное понятие обобщенной примитивной.

Понятие обобщенной производной очень полезно для теории *общего* тригонометрического ряда, будучи тесно связано с римановой теорией этих рядов. По этой причине мы коснулись в настоящей работе этого понятия.

ГЛАВА V

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Расходящиеся тригонометрические ряды

61. Мы ограничиваемся рассмотрением тригонометрических рядов вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

где a_0, a_n и b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) суть постоянные числа.

Первая задача, представляющаяся вниманию, естественно есть следующая:

узнать, есть ли ряд (1) *сходящийся, и определить множество точек его сходимости и его меру.*

Вопрос о мере множеств, так или иначе связанных с тригонометрическими рядами, имеет очень важное значение. Почти все общие теоремы теории тригонометрических рядов говорят только о *мере* множеств и остаются верными, когда пренебрегают нуль-множествами. Законы, которые управляют общими свойствами тригонометрических рядов, касаются не индивидуального строения множеств, а лишь его меры. Лишь очень редко встречаются теоремы, касающиеся еще и *категории* множеств, и совсем нет теорем, связанных с *мощностью* множеств [91].

Ранее (§ 5) мы видели почти полную аналогию измеримого множества меры μ, $\mu > 0$, и отрезка длины μ. Естественно поэтому всегда искать законы, касающиеся множеств меры, *большей* нуля. В частности, прежде всего следует поставить вопрос о том, когда ряд (1) сходится на множестве меры, большей нуля.

До сих пор еще не найдено условия, необходимого и достаточного для того, чтобы ряд (1) был сходящимся на множестве меры, большей нуля; известно лишь общее необходимое условие для этого. Оно дается следующим предложением [1]):

Теорема. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве меры, большей нуля, то необходимо имеем* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *и одновременно* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Что, напротив, существуют тригонометрические ряды, сходящиеся в бесконечном множестве точек и не имеющие a_n, b_n стремящимися к нулю, это обнаруживает пример ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^n x.$$

Этот ряд, как можно легко доказать [93], сходится абсолютно на некотором множестве точек E, всюду плотном в области $[0, 2\pi]$ и всюду мощности континуума; но мера этого множества равна нулю, и это множество E есть множество лишь категории I.

В качестве редкой и интересной теоремы, касающейся *категории* множеств, мы должны упомянуть о следующем результате Юнга [2]):

Теорема Юнга [94]. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве точек категории* II (*хотя бы и меры нуль*), *тогда необходимо имеем одновременно* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тригонометрические ряды, сходящиеся только в одной точке области $[0, 2\pi]$ или только на счетном множестве точек этой области, или, наконец, сходящиеся только на

---

[1]) См. нашу статью: «К абсолютной сходимости тригонометрических рядов» (Математический сборник, 1912 г., т. 28, стр. 462), см. также: Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, 1912, т. II, стр. 169 [В русском переводе: Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, стр. 158. *Ред.*] [92].

[2]) Messenger of Mathematics, т. 38, стр. 44—48.

нуль-множестве, такие ряды мы рассматриваем, как *вообще расходящиеся*. Наоборот, тригонометрические ряды, сходящиеся во всякой точке x какого-нибудь интервала (a, b), лежащего на $[0, 2\pi]$, мы рассматриваем уже как сходящиеся и определяющие на этом интервале сумму-функцию $f(x)$. Равным образом в силу полной аналогии измеримого множества меры μ, $\mu > 0$, с интервалом длины μ, мы рассматриваем всякий тригонометрический ряд, сходящийся на этом множестве, вообще уже как ряд сходящийся и определяющий сумму-функцию $f(x)$ на этом измеримом множестве.

Таким образом, всякий тригонометрический ряд (1), у которого коэффициенты a_n, b_n не стремятся к нулю с $\frac{1}{n}$, должен быть рассматриваем как ряд, вообще расходящийся и непосредственно не могущий быть употребленным для вычислений. Для того чтобы и такие ряды можно было вводить в вычисления, необходимо каким-нибудь определенным приемом приписать им вполне определенную сумму, хотя бы на множестве меры, большей нуля. Классическими приемами суммирования расходящихся тригонометрических рядов являются известные методы Пуассона, Римана и Фейера [1]).

После вышеприведенной теоремы о необходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ для сходимости вообще тригонометрического ряда естественно возникает вопрос: *условие* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *не есть ли вместе с тем и достаточное условие для сходимости почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *тригонометрического ряда* (1)?

Эта задача была впервые поставлена Фату в его известной работе: «Séries trigonométriques et séries de Taylor» [2]). В ней Фату указывает на то, что все построенные примеры тригонометрических рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, были расходящимися лишь на нуль-множествах. К тому же Фату доказал в этой же работе [3]), что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$

---

[1]) Об этих методах см. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906, стр. 89—96 [95].

[2]) Acta mathematica **30**, стр. 398.

[3]) Стр. 379.

и $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$, то тригонометрический ряд (1) непременно сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Эта теорема вместе с отсутствием соответствующего примера расходящегося тригонометрического ряда и побудила Фату предложить вышеприведенную задачу.

Нам удалось ответить на вопрос Фату построением (в статье «Ueber eine Potenzreihe»)[1]) примера тригонометрического ряда, имеющего $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ и, однако, расходящегося почти всюду в области $[0, 2\pi]$ [[96]].

Именно, мы построили ряд Тейлора

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

имеющий $\lim \alpha_n = 0$ и расходящийся *всюду*, без исключения, на периферии круга радиуса 1. Если положить $z = e^{ix}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, то действительная и мнимая части этого ряда Тейлора дают искомые примеры тригонометрических рядов, имеющих $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ и расходящихся почти всюду на области $[0, 2\pi]$.

Штейнгауз, преобразуя этот пример[2]), достиг получения такого тригонометрического ряда (1), который, имея $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, расходится во всякой точке области $[0, 2\pi]$ [[97]].

Абсолютная сходимость тригонометрических рядов

62. Среди элементов тригонометрического ряда (1) особенный интерес представляют точки его *абсолютной сходимости*. Фату в цитированной работе доказал[3]), что, если тригонометрический ряд абсолютно сходится во всякой точке интервала Δ, лежащего на $[0, 2\pi]$, то, как бы мал этот

---

[1]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, **32**, 1911.

[2]) Steinhaus, Sur une série trigonométrique divergente (Comptes Rendus de la Soc. Scientifique de Varsovie, 1912 г.).

[3]) Стр. 398. См. также его работу «Sur la convergence absolue des séries trigonométriques» (Bull. de la Soc. math. de France, т. 41, стр. 47).

интервал ни был, необходимо сходятся одновременно оба ряда

$$\sum_1^\infty |a_n| \quad \text{и} \quad \sum_1^\infty |b_n|,$$

и следовательно, тригонометрический ряд (1) абсолютно сходится всюду на $[0, 2\pi]$, и его сумма есть непрерывная периодическая функция.

Пользуясь теоремой Д. Ф. Егорова, легко доказать следующее более общее предложение.

Теорема 1. *Если тригонометрический ряд абсолютно сходится во всякой точке множества меры, большей нуля, тогда необходимо сходятся одновременно оба ряда* $\sum_1^\infty |a_n|$ *и* $\sum_1^\infty |b_n|$ *и, следовательно, тригонометрический ряд абсолютно сходится всюду на* $[0, 2\pi]$.

Для доказательства заметим сначала, что тригонометрический ряд (1) может быть написан в форме

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \rho_n \cos(nx + \alpha_n),$$

где ρ_n и α_n суть постоянные числа, $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Допустим теперь, что ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^\infty \rho_n \cdot |\cos(nx + \alpha_n)| \tag{2}$$

сходится на множестве точек E, $\operatorname{mes} E > 0$. Тогда в силу теоремы Д. Ф. Егорова в множестве E содержится такое совершенное множество P, $\operatorname{mes} P = p > 0$, на котором ряд (2) сходится *равномерно*. Пусть $S(x)$ есть сумма этого ряда на P. В силу равномерной сходимости ряда (2) мы имеем право писать

$$\int_P S(\alpha)\, d\alpha = \frac{|a_0|}{2} \cdot p + \sum_{n=1}^\infty \rho_n \cdot \int_P |\cos(nx + \alpha_n)|\, dx,$$

где интеграл $\int\limits_P$ взят в смысле Лебега и распространен на множество P.

С другой стороны, имеем

$$\int\limits_P |\cos(nx+\alpha_n)|\,dx \geqslant \frac{p}{2}\sin\frac{p}{8}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n \leqslant \frac{1}{\frac{p}{2}\sin\frac{p}{8}}\int\limits_P S(\alpha)\,d\alpha,$$

откуда видно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_n$ сходится, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Если тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве точек категории* II (*хотя бы и меры нуль*), *тогда необходимо сходятся одновременно оба ряда* $\sum\limits_1^{\infty}|a_n|$ *и* $\sum\limits_1^{\infty}|b_n|$.

В самом деле, пусть тригонометрический ряд (1) сходится абсолютно на некотором множестве точек E. Далее, пусть ряд $\sum\limits_1^{\infty}|a_n|+|b_n|$ расходится. Покажем, что в этом случае множество точек E есть непременно множество категории I.

Для этого обозначим попрежнему через $S(x)$ сумму ряда (2) для x на E и через $S_n(x)$ сумму $n+1$ членов этого ряда. Пусть E_M есть множество точек x, для которых имеем $S(x)\leqslant M$. Ясно, что E_M есть часть множества E.

Множество E_M есть замкнутое множество. Действительно, обозначая через $E_M^{(n)}$ множество точек x, для которых соблюдается неравенство

$$S_n(x)\leqslant M,$$

видим, что множество E_M есть общая часть множеств

$$E_M^{(0)},\ E_M^{(1)},\ E_M^{(2)},\ \ldots,\ E_M^{(n)},\ \ldots$$

Но функция $S_n(x)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$; поэтому каждое из множеств $E_M^{(n)}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ есть замкнутое. Отсюда будет замкнутым множеством и общая часть этих множеств, т. е. множество E_M.

Множество E_M нигде не плотно на $[0, 2\pi]$. В самом деле, если бы оно было всюду плотным на каком-нибудь интервале (a, b), то всякая точка интервала (a, b) принадлежала бы к E_M, потому что множество E_M есть замкнутое множество. Отсюда следует, что ряд (1) сходился бы абсолютно всюду на интервале (a, b), т. е. в силу предыдущей теоремы сходился бы в ряд $\sum\limits_1^\infty |a_n|+|b_n|$, что противоречит допущению.

С другой стороны, ясно, что все множество E точек абсолютной сходимости ряда (1) есть сумма множеств E_M, где M пробегает целые числа:

$$E=E_1+E_2+E_3+\ldots+E_M+\ldots$$

и так как множества E_M $(M=1, 2, 3, \ldots)$ нигде не плотны на $[0, 2\pi]$, то множество E есть множество категории I, что доказывает теорему.

63. Точки абсолютной сходимости тригонометрического ряда, даже рассматриваемые каждая в отдельности, обладают совершенно исключительными свойствами. Одно только их *присутствие* оказывает огромное влияние на сходимость и расходимость тригонометрических рядов.

Рассмотрим, следуя Фату[1]), формальное равенство

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx.$$

Отсюда, полагая $A_n=a_n \cos n\xi+b_n \sin n\xi$, можем написать формально

$$f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)=-4\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin^2\frac{nh}{2}.$$

[1]) Acta math., т. 30, стр. 398.

Если теперь тригонометрический ряд (1) абсолютно сходится для $x = \xi$, тогда ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится абсолютно и равномерно относительно h, а $f(\xi)$ есть конечное число. Отсюда выводим, следуя Фату, что *точки непрерывности суммы ряда, точки расходимости, сходимости простой и сходимости абсолютной тригонометрического ряда суть попарно симметричные относительно каждой точки абсолютной сходимости тригонометрического ряда.*

Из этого простого замечания Фату можно извлечь интересные следствия. Докажем для этого сначала следующее общее предложение относительно измеримых множеств, лежащих на окружности круга радиуса 1.

Лемма. *Всякое измеримое множество $\mathfrak{M}$, лежащее на области* $[0, 2\pi]$ *и имеющее бесконечное множество точек симметрии, есть множество меры или нуль или* 2π.

В самом деле, если на $[0, 2\pi]$ лежит бесконечное множество геометрически различных точек симметрии, тогда легко видеть, что точки симметрии множества $\mathfrak{M}$ всюду плотны на $[0, 2\pi]$. Пусть теперь

$$0 < \operatorname{mes} \mathfrak{M} < 2\pi.$$

Тогда, как мы видели в § 4 (глава I), множество $\mathfrak{M}$ расположено на $[0, 2\pi]$ не однородно, но «сгустками», таким образом, что существуют на области $[0, 2\pi]$ два интервала δ_1 и δ_2 равной длины (пусть l), таких, что, обозначая через m_1 меру всей части множества $\mathfrak{M}$, содержащейся в δ_1, и через m_2 меру всей части множества $\mathfrak{M}$, лежащей на δ_2, имеем одновременно

$$m_1 < \varepsilon \cdot l,$$
$$m_2 > (1 - \varepsilon) \cdot l,$$

где $\varepsilon > 0$, малое как угодно. Но это невозможно, ибо точки симметрии множества $\mathfrak{M}$ всюду плотны на $[0, 2\pi]$, и значит, существует точка симметрии, близкая как угодно к середине расстояния между обоими интервалами δ_1 и δ_2, что влечет точное равенство

$$m_1 = m_2,$$

противоречащее двум неравенствам, написанным выше, Так как множество точек сходимости и множество точек расходимости тригонометрического ряда (1) симметричны каждое в отдельности относительно всякой точки абсолютной сходимости этого ряда, то приходим к результату:

Теорема. *Если тригонометрический ряд имеет на* $[0, 2\pi]$ *бесконечное (хотя бы счетное) число точек абсолютной сходимости, тогда мера точек сходимости тригонометрического ряда равна* или 0 *или* 2π.

Пусть теперь тригонометрический ряд (1) имеет *две* точки абсолютной сходимости ξ_1 и ξ_2, расстояние между которыми $|\xi_2 - \xi_1|$ *несоизмеримо* с π. Тогда, очевидно, точек абсолютной сходимости будет бесконечное множество на $[0, 2\pi]$, так как они попарно симметричны относительно друг друга, откуда

Теорема. *Если тригонометрический ряд сходится абсолютно в двух точках, расстояние между которыми несоизмеримо с* π, *тогда он или сходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *или расходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим один пример. Возьмем тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin 2^n x.$$

Ясно, что этот ряд имеет всегда на $[0, 2\pi]$ бесконечное множество точек абсолютной сходимости. Отсюда

Существуют неполные тригонометрические ряды такие, что они, каковы бы ни были их коэффициенты, суть всегда или сходящиеся почти всюду на $[0, 2\pi]$ *или расходящиеся почти всюду на* $[0, 2\pi]$ [98].

Это предложение побудило нас поставить задачу[1]):

Найти тригонометрический ряд, сходящийся на множестве точек меры не нуль и не 2π.

Задача эта представляла интерес ввиду того, что все ряды, построенные до того времени, были или сходящимися или расходящимися почти всюду на $[0, 2\pi]$, и совсем не было рядов с промежуточной мерою между нулем и 2π.

---

[1]) «Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques», Comptes Rendus, 23 сентября 1912 г.

Исчерпывающее решение этой задачи было дано Штейнгаузом в работе[1]: «Sur une problème de MM. Lusin et Sierpinski», построившим тригонометрический ряд, сходящийся во всякой точке некоторого интервала δ_1 и расходящийся во всякой точке другого интервала δ_2, лежащего на $[0, 2\pi]$ [99].

Тригонометрические ряды Фурье

64. Мы называем вообще *рядом Фурье от функции* $f(x)$ всякий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

коэффициенты которого a_0, a_n и b_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ даны формулами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Смотря по тому, в каком смысле принимается символ интеграла $\int$, стоящий в правых частях формул Фурье, т. е. будет ли это интеграл в смысле Римана, Лебега, Гарнака и т. д., соответственно этому мы будем называть тригонометрический ряд (1) рядом Фурье-Римана, Фурье-Лебега, Фурье-Гарнака и т. д. Таким образом, тригонометрические ряды Фурье делятся на группы, соответствующие тому или другому определению интеграла; группа рядов тем шире, чем более общ смысл интеграла, стоящего в формулах Фурье.

Среди этих групп рядов Фурье особого внимания заслуживает группа рядов Фурье-Лебега вследствие свойства их коэффициентов. Для этих рядов Лебег доказал, что коэффи-

---

[1]) Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, июль 1913 г.

циенты a_n и b_n непременно стремятся к нулю, когда n возрастает до бесконечности. Таким образом ничто не препятствует, по крайней мере формально, тому, чтобы всякий ряд Фурье-Лебега был сходящимся почти всюду на $[0, 2\pi]$ [100]. При этом известно, что если ряд (1) Фурье-Лебега сходится на множестве точек E меры, большей нуля, его сумма $S(x)$ на этом множестве совпадает почти всюду именно с той самой суммируемой функцией $f(x)$, которая образует ряд (1) при помощи формул Фурье.

Указанное свойство коэффициентов рядов Фурье-Лебега уже не сохраняется при употреблении в формулах Фурье интеграла Гарнака. Можно, в самом деле, корректно построить пример такой функции $f(x)$, интегрируемой в смысле Гарнака (и даже в смысле Дирихле), которая уже не приводит к равенствам $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Таким образом, в силу теоремы § 61 *тригонометрические ряды Фурье-Гарнака суть, вообще, ряды, расходящиеся почти всюду на* $[0, 2\pi]$. И тем более это справедливо для рядов Фурье-Данжуа [101]. Остановимся немного на этой группе рядов Фурье.

Говоря строго, мы не можем употреблять термин «ряд Фурье-Данжуа» до тех пор, пока не показана интегрируемость в смысле Данжуа обеих функций

$$f(x)\cos nx \quad \text{и} \quad f(x)\sin nx$$

при условии интегрируемости в смысле Данжуа функции $f(x)$, так как в противном случае формулы Фурье не имеют смысла [102].

Но эти две функции действительно интегрируемы. В самом деле, легко доказать¹) для интеграла Данжуа *вторую теорему о среднем значении*:

Теорема. *Если $f(x)$ есть функция, интегрируемая на (a, b) в смысле Данжуа, и $\Phi(x)$ есть непрерывная монотонная функция на (a, b), тогда имеем равенство*

$$\int\limits_a^b f(\alpha)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha = \Phi(a)\int\limits_a^\xi f(\alpha)\,d\alpha + \Phi(b)\int\limits_\xi^b f(\alpha)\,d\alpha,$$

где $a \leqslant \xi \leqslant b$, интегралы же взяты в смысле Данжуа.

---

¹) См. нашу заметку: «Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy» (Comptes Rendus, 23 декабря 1912 г.) [103].

Разбивая область $[0, 2\pi]$ на $4n$ равных частей и применяя предыдущую теорему, видим, что обе функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ интегрируемы в смысле Данжуа. Таким образом, группа рядов Фурье-Данжуа оказывается существующей.

Выше мы сказали, что ряды Фурье-Данжуа суть, вообще, расходящиеся почти всюду на $[0, 2\pi]$, так как их коэффициенты не стремятся к нулю с $\frac{1}{n}$. Напротив, чрезвычайно вероятно, что всякий тригонометрический ряд Фурье-Данжуа от данной функции $f(x)$ суммируем методом Пуассона к $f(x)$, т. е. что для рядов Фурье-Данжуа мы имеем следующее равенство:

$$f(x) = \lim_{\rho \to 1}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right],$$

справедливое почти всюду на $[0, 2\pi]$ [104]. Действительно, можно корректно показать, что ряд, стоящий в правой части этого равенства, есть не что иное, как интеграл Пуассона-Данжуа:

$$U(\rho, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left|\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha - x)}\right| d\alpha \quad (\rho < 1),$$

имеющий смысл согласно указанной второй теореме о среднем значении для интеграла Данжуа. Следовательно, если хотят доказать суммируемость рядов Фурье-Данжуа методом Пуассона, нужно исследовать свойства гармонической функции $U(\rho, x)$. Чрезвычайно вероятно, что $U(\rho, x)$ имеет все классические свойства интеграла Пуассона-Лебега, т. е. что $U(\rho, x)$ стремится почти всюду на $[0, 2\pi]$ к данной функции $f(x)$, когда точка (ρ, x) приближается к точке окружности $(1, x)$.

Одной из главнейших целей обобщения понятия интеграла является расширение идеи ряда Фурье. Выше мы заметили, что, принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла, мы все более и более расширяем *класс тригонометрических рядов Фурье*. Отсюда естественно приходим к вопросу: существует ли столь общее определение понятия интеграла, при котором класс рядов Фурье совпадает с классом всех тригонометрических рядов? В дальнейшем мы увидим, что на этот вопрос нужно ответить отрицательно; именно, мы покажем[1]), что существует такой класс T тригонометрических рядов, дальнейшее расширение которого (в смысле понятия «ряда Фурье») неминуемо сопровождается нарушением какого-либо основного свойства определенного интеграла. Отсюда задача общего определения интеграла соответствует отысканию границ этого класса T или свойства коэффициентов рядов, образующих класс T. В главе VI мы возвратимся к этим вопросам.

Необходимый и достаточный признак сходимости

65. Среди всех рядов Фурье-Лебега особенного внимания заслуживает группа рядов Фурье для *функций с интегрируемым квадратом*, т. е. для таких функций $f(x)$, для которых интеграл Лебега $\int\limits_0^{2\pi} f^2(\alpha)\,d\alpha$ есть конечная величина. Роль этих функций очень важна не только в теории тригонометрических рядов, но и вообще в теории разложения по ортогональным функциям, столь выдвинутой в последнее время интегральными уравнениями.

Важность класса функций с интегрируемым квадратом вытекает из следующего предложения[2]).

Теорема Фишера-Рисса. *Для того чтобы тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *был рядом Фурье-Лебега от функции с интегрируемым квадратом, необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ *был сходящимся* [105].

---

1) См. § 85.

2) Fischer, Sur la convergence en moyenne (Comptes Rendus, 144, I, стр. 1022—1024, 1907). F. Riesz, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions (Comptes Rendus, 144, I, стр. 615—619, 1907).

Это предложение дает *критерий* для суждения о том, представляет ли данный à priori тригонометрический ряд именно ряд Фурье-Лебега от функции с интегрируемым квадратом. Пользуясь этим предложением, мы можем дать необходимое и достаточное условие для сходимости почти всюду всякого тригонометрического ряда Фурье-Лебега от функции с интегрируемым квадратом. Перейдем к выводу этого условия[1]).

Возьмем произвольную функцию $f(x)$ с интегрируемым квадратом. Пусть ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

есть соответствующий ей ряд Фурье-Лебега; согласно только что указанной теореме Фишера-Рисса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2$ сходится. Имея в виду вопросы о сходимости и расходимости тригонометрического ряда, мы всегда можем положить $a_0=0$. Итак, пусть

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1}$$

Рассмотрим *сопряженный* тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} - b_n \cos nx + a_n \sin nx.$$

В силу приведенной теоремы Фишера-Рисса этот ряд есть также ряд Фурье-Лебега от некоторой функции $g(x)$ с интегрируемым квадратом, сопряженной данной функции $f(x)$.

---

[1]) Мы дали его в Comptes Rendus (сообщение Академии от 2 июня 1913 г.) в заметке: «Sur la convergence des séries trigonométriques».

Следовательно, имеем право писать

$$g(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx \tag{2}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Отсюда, обозначая через $S_n(x)$ сумму n членов данного ряда (1), легко после нетрудных вычислений [106] видеть, что имеем

$$S_n(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [g(x+\alpha) - g(x-\alpha)]\left\{\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right\} d\alpha. \tag{4}$$

Эта формула (4) приводит нас к искомому необходимому и достаточному признаку сходимости почти всюду данного ряда (1).

Теорема. *Для того чтобы тригонометрический ряд Фурье-Лебега от данной функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом был сходящимся почти всюду на* $[0, 2\pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *имело место*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha}\cdot \cos n\alpha \cdot d\alpha = 0,$$

где $g(x)$ есть функция, сопряженная с $f(x)$, и интеграл определен как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}$.

Для доказательства рассмотрим гармоническую функцию

$$U(\rho, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

голоморфную внутри круга ($R=1$). В силу формул (3) эта гармоническая функция $U(\rho, x)$ может быть представлена в двух видах [107]: в форме интеграла Пуассона-Лебега

$$U(\rho, x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-x)}\,d\alpha \tag{5}$$

и еще в форме следующего интеграла:

$$U(\rho, x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\,\frac{2\rho\sin(\alpha-x)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-x)}\,d\alpha. \tag{6}$$

Тождества (5) и (6) имеют силу для ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) и ($0 \leqslant \rho < 1$). Последнее тождество (6) имеет для нас существенное значение, так как оно приводит к искомому результату; рассмотрим его ближе. Интеграл, стоящий в правой части этого тождества, может, очевидно, быть написанным в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [g(x+\alpha)-g(x-\alpha)]\,\frac{2\rho\sin\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\,d\alpha.$$

И так как имеем тождественно

$$\frac{2\rho\sin\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

то тождество (6) можно написать в виде

$$\begin{aligned} U(\rho, x) \equiv{}& \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} [g(x+\alpha)-g(x-\alpha)]\,\frac{2\rho\sin\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\,d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{1}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,d\alpha \equiv \\ &\equiv J_1(x)+J_2(x)+J_3(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Полученное тождество (7) имеет силу для $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ и $(0 \leqslant \rho < 1)$. Выберем теперь ρ так, чтобы

$$1 - \rho = \varepsilon,$$

и рассмотрим по очереди оба интеграла $J_1(x)$ и $J_3(x)$.

Мы хотим доказать, что они *стремятся к нулю, когда* ε *стремится к нулю для всякого* x *области* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, *кроме, быть может, множества меры нуль.*

а) Имеем для первого интеграла $J_1(x)$ неравенство

$$|J_1(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} |g(x+\alpha) - g(x-\alpha)|\, d\alpha, \tag{8}$$

так как в интервале $(0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon)$ величина выражения $\frac{\rho \sin \alpha}{1+\rho^2 - 2\rho \cos \alpha}$ не превосходит $\frac{1}{\varepsilon}$.

Функция $g(x)$ есть измеримая на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, (§ 7) обладает (C)-свойством; поэтому, как бы мало ни было число η, $\eta > 0$, всегда существует на $[0, 2\pi]$ такое совершенное множество P, $\text{mes}\, P > 2\pi - \eta$, на котором функция $g(x)$ есть непрерывная функция. Рассмотрим теперь две функции, определенные на всей области $[0, 2\pi]$: функцию $|g(x)|$ и еще другую функцию $\varphi(x)$, равную $|g(x)|$ на P и равную 0 вне P. Обе эти функции суммируемы на $[0, 2\pi]$.

В силу определения функции $\varphi(x)$ ясно, что во всякой точке ξ множества P, кроме нуль-множества, обе непрерывные функции

$$\int_0^x |g(\alpha)|\, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_0^x \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

имеют производную, равную $|g(\xi)|$. Отсюда для каждой такой точки ξ множества P имеем равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} \{|g(\alpha)| - \varphi(\alpha)\}\, d\alpha = 0. \tag{9}$$

Пусть множество всех таких точек ξ, лежащих на P, есть Q; $\text{mes}\, Q = \text{mes}\, P > 2\pi - \eta$. Кроме того, всегда можем допустить, что множество Q состоит из одних только точек плотности множества P, так как (§ 3) множество последних имеет меру, равную мере P.

Пусть теперь ξ есть точка множества Q. Из неравенства (8) следует более сильное неравенство

$$|J_1(\xi)| \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |g(\xi+\alpha) - g(\xi)|\, d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |g(\xi) - g(\xi-\alpha)|\, d\alpha. \quad (10)$$

Покажем, что оба интеграла этого неравенства стремятся к нулю. Рассмотрим для этого первый интеграл.

Называя через p часть множества P, находящуюся в интервале $(\xi, \xi+\varepsilon)$, и через σ дополнительное множество к p на этом интервале, имеем

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |g(\xi+\alpha) - g(\xi)|\, d\alpha = \frac{1}{\varepsilon} \int_p |g(\xi+\alpha) - g(\xi)|\, d\alpha + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma |g(\xi+\alpha) - g(\xi)|\, d\alpha. \quad (11)$$

Первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства, стремится к нулю в силу *непрерывности* функции $g(x)$ на множестве P. Все дело сводится, следовательно, к рассмотрению второго интеграла, стоящего направо в равенстве (11). Но для этого интеграла мы имеем неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma |g(\xi+\alpha) - g(\xi)|\, d\alpha \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma |g(\xi+\alpha)|\, d\alpha + \frac{1}{\varepsilon} \int_\sigma |g(\xi)|\, d\alpha,$$

которое, пользуясь определением функции $\varphi(x)$, можно написать в виде

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma} |g(\xi+\alpha)-g(\xi)|\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon} \{|g(\alpha)|-\varphi(\alpha)\}\,d\alpha+|g(\xi)|\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma} 1\cdot d\alpha. \qquad (12)$$

Первый интеграл в правой части этого неравенства стремится к нулю в силу формулы (9); второй же интеграл стремится к нулю в силу того, что точка ξ есть точка *плотности* множества P. Отсюда следует, что первый интеграл неравенства (10) стремится к нулю.

Таким же точно образом легко доказать, что и второй интеграл неравенства (10) стремится к нулю, откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1(\xi)=0.$$

Но множество таких точек ξ имеет меру $>2\pi-\eta$, где $\eta>0$, малое по желанию. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1(x)=0$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$.

b) Перейдем теперь к исследованию интеграла $J_3(x)$ формулы (7). Мы хотим показать, что и он стремится к нулю почти всюду на $[0, 2\pi]$. Для этого мы докажем, что почти всюду на $[0, 2\pi]$ оба интеграла

$$\left.\begin{aligned} &V_1(\varepsilon, x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} g(x+\alpha)\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,d\alpha \\ &\text{и} \\ &V_2(\varepsilon, x)=\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} g(x-\alpha)\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1+\rho^2-2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,d\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

стремятся к одному и тому же конечному пределу, когда ε стремится к нулю. Чтобы доказать это, упростим множитель при функции g под знаком интеграла. Помня, что $1-\rho=\varepsilon$

и обозначая через Δ выражение $1+\rho^2-2\rho\cos\alpha$, имеем тождественно

$$\Delta=\varepsilon^2+\rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

откуда

$$V_1(\varepsilon, x)=\int_\varepsilon^\pi g(x+\alpha)\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,d\alpha.$$

Но имеем тождественно

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{\alpha}+\mathfrak{P}(\alpha),$$

где $\mathfrak{P}(\alpha)$ есть функция, голоморфная около $\alpha=0$. Отсюда

$$V_1(\varepsilon, x)=\int_\varepsilon^\pi g(x+\alpha)\cdot\frac{\varepsilon^2}{\Delta}\cdot\frac{2}{\alpha}d\alpha+$$
$$+\int_\varepsilon^\pi g(x+\alpha)\cdot\frac{\varepsilon^2}{\Delta}\cdot\mathfrak{P}(\alpha)\,d\alpha.$$

Так как $\left|\frac{\varepsilon^2}{\Delta}\right|<1$ и так как $\frac{\varepsilon^2}{\Delta}$ стремится к нулю для всякого постоянного α, не равного нулю, когда ε стремится к нулю, то второй интеграл в правой части последнего равенства сам стремится к нулю, и поэтому

$$V_1(\varepsilon, x)\backsim\int_\varepsilon^\pi g(x+\alpha)\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\,d\alpha,$$

где знак $\backsim$ обозначает равенство пределов у V_1 и у интеграла.

Теперь после нетрудных вычислений находим тождественно

$$\frac{1}{\varepsilon^2+\rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}-\frac{1}{\varepsilon^2+\rho\alpha^2}=\rho\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2+\rho\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2+\rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot\mathfrak{P}(\alpha),$$

где $\mathfrak{P}(\alpha)$ есть голоморфная функция, не зависящая от ε и ρ.

Отсюда

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^2 + \rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \frac{1}{\varepsilon^2 + \rho\alpha^2} \right| < K,$$

где K есть абсолютно постоянное число, не зависящее от ε, ρ, α. Поэтому при замене под интегралом $\frac{1}{\varepsilon^2 + \rho\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$ более простым выражением $\frac{1}{\varepsilon^2 + \rho\alpha^2}$, мы получаем число, разнящееся от первоначального менее чем на

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |g(x+\alpha)| \cdot \frac{2\varepsilon^2}{\alpha} \cdot K\, d\alpha,$$

что, в свою очередь, меньше чем

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |g(x+\alpha)| \cdot 2\varepsilon K\, d\alpha;$$

это же последнее число явно стремится к нулю с ε.

Значит,

$$V_1(\varepsilon, x) \backsim \int_{\varepsilon}^{\pi} g(x+\alpha) \cdot \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \rho\alpha^2} \cdot \frac{2}{\alpha}\, d\alpha.$$

Делаем теперь последнее упрощение, заменяя $\varepsilon^2 + \rho\alpha^2$ через $\varepsilon^2 + \alpha^2$. Мы имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^2 + \rho\alpha^2} - \frac{1}{\varepsilon^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2 + \rho\alpha^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \alpha^2} < \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + \alpha^2}.$$

Отсюда указанная замена дает число, отличающееся от первоначального менее чем на

$$4 \int_{\varepsilon}^{\pi} |g(x+\alpha)| \cdot \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^2 + \alpha^2} \cdot \frac{1}{\alpha}\, d\alpha,$$

что меньше чем

$$4\int_{\varepsilon}^{\pi} |g(x+\alpha)|\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Но множитель при $|g(x+\alpha)|$ меньше чем 1 и стремится к нулю с ε, когда α отлично от нуля. Поэтому и весь этот интеграл стремится к нулю с ε. Значит, имеем окончательно

$$V_1(\varepsilon, x)=\int_{\varepsilon}^{\pi} g(x+\alpha)\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\,dx+\omega(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon)$ стремится к нулю с ε.

Возьмем теперь ξ такое, что для $x=\xi$ неопределенный интеграл Лебега $G(x)=\int\limits_0^x g(\alpha)\,d\alpha$ имеет производную, равную $g(\xi)$, и рассмотрим новое выражение:

$$W_1(\varepsilon, \xi)=\int_{\varepsilon}^{\pi}[G(\xi+\alpha)-G(\xi)]\cdot\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\right\}d\alpha. \qquad (14)$$

Мы желаем найти предел этого интеграла, когда ε стремится к нулю. Имеем

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\right\}=-2\,\frac{3\varepsilon^2\alpha^2+\varepsilon^4}{\alpha^2(\varepsilon^2+\alpha^2)^2},$$

т. е. есть величина *всегда отрицательная*. С другой стороны, легко проверить, что интеграл

$$\int_{\varepsilon}^{\pi}\alpha\,\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\right\}d\alpha$$

стремится к $-(1+\ln 2)$, когда ε стремится к нулю.

Отсюда без труда заключаем, что интеграл $W_1(\varepsilon, \xi)$, который можно написать в виде

$$W_1(\varepsilon, \xi)=\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{G(\xi+\alpha)-G(\xi)}{\alpha}\cdot\alpha\,\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\right\}d\alpha,$$

стремится к $-(1+\ln 2)\cdot g(\xi)$, когда ε стремится к нулю.

Совершая интегрирование по частям [1]) в выражении (14) для $W_1(\varepsilon, \xi)$, имеем

$$W_1(\varepsilon, \xi) = \left|\left\{\frac{G(\xi+\alpha)-G(\xi)}{\alpha}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+\alpha^2}\cdot\frac{2}{\alpha}\right\}\right|_{\varepsilon}^{\pi} - V_1(\varepsilon, \xi) + \omega(\varepsilon),$$

что дает искомый предел:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_1(\varepsilon, \xi) = (1+\ln 2)\cdot g(\xi) - g(\xi) = g(\xi)\cdot \ln 2.$$

Таким образом, первый интеграл $V_1(\varepsilon, \xi)$ формул (13) стремится к $g(\xi)\cdot\ln 2$, когда ε стремится к нулю; точка ξ есть любая из точек, в которых производная интеграла $\int\limits_0^x g(\alpha)\,d\alpha$ равна $g(x)$.

Все рассуждения, относящиеся к интегралу $V_1(\varepsilon, \xi)$, применимы, очевидно, и ко второму интегралу $V_2(\varepsilon, \xi)$ формул (13); в каждой из указанных точек ξ этот интеграл $V_2(\varepsilon, \xi)$ стремится к $g(\xi)\cdot\ln 2$, когда ε стремится к нулю. И так как множество таких точек ξ имеет меру 2π, то отсюда следует, что имеем для интеграла $J_3(x)$ тождества (7) равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_3(x) = 0,$$

справедливое почти всюду на $[0, 2\pi]$.

c) Возвратимся теперь к тождеству (7). Имеем

$$U(\rho, x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha + J_1(x) + J_3(x). \qquad (7')$$

Заставим ε стремиться к нулю; в силу равенства $1-\rho=\varepsilon$ ρ стремится к 1. Мы уже знаем, что гармоническая функция $U(\rho, x)$ может быть написана в виде интеграла Пауссона-Лебега (5) для функции $f(x)$, а таковой вследствие теоремы Фату[2]) стремится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, когда ρ

---

[1]) Что всегда возможно, так как интеграл (14) есть интеграл Лебега.

[2]) Acta math. **30**, стр. 373—378 [108].

приближается к 1. Отсюда из тождества (7′) заключаем, что имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha=f(x) \tag{15}$$

почти всюду на $[0,\ 2\pi]$.

d) Полученная формула (15) легко приводит к доказательству предлагаемой теоремы. Действительно, выражение (4) для $S_n(x)$ можно написать в виде

$$S_n(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[g(x+\alpha)-g(x-\alpha)]\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}d\alpha$$

для *всякого* x области $[0,\ 2\pi]$. Отсюда в силу формулы (15) приходим к равенству

$$S_n(x)=f(x)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{1}\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}}\,d\alpha, \tag{16}$$

справедливому *почти всюду* в области $[0,\ 2\pi]$; в этом последнем равенстве интеграл, стоящий в правой части, определен как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}$.

Так как тригонометрический ряд (1) есть ряд Фурье-Лебега от функции $f(x)$, то если он сходится почти всюду на $[0,\ 2\pi]$, его сумма непременно должна быть равна $f(x)$ почти всюду на $[0,\ 2\pi]$. Обращаясь к равенству (16), видим, что, для того чтобы тригонометрический ряд Фурье-

Лебега (1) был сходящимся почти всюду на $[0, 2\pi]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{1}\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha=0 \qquad (17)$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$.

e) Теперь для окончательного доказательства предлагаемой теоремы нам остается только слегка преобразовать выражение (17).

Имеем тождественно

$$\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos n\alpha}{\alpha}+\cos n\alpha\cdot\mathfrak{P}(\alpha)-\frac{\sin n\alpha}{2},$$

где $\mathfrak{P}(\alpha)$ есть голоморфная функция около $\alpha=0$, не зависящая от n. Отсюда в силу теоремы Лебега о коэффициентах тригонометрических рядов Фурье-Лебега видим, что равенство (17) эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\cos n\alpha\,d\alpha=0; \qquad (18)$$

это же доказывает теорему.

66. Можно думать, что только что полученный необходимый и достаточный признак сходимости рядов Фурье-Лебега есть лишь *чисто формальное преобразование определения* сходимости ряда Фурье-Лебега. Действительно, после классических работ Дирихле и Лебега известно, что сумма $S_n(x)$ первых $(n+1)$ членов ряда Фурье-Лебега от функции $f(x)$ может быть написана в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)}{\alpha}\sin n\alpha\,d\alpha+\omega_n(x), \qquad (19)$$

где $\omega_n(x)$ равномерно стремится к нулю с $\frac{1}{n}$ на всей области $[0, 2\pi]$. Интеграл формулы (19) по внешнему виду похож на интеграл формулы (18) и поэтому может казаться с первого взгляда, что исследование предела интеграла (18) столь же трудно, как и исследование предела интеграла (19), представляющего в сущности лишь *определение* сходимости ряда Фурье-Лебега. Можно поэтому думать, что полученный интеграл (18) не может прибавить ничего существенно нового к известным уже результатам.

На самом деле это не так: есть глубокая внутренняя разница между интегралом (18) и интегралом Дирихле (19). И формулировка предыдущей теоремы и ее доказательство содержат существенно новые элементы, которых нет в интеграле Дирихле (19). Исследуя доказательство полученной теоремы, мы придем не только к некоторым интересным ее следствиям, но, во-первых, получим формулу, непосредственно определяющую значения сопряженной функции $g(x)$ по значениям данной $f(x)$, и, во-вторых, мы придем к новому *общему метрическому свойству всех измеримых множеств и измеримых функций с интегрируемым квадратом.*

Формула для сопряженной функции

67. Рассмотрим функцию комплексного переменного $\Phi(z)$, голоморфную внутри круга $(R=1)$. Пусть

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

где U и V суть две сопряженные гармонические функции, голоморфные внутри круга $(R=1)$. Допустим, далее, что $\Phi(0)=0$.

Известно, что имеем тождественно

$$V(x, y) = \int\limits_{0,0}^{x,y} -\frac{\partial U}{\partial y}dx + \frac{\partial V}{\partial x}dy, \tag{20}$$

где точка (x, y) лежит внутри круга $(R=1)$, а интеграл в правой части есть криволинейный. Этой формулой определяется внутри круга $(R=1)$ гармоническая функция $V(x, y)$, сопряженная к данной гармонической $U(x, y)$.

Допустим для простоты, что обе эти гармонические функции U и V непрерывны *на* окружности круга $(R=1)$. Тогда, зная величины функции U только на окружности $(R=1)$, мы согласно принципу Дирихле знаем функцию $U(x, y)$ и внутри круга ($R=1$), и значит, в силу формулы (20) нам становится известной внутри круга ($R=1$) функция $V(x, y)$, сопряженная к функции $U(x, y)$. Но функция $V(x, y)$ по условию непрерывна на окружности ($R=1$); отсюда заключаем, что одни только значения $U(\theta)$ *на* окружности ($R=1$) вполне определяют значения $V(\theta)$ на этой же окружности. При этом ясно, что классическая формула (20) не дает $V(\theta)$ прямо через $U(\theta)$.

Таким образом, мы приходим к задаче:

Зная значения $U(\theta)$ на окружности ($R=1$) гармонической функции $U(x, y)$, найти значения $V(\theta)$ на этой окружности сопряженной гармонической функции $V(x, y)$.

Доказательство предшествующей теоремы дает полное решение этой задачи, когда данная функция $U(\theta)$ есть функция с интегрируемым квадратом. В самом деле, тогда можем писать

$$U(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

и

$$V(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ сходится. В доказательстве предыдущей теоремы мы предполагали, что функция $f(x)$ есть *произвольная* функция с интегрируемым квадратом, и тогда сопряженная функция $g(x)$ оказывалась определенной через $f(x)$. Но ничто не мешает нам считать, наоборот, функцию $g(x)$ произвольно данной функцией с интегрируемым квадратом, и тогда уже функция $f(x)$ окажется определенной через $g(x)$. Заметив это, на основании формулы (15) мы можем писать

$$\left.\begin{aligned} V(\theta) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{U(\theta+\alpha) - U(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha \\ &\text{и} \\ U(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{V(\theta+\alpha) - V(\theta-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

где интегралы определены как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi}$; согласно предыдущему эти формулы (21) имеют смысл и справедливы почти всюду на $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, каковы бы ни были сопряженные функции $U(\theta)$ и $V(\theta)$ с интегрируемым квадратом.

Эти формулы (21), очевидно, решают поставленную задачу.

Следствия общей теоремы

68. Рассмотрим снова два сопряженных ряда Фурье-Лебега:

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и

$$g(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ есть ряд сходящийся. В силу общей теоремы § 65 для сходимости первого из этих рядов почти всюду на $[0, 2\pi]$ необходимо и достаточно, чтобы равенство (18)

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha} \cdot \cos n\alpha \, d\alpha = 0 \tag{18}$$

имело место почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Допустим теперь, что функция $g(x)$ удовлетворяет условию Дини [1]) почти всюду на $[0, 2\pi]$, тогда интеграл Лебега

$$\int_0^{\pi} \frac{g(x+\alpha) - g(x-\alpha)}{\alpha} \, d\alpha$$

есть *конечная* величина для всякого x области $[0, 2\pi]$, кроме нуль-множества. Ясно тогда, что равенство (18) справедливо почти всюду на $[0, 2\pi]$. Отсюда

---

[1]) Об условии Дини см. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, стр. 66 [109].

Следствие 1. *Если сумма ряда Фурье-Лебега есть функция с интегрируемым квадратом, удовлетворяющая почти всюду условию Дини, сопряженный тригонометрический ряд непременно сходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$.

И наконец, заметив, что существование производной влечет за собой осуществление условия Дини, получаем

Следствие 2. *Если сумма Фурье-Лебега есть непрерывная функция, имеющая почти всюду производную, сопряженный тригонометрический ряд непременно сходится почти всюду на* $[0, 2\pi]$ [110].

Общее метрическое свойство измеримых множеств и измеримых функций с интегрируемым квадратом

69. Рассмотрим формулу (15):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = f(x). \tag{15}$$

Как мы уже сказали выше (§ 67), мы можем здесь предполагать функцию $g(x)$ *произвольной* функцией с интегрируемым квадратом. Интеграл в этой формуле (15) определен как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\pi$ и дает *конечную* величину почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. Так как разность

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\alpha} = \mathfrak{P}(\alpha)$$

есть голоморфная функция около $\alpha = 0$, то можем писать

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = \pi f(x) + \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ есть непрерывная функция [1]) на $[0, 2\pi]$. Отсюда приходим к результату [2]).

Теорема. *Какова бы ни была функция $g(x)$ с интегрируемым квадратом, интеграл*

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha, \tag{22}$$

определенный как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\pi$, *есть конечная величина почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *и представляет функцию с интегрируемым квадратом переменного* x.

70. Рассмотрим немного ближе природу интеграла (22) этой теоремы. Допустим для простоты, что $g(x)$ есть непрерывная функция на $[0, 2\pi]$ с периодом 2π. В этом случае, когда α стремится к нулю, числитель подинтегрального выражения

$$\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}$$

также стремится к нулю, но, вообще, числитель есть бесконечно малое порядка *низшего*, чем порядок α. Таким образом, вообще, выражение

$$\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}$$

при приближении α к нулю не остается ограниченным, но колеблется между $-\infty$ и $+\infty$.

Чтобы показать, что это действительно так, достаточно заметить, что рассматриваемое подинтегральное выражение есть, вообще говоря, *несуммируемая* функция переменного α вблизи точки $\alpha=0$. В самом деле, легко построить [112]

---

1) См. по поводу непрерывности функций $\Phi(x)$ Ch. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, 1912, т. II, стр. 163, § 15. [В русском переводе: Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, § 141, стр. 152. *Ред.*]

2) Comptes Rendus, 2 июня 1913 г. [111].

корректный *пример такой непрерывной функции* $g(x)$, *для которой интеграл Лебега*

$$\int_0^\pi \left| \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty$$

почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. И так как даже для такой непрерывной функции $g(x)$ интеграл

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha,$$

определяемый как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^\pi$, есть конечная величина почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, то это значит, что интеграл (22) обязан своим существованием не малости абсолютной величины подинтегрального выражения, а своеобразной *интерференции положительных и отрицательных величин* выражения

$$\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha},$$

которые оно принимает вблизи точки $\alpha = 0$. Факт существования интеграла (22) не очевиден à priori, потому что можно построить пример такой непрерывной $g(x)$, для которой интеграл (22) действительно не имеет смысла на множестве точек E, всюду плотном на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ и всюду мощности континуума, но меры нуль [118].

Упомянутую интерференцию положительных и отрицательных величин выражения

$$\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}$$

нужно рассматривать как истинную причину сходимости рядов Фурье-Лебега. Все исследования, делавшиеся до сих пор о сходимости рядов Фурье, основаны на рассмотрении лишь *абсолютных величин* тех или других выражений; нужно поэтому рассматривать эти исследования, как достаточно грубые и как не входящие в сущность сходимости рядов Фурье.

величины для интеграла (22) глубоко скрыт в теореме Фишера-Рисса, следовательно, обнаружен скорее теорией комплексного переменного, чем действительного. Было бы важно получить прямое доказательство существования определенного значения интеграла (22), основанное на методах действительного переменного [114].

Заметив, что интеграл в равенстве (18)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\cos n\alpha\, d\alpha = 0$$

отличается от интеграла (22) лишь множителем $\cos n\alpha$, который принимает положительные и отрицательные значения, равномерно распределяющиеся на области $[0, 2\pi]$, когда n стремится к $+\infty$ ¹), мы приходим к вероятности того, что *всякий ряд Фурье-Лебега от функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом есть всегда ряд, сходящийся почти всюду на* $[0, 2\pi]$. Все результаты, полученные до сих пор в теории тригонометрических рядов, подтверждают вероятность этой гипотетической теоремы [115].

В связи с этим Лебегом была поставлена следующая задача ²):

Указать такое свойство непрерывных функций, которое бы всегда имело место п о ч т и в с ю д у на области независимого переменного, но которое не осуществлялось бы непременно всюду на этой области.

Задача эта вызвана вопросом о сходимости рядов Фурье для непрерывных функций ³) и еще тем особенным характе-

---

¹) Коэффициенты тригонометрических рядов Фурье-Лебега стремятся к нулю именно вследствие этого равномерного распределения положительных и отрицательных значений функций $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$.

²) Знанием этой задачи Лебега я обязан Штейнгаузу, сообщившему мне ее.

³) Легко видеть почему: если ряд Фурье для непрерывной функции всегда сходится почти всюду, тогда должно существовать какое-то свойство, которым обладает *почти каждая* точка непрерывной кривой, но не абсолютно каждая, так как в отдельных точках ряд Фурье может действительно расходиться.

ром, который присущ *всем* без исключения найденным до сих пор свойствам непрерывных функций: каждое из этих свойств или имеет место для *всякой* точки x, или же существуют непрерывные функции $g(x)$, совсем лишенные этого свойства.

Существование интеграла (22), доказанное выше, дает, очевидно, пример свойства, решающего задачу Лебега. К сожалению, это свойство выражено аналитически и неясно в отношении строения функции.

71. Общее свойство измеримых множеств. В начале нашей работы, говоря о строении измеримых множеств, мы изложили общее свойство, принадлежащее всем измеримым множествам и выражающееся в понятиях «точки плотности» и «точки разрежения» (§ 3). Свойство это[1]) является следствием теоремы Лебега о существовании производной у его неопределенного интеграла. Вспомним, в самом деле, каким образом выводится указанное свойство измеримых множеств.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторое измеримое множество меры, большей нуля, лежащее на $[0, 2\pi]$. Определим функцию $g(x)$ следующим условием: $g(x) = 1$ на $\mathfrak{M}$ и $g(x) = 0$ вне $\mathfrak{M}$, и обозначим через $G(x)$ неопределенный интеграл Лебега

$$G(x) = \int_0^x g(\alpha)\, d\alpha. \tag{23}$$

В силу упомянутой теоремы Лебега функция $G(x)$ есть непрерывная функция, имеющая производную $G'(x)$, почти всюду равную $g(x)$. И так как, с другой стороны, интеграл (23) по самому определению функции $g(x)$ является распространенным лишь на элементы множества $\mathfrak{M}$, то отсюда заключаем, что существование производной $G'(x)$ выражает некоторое свойство строения *самого множества* $\mathfrak{M}$. Это свойство мы охарактеризовали в терминах «точка плотности» и «точка разрежения» и показали, к каким оно приводит заключениям геометрического характера. Все известные метрические свойства измеримых множеств приводимы к только что указанному свойству, являющемуся поэтому основным [116].

---

[1]) Указанное Данжуа (Comptes Rendus, 1914 г.).

Теперь мы хотим, исходя из теоремы § 69, указать другое свойство всех измеримых множеств, неприводимое к предыдущему.

Пусть попрежнему $\mathfrak{M}$ — какое-нибудь измеримое множество на $[0, 2\pi]$ меры, большей нуля, и $g(x)$ — функция, равная 1 на $\mathfrak{M}$ и равная нулю вне $\mathfrak{M}$. Функция $g(x)$ есть, очевидно, функция с интегрируемым квадратом; поэтому в силу теоремы § 69 интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha, \tag{22}$$

определенный как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{\pi}$, есть конечное вполне определенное число почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. Так как интеграл (22) по самому определению функции $g(x)$ является распространенным лишь на элементы множества $\mathfrak{M}$, то отсюда заключаем, что существование интеграла (22) выражает некоторое свойство строения *самого множества* $\mathfrak{M}$.

Та причина, в силу которой интеграл (22) имеет конечную величину почти всюду, — эта причина лежит, без сомнения, в каком-то определенном геометрическом свойстве, принадлежащем всем измеримым множествам. Повидимому, трудно со всею строгостью формулировать это геометрическое свойство. Можно, однако, если отказаться от абсолютно точной формулировки, выяснить в общих чертах, в чем именно заключается это свойство.

Прежде всего ясно, что на интеграл (22) не оказывают никакого влияния те точки множества $\mathfrak{M}$, которые расположены *симметрично* относительно точки x, так как для таких точек подинтегральное выражение есть точный нуль. Значит, интеграл (22) является распространенным лишь на те элементы множества $\mathfrak{M}$, которые не симметричны по отношению к точке x. А совокупность таких точек, как легко видеть, всегда имеет точку x точкою разрежения. Таким образом, в конечном счете интеграл (22) является распространенным на множество точек, чрезвычайно разреженное около точки x; обозначим это множество через $\mathfrak{M}_x$. Элементы множества $\mathfrak{M}_x$ подходят к точке x справа и слева, образуя ряд сгустков[1]), *меры которых бесконечно малы сравнительно с их расстояниями от точки* x.

Существование интеграла (22), однако, не обязано разреженности множества $\mathfrak{M}_x$ вблизи точки x, но имеет причину совсем в другом. Действительно, можно построить такое множество $\mathfrak{M}$, для которого будем иметь

$$\int_0^\pi \left| \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty$$

почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ [117]. Отсюда заключаем, что, вообще, несмотря на разреженность множества $\mathfrak{M}_x$ вблизи с точкой x, оно подходит к точке x частями, достаточно массивными (по мере), чтобы сделать бесконечным только что написанный интеграл. И так как, с другой стороны, интеграл (22) имеет конечную величину, то отсюда следует, что его существование обязано аналитически чередованию положительных и отрицательных величин подинтегрального выражения. Геометрически это значит, что каждому сгустку множества $\mathfrak{M}_x$, бесконечно близкому к точке x, соответствует сгусток этого же множества, расположенный относительно точки x *симметрично*, если понимать симметрию не абсолютно, а *пренебрегая бесконечно малыми расстояниями порядка выше первого*.

Установив это свойство множества $\mathfrak{M}_x$, возвратимся к данному множеству $\mathfrak{M}$. Согласно предыдущему оно состоит из множества $\mathfrak{M}_x$ и из множества пар точек, абсолютно симметричных относительно точки x. Отсюда, принимая во внимание обнаруженное свойство множества $\mathfrak{M}_x$, приходим к результату, который в общих чертах можно формулировать так:

всякое измеримое множество всеми своими частями, включая части меры бесконечно малой порядка выше первого, расположено симметрично относительно почти каждой точки области, если пренебрегать бесконечно малыми расстояниями порядка выше первого.

Найденное свойство, общее всем измеримым множествам, неприводимо к ранее указанному свойству плотности и раз-

---

[1]) См. § 4.

режения измеримых множеств. Действительно, можно построить сколько угодно таких измеримых множеств $\mathfrak{M}$, для которых интеграл (22) не имеет смысла в некоторых точках плотности и в некоторых точках разрежения этих множеств [118]. Это указывает на то, что не всякая точка плотности или разрежения множества обладает найденным свойством симметрии.

Сходимость рядов Фурье-Лебега сильно зависит от этого свойства симметрии множеств [119].

Функции, сопряженные суммируемым функциям

72. Просматривая доказательства теорем §§ 65 и 69, мы замечаем, что обе эти теоремы имеют силу не только для функций с интегрируемым квадратом, но и вообще для всякой пары сопряженных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

$$g(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx, \tag{2}$$

одновременно интегрируемых на $[0, 2\pi]$ в смысле Лебега. Эта одновременная суммируемость сопряженных функций всегда ли имеет место? Другими словами, если $f(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$, является ли сопряженная функция $g(x)$ также суммируемой? Мы желаем теперь показать, что этого, вообще говоря, нет и что поэтому является вопрос относительно даже *существования* сопряженной функции $g(x)$, так как, хотя сопряженный ряд (2) и написан, но лишь формально, потому что мы не знаем ни того, сходится ли он, ни даже того, соответствует ли он вообще какой-либо функции $g(x)$. Таким образом, в обобщении теорем §§ 65 и 69 мы встречаемся с новым затруднением, непреодолимым, если не расширять понятие интеграла Лебега.

Ближайшее рассмотрение поставленного вопроса о суммируемости функции $g(x)$ приводит к интересной формуле общей теории тригонометрических рядов.

73. Пусть $f(x)$ есть суммируемая функция на $[0, 2\pi]$. Положим для простоты $\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha = 0$ и рассмотрим два сопряженных ряда:

$$f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{24}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx. \tag{25}$$

Мы не знаем, будет ли ряд (25) рядом Фурье-Лебега и соответствует ли он какой-либо функции. Рассмотрим теперь в соответствии с этими двумя рядами еще два других ряда, получающихся от почленного интегрирования первых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \tag{26}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n}{n} \cos nx - \frac{b_n}{n} \sin nx. \tag{27}$$

Эти ряды — сопряженные. Так как ряд (24) есть ряд Фурье-Лебега, то имеем $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$. Отсюда в силу теоремы Фишера-Рисса ряды (26) и (27) суть ряды Фурье-Лебега от двух сопряженных функций $F(x)$ и $G(x)$ с интегрируемым квадратом. Кроме того, вследствие теоремы Фату [1]) о тригонометрических рядах с коэффициентами вида $\frac{\varepsilon_n}{n}$, где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, оба ряда (26) и (27) суть сходящиеся почти всюду на $[0, 2\pi]$. Поэтому имеем право писать

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \tag{28}$$

---

[1]) Acta math. **30**, стр. 120 [120].

и

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{a_n}{n}\cos nx-\frac{b_n}{n}\sin nx \tag{29}$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$. Так как ряд (24) есть ряд Фурье-Лебега, то его можно интегрировать почленно; следовательно,

$$F(x)=C+\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha,$$

где C есть определенное постоянное число. Поэтому $F(x)$ есть непрерывная функция, периодическая, с ограниченным изменением, и ряд (28) сходится равномерно на всей области $[0, 2\pi]$.

Ближайшей нашей целью является выражение функции $G(x)$ через $f(x)$. Применив формулу (21) § 67, имеем равенство

$$G(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(x+\alpha)-F(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

справедливое почти всюду на $[0, 2\pi]$. Следует заметить, что в этой формуле интеграл определяется не только как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}$, но его можно понимать как интеграл Лебега, потому что $F(x)$ имеет производную почти всюду, и значит, почти всюду на $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ подинтегральное выражение есть непрерывная функция от α на $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

Интегрируя по частям интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{F(x+\alpha)-F(x-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,\quad \varepsilon>0,$$

что всегда законно, находим для этого интеграла выражение

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{1}\cdot\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)]\cdot\ln\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

Отсюда в силу дифференцируемости $F(x)$ находим окончательно

$$G(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\alpha)\cdot\ln\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| d\alpha. \tag{30}$$

Формула (30) имеет силу почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, и интеграл нужно понимать, как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\right]$. Но можно видеть и больше, приняв во внимание интересную теорему Юнга [1]). В силу ее, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ суть две какие-нибудь суммируемые функции, тогда произведение $f_1(x+\alpha)\cdot f_2(\alpha)$, рассматриваемое как функция переменного α, непременно суммируемо для всех значений переменного x, кроме нуль-множества, и интеграл Лебега $\int f_1(x+\alpha)\cdot f_2(\alpha)\,d\alpha$ есть суммируемая функция переменного x. Применив это предложение Юнга, видим, что *интеграл в формуле* (30) *есть обычный интеграл Лебега почти всюду на* $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

74. Формула (30) позволяет решить вопрос о суммируемости функции $g(x)$. Рассмотрим, в самом деле, ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\left|\sin\frac{x-r_n}{2}\right|\cdot\left|\ln\left|\sin\frac{x-r_n}{2}\right|\right|^{\frac{3}{2}}}, \tag{31}$$

где все $A_n > 0$ и $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ есть множество, всюду плотное на $[0, 2\pi]$. Если ряд коэффициентов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ достаточно быстро сходится, то ряд (31), как легко видеть [122], обладает следующими свойствами.

1°. Ряд (31) сходится почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, и его сумма — функция $f(x)$ — суммируема на $[0, 2\pi]$.

2°. Ряд Фурье-Лебега от $f(x)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$; сопряженный к нему тригонометрический ряд

---

[1]) Young [121], Sur la généralisation du théorème de Perseval (Comptes Rendus 155, стр. 30).

также сходится почти всюду в этой области и определяет, следовательно, некоторую измеримую функцию $g(x)$.

3°. Интеграл (30) изображает функцию $G(x)$, не ограниченную на всяком интервале (a, b) даже тогда, когда пренебрегают нуль-множествами.

Последнее свойство и показывает, что функция $g(x)$, сопряженная к суммируемой функции $f(x)$, есть функция, *не суммируемая* на $[0, 2\pi]$, так как в противном случае функция $G(x)$ была бы неопределенным интегралом Лебега

$$G(x) = C + \int_0^x g(\alpha)\, d\alpha$$

и, значит, была бы всюду ограниченной функцией [123]. Легко, кроме того, показать, что $g(x)$ не суммируема на всяком интервале (a, b) области $[0, 2\pi]$. Итак, приходим к результатам:

1) *непрерывная функция с ограниченным изменением $F(x)$ имеет сопряженную функцию $G(x)$, вообще, всюду разрывную и всюду неограниченную*;

2) *суммируемая функция $f(x)$ имеет сопряженную функцию $g(x)$, вообще, всюду несуммируемую* [124].

Признаки сходимости типа Вейля. Результаты Юнга

75. Изучать тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

можно, вообще, с двух точек зрения: можно, во-первых изучать вопросы сходимости и расходимости рядов в непосредственной зависимости от *числового характера коэффициентов* a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ряда, например, в зависимости от характера их малости при возрастании n. Эту точку зрения часто принимает классический анализ. Во-вторых, можно в изучении этих вопросов совершенно исключить числовой характер коэффициентов тригонометрического ряда, выражая эти коэффициенты непосредственно через *функцию*, например, определяя их по формулам Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha.$$

При такой точке зрения вопросы о сходимости, расходимости тригонометрического ряда или другие аналогичные вопросы относятся уже не к свойствам коэффициентов, а к свойствам *самой функции* $f(x)$. Рассмотрение числовой величины коэффициента является теперь уже *исключенным*. Эта точка зрения есть по преимуществу точка зрения теории функций. Она имеет за собою неоспоримые преимущества ввиду того обстоятельства, что классификация функций является гораздо более подвинутой вперед в науке, чем классификация числовых характеров последовательностей чисел.

Обе эти точки зрения почти сливаются, когда мы ограничиваемся рассмотрением функций $f(x)$ с интегрируемым квадратом. В этом случае единственной необходимой и достаточной числовой характеристикой коэффициентов является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Ранее мы стояли на второй, теоретико-функциональной, точке зрения при изучении тригонометрических рядов и видели большую вероятность того, что всякий ряд Фурье-Лебега от любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом сходится всегда почти всюду на $[0, 2\pi]$. Эта же вероятность указанного гипотетического предложения становится ясной при рассмотрении вопроса с первой точки зрения.

76. Ряд достаточных признаков сходимости почти всюду, более и более общих, установлен в последние годы для тригонометрических рядов. Мы перечислим их, отсылая для доказательств к работам самих авторов [1]).

---

[1]) Fatou, Acta math. **30**, стр. 379; Jerosch, Math. Annalen **66**, стр. 68; Weil, Math. Annalen **67**, стр. 225; Hobson, Proc. London Math. Soc., сер. 2, **12**, стр. 297; Plancherel, Comptes Rendus **156**, 2 июня 1913 г.; Hardy, Proc. London Math. Soc., сер. 2, **12**, стр. 365.

1°. Признак Фату: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0;$

2°. „ Ероша $n^\gamma \cdot |a_n| < 1, \ n^\gamma \cdot |b_n| < 1,$

где $\gamma = \dfrac{\sqrt{17}-1}{4} = 0{,}7807\ldots;$

3°. Признак Фату: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (a_n^2 + b_n^2);$$

4°. Признак Вейля: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot (a_n^2 + b_n^2);$$

5°. Признак Гобсона: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\varepsilon \cdot (a_n^2 + b_n^2), \quad \varepsilon > 0;$$

6°. Признак Планшереля: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^3 n \cdot (a_n^2 + b_n^2);$$

7°. Признак Харди: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \cdot (a_n^2 + b_n^2).$$

Рассматривая эту таблицу признаков сходимости, мы видим, что общий тип их есть сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot (a_n^2 + b_n^2),$$

где $w(n)$ есть положительная возрастающая функция. Такие признаки сходимости мы назовем *признаками типа Вейля*, так как Вейль первый привлек внимание на признаки сходимости этого рода. Функцию $w(n)$, положительную и неубывающую, такую, что сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot (a_n^2 + b_n^2)$$

влечет сходимость почти всюду соответствующего тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

будем называть функцией Вейля.

Чем медленнее возрастает функция Вейля $w(n)$, тем шире класс тригонометрических рядов, сходящихся *в силу этого признака*, и, следовательно, тем более общ этот признак сходимости. Отсюда задача о сходимости тригонометрических рядов Фурье-Лебега от функций $f(x)$ с интегрируемым квадратом приводит к задаче отыскания наименьшего возрастания функций Вейля.

Это наименьшее возрастание — существует ли? Легко заметить, что если *всякая* возрастающая функция $\varphi(n)$, $\varphi(\infty)=\infty$, есть функция Вейля, тогда каждый ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом сходится почти всюду.

Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2$ сходится, тогда всегда можно определить столь медленно возрастающую функцию $\varphi(n)$, $\varphi(\infty)=\infty$, что будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\cdot(a_n^2+b_n^2)$. Отсюда, если существует хотя бы *одна* функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом, для которой ряд Фурье не сходится, почти всюду, то медленность возрастания функций Вейля $w(n)$ не может переступить за известный порог; все сводится, следовательно, к фактическому определению этого порога¹). Поэтому было бы интересно понизить множитель Харди $\ln^2 n$ [125].

Заметим еще, что все указанные признаки, кроме, может быть, признака Харди, имеют силу не только для тригонометрических рядов, но и вообще для рядов по ортогональным функциям. К тому же легко доказать, что для рядов по ортогональным функциям множитель順Планшереля $\ln^3 n$

¹) Этот порог может оказаться «идеальной функцией» в смысле Дюбуа-Реймона.

можно бесконечно понизить; но остается неизвестным, можно ли понизить его вплоть до множителя Харди $\ln^2 n$ [126].

77. Из предыдущего мы видим, что в частных случаях асимптотический закон коэффициентов тригонометрического ряда обусловливает свойства этого ряда — его сходимость. Но влияет ли асимптотический закон коэффициентов ряда на свойства самой функции $f(x)$, изображаемой рядом, помимо влияния на сходимость этого ряда? Например, зная асимптотический закон коэффициентов, что можно сказать о характере неограниченности функции? И, наоборот, зная характер неограниченности функции, что можно сказать о коэффициентах тригонометрического ряда? [127].

Эти вопросы, одни из наиболее трудных, в последнее время несколько освещены интересными работами Юнга[1]). Мы ограничиваемся лишь формулированием его результатов.

Теорема I (Юнга). *Если функция* $|f(x)|^{\frac{2r}{2r-1}}$, *где* r *есть целое положительное число, суммируема, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{2r} + b_n^{2r}$ *сходится.*

Теорема II (Юнга). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\frac{1}{p}} + b_n^{1+\frac{1}{p}}$, *где* p *есть нечетное положительное число, сходится, то функция* $|f(x)|^{1+p}$ *суммируема* [128].

Мы видим, что первая теорема Юнга является обобщением теоремы Парсеваля, вторая же — обобщением теоремы Фишера-Рисса в точном смысле. Но в то время как теорема Фишера-Рисса есть полное обращение теоремы Парсеваля, *ни одна теорема Юнга не является обратимой.*

Чтобы видеть это, достаточно положить $r = 2$ и $p = 3$. В этом случае в силу теорем Юнга, «если $|f(x)|^{\frac{4}{3}}$ суммируема, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4 + b_n^4$ сходится» и «если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{4}{3}} + b_n^{\frac{4}{3}}$ сходится, функция $f^4(x)$ суммируема». Ни одно из этих

---

[1]) Young, Sur la généralisation du théorème de Parseval (Comptes Rendus **155**, стр. 30); Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée (Comptes Rendus **155**, стр. 472).

предложений не может быть обращено, так как, с одной стороны, легко построить такой тригонометрический ряд, для которого $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4 + b_n^4$ сходится, но сумма которого не есть суммируемая функция; и с другой стороны, легко построить такую функцию $f(x)$, для которой $f^4(x)$ суммируема, но для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{4}{8}} + b_n^{\frac{4}{3}}$ расходится [129].

Таким образом, только теоремы Парсеваля и Фишера-Рисса дают полную характеристику неограниченности функции через асимптотический закон коэффициентов, и обратно.

К тому же не существует никакого закона, *выраженного в абсолютных величинах коэффициентов*, который характеризовал бы суммируемость функции. Действительно, если бы такой закон существовал, тогда сумма тригонометрического ряда, сопряженного ряду Фурье-Лебега, была бы всегда суммируемой функцией. Но этого нет в силу результатов § 74.

ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ

Методы суммирования тригонометрических рядов

78. Для того чтобы сделать ясной связь общей теории интеграла с теорией тригонометрических рядов, мы должны предварительно рассмотреть задачу об изображении данной функции тригонометрическим рядом.

Мы говорим, что *тригонометрический ряд* T

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (T)$$

изображает функцию $f(x)$ *на области* $[0, 2\pi]$, если он сходится к функции $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$. В этом случае функция $f(x)$ является изображенной тригонометрическим рядом T.

Может случиться, что данный тригонометрический ряд T расходится на множестве меры, *большей* нуля. В этом случае нельзя ряду T поставить непосредственно в соответствие какую-нибудь функцию $f(x)$, и нужны особые методы, чтобы *суммировать* ряд T и, несмотря на его расходимость, говорить и в этом случае, что он *изображает* известную функцию $f(x)$. Современный анализ, признавая ценность расходящихся рядов, дает целый ряд таких методов суммирования, из которых на первом плане по своей мощности и простоте стоят следующие три метода суммирования [1]).

---

[1]) Об этих методах см., например, Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906 г., стр. 89—96 [180].

a) Методы Фейера. Обозначив через $S_n(x)$ сумму $n+1$ членов ряда T, рассматриваем выражение

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}.$$

Если оказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ существует почти всюду на $[0, 2\pi]$, то, обозначив его через $f(x)$, мы говорим, что $f(x)$ есть *сумма* ряда T и что функция $f(x)$ *изображена* тригонометрическим рядом T.

Этот метод Фейера с успехом применим к рядам Фурье-Лебега. Всякий такой тригонометрический ряд T оказывается суммируемым методом Фейера и дает ту именно функцию $f(x)$, которая образовала ряд Фурье-Лебега T.

b) Метод Пуассона. Рассматриваем в соответствии с рядом T гармоническую функцию $P(\rho, x)$:

$$P(\rho, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (P)$$

которую предполагаем голоморфной внутри круга $(\rho = 1)$. Эта голоморфность в большинстве случаев имеет место, так как обычно числа $\left|\frac{a_n}{n}\right|$ и $\left|\frac{b_n}{n}\right|$ не превышают постоянного числа K. Если теперь оказывается, что $\lim\limits_{\rho\to 1} P(\rho, x)$ существует почти всюду на $[0, 2\pi]$, то, обозначив его через $f(x)$, мы говорим, что $f(x)$ есть *сумма* ряда T и что $f(x)$ изображена тригонометрическим рядом T.

Метод Пуассона всегда применим к рядам Фурье-Лебега, так как в этом случае гармоническая функция $P(\rho, x)$ есть не что иное, как интеграл Пуассона-Лебега

$$P(\rho, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+\alpha)\, \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\, d\alpha,$$

свойства которого исследованы Фату[1]). Вероятно, метод Пуассона применим также и к рядам Фурье-Данжуа [[182]].

[1]) См. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta mathematica 30, стр. 373) [[181]].

c) Метод Римана. Для метода Римана существенна гипотеза ограниченности чисел $|a_n|$ и $|b_n|$, т. е. что имеем

$$|a_n| < K \text{ и } |b_n| < K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где K есть постоянное число. При этом условии функция $R(x)$

$$R(x) = C_2 + C_1 x + \frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \qquad (R)$$

есть непрерывная функция $[0, 2\pi]$, так как ряд правой части абсолютно и равномерно сходится. Если теперь оказывается, что выражение

$$\frac{R(x+2h) + R(x-2h) - 2R(x)}{4h^2}$$

стремится почти всюду к $f(x)$, когда h стремится к нулю, то называем попрежнему $f(x)$ *суммой* ряда T и говорим, что $f(x)$ изображена тригонометрическим рядом T. Метод Римана приложим к рядам Фурье-Лебега, так как в этом случае $R(x)$ имеет обыкновенную вторую производную, равную почти всюду $f(x)$. Повидимому, метод Римана применим также и к рядам Фурье-Данжуа [133].

В случае, когда данный тригонометрический ряд T сходится в точке x_0, имея суммой число $f(x_0)$, тогда к ряду T одновременно применимы все три указанных процесса суммирования и дают в силу теорем Чезаро, Абеля и Римана в результате то же самое число $f(x_0)$.

Современный анализ еще не установил в точности взаимоотношение этих трех методов суммирования: еще неизвестно, какой из них является наиболее общим и сильным. Было бы интересно, например, построить такой тригонометрический ряд T, к которому применим метод Римана и который не был бы суммируем методом Пуассона. Но, повидимому, самым слабым является метод Фейера и самым сильным метод Пуассона [134].

Указав главнейшие методы суммирования тригонометрических рядов, условимся в терминологии. Всякий раз, как тригонометрический ряд T

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

оказывается суммируемым одним из трех указанных методов почти всюду к функции $f(x)$, мы будем говорить, что *функция $f(x)$ изображена тригонометрическим рядом T*, и будем писать

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

заменяя символ соответствия $\backsim$ знаком равенства $=$, если дело идет о простой сходимости почти всюду тригонометрического ряда T.

Изображение произвольной измеримой функции тригонометрическим рядом

79. Мы переходим к вопросу о том, *какие* именно функции $f(x)$ можно изобразить тригонометрическим рядом. Прежде всего ясно, что функция $f(x)$ непременно должна быть *измеримой* на $[0, 2\pi]$, так как во всех методах суммирования функция $f(x)$ является, очевидно, пределом последовательности непрерывных функций (§ 11). В остальном же функция $f(x)$ произвольна, как показывает предложение.

Основная теорема. *Всякая данная измеримая функция $f(x)$, конечная почти всюду на* $[0, 2\pi)$, *изобразима тригонометрическим рядом*

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

суммируемым одновременно методами Пуассона и Римана к данной функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть измеримая функция на $[0, 2\pi]$, конечная почти всюду. В силу основной теоремы § 15 для нее существует ее примитивная функция $F(x)$. Функция $F(x)$ непрерывна и, следовательно, есть функция с интегрируемым квадратом. Поэтому для нее существует ее ряд Фурье-Лебега

$$F(x) \backsim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 + B_n^2$ есть сходящийся ряд. Так как непрерывная функция $F(x)$ почти всюду имеет производную, то ее ряд Фурье-Лебега сходится почти всюду [1]) [135], что дает право писать более точно

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \tag{1}$$

Дифференцируя формально ряд (1) почленно, мы получаем тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{2}$$

где $a_0 = 0$ и $a_n = nB_n$, $b_n = -nA_n$.

Мы теперь утверждаем, что полученный тригонометрический ряд (2) изображает данную функцию $f(x)$, будучи суммируем к ней методами Пуассона и Римана.

1°. Применим, в самом деле, к ряду (2) метод Пуассона. Пусть $P(\rho, x)$ есть гармоническая функция

$$P(\rho, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Полученная гармоническая функция $P(\rho, x)$ голоморфна в круге $(\rho = 1)$, так как имеем

$$a_n = nB_n \text{ и } b_n = -nA_n,$$

где

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0.$$

Заметив, что

$$a_n = n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \text{ и } b_n = -n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

---

1) Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, стр. 66.

видим, что функция $P(\rho, x)$ может быть написана в виде

$$P(\rho, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\alpha-x)}\,d\alpha.$$

Так как непрерывная функция $F(x)$ имеет функцию $f(x)$ своей производной почти всюду на $[0, 2\pi]$, то согласно теореме Фату[1]) [136] гармоническая функция $P(\rho, x)$ стремится к $f(x)$ почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, когда ρ стремится к 1. Это показывает применимость к ряду (2) метода Пуассона.

2°. Применим теперь к ряду (2) метод Римана. Имеем

$$R(x) = C_2 + C_1 x + \frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2}. \qquad (R)$$

Вследствие равенств

$$a_0 = 0, \quad a_n = nB_n \quad \text{и} \quad b_n = -nA_n$$

получаем

$$R(x) = C_2 + C_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{B_n}{n}\cos nx + \frac{A_n}{n}\sin nx. \qquad (3)$$

В силу неравенств

$$\left|\frac{A_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + A_n^2\right) \quad \text{и} \quad \left|\frac{B_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + B_n^2\right)$$

ряд (3) сходится абсолютно и равномерно, и функция $R(x)$ есть непрерывная. С другой стороны, ряд (3) можно получить, интегрируя формально ряд (1) почленно. Но ряд (1) есть ряд Фурье-Лебега, откуда согласно теореме Лебега о возможности почленного интегрирования рядов Фурье имеем тождественно всюду на $[0, 2\pi]$

$$R(x) = C_2' + C_1' x + \int_0^x F(\alpha)\,d\alpha.$$

---

[1]) Acta math. 30, стр. 345.

Отсюда видим, что непрерывная функция $R(x)$ имеет обыкновенную вторую производную, равную почти всюду $f(x)$. Следовательно, имеем

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(x+2h)+R(x-2h)-2R(x)}{4h^2} = f(x)$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$ (ч. т. д.).

Только что доказанная теорема является почти полным решением задачи изображения функций тригонометрическими рядами. Для совершенно полного решения этой задачи следовало бы дать изображение суммируемыми тригонометрическими рядами измеримых функций $f(x)$, принимающих значения $+\infty$ и $-\infty$ на множестве точек меры, *большей* нуля. Мы не смогли ни найти такие ряды, ни доказать их несуществование [187].

Сделаем последнее замечание: решающий вопрос тригонометрический ряд (2) построен помощью примитивной $F(x)$. Но, как мы знаем, всех примитивных $\{F(x)\}$, $F(0)=0$, для данной $f(x)$ бесконечно много. Отсюда заключаем, что *одна и та же данная функция $f(x)$ может быть изображена бесконечным множеством тригонометрических рядов* [188].

Задача Фурье

80. Классические методы суммирования, изложенные в начале этой главы, дают более или менее полное решение следующей задачи анализа:

Дан тригонометрический ряд; определить значения функции, изображаемой им.

Эта задача, выдвинутая в анализе сравнительно недавно, в связи с теорией расходящихся рядов, обратна другой задаче, поставленной давно, при первых шагах классического анализа, когда понятие «произвольной функции» не было еще сложившимся.

Задача Фурье. *Дана функция своими значениями; определить коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее.*

Понятие произвольной функции

81. Историческое значение задачи Фурье[1]**.** Известно, каким образом эта задача была связана с понятием «произвольной функции». В 1747 г. Даламбер проинтегрировал уравнение звучащей струны, и этот его результат послужил началом целого ряда работ, раскрывших содержание понятия произвольной функции. Из геометров, выяснивших это понятие, должны быть упомянуты прежде всего Эйлер, Клеро, Даниил Бернулли, Лагранж, Риман и Дирихле.

Вопрос, который ставился сначала, был вопросом об отношении между аналитическим определением функции и определением, до некоторой степени физическим: если отклонить *произвольно* струну от ее положения равновесия, существует ли формула, точно изображающая начальное положение этой струны?

На долю Фурье выпало дать утвердительный ответ на этот вопрос: Фурье дал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольную функцию». Открытие Фурье, сначала облеченное в неточную форму, было удостоверено строгим анализом, данным Лежен-Дирихле.

Это открытие Фурье опрокидывало все понятия и взгляды той эпохи; в то время все, включая Эйлера, думали, что каждому определенному аналитическому выражению соответствует кривая, последовательные части которой зависят друг от друга: именно, для того чтобы выразить эту взаимную зависимость частей кривой, Эйлер и изобрел термин «*непрерывная функция*»: смысл этого термина в настоящее время совершенно изменен. Под влиянием этих же самых взглядов Лагранж в своей «Théorie des fonctions analytiques» делал попытки доказать, что всякая непрерывная функция разложима в ряд Тейлора. Тяготение к ряду Тейлора вполне понятно; именно, тейлоровские разложения и дают наиболее осязательно казавшуюся в то время таинственной связь различных частей непрерывной кривой: знание малого участка

---

[1]) Для этого параграфа мы воспользовались интересной речью Бореля на 5-м Международном Математическом конгрессе; см. Proc. of the fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge 22—28, August 1912 г.), Cambridge, 1913 г., т. I, стр. 133.

кривой давало знание *всей* кривой. Но Фурье доказал, что такое понимание произвольной кривой иллюзорно и невозможно, так как физик, чертящий кривую, в любой момент свободен изменить течение кривой; и раз кривая начерчена, всегда возможно ее изобразить *одним* аналитическим выражением.

Таким образом пришли к тому парадоксальному результату, что нет никакого логического основания рассматривать два отрезка одной и той же прямой или две дуги одной и той же окружности, как соответствующие одной и той же функции, потому что всегда возможно рассматривать как единую функцию ординату кривой, составленной из двух отрезков различных прямых или из двух дуг различных окружностей. Правда, пытались говорить, что формула, изображающая кривую, *более проста* для случая двух отрезков одной и той же прямой, чем для случая двух отрезков двух различных прямых; но критерий «простоты» не явился ценным, потому что он, дозволяя употребление алгебраических функций, запрещал пользоваться разложениями в ряды, а между тем важность последних становилась очевидной со дня на день.

82. Современное понятие произвольной функции. Дальнейшие судьбы понятия «произвольная функция» всем известны: развитие самого понятия функции совершалось в двух различных направлениях.

С одной стороны, стремление удержать взаимную зависимость частей кривой вылилось *в теорию функций комплексного переменного*. На этом пути предстояло отделить понятие функции от ее аналитического изображения; это было сделано Вейерштрассом в понятии «аналитическая функция» (= «голоморфная функция»). Но определение Вейерштрасса, практически достаточное, еще сильно прикреплено к *частному* классу аналитических выражений — классу рядов Тейлора — и вследствие этого иногда искусственно ограничивает область существования функции. Желание освободиться от этого привело недавно Бореля [1]) к более общему понятию «моногенной функции».

[1]) В его лекциях по теории функций, читанных в Сорбонне в 1914 г.; см. также цитированную выше речь Бореля на конгрессе [[159]].

С другой стороны, результат Фурье и изучение значений аналитических выражений разрушали всякую связь между различными частями кривой. Казалось, что значения аналитического выражения обладают лишь одним свойством: *быть определенными*, в остальном же совершенно произвольны, будучи абсолютно независимы друг от друга. В этом именно смысле и было определено понятие функции, данное Дирихле; это определение функции явилось основным для современной *теории функций действительного переменного*. Лишь в последнее время, с одной стороны, работами Бэра и Лебега обнаружена постоянная связь между значениями аналитического выражения, не меняющаяся от выражения к выражению, следовательно, инвариант всех аналитических выражений [1]). Будучи подчинены этому инвариантному свойству, значения аналитического выражения *не* абсолютно произвольны; таким образом, понятие функции, данное Дирихле, является более общим, чем то, которое можно извлечь, рассматривая одни только аналитические выражения. С другой стороны, спор, поднятый относительно принципа произвольного выбора (аксиомы Цермело), поставил под сомнение ясность определения Дирихле, бывшую прежде вне вопросов.

Непредставимая аналитически функция [141] не может быть дана, определена *индивидуально* так, как, например, $\sin x$. Когда мы пытаемся говорить об *одной* из таких функций, мы на самом деле всегда говорим о *классе* таких функций. Самый класс может быть определен сравнительно простым свойством (например, «ван-влековский класс» неизмеримых функций); но ничто не отличает внутри этого класса одну аналитически непредставимую функцию от всех остальных.

---

[1]) «Всякая аналитически изобразимая функция точечно разрывна на всяком совершенном множестве, если пренебречь множествами первой категории по отношению к этому совершенному множеству». (Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Mathématiques, 1905 г., стр. 188.) Не всякая функция в смысле Дирихле обладает этим свойством. К сожалению, это свойство, будучи необходимым, далеко не достаточно для аналитической изобразимости; см. по этому вопросу наше сообщение Академии от 4 мая 1914 г.: «Sur un problème de M. Baire» (Comptes Rendus, 158, стр. 1258) [140].

Математик, рассматривающий этот класс, не характеризует — даже для себя самого — ничем объективным, никаким свойством отличия одной какой-нибудь функции этого класса от *всех* остальных; его уверенность в том, что он в различных местах своего рассуждения говорит *об одной и той же* функции, всецело *субъективна* и недоступна другому интеллекту, в противоположность тому, когда дело идет, например, о числе π или e. Когда хотят доказать существование неизмеримой функции, обычно поступают так: каждой величине x независимого переменного заставляют соответствовать подобранное надлежащим образом бесконечное множество чисел E_x; затем, произвольно выбирая из этого множества E_x *одно* число, обозначают его через $f(x)$ и, наконец, доказывают без труда, что построенная таким образом функция $f(x)$ неизмерима. Легко, однако, заметить, что не существует закона, в силу которого был бы осуществлен выбор в каждом множестве E_x одного числа $f(x)$: если бы такой закон существовал, тогда по крайней мере *один* выбор приводил бы к аналитически изобразимой функции и доказательство существования было бы несостоятельным; между тем вся сила подобных доказательств именно в том, что *никакой* выбор не дает аналитически изобразимой функции. Отсюда, если $x_2 \neq x_1$, ничто не связывает выбора числа $f(x_2)$ из множества E_{x_2} с выбором $f(x_1)$ из E_{x_1}; эти выборы абсолютно независимы; таким образом, мы имеем дело с континуумом абсолютно независимых выборов. Но это еще не все. Элементы множества E_x неотличимы друг от друга; ничто внутри каждого множества E_x не отличает один элемент от всех других, ничто не заставляет нас предпочесть один элемент всем прочим, ничто не останавливает внимания на одном каком-либо. Отсюда то, что происходит внутри каждого в отдельности множества E_x, не имеет ничего общего с *выбором* в точном смысле этого слова. Выбор есть нечто, зависящее от *нас*. Таков, например, выбор числа из пары (5, 7); но внутри множества E_x никакое число не останавливает наше внимание; поэтому мы не можем говорить о «выборе элемента», всегда зависящем от *нас*, мы можем лишь говорить о *выпаде* элемента, уже абсолютно не зависящем от нас. Таким образом, в последнем анализе определение индивидуальной аналитически непредставимой функции есть не что иное, как определение значений функции бросанием монеты [1]) для каждого специального значения x. Значение аналитически непредставимой функции для индивидуального значения независимого переменного определяется только *случаем* и, значит, связано с коэффициентом вероятности события, определяющего значение этой функции [2]); но мы абсолютно не знаем, ка̀к совершится это событие. Все это побудило в последнее время поставить вопрос: что именно хотят сказать, говоря: «рассмотрим аналитически непредставимую функцию», «возьмем неизмеримую функцию».

В настоящее время концепция произвольной функции различна. Для тех, кто принимает принцип произвольного выбора, произвольная функция есть соответствие между x и $f(x)$, мыслящееся совершенно идеально. Для отрицающих указанный принцип, т. е. для тех, кто признает возможность оперировать лишь с такими математическими объектами, каждый из которых может быть индивидуально определен,— для тех произвольная функция есть функция какого-нибудь класса α классификации Бэра [[142]]. Наконец, в теории, где пренебрегают нуль-множествами (какова вся теория интеграла), произвольная функция есть функция классов 0, 1 и 2 классификации Бэра.

Характер задачи Фурье

83. В начале этой главы (§ 79) мы доказали, что для всякой измеримой функции $f(x)$ существует *класс* $\{T\}_f$ тригонометрических рядов, изображающих ее. Легко видеть, что эта теорема существования не дает решения поставленной выше задачи Фурье, так как последняя по самому существу дела требует изображения данной функции $f(x)$ *не классом* тригонометрических рядов, а лишь *одним* тригонометрическим рядом, и притом не *каким-либо*, а вполне определенным. Чтобы видеть это, возвратимся к задаче о звучащей струне.

---

[1]) Идеализируя, понятно, это явление так, как делает теория вероятностей.

[2]) См. B o r e l, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques (Rend. Circ. Mat. Palermo 27, 1909 г., стр. 247—271).

Даниил Бернулли показал, что если начальное положение звучащей струны в момент времени $t=0$ дается тригонометрическим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{4}$$

то положение этой струны в произвольный момент времени t определяется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos knt, \tag{5}$$

где k есть коэффициент, зависящий от струны. Пусть теперь *одно и то же* начальное положение струны изображено *двумя различными* тригонометрическими рядами (4). Для того чтобы не притти к физическому парадоксу, нужно быть уверенным в том, что оба ряда (5), выведенные из этих двух рядов (4), изображают при любом t не два различные, но одно и то же положение струны. А, вообще, этого нет: вообще, оба ряда (5) имеют разные суммы для континуума значений аргумента x. Отсюда, задача о звучащей струне естественно приводит к мысли искать изображения функции *единственным* тригонометрическим рядом (4) с тем, чтобы, приняв этот ряд за изображение начального положения струны, следить за дальнейшими ее вибрациями с помощью ряда (5).

Таким образом, все дело сводится к тому, чтобы выбрать из класса $\{T\}_f$ тригонометрических рядов, изображающих одну и ту же $f(x)$, единственный ряд, наиболее полно изображающий течение этой функции; нужно, следовательно, суметь выбрать, отличить в классе рядов $\{T\}_f$ один, обладающий особенными свойствами, которых лишены все другие ряды этого класса. Задача Фурье и состоит в определении коэффициентов именно *этого* единственного ряда, а не какого-либо другого из класса $\{T\}_f$.

Небольшое сравнение не будет излишним: всякое иррациональное число ξ области $[0, 1]$ может быть определено, отправляясь от единицы, бесконечным множеством формул $\left(\text{например, число } \frac{\pi}{4}\right)$; но в классе $K\xi$ всех изображений данной иррациональности ξ существует только одно изображение, отличающееся от всех других, — алгорифм непрерывной дроби.

Таким образом, задача Фурье приводит к отысканию *регулярного* алгорифма, позволяющего, отправляясь от значений функции, определять единственным образом коэффициенты тригонометрического ряда, изображающего ее. Одной из главных целей общей теории интеграла является построение этого регулярного алгорифма.

Решение задачи Фурье

84. Классические решения. Решение задачи Фурье получается немедленно, если мы предположим, что данная функция $f(x)$ *допускает* тригонометрический ряд, сходящийся к ней *равномерно*. В этом случае сама функция $f(x)$ есть, очевидно, непрерывная, т. е. интегрируемая в смысле Коши функция. Законное интегрирование ряда почленно по умножении его на $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ тотчас же приводит к формулам Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha,$$

обнаруживающим единственность *такого* тригонометрического ряда, изображающего функцию, и позволяющим определить его коэффициенты. К такому же заключению приходим, делая предположение гораздо более общее. Обозначим через $S_n(x)$ сумму $n+1$ членов тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6}$$

и через $Y(x)$ верхнюю грань чисел

$$|S_0(x)|,\quad |S_1(x)|,\quad |S_2(x)|, \ldots,\quad |S_n(x)|, \ldots,$$

т. е. пусть

$$Y(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |S_n(x)|.$$

В силу этого определения всякому тригонометрическому ряду (6) соответствует положительная измеримая функция $Y(x)$, конечная или бесконечная. Валле-Пуассен[1]) показал, что если функция $f(x)$ допускает изображение ее таким тригонометрическим рядом, для которого $Y(x)$ есть конечная суммируемая функция на $[0, 2\pi]$, то тогда необходимо: 1) функция $f(x)$ суммируема и 2) этот тригонометрический ряд есть ряд Фурье-Лебега [143]. Во всех этих случаях в классе $\{T\}_f$ всех тригонометрических рядов, изображающих данную $f(x)$, существует только *один* ряд с определенным свойством, касающимся изменения сумм $S_n(x)$ в зависимости от n.

Эту же самую единственность мы получаем, исходя из другой точки зрения. Допустим, что в классе $\{T\}_f$ мы ищем ряды с достаточно малыми коэффициентами для больших значений n, например, с такими коэффициентами, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

был сходящимся. В этом случае мы не делаем никаких предположений относительно сумм $S_n(x)$: функция $Y(x)$ может быть равной $+\infty$ для всякого x. Мы знаем в силу теоремы Фишера-Рисса, что если тригонометрический ряд имеет ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ сходящимся, то тогда необходимо: 1) изображаемая им функция $f(x)$ суммируема и 2) рассматриваемый ряд есть ряд Фурье-Лебега. Отсюда в классе $\{T\}_f$ может существовать только один *такой* ряд[2]).

Таким образом, обе точки зрения: и *характер изменения сумм $S_n(x)$ в зависимости от n* и *критерий малости коэффициентов*, приводят к тому, что в классе $\{T\}_f$ может

[1]) Sur l'unicité du developpement trigonométrique (Comptes Rendus 160, стр. 951).

[2]) Было бы весьма интересно, если бы эта единственность тригонометрического ряда со сходящимся $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ была доказана до изобретения интеграла Лебега; в этом случае необходимость расширения римановского определения интеграла представилась бы сама собой.

существовать только один тригонометрический ряд с указанными свойствами. Этот ряд есть ряд Фурье; его коэффициенты определяются по формулам Фурье. Следовательно, в этих случаях решение задачи Фурье дается теорией интеграла [144].

85. О решении задачи Фурье в общем виде. Согласно сказанному задача Фурье приводит к выбору из класса $\{T\}_f$ единственного тригонометрического ряда; поэтому естественно стремиться осуществить этот выбор в самом общем случае. Рассмотрим для этого состав каждого класса $\{T\}_f$; с этой целью введем одно определение.

Назовем *нуль-рядом* всякий тригонометрический ряд τ, изображающий функцию 0, т. е.

$$0 \backsim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \qquad (\tau)$$

Рассмотрим теперь какой-нибудь класс $\{T\}_f$. Пусть ряд T_1 принадлежит к этому классу. Так как в указанные методы суммирования коэффициенты тригонометрических рядов входят лишь линейным образом, то сумма ряда T_1 и какого-нибудь нуль-ряда τ, $T_1+\tau$, есть ряд, входящий в класс $\{T\}_f$. Обратно, если T_2 и T_1 входят в $\{T\}_f$, их разность $T_2 - T_1$ есть нуль-ряд, т. е. $T_2 = T_1 + \tau$. Отсюда все ряды класса $\{T\}_f$ получаются из одного какого-нибудь прибавлением к нему нуль-рядов τ.

Теперь, если мы хотим осуществить выбор одного ряда из класса $\{T\}_f$, мы должны иметь такой критерий $\varkappa$, выраженный в конечной форме, без помощи принципа произвольного выбора, чтобы в классе $\{T\}_f$ ему удовлетворял только один ряд; обозначим этот ряд теперь $T^\varkappa$. Далее, если мы хотим, чтобы была какая-нибудь аналогия между рядом $T^\varkappa$ и рядом Фурье в смысле Коши, мы должны подчинить критерий $\varkappa$ следующим двум аксиомам:

I. В классе $\{T\}_0$ всех нуль-рядов критерию $\varkappa$ удовлетворяет лишь ряд с коэффициентами, тождественными нулю.

II. Если ряды T_1 и T_2 удовлетворяют критерию $\varkappa$, разность их $T_2 - T_1$ также удовлетворяет $\varkappa$.

Обратно, каждый критерий $\varkappa$, подчиняющийся этим двум аксиомам, есть *критерий единственности*. Действительно, если в каком-либо классе $\{T\}_f$ этому критерию $\varkappa$ удовлетворяют два различных ряда T_1 и T_2, тогда их разность $T_2 - T_1$ согласно аксиоме II удовлетворяет $\varkappa$, что невозможно в силу аксиомы I, так как $T_2 - T_1$ есть нуль-ряд с коэффициентами, не тождественными нулю.

Таким образом, все сводится к отысканию наиболее общего критерия $\varkappa$, выраженного в конечной форме и подчиненного двум указанным аксиомам I и II. Но здесь мы встречаемся с основной трудностью: ничто не доказывает, что существует только один такой общий критерий; отыскивая его, мы можем притти к двум различным критериям $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Соответственно им в классе $\{T\}_f$ окажутся выделенными два ряда $T^{\varkappa_1}$ и $T^{\varkappa_2}$, и ничто не доказывает совпадения этих двух рядов. Таким образом, приходим к многозначности.

Для того чтобы освободиться от этой многозначности, представляется два пути. Во-первых, можно избрать аксиоматический путь и пытаться пополнить указанные две аксиомы I и II новыми так, чтобы *все* критерии $\varkappa$, удовлетворяющие этой полной таблице аксиом, выделяли бы в классе $\{T\}_f$ один и тот же ряд[1]). Во-вторых, можно итти конструктивным путем, ища наиболее естественного расширения указанных критериев Валле-Пуссена и Фишера-Рисса.

86. Вероятные критерии выбора. Возьмем класс $\{T\}_f$. Из всех рядов этого класса естественно рассматривать ряды, *сходящиеся* почти всюду к $f(x)$, как ближе изображающие функцию $f(x)$, как более для нее характерные, чем расходящиеся ряды этого класса, которые лишь суммируемы к функции $f(x)$. Отсюда естественно выбирать в классе $\{T\}_f$ единственный ряд только среди сходящихся рядов этого класса, если они там есть. Такой выбор является тем более естественным, что, вероятно, в классе $\{T\}_f$ может существовать лишь один ряд, сходящийся почти всюду к $f(x)$. Действительно, если бы в классе $\{T\}_f$ существовали два различных таких ряда, тогда разность их давала бы тригонометрический ряд, сходящийся к нулю почти всюду и имеющий

---

[1]) Эта полная система аксиом, понятно, должна быть согласованной с системой аксиом для интеграла Лебега, рассмотренной в § 45.

коэффициенты, не равные нулю. Это же маловероятно в силу предложений:

Теорема Кантора. *Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема Юнга[1]). *Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, кроме, может быть, счетного множества точек, все его коэффициенты равны нулю.*

Если предложение остается верным, когда возможным множеством точек исключения будет какое-нибудь нуль-множество, тогда в классе $\{T\}_f$ находится только один ряд, сходящийся почти всюду; в этом случае выбор ряда осуществляется самым естественным образом [146].

Этот критерий сходимости есть, в известной степени, обобщение критерия Валле-Пуссена, так как в этом случае функция $Y(x)$, вообще, нигде не суммируема.

87. Если в классе $\{T\}_f$ нет сходящихся рядов [147], тогда естественно выбирать ряд среди таких рядов, коэффициенты которых изменяются наиболее правильно, когда n стремится к ∞. Такими рядами являются ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, когда n стремится к ∞. Этот критерий малости коэффициентов есть обобщение критерия Фишера-Рисса.

Интересно заметить, что легко указать нуль-ряд с *ограниченными* коэффициентами: таков, например, нуль-ряд

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots$$

Напротив, до сих пор еще не построен нуль-ряд с коэффициентами, *стремящимися* к нулю. Возможно, что таких нуль-рядов совсем нет (кроме $a_0=0$, $a_n=b_n=0$) [148]. Если это так, тогда в классе $\{T\}_f$ существует только один ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю; в этом случае выбор в классе $\{T\}_f$ такого ряда наиболее естествен.

Наконец, в силу результата § 74 можно в классе $\{T\}_f$ искать такой ряд, который был бы сопряженным ряду Фурье-Лебега. Согласно § 74 этот выбор более общ, чем тот, который дает интеграл Данжуа.

---

[1]) См. Messenger of mathematics, 1909 г. [145].

Интегрирование как операция определения коэффициентов тригонометрического ряда по его сумме

88. Мы видели, что задача Фурье распадается на две задачи: 1) задачу выбора из класса $\{T\}_f$ единственного ряда, наиболее тесно связанного с функцией $f(x)$, и 2) задачу определения коэффициентов этого единственного ряда, исходя непосредственно из значений функции $f(x)$. В предыдущем мы указали наиболее вероятные решения первой задачи. Теперь мы хотим показать, что вторая задача приводит к общему формальному определению интеграла.

Допустим, что для функции $f(x)$, вообще говоря, не интегрируемой ни в каком данном ранее смысле, мы выделили в классе $\{T\}_f$ единственный тригонометрический ряд T, наиболее тесно с нею связанный. Допустим для простоты, что этот ряд T есть сходящийся почти всюду к $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Назовем этот ряд T *рядом Фурье от функции* $f(x)$.

Согласно сказанному ряд Фурье играет роль *особого ряда* в классе $\{T\}_f$, являясь наиболее характерным для данной функции $f(x)$. Поэтому нужно рассматривать его коэффициенты a_0, a_n и b_n как полученные непосредственно из самой функции $f(x)$ некоторым процессом, который для первого коэффициента a_0 можно назвать *процессом интегрирования* и в соответствии с этим писать

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha,$$

где $\int$ есть по определению символ неизвестной операции интегрирования.

Здесь мы знаем, каков должен быть результат этой операции: число πa_0 нам известно; все сводится, следовательно, к *действительному построению* этой операции [149]. Таким образом, мы приходим к понятию определенного интеграла.

89. Данное определение интеграла продолжает представлять одно неудобство: мы знаем числовую величину определенного интеграла от функции $f(x)$ для целой области $[0, 2\pi]$, но нам неизвестна величина определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha$ для какого-нибудь отрезка $[a, b]$, лежащего на $[0, 2\pi]$; мы не имеем пока и неопределенного интеграла.

Чтобы устранить это неудобство, рассмотрим à priori в соответствии с рядом Фурье T следующий ряд F:

$$C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx,$$

полученный формально из ряда Фурье T почленным интегрированием; C — здесь произвольная постоянная.

Ряд Фурье T по условию сходится почти всюду; поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Отсюда в силу теоремы Фату [1]) ряд F сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$, и его сумма $F(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом:

$$F(x)=C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx. \qquad (F).$$

Хотя функция $F(x)$ получена через посредство тригонометрического ряда, ничто не препятствует рассматривать ее подобно ряду Фурье T как образованную непосредственно от *значений* данной функции $f(x)$. В случае, когда $f(x)$ интегрируема в смысле Лебега на $[0, 2\pi]$, функция $F(x)$ совпадает с неопределенным интегралом Лебега. Назовем и в более общем случае эту функцию $F(x)$ попрежнему *неопределенным интегралом* и по определению будем писать

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Теперь легко дать определение символу $\int\limits_a^b f(\alpha)\,d\alpha$. Пусть E есть множество точек области $[0, 2\pi]$, в которых ряд F

---

[1]) Acta Math. **30**, стр. 379 [150].

сходится; $\operatorname{mes} E = 2\pi$. Пусть a и b — две точки множества E. Назовем по определению разность $F(b) - F(a)$ *определенным интегралом* от данной функции $f(x)$ между a и b и напишем

$$\int_a^b f(\alpha)\, d\alpha = F(b) - F(a);$$

здесь $\int$ есть символ операции, которую нужно выполнить над значениями данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, чтобы получить число $F(b) - F(a)$.

Возможность почленного интегрирования тригонометрических рядов не-Фурье-Лебега

90. Чтобы сделать вполне корректным данное определение интеграла, мы должны были бы показать, во-первых, что число $F(b) - F(a)$ зависит только от значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и совсем не зависит от значений этой функции *вне* отрезка $[a, b]$ и, во-вторых, что данное определение интеграла никогда ни приведет к противоречию с определением интеграла Лебега, ставшим в настоящее время классическим. Относительно первого пункта мы не имеем точных доказательств [161]; остановимся на втором вопросе.

Все сводится к доказательству того, что если $f(x)$ суммируема внутри отрезка $[a, b]$ и если a', b' есть пара точек, внутренних к $[a, b]$, тогда число $F(b') - F'(a')$ есть непременно интеграл Лебега $\int_{a'}^{b'} f(\alpha)\, d\alpha$.

Легко видеть, что данное определение интеграла совпадает с лебеговым в том случае, когда функция $f(x)$ суммируема на *всей* области $[0, 2\pi]$. Действительно, мы знаем, что имеем право интегрировать почленно всякий тригонометрический ряд Фурье-Лебега T между любыми точками a' и b' области $[0, 2\pi]$. Число же $F(b') - F(a')$ есть, очевидно, проинтегрированный почленно ряд T между точками a' и b'. Следовательно, теперь мы должны поставить вопрос о возможности почленного интегрирования тригонометрических рядов не-Фурье-Лебега. Эта возможность оправдывается в широком классе случаев в силу предложения:

Теорема. *Если тригонометрический ряд (вообще, не-Фурье-Лебега)*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (T)$$

сходится во всякой точке отрезка $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *непрерывной на* $[a, b]$, *его можно интегрировать почленно внутри* $[a, b]$.

Заметим сначала, что, предполагая ряд T сходящимся на $[a, b]$ к непрерывной функции, мы не делаем никаких предположений относительно сходимости ряда *вне* интервала $[a, b]$: ряд T там может не изображать никакой функции или же изображать несуммируемую функцию. Поэтому ряд T не есть, вообще, ряд Фурье-Лебега.

Заметив это, интегрируем формально дважды почленно ряд T; получаем два ряда:

$$F(x)=C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx, \qquad (F)$$

$$\Phi(x)=C'+Cx+\frac{a_0}{4}x^2+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n}{n^2}\cos nx-\frac{b_n}{n^2}\sin nx. \qquad (\Phi)$$

Ряд T по предположению сходится на $[a, b]$; поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Отсюда в силу теорем Фату и Фишера-Рисса тригонометрический ряд, входящий в F, есть сходящийся почти всюду на $[0, 2\pi]$ ряд Фурье-Лебега от функции с интегрируемым квадратом; поэтому $F(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на $[0, 2\pi]$. Второй же ряд Φ, очевидно, равномерно сходится к непрерывной функции $\Phi(x)$.

Вследствие теоремы Римана непрерывная функция $\Phi(x)$ имеет всюду внутри $[a, b]$ вторую обобщенную производную Шварца, равную $f(x)$. Отсюда разность

$$\Phi(x)-\int_{\theta}^{x} d\beta \int_{\theta}^{\beta} f(\alpha)\, d\alpha,$$

где θ находится внутри $[a, b]$, есть непрерывная функция, имеющая вторую производную Шварца, равную нулю всюду внутри $[a, b]$. Поэтому эта разность внутри $[a, b]$ есть линейная функция и, значит, внутри $[a, b]$ имеем тождественно

$$\Phi(x) = \int_{\theta}^{x} d\beta \int_{\theta}^{\beta} f(\alpha)\, d\alpha + A + Bx,$$

где A и B суть постоянные числа. Отсюда заключаем, что функция $\Phi(x)$ имеет всюду внутри $[a, b]$ производную $\Phi'(x)$, определяемую равенством

$$\Phi'(x) = B + \int_{\theta}^{x} f(\alpha)\, d\alpha. \tag{7}$$

Равенство (7) показывает, что эта производная есть непрерывная функция *с ограниченным изменением* всюду внутри $[a, b]$.

С другой стороны, ряд F мы имеем право почленно интегрировать, так как входящий в него тригонометрический ряд есть ряд Фурье-Лебега. Поэтому функция $\Phi(x)$ есть неопределенный интеграл Лебега от функции $F(x)$; значит, имеем

$$\Phi'(x) = F(x) \tag{8}$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Сравнивая равенства (7) и (8), видим, что входящий в F тригонометрический ряд изображает внутри $[a, b]$ непрерывную функцию с ограниченным изменением; и так как этот ряд есть ряд Фурье-Лебега, то отсюда заключаем, что ряд F сходится *равномерно* внутри $[a, b]$ к $\Phi'(x)$. Следовательно, имеем тождественно всюду внутри $[a, b]$

$$F(x) = B + \int_{\theta}^{x} f(\alpha)\, d\alpha.$$

Наконец, давая в этой формуле переменному x значения a' и b', внутренние к $[a, b]$, и вычитая, приходим к желаемому равенству

$$F(b') - F(a') = \int_{a'}^{b'} f(\alpha)\, d\alpha$$

(ч. т. д.).

Этот результат показывает, что во многих случаях число $F(b)-F(a)$ совсем не зависит от свойств функции $f(x)$ *вне* отрезка $[a, b]$. Вероятно, это и всегда имеет место [1]).

Свойства неопределенного интеграла

91. Рассмотрим свойства неопределенного интеграла $F(x)$, формальное определение которого мы дали выше (§ 89). Мы уже заметили, что $F(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом. Следует думать, что в общем случае $F(x)$ есть разрывная функция аргумента x; в самом деле, в § 74 мы видели, что, вообще, почленное интегрирование сходящегося тригонометрического ряда приводит к разрывной функции. Эта разрывность неопределенного интеграла не противоречит ничему; напротив, мы уже заметили в § 44, исходя из других соображений, что на известных стадиях общности неопределенный интеграл следует искать среди разрывных функций.

Сказанное естественно приводит к вопросу: существует ли связь между структурными свойствами данной функции $f(x)$ и ее неопределенного интеграла $F(x)$? В силу определения функция $F(x)$ есть сумма ряда, полученного от почленного интегрирования тригонометрического ряда, сходящегося к $f(x)$. В этом состоит формальная, аналитическая связь функций $f(x)$ и $F(x)$ друг с другом. Это аналитическое отношение функций $f(x)$ и $F(x)$ друг к другу, — сопровождается ли оно каким-либо глубоким структурным отношением?

Ближайший анализ обнаруживает, что такое структурное отношение действительно существует, именно, здесь имеем предложение:

Теорема. *Если тригонометрический ряд*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx \qquad (T)$$

---

1) Просматривая корректуру, я заметил, что эта теорема уже доказана Валле-Пуссеном; см. его Cours d'Analyse, 3-е изд., т. I. [В русском переводе: Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, т. I, стр. 309. *Ред.*]

сходится почти всюду к функции $f(x)$, тогда сумма $F(x)$ ряда

$$F(x)=C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx \qquad (F)$$

имеет обобщенную производную $F^{[1]}(x)$, равную почти всюду $f(x)$.

В силу этого предложения [1]) данная функция $f(x)$ является обобщенной производной от своего неопределенного интеграла $F(x)$.

92. В начале нашей работы мы определили интегрирование как операцию, обратную дифференцированию; это определение привело нас к понятию неопределенного интеграла как примитивной функции и к задаче отыскания свойства, отличающего неопределенный интеграл от всякой другой примитивной. В настоящей главе мы определили интегрирование как операцию отыскания коэффициентов тригонометрического ряда по его сумме; из предыдущего параграфа мы видим, что это определение приводит попрежнему к понятию неопределенного интеграла как примитивной функции (обыкновенной или обобщенной). При этом определении основным свойством неопределенного интеграла является *свойство быть суммой ряда вида*

$$C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx, \qquad (F)$$

где a_n и b_n стремятся к нулю с $\frac{1}{n}$. Не всякая примитивная функция $F(x)$ обладает этим свойством [158]; отсюда важно найти, к чему приводится это свойство.

Заметив в области $[0, 2\pi]$ тождество

$$\frac{x}{2}=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

---

[1]) Мы не останавливаемся на доказательстве этого предложения, так как это вовлекло бы в слишком детальные рассмотрения и взяло бы много места; вопросы, связанные с этой теоремой, мы имеем в виду сделать предметом другой работы [152].

видим, что необходимым и достаточным условием для того' чтобы функция $F(x)$ была суммой ряда F, является осуществление одновременно двух предельных равенств:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = 0, \\ \lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = k, \end{aligned}\right\} \qquad (u)$$

где k есть постоянное число, равное πa_0. Классические неопределенные интегралы $F(x)$ Римана и Лебега удовлетворяют этим предельным равенствам (u) [[154]]. Отсюда задача отыскания характеристического свойства неопределенного интеграла приводит к задаче:

Найти структурное свойство всех функций $F(x)$, *удовлетворяющих предельным равенствам* (u) [1]).

Можно несколько упростить условия (u), ограничиваясь рассмотрением области $[0, 2\pi]$. В этом случае всегда можно предположить данную функцию $f(x)$ *нечетной*, что дает $a_0 = 0$, $a_n = 0$. В силу этого функция $F(x)$ есть четная функция, и значит, второе условие (u) удовлетворено само собой. Остается лишь первое условие, которое можно написать в виде

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = 0.$$

Именно этот выбор неопределенного интеграла из семейства примитивных $\{F(x)\}$ и был нами указан в первой части работы, в § 51 [[155]].

Заметим, наконец, что, если данная функция $f(x)$ имеет *суммируемую* сопряженную функцию $g(x)$, тогда согласно

[1]) Заметим, что свойства функций, аналогичные свойствам (u), встречаются в математической литературе; так, Адамар называет fonction à écart fini всякую непрерывную функцию $f(x)$, для которой оба интеграла $n\int f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$ и $n\int f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$, взятые между любыми числами a и b, остаются ограниченными по абсолютной величине, когда $n = \infty$ («Thèse», стр. 65).

§ 73 сумма ряда F напишется в виде интеграла Лебега:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(x+\alpha)\ln\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|d\alpha. \tag{9}$$

В этом случае выбор неопределенного интеграла приводит к отысканию структурных свойств функций $F(x)$, могущих быть написанными в форме (9).

93. Теорема, указанная в § 91, сближает результаты главы IV с выводами этой главы. Пусть имеем тригонометрический ряд τ, сходящийся почти всюду к 0 и имеющий коэффициенты, не равные нулю:

$$0=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx. \tag{τ}$$

Интегрируя почленно ряд τ, приходим к функции $\psi(x)$:

$$\psi(x)=C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\beta_n}{n}\cos nx+\frac{\alpha_n}{n}\sin nx,$$

имеющей согласно § 91 обобщенную производную $\psi^{[1]}(x)$, почти всюду равную 0. Допустим, что функция $\psi(x)$ непрерывна. Так как все теоремы § 46 справедливы и для обобщенной производной[1]), то отсюда следует, что *функция $\psi(x)$ не обладает N-свойством.* Это показывает полную аналогию обычного определения примитивной и определения примитивной с помощью тригонометрического ряда [156].

Теория тригонометрических рядов Римана

94. В своей известной работе [2]) «Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe» Риман поставил целью решение следующей задачи: каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы быть суммою сходящегося тригонометрического

[1]) Для обобщенной производной приходится лишь незначительно изменить доказательства теорем § 46.

[2]) Опубликованной в 1854 г. в «Abhandlungen d. K. Ges. d. Wissenschaft zu Göttingen, т. 13. См. также Riemann, Gesammelte Werke, 2-е изд., стр. 227. [В русском издании Полного собрания сочинения Римана (ОГИЗ ГТТИ, 1948) см. часть I, статья XII «О возможности представления функций тригонометрическим рядом», стр. 225. *Ред.*]

ряда? Результат, к которому пришел Риман, пользуясь терминологией теории функций, можно формулировать так:

Для того чтобы функция $f(x)$ была суммой тригонометрического ряда, сходящегося к ней почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Phi(x)$, обладающая свойствами:

1°. *Функция $\Phi(x)$ имеет вторую обобщенную производную Шварца, равную почти всюду $f(x)+C$, где C есть постоянное число* [1]).

2°. *Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет двум предельным равенствам:*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = 0.$$

3°. *Предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Phi(x+\alpha)\cdot \frac{d^2}{d\alpha^2}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

существует почти всюду на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Относительно теории Римана могут быть сделаны два замечания.

Во-первых, мы видим, что свои условия Риман дал в аналитической форме, а не в форме структурных свойств. Без сомнения, структурные свойства были известны и во время Римана, но то, что аналитические факты можно с совершенной полнотой выражать в терминах структурных свойств, это — приобретение новейшего времени, нашедшее себе наиболее яркое выражение в теореме Бэра о функциях класса 1. Вследствие этого, оставаясь в кругу идей современной теории функций действительного переменного, решение задачи, поставленной Риманом, нужно искать не в аналитической форме, а в форме структурных свойств или самой функции $f(x)$, или других функций, так или иначе связанных с ней.

---

[1]) Константа C равна a_0.

Во-вторых, нельзя не заметить, что самое привлечение функции $\Phi(x)$ к решению вопроса не лежит в существе дела, а более или менее случайно. Известно, что непрерывную функцию $\Phi(x)$ мы получим, интегрируя *дважды* почленно тригонометрический ряд, сходящийся к $f(x)$. Это двукратное интегрирование было нужно Риману только для того, чтобы получить из данного тригонометрического ряда другой, сходящийся *абсолютно и равномерно*: во время Римана употребляли преимущественно только такие ряды. Тот факт, что однократное интегрирование почленно данного тригонометрического ряда дает в результате ряд, сходящийся почти всюду, — это не могло быть обнаружено методами времени Римана: теорема Фату, устанавливающая его сходимость, предполагает знание теории меры и интеграла Лебега[1]). Вследствие этого естественно желать изложить условия Римана, прибегнув лишь к однократному интегрированию.

Теорема, указанная в § 91, дает возможность это сделать. Легко видеть, в самом деле, что результат Римана можно представить в следующем виде:

Для того чтобы функция $f(x)$ была суммой тригонометрического ряда, сходящегося к ней почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F(x)$ с интегрируемым квадратом, обладающая свойствами:

1'. *Функция $F(x)$ имеет первую обобщенную производную, равную почти всюду $f(x)+C$, где C есть постоянное число.*

2'. *Функция $F(x)$ удовлетворяет двум предельным равенствам:*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = 0.$$

---

[1]) Вообще, если какой-нибудь ряд, сходящийся почти всюду, *действительно расходился* на всюду плотном множестве точек (хотя бы счетном), методы времени Римана, будучи применены к такому ряду, не могли обнаружить ни его сходимости, ни его расходимости, так как все зависело от точки, на которую попадали; для таких рядов необходима теория меры.

3′. *Предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} F(x+\alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

существует почти всюду на $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

Рассмотрим условия Римана с точки зрения структурных свойств.

Первое условие 1° указывает лишь на то, что данная функция $f(x)$ должна быть *измеримой*. Действительно, мы знаем (§ 15), что всякая измеримая функция $f(x)$ имеет непрерывную примитивную, и значит, всякую измеримую функцию $f(x)$ можно рассматривать как вторую обобщенную производную Шварца от некоторой непрерывной функции $\Phi(x)$.

Второе условие 2°, рассматриваемое с аналитической точки зрения, выражает требование, чтобы коэффициенты тригонометрического ряда, сходящегося к $f(x)$, *стремились к нулю* с $\frac{1}{n}$. В структурном же отношении оно неясно. Несомненно, что оно налагает весьма существенные ограничения на строение функции $f(x)$, потому что не всякая измеримая функция $f(x)$ допускает функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую предельным равенствам 2° [157]. Рассматривая эквивалентное условие 2′ и приняв во внимание значение постоянной C, мы замечаем, что второе условие Римана есть условие (u) существования интеграла (§ 92).

Третье условие 3° представляется наиболее сложным. Но, повидимому, оно не независимо, а является следствием двух первых. Если бы это оказалось верным, тогда всякий тригонометрический ряд, имеющий коэффициенты, стремящиеся к нулю, и суммируемый методом Римана, был бы сходящимся почти всюду. Есть некоторые основания думать, что это предложение справедливо [158].

В тесной связи с вопросом о третьем условии Римана стоит так называемая «задача обращения теоремы Абеля». Пусть функция

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots$$

голоморфна внутри круга $(R=1)$. Согласно теореме Абеля, для того чтобы написанный ряд Тейлора сходился в *индивидуальной* точке $z = e^{i\theta}$ окружности, необходимо, чтобы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

и

2) существовал предел $\lim\limits_{\rho\to 1} f(\rho e^{i\theta})$.

Эти условия необходимы, но далеко не достаточны для сходимости ряда Тейлора в данной точке $e^{i\theta}$ окружности. Следовательно, для индивидуальной точки теорема Абеля необратима, и для того чтобы осуществление второго условия Абеля в данной точке $e^{i\theta}$ влекло сходимость ряда в этой точке, для этого на коэффициенты ряда α_n нужно наложить еще дополнительные условия. Простейшим из них является условие Фату: $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = 0$. Наиболее широкое условие обратимости в индивидуальной точке теоремы Абеля получено недавно Литтлвудом в его весьма интересной работе «The converse of Abel's theorem on power series» [1]) [159].

Но будучи необратимой в индивидуальной точке, теорема Абеля, повидимому, обратима «почти всюду», т. е. осуществление второго условия Абеля почти всюду на окружности ($R = 1$), повидимому, влечет сходимость ряда Тейлора почти всюду на этой окружности. Если это предложение окажется верным, тогда всякий тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, раз он суммируем почти всюду методом Пуассона, будет сходящимся почти всюду [160]. Противоречащих этому примеров пока не найдено.

---

1) Proc. London Math. Soc., сер. 2, 9, стр. 434.

ЛИТЕРАТУРА

Предлагаемый список содержит мемуары, появившиеся с 1900 г. по вопросам, близким к изучаемым в настоящей работе.

Измеримые функции (B) и (L)

Baire. Sur les fonctions de variables réelles, 1889; *Annali di Matematica*, сер. III[a], т. 3, стр. 1—123.

Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement, 1905; *Journal de mathématiques*, 6-я сер., т. 1, стр. 139—216.

Egoroff. Sur les suites de fonctions mesurables, 1911; *Comptes Rendus*, т. 152, стр. 244—246.

Tardini. Sulle funzioni misurabili, 1911; *Giornale di Matematiche di Battaglini*, т. 49, стр. 23—32.

Lusin. Sur les propriétés des fonctions mesurables, 1912; *Comptes Rendus*, т. 154, сер. 1688—1690.

Vitali. Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, 1905; *Bologna*.

Lebesgue. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo, 1907; *Bulletin de la Société mathématique de France*, т. 35, стр. 202—212.

Borel. Leçons sur la théorie des fonctions, 1914; Paris, 2-е издание, стр. 135—256 (критические статьи).

Теории интегрирования

Lebesgue. Intégrale, Longueur, Aire, 1902; *Annali di Matematica*, сер. 3[a], т. 7, стр. 231—359.

Vitali. Sulle funzioni integrali, 1905; *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, т. 40, стр. 753—766.

Vitali. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, 1908; там же, т. 43, стр. 75—92.

Conran. The Riemann integral and measurable sets, 1912; *Proceedings of the Royal Irish Academy*, section A, т. 30, стр. 1—15.

Young. On upper and lower integration, 1905; *Proceedings of the London Mathematical Society*, сер. 2, т. 2, стр. 53—66.

Young. On a new method in the theory of integration, 1911; там же, сер. 2, т. 9, стр. 15—50.

Young. On the General Theory of Integration, 1905; *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, т. 204, A, стр. 221—252.

Borel. Sur la définition de l'intégrale définie, 1910; *Comptes Rendus*, т. 150, стр. 375—377.

Borel. Sur une condition générale d'intégrabilité, 1910; там же, т. 150, стр. 508—511.

Лузин. К основной теореме интегрального исчисления, 1911; *Математический сборник*, т. 28, стр. 266—294.

Denjoy. Sur une extension de l'intégrale de M. Lebesgue, 1912; *Comptes Rendus*, т. 154, стр. 859—862.

Denjoy. Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale, 1912; там же, т. 154, стр. 1075—1078.

Lusin. Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy, 1912; там же, т. 155, стр. 1475—1478.

Borel. Le calcul des intégrales définies, 1914; *Journal de mathématiques*, 6-я сер., т. 8, стр. 159—210.

Расширение понятия производной

Scheeffer. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven, 1884; *Acta mathematica*, т. 5, стр. 52.

Montel. Sur l'existence des dérivées, 1912; *Comptes Rendus*, т. 155, стр. 1478—1480.

Borel. Modèles arithmétiques et analytiques de l'irréversibilité apparente, 1912; там же, т. 154, стр. 1148—1150.

Mme Young. A note on derivates and differential coefficients, 1914; *Acta mathematica*, т. 37, стр. 141—154.

Общая теория тригонометрических рядов

Lebesgue. Sur les séries trigonométriques, 1903; *Annales de l'école normale supérieure*, сер. 3, т. 20, стр. 453—485.

Lebesgue. Sur les intégrales singulières, 1911; *Annales de la Faculté de Toulouse*, сер. 2, т. 10, стр. 25—117.

Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor, 1906; *Acta mathematica*, т. 30, стр. 335—400.

Fatou. Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables, 1906; *Comptes Rendus*, т. 142, стр. 765—767.

Lichtenstein. Ueber das Poisson'sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials, 1911; *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, т. 141, стр. 12—42.

Fejér. Untersuchungen über Fouriersche Reihe, 1903; *Mathematische Annalen*, т. 58, стр. 1—50.

Fejér. Ueber die Fouriersche Reihe, 1907; там же, т. 64, стр. 273—288.

Fejér. Ueber die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, 1913; *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, т. 142, стр. 165—188.

Сходимость тригонометрических рядов

Lebesgue. Recherches sur la convergence des séries de Fourier, 1905; *Mathematische Annalen*, т. 61, стр. 251—280.

Ch. de la Vallée-Poussin. Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier, 1911; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, т. 31, стр. 296—299.

Fejer. Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, 1911; *Annales de l'école normale supérieure*, сер. 3, т. 18, стр. 63—104.

Fejer. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, 1910; *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, т. 138, стр. 22—53.

Fejer. Beispiele steiiger Funktionen mit divergenten Fourierreihe, 1909; там же, т. 137, стр. 1—5.

Fejer. Ueber konjugierte trigonometrische Reihen, 1914; там же, т. 144, стр. 48—56.

Hobson. On the failure of convergence of Fourier's series, 1905; *Proceedings of the London Mathematical Society*, сер. 2, т. 3, стр. 48—62.

Young. On the convergence of a Fourier series and its allied series, 1911; там же, сер. 2, т. 10, стр. 254—272.

Young. Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe, 1911; *Sitzungsberichte der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, 1911, стр. 361—371.

Hardy. On the summability of Fourier's series, 1913; *Proceedings of the London Mathematical Society*, сер. 2, т. 12, стр. 365—372.

Pál. Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier, 1914; *Comptes Rendus*, т. 158, стр. 101—103.

Лузин. К абсолютной сходимости тригонометрических рядов, 1912; *Математический сборник*, т. 28, стр. 461—472.

Denjoy. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques, 1912; *Comptes Rendus*, т. 155, стр. 135—136.

Lusin. Sur l'absolue convergence des séries trigonometriques, 1912; там же, т. 155, стр. 580—582.

Fatou. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, 1913; *Bulletin de la Société mathématique de France*, т. 41, стр. 47.

S. Bernstein. Sur la covergence absolue des séries trigonométriques, 1914; *Comptes Rendus*, т. 158, стр. 1661—1663.

Бернштейн. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, 1914; *Сообщения Харьковского математического общества*, 2-я сер., т. 14, стр. 139—144.

Lusin. Ueber eine Potenzreihe, 1911; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, т. 32.

Steinhaus. Sur une série trigonometrique divergente, 1912; *Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie*, 1912, стр. 223—227.

Steinhaus. Sur un problème de MM. Lusin et Sierpinski, 1913; *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1913, стр. 435—450.

Lusin. Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier, 1913; *Comptes Rendus*, т. 156, стр. 1655—1657.

Единственность изображения тригонометрическим рядом

Young. A note on trigonometrical series, 1909; *Messenger of Mathematics*, т. 38, стр. 44—48.

Ch. de la Vallée-Poussin. Sur l'unicité du développement trigonométrique, 1912; *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe de Sciences*, 1912, стр. 702—718.

F. Riesz. Sur les séries trigonométriques, 1907; *Comptes Rendus*, т. 145, стр. 583—586.

M. Riesz. Ueber summierbare trigonometrische Reihen, 1911; *Mathematische Annalen*, т. 71, стр. 54—75.

Ряд Тейлора на круге сходимости

Pringsheim. Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise, 1900; *Sitzungsberichte der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, т. 30, стр. 37—100.

Pringsheim. Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze, 1901; там же, т. 31, стр. 505—524.

Fatou. La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence, 1904; *Comptes Rendus*, т. 139, стр. 850 - 852.

M. Riesz. Ueber einen Satz des Herrn Fatou, 1911; *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, т. 140, стр. 89—99.

Fejer. La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, 1913; *Comptes Rendus*, т. 156, стр. 46—49.

Коэффициенты рядов

Young. On the nature of the succesions formed by the coefficients of a Fourier series, 1911; *Proceedings of the London Mathematical Society*, сер. 2, т. 10, стр. 344—352.

Young. On the Fourier Constants of a Function, 1912; *Proceedings of the Royal Society of London*, сер. A, т. 85, стр. 14—24.

Young. Sur la généralisation du théorème de Parseval, 1912; *Comptes Rendus*, т. 155, стр. 30—33.

Young. Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée, 1912; там же, т. 155, стр. 472—475.

Toeplitz. Ueber die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen, 1911; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, т. 32, стр. 191—192.

Carathéodory. Ueber den Variabilitätsbereiich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, 1911; там же, т. 32, стр. 193—217.

Carathéodory und Fejer. Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten, und über den Picard-Landauschen Satz, 1911; там же, т. 32, стр. 218—239.

Сходимость рядов по ортогональным функциям

Young and M^{me} Young. On the Theorem of Riesz-Fischer, 1912; *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, т. 44, стр. 49—88.

Jerosch und Weyl. Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten, 1908; *Mathematische Annalen*, т. 66, стр. 67—80.

Weyl. Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, 1909; там же, т. 67, стр. 225—245.

Hobson. On the convergence of series of orthogonal functions, 1913; *Proceedings of the London Mathematical Society*, сер. 2, т. 12, стр. 297—308.

Plancherel. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, 1913; *Comptes Rendus*, т. 156.

Конечные тригонометрические суммы

Lebesgue. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, 1910; *Bulletin de la Société Mathématique de France*, т. 38, стр. 184—210.

Jackson. Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, 1911; Dissertation, Göttingen, 1911.

Jackson. On approximation by trigonometric sums and polynomials, 1912; *Transactions of the American Mathematical Society*, т. 13, стр. 491—515.

Fejer. Sur les polynomes harmoniques quelconques, 1913; *Comptes Rendus*, т. 157, стр. 506—509.

Fejer. Sur les polynomes trigonométriques, 1913; там же, т. 157, стр. 571—574.

F. Riesz. Sur les polynomes trigonométriques, 1914; там же, т. 158, стр. 1657—1661.

Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, 1912; Харьков, 1912, стр. 23.

Н. Н. ЛУЗИН

РАБОТЫ, ПРИМЫКАЮЩИЕ К ДИССЕРТАЦИИ «ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД»

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЯДА ТЕЙЛОРА

Фату[1]) и недавно Рисс[2]) доказали важный результат для теории рядов Тейлора. Именно: если коэффициенты ряда

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} |\alpha_n| = 0,$$

то ряд сходится во всякой точке голоморфности $f(z)$, лежащей на окружности круга сходимости. Сходимость—равномерная на всякой дуге, не содержащей особых точек.

Естественен вопрос: условие голоморфности $f(z)$—существенно ли? Другими словами, существует ли ряд

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

с коэффициентами, стремящимися к 0, и, однако, расходящийся во всякой точке окружности $(R = 1)$?

В тесной связи с этим вопросом стоит другой: существует ли тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к 0, и расходящийся во множестве точек, имеющем меру Лебега, бóльшую нуля?

Последний вопрос был поставлен Фату[3]), но до сих пор оставался без решения.

---

[1]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica, т. 30, стр. 389, 1906.

[2]) M. Riesz, Ueber einen Satz des Herrn Fatou, Crelle's Journal, т. 140, стр. 90, 1911.

[3]) Там же, стр. 398.

В настоящей заметке даются два примера: один — ряда Тейлора с коэффициентами, стремящимися к 0, и расходящегося во всякой точке окружности ($R=1$); другой — тригонометрического ряда с коэффициентами, удовлетворяющими тому же самому условию, и расходящегося всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль [161].

Возьмем полином

$$1+z+z^2+\ldots+z^p \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Тогда, полагая

$$z=e^{i\varphi} \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

имеем

$$|1+z+z^2+\ldots+z^p| = \left|\frac{\sin (p+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right|.$$

Из неравенства

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

получаем для дуги окружности ($R=1$)

$$-\frac{\pi}{p+1} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{p+1}$$

основное неравенство:

$$\left|\frac{\sin (p+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right| = (p+1)\left|\frac{\sin (p+1)\frac{\varphi}{2}}{(p+1)\frac{\varphi}{2}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}(p+1).$$

Делим всю окружность ($R=1$) на ($p+1$) равных частей так, чтобы точка

$$z=1$$

была срединой одной из этих частей. Тогда средины всех этих ($p+1$) частей суть

$$e^{i\frac{2\pi}{p+1}k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Обозначим для краткости

$$1+z+z^2+\ldots+z^p\equiv\Theta_{(p)}(z) \qquad (|z|\leqslant 1).$$

Тогда

$$\left|\Theta_{(p)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{p+1}k}z\right)\right|\geqslant\frac{2}{\pi}(p+1)$$

на дуге

$$\frac{\pi}{p+1}(2k-1)\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{p+1}(2k+1) \qquad (z=e^{i\varphi}).$$

Строим выражение $H_p(z)$ так:

$$H_{(p)}(z)\equiv\Big\{\Theta_{(p)}(z)+z^{(p+1)}\Theta_{(p)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{p+1}}z\right)+$$
$$+z^{(p+1)2}\Theta_{(p)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{p+1}2}z\right)+\ldots$$
$$\ldots+z^{(p+1)k}\Theta_{(p)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{p+1}k}z\right)+\ldots$$
$$\ldots+z^{(p+1)p}\Theta_{(p)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{p+1}p}z\right)\Big\},$$
$$|z|\leqslant 1.$$

Видим, что $H_p(z)$ есть полином степени $p(p+2)$, расположенный по степеням z. Развертывая полином $H_p(z)$, нельзя встретить равных степеней. Все коэффициенты $H_p(z)$ имеют модуль, равный единице.

Полагая для краткости

$$\psi(p)\equiv p(p+2) \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

строим последовательность чисел

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$$

так:

$$\lambda_1=\psi(0)+1=1^2,$$
$$\lambda_1=\psi(0)+\psi(1)+2=1^2+2^2,$$
$$\lambda_3=\psi(0)+\psi(1)+\psi(2)+3=1^2+2^2+3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n=\psi(0)+\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n-1)+n=$$
$$=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тогда ряд

$$
\begin{aligned}
&H_{(0)}(z)+\frac{1}{\sqrt{1}}z^{\lambda_1}H_{(1)}(z)+\\
&\qquad+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{\lambda_2}H_{(2)}(z)+\frac{1}{\sqrt{3}}z^{\lambda_3}H_{(3)}(z)+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)+\ldots
\end{aligned}
$$

есть ряд Тейлора, расположенный по возрастающим степеням z. В самом деле, числа

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$$

подобраны так, что, раскрывая $H_n(z)$ и развертывая ряд, нельзя встретить равных степеней z. Коэффициенты этого ряда при степенях z стремятся к 0. Круг сходимости есть круг $(R=1)$.

Ряд расходится во всякой точке круга $(R=1)$. В самом деле, если ξ есть такая точка, то при делении окружности на $(n+1)$ равных частей ξ попадает по крайней мере в одну из них. Следовательно, в $H_n(z)$ найдется такое $\Theta_{(n)}$, что для

$$z=\xi$$

будем иметь

$$|\Theta_{(n)}|\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1),$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot z^{\lambda_n+k(n+1)}\Theta_{(n)}\right|=+\infty \qquad (z=\xi),$$

т. е. ряд расходится в точке $z=\xi$. Итак:

существует ряд Тейлора

$$\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n|=0,$$

и расходящийся в каждой точке круга сходимости $(R=1)$.

Уже построенным только что рядом Тейлора вполне разрешается проблема Фату о тригонометрическом ряде.

В самом деле, полагая

$$\alpha_n = a_n + ib_n \qquad (z = e^{i\varphi}),$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi) + i \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi),$$

где

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Для каждого φ

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

один из рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi)$$

непременно расходится. Точки расходимости каждого из рядов образуют измеримые множества[1]) [[162]], и если мера одного $\leqslant \pi$, мера другого непременно $\geqslant \pi$. Это решает вопрос.

Но можно видеть более, именно, что первый из тригонометрических рядов расходится всюду, за исключением, быть может, множества точек меры 0.

Из равенства

$$\Theta_{(n)}(e^{i\varphi}) = \left\{ \frac{1}{2} [1 - \cos(n+1)\varphi] + \frac{1}{2} \frac{\sin\varphi \cdot \sin(n+1)\varphi}{1 - \cos\varphi} \right\} +$$

$$+ i \left\{ -\frac{1}{2} \sin(n+1)\varphi + \frac{1}{2} \frac{\sin\varphi \cdot [1 - \cos(n+1)\varphi]}{1 - \cos\varphi} \right\}$$

$$(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

---

[1]) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Mathématiques (S. 6), т. 1, 1905.

получаем, полагая $z=e^{i\varphi}$, $\varphi-\frac{2k\pi}{n+1}=\psi$, $\lambda_n+k(n+1)=\mu_n$,

$$\text{Reel}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n+k(n+1)}\Theta_{(n)}\left(e^{-i\frac{2\pi}{n+1}k}z\right)\right\}=\frac{C}{\sqrt{n}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\psi}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\cos\left[\left(\psi+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+(n+1)\frac{\psi}{2}\right],$$

где

$$|C|<2.$$

Для дуги круга $(R=1)$

$$\frac{\pi}{n+1}(2k-1)\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n+1}(2k+1)$$

имеем

$$|\psi|\leqslant\frac{\pi}{n+1}$$

и, следовательно,

$$\left|\text{Reel}\left\{\ldots\right\}-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|>\frac{\sqrt{n}}{4}\cdot\left|\cos\left[\left(\psi+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+(n+1)\frac{\psi}{2}\right]\right|$$
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

Полагая

$$\psi=\frac{\pi}{n+1}\cdot x \qquad (-1\leqslant x\leqslant+1),$$
$$n=6m \qquad (m=1,2,3,\ldots),$$

превращаем предыдущее неравенство в

$$\left|\text{Reel}\left\{\ldots\right\}-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|>\frac{\sqrt{n}}{4}\cdot\left|\cos\pi x\left[k+\left(\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right]\right|$$
$$(k=0,1,2,3,\ldots,n).$$

В интервале

$$-1\leqslant x\leqslant+1$$

точки, где

$$\left|\cos\pi x\left[k+\left(\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right]\right|\leqslant\sin\frac{1}{\ln n}$$

составляют множество меры

$$<4\cdot\frac{1}{\ln n}.$$

Следовательно, на дуге

$$\frac{\pi}{n+1}(2k-1) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n+1}(2k+1)$$

соответственные точки имеют меру

$$< \frac{16}{n+1} \cdot \frac{1}{\ln n} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

и на всей окружности $(R=1)$

$$< 16 \cdot \frac{1}{\ln n}.$$

Следовательно, вне точек множества меры

$$< 16 \cdot \frac{1}{\ln n}$$

имеет силу неравенство

$$\left| \operatorname{Reel} \left\{ \ldots \right\} - \frac{C}{\sqrt{n}} \right| > \frac{\sqrt{n}}{4} \cdot \sin \frac{1}{\ln n} \infty \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда действительная часть построенного выше ряда Тейлора не может сходиться в множестве точек меры, большей нуля.

Итак:

существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} B_n = 0,$$

и расходящийся всюду, исключая быть может множества точек меры 0.

К ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ [163]

Основная проблема интегрального исчисления: «дана функция $f(x)$. Определить непрерывную функцию $F(x)$, имеющую $f(x)$ своею производною» разрешена введением интеграла Лебега тогда, когда $f(x)$ измерима и суммируема. Обобщение интеграла Лебега по методу Гарнака [164] устанавливает существование первообразной функции $F(x)$ в некоторых случаях, когда суммируемость $f(x)$ не имеет более места.

В общем же случае измеримой, но не суммируемой $f(x)$ вопрос о существовании первообразной функции $F(x)$ оставался открытым. В нижеследующем дается построение первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$ при одном только условии ее измеримости [1]).

Первое, что должно быть приведено в ясность, — это вопрос о бесконечных значениях производной функции. Существует ли непрерывная функция $F(x)$, производная которой $\frac{dF}{dx}$ равна $+\infty$ или $-\infty$ для множества точек меры, большей нуля? Ближайшей целью является доказательство, что такие непрерывные функции не могут существовать.

Пусть $F(x)$ есть непрерывная функция, определенная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть все точки, где $\frac{dF}{dx}$ существует и равна $+\infty$ или $-\infty$, образуют множество $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ всегда есть измеримое множество. Пусть

$$\text{mes}\,\mathfrak{M} > 0.$$

---

[1]) Для неизмеримой $f(x)$ проблема не имеет прямого смысла, так как производная функция есть всегда функция I класса.

Обозначим множество точек, где

$$\frac{dF}{dx} = +\infty,$$

через $\mathfrak{M}_1$ и множество точек, где

$$\frac{dF}{dx} = -\infty,$$

через $\mathfrak{M}_2$. Имеем

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$$

и

$$\operatorname{mes} \mathfrak{M} = \operatorname{mes} \mathfrak{M}_1 + \operatorname{mes} \mathfrak{M}_2.$$

Если

$$\operatorname{mes} \mathfrak{M}_1 = 0,$$

то

$$\operatorname{mes} \mathfrak{M}_2 = \operatorname{mes} \mathfrak{M} > 0,$$

и следовательно, непрерывная функция $F_1(x)$, определенная равенством

$$F_1(x) = -F(x),$$

имеет множество точек, где

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = +\infty$$

меры, большей нуля.

Итак, всегда можно допустить, что для $F(x)$ множество $\mathfrak{M}_1$ имеет меру, большую нуля. Кроме того, для определенности предполагаем, что

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \text{всюду в области} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Это допущение также всегда возможно, так как для функции

$$\frac{1}{2} + \alpha F(x)$$

можно выбрать постоянное число α положительным и достаточно малым.

Так как $\operatorname{mes} \mathfrak{M}_1 > 0$, то всегда можно найти множество P, обладающее свойствами:

1°. P есть совершенное, нигде неплотное множество.

2°. Всякий интервал δ, находящийся в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, или не содержит внутри никакой точки множества P, или содержит часть множества P меры, непременно большей нуля [1]).

3°. P заключено в $\mathfrak{M}_1$.

Выбираем такое множество P раз навсегда и назовем интервалы, образующие множество CP, «касательными» к множеству P интервалами [[166]]. Значения функции $F(x)$ на P определяют непрерывную функцию, построенную только на P. Интерполируем эту функцию линейно в интервалах, касательных к множеству P; если точка $x = 0$ не принадлежит к P, даем в этой точке значение 0 и интерполируем линейно между $x = 0$ и ближайшей точкой P; то же самое делаем и с точкой $x = 1$. Таким образом получаем функцию $\Phi(x)$, обладающую свойствами:

1°. $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2°. $\Phi(x)$ непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3°. $\frac{d\Phi}{dx} = +\infty$ для всех точек P, исключая точки, принадлежащие к концам касательных к P интервалов. Таких точек счетное множество.

4°. $\Phi(x)$ есть линейная функция во всяком касательном интервале.

Возьмем положительное число L, по желанию большое, но определенное. Пусть ξ есть точка P, не принадлежащая к концу касательного интервала. Так как

$$\frac{d\Phi}{dx} = +\infty \quad \text{для} \quad x = \xi,$$

то существует такое число ε, что имеем

$$\frac{\Phi(\xi + h) - \Phi(\xi)}{h} \geqslant L \quad \text{для} \quad |h| \leqslant \varepsilon.$$

В области, определенной неравенством

$$\xi < x < \xi + \varepsilon,$$

---

[1]) Всякое совершенное множество меры > 0 содержит часть, обладающую свойством 2 [[166]].

существует по крайней мере один касательный интервал. Пусть точка ξ' есть левый его конец; аналогично пусть точка ξ'' есть правый конец касательного интервала, лежащего в области

$$\xi-\varepsilon<x<\xi.$$

Соединяя две точки

$$[x=\xi'',\ y=\Phi(\xi'')] \quad \text{и} \quad [x=\xi',\ y=\Phi(\xi')],$$

лежащие на кривой

$$y=\Phi(x),$$

прямою, получаем хорду с угловым коэффициентом $\geqslant L$. Точка находится *внутри* проекции этой хорды на ось x-ов.

Наконец, пусть ξ есть точка P, принадлежащая к концу какого-нибудь касательного интервала; для определенности пусть ξ есть правый конец касательного интервала. Тогда

$$\lim_{n\to 0}\frac{\Phi(\xi+h)-\Phi(\xi)}{h}=+\infty \quad \text{для} \quad h>0.$$

Отсюда можно найти такую точку ξ', принадлежащую к левому концу некоторого касательного интервала, что прямая, соединяющая две точки

$$[x=\xi,\ y=\Phi(\xi)] \quad \text{и} \quad [x=\xi',\ y=\Phi(\xi')],$$

лежащие на кривой $y=\Phi(x)$, имеет опять угловой коэффициент $\geqslant L$. В этом случае точка ξ есть левый конец проекции хорды на ось x-ов.

Рассмотрим множество проекций всех хорд, построенных этим способом. Пользуясь методом, употребленным Лебегом в его доказательстве теоремы Гейне-Бореля, легко видеть, что все множество P можно заключить в *конечное* число таких проекций, не имеющих общей точки (включая концы)[1]. Пусть эти проекции, перенумерованные в области $0\leqslant x\leqslant 1$ по направлению слева направо, суть

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_l \quad (l \text{ зависит от } L).$$

---

[1]) Теорему Гейне-Бореля в обобщении Юнга (Proc. L. M. S., т. 35, стр. 387) здесь отнюдь нельзя приложить, так как теорема требует, чтобы всякая точка ξ множества P была непременно внутри интервала, а не совпадала иногда с концом, как в данном случае.

Точки области $0 \leqslant x \leqslant 1$, лежащие между x_i и x_{i+1} $(i = 1, 2, 3, \ldots, l-1)$, образуют касательный к P интервал, который обозначим через

$$y_i \ (i = 1, 2, 3, \ldots, l-1).$$

Так как функция $\Phi(x)$ линейна в y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l-1)$, то точки хорд и точки кривой

$$y = \Phi(x)$$

для переменного x, находящегося внутри интервалов y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l-1)$, образуют непрерывную полигональную линию

$$y = \Pi(x),$$

состоящую из $2l-1$ звеньев. Пусть угловой коэффициент звена, соответствующего x_i, есть λ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$, и угловой коэффициент звена, соответствующего y_i, есть μ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l-1)$. Ясно, что μ_i зависит только от касательного интервала y_i, но не от числа L (как λ_i).

Возьмем в области $0 \leqslant x \leqslant 1$ произвольный, но определенный интервал δ, с тем лишь условием, чтобы δ содержал внутри хотя одну точку множества P. Тогда по свойству 2 множества P все точки множества P, содержащиеся в интервале δ (включая его концы), образуют совершенное множество меры > 0.

Пусть это множество есть P_1:

$$\operatorname{mes} P_1 = p_1 > 0.$$

Так как

$$0 \leqslant \Pi(x) \leqslant 1,$$

то имеем

$$0 < x_i \lambda_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, l)$$

и

$$x_i \leqslant \frac{1}{\lambda_i} \leqslant \frac{1}{L} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, l).$$

Следовательно, увеличивая достаточно L, можем сделать интервал x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$ как угодно малым.

Пусть

$$L = \frac{6}{p_1}.$$

Тогда

$$x_i \leqslant \frac{p_1}{6} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, l).$$

Отсюда видим, что внутрь δ непременно попадает по крайней мере четыре интервала x_i. Пусть попавшие внутрь δ интервалы суть

$$x_s, \ x_{s+1}, \ x_{s+2}, \ \ldots, \ x_t \qquad (t > s+2).$$

В силу неравенства

$$0 \leqslant \Pi(x) \leqslant 1$$

имеем (проектируя на ось y-ов)

$$\sum_{i=s}^{t-1} x_i\lambda_i + y_i\mu_i = B,$$

где

$$|B| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\sum_{i=s}^{t-1} y_i(-\mu_i) = \sum_{i=s}^{t-1} x_i\lambda_i - B.$$

Так как $x_i\lambda_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$, то имеем неравенство

$$\sum_{i=s}^{t-1} y_i(-\mu_i) \geqslant \sum_{i=s-1}^{t+1} x_i\lambda_i - 4.$$

Угловые коэффициенты λ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$ все $\geqslant L$, поэтому

$$\sum_{i=s}^{t-1} y_i(-\mu_i) \geqslant L \cdot \sum_{i=s-1}^{t+1} x_i - 4 > p_1 \cdot L - 4,$$

или

$$\sum_{i=s}^{t-1} y_i(-\mu_i) > 2.$$

Называя наибольшую положительную величину из ряда

$$-\mu_s, \ -\mu_{s+1}, \ -\mu_{s+2}, \ \ldots, \ -\mu_{t-1}$$

через M, находим

$$\sum_{i=s}^{t-1} y_i(-\mu_i) \leqslant M \cdot \sum_{i=s}^{t-1} y_i \leqslant M.$$

Отсюда

$$M > 2.$$

Следовательно, среди чисел

$$\mu_s, \ \mu_{s+1}, \ \mu_{s+2}, \ \ldots, \ \mu_{t-1}$$

найдется хотя одно такое μ_k, что

$$\mu_k < -2.$$

Итак, приходим к выводу: каков бы ни был интервал δ, лишь бы он содержал внутри хотя одну точку множества P, всегда найдется внутри δ такой касательный интервал y_k, что соответствующая ему часть кривой $y = \Phi(x)$ есть прямая с угловым коэффициентом < -2.

Теперь доказательство теоремы легко может быть доведено до конца.

Нумеруем в каком-нибудь порядке все касательные интервалы к множеству P:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

и соответственные числа

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n, \ldots$$

По доказанному в области $0 \leqslant x \leqslant 1$ есть такой касательный интервал y_{n_1}, что

$$\mu_{n_1} < -2.$$

Так как функция $\Phi(x)$ непрерывна, то всегда можно найти интервал δ_1, обладающий свойствами:

1°. Концы интервала δ_1 суть точки множества P.

2°. Внутри δ_1 имеется хотя одна точка из P.

3°. Пусть через A_1 обозначена точка кривой $y = \Phi(x)$, соответствующая правому концу интервала y_{n_1}, и через a обозначена точка этой же кривой, соответствующая произвольной точке интервала δ_1. Хорда (aA_1) имеет угловой коэффициент < -1.

Раз интервал δ_1 определен, по доказанному, внутри него содержится касательный интервал y_{n_2}, такой, что

$$\mu_{n_2} < -2.$$

Внутри δ_1 вблизи интервала y_{n_2} определяем интервал δ_2:

$$\delta_2 < \frac{1}{2}\delta_1,$$

с теми же самыми свойствами относительно интервала y_{n_2}, какие имеет δ_1 относительно y_{n_1}. В интервале δ_2 определяем y_{n_3} $(\mu_{n_2} < -2)$ и затем внутри δ_2 интервал δ_3 $\left(\delta_3 < \frac{1}{2}\delta_2\right)$ и т. д.

Последовательность интервалов

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$$

такова, что δ_n содержит внутри δ_{n+1} и

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Отсюда $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ определяют одну точку ξ_0. Ясно, что ξ_0 принадлежит к множеству P и не есть конец касательного интервала, так как ξ_0 есть предел точек множества P справа и слева (концов δ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

В силу построения ξ_0 ясно, что мы должны иметь

$$\frac{d\Phi}{d\xi_0} < -1.$$

Но ранее имели

$$\frac{d\Phi}{d\xi_0} = +\infty.$$

Таким образом приходим к противоречию. Итак, имеем результат:

Не существует непрерывной функции $F(x)$, *такой, что*

$$\left|\frac{dF}{dx}\right| = +\infty$$

для множества точек меры, большей нуля.

Наоборот, функции $F(x)$, имеющие

$$\left|\frac{dF}{dx}\right| = +\infty$$

для множества точек меры нуль (хотя бы и мощности континуума), действительно существуют. Легко, в самом деле, дать пример подобной функции.

Пусть имеем в области $0 \leqslant x \leqslant 1$ совершенное, нигде неплотное множество точек P.

Пусть все касательные к P интервалы суть

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots$$

Строим на интервале e_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, как на диаметре, половину окружности в верхней полуплоскости и определяем функцию $f(x)$ условиями:

1°. $f(x) = 0$ для x, принадлежащего к P.

2°. $f(x)$ равна ординате соответствующей полуокружности, если x принадлежит к касательному интервалу.

Ясно, что $f(x)$ есть функция, обладающая свойствами:

1°. $f(x) \geqslant 0$ для x области $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2°. Во всяком интервале есть точки, где $f(x) > 0$.

3°. $f(x)$ непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Рассмотрим теперь функцию $F(x)$, определенную равенством

$$F(x) = \int_0^{x} f(x)\,dx \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Очевидно, что $F(x)$ есть функция, непрерывная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, растущая, не постоянная ни в каком интервале и имеет во всех точках области $0 \leqslant x \leqslant 1$ производную $\frac{dF}{dx}$. Эта производная есть 0 для всякой точки множества P. Отсюда уравнение

$$x = F(y)$$

определяет y как функцию x:

$$y = \Phi(x).$$

Легко видеть, что $\Phi(x)$ есть функция, обладающая свойствами:

1°. $\Phi(x)$ непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant \int_0^1 f(\alpha)\,d\alpha$.

2° $\Phi(x)$ растет во всяком интервале этой области.

3°. $\frac{d\Phi}{dx}$ существуют всюду.

4°. $\frac{d\Phi}{dx} = +\infty$ во всех точках некоторого совершенного множества π меры 0 [167].

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЕ [168]

§ 1. Функции, с которыми имеют дело

Мы предполагаем рассматриваемые нами функции $f(x)$, $g(x), \ldots$ определенными на всей оси OX и с интегрируемым квадратом на ней.

Это означает, что определенные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx, \ldots$ суть конечные числа.

Классические предложения, относящиеся к этим функциям, таковы:

Лемма I. *Произведение $f(x)g(x)$ есть суммируемая функция на всей оси OX, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ есть конечное число.*

Это вытекает из очевидного неравенства

$$2|f(x)|\cdot|g(x)| \leqslant f^2(x)+g^2(x). \tag{1}$$

Лемма II. *Имеем неравенство*

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx. \tag{2}$$

Это вытекает из известного неравенства Шварца.

Лемма III. *При всяких постоянных a и b, $a<b$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx$, рассматриваемый как функция переменного t, есть непрерывная функция в каждой конечной точке t оси OT.*

Доказательство см. у Валле-Пуссена (Cours d'Analyse Infinitésimale, т. II, стр. 163).

Лемма IV. *Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx$, рассматриваемый как функция переменного t, есть ограниченная функция на всей оси OT.*

Доказательство. Это следует из неравенства (1), ибо имеем

$$2\,|f(x)|\,|g(x+t)|\leqslant f^2(x)+g^2(x+t).$$

Интегрируя это неравенство по всей оси OX, имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx\right|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,|g(x+t)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x+t)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx$$

(ч. т. д.). Это также следует из неравенства (2), ибо имеем

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx\right)^2\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx,$$

значит,

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx}\ \text{(ч. т. д.)}.$$

Лемма V. *Интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx$, *рассматриваемый как функция переменного* t, *есть непрерывная функция в каждой конечной точке* t *оси* OT.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{-n} f(x)\, g(x+t)\, dx + \int\limits_{-n}^{+n} f(x)\, g(x+t)\, dx + \int\limits_{+n}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx.$$

Средний интеграл в правой части есть согласно лемме III непрерывная функция во всякой конечной точке t оси OT. Пусть теперь функция $f_n(x)$ определена следующими условиями:

$$f_n(x) = f(x) \quad \text{вне сегмента} \quad [-n \leqslant x \leqslant +n],$$
$$= 0 \qquad \text{на этом сегменте.}$$

Ясно, что можем написать равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{-n} f(x)\, g(x+t)\, dx + \int\limits_{+n}^{\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, g(x+t)\, dx.$$

Согласно лемме II имеем

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, g(x+t)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\, dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x+t)\, dx} = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx}. \quad (3)$$

С другой стороны, имеем согласно определению функции $f_n(x)$ равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-n} f^2(x)\,dx + \int_{+n}^{\infty} f^2(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx - \int_{-n}^{+n} f^2(x)\,dx.$$

Так как имеем, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{+n} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx,$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ имеется столь большое натуральное число N, что при $n > N$ имеем

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx - \int_{-n}^{+n} f^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда для всякого натурального числа n, *превышающего* N, имеем

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Значит, неравенство (3) нам дает

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x+t)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx}.$$

Следовательно, имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx - \int_{-n}^{+n} f(x)\,g(x+t)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx}. \qquad (4)$$

Это показывает, что последовательность функций

$$\int_{-1}^{+1} f(x)g(x+t)\,dx, \quad \int_{-2}^{+2} f(x)g(x+t)\,dx, \ldots$$
$$\ldots, \int_{-n}^{+n} f(x)g(x+t)\,dx, \ldots \qquad (5)$$

равномерно стремится к предельной функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x+t)\,dx$$

на всяком сегменте $[a \leqslant t \leqslant b]$ оси OT.

А так как все члены последовательности (5) согласно лемме III непрерывны на сегменте $[a \leqslant t \leqslant b]$, то отсюда заключаем о непрерывности предельной функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x+t)\,dx$ на $[a \leqslant t \leqslant b]$.

Лемма VI. *Каково бы ни было измеримое множество E, лежащее на оси OX, имеем неравенство*

$$\left(\int_E f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_E f^2(x)\,dx \int_E g^2(x)\,dx. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ определены условиями:

$$f^*(x) = f(x) \quad \text{и} \quad g^*(x) = g(x) \quad \text{на} \quad E,$$
$$f^*(x) = 0 \quad \text{и} \quad g^*(x) = 0 \quad \text{вне} \quad E.$$

Неравенство (2) нам дает

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g^*(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} [f^*(x)]^2\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} [g^*(x)]^2\,dx,$$

ибо, имея *везде* $|f^*(x)| \leqslant |f(x)|$ и $|g^*(x)| \leqslant |g(x)|$, мы замечаем, что функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ суть функции с интегрируемым квадратом на всей оси OX.

Но ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g^*(x)\,dx = \int_E f(x)\,g(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f^*(x)]^2\,dx = \int_E f^2(x)\,dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g^*(x)]^2\,dx = \int_E g^2(x)\,dx.$$

Поэтому предыдущее неравенство переписывается в виде неравенства (6) (ч. т. д.).

Лемма VII. *При всяких постоянных a и b, $a < b$, интеграл $\int_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx$, рассматриваемый как функция переменного t, стремится к нулю, когда $t \to +\infty$ и когда $t \to -\infty$.*

Доказательство. При фиксированном t неравенство (6) переписывается в виде

$$\left(\int_E f(x)\,g(x+t)\,dx\right)^2 \leqslant \int_E f^2(x)\,dx \int_E g^2(x+t)\,dx.$$

Делая E тождественным сегменту $[a \leqslant x \leqslant b]$, имеем

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x+t)\,dx,$$

или

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_{a+t}^{b+t} g^2(x)\,dx.$$

В силу того, что функция $g(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на всей оси OX, для всякого $\varepsilon > 0$ имеется такое натуральное число n, что будет соблюдено неравенство

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx - \int_{-n}^{+n} g^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon,$$

которое можно написать в виде

$$\int_{-\infty}^{-n} g^2(x)\,dx + \int_{+n}^{+\infty} g^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что когда сегмент $[a+t, b+t]$ попадает внутрь интервала $(-\infty, -n)$ или внутрь интервала $(+n, +\infty)$, мы a fortiori должны иметь

$$\int_{a+t}^{b+t} g^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Но первое случится, когда $t < -n-b$, а второе произойдет, когда $t > n-a$. Поэтому при $|t|$, достаточно больших, мы имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{7}$$

что и доказывает стремление к нулю функции $\int_a^b f(x)\,g(x+t)\,dx$ при a и b, $a<b$, фиксированных, когда $t\to+\infty$ и когда $t\to-\infty$.

Лемма VIII. *Интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx$, *рассматриваемый как функция переменного t, стремится к нулю, когда $|t|\to+\infty$.*

Доказательство. Мы уже видели, что для всякого $\varepsilon>0$ имеется натуральное число n столь большое, что будет справедливо неравенство (4):

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx - \int_{-n}^{+n} f(x)\,g(x+t)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx}.$$

С другой стороны, при фиксированном n для достаточно большого $|t|$ мы имеем (7):

$$\left|\int_{-n}^{+n} f(x)\,g(x+t)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon\int_{-n}^{+n} f^2(x)\,dx}$$

и тем более

$$\left|\int_{-n}^{+n} f(x) g(x+t)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}. \qquad (8)$$

Сопоставляя (4) и (8), имеем для $|t|$, достаточно большого:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx} + \sqrt{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx}$$

(ч. т. д.). Как следствие имеем предложение:

Теорема I. *Интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t)\, dx$, *рассматриваемый как функция переменного* t, *есть ограниченная равномерно непрерывная функция на всей оси* OT, *стремящаяся к нулю, когда* $t \to -\infty$ *и когда* $t \to +\infty$, *удовлетворяющая неравенству*

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx}. \qquad (2)$$

В частности, имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x+t)\, dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx. \qquad (9)$$

Так как левая часть неравенства (9) совпадает с правой, когда делаем $t=0$, то неравенство (9) *не может быть улучшено.*

Частный случай. Мы делаем теперь предположение, что $f \equiv g$. Полагая в этом случае

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x+t)\, dx, \qquad (10)$$

мы хотим указать свойства функции $F(t)$.

Из теоремы I мы знаем, что:

1°. *$F(t)$ равномерно непрерывна вдоль всей оси OT.*

2°. *$F(t) \to 0$, когда $|t| \to +\infty$.*

3°. $|F(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx$.

Мы хотим указать еще некоторые свойства функции $F(t)$:

4°. *$F(t)$ есть **четная функция**, т. е. имеем $F(-t) = F(t)$.*

Действительно, мы можем писать

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x+t)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t-t) f(x+t)\,d(x+t) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x^* - t) f(x^*)\,dx^*,$$

где $x^* = x + t$. Итак, изменяя x^* снова на x, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x+t)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x-t)\,dx,$$

т. е.

$$F(-t) = F(t)$$

(ч. т. д.).

Введем удобные обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x+t)\,dx, \\ G(t) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) g(x+t)\,dx \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

для смешанного выражения

$$H(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t)\,dx. \tag{12}$$

В **теореме** I мы дали первоначальные свойства фун

$H(t)$ и $F(t)$, $G(t), \ldots$ и теперь хотим выяснить вопрос, *имеет ли функция $H(t)$ интегрируемый квадрат на всей оси OT.*

Пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^s}$ для $x \geqslant 1$ и $f(x) = 0$ для $x < 1$. Ясно, что мы имеем $f(x) \geqslant 0$ на всей оси OX; мы предполагаем, что $s > 0$ и что $2s = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2s}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \left[\frac{x^{-1-\varepsilon+1}}{-1-\varepsilon+1}\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \left[\frac{x^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\right]_1^{\infty} = \left[\frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}\right]_{+\infty}^{1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Итак, $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси OX. Теперь имеем

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,f(x+t)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,\frac{1}{(x+t)^s}\,dx, \quad \text{где} \quad t > 0.$$

Мы знаем, что $F(t)$ конечна для всякого *фиксированного* t. Полагая $x = t\alpha$, мы имеем

$$F(t) = \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} \frac{1}{t^s\alpha^s}\,\frac{1}{t^s(1+\alpha)^s}\,t\,d\alpha.$$

Вычисляем:

$$F(t) = \frac{t}{t^{2s}} \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} \frac{d\alpha}{[\alpha(1+\alpha)]^s}.$$

Так как $\frac{t}{t^{2s}} = \frac{1}{t^{2s-1}} = \frac{1}{t^{\varepsilon}}$, то

$$F(t) = \frac{1}{t^{\varepsilon}} \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} \frac{d\alpha}{(\alpha^2+\alpha)^s}.$$

Вспоминая, что $t>0$ и большое, мы имеем $\frac{1}{t}<1$. Значит,

$$F(t) > \frac{1}{t^\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{d\alpha}{(\alpha^2+\alpha)^s} > \frac{1}{t^\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{d\alpha}{(2\alpha^2)^s} = \frac{1}{2^s t^\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^{2s}} =$$

$$= \frac{1}{2^s t^\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{2^s t^\varepsilon}\left[\frac{\alpha^{-1-\varepsilon+1}}{-1-\varepsilon+1}\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2^s t^\varepsilon}\left[\frac{\alpha^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2^s t^\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon\alpha^\varepsilon}\right]_{+\infty}^{1} = \frac{1}{\varepsilon t^\varepsilon 2^s}.$$

Отсюда

$$F^2(t) > \frac{1}{\varepsilon^2 4^s t^{2\varepsilon}}$$

и, значит, при $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t)\,dt > \int_1^{+\infty} F^2(t)\,dt > \int_1^{\infty}\frac{dt}{\varepsilon^2 4^s t^{2\varepsilon}} = +\infty.$$

Итак:

имеются $f(x)$ с интегрируемым квадратом на всей оси OX, такие, что функция $F(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,f(x+t)\,dx$ уже не есть функция с интегрируемым квадратом на всей оси OT.

Мы видели, что если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с интегрируемым квадратом на всей оси OX, то тогда функция $H(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x+t)\,dx$ переменного t есть равномерно непрерывная, ограниченная на всей оси OT, стремящаяся к нулю, когда $|t|\to+\infty$, функция.

Но при этом $H(t)$, вообще, не имеет интегрируемого квадрата на всей оси OT. Этому мы видели убедительный пример.

Однако *при более частном предположении относительно функций f или g* интегрируемость квадрата функции H по всей оси OT делается неоспоримой. Именно, мы имеем предложение:

Теорема 2. *Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с интегрируемым квадратом на всей оси OX и если хотя одна из них суммируема на этой оси, тогда функция* $H(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx$ *есть функция с интегрируемым квадратом на всей оси OT.*

Доказательство. Так как $f(x)$ и $g(x)$ имеют интегрируемый квадрат на всей оси OX, произведения $f(x)\, g(x+t)$ и $f(x-t)\, g(x)$ суть суммируемые функции для каждого t оси OT. Поэтому интегралы Лебега

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(x)\, dx$$

суть конечные числа. Но ясно, что оба эти числа равны друг другу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(x)\, dx.$$

Отсюда следует, что функцию $H(t)$ можно писать безразлично в каком виде:

$$H(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x+t)\, dx$$

или

$$H(-t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x+t)\, dx.$$

Поэтому при дальнейшем изучении свойств функций $H(t)$ мы имеем право предполагать, что *функция $f(x)$ есть сум-*

мируемая на всей оси OX. Сделаем же это предположение, написав предварительно:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x+t)\, dx,$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(y+t)\, dy$$

и

$$H^2(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) g(x+t) g(y+t)\, dx\, dy.$$

При любых a и b, $a < b$, мы имеем

$$\int_a^b H^2(t)\, dt = \int_a^b dt \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) g(x+t) g(y+t)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) \int_a^b g(x+t) g(y+t)\, dt\, dx\, dy. \quad (13)$$

Но имеем

$$|g(x+t) g(y+t)| \leqslant \frac{1}{2} [g^2(x+t) + g^2(y+t)].$$

Значит,

$$\left| \int_a^b g(x+t) g(y+t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |g(x+t) g(y+t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_a^b g^2(x+t)\, dt + \frac{1}{2} \int_a^b g^2(y+t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x+t)\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(y+t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)\, du.$$

Следовательно,

$$\int_a^b H^2(t)\,dt \leqslant \int\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|f(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)\,du\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)\,du \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \right\}^2.$$

Так как правая часть не зависит от a и b, то мы можем сделать $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$ без изменения правой части. Отсюда видно, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt$$

есть *конечное число*, т. е. $H(t)$ имеет интегрируемый квадрат на всей оси OT.

Делая в равенстве (1) $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$, мы, очевидно, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+t)\,g(y+t)\,dt\,dx\,dy.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x+t)\,g(y+t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,g(y-x+u)\,du = G(y-x).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y)\, G(y-x)\,dx\,dy. \qquad (14)$$

Вспомним, что функция $G(t)$ определяется равенством

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,g(x+t)\,dt$$

и что, ввиду того что $g(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом по всей оси OX, функция $G(t)$ есть равномерно непрерывная по всей оси OT, функция, стремящаяся к нулю при $|t| \to +\infty$.

Большего мы о функции $G(t)$ ничего не знаем, не делая никаких иных предположений о функции $g(x)$, кроме того, что $g(x)$ имеет интегрируемый квадрат на всей оси OX, ибо мы знаем, что $G(t)$ может иметь убывание порядка $\frac{1}{t^\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, малое как угодно постоянное число. В этих условиях $G(t)$ может оказаться не суммируемой на всей оси OT и иметь одновременно не суммируемый квадрат на этой оси.

Сделаем, впрочем, тривиальное замечание: ввиду того что $G(t) \to 0$, когда $|t| \to +\infty$, ясно, что если $G(t)$ суммируема на всей оси OT, то $G^2(t)$ тоже, т. е. суммируемая на OT функция $G(t)$ имеет интегрируемый квадрат на этой оси.

Лемма. *Если функция $g(x)$ суммируема на всей оси OX, тогда $G(t)$ суммируема на всей оси OT.*

Доказательство. Имеем по определению

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, g(x+t)\, dx.$$

Поэтому

$$|G(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, |g(x+t)|\, dx.$$

Отсюда

$$\int_a^b |G(t)|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \int_a^b |g(x+t)|\, dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+t)|\, dt\, dx.$$

Но ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b |G(t)|\,dt \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx\right)^2.$$

Так как $g(x)$ предположена суммируемой на всей оси OX, то левая часть этого неравенства остается меньше, чем фиксированное положительное число при любых a и b. Делая $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|\,dt \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx\right)^2,$$

что доказывает суммируемость функции $G(t)$ на всей оси OT.

Замечание. Доказанный критерий есть лишь ***достаточный*** для суммируемости функции $G(t)$ на оси OT. Но он вовсе не есть ***необходимый***, ибо $G(t)$ может оказаться суммируемой на оси *OT без того, чтобы производящая функция $g(x)$ была суммируемой на оси OX.*

§ 2. Основное неравенство

Имеем важное предложение:

Теорема 3. *Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют интегрируемый квадрат на всей оси OX, если к тому же $f(x)$ суммируема на этой оси, а функция $G(t)$ суммируема на всей оси OT, то тогда мы имеем основное неравенство:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(u)|\,du.$$

Доказательство. Обратимся к равенству (14):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y)\, G(y-x)\,dx\,dy,$$

доказанному в предположении суммируемости функции $f(x)$ на всей оси OX, причем обе функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на ней интегрируемый квадрат.

Вводим теперь гипотезу о суммируемости функции $G(t)$ на оси OT. Имеем из равенства (14) неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt \leqslant \int\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|f(y)|\,|G(y-x)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}[f^2(x)+f^2(y)]\,|G(y-x)|\,dx\,dy =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} f^2(x)\,|G(y-x)|\,dx\,dy + \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} f^2(y)\,|G(y-x)|\,dx\,dy.$$

Переменим местами буквы x и y в правом интеграле. Так как функция $G(t)$ есть четная, т. е. $G(-t)=G(t)$, то мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t)\,dt \leqslant \int\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,|G(y-x)|\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(y-x)|\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(u)|\,du \tag{15}$$

(ч. т. д.).

Сделаем важное приложение теоремы 3. Мы предполагаем для этого:

1° что $f(x)$ есть какая-нибудь суммируемая функция на оси OX,

2° что $f(x)$ имеет на оси OX интегрируемый квадрат,

3° что производящая функция $g_\varepsilon(x)$ определяется условиями:

$g_\varepsilon(x)=0$ на интервале $(-\varepsilon < x < +\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$,

$g_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}$ вне этого интервала.

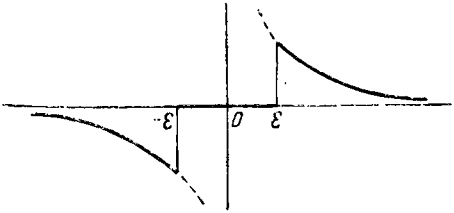
Геометрическое изображение функции $g_\varepsilon(x)$ дано на чертеже 1.

Мы видим, что производящая функция $g_\varepsilon(x)$ имеет свойства:

а) $g_\varepsilon(x)$ есть *ограниченная* функция на всей оси OX, ибо

$$|g_\varepsilon(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для всякого } x,$$

б) $g_\varepsilon(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом на оси OX.



Черт. 1.

Вычислим функцию $G_\varepsilon(t)$, порожденную производящей функцией $g_\varepsilon(x)$. Имеем по определению

$$G_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)\, g_\varepsilon(x+t)\, dx.$$

Так как $G_\varepsilon(t)$ есть функция *четная*, достаточно вычислить ее для $t \geqslant 0$.

На чертеже 2 кривая $y = g_\varepsilon(x)$ сплошная, а кривая $y = g_\varepsilon(x+t)$ пунктирная.

Сообразно самому определению производящей функции $g_\varepsilon(x)$ нам приходится рассматривать *два случая.*

Случай I, когда $t > 2\varepsilon$. В этом случае $-t < 2\varepsilon$, и мы видим, что защитные интервалы $(-t-\varepsilon, -t+\varepsilon)$ и $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ не перекрываются, причем первый из них лежит *налево* от второго (черт. 2).

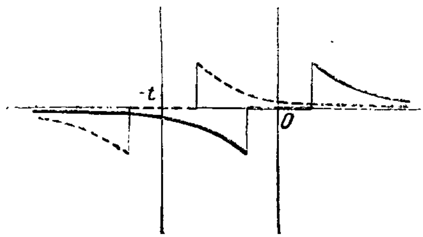
Следовательно, мы в этом случае имеем

$$G_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{-t-\varepsilon} \frac{1}{x}\,\frac{1}{x+t}\,dx + \int_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,\frac{1}{x+t}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\frac{1}{x+t}\,dx.$$

Для вычисления имеем

$$\frac{1}{x(x+t)}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right).$$

Пусть a чрезвычайно большое отрицательное число, а b — чрезвычайно большое положительное число. Впоследствии мы сделаем $a\to-\infty$ и $b\to+\infty$.



Черт. 2.

Первый интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-t-\varepsilon}\frac{dx}{x(x+t)}$ сначала пишем в виде

$$\int\limits_{a}^{-t-\varepsilon}\frac{dx}{x(x+t)},$$

или

$$\int\limits_{a}^{-t-\varepsilon}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)dx=\frac{1}{t}\int\limits_{a}^{-t-\varepsilon}\frac{d(-x)}{-x}-\frac{1}{t}\int\limits_{a}^{-t-\varepsilon}\frac{d(-t-x)}{-t-x}=$$

$$=\frac{1}{t}\left[\ln(-x)\right]_{a}^{-t-\varepsilon}-\frac{1}{t}\left[\ln(-t-x)\right]_{a}^{-t-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{t+\varepsilon}{-a}\right)-\frac{1}{t}\ln\frac{\varepsilon}{-t-a}=$$

$$=\frac{1}{t}\ln\frac{(t+\varepsilon)(-t-a)}{(-a)\varepsilon}=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{-t-a}{-a}\right)+\frac{1}{t}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Делая $a\to-\infty$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{-t-\varepsilon}\frac{dx}{x(x+t)}=\frac{1}{t}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}>0. \qquad (16)$$

Второй интеграл

$$\int_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x(x+t)}.$$

Его пишем в виде

$$\int_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)dx = \frac{1}{t}\int_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{d(-x)}{-x} - \frac{1}{t}\int_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{d(x+t)}{x+t} =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\ln(-x)\right]_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} - \frac{1}{t}\left[\ln(x+t)\right]_{-t+\varepsilon}^{-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{t}\ln\frac{\varepsilon}{t-\varepsilon} - \frac{1}{t}\ln\frac{t-\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{t}\ln\frac{\varepsilon}{t-\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{t-\varepsilon} = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\varepsilon}{t-\varepsilon}\right)^2 = \frac{2}{t}\ln\frac{\varepsilon}{t-\varepsilon} < 0. \qquad (17)$$

Третий интеграл $\int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{x+t}\,dx$. Пишем его в виде

$$\int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)dx$$

и заменяем интегралом

$$\int_{+\varepsilon}^{b} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+t}\right)dx,$$

или

$$\frac{1}{t}\int_{+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x} - \frac{1}{t}\int_{+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x+t} =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\ln x\right]_{+\varepsilon}^{b} - \frac{1}{t}\left[\ln(x+t)\right]_{+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{t}\ln\frac{b}{\varepsilon} - \frac{1}{t}\ln\frac{b+t}{\varepsilon+t} =$$

$$= \frac{1}{t}\ln\left(\frac{b}{b+t}\right)\left(\frac{\varepsilon+t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{t}\ln\frac{b}{b+t} + \frac{1}{t}\ln\frac{\varepsilon+t}{\varepsilon}.$$

Делая $b \to +\infty$, имеем

$$\int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+t)} = \frac{1}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} > 0. \tag{18}$$

Складывая первый, второй и третий интегралы, согласно формулам (16), (17) и (18) мы получаем

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(t) &= \frac{1}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{2}{t} \ln \frac{\varepsilon}{t-\varepsilon} + \frac{1}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{t} \ln \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{(t-\varepsilon)^2} \cdot \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{t} \ln \frac{(t+\varepsilon)^2}{(t-\varepsilon)^2} = \\ &= \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{t-\varepsilon} > 0 \quad \text{для} \quad t > 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{19}$$

Случай II, когда $0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon$. В этом случае защитные интервалы $(-t-\varepsilon, \ -t+\varepsilon)$ и $(-\varepsilon, \ +\varepsilon)$ перекрываются, и средняя часть интеграла $G_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x) g_\varepsilon(x+t)\, dx$ перестает существовать. Значит, имеем лишь

$$G_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{-t-\varepsilon} \frac{1}{x(x+t)}\, dx + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x(x+t)}\, dx.$$

Итак, в этом случае *второго интеграла уже нет*. А первый интеграл уже вычислен по формуле (16), третий же вычислен по формуле (18).

Поэтому, складывая (16) и (18), сразу находим

$$G_\varepsilon(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \geqslant 0 \tag{20}$$

$$\text{для } 0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon.$$

Заключение. Четная функция $G_\varepsilon(t)$, равномерно непрерывная на всей оси OT и стремящаяся к нулю, когда $|t| \to +\infty$, есть функция *положительная* на всей оси OT, ибо мы имеем

$$G_\varepsilon(t) = \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{на сегменте } [0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon],$$

$G_\varepsilon(t) = \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{t-\varepsilon}$ вправо от него, т. е. на $(2\varepsilon \leqslant t < +\infty)$.

Очень важно увидеть, что $G_\varepsilon(t)$ есть функция, *суммируемая* на всей оси OT. Ввиду положительности $G_\varepsilon(t)$ вычисляем прямо ее интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\varepsilon(t)\, dt = 2 \int_0^{+\infty} G_\varepsilon(t)\, dt =$$

(ибо $G_\varepsilon(t)$ есть функции *четная*)

$$= 2 \int_0^{2\varepsilon} G_\varepsilon(t)\, dt + 2 \int_{2\varepsilon}^{+\infty} G_\varepsilon(t)\, dt =$$

$$= 2 \int_0^{2\varepsilon} \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\, dt + 2 \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{2}{t} \ln \frac{t+\varepsilon}{t-\varepsilon}\, dt.$$

Полагая в обоих интегралах

$$t = \varepsilon \cdot u,$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\varepsilon(t)\, dt = 2 \int_0^2 \frac{2\varepsilon}{\varepsilon u} \ln \frac{\varepsilon u + \varepsilon}{\varepsilon}\, du + 2 \int_2^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon u} \ln \frac{\varepsilon u + \varepsilon}{\varepsilon u - \varepsilon}\, du =$$

$$= 4 \int_0^2 \frac{1}{u} \ln (u+1)\, du + 4 \int_2^{+\infty} \frac{1}{u} \ln \frac{u+1}{u-1}\, du = A,$$

где A есть абсолютная константа, положительная и *совершенно не зависящая от* ε.

Таким образом, положительная функция $G_\varepsilon(t)$ оказывается *суммируемой на всей оси OT*, причем определенный интеграл от нее, взятый по всей оси OT, *оказался не зависящим от* ε.

Обращаясь к теореме 3, мы получаем важное предложение:

Теорема 4. *Если $f(x)$ есть суммируемая на всей оси OX функция с интегрируемым квадратом на ней,* *тогда, обозначая через* $g_\varepsilon(x)$ *функцию, равную нулю на* $[-\varepsilon \leqslant x \leqslant +\varepsilon]$ *и равную* $\frac{1}{x}$ *на* $(-\infty, -\varepsilon)$ *и на* $(\varepsilon, +\infty)$, *мы имеем*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x+t)\, dx\right]^2 dt < A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx, \qquad (21)$$

где A *есть положительная, абсолютная константа, совершенно не зависящая от* ε *и от функции* $f(x)$.

§ 3. Теоретико-функциональная часть

До сих пор мы вели рассмотрение чисто *аналитического* характера, т. е. в духе тех рассуждений, на которых строят классический *математический анализ*. Теперь мы переходим к методам, образующим существенную часть *теории функций действительного переменного*.

Целью является предложение: *если* $f(x)$ *суммируема и с интегрируемым квадратом на всей оси* OX, *то тогда почти всюду на оси* OT *имеется предел*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx.$$

Примечание. Мы пишем не $g_\varepsilon(x+t)$, а $g_\varepsilon(x-t)$, потому что при изменении по всей оси OT переменного t это безразлично.

1. Мы исходим из неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx\right]^2 < A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx, \qquad (21)$$

где A есть абсолютная константа, положительная и совершенно не зависящая ни от ε, ни от функции $f(x)$.

Из этого неравенства следует, что неравенство

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx\right| \geqslant K \qquad (22)$$

может осуществляться лишь на *замкнутом* множестве E, лежащем на оси OT, мера которого $\operatorname{mes} E$, удовлетворяет неравенству

$$K^2 \operatorname{mes} E < A \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx,$$

т. е. имеем

$$\operatorname{mes} E < \frac{A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}{K^2}.$$

В целях дальнейшего мы берем положительное число K равным

$$K = \sqrt{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}} = \sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}.$$

Отсюда

$$K^2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx},$$

и, значит, *вне замкнутого множества* E на оси OT мы имеем *неравенство*

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g_\varepsilon(x-t)\,dx\right| < \sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}, \tag{23}$$

причем мера $\operatorname{mes} E$ *замкнутого множества* E *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{mes} E < A \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}. \tag{24}$$

В справедливости того, что E есть именно *замкнутое* множество, а не какое-нибудь иное, легко убедиться, приняв во внимание, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g_\varepsilon(x-t)\,dx$ есть *равномерно непрерывная* функция переменного t на всей оси OT.

2. Мы отправляемся от предположения, *ложность* которого обнаружим в дальнейшем, что существование конечного предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx$$

не имеет места на некотором множестве M меры $\mu > 0$, лежащем на оси OT.

Если τ есть точка этого множества, тогда функция переменного ε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \tag{25}$$

есть либо стремящаяся к бесконечности, либо колеблющаяся, когда $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\omega(\tau)$ колебание этой функции, когда положительное ε стремится к нулю. Имеем

$$\omega(\tau) > 0. \tag{26}$$

Функция $\omega(\tau)$ определена в каждой точке τ измеримого множества M. Поэтому, приняв во внимание, что функция $\omega(\tau)$ входит в классификацию Бэра, множество $\tilde{M}$ точек τ, где имеем

$$\omega(\tau) \geqslant 2\theta \quad (\theta > 0 \text{ — \textit{фиксированное число}}),$$

есть множество измеримое, составляющее *часть* множества M:

$$\tilde{M} \subset M.$$

Если θ достаточно мало, измеримое множество $\tilde{M}$ будет *положительной* меры, т. е. $\operatorname{mes} \tilde{M} > 0$.

В результате мы можем найти такое *совершенное приведенное* множество P *положительной меры*

$$\operatorname{mes} P > 0,$$

в каждой точке τ которого имеем

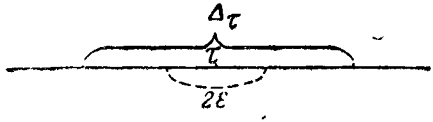
$$\omega(\tau) > 2\theta, \quad \text{где } \theta > 0 \text{ — фиксированное число.}$$

Отсюда следует что каково бы ни было малое положительное число η, $\eta > 0$, существует такой сегмент Δ_τ, имеющий центром точку τ, и длины, меньшей чем η, что имеем

$$\left| \int\limits_{\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| > 0, \tag{27}$$

где интегрирование совершается над переменным x по сегменту Δ_τ. Здесь число ε, $\varepsilon > 0$, очень мало сравнительно с η, так как η можно произвольно задать, а ε подбирается $\varepsilon < \eta$ (черт. 3).

Заметим, что точка τ, для которой удовлетворяется неравенство (27), есть произвольная точка совершенного приве-



Черт. 3.

денного множества Q, являющегося частью совершенного множества P и *имеющего меру* $\operatorname{mes} Q$, *сколь угодно близкую к мере* $\operatorname{mes} P$ *совершенного множества* P.

Все дело в том, что мы можем взять фиксированное число ε достаточно малым, $\varepsilon > 0$.

3. Сопоставим неравенства (23) и (27). Законность такого сопоставления будет явствовать из того, что, не изменяя ни фиксированного множества Q, ни фиксированного числа θ, мы можем предположить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx$ сколь угодно малым. В дальнейшем, это будет доказано строго. Пока же зная, что неравенство

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| < \sqrt[4]{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx} \tag{23}$$

соблюдается всюду *вне* замкнутого множества E меры $\operatorname{mes} E$, удовлетворяющей неравенству

$$\operatorname{mes} E < A \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}, \tag{24}$$

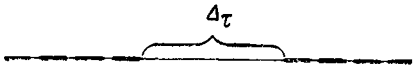
и зная, что на *фиксированном* совершенном приведенном множестве Q всюду соблюдается для всякой его точки τ неравенство

$$\left| \int\limits_{\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| > \theta, \tag{27}$$

мы выводим заключение, что *на множестве Q вне замкнутого множества E* имеем одновременно

$$\left.\begin{aligned} &\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| < \sqrt[4]{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx} \\ &\text{и} \\ &\left| \int\limits_{\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| > \theta, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где τ принадлежит к множеству-разности $Q-E$, будучи *любой* его точкой.



Черт. 4.

Из неравенств (28) следует, что, выбросив из оси OT сегмент Δ_τ (черт. 4) и обозначив оставшуюся часть (пунктирную) через $C\Delta_\tau$, мы имеем

$$\left| \int\limits_{C\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| > \theta - \sqrt[4]{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}, \tag{29}$$

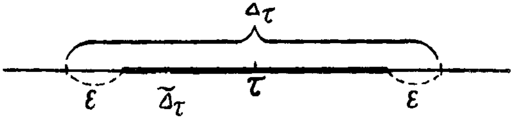
где значок $C\Delta_\tau$ внизу интеграла обозначает область, пробегаемую переменным интегрирования x, а τ обозначает любую точку множества-разности $Q-E$.

4. Мы имеем право предположить суммируемую функцию $f(x)$ *положительной*, ибо всякая суммируемая функция есть разность двух неотрицательных суммируемых функций, из которых по крайней мере одна уничтожается в каждой точке. Поэтому имеем право предполагать квадрат

функции $f(x)$ тоже суммируемым по всей оси OX. Рассмотрим интеграл

$$\int_{C\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx,$$

где переменное t движется по сегменту Δ_τ. Это есть непрерывная функция, определенная на этом сегменте; ε — число фиксированное. Ясно, что эта функция есть *монотонная* и *возрастающая* функция переменного t на *уменьшенном* сегменте $\widetilde{\Delta}_\tau$, полученном отрезанием от сегмента Δ_τ справа и слева частей длины ε.



Черт. 5.

Отсюда следует, что раз мы в центре τ сегмента Δ_τ имеем неравенство (29):

$$\left| \int_{C\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-\tau)\, dx \right| > \theta - \sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}, \tag{29}$$

то для t, находящегося *в одной из половин* (правой или левой) *сегмента* $\widetilde{\Delta}_\tau$, *мы и подавно имеем неравенство*

$$\left| \int_{C\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx \right| > \theta - \sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}. \tag{30}$$

А так как всюду вне E мы имеем неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx \right| < \sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}, \tag{23}$$

то отсюда следует, что имеем

$$\left| \int_{\Delta_\tau} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx \right| > \theta - 2\sqrt[4]{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx} \tag{31}$$

для всякого t *на одной из половин сегмента* $\widetilde{\Delta}_\tau$ *вне множества* E.

5. Неравенство (31) замечательно вот в каком отношении: *оно не изменится, если мы сделаем функцию* $f(x)$ *равной нулю вне сегмента* Δ_τ, ибо мы, как увидим дальше, можем предположить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx$ очень малым, так что будем иметь

$$\theta - 2\sqrt[4]{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx} > \frac{1}{2}\theta. \tag{32}$$

Итак, предполагая $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx$ малым настолько, что соблюдается неравенство (32), мы можем писать неравенство (31) в виде

$$\left|\int\limits_{\Delta_\tau} f(x)\,g_\varepsilon(x-t)\,dx\right| > \frac{\theta}{2}. \tag{33}$$

И так как теперь мы предполагаем $f(x)$ равной нулю *вне* сегмента Δ_τ, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\Delta_\tau} f(x)\,g_\varepsilon(x-t)\,dx\right)^2 dt < A\int\limits_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx. \tag{34}$$

Отсюда следует, что неравенство (33) возможно лишь на множестве меры

$$< \frac{A\int\limits_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx}{\frac{\theta^2}{4}} = \frac{4A}{\theta^2}\int\limits_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx. \tag{35}$$

Этот неожиданный результат показывает, что неравенство (31), идентичное неравенству (33), соблюдаясь на множестве-разности

$$[\widetilde{\Delta}_\tau] - E,$$

где $[\widetilde{\Delta}_\tau]$ обозначает *половину сегмента* $\widetilde{\Delta}_\tau$, обязано иметь ***мерой*** этого множества-разности самое большее

$$\frac{4A}{\theta^2}\int\limits_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx.$$

6. Итак, мы пришли к заключению, что мера множества-разности $[\widetilde{\Delta}_\tau]-E$, т. е. $[\widetilde{\Delta}_\tau]-E\cdot[\widetilde{\Delta}_\tau]$, удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}\{[\widetilde{\Delta}_\tau]-E\cdot[\widetilde{\Delta}_\tau]\}<\frac{4A}{\theta^2}\int\limits_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx. \tag{36}$$

Заметим теперь, что в этом неравенстве точка τ пробегает все множество-разность $Q-E$, где Q есть *фиксированное* приведенное [169] совершенное множество, а E есть замкнутое множество меры $\operatorname{mes} E$, удовлетворяющей неравенству

$$\operatorname{mes} E<A\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}. \tag{24}$$

Заметив это, применим теорему Гейне-Бореля: всякая точка τ приведенного совершенного множества R, содержащегося в множестве разности $Q-E$ и имеющего меру $\operatorname{mes} R$, сколь угодно близкую к мере множества $Q-E$ и, следовательно, заведомо удовлетворяющую неравенству

$$\operatorname{mes} R>\operatorname{mes} Q-2\operatorname{mes} E>\operatorname{mes} Q-2A\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}, \tag{37}$$

есть центр сегмента $\widetilde{\Delta}_\tau$. Отсюда все множество R может быть покрыто *конечным числом* таких сегментов $\widetilde{\Delta}_\tau$. По теореме Данжуа *три* сегмента, имеющие общую *внутреннюю* точку, таковы, что один из них содержится в сумме двух других.

Отсюда следует, что система *неперекрывающихся* сегментов $\widetilde{\Delta}_\tau$ может быть выбрана так, чтобы она покрыла часть совершенного множества R, имеющую меру, заведомо превышающую (или равную) половине меры $\operatorname{mes} R$ самого множества R.

Но, переписывая неравенство (24) в виде

$$\operatorname{mes}[\tilde{\Delta}_\tau] < \frac{4A}{\theta^2} \int_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx + \operatorname{mes}\{E \cdot [\tilde{\Delta}_\tau]\}, \tag{38}$$

мы видим, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{mes} R < \sum \frac{4A}{\theta^2} \int_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx + \sum \operatorname{mes}\{E \cdot [\tilde{\Delta}_\tau]\},$$

где знак суммы $\sum$ распространяется на *все* неперерывающиеся сегменты Δ_τ рассматриваемой системы.

Так как ясно, что

$$\sum \int_{\Delta_\tau} f^2(x)\,dx < \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx,$$

и так как

$$\operatorname{mes} E < A \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx}, \tag{24}$$

то мы заключаем отсюда ввиду произвольной малости числа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx,$$

что

$$\operatorname{mes} R$$

есть число сколь угодно малое.

Значит, имеем

$$\operatorname{mes} R = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mes} M = 0,$$

и значит, имеем предложение:

Основная теорема. *Если $f(x)$ есть суммируемая функция на оси OX с интегрируемым квадратом на ней, то интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\,dx$$

стремится к определенному пределу, когда $\varepsilon \to 0$, *и это почти всюду на оси* OT.

Следствие. *Если* $f(x)$ *есть функция с интегрируемым квадратом, определенная только на сегменте* $[a \leqslant x \leqslant b]$, *тогда предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x)\, g_\varepsilon(x-t)\, dx$$

существует почти всюду на $[a \leqslant t \leqslant b]$ (ибо функцию $f(x)$ можно пополнить определением на всей оси OX, полагая $f(x) = 0$ вне сегмента $[a \leqslant x \leqslant b]$).

7. Нам осталось лишь доказать, что *без изменения множества* M *и числа* θ *мы имем право предполагать число* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx$ *сколь угодно малым.*

Доказательство. Мы отправляемся от заданной $f(x)$, для которой число $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx$ может быть значительным. Постараемся найти такую функцию $\Phi(x)$, чтобы разность

$$f(x) - \Phi(x)$$

не изменила ни множества M, ни числа θ и чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - \Phi(x)]^2\, dx$$

оказался сколь угодно малым.

Ясно, что этого мы сразу же достигли бы, если бы функция $\Phi(x)$, нужная нам для наших целей, оказалась бы *постоянной величиной* на отрезках, на которые разбилась надлежащим образом вся ось OX. Но как раз это можно сделать, ибо это — вещь вполне тривиальная.

Прежде всего строим совершенное множество L, такое, на котором измеримая функция $f(x)$ *непрерывна* и чтобы интеграл Лебега по его дополнению CL

$$\int_{CL} f^2(x)\, dx < \sigma$$

был бы меньше наперед заданного числа σ. Сделать это очень легко.

Далее, найдя такое нужное нам совершенное (нигде не плотное) множество L, охватываем его системой попарно непересекающихся сегментов

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_k, \ldots,$$

уходящих с безграничным возрастанием индекса k в бесконечность.

Каждый из этих сегментов содержит точки множества L; берем сегмент Δ_k и обозначаем ξ_k какую-нибудь содержащуюся в нем точку совершенного множества L.

Определяем теперь $\Phi(x)$ следующим образом:

1. $\Phi(x) = 0$ вне сегментов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_k, \ldots$
2. $\Phi(x) = f(\xi_k)$ на сегменте Δ_k, где $k = 1, 2, 3, \ldots$

Ясно, что сегменты $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ можно выбрать столь мелкими, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - \Phi(x)]^2 \, dx$$

оказался сколь угодно малым. Обозначая

$$f^*(x) = f(x) - \Phi(x),$$

мы и ведем далее над $f^*(x)$ все наши рассуждения (ч. т. д.).

ОБ ОДНОМ ВИДЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

1. Известно, что сходимость тригонометрического ряда Фурье для суммируемой функции $F(x)$ сводится к сходимости интеграла Дирихле

$$I_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} F(x_0 + \alpha) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha \tag{1}$$

при n, стремящемся к бесконечности; здесь ε_1 и ε_2 — два положительных числа, отличных от нуля и как угодно малых.

Разобьем этот интеграл на две части:

$$I_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{0} F(x_0 + \alpha) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\varepsilon_2} F(x_0 + \alpha) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \bar{I_n}(x_0) + \overset{+}{I_n}(x_0), \tag{2}$$

и рассмотрим одну из них, например интеграл $\overset{+}{I_n}(x_0)$.

Известно, что если $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением на интервале $(x_0, x_0 + \eta)$, где $\eta > 0$ как угодно мало, то интеграл $\overset{+}{I_n}(x_0)$ стремится к $\frac{F(x_0+0)}{2}$, когда n стремится к бесконечности. Кроме того, известно, что если $F(x)$ интегрируема по Лебегу на $(0, 2\pi)$, то последовательность

$$I_1^+(x_0),\ I_2^+(x_0),\ \ldots,\ I_n^+(x_0),\ \ldots$$

всегда суммируема процессом средних арифметических (Фейера) и имеет своим пределом $\frac{F(x_0)}{2}$ почти всюду на $(0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi)$.

Поэтому возникает вопрос, для всякой ли функции $F(x)$, непрерывной и периодической на $(0, 2\pi)$, интеграл $\overset{+}{I_n}(x_0)$ всегда стремится почти всюду к $\frac{F(x_0)}{2}$, когда n стремится к бесконечности [170].

Мы дадим *отрицательный* ответ на этот вопрос.

2. С этой целью возьмем непрерывную периодическую функцию

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \sin \lambda_n x, \tag{3}$$

где

$$\delta_n=\frac{1}{n^n}, \quad \lambda_n=n^{n^n} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

и рассмотрим интеграл

$$U_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(x+\alpha)-F(x-\alpha)}{1}\,\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{4}$$

Имеем

$$F(x+\alpha)-F(x-\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}2\delta_n\cos\lambda_n x\sin\lambda_n\alpha,$$

откуда

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2\delta_k\cos\lambda_k x}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\lambda_k\alpha}{1}\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha+$$

$$+\frac{2\delta_n\cos\lambda_n x}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\lambda_n\alpha}{1}\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}2\delta_k\cos\lambda_k x\sin\lambda_k\alpha\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha=$$

$$=U_n^{(1)}(x)+U_n^{(2)}(x)+U_n^{(3)}(x). \qquad (5)$$

В силу формулы

$$\int_0^\pi\frac{\sin\lambda_k\alpha}{1}\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha=$$

$$=\left(\frac{1}{\lambda_n-\lambda_k+1}+\frac{1}{\lambda_n-\lambda_k+2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n+\lambda_k}\right)-$$

$$-\left(\frac{(-1)^{\lambda_n-\lambda_k+1}}{\lambda_n-\lambda_k+1}+\frac{(-1)^{\lambda_n-\lambda_k+1}}{\lambda_n-\lambda_k+2}+\ldots+\frac{(-1)^{\lambda_n+\lambda_k}}{\lambda_n+\lambda_k}\right)$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

первый член $U_n^{(1)}$ правой части равенства (5) по абсолютной величине меньше, чем

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2\delta_k}{\pi}2\frac{\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4\delta_k}{\pi}\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}=\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}-1}\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}=\infty$, значит, $U_n^{(1)}(x)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Третий член $U_n^{(3)}$ равенства (5) по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\delta_k\left|\frac{\sin\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right|d\alpha,$$

что можно также записать в виде

$$\left(\frac{2}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\delta_k\ln\lambda_n\right)+\eta_n,$$

где η_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Но мы имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\delta_k<2\delta_{n+1}<\frac{2}{n^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$|U_n^{(3)}(x)|<\frac{4}{\pi}\frac{n^n\ln n}{n^{n+1}}+\eta_n,$$

а потому $U_n^{(3)}(x)$ стремится равномерно к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Теперь нужно вычислить $U_n^{(2)}(x)$. Имеем

$$U_n^{(2)}(x)=\frac{\delta_n\cos\lambda_n x}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2\lambda_n}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{(-1)}{1}+\frac{(-2)^2}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{2\lambda_n}}{2\lambda_n}\right)\right]=$$

$$=\frac{\delta_n\ln\lambda_n\cos\lambda_n x}{\pi}+\eta'_n,$$

где η'_n стремится равномерно к нулю с $\frac{1}{n}$. Кроме того, имеем

$$\delta_n\ln\lambda_n=\frac{1}{n^n}n^n\ln n=\ln n.$$

Из этого вытекает, что весь интеграл (4)

$$U_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{F(x_0+\alpha) - F(x_0-\alpha)}{1} \frac{\sin\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

не стремится ни к какому определенному пределу, когда n стремится к бесконечности, но колеблется таким образом, что мы имеем почти всюду на $0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi$ следующие равенства:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} U_n(x_0) = +\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} U_n(x_0) = -\infty.$$

Так как функция $F(x)$ определяется своим тригонометрическим рядом Фурье (3), равномерно сходящимся на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, то интеграл Дирихле

$$V_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{F(x_0+\alpha) + F(x_0-\alpha)}{1} \frac{\sin\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

стремится равномерно к $\frac{F(x_0)}{2}$ при n, стремящемся к бесконечности. Составляя сумму $U_n(x_0) + V_n(x_0)$, мы, очевидно, приходим к следующему результату:

Существует непрерывная периодическая функция $F(x)$, для которой интеграл Дирихле

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} F(x+\alpha) \frac{\sin n\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

стремится равномерно к $F(x)$ на $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ при n, стремящемся к бесконечности, тогда как каждый из интегралов

$$I_n^-(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{0} F(x+\alpha) \frac{\sin n\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha,$$

$$I_n^+(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\varepsilon_2} F(x+\alpha) \frac{\sin n\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

расходится, и мы имеем почти всюду на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n^-(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n^+(x) = +\infty$$

и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n^-(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n^+(x) = -\infty.$$

3. Вот одно из приложений предыдущих рассмотрений. Известно, что образование непрерывной функции, у которой ряд Фурье расходится в одной точке, представляет некоторые трудности. Но изменяя слегка изученную непрерывную функцию $F(x)$, мы мгновенно получаем функцию $\varphi(x)$, у которой тригонометрический ряд Фурье расходится в одной точке.

В самом деле, пусть E — множество точек $(0, 2\pi)$, в которых каждый из интегралов $I_n^-(x)$ и $I_n^+(x)$ колеблется между $-\infty$ и $+\infty$. Возьмем какие-либо две точки x_1 и x_2 на E и, не изменяя $F(x)$ вне интервала (x_1, x_2), проинтерполируем ее линейно на этом интервале.

Я теперь утверждаю, что *полученная таким образом функция $\varphi(x)$ имеет тригонометрический ряд, который непременно расходится в x_1 и x_2.*

Чтобы увидеть это, достаточно заметить, что в точке x_1 интеграл $I_n^-(x)$ колеблется между $-\infty$ и $+\infty$, тогда как интеграл $I_n^+(x)$ сходится к $\frac{\varphi(x_1)}{2}$, потому что $\varphi(x)$, будучи линейной на (x_1, x_2), имеет ограниченное изменение на этом интервале. Следовательно, сумма $I_n^-(x) + I_n^+(x)$ не может сходиться в точке x_1. То же самое имеет место в точке x_2, но роли интегралов $I_n^-(x)$ и $I_n^+(x)$, очевидно, меняются. Таким образом, *интерполируя линейно в некотором интервале непрерывную периодическую функцию* $F(x)$, *у которой ряд Фурье абсолютно сходится, мы получаем непрерывную функцию, у которой ряд Фурье обязательно расходится в концах этого интервала.*

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Последовательности измеримых множеств

1. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ есть бесконечная последовательность каких-нибудь множеств, образованных из точек.

Борель всякой такой последовательности заставил отвечать два замечательных множества, тесно связанных с нею и названных им *предельными множествами.* Одно из них согласно его терминологии есть *полное предельное множество*: оно определяется как множество всех таких точек x, каждая из которых содержится в бесконечно многих множествах последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$; другое им названо *узким предельным множеством* и определено как множество всех таких точек x, каждая из которых входит во все множества последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, кроме, возможно, *лишь конечного числа их.*

Из самого определения следует, что полное предельное множество содержит узкое предельное множество и что оба этих предельных множества определяются *самой последовательностью* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, так как они, очевидно, не изменяются, если станут переставлять члены этой последовательности, не выбрасывая ни одного из них и не вводя новых.

Является целесообразным изменить терминологию Бореля для его предельных множеств и попутно ввести для них подходящие символы. В дальнейшем мы будем полное предельное множество Бореля называть просто *верхним пределом* последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ и обозначать символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$; аналогично узкое предельное множество будем называть *нижним пределом* и обозначать через $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$.

Если вспомним определение *суммы* $S = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ и *произведения* $P = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n \cdot \ldots$ последовательности множеств, то, очевидно, всегда будем иметь соотношения $P \subset \underline{\lim}\, E_n \subset \overline{\lim}\, E_n \subset S$, где знак $\subset$ обозначает просто то, что одно множество содержится в другом, совпадая с ним в частном случае.

Особенно интересен тот случай, когда оба предельных множества совпадают, т. е. когда $\underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n$. В этом случае мы скажем, что последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ есть *сходящаяся*, и единственное в этом случае множество Бореля мы будем называть *пределом* последовательности, обозначая его символом $\lim E_n$.

Не всякая последовательность множеств сходится. Последовательность, у которой верхний предел не совпадает с нижним пределом, называется *расходящейся*. Расходящаяся последовательность не имеет предела, но всегда имеет верхний предел и нижний предел.

Для того чтобы последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ была сходящейся, *необходимо и достаточно*, чтобы для всякой точки x, лежащей на прямой, представились только две возможности: *или* она входит во все ее члены, кроме, возможно, конечного числа их; *или* она не входит во все ее члены с тем же самым возможным исключением конечного числа ее членов. Когда это выполнено, точки x, осуществляющие первую возможность, образуют предел $\lim E_n$.

2. Понятия верхнего предела и нижнего предела последовательности *множеств* тесно связаны с понятиями верхнего предела и нижнего предела последовательности *функций*.

Пусть E есть какое-нибудь множество точек оси OX. Функцию $\psi(x)$, равную единице на E и равную нулю вне E, мы назовем *характеристической функцией для множества E* (Валле-Пуссен). Это название ясно само собой, так как если бы мы знали функцию $\psi(x)$ *ранее* того, как ввели в наши рассуждения множество E, то значение ее вполне определило бы это множество как совокупность корней уравнения $\psi(x) = 1$.

Пусть теперь нам дана последовательность каких-либо множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Строя для них соответствующие характеристические функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ..., мы имеем последовательность функций, превращающуюся в бесконечную последовательность чисел всякий раз, как переменное x получает определенное числовое значение.

Но всякая бесконечная последовательность чисел имеет верхний предел и нижний предел[1]). Когда они различны, последовательность чисел называется расходящейся; последовательность сходится, когда эти пределы совпадают между собой, и тогда общая их величина называется пределом последовательности.

Применяя сказанное к последовательности чисел $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_n(x)$, ..., мы получим два новых числа:

$$\omega(x) = \underline{\lim}\,\psi_n(x) \quad \text{и} \quad \Omega(x) = \overline{\lim}\,\psi_n(x),$$

зависящих от x, т. е. являющихся функциями x. Ясно, что обе эти функции, принимая лишь значения 0 и 1, суть характеристические функции для некоторых двух множеств. Легко видеть, что уравнение $\omega(x) = 1$ определяет именно

---

[1]) Пусть последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ есть ограниченная сверху. Имеются тогда такие числа B, которые превосходят все числа x_n, кроме, возможно, конечного их числа. Нижняя грань b таких чисел B и называется *верхним пределом* последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и обозначается через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = b$. Ясно, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется лишь *конечное* число членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, превосходящих $b + \varepsilon$, и что, напротив, имеется бесконечно много членов ее, превосходящих $b - \varepsilon$.

Аналогично определяется *нижний предел* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$; это есть верхняя грань a таких чисел A, каждое из которых превзойдено всяким числом x_n, кроме, возможно, *конечного* числа их. Ясно, что число $a - \varepsilon$ превзойдено всеми числами x_n, кроме, быть может, *конечного* числа их, и что, напротив, число $a + \varepsilon$ превосходит бесконечно много членов x_n. Если последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не ограничена сверху, полагают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$; если она не ограничена снизу, пишут $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$. Очевидно, что имеем всегда:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

множество $\underline{\lim} E_n$, и уравнение $\Omega(x) = 1$ определяет множество $\overline{\lim} E_n$.

Для того чтобы последовательность функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ была сходящейся в каждой точке, *необходимо и достаточно*, чтобы последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ была сходящейся; пусть E есть ее предел $E = \lim E_n$. В этом случае функция $\psi(x) = \lim \psi_n(x)$ есть характеристическая для E. В общем же случае последовательность $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ сходится на множестве $\underline{\lim} E_n$ и вне множества $\overline{\lim} E_n$, в точках же, принадлежащих к множеству-разности

$$\overline{\lim} E_n - \underline{\lim} E_n,$$

она всегда расходится.

Если множество E измеримое, характеристическая функция $\psi(x)$ для него также измерима; обратное также верно.

3. Последовательность множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ называется *монотонно возрастающей*, если имеем $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$; она называется *монотонно убывающей*, если $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ Монотонные последовательности всегда имеют предел; в случае возрастающей последовательности ее пределом является *сумма* ее членов:

$$\lim E_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots;$$

в случае убывающей последовательности ее предел есть *произведение* ее членов:

$$\lim E_n = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n \cdot \ldots$$

Если последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ есть последовательность *измеримых* множеств, ее верхний предел и нижний предел также суть измеримые множества вследствие формул:

$$\underline{\lim} E_n = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots) + (E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots) + \\ + (E_3 \cdot \ldots) + \ldots \text{[1]},$$
$$\overline{\lim} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) \times \\ \times (E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_3 + \ldots) \cdot \ldots \text{[2]}.$$

Для монотонных последовательностей измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ справедлива теорема о мере предела, выражающаяся равенством $\operatorname{mes} \lim E_n = \lim \operatorname{mes} E_n$. Расширим это предложение на всякую сходящуюся последовательность. В нижеследующем рассматриваются лишь последовательности множеств, *лежащих на конечном сегменте* $[a, b]$.

Лемма. *Для всякой последовательности измеримых множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *существуют два таких измеримых множества* e *и* $\mathfrak{E}$, *из которых первое содержится в каждом из множеств данной последовательности, а второе содержит каждое из них, кроме конечного числа их, что меры* $\operatorname{mes} e$ *и* $\operatorname{mes} \mathfrak{E}$ *сколь угодно мало отличаются соответственно от мер* $\operatorname{mes} \underline{\lim} E_n$ и $\operatorname{mes} \overline{\lim} E_n$.

В самом деле, слагаемые в формуле разложения нижнего предела $\underline{\lim} E_n$ в сумму образуют монотонно возрастающую последовательность, и аналогично множители в формуле разложения верхнего предела $\overline{\lim} E_n$ в произведение образуют монотонно убывающую последовательность. Отсюда, каково бы ни было малое положительное ε, имеется такое k, для которого

$$\operatorname{mes} (E_k \cdot E_{k+1} \cdot \ldots) > \operatorname{mes} \underline{\lim} E_n - \varepsilon$$

и

$$\operatorname{mes} (E_k + E_{k+1} + \ldots) < \operatorname{mes} \overline{\lim} E_n + \varepsilon.$$

---

[1]) В самом деле, если точка входит в множество $\underline{\lim} E_n$, то она принадлежит всем скобкам, стоящим в правой части, начиная с некоторого индекса n, и обратно, если она принадлежит правой части, то принадлежит одной из скобок и, значит, входит во все множества E_n, начиная с некоторого n, т. е. входит в $\underline{\lim} E_n$.

[2]) В самом деле, точка множества $\overline{\lim} E_n$ принадлежит всем множителям правой части, а значит, и произведению; обратно, если точка принадлежит правой части, то принадлежит бесконечному множеству из множеств E_n и, значит, входит в $\overline{\lim} E_n$.

Полагая $e = E_k \cdot E_{k+1} \cdot \ldots$ и $\mathfrak{E} = E_k + E_{k+1} + \ldots$, имеем лемму доказанной.

Следствие. *Для всякой последовательности измеримых множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *имеем*

$$\underline{\lim}\,\mathrm{mes}\,E_n \geqslant \mathrm{mes}\,\underline{\lim}\,E_n; \quad \overline{\lim}\,\mathrm{mes}\,E_n \leqslant \mathrm{mes}\,\overline{\lim}\,E_n.$$

В самом деле, мы имеем

$$E_n \supset E_k \cdot E_{k+1} \cdot \ldots \quad \text{и} \quad E_n \subset E_k + E_{k+1} + \ldots$$

для всякого $n > k$. Отсюда

$$\mathrm{mes}\,E_n > \mathrm{mes}\,\underline{\lim}\,E_n - \varepsilon \quad \text{и} \quad \mathrm{mes}\,E_n < \mathrm{mes}\,\overline{\lim}\,E_n + \varepsilon$$

для любого положительного ε и любого n, превышающего некоторое число k, зависящее только от ε.

Если данная последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ есть сходящаяся, тогда

$$\underline{\lim}\,E_n = \overline{\lim}\,E_n,$$

откуда

$$\underline{\lim}\,\mathrm{mes}\,E_n = \overline{\lim}\,\mathrm{mes}\,E_n,$$

и значит, справедливо предложение:

Теорема. *Если последовательность измеримых множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, *лежащих на конечном сегменте, сходится и множество* E *есть ее предел, то* $\mathrm{mes}\,E = \lim\,\mathrm{mes}\,E_n$.

Заметим, что теорема может перестать быть верной для множеств $E_1, E_2, \ldots$, совокупность которых нельзя заключить в конечный сегмент; в этом убеждаются надлежащим примером.

Из изложенного следует, что **если мера множества** E_n **стремится к нулю, когда** n **безгранично возрастает, то необходимо имеем** $\mathrm{mes}\,\underline{\lim}\,E_n = 0$. Напротив, отсюда еще не следует, что верхний предел $\overline{\lim}\,E_n$ не может оказаться положительной меры. Легко строятся примеры, где при $\lim\,\mathrm{mes}\,E_n = 0$ имеем $\mathrm{mes}\,\overline{\lim}\,E_n > 0$.

Есть, однако, случаи, когда необходимо имеем $\mathrm{mes}\,\overline{\lim}\,E_n = 0$, Этот важный случай, часто употребляемый в практике теории функций, дается предложением:

Теорема. *Если последовательность множеств* E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *такова, что ряд* $\operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2 + \ldots + \operatorname{mes} E_n + \ldots$ *сходится, тогда необходимо имеем* $\operatorname{mes} \overline{\lim} E_n = 0$.

В самом деле, $\overline{\lim} E_n \subset E_k + E_{k+1} + \ldots$, где k — любое. Но $\operatorname{mes}(E_k + E_{k+1} + \ldots) \leqslant \operatorname{mes} E_k + \operatorname{mes} E_{k+1} + \ldots$, и значит, раз остаток сходящегося ряда стремится к нулю, когда $n \to \infty$, то имеем

$$\operatorname{mes} \overline{\lim} E_n = 0.$$

2. Последовательности измеримых функций. Теорема Д. Ф. Егорова

4. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ есть последовательность измеримых функций, всякая из которых определена в каждой точке x конечного сегмента $[a, b]$.

Пусть $\omega(x) \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ и $\Omega(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$. Если данная последовательность функции расходится в точке x_0, имеем $\omega(x_0) < \Omega(x_0)$; если, напротив, она сходится и имеет пределом некоторое число, которое мы обозначим через $f(x_0)$, тогда $\omega(x_0) = \Omega(x_0) = f(x_0)$.

Мы знаем, что когда все функции $f_n(x)$ измеримы, то и обе функции $\omega(x)$ и $\Omega(x)$ также измеримы [171]. Отсюда множество точек x, где имеем строгое неравенство $\omega(x) < \Omega(x)$, есть также измеримое множество, как и его дополнение, где имеем $\omega(x) = \Omega(x)$. Значит:

Множество E всех тех значений x, в которых последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится, есть измеримое множество, причем предел $f(x)$ последовательности есть измеримая функция, определенная на E.

5. Для того чтобы в дальнейшем охватить сразу все возможные случаи, как те, в которых функции принимают лишь *конечные* значения, так и те, в которых значения функции могут быть и *бесконечно большими* (но всякий раз

определенного знака, т. е. $+\infty$ или $-\infty$), удобно условиться писать при любом положительном ε:

$$-\infty-\varepsilon=-\infty, \quad -\infty+\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon},$$
$$+\infty-\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}, \quad +\infty+\varepsilon=+\infty.$$

С этим соглашением мы говорим, что *последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ есть равномерно колеблющаяся на каком-нибудь множестве E, если для любого малого положительного ε имеется такое целое положительное N, что неравенство*

$$\omega(x)-\varepsilon<f_n(x)<\Omega(x)+\varepsilon$$

удовлетворено для всякого x на E, лишь бы $n>N$.

В том случае, когда рассматриваемая последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, равномерно колеблющаяся на множестве E, оказывается сходящейся в каждой его точке x, т. е. когда $\omega(x)=\Omega(x)$, тогда такая последовательность называется *равномерно сходящейся на множестве E*.

Это определение равномерной сходимости совпадает с классическим, когда за множество E берут сегмент и когда дело идет о функциях, имеющих конечное значение в каждой точке сегмента.

Понятие равномерно колеблющейся последовательности функций на множестве имеет значение ввиду справедливости следующего общего предложения:

Теорема. *Всякая последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, определенных на сегменте $[a, b]$, есть равномерно колеблющаяся на множестве E, мера которого как угодно близка к длине сегмента $[a, b]$* [172].

В самом деле, пусть $\omega(x)=\underline{\lim} f_n(x)$ и $\Omega(x)=\overline{\lim} f_n(x)$, и пусть $E_n^{(\varepsilon)}$ есть совокупность точек x, для которых имеем

$$\omega(x)-\varepsilon<f_n(x)<\Omega(x)+\varepsilon;$$

здесь ε есть фиксированное положительное число.

Ввиду того что $\omega(x)$ и $\Omega(x)$ суть верхний и нижний пределы последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, *всякая точка* x сегмента $[a, b]$ начинает принадлежать к множеству $E_n^{(\varepsilon)}$, лишь только n становится достаточно большим. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n^{(\varepsilon)} = [a, b]$. Отсюда согласно лемме § 3 для всякого положительного η существует множество $E_\eta^{(\varepsilon)}$ меры $> (b-a)-\eta$, содержащееся во множествах $E_n^{(\varepsilon)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, лишь только n станет достаточно велико.

В предыдущем числа ε и η были произвольные; полагая $\varepsilon = \frac{1}{k}$ и $\eta = \frac{1}{k^2}$, где k — целое и положительное, обозначим множество $E_\eta^{(\varepsilon)}$ через $\mathfrak{E}_k$.

Согласно изложенному $\mathfrak{E}_k$ входит в множества $E_1^{\left(\frac{1}{k}\right)}$, $E_2^{\left(\frac{1}{k}\right)}, \ldots, E_n^{\left(\frac{1}{k}\right)}, \ldots$, лишь только $n \geqslant N_k$, где N_k есть достаточно большое число; кроме того, $\operatorname{mes} C\mathfrak{E}_k < \frac{1}{k^2}$ [1]).

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} C\mathfrak{E}_k$ сходится, и значит, $\operatorname{mes} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, C\mathfrak{E}_k = 0$; поэтому в силу равенства

$$C \overline{\lim_{k\to\infty}}\, C\mathfrak{E}_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, \mathfrak{E}_k$$

находим $\operatorname{mes} \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \mathfrak{E}_k = b - a$. Это же равенство в силу леммы § 3 позволяет заключить, что для любого малого положительного δ существует множество E меры $> (b-a)-\delta$, принадлежащее всем множествам $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_k, \ldots$, начиная с достаточно большого k.

Нетрудно видеть, что на этом множестве E данная последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ есть равномерно колеблющаяся. В самом деле, раз $E \subset \mathfrak{E}_k$ для k достаточно большого и раз $\mathfrak{E}_k$ принадлежит множествам

$$E_{N_k}^{\left(\frac{1}{k}\right)},\quad E_{N_{k+1}}^{\left(\frac{1}{k}\right)},\quad E_{N_{k+2}}^{\left(\frac{1}{k}\right)}, \ldots,$$

---

[1]) Через CE обозначается множество, дополнительное к E.

то отсюда следует осуществление неравенства

$$\omega(x) - \frac{1}{k} < f_n(x) < \Omega(x) + \frac{1}{k},$$

если только n достаточно велико. Так как число k может быть взято произвольно большим, то последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ есть равномерно колеблющаяся на E.

6. Предположим, что данная последовательность измеримых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ есть *сходящаяся* почти всюду к конечному пределу на сегменте $[a, b]$. Тогда, удаляя из множества E, на котором последовательность равномерно колеблется, точки расходимости ее (необходимо образующие здесь множество меры нуль), мы приходим к весьма важному предложению:

Теорема Д. Ф. Егорова [178]. *Если последовательность измеримых функций сходится почти всюду на сегменте $[a, b]$, всегда из этого сегмента можно вынуть такое множество меры η, малой сколь угодно, что на оставшемся множестве [меры $> (b-a) - \eta$] последовательность есть равномерно сходящаяся.*

Это важное предложение [1]) имеет фундаментальное значение для математического анализа, будучи применяемым во многих его отделах. Причина этому лежит в том, что именно лишь с равномерно сходящимися последовательностями мы по преимуществу и встречаемся в математическом анализе, так как только для них имеются простые и постоянно употребляемые предложения. В частности, эта теорема встречает частое употребление в теории интегральных уравнений, теории функций комплексного переменного, теории интеграла, теории производных чисел и др. и влечет быстрые доказательства многих ценных общих предложений.

---

[1]) Доказанное в 1911 г. D. T. Egoroff, Sur les suites des fonctions mésurables (Comptes Rendus, 30 января 1911 г.).

Вейль (Math. Annalen, т. 67, стр. 225) полагал, что не все последовательности измеримых функций обладают этим свойством, и ввел для последовательностей, обладающих им, термин «wesentlich gleichmässig», оказывающийся таким образом излишним.

Как следствие предыдущей теоремы, укажем [174]: *если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

измеримых функций сходится почти всюду на сегменте $[a, b]$, *можно, не изменяя порядка его членов, так их сгруппировать, чтобы новый ряд был уже абсолютно сходящимся почти всюду на* $[a, b]$.

22 Зак. 2692. Н. Н. Лузин.

О СТРОЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Строение измеримых множеств

1. Мы не станем останавливаться на рассмотрении строения множеств меры нуль. В известном отношении задача изучения множеств меры нуль представляется à priori безнадежной. Причина этого лежит в том, что всякая часть множества меры нуль есть опять множество меры нуль, а строение этой части может быть как угодно сложным[1]).

Однако несмотря на сложность своего строения, множества меры нуль *в метрическом отношении* суть весьма простые множества: употребляя операции *сложения* и *умножения* (пересечения) множеств в конечном или счетном числе и выполняя их над множествами меры нуль, мы получаем в результате всегда множества меры нуль. Во многих вопросах метрической теории функции, какова, например, вся теория интеграла Лебега, совсем пренебрегают множествами меры нуль: изменение интегрируемой функции $f(x)$ на множестве меры нуль не влечет изменения интеграла от нее. Поэтому

---

[1]) Более точно: пусть Q есть множество меры нуль и *подобное сегменту* $[0, 1]$; пусть φ есть соответствие подобия. В силу соответствия φ всякому точечному множеству E, лежащему на $[0, 1]$, отвечает определенное множество $\mathfrak{E}$ на Q, имеющее меру нуль. Но *соответствие подобия не изменяет строения множества*, поэтому E и $\mathfrak{E}$ обладают тождественным строением. Поэтому задача изучения строения множества $\mathfrak{E}$ меры нуль равносильна задаче изучения строения произвольного точечного множества E, даже неизмеримого.

Получают множество Q так: берут совершенное множество P меры нуль и удаляют из него левый конец всякого смежного к нему интервала: оставшееся множество Q подобно сегменту $[0, 1]$.

является целесообразным изучить строение измеримого множества *до множества меры нуль*. Эта задача допускает полное решение.

2. Прежде чем приступить к ее решению, дадим одно определение.

Мы говорим, что какое-нибудь измеримое множество есть *приведенное множество*[1]), если всякий интервал δ, содержащий хоть одну точку множества E, содержит часть множества E *положительной меры*. Из этого определения следует, что приведенными множествами могут быть только множества положительной меры.

Лемма. *Всякое измеримое множество E положительной меры содержит в себе приведенное множество $\mathfrak{E}$ равной меры*: $\operatorname{mes} \mathfrak{E} = \operatorname{mes} E$.

В самом деле, пусть измеримое множество E меры $\operatorname{mes} E > 0$ лежит на сегменте $[a, b]$. Удалим из этого сегмента всякий интервал $\delta = (r, r')$ *с рациональными концами* r и r', содержащий часть множества E, имеющую меру нуль. Всех интервалов, имеющих границы рациональными, существует лишь счетное множество, каждый из удаленных интервалов уносит из множества E лишь множество меры нуль. Следовательно, указанное удаление таких интервалов удалит из множества E лишь множество меры нуль; пусть $\mathfrak{E}$ есть оставшееся от E множество; имеем $\mathfrak{E} \subset E$ и $\operatorname{mes} \mathfrak{E} = \operatorname{mes} E$. Множество $\mathfrak{E}$ есть *приведенное*. В самом деле, пусть x_0 есть точка множества $\mathfrak{E}$ и, значит, множества E. Раз точка x_0 входит в $\mathfrak{E}$, она не удалена. Значит, всякий интервал δ, содержащий ее, содержит часть множества $\mathfrak{E}$ положительной меры; но $\mathfrak{E} \subset E$, и $\operatorname{mes} \mathfrak{E} = \operatorname{mes} E$. Отсюда интервал δ содержит часть множества $\mathfrak{E}$ также положительной меры.

Следствие. *Всякое замкнутое множество F положительной меры содержит в себе совершенное приведенное множество P равной меры.*

---

[1]) Следует отличать этот термин от термина *приводимое множество*; этот последний имеет совершенно установившийся смысл, обозначая всегда всякое замкнутое *счетное множество*. Термин *приведенное множество* был мною употреблен ранее в книге «Интеграл и тригонометрический ряд», 1915, стр. 69 (в настоящем издании стр. 110).

В самом деле, беря доказательство предыдущей леммы, мы замечаем немедленно, что в случае *замкнутого* данного множества F найденное в нем приведенное множество есть также замкнутое, а значит, вместе с тем и совершенное, так как оно, будучи приведенным, не может иметь изолированных точек (что и требовалось доказать).

Установив это, условимся называть приведенное совершенное множество P, содержащееся в замкнутом множестве F и равной с ним меры, *приведенным ядром множества* F.

3. Рассмотрим ближе совершенные нигде не плотные множества, но не с точки зрения их меры, а в отношении их *дескриптивных* свойств.

Сделаем прежде всего такое замечание: *часть совершенного нигде не плотного множества P, находящаяся на каком-нибудь интервале Δ, есть либо совершенное множество, либо сумма счетного числа совершенных непересекающихся множеств.*

В самом деле, если часть множества P, находящаяся на интервале[1] Δ, не есть совершенное множество, то это возможно лишь тогда, когда множество P имеет точки, принадлежащие к Δ и сколь угодно близкие к его границе (или границам). Но тогда рассматриваемая граница (или границы) интервала Δ есть предельная точка для бесконечного множества смежных к P интервалов, содержащихся в Δ. Возьмем бесконечную последовательность этих интервалов, имеющую рассматриваемую границу (или границы) интервала Δ в качестве *единственной* предельной точки. Ясно, что центрами этих интервалов часть совершенного множества P, принадлежащая к Δ, разбивается на счетное число непересекающихся совершенных множеств (ч. т. д.).

Отсюда следует, что *разность двух совершенных нигде не плотных множеств P_1 и P_2, где $P_1 \supset P_2$, есть сумма конечного или счетного числа непересекающихся совершенных множеств.*

---

[1] Мы предупреждаем читателя, что согласно предложению А. Данжуа интервал мы всегда считаем *открытым* с обоих концов; сегмент же мы всегда считаем замкнутым с обоих концов. Интервал обозначается через (a, b), сегмент же обозначается через $[a, b]$.

В самом деле, эта разность $P_1 - P_2$ состоит, очевидно, из частей совершенного множества P_1, находящихся в смежных к P_2 интервалах. Но всякая такая часть есть сумма конечного или счетного числа непересекающихся совершенных множеств, как мы только что видели, и всех таких частей имеется конечное или счетное множество.

Из сказанного немедленно заключаем о справедливости предложения:

Лемма. *Всякая сумма $P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$ счетного числа пересекающихся совершенных нигде не плотных множеств может быть представлена в виде суммы $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n + \ldots$ счетного числа непересекающихся совершенных нигде не плотных множеств.*

В самом деле, пусть $Q = P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$, где P_n суть какие-нибудь совершенные нигде не плотные множества. Вводя обозначения $S_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, мы можем писать

$$Q = S_1 + [S_2 - S_1] + [S_3 - S_2] + \ldots + [S_{n+1} - S_n] + \ldots$$

Здесь S_n есть совершенное нигде не плотное множество, и последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ есть монотонно возрастающая.

Отсюда слагаемые, стоящие в правой части только что написанной формулы для Q, попарно не имеют общих точек, и каждое из них, исключая первое S_1, есть разность двух совершенных нигде не плотных множеств. Значит, всякое слагаемое $S_{n+1} - S_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ разложимо на сумму счетного числа непересекающихся совершенных множеств; соединяя их все, мы имеем окончательно

$$Q = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n + \ldots$$

Заметим, что если бы оказалось в предыдущем доказательстве, что множество Q есть совершенное (и, значит, нигде не плотное), то, раздробляя его на *в точности счетное*, число совершенных множеств, не пересекающихся попарно, мы имеем лемму немедленно доказанной[1]).

---

[1]) Это раздробление совершенного множества Q можно выполнить так: нужно взять точку ξ на Q, не являющуюся концом никакого смежного интервала ко множеству Q, и взять счетное множество смежных к Q интервалов, лежащих вправо от точки ξ и имеющих точку ξ своею единственною предельною точкою. Эта система смежных интервалов и даст желаемое разбиение множества Q.

Если множество Q не есть совершенное, то число множеств π_n, построенных в доказательстве, необходимо должно быть в точности счетное, что во всех случаях удовлетворяет лемму.

4. Сделав эти предварительные рассмотрения, возвратимся к вопросу о строении измеримых множеств *положительной* меры.

Пусть E есть измеримое множество, лежащее на сегменте $[a, b]$, и пусть $\operatorname{mes} E > 0$. Дополнительное к нему множество CE также измеримо. Значит, можно заключить множество CE в такую последовательность непересекающихся интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, сумма длин которых, превышая меру $\operatorname{mes} CE$, будет сколь угодно мало отличаться от нее; пусть $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \operatorname{mes} CE + \varepsilon$. Удалим из сегмента $[a, b]$ интервалы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$; мы получаем замкнутое множество F, содержащееся в данном множестве E и имеющее меру больше $\operatorname{mes} E - \varepsilon$. Беря в замкнутом множестве F его приведенное ядро P, $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} F$, мы имеем:

Всякое измеримое множество E положительной меры содержит в себе приведенное совершенное множество меры, сколь угодно близкой к мере E.

Чтобы итти дальше, возьмем какое-нибудь целое положительное число n и построим приведенное совершенное множество P_n, содержащееся в E и имеющее меру $\operatorname{mes} P_n > \operatorname{mes} E - \frac{1}{n}$. Заставляя число n принимать последовательно значения $1, 2, 3, \ldots$, мы получаем последовательность приведенных совершенных множеств $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$, содержащихся в E. Их сумма $Q = P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$ также содержится в E и ввиду неравенства $\operatorname{mes} P_n > \operatorname{mes} E - \frac{1}{n}$ имеет меру $\operatorname{mes} Q \geqslant \operatorname{mes} E - \frac{1}{n}$. Так как здесь число n можно сделать произвольно большим, то $\operatorname{mes} Q = \operatorname{mes} E$.

Обозначим через R совокупность точек, принадлежащих к E и не входящих в Q, т. е. пусть $R = E - Q$. Имеем $E = R + Q$; ввиду равенства мер множеств E и Q имеем $\operatorname{mes} R = 0$.

На основании леммы пункта 3 видим, что множество Q есть сумма счетного числа непересекающихся совершенных множеств $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$, каждое из которых всегда можно предположить *нигде не плотным*; в самом деле, дополнительное множество CE всегда можно предположить всюду плотным, так как всегда можно удалить, например, из данного множества E все рациональные точки и причислить их к CE, что не уменьшит меры множества E. Кроме того, всегда можно предположить всякое совершенное множество π_n *приведенным*, заменяя всякое множество π_n положительной меры через его приведенное ядро, а остальные точки множества π_n относя в R, ибо они образуют множество меры нуль.

Все сказанное приводит к предложению[1]):

Теорема. *Всякое измеримое множество E положительной меры распадается на счетную сумму непересекающихся приведенных совершенных множеств $\pi_1, \pi_2, \ldots$ $\ldots, \pi_n, \ldots$ и на остаточное множество R меры нуль:*

$$E = (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n + \ldots) + R, \quad \operatorname{mes} R = 0.$$

Таким образом в вопросах, *где пренебрегают множествами меры нуль*, всякое измеримое множество E положительной меры можно заменить суммою счетного числа непересекающихся совершенных множеств $\pi_1 + \pi_2 + \ldots$ $\ldots + \pi_n + \ldots$, т. е. множеством, измеримым B и даже не слишком сложной структуры. Эта сумма $\pi_1 + \pi_2 + \ldots$ $\ldots + \pi_n + \ldots$, имея меру, равную мере E, играет роль *главной части* данного измеримого множества E, обусловливая все его метрические свойства.

5. Приближеиия измеримого множества. Предыдущее предложение можно рассматривать как дающее *приближение* данного измеримого множества E, *измеримое B по недостатку с точностью до меры нуль.* Легко дать такое же *приближение по избытку.*

В самом деле, если $\operatorname{mes} CE > 0$, находим в множестве CE сумму $Q' = \pi'_1 + \pi'_2 + \ldots$ совершенных множеств, имеющую меру, равную мере CE, $\operatorname{mes} Q' = \operatorname{mes} CE$. Тогда дополнение CQ' есть множество, измеримое B, содержащее E и равной с ним меры. Если же $\operatorname{mes} CE = 0$, принимают за CQ' сегмент $[a, b]$.

---

[1]) См. «Интеграл и тригонометрический ряд», стр. 14 (в настоящем издании стр. 60).

Эти множества и можно рассматривать как *приближение по избытку, измеримое B, с точностью до меры нуль.*

Итак: *Для всякого измеримого множества E имеются такие два множества e* и $\mathfrak{E}$, *измеримых B, имеющих оба равную с ним меру, из которых одно, e,* содержится в *E, а другое,* $\mathfrak{E}$, *его содержит*: $e \subset E \subset \mathfrak{E}$ $\text{mes}\, e = \text{mes}\, \mathfrak{E}$ (Борель).

Если пренебрегают не множествами *меры нуль*, а множествами меры, меньшей ε, можно итти дальше. Мы уже видели, что измеримое множество E, $\text{mes}\, E > 0$, содержит в себе приведенное совершенное множество P меры $\text{mes}\, P > \text{mes}\, E - \frac{\varepsilon}{2}$. Это совершенное множество P можно рассматривать как *приближение* данного множества *E по недостатку с точностью* до меры ε. Но по пути упрощения приближения можно пойти еще дальше.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ суть интервалы, смежные к P. Ряд $\sum\limits_1^\infty \delta_n$ сходится и имеет суммою число $(b-a) - \text{mes}\, P$. Выбросим из сегмента $[a, b]$ первые k интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$; мы получим конечное число ν (где ν равно одному из трех чисел $k-1, k, k+1$) сегментов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$, содержащих P, и общая сумма длин их превосходит меру P на величину $\sum\limits_{k+1}^\infty \delta_n$. В силу сходимости ряда эта величина может быть сделана меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда:

Для всякого измеримого множества E положительной меры можно найти конечное число ν *таких сегментов* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$, *что точки множества E, не попавшие в них, и точки его дополнения CE, попавшие в них, образуют все вместе множество меры, меньшей* ε, *где* ε — *как угодно малое положительное число* (Борель).

Таким образом, когда пренебрегают множествами меры, меньшей ε, можно заменить данное измеримое множество конечным числом сегментов. Это приближение, как идущее в обе стороны (по недостатку и по избытку), можно назвать *средним приближением*; оно предложено Борелем для изучения свойств измеримых множеств.

6. Точки плотности и точки разрежения. Выше мы указали общую форму измеримого множества положительной меры, т. е. свойства измеримого множества, *рассматриваемого в целом*. Эти свойства можно назвать *интегральными* (тотальными).

Имеются, кроме них, еще и другие важные свойства измеримого множества, относящиеся уже к строению измеримого множества в его бесконечно малых частях и, следовательно, могущие быть названными *дифференциальными свойствами* измеримого множества.

В настоящее время приведены в ясность, повидимому, еще не все дифференциальные свойства измеримых множеств. В этом прибавлении мы укажем лишь наиболее изученное дифференциальное свойство.

Пусть E есть измеримое множество, лежащее на сегменте $[a, b]$. Пусть x_0 есть какая-нибудь точка этого сегмента, не обязательно принадлежащая E. Охватим точку x_0 интервалом δ и обозначим через $\mu(\delta)$ меру части множества E, находящейся на δ. Рассмотрим отношение $\frac{\mu(\delta)}{\delta}$ и заставим длину δ интервала δ стремиться к нулю.

Мы говорим, что точка x_0 есть *точка плотности* множества E, если предел этого отношения равен единице, каким бы образом интервал δ ни стремился к нулю, лишь бы он все время охватывал точку x_0; аналогично мы называем точку x_0 *точкою разрежения* множества E, если это отношение стремится к нулю.

Смысл терминологии ясен; в точке плотности мы имеем $\frac{\mu(\delta)}{\delta} > 1-\varepsilon$, где ε есть произвольно малая положительная величина, если только длина интервала δ достаточно мала. Отсюда заключаем, что всякий достаточно малый интервал, охватывающий точку x_0, является настолько *насыщенным* точками множества E, что мера совокупности их лишь бесконечно мало отличается от длины целого интервала δ, если *считать ее за единицу*, так как $\mu(\delta) > \delta - \varepsilon\delta$; аналогично, если x_0 есть точка разрежения, имеем $\frac{\mu(\delta)}{\delta} < \varepsilon$ или $\mu(\delta) <$ $< \varepsilon\delta$; это значит, что интервал δ настолько *беден* точками E, что множество их имеет меру, бесконечно малую сравнительно с длиною интервала δ.

Ясно, что всякая точка плотности для множества E есть в то же самое время точка разрежения для его дополнения CE. Если $\operatorname{mes} E = b - a$, всякая внутренняя точка сегмента $[a, b]$ есть точка плотности для E; если $\operatorname{mes} E = 0$, всякая точка есть точка разрежения. Для множеств же промежуточной меры имеем:

Теорема. *Всякая точка измеримого множества E, $0 < \operatorname{mes} E < b - a$, есть его точка плотности, исключая множества меры нуль; всякая точка, к нему не принадлежащая, есть его точка разрежения, исключая множества меры нуль.*

В самом деле [1]), пусть $\psi(x)$ есть характеристическая функция [2]) для E.

Интеграл Лебега $F(x) = \int\limits_0^x \psi(\alpha)\, d\alpha$ есть непрерывная функция, имеющая $F'(x) = 1$ почти всюду на E и $F'(x) = 0$ почти всюду на CE. Пусть x_0 есть точка, где $F'(x_0) = 1$. Обозначим через $\delta = (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$, интервал, содержащий x_0; мы видим, что отношение $\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ стремится к единице, когда концы α и β стремятся к точке x_0. Но согласно самому смыслу интеграла Лебега для характеристической функции приращение $F(\beta) - F(\alpha)$ есть не что иное, как $\mu(\delta)$, т. е. мера части E, содержащейся в δ. Следовательно, имеем $\lim \frac{\mu(\delta)}{\delta} = 1$, т. е. x_0 есть точка плотности для E. Аналогично находим, что точка x_1, где имеем $F'(x_1) = 0$, есть точка разрежения для E.

Эта теорема указывает на тот интересный факт, что *никакое измеримое множество промежуточной меры, т. е. $0 < \operatorname{mes} E < b - a$, не может геометрически быть равномерно распределенным по сегменту* $[a, b]$.

---

[1]) Предлагаемое доказательство опирается на свойства интеграла Лебега и, следовательно, есть доказательство в известном смысле трансцендентное. Интересные совершенно *элементарные* доказательства этого предложения даны проф. Серпинским и А. Данжуа [[175]].

[2]) Относительно термина см. статью «О последовательностях измеримых функций».

В самом деле, для такого множества E в силу предыдущей теоремы существует на $[a, b]$, по крайней мере, одна точка плотности x' и, по крайней мере, одна точка разрежения x''. Отсюда имеются на $[a, b]$ такие два интервала δ' и δ'', непересекающихся и равной длины, из которых один насыщен точками множества E, другой же, напротив, беден ими. Значит, никакое измеримое множество меры не 0 и не $b-a$ неспособно равномерно покрывать сегмент $[a, b]$, но будет лежать на нем как бы *сгустками*, т. е. неоднородным образом, будучи слишком уплотненным в одних местах и слишком разреженным в других [1]). Это дает представление о характере геометрического расположения измеримых множеств на сегментах. Из всех измеримых множеств, лежащих на $[a, b]$, одни лишь множества меры нуль или $b-a$ являют однородное распределение своей массы по этому сегменту.

Из определения точки плотности измеримого множества немедленно следует предложение:

Два измеримых множества E_1 и E_2, имеющих точку x_0 своею точкою плотности, пересекаются по измеримому множеству $E_1 \cdot E_2$, имеющему точку x_0 также своею точкой плотности.

Это важное свойство точек плотности послужило А. Я. Хинчину и А. Данжуа для расширения понятия производной (см. в этой статье § 18).

7. Аналогия измеримого множества с сегментом. Уже из предыдущего можно было отметить сходство измеримого множества E, лежащего на $[a, b]$, $0 < \operatorname{mes} E < b-a$, с системою $\sum$ *конечного* числа сегментов, если их сумма будет *меньше* $b-a$, так как в этом случае система $\sum$ представляет такие же «сгустки» и «пустоты», как и измеримое множество E, только еще более отчетливые и резкие.

Эта качественная аналогия поддается точной метрической характеристике: *свойства измеримого множества E меры* μ,

---

[1]) Именно на этом свойстве и основано «доказательство» Ван-Влека (Van-Vleck) *существования* неизмеримого множества (Transactions of the American Math. Society, 1908, 1913). Прием рассуждения, употребленный Ван-Влеком, манипулирует с несчетным множеством актов произвольного выбора (аксиома Цермело) — прием, встречающий отрицательное отношение со стороны многих математиков.

$\mu > 0$, *представляют совершенную аналогию со свойствами одного целого сегмента той же самой длины* μ.

Из многих параллельных свойств укажем хотя бы на одно:

«Два сегмента Δ_1 и Δ_2, лежащих на $[a, b]$ и имеющих сумму *длин* S превосходящей $b-a$, непременно пересекаются по сегменту *длины*, не меньшей чем $S-(b-a)$».

«Два измеримых множества E_1 и E_2, лежащих на $[a, b]$ и имеющих сумму *мер* S превосходящей $b-a$, непременно пересекаются по измеримому множеству *меры*, не меньшей чем $S-(b-a)$» [176].

Это и другие свойства позволяют рассматривать *измеримое множество* E *меры* μ, $\mu > 0$, *как сегмент длины* μ, *находящейся в раздробленном состоянии*.

Теория интегрирования и теория тригонометрических рядов подтверждают правильность такого взгляда.

8. Имеются, повидимому, еще и другие, более тонкие дифференциальные свойства измеримых множеств положительной меры. Но в настоящее время они еще не выкристаллизовались в простую формулировку. Поэтому мы их не станем касаться здесь [177].

Равным образом мы не будем здесь рассматривать имеющуюся еще *третью* группу свойств измеримого множества — свойств уже *теоретико-числового* характера, касающихся массовой арифметической природы тех иррационалов, которые содержатся на данном измеримом множестве положительной меры. Свойства эти, вытекающие из арифметики иррационалов и приближений их рациональными числами, обещают, повидимому, многое для аналитической теории чисел. Мы не будем рассматривать их, так как изучение их предпринято лишь сравнительно недавно (Харди и Литтлвуд, А. Я. Хинчин) [178].

2. Неизмеримые множества

9. Вопрос о «существовании» неизмеримых множеств есть один из самых глубоких вопросов современной теории функций. Этот вопрос дебатировался не раз, но до сих пор (с 1902 г.) его обсуждение не привело ни к какому определенному заключению, с которым были бы согласны все математики.

Вопрос был бы разрешен раз навсегда, если бы кому-нибудь удалось дать *конструкцию индивидуального* такого множества, вроде того, как, например, решающая конструкция, данная Вейерштрассом индивидуальной непрерывной кривой, лишенной всюду касательной, раз навсегда прекратила всякие споры о существовании кривых подобного сорта и пресекла попытки найти на каждой непрерывной кривой точку с касательной. Именно такая решающая конструкция неизмеримого *индивида* и не была до сих пор никем осуществлена, несмотря на многие попытки, делавшиеся, повидимому, в этом направлении и нашедшие следы в печати. Но вместе с тем и не было дано ни одного доказательства того, что вообще такая конструкция *невозможна*.

Доказательство невозможности той или иной конструкции (трисекция угла, квадратура круга и т. д.) принадлежит к типу наиболее трудных достижений в математике, и реализация такового всякий раз знаменует существенное продвижение в науке. И если все-таки вопреки их трудности такие доказательства невозможности временами и удавались, то успех в этом многим был обязан тому обстоятельству, что всегда речь шла не о невозможности конструкции *вообще*, а о невозможности конструкции *определенного рода* (циркуль и линейка и т. д.). Совсем в ином положении оказываемся мы, когда речь идет о конструкции неизмеримого индивида, с целью установить вообще самое *существование* таковых. Здесь у нас нет и не может быть по самой постановке проблемы никакого ограничения на тип или сорт могущих быть употребленными для этой цели конструкций; *всякая* конструкция хороша, если она приводит к неизмеримому индивиду, и значит, нужно подвергнуть испытанию *все* вообще типы конструкций индивидуальных *точечных образований*, чтобы показать, что ни один из них не приведет к цели. Итак, сначала дело должно итти о реализации *каталога* всех уже известных и могущих когда-либо быть изобретенными типов конструкций точечных индивидов, каталога исчерпывающей полноты, и уже затем — о доказательстве того, что никакой тип конструкции не приведет к искомому построению.

Таким образом и случайные пробы того или иного рода конструкции не достигали цели, потому что всякая такая проба всегда приводила к измеримым множествам и чаще всего (*почти* всегда) приводила даже к множествам, *измеримым B*, и, с другой стороны, самая мысль осуществления доказательства невозможности *построения* неизмеримого индивида в настоящее время представляется, повидимому, слишком смелой, чтобы начать производить исследование в этом направлении.

10. Ввиду того что, с одной стороны, появление благоприятной конструкции неизмеримого индивида фактически до сих пор задерживается, а с другой стороны, и доказательство невозможности такой конструкции не представляется близким к осуществлению, будучи намеченным, скорее, лишь как программа будущего исследования, ввиду всего этого мысль исследователей потекла по другому руслу и естественный (хотя математически и трудный) вопрос о конструкции был подменен другим, представляющим, может быть, и соблазнительную легкость для размышлений, но зато более неопределенным и выводящим далеко за пределы самой математики:

Можно ли установить существование или несуществование неизмеримых множеств (или вообще класса каких-либо математических суждений), не прибегая ни к какой конструкции индивида и не задаваясь вопросом о возможности таковых конструкций.

Нет сомнения, что если бы такая конструкция удалась, существование неизмеримого множества было бы установлено, будучи просто *математическим фактом.*

Но из того, что такой конструкции сейчас нет, или даже из того, что вообще такие конструкции невозможны (если бы это было установлено), следует ли отсюда непременно заключить, что неизмеримые множества вообще *не существуют.* Вопрос, следовательно, был поставлен более философским образом, чем математическим: *спрашивалось о существовании неизмеримых множеств, каждое из которых может оказаться и недостижимым никакой конструкцией индивида.*

11. Уже давно (Витали, 1905 г.) было замечено, что, признавая допустимость употребления в математических рассуждениях *несчетного множества независимых друг от друга актов произвольного выбора, не направляемых никаким законом, не определяемых никаким правилом,* мы вынуждены признать существование неизмеримых множеств.

Эта допустимость несчетного множества актов произвольного выбора в настоящее время носит в науке название *аксиомы Цермело*, или *принципа произвольного выбора.*

Чтобы убедиться в том, что признание аксиомы Цермело влечет существование неизмеримых множеств, наиболее просто будет рассуждать так: пусть C есть окружность длины 1. Пусть ξ есть какая-нибудь точка на ней. Обозначим через S_ξ систему всех точек окружности C, отстоящих от точки ξ на дуговое расстояние (меряя его по окружности C), *соизмеримое с единицею.* Так как всех рациональных чисел только счетное множество, то и система S_ξ есть счетное множество, содержащее притом самую точку ξ, так как она находится на нулевом (или единичном) расстоянии сама от себя; ясно, кроме того, что множество S_ξ всюду плотно на C. Назовем точку ξ ядром системы S_ξ.

Пусть теперь η есть какая-нибудь другая точка окружности C и S_η есть система, построенная для нее, ядром которой она служит.

Возможны лишь два случая:

1) Либо новая точка η не принадлежит к системе S_ξ. Это значит, что длина дуги (ξ, η) иррациональна. Но тогда системы S_ξ и S_η совсем не могут пересекаться, ибо если бы нашлась точка x, входящая и в S_ξ, и в S_η, то, будучи тогда на соизмеримом расстоянии и от ξ, и от η, она сделала бы и расстояние между самими точками ξ и η рациональным. Итак, в этом случае *системы S_ξ и S_η не имеют общей точки.*

2) Либо новая точка η принадлежит к системе S_ξ. Это значит, что расстояние точек ξ и η есть рациональное. Но тогда ясно, что всякая точка x, отстоящая от точки ξ на рациональном расстоянии, будет отстоять и от точки η также на рациональном расстоянии, и обратно. Отсюда следует, что система S_η содержится в системе S_ξ, и, обратно, S_ξ содержится в S_η. Значит, в этом случае *системы S_ξ и S_η тождественны*: $S_\xi \equiv S_\eta$.

Из сказанного следует, что *всякая* точка какой-либо системы S может быть взята за ее ядро и что две системы S' и S'', лежащие на окружности C, либо геометрически тождественны, либо совсем не пересекаются.

Сказанного достаточно для того, чтобы заключить, что *указанным законом* вся окружность C автоматически разбивается на совокупность отличных друг от друга непересекающихся попарно систем S, т. е. $C = \{S\}$. Эта совокупность $\{S\}$ есть несчетная, так как всякая система S счетна.

Применим теперь к этой совокупности $\{S\}$ аксиому Цермело, *выбирая* как-нибудь *по одной точке* в каждой системе S. Пусть Z есть множество всех выбранных таким образом точек; множество Z несчетно. Повернем теперь окружность C около ее центра на какой-нибудь угол θ', *соизмеримый* с π. Тогда множество Z будет двигаться как твердое тело и займет некоторое новое положение Z'. Но поворот окружности C на угол, соизмеримый с π, вызывает сдвиг всех ее точек на рациональное расстояние. А так как множество Z в каждой системе S имело по одной точке, то после этого сдвига (если только он, разумеется, не сообщает полного поворота окружности на 2π) оно займет существенно новое положение Z', не имеющее с прежним ни одной общей точки. Итак, множество Z' конгруэнтно с Z и не имеет с ним общей точки.

Сообщим, наконец, окружности C все возможные *различные* повороты на углы, соизмеримые с π. Пусть это будут углы θ', θ'', ..., $\theta^{(n)}$, ... и пусть Z', Z'', ..., $Z^{(n)}$, ... — соответствующие положения множества Z. Ясно, что все эти множества не пересекаются попарно, конгруэнтны с множеством Z и что их совокупность Z', Z'', ..., $Z^{(n)}$, ..., присоединяя сюда и само множество Z, заполнит всю окружность C, т. е. $C = Z + Z' + Z'' + \ldots + Z^{(n)} + \ldots$

Теперь, если бы множество Z было измеримым, то оно имело бы определенную меру μ, $\operatorname{mes} Z = \mu$. В силу конгруэнтности множеств мы имели бы тогда также $\operatorname{mes} Z^{(n)} = \mu$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

В силу же равенства $C = Z + Z' + Z'' + \ldots$ имеем

$$\operatorname{mes} C = \operatorname{mes} Z + \operatorname{mes} Z' + \ldots \text{ или } 1 = \mu + \mu + \mu + \ldots,$$

что невозможно, так как ряд должен сходиться, т. е. мы должны иметь $\mu = 0$.

Итак:

если законно применять в математических рассуждениях несчетно много актов произвольного выбора, не давая для этого никакого правила, то существуют неизмеримые множества.

12. Только что указанное рассуждение ставит вопрос о существовании неизмеримых множеств в связь с вопросом о признании или отрицании аксиомы Цермело. По этой причине эта аксиома явилась центром острого внимания и послужила предметом оживленного обмена мнений среди математиков, вызывая сильные нападки у одних и находя стойкую защиту у других[1]).

13. Если теперь сойти с принципиальной почвы и перейти к практике текущей математической работы, то, *с одной стороны*, в пользу аксиомы Цермело говорит ее «очевидность», величайшая простота ее применения в математических рассуждениях, чрезвычайная легкость получения с ее помощью самых разнообразных примеров, носящих хотя иногда исключительно парадоксальный характер, но все же не повлекших до сих пор ни к какому противоречию. (Например, Хаусдорфу удалось разделить шар радиуса R на такие четыре непересекающиеся попарно части A, B, C и D, что, двигая, как твердые тела, части A и B и прикладывая надлежащим образом их друг к другу, он получил опять шар радиуса R, и двигая так же точно и прикладывая части C и D друг к другу, он получил второй такой же шар радиуса R. Множества A, B, C и D суть неизмеримые и образованные Хаусдорфом при помощи аксиомы Цермело.) *С другой же стороны*, против нее говорит именно эта самая чрезвычайная легкость ее применения и немедленность даваемых ею ответов, так как математические сущности, сформированные при помощи ее, не крепки, не обладают устойчивостью, имея слишком расплывчатые, неопределенные свойства, чтобы практически служить затем точкой опоры для математических рассуждений, направленных уже на классические математические предметы. Напротив, образование математического предмета без аксиомы Цермело часто представляет чрезвычайные трудности, зато такой математический предмет, будучи построен, почти всегда имеет большую ценность для дальнейших изысканий.

Ввиду того что вопрос об аксиоме Цермело до сих пор еще разделяет математиков, профессором Серпинским было

---

[1]) См. E. Borel, Leçons sur la theorie des fonctions. Note IV. Les polémiques sur le transfini. Cinq lettres sur la theorie des ensembles, стр. 150.

произведено фундаментальное исследование, имевшее целью выяснить, какие именно предложения классического анализа зависят от нее и какие могут быть доказанными без ее помощи. В настоящее время наблюдается молчаливое соглашение среди математиков стараться, где возможно, обходиться без этой аксиомы или, употребив ее, непременно указывать на это обстоятельство и, таким образом, делать счет тем предложениям, которые от нее зависят.

14. Весьма существенной для сторонников аксиомы Цермело является, повидимому, новая заметка Гильберта, недавно появившаяся в Math. Annalen (декабрь 1922 г.).

В ней автор утверждает, что им доказана *непротиворечивость аксиомы Цермело* при помощи особой, новой дисциплины, созданной им и называемой им *метаматематикой*, которую он в этой заметке рисует лишь в самых общих чертах, не давая доказательств.

Вопрос об умении доказывать непротиворечивость той или иной системы аксиом не нов для математики: он возник уже давно, в связи с необходимостью иметь уверенность сначала в непротиворечивости геометрии Лобачевского, а затем и самой геометрии Эвклида.

Уже давно Гильбертом же вопрос о непротиворечивости системы геометрических аксиом был сведен к непротиворечивости арифметики действительных чисел.

В настоящей заметке он указывает в общих чертах идею доказательства непротиворечивости системы аксиом арифметики и даже самой логики при помощи особого формального аппарата, в котором самое противоречие является также формализованным. Ввиду отсутствия в этой заметке указаний на исходные пункты рассуждений автора является затруднительным восстановление этих рассуждений, и поэтому для оценки значения теории Гильберта следует подождать более полного мемуара[1]).

---

[1]) Со времени, когда эти строки были написаны, Гильбертом было опубликовано несколько статей, касающихся его нового метода. С присоединением сюда статей его учеников и последователей, а также работ критиков этих идей, можно считать, что возникшая дисциплина имеет уже заметную литературу. Однако вопрос о непротиворечивости аксиомы Цермело в полном ее объеме остается совершенно не выясненным. Главное затруднение лежит в вопросе,

3. Строение измеримых функций

15. Прежде чем приступить к изучению строения общей измеримой функции, данной на сегменте $[a, b]$, следует рассмотреть понятие функции, определенной на совершенном множестве.

Пусть P есть какое-нибудь совершенное множество, находящееся на сегменте $[a, b]$; функция $f(x)$ называется *определенной на множестве* P, если всякому x на P отвечает определенное число $f(x)$, конечное или бесконечное (в последнем случае определенного знака). Ввиду того что сегмент и совершенное множество обладают почти одинаковыми свойствами (будучи оба замкнуты, только сегмент всегда непрерывен, совершенное же множество, вообще говоря, разрывно), все определения для функций, заданных на сегменте $[a, b]$, сами собою переносятся и на функции, определенные на совершенных множествах, например, определение измеримости функции и др.; мы остановимся лишь на понятии *непрерывности*.

Функция $f(x)$, данная на совершенном множестве P, называется *непрерывной на* P *в его точке* x_0, если для всякого положительного ε имеется положительное число η, такое, что неравенство $|x - x_0|$, *где* x *принадлежит к* P, влечет неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Иначе говоря, $f(x)$ непрерывна на P в его точке x_0, если $\lim f(x) = f(x_0)$, когда x стремится к x_0, *не покидая множества* P. Функция $f(x)$ называется непрерывной на P, если она непрерывна в каждой точке множества P.

Непрерывные функции на совершенном множестве обладают всеми теми же свойствами, что и непрерывные функции на сегменте: они ограничены, достигают максимума, их непрерывность равномерная. Единственное свойство, которое вообще не соблюдается, это следующее: непрерывная на P функция, вообще говоря, не принимает всех значений, лежащих между ее наибольшим и наименьшим значениями. Это пробегание обязательно для функций, непрерывных на

какое поле законов считается предварительно допущенным, так как в зависимости от объема этого поля, повидимому, должно сильно изменяться и самое доказательство непротиворечивости [179].

сегментах, но для разрывных множеств вообще не соблюдается.

Функции, непрерывные на совершенном множестве P, суть самые простые из всех функций, могущих быть данными на P. Поэтому имеет смысл, обладая данной функцией $f(x)$, *определенной на сегменте* $[a, b]$, искать такое совершенное множество P меры, по возможности близкой к длине сегмента $[a, b]$, на котором значения данной функции $f(x)$ образовали бы функцию, определенную и *непрерывную* на P (относительно точек множества P).

В связи с этим введем следующее определение: мы говорим, что функция $f(x)$, определенная на сегменте $[a, b]$ и конечная почти всюду на нем, *обладает на сегменте* $[a, b]$ *свойством* (C), если для любого ε, $\varepsilon > 0$, существует на $[a, b]$ такое совершенное множество P, которое обладает двумя свойствами:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на P.
2. $\operatorname{mes} P > (b - a) - \varepsilon$.

Относительно функций, обладающих свойством (C), справедливо предложение:

Теорема. *Всякая функция* $f(x)$, *обладающая на* $[a, b]$ *свойством* (C), *есть измеримая функция.*

В самом деле, пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ есть последовательность совершенных множеств, лежащих на $[a, b]$ и удовлетворяющих в силу свойства (C) условиям:

1. $f(x)$ непрерывна на P_n.
2. $\operatorname{mes} P_n > (b - a) - \frac{1}{n}$.

Пусть $Q = P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$ Пусть R есть дополнительное к Q множество. Ясно, что имеем $\operatorname{mes} Q = b - a$; $\operatorname{mes} R = 0$. Обозначим через π_n совершенное множество $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. Функция $f(x)$ на π_n *непрерывна*. Введем теперь новые функции: пусть $\varphi_n(x)$ есть функция, равная $f(x)$ на π_n и равная нулю вне π_n; пусть $\psi(x)$ есть функция, равная $f(x)$ на R и равная нулю на Q. С этими обозначениями является очевидным, что имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ всюду на Q и $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = 0$ на R. Значит, имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) + \psi(x). \tag{1}$$

Функция $\psi(x)$, как равная нулю почти всюду, есть, очевидно, измеримая функция.

Переходим теперь к рассмотрению функции $\varphi_n(x)$; она непрерывна на π_n и равна нулю вне его. Пусть $\delta_1^{(n)}$, $\delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_\nu^{(n)}, \ldots$ суть смежные интервалы к π_n. Предполагая число ν выбранным, построим новую функцию $\varphi_n^{(\nu)}(x)$, определяемую следующими условиями:

1. Функция $\varphi_n^{(\nu)}(x)$ равна функции $\varphi_n(x)$ в 2ν концах смежных интервалов $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_\nu^{(n)}$.

2. Функция $\varphi_n^{(\nu)}(x)$ равна нулю в 2ν концах интервалов $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \ldots, d_\nu^{(n)}$, концентрических соответственно с интервалами $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_\nu^{(n)}$ и имеющих соответственно длинами $\frac{\nu-1}{\nu}\delta_1^{(n)}, \frac{\nu-1}{\nu}\delta_2^{(n)}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}\delta_\nu^{(n)}$.

3. В остальных точках сегмента $[a, b]$ функция $\varphi_n^{(\nu)}(x)$ получается линейной интерполяцией указанных в пунктах 1 и 2 ее 4ν значений.

Ввиду непрерывности $\varphi_n(x)$ на π_n имеем для всякого x, принадлежащего к π_n, равенство $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_n^{(\nu)}(x)=\varphi_n(x)$ и для x, не принадлежащего к π_n, равенство $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_n^{(\nu)}(x)=0$. Отсюда равенство $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_n^{(\nu)}(x)=\varphi_n(x)$ справедливо для всякого x, находящегося на сегменте $[a, b]$. Но функция $\varphi_n^{(\nu)}(x)$ есть, очевидно, *непрерывная* на сегменте $[a, b]$. Значит, функция $\varphi_n(x)$ есть измеримая функция [180]. Следовательно, ее предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ есть также измеримая функция. Оба слагаемых формулы (1) измеримы, что приводит к измеримости и $f(x)$.

Лемма. *Если всякая функция последовательности $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ обладает свойством (C), то предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ также обладает свойством (C).*

Иначе говоря, свойство (C) сохраняется в пределе. В самом деле, раз $f_n(x)$ обладает свойством (C), существует совершенное множество P_n, $\operatorname{mes} P_n > (b-a)-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, на котором $f(x)$ непрерывна. С другой стороны, в силу теоремы

Д. Ф. Егорова [1]) о последовательностях измеримых функций существует измеримое множество E, $\operatorname{mes} E > (b-a) - \frac{\varepsilon}{4}$, на котором последовательность сходится *равномерно*. Возьмем в этом множестве совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2}$, что всегда возможно.

Пересечение множеств $P \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n \cdot \ldots$ есть замкнутое множество. Ясно, что его мера превышает число

$$b - a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \frac{\varepsilon}{2} = (b-a) - \varepsilon.$$

Пусть совершенное множество π есть его *приведенное ядро* (см. пункт 2 этой статьи). Имеем $\operatorname{mes} \pi > (b-a) - \varepsilon$. Но на множестве π всякая функция последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ непрерывна, и кроме этого последовательность сходится равномерно. Значит, предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ есть непрерывная функция на π. А это и есть свойство (C).

Теорема. *Всякая измеримая функция $f(x)$ обладает свойством (C).*

Доказательство этого предложения разобьем на следующие пункты.

а) *Сумма двух функций, обладающих свойством (C), также обладает этим свойством (C).* В самом деле, пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обладают свойством (C). Существуют совершенные множества P и Q, на которых эти функции соответственно непрерывны, причем $\operatorname{mes} P > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2}$ и $\operatorname{mes} Q > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2}$. Пересечение $P \cdot Q$ есть замкнутое множество меры, большей $(b-a) - \varepsilon$. Обозначая через π приведенное ядро множества $P \cdot Q$, видим, что $\operatorname{mes} \pi > (b-a) - \varepsilon$ и что на π сумма $\varphi(x) + \psi(x)$ непрерывна, так как непрерывны оба слагаемых.

б) *Всякая двузначная измеримая функция $f(x)$ обладает свойством (C).* В самом деле, пусть $f(x)$ есть дву-

---

[1]) См. статью «О последовательностях измеримых функций».

значная функция, т. е. принимающая лишь два значения A и B. Пусть $f(x)=A$ на множестве E: тогда $f(x)=B$ на CE. В силу предположенной измеримости функции $f(x)$ множества E и CE измеримы. Если $\operatorname{mes} E>0$, берем совершенное множество P, содержащееся в E и меры $\operatorname{mes} P>\operatorname{mes} E-\frac{\varepsilon}{2}$.

Если $\operatorname{mes} CE>0$, берем совершенное множество Q, содержащееся в CE и меры $\operatorname{mes} Q>\operatorname{mes} CE-\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\pi=P+Q$. Ясно, что π есть совершенное множество меры $>(b-a)-\varepsilon$ и что на нем $f(x)$ непрерывна.

в) *Всякая счетно-значная измеримая функция обладает свойством* (C). В самом деле, пусть $f(x)=A_k$ на множестве E_k, где $k=1, 2, 3, \ldots$; множество E_k измеримо, раз $f(x)$ измерима.

Пусть $\varphi_k(x)$ есть функция, равная A_k на E_k и равная нулю вне E_k. В силу предыдущего пункта (б)) функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$ обладают свойством (C) и, значит, в силу а) обладают свойством (C) и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)+\varphi_2(x), \ldots, \varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_k(x), \ldots$

По предыдущей лемме их предел так же обладает свойством (C). Но этот предел есть, очевидно, данная функция $f(x)$.

г) *Всякая имеримая функция обладает свойством* (C).

В самом деле, пусть неравенство $\frac{k}{n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{n}$ определяет множество $E^{(k)}$ точек x. Ясно, что $E_n^{(k)}$ измеримо. Пусть $f_n(x)$ есть функция, равная $\frac{k}{n}$ на $E_n^{(k)}$ для $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ и равная $+\infty$ и $-\infty$ там, где соответственно равна $+\infty$ и $-\infty$ данная функция $f(x)$. Ясно, что $f_n(x)$ есть счетно-значная измеримая функция, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. В силу в) и предыдущей леммы функция $f(x)$ обладает свойством (C).

Соединяя все полученное, мы имеем предложение:

Теорема. *Для того чтобы данная функция $f(x)$ была измеримой на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного ε имелось такое совер-*

шенное множество P меры $\mathrm{mes}\,P > (b-a)-\varepsilon$, *на котором* $f(x)$ *есть непрерывная функция* [1]).

16. Критерий измеримости функций. Можно указать два интегральных (тотальных) критерия для того, чтобы данная функция $f(x)$ была измерима.

Теорема. *Для того чтобы данная функция* $f(x)$ *была измеримой на сегменте* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция* $\varphi(x)$, *измеримая B и класса* $\leqslant 2$ *на сегменте* $[a, b]$, *которая отличалась бы от* $f(x)$ *только на множестве меры нуль.*

В самом деле, указанное *условие необходимо.* Действительно, если $f(x)$ измерима, она обладает свойством (C). Но тогда, рассматривая доказательство первой теоремы предыдущего пункта, мы видели, что данная функция может быть написана в виде $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)+\psi(x)$, где $\varphi_n(x)$ в свою очередь дается равенством $\varphi_n(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_n^{(\nu)}(x)$, причем функция $\varphi_n^{(\nu)}(x)$ есть уже непрерывная на сегменте $[a, b]$. Отсюда следует, что $\varphi_n(x)$ есть измеримая B и класса $\leqslant 1$, и значит, функция $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ есть измеримая B и класса $\leqslant 2$ [2]). Что же касается $\psi(x)$, то она равна нулю почти всюду на $[a, b]$.

Условие достаточно. Действительно, если разность $f(x)-\varphi(x)$ не равна нулю лишь на множестве меры нуль, то эта разность есть измеримая функция. Обозначая ее через $\psi(x)$,

---

[1]) Мысль о справедливости свойства (C) для всех измеримых функций и о критериях измеримости принадлежит Д. Ф. Егорову (см. мою заметку «К основной теореме интегрального исчисления». Математический сборник, т. 28, стр. 282, 1911). Название «свойство (C)» происходит от термина «la propriété (C)» (propriété de la *Continuité* — свойство непрерывности), употребленного мною впервые в заметке «Sur les propriétés des fonctions mesurables» (Comptes Rendus, т. 154, стр. 1688, 1912); его пришлось сохранить в русской литературе, чтобы остеречься многообразия терминов для одного и того же понятия.

[2]) Следуя Бэру, называют всякую *непрерывную* функцию $f(x)$ *функцией класса* 0; далее, если $f(x)$ есть разрывная функция, но является пределом непрерывных функций $f_n(x)$, тогда $f(x)$ называется функцией *класса* 1; всякая функция $f(x)$, являющаяся пределом функций класса 1 и не являющаяся ни функцией класса 0, ни функцией класса 1, называется функцией *класса* 2 и т. д.

имеем $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$. Но раз $\varphi(x)$ измерима B, то и $f(x)$ измерима.

Теорема. *Для того чтобы данная функция $f(x)$ была измеримой на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовал ряд многочленов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, абсолютно сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.*

Условие необходимо. В самом деле, в силу свойства (C) измеримой функции $f(x)$ для любого целого положительного n имеется совершенное множество P_n меры $\operatorname{mes} P_n > (b-a)-\frac{1}{n}$, на котором $f(x)$ непрерывна.

Пусть $\pi_n = P_1+P_2+\ldots+P_n$. Ясно, что π_n есть совершенное множество меры $>(b-a)-\frac{1}{n}$; $f(x)$ на нем непрерывна. Последовательность $\pi_1<\pi_2<\ldots<\pi_n<\ldots$ есть возрастающая. Пусть $\varphi_n(x)$ есть функция, равная $f(x)$ на π_n и линейная на сегментах (замкнутых), смежных к π_n. Ясно, что определенная таким образом функция $\varphi_n(x)$ *есть непрерывная на целом сегменте* $[a, b]$; на π_n она совпадает с $f(x)$. Пусть $Q_n(x)$ есть многочлен, для которого неравенство $|\varphi_n(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n^2}$ справедливо всюду на $[a, b]$; в силу известной теоремы Вейерштрасса всегда можно найти такой многочлен $Q_n(x)$ для всякой непрерывной функции $\varphi_n(x)$. Теперь на множестве π_n мы будем иметь

$$|Q_{n+1}(x)-Q_n(x)| \leqslant |Q_{n+1}(x)-\varphi_{n+1}(x)|+|\varphi_{n+1}(x)-$$
$$-Q_n(x)| = |Q_{n+1}(x)-\varphi_{n+1}(x)|+|\varphi_n(x)-Q_n(x)| < \frac{2}{n^2}.$$

Вводя обозначения: $P_1(x)=Q_1(x)$; $P_{n+1}(x)=Q_{n+1}(x)-Q_n(x)$, заключаем, что ряд многочленов $P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)+\ldots$ есть абсолютно сходящийся на множестве $E=\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_n+\ldots$ меры $\operatorname{mes} E=b-a$ и имеет на этом множестве своею суммою данную функцию $f(x)$.

Условие достаточно. Пусть для некоторой данной функции $f(x)$, подлежащей испытанию, существует ряд многочленов $P_1(x)+P_2(x)+\ldots$, сходящийся к ней всюду, кроме множества R меры нуль, $\operatorname{mes} R=0$. В силу теоремы

Д. Ф. Егорова существует измеримое множество E меры $\operatorname{mes} E > (b-a) - \frac{\varepsilon}{2}$, на котором этот ряд сходится *равномерно*. Пусть E_1 есть множество точек E, не принадлежащих к R. Ясно, что E_1 измеримо и $\operatorname{mes} E_1 = \operatorname{mes} E$. Отсюда всегда можно найти в множестве E_1 совершенное множество π меры $\operatorname{mes} \pi > (b-a) - \varepsilon$. На этом совершенном множестве π ряд сходится равномерно, и значит, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на π. Следовательно, $f(x)$ обладает свойством (C), что влечет ее измеримость.

17. Установленные предложения достаточно глубоко вскрывают строение произвольной измеримой функции. Из самых доказательств этих предложений следует, что, *какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, ее значения на некотором совершенном множестве P, мера которого превышает $(b-a)-\varepsilon$, получаются путем взятия значений от непрерывной на целом сегменте $[a, b]$ функции $\varphi(x)$.*

Иначе говоря, *всякая измеримая функция $f(x)$ получается из непрерывной на целом сегменте функции $\varphi(x)$ путем деформации этой последней на счетном множестве интервалов, общая сумма длин которых меньше ε.*

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и заставляя целое n бесконечно возрастать, мы получаем последовательность совершенных множеств $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, где $\operatorname{mes} P_n > (b-a) - \frac{1}{n}$, и последовательность непрерывных на целом сегменте $[a, b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, таких, что $f(x) = \varphi_n(x)$ на P_n. Так как мера множества $P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$ есть $b-a$, то *значения произвольной измеримой функции получаются почти всюду на $[a, b]$ путем взятия значений от счетного числа непрерывных на целом сегменте функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$*

Таким образом в тех вопросах, где пренебрегают множествами меры, меньшей ε, вместо измеримой функции $f(x)$ можно ограничиться рассмотрением одной непрерывной функции $\varphi(x)$; там же, где пренебрегают лишь множеством меры нуль, там вместо измеримой функции $f(x)$ достаточно рассматривать *счетное множество* непрерывных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$

Так как непрерывные функции суть самые простые функции анализа, то приведением к непрерывным функциям достигается значительное упрощение, потому что этим обходят рассмотрение всей сложности разрывов измеримых функций и сводят дело к одним только непрерывным функциям.

Произвольная измеримая функция, т. е. наиболее общая и, *повидимому*, единственно возможная [181] функция анализа, оказывается, не содержит в своем строении ничего, кроме классической непрерывности, если, понятно, пренебрегают множеством меры нуль.

18. Дифференциальные свойства измеримых функций. Выше мы изложили *интегральные* (тотальные) свойства измеримых функций. Можно также указать и некоторые *дифференциальные* свойства их.

Мы уже заметили раньше (n° 6), что точка x_0, являющаяся точкой плотности одновременно для каждого из двух множеств E_1 и E_2, есть точка плотности и для пересечения их, $E_1 \cdot E_2$. Отметим еще, что *если x_0 есть точка плотности для измеримого множества E, тогда в E содержится совершенное множество P, имеющее точку x_0 также точкою плотности.*

Заметив это, введем следующее определение: какая-нибудь функция действительного переменного $f(x)$ называется *асимптотически непрерывною в точке* x_0, если существует такое совершенное множество P, имеющее точку x_0 точкою плотности, на котором функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

В силу справедливости свойства (C) для измеримых функций немедленно заключаем, что:

Всякая измеримая финкция $f(x)$ асимптотически непрерывна почти всюду на сегменте $[a, b]$ [182] [1]).

---

[1]) Целесообразность введения асимптотической непрерывности вытекает хотя бы из следующего легко доказываемого предложения [183]: *если $f(x)$ есть ограниченная измеримая функция, тогда неопределенный интеграл Лебега $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$ имеет обыкновенную производную $F'(x_0)$ во всякой точке x_0 асимптотической непрерывности подинтегральной функции $f(x)$, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Обратное предложение: *всякая асимптотически непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ есть измеримая функция,* также справедливо; мы ограничимся здесь лишь его формулировкой, не давая доказательства.

Вот еще одно определение: функция $f(x)$ называется имеющей *асимптотическую производную в точке* x_0, если существует такое совершенное множество P, имеющее точку x_0 точкою плотности, что отношение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

стремится к определенному пределу, когда точка x стремится к точке x_0, *не покидая множества* P.

В этом случае предел этого отношения называется *величиной асимптотической производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается символом $f^{[1]}(x)$.

В силу сделанного выше заключения о том, что точка плотности x_0 для двух множеств есть точка плотности и для их пересечения, немедленно следует, что асимптотическая производная, если она существует, есть *единственная* и, значит, характеризует своею величиною некоторое дифференциальное свойство функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение асимптотической производной принадлежит А. Я. Хинчину и положено в основу его важной работы по расширению интеграла А. Данжуа [184].

Непрерывная функция может почти всюду не иметь обыкновенной производной и в то же время может почти всюду иметь асимптотическую производную [185]. Она может, наконец, не иметь ни той, ни другой [186]. Но если она *нигде* не имеет правосторонней производной, она *должна* тогда иметь бесконечно много точек с асимптотической производной (А. С. Безикович и позже В. Н. Вениаминов) [187]. Мы ограничимся лишь формулировкою этих интересных предложений о непрерывных функциях.

СПИСОК ПРОБЛЕМ, ПОСТАВЛЕННЫХ Н. Н. ЛУЗИНЫМ В ПЕРИОД ПОДГОТОВКИ ДИССЕРТАЦИИ

Среди рукописей Н. Н. Лузина, найденных после его смерти, имеется одна, озаглавленная «Список вопросов». Из личных бесед с Н. Н. Лузиным нам известно, что, находясь в научной командировке, сначала в Геттингене, а затем в Париже с 1911 по 1914 г., он работал над темами, из которых была потом создана его диссертация. В это время он имел обыкновение записывать те вопросы, которые ему казалось нужным разрешить. Публикуемый ниже текст и есть как раз этот список вопросов. Часть из них Н. Н. Лузин разрешил позже сам, некоторые в явной форме поставил в своей диссертации или других работах, иные предлагал для разрешения своим ученикам, указывая пути к их решению. Поскольку список он писал для себя, не предполагая его публиковать, многие вопросы высказаны в форме намека или неясно выраженной мысли. Мы публикуем сейчас этот список без всяких изменений и лишь в комментариях высказываем свои догадки по поводу того, что, по нашему мнению, имел в виду Н. Н. Лузин, когда мысль его была выражена не вполне точно.

После первых 42 вопросов в списке Н. Н. Лузина стояла фраза: «Много было продумано и пропущено, к сожалению, вопросов. Продолжаю снова записывать». Повидимому, первая серия вопросов написана до появления в 1912 г. в Comptes Rendus Парижской Академии наук заметок Данжуа, где он впервые ввел свое определение интеграла; поэтому здесь стоят вопросы, которые после этих заметок оказались решенными. В последующих вопросах Н. Н. Лузин уже пользуется понятием тотализуемой функции. К сожалению, он вскоре перестал записывать возникавшие у него вопросы.

В комментариях к списку проблем мы поставили себе целью указать, какие именно из них были впоследствии решены самим Н. Н. Лузиным или другими математиками. В тех случаях, когда решение проблемы не встречалось в литературе, но могло быть легко получено из известных в настоящее время фактов, мы тоже считали нужным это указать.

Редакторы.

СПИСОК ВОПРОСОВ

1. «Пусть $f(x)$ такова, что

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx < +\infty,$$

где $\{a_0, a_n, b_n\}$ определены по Фурье.

Может ли случиться, что для *всякого* x,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) = +\infty$$

и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) = -\infty \text{?» [188]}$$

2. «Может ли случиться, что

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

сходится для интервала $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$ к функции $f(x)$, голоморфной в этом интервале, не будучи рядом Фурье и даже расходясь вне $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$?

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, и ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

определит гармоническую функцию внутри $|z| < 1$. Сопряженный ряд определит гармоническую же функцию внутри $(R=1)$, оба вместе — аналитическую функцию $F(z)$, голоморфную *внутри* $(R=1)$. Чрезвычайно вероятно, что $F(z)$ будет голоморфна на $(R=1)$ в куске $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$ и, следовательно, и сопряженный ряд будет сходящимся в этом интервале (Рисс-Фату)?» [189]

3. «Если имеем

$$\frac{a_0}{2} + (a_2 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots$$
$$\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, имеем тогда

$$S_0(x),\ S_1(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots;$$

можно ли выбрать такие $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, чтобы $\lim\limits_{p\to\infty} S_{n_p}(x)$ существовал? и существовал всюду, кроме, быть может, множества меры нуль?

Если да, всегда ли это есть одна и та же функция с разными рядами

$$n_1',\ n_2',\ \ldots,\ n_p',\ \ldots,$$
$$n_1'',\ n_2'',\ \ldots,\ n_p'',\ \ldots,$$

т. е. аналогия сходимости в среднем?» [190]

4. «Пусть дается $f(x)$, измеримая, конечная и определенная в каждой точке x, кроме множества меры нуль.

Существует $F(x)$ непрерывная и такая, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\text{ кроме множества меры нуль.}$$

Обозначаю

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(по определению).}$$

Согласно этому имею

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] = f(x)\sin nx + F(x)\,n\cos nx,$$

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] - F(x)\,n\cos nx = f(x)\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x)\sin nx\Big] - \frac{d}{dx}\int_0^x F(x)\,n\cos nx\,dx = f(x)\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{F(x)\sin nx - \int_0^x F(x)\,n\cos nx\,dx\right\} = f(x)\sin nx,$$

и

$$F(b)\sin nb - F(a)\sin na - n\int_a^b F(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\sin nx\,dx.$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\cos nx\right] = f(x)\cos nx + F(x)\cdot[-n\sin nx],$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\left[F(x)\cos nx\right] + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx\right\} = f(x)\cos nx\,dx,$$

т. е.

$$F(b)\cos nb - F(a)\cos na + n\int_a^b F(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\cos nx\,dx;$$

делая $b = 2\pi$, $a = 0$, имеем

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi) - F(0) = \pi a_0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = F(2\pi) - F(0) + n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx = \pi b_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Нельзя ли смотреть на эти формулы, как на определяющие коэффициенты Фурье (в моем смысле) для не суммируемой и не интегрируемой ни в каком смысле функции $f(x)$, по крайней мере, если

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{одновременно?» [191]}$$

5. «Дана $f(\theta)$ непрерывная на круге $(R=1)$ и такая, что $\frac{df(\theta)}{d\theta}=0$, кроме множества меры нуль.

Делю $(R=1)$ на $2n$ равных частей. В каждой части есть для $f(\theta)$ «средняя» ордината (т. е.

$$2n\int_{a}^{a+\frac{1}{2n}} f(\theta)\,d\theta = f(\theta_1)).$$

Нумерую как-нибудь, но по порядку следования, эти части. Беру четные ординаты с $+$, нечетные с $-$ и делаю общую их сумму. Пусть это есть

$$\sigma_n.$$

Существует ли $f(\theta)$ свойств вышеуказанных и такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$$

равномерно, при любом начале для разделения $(R=1)$ на $2n$ частей?»

Ясно, что, если $f(\theta)$ с ограниченным изменением, тогда

$$|\sigma_n|<K,$$

где K — определенное число, постоянное раз навсегда! [192]

6. «Получить интеграл более общий, чем Лебега, регулярным процессом, указанным Д. Ф. Егоровым!

Обобщить интеграл Дюбуа-Реймона». [193]

7. «Пусть имеем

$$\frac{a_0(y)}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n(y)\cos nx+b_n(y)\sin nx,$$

где

$$\frac{a_0^2(y)}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n^2(y)+b_n^2(y)<K.$$

Знаем, что для y определенного имеем $f(x, y)$ и для y определенного имеем $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ такие, что

$$\lim_{p\to\infty}S_{n_p}(x, y)=f(x, y).$$

С вариацией y-ка меняется ли $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$?» [194]

8. «Ряд Тейлора

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$ изображает $f(z)$, голоморфную *внутри* $(R=1)$. Может ли случиться, что $f(z)$ *не* существует на $(R=1)$ для множества меры >0 при радиальном стремлении?» [195].

9. «Фату доказал:

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0; \quad \lim_{n\to\infty} nb_n = 0,$$

соответствует (по Риссу) некоторой $f(x)$, интегрируемой в (L). Пусть $\int\limits_0^x f(x)\,dx = F(x)$. Если

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *сходится*».

Существуют ли такие $f(x)$, которые суть *точные* производные непрерывной $F(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и для которых ряд

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

везде расходится, или расходится в мере >0, или если сходится, то не к $\frac{dF}{dx}$?» [196].

10. «Пусть $F(\theta)$ — непрерывная на $(R=1)$. Какова ее функциональная природа, дабы

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = 0$$

и одновременно

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha = 0\,?\text{»}\ [^{197}]$$

11. «Пусть $f(x)$ есть функция, вполне определенная для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; пусть существует непрерывная на $(R=1)$ функция $F(x)$, такая, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Что — имеем ли $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0\,?$$

$\int$ понимается как примитивная функция». [198]

12. «Пусть имеем $F(\theta)$, определенную на $(R=1)$. Пусть

$$F(\theta) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta$$

и

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

Ясно, что тогда $\int\limits_0^{2\pi} F^2(\alpha)\, d\alpha < +\infty$

$$\left(\int_0^{2\pi} \text{ есть интеграл Лебега}\right).$$

Пусть еще ряд

$$f(\theta) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} - na_n\sin n\theta + nb_n\cos n\theta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n\sin n\theta + b_n\cos n\theta)$$

таков, что гармоническая функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

существует на $(R=1)$ на множестве меры >0, хотя бы в смысле нормального приближения к $(R=1)$.

Нельзя ли сказать в обобщенном смысле, что

$$f(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta}\ ?\text{»}\quad [199]$$

13. «Непрерывная функция $F(\theta)$, разлагающаяся в ряд Фурье' такой, что

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nb_n = 0,$$

не есть ли функция, имеющая всегда производную всюду, кроме множества меры 0?» [200]

14. «Знаем, что рядом полиномов, сходящимся во всякой точке, изобразима всякая функция 1-го класса. Какие функции изобразимы тригонометрическим рядом, сходящимся во всякой точке? Тут еще дополнительный вопрос относительно неполного изображения, т. е. изображения, игнорируя множество меры нуль». [201]

15. «Знаем, что, если у ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ряд $\sum_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ сходится, то существуют числа

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots,$$

такие, что, обозначая $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$,

имеем сходимость последовательности

$$S_{n_1},\ S_{n_2},\ \ldots,\ S_{n_k},\ \ldots$$

к пределу. (Я думаю, что при условии сходимости $\sum_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ $n_k = k$.) Пусть, обратно, имеем ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

такой, что есть числа $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, такие, что последовательность

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots$$

сходится. Что сказать о коэффициентах и о сумме ряда?» [202]

16. «Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть ее D_+ есть всегда конечная величина, кроме, быть может, множества меры нуль. Имеется ли тогда у $f(x)$ обычная производная во множестве меры > 0?» [203]

17. «Пусть $f(x)$ — непрерывная функция (или вообще измеримая), определенная для области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть для множества $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes} \mathfrak{M} > 0$, в каждой точке ξ множества $\mathfrak{M}$ все четыре производных числа Дини: D_+, D^+, D_-, D^-, имеют конечную величину. Можно ли тогда утверждать, что $f(x)$ имеет производную обыкновенную всюду на $\mathfrak{M}$, кроме множества точек из $\mathfrak{M}$ меры 0? [204] *Кажется, да*!»

18. «Все тригонометрические ряды Фурье можно разделить на *два* класса: I класс — ряды, сходящиеся на 2-й категории, II класс — ряды, расходящиеся на 2-й категории. Существуют ли оба эти класса?» [205]

19. «Непрерывные функции $f(x)$, определенные в области $0 \leqslant x \leqslant 1$, можно разделить на два класса: I — такие функции, что существует такое совершенное множество P, $\operatorname{mes} P > 0$, на котором $f(x)$ с ограниченным изменением, и II — где этого сделать нельзя! Дать примеры обоих классов!» [206]

20. «Изобрести алгорифм составления примеров тех или других функций, встречающихся в работе. Возможна ли основная теорема, в которую входят множества с параметрами?» [207]

21. Существует ли $f(x)$ свойств:

1. $f(x)$ непрерывна в $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Для каждого x области $0 \leqslant x \leqslant 1$ есть обыкновенная производная $\frac{df}{dx}$, причем для $x=0$ правая и для $x=1$ левая.

3. $\frac{df}{dx}=0$ всюду, кроме множества меры 0? Интересно исследовать именно следующее: условие, чтобы $\frac{df}{dx}=0$ всюду, кроме множества меры 0, не налагает ли того следствия, что есть непременно такая точка ξ, где $\frac{df}{dx}$ не существует? Можно взять в первых попытках $f(x)$ растущею!

Дело в том, чтобы получить теорему Шеффера не отрицательным, а положительным путем. Это — источник вопроса. А затем еще и отношение такой $f(x)$, если она есть, к своему разложению в ряд Фурье тригонометрический и его производному ряду! [208]

22. «Существует ли тригонометрический ряд

$$\sum_{0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сходящийся на множестве, мера которого >0 и $<2\pi$?

Или таких рядов вообще нет?» [209]

23. «Пусть на круге $(R=1)$ дается множество $\mathfrak{M}$ свойств:

1. $\mathfrak{M}$ есть I категории.

2. $\operatorname{mes}\mathfrak{M}=0$.

Можно ли круг так повернуть, чтобы $\mathfrak{M}$ переместилось, как твердая система в $\mathfrak{M}_1$, так, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ будут без общей точки? Или, чтобы хотя и была общая часть $\mathfrak{M}'$, но чтобы уже $\mathfrak{M}'$ можно повернуть было без общей точки?

Или аналогично, называя $\mathfrak{M}''$ часть совпадения от поворачивания $\mathfrak{M}'$, чтобы $\mathfrak{M}''$ можно было повернуть без общей точки, и т. д.

Есть ли остановка на конечном числе таких операций?» [210]

24. «Теорема Фату-Рисса читается так:

„Если $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$ есть голоморфная функция на дуге $(R=1)$ и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то ряд на этой дуге сходится и сходится равномерно".

Если же $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$ не будет голоморфная на дуге $(R=1)$, но будет изображать функцию (определенную приближением внутренней точки к периферии круга), имеющую все производные непрерывными на этой дуге, сходится ли ряд тогда равномерно?

Заметим, что здесь отнюдь нет гипотезы о сходимости $\sum_{0}^{\infty} |\alpha_n|^2$, т. е. не только интегрируемости в квадрате функции $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$ на окружности $(R=1)$, но даже нет гипотезы ее существования на $(R=1)$, кроме той дуги, где ставится вопрос о сходимости !!

Тут еще можно отказаться от массы условий и, например, допустить, что действительная и мнимая часть функции $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$ суть функции с ограниченным изменением на некоторой дуге». [211]

25. «Если имеем $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$, где $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, существует ли функция $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n$ на периферии $(R=1)$? Может ли не существовать на множестве точек меры >0?» [212]

26. «Пусть $F(r, \theta)$ есть гармоническая функция, имеющая смысл на некоторой дуге круга радиуса 1; пусть там она интегрируема в квадрате. Сходится ли соответствующий тригонометрический ряд на этой дуге?» [213]

27. «Какие свойства должны быть у непрерывной функции $f(x)$, чтобы ее сопряженная гармоническая $f_1(x)$ была также непрерывною?» [214]

28. «Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция; пусть $f_n(x)$ есть n-е приближение к ней. В некоторых точках, конечно,

это приближение будет наиболее близким, в иных же точках это приближение будет наиболее далеким. Мера множества этих последних точек не будет ли равна 0? Разумеется, все зависит от законов приближения; наиболее интересны чебышевские или тригонометрические приближения». [215]

29. «Построить тригонометрический ряд с убывающими до 0 коэффициентами, суммирующийся по методу Фейера и дающий в результате 0 всюду, кроме, быть может, множества меры 0». [216]

30. «Пусть $f(x)$ измерима и ограничена. Тогда коэффициенты Фурье для $f(x)$ стремятся с ростом n к 0. Поэтому среди этих коэффициентов есть наибольший по абсолютной величине. Существует ли формула для определения этой величины? Или, быть может, есть формула для длины того наименьшего интервала, который содержит все коэффициенты Фурье для $f(x)$, отмеченные как точки на шкале?» [217]

31. «Если $f(x)$ с интегрируемым квадратом, тогда

$$\sum_{0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

сходится (Парсеваль). Если $f(x)$ ограничена, каков наименьший предел таких σ, что ряд

$$\sum_{0}^{\infty} a_n^{\sigma} + b_n^{\sigma}$$

сходится?» [218]

32. «Каково необходимое и достаточное условие на коэффициенты Фурье $\{a_n, b_n\}$, дабы соответствующая $f(x)$ была ограниченной?» [219]

33. «Известно, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Какова величина

$$\int_{0}^{2\pi} f^4(x)\,dx?$$

Или, если $\Omega(y)$ есть положительная функция, целая, со всеми коэффициентами Тейлора положительными, найти величину

$$\int\limits_0^{2\pi} \Omega[f(x)]\,dx,$$

если можно, и для других функций Ω, кроме степеней переменного?» [220]

34. «Существует ли такой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

который есть ряд Фурье от функции $f(x)$, *интегрируемой абсолютно*, тогда как сопряженный ряд тригонометрический

$$-\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos nx+a_n\sin nx)$$

не есть ряд Фурье от функции, интегрируемой абсолютно?» [221]

35. «Существует ли такая последовательность чисел

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} b_n=0,$$

дабы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

расходился, тогда как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos nx$$

был рядом Фурье от функции, *интегрируемой абсолютно*?» [222]

36. «Пусть $f(x)$ есть точная первая производная от непрерывной функции $F(x)$ для всех точек области

$$0\leqslant x\leqslant 1$$

(для $x=0$ $f(0)$ есть правая производная, для $x=1$ — левая).

Пусть $f(x)$ есть *конечная* для *всякого* x области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда $F(x)$ есть ее единственная первообразная функция. Обозначим ее через

$$\int_0^x f(x) + C, \text{ где } C \text{ — абсолютная константа.}$$

Введем далее символ

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x).$$

Если $f(x)$ абсолютно интегрируема в смысле Лебега, то имеем

$$\int_0^x f(x) \equiv \int_0^x f(x)\,dx,$$

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Если же $f(x)$ *не интегрируема абсолютно*, тут нужен наш символ. Ясно, что при условии $f(x)$ быть *конечной* точной производной $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) суть также конечные точные производные, ибо

$$\frac{d}{dx}(F(x)\sin nx) = f(x)\sin nx + F(x)\,n\cos nx,$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\sin nx) = f(x)\sin nx + \frac{d}{dx}\int_0^x nF(x)\cos nx\,dx,$$

$$f(x)\sin nx = \frac{d}{dx}\left[F(x)\sin nx - n\int_0^x F(x)\cos nx\,dx\right].$$

Отсюда по введенному обозначению

$$F(x)\sin nx - n\int_0^x F(x)\cos nx\,dx = \int_0^x f(x)\sin nx.$$

В частности же

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично:

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos nx) = f(x)\cos nx - F(x)\,n\sin nx,$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)\cos nx) = f(x)\cos nx - \frac{d}{dx}\int_0^x F(x)\,n\sin nx\,dx,$$

$$f(x)\cos nx = \frac{d}{dx}\left[F(x)\cos nx + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx\right],$$

откуда

$$F(x)\cos nx + n\int_0^x F(x)\sin nx\,dx - F(0) = \int_0^x f(x)\cos nx.$$

В частности же

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = F(2\pi) - F(0) + n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx.$$

Обозначая

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = a_n, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx = b_n,$$

имеем последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

Вопрос теперь ставится такой: При гипотезе $f(x)$ быт точной *конечной* производной, имеют ли место равенства

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Вероятно, что это и имеет место!» [223]

37. «Если в предыдущем вопросе имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то интересно изучить обобщенный интеграл Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\,d\alpha$$

и теорему Пикара для него!» [224]

38. «Пусть $f(x)$ есть абсолютно интегрируемая функция, определенная в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Существует регулярный процесс, дающий $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ в смысле Лебега.

Пусть $f(x)$ есть точная производная, конечная везде в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Существует ли регулярный процесс, дающий ее единственную первообразную функцию $\int\limits_0^x f(x)$?» [225]

39. «По поводу моей теоремы относительно признака сходимости тригонометрических рядов Таубера-Юнга:

Пусть $f(x)$ есть функция свойств:

1) $f'(x)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$.

2) $f'(x)$ непрерывна в области $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

3) $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx$ есть *конечное* число $(< +\infty)$. Кладя

$$F(x) = \int\limits_0^1 \frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\,d\alpha,$$

должны иметь для $F(x)$ свойства:

1) $F(x)$ определена и конечна в области $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$.

2) $\int\limits_0^1 F^2(x)\,dx < +\infty$, т. е. конечное число. Как это доказать прямо?» [226]

40. «Если $f(x)$ есть конечная функция и точная производная в области $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то можно ли характеризовать ее свойства, исходя из одного этого? (вроде свойств Бэра), и получить регулярный процесс вопроса 38». [227]

41. «Пусть $f(\theta)$ есть положительная функция, определенная в области $0 \leqslant \theta < 2\pi$ и не интегрируемая абсолютно. Повидимому, *не* существует ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \rho^n,$$

который был бы ограничен снизу в области $\{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, $0 \leqslant \rho < 1$ и изображал бы $f(\theta)$ при стремлении ρ к 1 и θ, постоянном всюду, кроме, быть может, множества меры 0! При этом *главное условие* то, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Если же отказаться от этого условия, то, быть может, и существуют такие ряды». [228]

42. «В связи с предыдущим вопросом стоит следующий: пусть M есть множество всех измеримых функций, определенных для $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Пусть $f(\theta)$ есть один из элементов этого множества. Существует ли регулярный процесс (R), в силу которого $f(\theta)$ делается соответственной последовательность чисел

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$b_1, \ldots, b_n, \ldots,$$

так что двум f и f_1, разнящимся на множестве точек θ меры $>$ нуля, соответствуют две *разные* последовательности $\{a_n, b_n\}$ и $\{a'_n, b'_n\}$ и чтобы, если $f(\theta)$ была интегрируемой абсолютно или в смысле Гарнака, или в моем, то чтобы $\{a_n, b_n\}$ совпали с коэффициентами Фурье». [229]

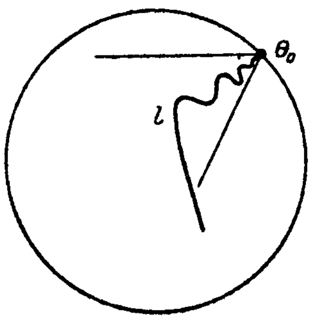
43. «Пусть ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *сходится* для всякого x $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. Пусть его сумма есть $S(x)$; $S(x)$ — конечная для всякого x. Можно ли утверждать, что,

если $S(x)$ всегда *не* отрицательна, $S(x) \geqslant 0$, то непременно $S(x)$ интегрируема в смысле Лебега?» [280].

44. «Доказано, что не может существовать гармоническая функция $P(\rho, \theta)$, голоморфная внутри $(\rho = 1)$ и принимающая на окружности $(\rho = 1)$ во всякой точке значение 0.

Но не доказано (мне неизвестно доказательство), что не существует $P(\rho, \theta)$ условий вышеприведенных и принимающая значения 0 во всякой точке $(\rho = 1)$ по дорожкам, не касательным к окружности.

Определение. Дорожка l не касательна к окружности $(\rho = 1)$ в точке θ_0, если можно провести такие *некасающиеся* два луча к θ_0, что дорожка l лежит между ними, при достаточной близости к $(\rho = 1)$ (черт. 6).



Черт. 6.

Дорожка может сама и не иметь касательной!» [281]

45. «Если гармоническая функция

$$P(\rho, \varphi) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_n,\ b_n \to 0,$$

такова, что на дуге $(\rho = 1)$ $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$, эта $P(\rho, \varphi)$ *принимает* (в абсолютном смысле) значения, голоморфные от аргумента φ, можно ли утверждать, что тригонометрический ряд

$$\int P(\rho, \varphi)\, d\varphi$$

сходится на этой дуге $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ и представляет на этой дуге функцию, имеющую производную?

Тут обобщение для слова „голоморфность значений $P(\rho, \varphi)$“ на дуге и замена интегрируемостью в смысле Лебега, Данжуа. Изучить, если на дуге $P(1, \varphi)$ есть точная производная!» [232].

46. «Нельзя ли воспользоваться формулой Дюбуа-Реймона и явлением Гиббса, чтобы, представив непрерывную $f(x)$ в виде n ступеней (параллельных оси x'-ов) и построив для $f_n(x)$ ряд Фурье, именно, n первых его членов, т. е. функцию $S_n'(x)$, изучить вариацию

$$|S_n(x) - S_n'(x)|.$$

Нельзя ли этим путем построить нужный пример или построить доказательство?» [233]

47. «Пусть ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ сходится к конечной величине для всякого x. Пусть его сумма есть $S(x)$. Имеем

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Рассмотрим функцию

$$U(x) = C + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right).$$

Ясно, что $U(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом; ясно, что вышеприведенный ряд сходится (Фату) всюду, кроме, быть может, множества меры 0. Пусть множество всех его точек сходимости есть E, $\operatorname{mes} E = 2\pi$. E может быть и I категории. Ясно, что $U(x)$ определена только в этих точках. В остальных же точках — пустоты. Можно ли их восстановить своего рода аналитическим продолжением?

Пусть ξ_1 и ξ_2 суть две точки от E. Составим разность

$$U(\xi_2) - U(\xi_1).$$

Это есть конечное число.

Я спрашиваю, можно ли его получить непосредственно из $S(x)$, не прибегая к *тригонометрической формуле* для $U(x)$?

Ясно, что здесь кроется вся загадка *интегрирования* как регулярного процесса.

Видоизменяя $S(x)$ — если можно так выразиться, — можно ли *всегда* получить для разности одно и то же число

$$U(\xi_2) - U(\xi_1).$$

Вот правильная постановка проблемы интегрирования!

Может быть придем к *инфинитной* интерпретации? Своего рода интерполяция для множества меры нуль, своего рода аналитическое продолжение. Иметь в виду, что $S(x)$ можно (и должно?) предполагать существующей только на множестве I категории меры 2π». [234]

48. «Пусть $f(x)$ есть производная от непрерывной функции $F(x)$ для *всякого* x, кроме счетного множества точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

где производная функция $F'(x)$ совсем не существует.

Можно ли утверждать, что $f(x)$ непременно тотализуема и что, следовательно, $f(x)$, будучи конечной для всякого x, кроме $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, где $\frac{dF}{dx}$ не существует, дает $F(x)$ через тотализацию

$$(D)\int\limits_0^x f(\alpha)\,d\alpha». \text{ [235]}$$

49. «Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d}{dx}\left[(x-x_n)^2 \sin\frac{1}{(x-x_n)^2}\right]$$

там, где этот ряд сходится, при сильно убывающем асимптотическом законе $|A_n|$. Повидимому, при достаточно сильно убывающем асимптотическом законе $|A_n|$ $f(x)$ имеет смысл и не как функция *действительного* переменного x, но и как функция $f(z)$ *комплексного* переменного. А тогда ряд

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n (x-x_n)^2 \sin \frac{1}{(x-x_n)^2}$$

не есть ли ряд, интимно связанный с $f(x)$ через голоморфизм?» [236]

50. «Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится всюду, кроме, быть может, множества меры нуль. Пусть $f(x)$ есть его сумма-функция там, где она существует и конечна. Пусть множество таких точек есть меры 2π.

Спрашивается, существует ли хотя бы один ряд по функциям Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \chi_n (x),$$

изображающий, сходясь, эту $f(x)$ всюду, кроме, быть может, множества точек меры нуль?

Было бы чрезвычайно интересно, если бы существовал непременно один и только один ряд по функциям Хаара, которого бы почленный интеграл сходился всюду, кроме. быть может, множества меры нуль». [237]

51. «Пусть C есть окружность $(R=1)$. Пусть C вся распадается на множество множеств $\{\mathfrak{M}\}$ таких, что всякое $\mathfrak{M}_1$ конгруэнтно с $\mathfrak{M}_2$ при надлежащем повороте окружности. Спрашивается, какова мощность $\mathfrak{M}$? Ясно, что $\mathfrak{M}$ есть в некоторых частных случаях мощности континуума. Если $\mathfrak{M}$ есть единственная точка, $\mathfrak{M}$ есть мощности конечной $(=1)$; можно построить случай, когда $\mathfrak{M}$ есть мощности счетной! Кроме того, тут дело в мощности множества $\{\mathfrak{M}\}$. Может ли это быть всякая мощность промежутка между 1 и мощностью континуума, если последние есть? Не забыть этого пути». [238]

52. «Дана непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π. Найти наибольший абсолютно коэффициент Фурье для $f(x)$!»

Ясно, что

$$f(x) \backsim a_0, \ a_n, \ b_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Значит, есть такой a_{n_0}, что

$$|a_0|, \ |a_n|, \ |b_n| \leqslant |a_{n_0}|.$$

Найти его!

Здесь задача, аналогичная задаче Чебышева и Бернштейна». [289]

КОММЕНТАРИИ
И
ПРИЛОЖЕНИЯ

КОММЕНТАРИИ К ДИССЕРТАЦИИ

[1] Доказательство теоремы Бэра можно найти в книге Р. Бэра ([1]), а также в ряде современных курсов теории функций действительного переменного, в частности, в книге Н. Н. Лузина ([12]), стр. 172—183.

[2] Ответом на поставленный здесь Н. Н. Лузиным вопрос является результат Б. М. Гагаева ([1]), который был уточнен Б. В. Гнеденко ([1]), доказавшим следующее предложение: все системы функций, ортогональных на [0, 1], инвариантные с точностью до постоянных множителей относительно операции дифференцирования, могут быть записаны в виде

$$\{A_k \cos(2\pi n_k x + \alpha_k), \quad B_k \sin(2\pi n_k x + \alpha_k)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\left\{A_k \cos\left[2\pi\left(n_k - \frac{1}{2}\right)x + \alpha_k\right], \quad B_k \sin\left[2\pi\left(n_k - \frac{1}{2}\right)x + \alpha_k\right]\right\}$$
$$(k = 1, 2, \ldots),$$

где $\{n_k\}$ — произвольная (конечная или бесконечная) последовательность целых положительных чисел, а A_k, B_k и α_k — произвольные постоянные.

[3] Повидимому, здесь Н. Н. Лузин имеет в виду сходимость *почти* всюду. Действительно, в § 74 своей диссертации он доказывает существование тригонометрического ряда, сходящегося почти всюду и имеющего суммой такую функцию, которая не суммируема ни в каком интервале, как бы мал он ни был, а значит, и не интегрируема по Данжуа.

Однако определить коэффициенты такого ряда по его сумме нельзя, так как в настоящее время известно, что существуют ряды с коэффициентами, отличными от нуля, и сходящиеся к нулю почти всюду (подробнее об этом см. в примечании 138), а потому, добавляя такой ряд к ряду, сходящемуся почти всюду к некоторой $f(x)$, получим новый ряд, сходящийся к ней почти всюду. Это показывает, что нет такой операции, которая позволила бы *однозначно* определять коэффициенты ряда, сходящегося почти всюду к $f(x)$, зная только эту функцию $f(x)$.

Если вместо сходимости почти всюду предполагать сходимость всюду к конечной функции $f(x)$, то нельзя ожидать, чтобы $f(x)$

была не суммируема ни в каком интервале. Действительно, при этих условиях функция $f(x)$ есть функция первого класса по классификации Бэра, а тогда существует всюду плотное множество интервалов, на которых она ограничена и, следовательно, суммируема.

Но можно построить такие всюду сходящиеся тригонометрические ряды, сумма которых всюду конечна, но не интегрируема по Данжуа на $(-\pi, \pi)$. И тогда возникает вопрос, как определить коэффициенты этого ряда, отправляясь от его суммы и пользуясь формулами Фурье, в которых операция интегрирования имеет некоторый новый смысл.

Этому вопросу был посвящен ряд заметок Данжуа в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Сравнительно недавно Данжуа опубликовал подробные доказательства полученных им результатов. Эта публикация закончена только в 1949 г. (см. Данжуа ([3])).

[4] В момент, когда Н. Н. Лузин писал свою диссертацию, не было еще известно, что существуют тригонометрические ряды, сходящиеся почти всюду к нулю и имеющие отличные от нуля коэффициенты. Теперь, когда такие ряды построены (см. примечание 138), можно заведомо сказать, что существуют ряды не-Фурье, и это уже лежит в сущности вещей, так как при любом определении интеграла коэффициенты Фурье от функции, почти всюду равной нулю, должны быть нулями.

[5] См. также то, что написано Н. Н. Лузиным по поводу неизмеримых множеств в § 2 статьи «О строении измеримых функций» ([11]) (в настоящем издании стр. 348).

[6] Замечание Н. Н. Лузина о том, что всякая определенная операция анализа приводит непременно к множествам и функциям, измеримым в смысле Бореля, через несколько лет после появления его диссертации было опровергнуто его же работами и работами его учеников. М. Я. Суслиным было установлено, что операция ортогонального проектирования плоского B-множества уже приводит к множествам, не измеримым по Борелю. Самим Н. Н. Лузиным был открыт класс множеств, названных им проективными и получаемых из B-множеств проектированием и взятием дополнений. Для этих множеств не только не установлена их измеримость по Лебегу, но имеется основание думать, что она и не может быть установлена, исходя из принципов теории множеств. Подобный прогноз был сделан самим Н. Н. Лузиным. Подробное изложение этого круга вопросов можно будет найти в книге Н. Н. Лузина «Теория аналитических множеств» (готовится к печати).

[7] Доказательства этих теорем в настоящее время можно найти в любом курсе теории функций; в частности, самим Н. Н. Лузиным они были даны в статье «О строении измеримых функций», стр. 293—294 (в настоящем издании см. стр. 342—343).

[8] С методологической точки зрения эту основную для метрической теории функций теорему желательно доказывать раньше, чем вводится понятие интеграла Лебега. Такое доказательство было дано Н. Н. Лузиным совместно с В. К. Серпинским ([6]).

Очень простое доказательство той же теоремы дано А. Я. Хинчиным ([2]).

[9] Этот пример изложен Н. Н. Лузиным в статье, упомянутой в примечании 7, стр. 300 (в настоящем издании стр. 351).

[10] См. примечание 11.

[11] Доказательство теоремы Д. Ф. Егорова содержится во всех современных курсах теории функций; в частности, Н. Н. Лузиным оно дано в статье «О последовательностях измеримых функций» (10), стр. 287—290 (в настоящем издании см. стр. 333—336).

[12] Доказательство этого предложения можно найти, например, в статье «О строении измеримых функций» (11).

[13] Понятие аналитически представимой функции, о котором здесь идет речь, совпадает с понятием функции, измеримой по Борелю, так как Лебег под аналитически представимой функцией подразумевал такую, которую можно получить путем операций сложения, умножения и перехода к пределу, произведенных над непрерывными функциями. Таким образом здесь опять (см. примечание 6) содержится утверждение, что «единственно возможная функция анализа» всегда измерима B. Однако самим Н. Н. Лузиным было позднее показано, что, комбинируя операции перехода к пределу по непрерывности и взятия верхнего предела, можно выйти из класса функций, измеримых B, т. е. аналитически представимых в указанном выше смысле (см. Н. Н. Лузин, Теория аналитических множеств).

[14] Доказательство теоремы Витали имеется в статье Н. Н. Лузина «О строении измеримых функций» (в настоящем издании стр. 360).

[15] В 1940 г. Д. Е. Меньшов (7) доказал справедливость высказанной Н. Н. Лузиным гипотезы о том, что всякую измеримую функцию, конечную почти всюду, можно представить тригонометрическим рядом, сходящимся к ней почти всюду.

[16] Это замечание, разумеется, справедливо лишь для 1915 г.

[17] Пример такой функции дается самим Н. Н. Лузиным на стр. 164 его диссертации.

[18] Для построения нужного примера рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ множество E такое, что оно само и его дополнение имеют положительную меру в каждом интервале, лежащем на $[0, 1]$. Полагаем $f(x) = 1$ на E и $f(x) = 0$ на CE. Эта функция удовлетворяет поставленным требованиям. Чтобы убедиться в этом, выберем среди точек плотности множества E счетное всюду плотное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Если $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$, то в точках x_i функция F дифференцируема и $F'(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, для любого x_i и для всякого натурального n можно найти такое $h_i^{(n)} > 0$, что $\frac{1}{n} > h_i^{(n)} > 0$ и

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{F(x_i + h_i^{(n)}) - F(x_i)}{h_i^{(n)}} \leqslant 1.$$

Так как далее в точке x_i функция F непрерывна, то можно найти интервал $\delta_i^{(n)}$ с центром в x_i и столь малый, чтобы для любого $x \in \delta_i^{(n)}$ иметь

$$\frac{F(x_i + h_i^{(n)}) - F(x)}{x_i + h_i^{(n)} - x} > 1 - \frac{1}{n}.$$

Если мы теперь зафиксируем n и рассмотрим совокупность всех интервалов $\delta_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то получим всюду плотное открытое множество G_n; общая часть $\mathfrak{E}_1$ всех множеств G_n есть множество (типа G_δ) второй категории, и ясно, что в каждой его точке верхнее правое производное число функции $F(x)$ равно 1.

Совершенно аналогично, выбирая на CE счетное всюду плотное множество его точек плотности и замечая, что в них $F'(x) = 0$, мы построим множество $\mathfrak{E}_2$ второй категории, где нижнее правое производное число равно 0. Общая часть $\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}$ есть множество второй категории, и на $\mathfrak{E}$ функция $F(x)$ не имеет производной.

[19] Для того чтобы избежать неясности в терминологии, заметим, что во всей этой книге термин «множество II категории» понимается в следующем смысле:

Множество E называется *множеством* II *категории*, если его дополнение CE есть множество I категории.

[20] О свойствах множеств второй категории см., например, Н. Н. Лузин ([12]), стр. 80—81.

[21] Пример функции, являющейся точной производной, суммируемой, но такой, что ее неопределенный интеграл Лебега не имеет производной в бесконечном множестве точек.

Сначала мы сделаем так, чтобы это отсутствие производной наблюдалось в одной точке.

Допустим, прежде всего, что мы построили функцию $F_1(x)$, так что:

1) $F_1(x)$ монотонно возрастает и абсолютно непрерывна на $[-1, +1]$.

2) $F_1(x)$ имеет производную, конечную или бесконечную всюду, кроме точки $x = 0$.

3) $F_1'(x) = +\infty$ во всех точках некоторого совершенного множества π меры нуль (кроме точки 0, хотя она ему принадлежит).

Допустим, далее, что мы построили функцию $F_2(x)$, так что:

1) $F_2(x)$ непрерывна и монотонно не убывает на $[-1, +1]$.

2) $F_2(x)$ постоянна на каждом смежном интервале к множеству π.

3) $F_2'(0) = +\infty$.

Тогда положим

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

Ясно, что $F(x)$ непрерывна и монотонна на $[-1, +1]$. Так как $F_1'(x) = +\infty$ во всех точках π, кроме $x = 0$, а у $F_2(x)$ производные числа не отрицательны, то если $x \neq 0$ и принадлежит π, имеем

$$F'(x) = +\infty.$$

Далее, если x вне π, то так как $F_1'(x)$ существует всюду, кроме точки 0, а $F_2'(x) = 0$ всюду вне π, мы видим, что $F'(x)$ существует всюду вне π; наконец, в точке $x = 0$ имеем $F_2'(0) = +\infty$, а у $F_1(x)$ производные числа не отрицательны, и значит,

$$F'(0) = +\infty.$$

Итак, $F'(x)$ существует всюду. Пусть

$$F'(x) = f(x).$$

Так как $F(x)$ монотонна, то $f(x)$ суммируема (см. примечание 28). Итак, $f(x)$ есть точная производная, и она суммируема. Пусть

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Ясно, что $f(x) = \Phi'(x)$ почти всюду, а потому, так как $F_1'(x) = f(x)$ почти всюду и $F_1(x)$ абсолютно непрерывна, то

$$\Phi(x) = F_1(x),$$

и следовательно, $\Phi'(0)$ не существует.

Таким образом поставленный вопрос будет решен, если будут построены функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ с указанными выше свойствами.

Для получения функции $F_1(x)$ мы используем (несколько видоизменив его для рассматриваемого случая) одно построение, сделанное Н. Н. Лузиным в его работе «К основной теореме интегрального исчисления» ([2]) (в настоящем издании эта работа перепечатана, см. стр. 285—286). А именно, сначала мы на отрезке $[0, 1]$ возьмем совершенное множество P меры 0 с концами в точках 0 и 1 и построим $g(x)$ так, чтобы

$$g(x) = 0 \text{ на } P,$$

а на смежных к P интервалах график $g(x)$ изображался в виде верхней половины окружности, диаметром которой служит этот интервал. Пусть

$$G(x) = \int_0^x g(x)\,dx.$$

Ясно, что $G(x)$ непрерывна, монотонно возрастает, $G(0) = 0$ и $G'(x) = g(x)$ всюду; значит, $G'(x) = 0$ на P.

Пусть $\Phi(x)$ есть функция, обратная по отношению к $G(x)$; она непрерывна, монотонна, определена всюду на $[0, K]$, где $K = G(1)$, и $\Phi'(x) = +\infty$ на некотором совершенном множестве $\overline{P}$, получаемом, как множество значений $G(x)$ на P. Кроме того, в точке 0 производная справа от $\Phi(x)$ равна $+\infty$ и аналогично в точке K слева.

Ясно, кроме того, что $\Phi'(x)$ существует всюду.

Докажем теперь, что $\Phi(x)$ абсолютно непрерывна. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\gamma > 0$ таково, что множество точек, в которых $g(x) < \gamma$, имеет меру, меньшую $\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \frac{\gamma \cdot \varepsilon}{2}$. Если теперь $\{[\alpha_k, \beta_k]\}_{k=1,2,\ldots,s}$—последовательность неперекрывающихся отрезков, лежащих на $[0, K]$, сумма длин которых меньше δ, то $\sum_{k=1}^{s} |\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon$. Действительно, допустим, что $\sum_{k=1}^{s} |\Phi(\beta_k) - \Phi(\alpha_k)| > \varepsilon$. Так как Φ монотонна, то отрезки $[\Phi(\beta_k), \Phi(\alpha_k)]_{k=1,2,\ldots,s}$ не перекрываются, а отсюда следует, что мера точек, в которых $g(x) \geqslant \gamma$, попавших на эти отрезки, превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$. Но так как

$$\int_{\Phi(\alpha_k)}^{\Phi(\beta_k)} g(x)\,dx = \beta_k - \alpha_k, \text{ то } \sum_{k=1}^{s} (\beta_k - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{s} \int_{\Phi(\alpha_k)}^{\Phi(\beta_k)} g(x)\,dx \geqslant \frac{\gamma \cdot \varepsilon}{2}.$$

Противоречие.

Итак, мы построили на $[0, K]$ функцию $\Phi(x)$, абсолютно непрерывную, монотонную, всюду дифференцируемую и такую, что $\Phi'(x) = +\infty$ на некотором совершенном $\overline{P}$ на $(0, K)$, а также справа в точке 0 и слева в точке K; при этом $\Phi(0) = 0$, $\Phi(K) = 1$.

Чрезвычайно легко, каковы бы ни были числа $a < b$ и $\alpha < \beta$, построить функцию $\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi}(x, a, b, \alpha, \beta)$, абсолютно непрерывную и монотонную на $[a, b]$, причем $\overline{\Phi}(a) = \alpha$, $\overline{\Phi}(b) = \beta$, $\overline{\Phi}'(x)$ существует всюду на $a < x < b$, $\overline{\Phi}'(x) = +\infty$ слева в точке a и справа в точке b и

$$\overline{\Phi}'(x) = +\infty$$

на некотором совершенном π_{ab}, лежащем на $[a, b]$. Для этого стоит только положить

$$\overline{\Phi}(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\,\Phi\left(\frac{x-a}{b-a} K\right).$$

Множество π_{ab} получается из $\overline{P}$, когда мы трансформируем линейно отрезок $[0, K]$ в отрезок $[a, b]$.

Теперь мы уже можем перейти к построению $F_1(x)$. С этой целью мы проведем через точку 0 две прямые: прямую l_1 с уравнением $y=3x$ и прямую l_2 с уравнением $y=4x$, и рассмотрим последовательность точек $x_n=\frac{1}{2^n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ (черт. 7).

Если мы рассмотрим последовательность $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ординат, взятых в точках x_n и принадлежащих попеременно то прямой l_1, то прямой l_2, то, так как

$$3x_n>4x_{n+1} \text{ при любом } n,$$

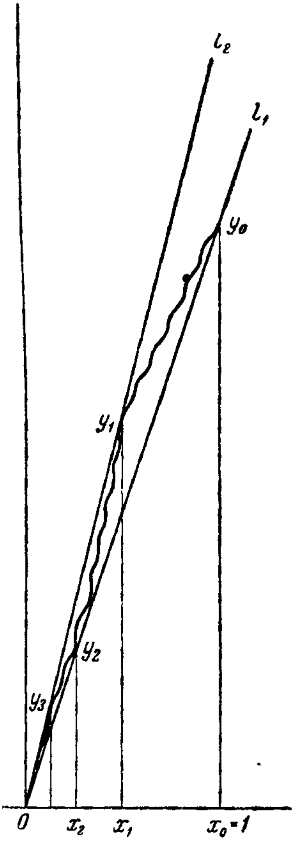
эти ординаты образуют последовательность, монотонно убывающую с ростом n. Поэтому на каждом отрезке $[x_{n+1}, x_n]$ можно построить функцию $\overline{\Phi}(x)=\overline{\Phi}(x, x_{n+1}, x_n, y_{n+1}, y_n)$. Обозначим, наконец, через $F_1(x)$ функцию, определяемую так:

$$F_1(x)=\overline{\Phi}(x, x_{n+1}, x_n, y_{n+1}, y_n)$$

на $[x_{n+1}, x_n]$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$,

$$F_1(0)=0,$$

$$F_1(-x)=-F(x) \text{ на } [-1, 0),$$

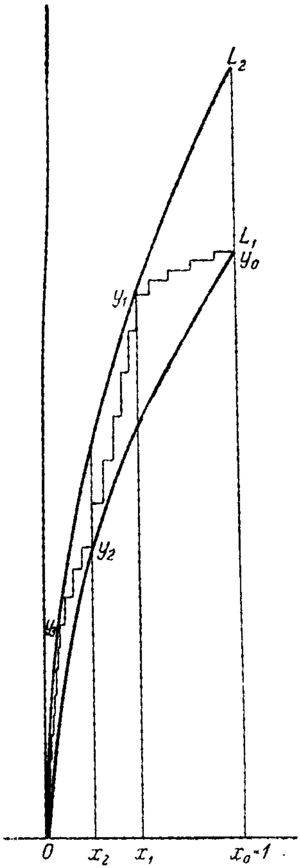


Черт. 7.

и докажем, что она обладает нужными нам свойствами.

Действительно, в силу своего построения она непрерывна и монотонна. Она абсолютно непрерывна на $[-1, +1]$, ибо, выбрасывая из отрезка $[-1, +1]$ такую окрестность нуля, на которой вариация функции сколь угодна мала, мы получим два отрезка, каждый из которых составлен из *конечного* числа отрезков, на каждом из которых наша функция абсолютно непрерывна. Далее она имеет производную всюду, кроме точки $x=0$. Действительно, этим свойством она обладает на каждом интервале (x_{n+1}, x_n), а также и в самих точках x_n, где $F_1'(x)=+\infty$, так как по построению $\overline{\Phi}(x, a, b, \alpha, \beta)$ эта функция имела в концах отрезка, где она определена, производную соответственно справа и слева, равную $+\infty$. Наконец, $F_1'(x)=+\infty$ во всех точках некоторого совершенного множества π, кроме точки

$x=0$ (это π есть сумма всех множеств $\pi_{x_{n+1},\, x_n}$, всех их зеркальных отражений относительно оси ординат и точки 0).



Черт. 8.

Наконец, очевидно, что $F_1'(0)$ не существует.

Осталось построить функцию $F_2(x)$. Мы построим ее так (черт. 8): возьмем сначала кривую L_1 с уравнением $y=3\sqrt{x}$ и кривую L_2 с уравнением $y=4\sqrt{x}$; обозначим через y_n ординаты, взятые в точках $x_n = \frac{1}{2^n}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, принадлежащие попеременно этим двум кривым; имеем

$$3\sqrt{x_n} > 4\sqrt{x_{n+1}}$$

$\left(\text{потому что } \frac{3}{4} > \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, и следовательно, эти y_n убывают с ростом n. Совершенно так, как строят канторову ступенчатую кривую над канторовым множеством, можно построить монотонно неубывающую непрерывную функцию, постоянную на каждом смежном интервале к $\pi_{x_{n+1},\, x_n}$, лежащему на $(x_{n+1},\ x_n)$, и принимающую в его концах значения y_{n+1} и y_n. Пусть $\psi_n(x)$ — полученная таким образом кривая. Положим

$$F_2(x) = \psi_n(x) \quad \text{на} \quad (x_{n+1},\ x_n],$$
$$F_2(0) = 0, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$F_2(-x) = -F_2(x) \qquad \text{на } [-1,\ 0).$$

Ясно по построению, что $F_2(x)$ непрерывна, монотонна, постоянна на всех смежных интервалах к множеству π; осталось доказать, что $F_2'(0) = +\infty$. Но это получается так: пусть $h>0$ любое. Найдем такое n, что

$$x_{n+1} < h \leqslant x_n.$$

Тогда

$$\frac{F_2(x_{n+1})}{h} \leqslant \frac{F_2(h)}{h} \leqslant \frac{F_2(x_n)}{h},$$

а значит,

$$\frac{F_2(x_{n+1})}{x_n} \leqslant \frac{F_2(h)}{h} \leqslant \frac{F_2(x_n)}{x_{n+1}}.$$

Но

$$\frac{F_2(x_{n+1})}{x_n} = \frac{1}{2}\frac{F_2(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}},$$

а

$$\frac{F_2(x_n)}{x_{n+1}} = 2\frac{F_2(x_n)}{x_n} = 2\frac{y_n}{x_n},$$

значит,

$$\frac{1}{2}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \leqslant \frac{F_2(h)}{h} \leqslant 2\frac{y_n}{x_n}.$$

Так как $\frac{y_n}{x_n} = \frac{3}{\sqrt{x_n}}$ или $\frac{4}{\sqrt{x_n}}$ в зависимости от четности или нечетности n, то уже во всяком случае

$$\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}} \leqslant \frac{F_2(h)}{h} \leqslant \frac{8}{\sqrt{x_n}},$$

т. е.

$$\frac{3}{2}\sqrt{2^{n+1}} \leqslant \frac{F(h)}{h} \leqslant 8\sqrt{2^n},$$

а потому, при $h \to 0$ справа, имеем $\lim \frac{F_2(h)}{h} = +\infty$. Но $F_2(-x) = -F_2(x)$, значит, слева будет то же самое; итак,

$$F_2'(0) = +\infty,$$

и все доказано.

Остается заметить, что можно распространить изученное нами явление на случай, когда вместо одной точки имеем бесконечное множество точек. Для этого рассмотрим бесконечную последовательность точек $x_0 = 1 > x_1 > \ldots > x_n > \ldots$, стремящихся, например, к 0, и возьмем две кривые, касающиеся оси абсцисс в точке 0 и такие, что если y_n есть ордината, взятая в x_n и лежащая то на L_1, то на L_2 попеременно, имеем всегда монотонное убывание чисел y_n с ростом n $\left(\text{например, если } L_1 \text{ имеет уравнение } y = \frac{1}{2}x^2, \text{ а } L_2 \text{ — уравнение } y = x^2 \text{ и } x_n = \frac{1}{2^n}\right)$ (черт. 9).

Построим на каждом $[x_{n+1}, x_n]$ функцию $F_n(x)$, которая получается из только что построенной $F(x)$ линейным преобразованием, так, чтобы отрезок $[-1, +1]$ преобразовался в $[x_{n+1}, x_n]$, а значения $F_n(x)$ в концах были соответственно равны y_n и y_{n+1}.

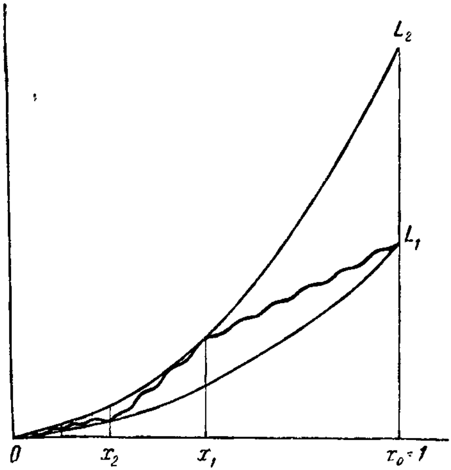
Если теперь положить

$$\chi(x) = F_n(x) \text{ на } (x_{n+1}, x_n], \quad \chi(0) = 0,$$
$$\chi(-x) = F_n(x) \text{ на } [-1, 0),$$

то функция $\chi(x)$ будет обладать всеми нужными свойствами: у нее будет всюду на [0, 1] производная, эта производная будет суммируема, но интеграл Лебега

$$\chi_1(x) = \int_0^x \chi'(x)\,dx$$

будет уже таков, что $\chi_1'(x)$ не существует во всех точках, являющихся центрами интервалов (x_{n+1}, x_n). Доказательство совершенно просто; заметим только, что кривые L_1 и L_2 были построены для



Черт. 9.

того, чтобы у $\chi(x)$ была производная и в точке 0 тоже. Кроме того, заметим, что, как видно из построения функции $F(x)$, при $x = -1$ функция $F(x)$ имеет производную справа, равную $+\infty$, а при $x = 1$ функция $F(x)$ имеет производную слева, равную $+\infty$. Тогда $\chi'(x) = +\infty$ при $x = x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

[22] Здесь Н. Н. Лузин имел в виду интегралы, существовавшие в момент, когда писалась его диссертация. Созданный незначительно позже интеграл Данжуа-Хинчина (см. о нем примечание 43) уже имеет почти всюду лишь асимптотическую производную.

[23] Это доказательство имеется в настоящем издании, см. стр. 278.

[24] Ввиду того что предлагаемое в диссертации доказательство, как отметил сам Н. Н. Лузин, значительно проще того, которое он дал в статье «К основной теореме интегрального исчисления», мы в настоящем издании опубликовали лишь часть этой статьи, не вошедшую в диссертацию, а остальное опустили.

[25] Подробное описание построения канторовой ступенчатой кривой можно найти, например, в книге П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова (1), стр. 132—135.

[26] По поводу определения верхнего предела последовательности множеств см. также статью Н. Н. Лузина «О последовательностях измеримых функций» (10), стр. 282—287 (в настоящем издании стр. 327).

[27] Можно дать полный ответ на поставленный Н. Н. Лузиным вопрос: «Существует ли $F(x)$, имеющая $f(x)$ своею производной в точках множества II категории (хотя бы и меры нуль)?»

Функция $f(x)$ при этом предполагается измеримой по Лебегу, а функция $F(x)$ — непрерывной.

Предлагаемый ниже ответ принадлежит Е. М. Ландису.

Прежде всего заметим, что с точки зрения категории произвольная измеримая по Лебегу функция ничем не лучше, чем просто произвольная функция. (Действительно, изменяя функцию как угодно на множестве меры нуль, но второй категории, мы никак не повлияем на свойство функции быть измеримой.) Поэтому трудно à priori ожидать положительного ответа на поставленный вопрос. И действительно имеет место теорема:

Теорема А. *Функция $f(x)$, являющаяся производной непрерывной функции $F(x)$ на множестве E II категории, необходимо измерима по отношению к свойству Бэра.*

(Мы говорим, что множество $M \subset [0, 1]$ обладает свойством Бэра, если отрезок $[0, 1]$ содержит всюду плотное на нем множество непересекающихся интервалов, на каждом из которых множество M либо I, либо II категории. Функция $f(x)$ измерима по отношению к свойству Бэра, если всякое ее лебегово множество [1]) обладает свойством Бэра.)

Для того чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, обозначим через $\mathfrak{E}$ множество всех тех x, в которых $F'(x)$ существует; $F'(x)$ есть B функция на $\mathfrak{E}$. Следовательно, она измерима по отношению к свойству Бэра на $\mathfrak{E}$ (так как всякое B-множество обладает свойством Бэра). Но $f(x)$ совпадает с $F'(x)$ на множестве $E \subset \mathfrak{E}$ второй категории и, следовательно, также измерима по отношению к свойству Бэра уже на всем отрезке $[0, 1]$.

---

1) Принято называть «лебеговым множеством» множество $\mathfrak{E}$ тех точек x, для которых $A \leqslant f(x) < B$. (Здесь A и B — некоторые фиксированные постоянные, $A < B$.) Все лебеговы множества для данной $f(x)$ получим, заставляя A и B пробегать все действительные числа.

С другой стороны, существуют измеримые по Лебегу функции, не измеримые по отношению к свойству Бэра [1]). Таким образом вопрос, поставленный Н. Н. Лузиным, *решается отрицательно*.

Условие измеримости по отношению к свойству Бэра, фигурирующее в теореме А в качестве необходимого, является в то же время достаточным условием того, чтобы функция f являлась производной некоторой непрерывной функции на множестве II категории.

Теорема В. *Пусть $f(x)$ — функция, заданная на отрезке $[0, 1]$, измеримая по отношению к свойству Бэра. Тогда существуют такие непрерывная функция $F(x)$ и множество $E \subset [0, 1]$ II категории, что $f(x) = F'(x)$ при $x \in E$.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма I. *Пусть $M \subset [a, b]$ — произвольное множество меры нуль. Существует непрерывная на $[a, b]$ функция $\Phi(x)$, такая, что $\Phi'(x) = +\infty$ во всех точках множества M.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $M = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n — открытое множество, $G_{n+1} \subset G_n$ и $\operatorname{mes} G_n < \frac{1}{2^n}$.

$$\begin{aligned} \text{Положим } \varphi(x) &= n && \text{на } G_n - G_{n+1}, \\ \varphi(x) &= 0 && \text{вне } G_1, \\ \varphi(x) &= +\infty && \text{на } \prod G_n. \end{aligned}$$

Положим далее $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx$. Функция $\varphi(x)$ суммируема, и потому $\Phi(x)$ существует. Далее, каждая точка $x \in M$ является внутренней [2]) точкой для множества $\underset{x}{E}[\varphi(x) > n]$ при любом n, и следовательно, $\Phi'(x)$ существует и равна $+\infty$.

---

[1]) Проще всего построить такую функцию следующим образом: пример не измеримого по Лебегу множества, приводимый Н. Н. Лузиным в статье «О строении измеримых функций» ([11]) (настоящее издание, стр. 351), дает одновременно, как легко видеть, пример множества, не обладающего свойством Бэра. Удаляя из отрезка $[0, 1]$ некоторое всюду плотное множество N I категории, мы можем совершить такое гомеоморфное преобразование отрезка, что множество CN отобразится в множество меры нуль. Образ нашего неизмеримого множества за вычетом точек множества N, очевидно, попрежнему не будет обладать свойством Бэра. Беря характеристическую функцию этого множества, мы и получим нужную нам функцию.

[2]) Точка $a \in A$ называется внутренней для множества A, если существует окрестность $O(a)$ точки a, принадлежащая множеству A.

Лемма II. *Пусть функция $f(x)$ измерима по отношению к свойству Бэра на отрезке $[a, b]$. Пусть далее $0 \leqslant f(x) < 1$. Тогда существуют непрерывная функция $\Phi(x)$ и множество* II *категории $M \subset [a, b]$ такие, что $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве M.*

Доказательство. Положим

$$E_{n,\,m} = \underset{x}{E}\left[\frac{m-1}{2^{n-1}} \leqslant f(x) < \frac{m}{2^{n-1}}\right] \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots, \\ m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

По предположению, множество $E_{n,\,m}$ обладает свойством Бэра и, следовательно, существует всюду плотная на $[a, b]$ последовательность интервалов, на каждом из которых множество $E_{n,\,m}$ либо I, либо II категории. Отберем же из них, на которых $E_{n,\,m}$ есть множество II категории, и их теоретико-множественную сумму обозначим через $G_{n,\,m}$. Положим далее $M_{n,\,m} = G_{n,\,m} \cdot E_{n,\,m}$.

Легко поверить, что последовательности множеств $\{G_{n,\,m}\}$ и $\{M_{n,\,m}\}$ обладают следующими свойствами:

1° $M_{n,\,m} \subset G_{n,\,m}$,

2° $M_{n,\,m}$ есть множество II категории на $G_{n,\,m}$[1]),

3° $G_{n,\,m_1} \cdot G_{n,\,m_2} = 0$ при $m_1 \neq m_2$,

4° $\sum\limits_{m} G_{n,\,m}$ есть множество, всюду плотное на $[a, b]$,

5° $\sum\limits_{m} G_{n+1,\,m} \subset \sum\limits_{m} G_{n,\,m}$ и $\sum\limits_{m} M_{n+1,\,m} \subset \sum\limits_{m} M_{n,\,m}$,

6° $\dfrac{m-1}{2^{n-1}} \leqslant f(x) < \dfrac{m}{2^{n-1}}$ при $x \in M_{n,\,m}$.

Положим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2^{n-1}} & \text{при} \quad x \in G_{n,\,m}, \\ 0 & \text{при} \quad x \overline{\in} \sum\limits_{m} G_{n,\,m}. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится всюду. Пусть $\varphi(x) = \lim\limits_{n} \varphi_n(x)$. Пусть теперь $\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(x)\,dx$ и $M = \prod\limits_{n} \sum\limits_{m} M_{n,\,m}$, M есть множество II категории на $[a, b]$.

Пусть $x_0 \in M$. Тогда x_0 есть внутренняя точка для множества $\underset{x}{E}[f(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x_0) + \varepsilon]$ при сколь угодно малом ε, а потому $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Лемма III. *Пусть $\Phi(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция и $\Phi'(x) = f(x)$ на множестве M* II *категории. Тогда существует функция $\Psi(x)$, обладающая следующими свойствами:*

---

[1]) Множеством II категории на некотором $\mathfrak{G}$ называется дополнение к множеству I категории относительно $\mathfrak{G}$.

1) $\Psi(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$,
2) $\Psi(a) = \Psi(b) = 0$,
3) $|\Psi(x)| \leqslant b - a$,
4) $\Psi'(x) = f(x)$ на множестве M_1 II категории.

Лемма доказывается с помощью построения, совершенно аналогичного построению функции $\Phi(x) - \Psi(x)$, данному Н. Н. Лузиным (см. его диссертацию, в настоящем издании стр. 78).

Доказательство теоремы.

Положим

$$E_{+\infty} = \underset{x}{E}[f(x) = +\infty], \quad E_{-\infty} = \underset{x}{E}[f(x) = -\infty]$$

и

$$E_n = \underset{x}{E}[n \leqslant f(x) < n+1]_{n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots}$$

Для каждого E_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty)$ существует последовательность $\{I_m^n\}_{m=1, 2, \ldots}$ интервалов, всюду плотная на $[0, 1]$, на которых E_n либо I, либо II категории. Пусть $\{\widetilde{I}_m^n\}_{m=1, 2, \ldots}$ те из них, на которых E_n II категории.

Никакие два интервала $\widetilde{I}_m^n$ при всевозможных m и n не пересекаются и все вместе образуют всюду плотное на $[0, 1]$ множество.

По леммам II и III на каждом из $\widetilde{I}_m^n$ при конечном n можно построить функцию $F_{n, m}(x)$, обладающую свойствами:

1° $F_{n, m}(x)$ непрерывна на $\widetilde{I}_m^n$,

2° $F_{n, m}(x) = 0$ на концах $\widetilde{I}_m^n$,

3° $|F_{n, m}(x)| \leqslant \operatorname{mes} \widetilde{I}_m^n$,

4° $F'_{m, n}(x) = f(x)$ на множестве $M_{m, n}$ II категории.

Далее, на каждом интервале $\widetilde{I}_m^{\pm\infty}$ можно выбрать множество $H_m^{\pm\infty} \subset E_{\pm\infty}$ II категории на $\widetilde{I}_m^{\pm\infty}$ и меры нуль. Согласно леммам I и III для каждого $\widetilde{I}_m^{\pm\infty}$ можно построить функции $F_{\pm\infty, m}(x)$ и множества $M_{m\, \pm\infty}$, удовлетворяющие условиям 1°, 2°, 3°, 4°.

Полагая теперь $M = \sum\limits_{m, n} M_{m, n}$ и

$$F(x) = \begin{cases} F_{n, m} & \text{на } \widetilde{I}_m^n, \\ 0 & \text{вне } \sum\limits_{m, n} \widetilde{I}_m^n, \end{cases}$$

мы получаем искомые множество и функцию.

[28] Доказательство того, что производная монотонной функции суммируема, на русском языке можно найти, например, в книге

И. П. Натансона (1), стр. 187 или у П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова (1), стр. 263.

[29] На русском языке этот результат можно найти в книге Зигмунда (1), стр. 60.

[30] См. также примечание 34.

[31] Высказанная здесь Н. Н. Лузиным гипотеза вполне оправдалась. В самом деле, самим Н. Н. Лузиным совместно с И. И. Приваловым (7) было доказано, что не существует голоморфной функции внутри области со спрямляемой границей, стремящейся к $+\infty$ по всем не касательным к L путям для точек множества E, $\operatorname{mes} E > 0$, лежащего на границе L. Доказательство этого предложения и ряда других теорем Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, касающихся граничных свойств аналитических функций, можно найти также в книге И. И. Привалова (8), гл. IV.

Заметим еще, что здесь играет существенную роль предположение, что функция стремится к ∞ по всем некасательным, а не только по радиальным путям. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов (7) доказали существование аналитической внутри круга функции, модуль которой стремится к $+\infty$ по радиальным путям для множества меры 2π, лежащего на единичной окружности (см. также И. И. Привалов (3), гл. IV, § 5).

[32] См. примечание 29.

[33] В русском переводе Р. Бэр (1), стр. 95.

Теорема Бэра изложена в современных курсах теории функций действительного переменного; см., например, Н. Н. Лузин (12), § 47, И. П. Натансон (1), гл. XV, § 3, А. Лебег (1), стр. 169—174.

[34] Для построения такой функции $f(x)$ рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ множество E, такое, что и E и CE имеют положительную меру в любом интервале. Пусть $f(x) = 1$ на E и $f(x) = 0$ на CE. Тогда, как бы ни менять ее на множестве меры нуль, она всегда будет разрывна в каждой точке. В самом деле, как бы мал ни был отрезок, окружающий данную точку x_0, в нем будут точки из E и точки из CE, т. е. функция принимает значения 0 и 1 в любой окрестности точки x_0, значит, она в ней разрывна. Это справедливо для всякой точки x_0. Но всюду разрывная функция не может быть функцией первого класса в силу теоремы Бэра (о теореме Бэра см. примечание 33).

[35] См. стр. 285 настоящего издания, где перепечатана часть этой статьи Н. Н. Лузина.

[36] О построении таких функций см. примечание 25.

[37] Эта цитата взята Н. Н. Лузиным из первого издания «Leçons sur l'intégration» Лебега. Во втором издании Лебег указал, что поставленная им проблема решена.

[38] В качестве такого примера можно взять пример, указаниый в примечании 21.

[39] В настоящее время эти свойства функций с ограниченным изменением изложены в любом курсе теории функций действительного переменного.

[40] Свойства интеграла Лебега в настоящее время изложены в любом курсе теории функций действительного переменного.

[41] Здесь речь идет о том, что неопределенный интеграл Лебега есть абсолютно непрерывная функция, а потому $\sigma(\varepsilon)$, т. е. сумма его полных изменений (а значит, и полных изменений $F_0(x)$) на неперекрывающихся интервалах, сумма длин которых меньше ε, стремится к 0 вместе с ε.

[42] Эту теорему можно найти в любом курсе теории функций, а также в современных курсах математического анализа.

[43] Читателю, незнакомому с интегралом Данжуа, можно рекомендовать следующие книги: А. Лебег (1), гл. X, С. Сакс (1), гл. VIII.

В то время, когда Н. Н. Лузин писал свою диссертацию, существовали лишь заметки Данжуа в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences à Paris. То определение интеграла, которое было дано в этих заметках, Н. Н. Лузин и подверг исследованию. Впоследствии это определение интеграла было обобщено А. Я. Хинчиным (1) и независимо от него самим Данжуа (2). Таким образом получилось новое определение; чтобы отличить их друг от друга, некоторые авторы говорят, что мы имеем «интеграл Данжуа в узком смысле» и «интеграл Данжуа в широком смысле»; другие авторы употребляют термины «интеграл Данжуа» и «интеграл Данжуа-Хинчина».

Подробное изложение свойств обоих этих интегралов дано в книге Сакса (1), гл. VIII.

[44] Идея Гарнака, о которой здесь говорит Н. Н. Лузин, заключается в следующем: рассмотрим множество тех точек из $[a, b]$, в окрестности которых $f(x)$ становится бесконечной; ясно, что это множество $\mathfrak{E}$ замкнуто. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{mes}\mathfrak{E}=0$. Заключим $\mathfrak{E}$ в систему Δ из конечного числа сегментов и, если $f(x)$ интегрируема по Лебегу на каждом из интервалов системы $C(\Delta)$ (дополнения к Δ), назовем интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

такое число I (если оно существует), что, каково бы ни было положительное ε, найдется такое ζ_ε, для которого

$$\left| I-\int_{C(\Delta)} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

для любой системы Δ вышеописанного типа и такой, что $\operatorname{mes}\Delta<\zeta_\varepsilon$.

Если обозначить через $f_\Delta(x)$ функцию, равную $f(x)$ на $C(\Delta)$ и равную нулю на Δ, то можно сказать, что предыдущее определение эквивалентно условию

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\operatorname{mes}\Delta\to 0}\int_a^b f_\Delta(x)\,dx,$$

причем стремление к пределу равномерно относительно всех множеств Δ.

Ясно, что это определение может иногда дать больше, чем определение Лебега, так как возможен случай, когда $f(x)$ не суммируема, а интеграл в этом смысле существует. Но с другой стороны, оно может дать и меньше, так как от множества точек, в окрестности которых $f(x)$ становится бесконечной, требуется, чтобы оно было меры нуль.

[45] Доказательство теоремы Кантора-Бендиксона (без трансфинитных чисел) можно найти, например, в книге П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова (1), стр. 97 или в книге И. П. Натансона (1), теорема 4, стр. 48.

Относительно возможности исключить трансфиниты из теоремы Кантора-Бендиксона, из результатов Бэра, из теории тотализации мы обращаем внимание читателя на очень интересные размышления Лебега, изложенные им в статье «О трансфинитных числах» (прибавление 1 к книге Лебега (1), в частности, стр. 279—282).

Лебег замечает, что надо различать *теорему существования Кантора-Бендиксона*: «всякое замкнутое несчетное множество есть сумма конечного или счетного и совершенного множества» от *проблемы Кантора-Бендиксона*: «когда дано замкнутое множество F, требуется его разложить на счетное множество D и совершенное множество P». Точно так же и по поводу изысканий Бэра следует отличать *теорему Бэра* «всякая функция первого класса точечно разрывна на всяком совершенном множестве и обратно» от *проблемы Бэра* «когда дана функция, точечно разрывная на всяком совершенном множестве, требуется найти ряд из непрерывных функций, суммой которого она является». Лебег пишет: «ничто не мешает надеяться, что теорему Бэра удастся доказать, не пользуясь трансфинитным, но оперативный процесс, предложенный Бэром для разрешения проблемы Бэра, есть трансфинитный процесс; провести его без трансфинитов невозможно. В изысканиях Данжуа формулировки относятся к операции тотализации, самое определение которой трансфинитно; нельзя надеяться обойтись здесь без трансфинитного. Но ничто не мешает надеяться, что удастся заменить оперативный процесс Кантора-Бендиксона, оперативный процесс Бэра, тотализацию Данжуа процессами нетрансфинитными и, однако, позволяющими разрешить проблему Кантора-Бендиксоиа, проблему Бэра и проблему примитивных функций.

И действительно, теорему Кантора-Бендиксона и теорему Бэра сумели доказать без трансфинитного, и можно без трансфинитного разрешить проблему Кантора-Бендиксона».

Разрешение проблемы Бера без трансфинитного процесса можно найти в книге Н. Н. Лузина (12), стр. 179—182.

Что касается исключения трансфинитных чисел из определения интеграла Данжуа, то здесь дело значительно сложнее. Правда, существует теорема П. С. Александрова (1), (2) о том, что интеграл Данжуа эквивалентен интегралу Перрона[1]), и так как интеграл Перрона определяется без всяких трансфинитных чисел, то могло бы

[1]) Об интеграле Перрона и его эквивалентности интегралу Данжуа см., например, Сакс (1), стр. 289—298 и 357—364.

казаться, что есть возможность получить интеграл Данжуа без трансфинитных чисел. Однако, повидимому, фактическое построение «мажорант» и «минорант», употребляемых при определении интеграла Перрона, вряд ли может быть в общем случае получено процессом, который не потребовал бы шагов, аналогичных тем, которые совершаются в трансфинитном процессе Данжуа.

Заметим далее, что высказанная впервые в диссертации Н. Н. Лузина мысль определять интеграл при помощи некоторого структурного свойства получила в дальнейшем широкое распространение. Это — так называемое «дескриптивное определение интеграла» (см. о нем в уже упомянутой книге Сакса, гл. VII, стр. 307). Например, можно условиться интеграл Лебега определять так: функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу, если существует такая абсолютно непрерывная $F(x)$, что $F(x) = f'(x)$ почти всюду. Тогда функция $F(x)$ (однозначно определяемая с точностью до аддитивной постоянной) есть неопределенный интеграл от $f(x)$.

Подобно этому можно было бы сказать, что функция $f(x)$ называется интегрируемой по Данжуа, если существует функция $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$ почти всюду, причем $F(x)$ должна удовлетворять некоторому дополнительному требованию, налагаемому на ее структуру и являющемуся характеристическим для неопределенного интеграла Данжуа. Например, на основании теоремы III стр. 113 диссертации Н. Н. Лузина можно было бы потребовать, чтобы $F(x)$ была функцией с обобщенным ограниченным изменением и ее полное изменение v_P, если только оно существует, для всякого совершенного множества P было равно нулю.

Именно с такой точки зрения изложена теория интеграла Данжуа (а также интеграла Данжуа-Хинчина) в главах VII и VIII книги Сакса. Там в качестве требования, налагаемого на структуру $F(x)$, принимается другое характеристическое условие, эквивалентное условию Н. Н. Лузина, а именно «обобщенная абсолютная непрерывность в узком смысле» (см. стр. 348). Это условие определяет $F(x)$ с точностью до аддитивной постоянной (как и абсолютная непрерывность, которую мы требовали, давая дескриптивное определение интеграла Лебега).

[46] См. конструктивное определение интеграла Данжуа (примечание 43).

[47] См. примечание 46.

[48] Доказательство того, что производная от $\sum^x$ равна нулю почти всюду на P, можно провести совершенно так же, как на стр. 111—113 диссертации Н. Н. Лузина доказывается существование почти всюду производной у функции с обобщенным ограниченным изменением.

Именно, рассмотрим $\sigma(x)$, совпадающую с $\sum^x$ на P и линейную в каждом интервале δ_n, смежном к P; пусть $R(x) = \sum^x - \sigma(x)$; ясно, что $R(x)$ — непрерывная функция, равная 0 на P. В силу сходимости $\sum W_n$ можно найти последовательность положительных $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, стремящихся к $+\infty$ и таких, что ряд $\sum H_n W_n$ сходится.

Пусть V_n есть интервал, полученный из δ_n присоединением слева и справа по интервалу длины $H_n W_n$. Ясно, что для последовательности интервалов $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ ряд $\sum \operatorname{mes} V_n$ сходится. Поэтому множество E тех точек, которые принадлежат бесконечному множеству интервалов V_n, имеет меру 0. Если $\mathfrak{G}$ есть множество точек P, не принадлежащих к E, то

$$\operatorname{mes} \mathfrak{G} = \operatorname{mes} P,$$

и мы утверждаем, что $R'(x) = 0$ в каждой точке $\mathfrak{G}$.

В самом, деле, пусть x — точка $\mathfrak{G}$. Рассмотрим разность

$$\frac{R(x+h) - R(x)}{h}$$

при достаточно малом h. Имеем $R(x) = 0$. Если $x+h$ принадлежит P, то $R(x+h) = 0$. Если же $|R(x+h)| > 0$, то точка $x+h$ попала в некоторый δ_p.

Тогда

$$|R(x+h)| \leqslant W_p,$$

потому что по самому построению $R(x)$ ее величина в δ_p не превосходит колебание $F(x)$ на этом интервале.

Но так как x принадлежит только конечному числу интервалов $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$, будучи вне E, то имеем для достаточно малого h

$$|h| > H_p W_p,$$

откуда

$$\left| \frac{R(x+h) - R(x)}{h} \right| \leqslant \frac{W_p}{H_p W_p} = \frac{1}{H_p}.$$

Если $h \to 0$, то $p \to +\infty$ и, значит,

$$R'(x) = 0.$$

Мы убедились, что $R'(x) = 0$ почти всюду на P; покажем теперь, что и $\sigma'(x) = 0$ почти всюду на P. Действительно, если $g(x) = 0$ на P и $g(x) = \sigma'(x)$ на каждом смежном к P интервале (где $\sigma'(x)$ существует, ибо $\sigma(x)$ на нем линейна), то легко видеть, что $g(x)$ суммируема. В самом деле,

$$\int_a^b |\sigma'(x)|\, dx = \sum_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |\sigma'(x)|\, dx = \sum_n |\sigma(\beta_n) - \sigma(\alpha_n)| =$$
$$= \sum_n |F(\beta_n) - F(\alpha_n)| \leqslant \sum_n W_n < +\infty.$$

Легко видеть, что $\sigma(x) = \int_a^x g(x)\, dx$, а потому $\sigma'(x) = g(x) = 0$ почти всюду на P.

Наконец, $\Sigma^x = \sigma(x) + R(x)$, а потому и производная от Σ^x равна нулю почти всюду на P.

[49] Здесь речь идет о хорошо известной теореме: для того чтобы некоторая функция $f(x)$ была неопределенным интегралом Лебега, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывной.

[50] Мы не даем здесь никаких доказательств тех предложений, которые Н. Н. Лузин высказал по поводу интегралов Бореля B и B', так как изучение этих интегралов в настоящее время уже не представляет интереса. В самом деле, Н. Н. Лузин показал, что интеграл Бореля не шире интеграла Данжуа, а Д. Е. Меньшов ([1]) доказал позже (см. об этом в настоящем издании в подстрочном примечании на стр. 133), что он даже у́же интеграла Данжуа.

[51] По поводу аксиомы Цермело см. статью Н. Н. Лузина, уже упомянутую в примечании 5.

[52] См. примечание 50.

[53] См. примечание 50.

[54] См. примечание 50.

[55] Этот результат Д. Е. Меньшова теперь опубликован ([1]).

[56] Как было указано в примечании 50, все интегралы B, B', B'' Бореля у́же интеграла Данжуа. Вопрос о другом выборе интервалов исключения, отличном от выборов B, B', B'', с целью получения интеграла типа Бореля, более широкого или хотя бы эквивалентного интегралу Данжуа, остается открытым. Все попытки, сделанные в этом направлении, не привели ни к каким результатам.

[57] См. примечание 28.

[58] «Методом сгущения особенностей» Кантора называется метод построения функций, имеющих некоторую особенность иа счетном всюду плотном множестве точек (например, речь может итти о разрывах, об отсутствии производной и т. д.). Сначала строится функция, имеющая заданную особенность в одной точке, например, в начале координат. Пусть $\Phi(x)$ — эта функция. Затем строится ряд $\sum c_n \Phi(x-x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — всюду плотное множество, а ряд $\sum c_n$ состоит из положительных чисел и сходится (иногда надо предполагать, что он достаточно быстро сходится). При этом часто удается добиться того, что этот ряд сходится всюду и определяет функцию $f(x)$, имеющую ту же особенность уже во всех точках x_n $(n=1, 2, \ldots)$.

Например, так можно построить на $[0, 1]$ функцию, непрерывную всюду вне заданного счетного всюду плотного множества $D=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и разрывную во всех его точках. Для этого строим $\Phi(x)$ так, чтобы она была ограничена и непрерывна на $[-1, +1]$ всюду, кроме $x=0$. Берем любые $c_n>0$, для которых $\sum c_n$ сходится, и полагаем

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi(x-x_n).$$

Ясно, что ряд сходится абсолютно для всех x и притом равномерно на $[0, 1]$.

Ясно, что если x_0 есть любая точка, не совпадающая ни с одной из x_n, то все члены ряда $\sum c_n \Phi(x - x_n)$ непрерывны в этой точке; так как ряд сходится равномерно, то $f(x)$ непрерывна в x_0. Для изучения поведения $f(x)$ в точке x_n мы отделяем член $c_n \Phi(x - x_n)$ от остального ряда. Ряд, который состоит из всех членов, кроме изъятого $c_n \Phi(x - x_n)$, изображает функцию, непрерывную при $x = x_n$; но $c_n \Phi(x - x_n)$ имеет при $x = x_n$ разрыв того же характера, как $\Phi(y)$ при $y = 0$. Таким образом показано, что $f(x)$ непрерывна во всех точках, кроме точек D, но имеет в каждой точке D разрыв того же характера, как $\Phi(x)$ в точке $x = 0$.

Совершенно аналогично строятся функции, у которых существует производна явсюду, кроме заданного счетного всюду плотного множества D, где в каждой точке производной заведомо нет.

[59] Примером такой функции может служить функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d}{dx}\left[(x - r_n)^2 \sin \frac{1}{(x - r_n)^2}\right],$$

рассмотренная в § 52 диссертации Н. Н. Лузина (настоящее издание стр. 164).

[60] Заметим, что, создавая дескриптивное определение интеграла, как системы чисел, удовлетворяющих известным аксиомам, Лебег сначала сформулировал их для случая *ограниченных* функций [1]) (см. Лебег ([1]), стр. 91). Аксиома 6 была им сформулирована не очень аккуратно, так как предел последовательности ограниченных функций может оказаться функцией неограниченной, а тогда и интеграл от предельной функции не обязан существовать. Во всяком случае, стремясь доказать, что построенный им конструктивным путем интеграл от ограниченной функции удовлетворяет всем его аксиомам, Лебег проводит доказательство того, что аксиома 6 выполнена, в предположении, что функции $f_n(x)$ *ограничены в совокупности* (см. стр. 107). В этом случае $f(x)$ оказывается ограниченной, и условие 6 действительно выполняется.

Желая перенести свои аксиомы на случай, когда функции $f_n(x)$ суммируемы, Лебег доказывает (см. стр. 109), что здесь имеет место предложение: если с возрастанием индекса n функция $f_n(x)$, суммируемая на измеримом множестве E, стремится, возрастая, к функции $f(x)$, суммируемой на E, то интеграл от $f_n(x)$ по множеству E стремится, возрастая, к интегралу от $f(x)$ на E.

Таким образом он отмечает, что при переходе к суммируемым функциям аксиому 6 надо было бы изменить так, чтобы внести в нее требование интегрируемости предельной функции.

Наконец, на стр. 113 Лебег говорит, что в формулировке аксиомы 6 можно было бы и не делать предположения о суммируемости предельной функции. С этой целью он доказывает, что если $f(x)$ есть предел возрастающей последовательности функций $f_n(x)$, конеч-

---

[1]) Кроме того, их надо предполагать измеримыми.

ных и суммируемых, то в случае, когда последовательность интегралов от $f_n(x)$ сходится, функция $f(x)$ может оказаться бесконечной лишь на множестве меры нуль; $f(x)$ суммируема на множестве точек, где она конечна и интеграл от $f(x)$ есть предел интегралов от $f_n(x)$.

Таким образом суммируемые функции удовлетворяли бы аксиоме 6, если бы ее высказать в таком виде:

6′) Если с возрастанием n функция $f_n(x)$ стремится, возрастая, к $f(x)$ и если интегралы от функций $f_n(x)$ стремятся к конечному пределу, то $f(x)$ интегрируема и интеграл от $f_n(x)$ стремится к интегралу от $f(x)$.

Отмеченная Н. Н. Лузиным (см. сноску на стр. 140 его диссертации) неясность аксиом Лебега привела к тому, что, стремясь сформулировать их для некоторого класса K интегрируемых функций, он вынужден был, говоря о группе II аксиом, *расширяющих* класс K [1]), сказать по поводу аксиомы 6, что предел $f_n(x)$, входящих в K, *при известных условиях* тоже принадлежит K. Без такого добавления уже сам интеграл Лебега не удовлетворяет аксиомам Лебега. Подобным дополнительным условием для функций ограниченных могла бы служить ограниченность в совокупности, а для суммируемых можно было бы предполагать, что они мажорируются суммируемой функцией.

[61] Здесь опять предполагается, что выполнены некоторые дополнительные условия (см. об этом конец примечания 60).

[62] В 1915 г., когда Н. Н. Лузин писал свою диссертацию, существовало лишь первое издание «Leçons sur l'intégration» Лебега. В появившемся в 1928 г. втором издании Лебег уже сам ставит вопрос о независимости введенных им аксиом и тут же указывает (см. в русском переводе Лебега (1), стр. 92, сноску [2])), что С. Банах (1) доказал независимость всех шести условий проблемы интегрирования.

[63] Здесь снова имеется в виду, что выполнены некоторые дополнительные предположения, в которых должны бы были быть сформулированы аксиомы Лебега (см. конец примечания 60).

[64] Приводимое ниже доказательство принадлежит Е. М. Ландису.

1°. Положим

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \frac{d}{dx}\left[(x-r_n)^2 \sin\frac{1}{(x-r_n)^2}\right],$$

где будем предполагать числа r_n такими, что множество этих чисел всюду плотно на всей бесконечной оси. Составим сумму

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i \omega(x+h_i),$$

---

[1]) То-есть указывающих на его широту.

где, как у Н. Н. Лузина, все λ_i предполагаются не равными нулю и все h_i различными. Для простоты мы будем предполагать $|\lambda_i| < 1$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$) (так как на несуммируемость $|\sigma| + \sigma$ и $|\sigma| - \sigma$ не может оказать влияния умножение $\sigma(x)$ на некоторую малую константу).

Так как каждый из рядов

$$\lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \frac{d}{dx}\left[(x+h_i-r_n)^2 \sin \frac{1}{(x+h_i-r_n)^2}\right]$$

$$(i = 0, 1, \ldots, s-1),$$

как легко видеть, сходится абсолютно почти всюду на $[0, 1]$, то

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i \omega(x+h_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \frac{d}{dx}\left[(x+h_i-r_n)^2 \sin \frac{1}{(x+h_i-r_n)^2}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda_i}{n^n} \frac{d}{dx}\left[(x+h_i-r_n)^2 \sin \frac{1}{(x+h_i-r_n)^2}\right]$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} A_{(n-1)s+i} &= \frac{\lambda_i}{n^n}, \\ \rho_{(n-1)s+i} &= r_n - h_i. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тогда

$$\sigma(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{d}{dx}\left[(x-\rho_m)^2 \sin \frac{1}{(x-\rho_m)^2}\right] \qquad (2)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Ясно, что точки ρ_m, лежащие на $[0, 1]$, образуют на этом отрезке всюду плотное множество (но, может быть, не все они геометрически различны).

Мы имеем согласно (1) для $n > 1$

$$|A_{ns+i}| < |A_{(n-k)s+i}| \cdot \frac{1}{n^n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (3)$$

и

$$|A_{ns+i}| \leqslant \frac{\max|\lambda_l|}{\min|\lambda_l|} |A_{ns+j}| \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant s-1). \qquad (4)$$

Обозначая, как обычно, через $[a]$ целую часть числа a, имеем для всех натуральных m' и m''

$$m' = \left[\frac{m'}{s}\right] s + i, \quad m'' = \left[\frac{m''}{s}\right] s + j \qquad (0 \leqslant i,\ j \leqslant s-1).$$

Если имеет место строгое неравенство

$$\left[\frac{m'}{s}\right] < \left[\frac{m''}{s}\right],$$

то на основании (3) и (4) получим

$$|A_{m''}| \leqslant C \frac{1}{\left[\frac{m''}{s}\right]^{\left[\frac{m''}{s}\right]}} |A_{m'}|, \tag{5}$$

где

$$C = \frac{\max |\lambda_t|}{\min |\lambda_t|}.$$

2°. Нам надо доказать, что функции

$$|\sigma(x)| + \sigma(x) \quad \text{и} \quad |\sigma(x)| - \sigma(x)$$

не суммируемы ни в каком интервале Δ, лежащем на $[0, 1]$.

Пусть

$$\varphi(x) = -\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right) = -2x \sin \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$
$$(0 < x \leqslant 1).$$

Рассмотрим наряду с $\varphi(x)$ функции

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{при} \quad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{6}}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{6}}} \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(n+1) - \frac{\pi}{6}}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{6}}} \end{cases}$$

и

$$\overline{\psi}(x) = \begin{cases} -\sqrt{n} & \text{при} \quad \dfrac{1}{\sqrt{\pi(2n+1) + \frac{\pi}{6}}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi(2n+1) - \frac{\pi}{6}}}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{\sqrt{\pi(2n+3) - \frac{\pi}{6}}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{\pi(2n+3) + \frac{\pi}{6}}}. \end{cases}$$

Обозначим через E множество точек x, где $\varphi(x) \geqslant 0$, и через E_1 множество точек, где $\psi(x) > 0$. Точно так же через $\bar{E}$ обозначим множество точек, где $\varphi(x) \leqslant 0$, а через $\bar{E}_1$ — множество точек, где $\bar{\psi}(x) < 0$.

Мы имеем $E_1 \subset E$ и $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \in E$. Аналогично $\bar{E}_1 \subset \bar{E}$ и $\bar{\psi}(x) \geqslant \varphi(x)$ при $x \in \bar{E}$.

Пусть n_1 и n_2 — любые натуральные числа, лишь бы $n_2 \geqslant n_1 > 1$. Мы имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2\pi n_2+\frac{\pi}{6}}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\pi n_1-\frac{\pi}{6}}}} \psi(x)\,dx = \sum_{n=n_1}^{n_2} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n-\frac{\pi}{6}}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{6}}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C_1}\ln\frac{n_2}{n_1},$$

где C_1 — некоторая константа.

Так как $\psi(x) \geqslant 0$ и $\psi(x) = 0$ вне E_1, то при

$$\alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n_2+\frac{\pi}{6}}} \quad \text{и} \quad \beta \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1-\frac{\pi}{6}}}$$

будем иметь

$$\int\limits_{E_1\cdot[\alpha,\beta]} \psi(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(x)\,dx \geqslant \frac{1}{C_1}\ln\frac{n_2}{n_1}.$$

Далее мы, как легко подсчитать, имеем $\operatorname{mes}(E_1\cdot[0,\alpha]) \geqslant \frac{\alpha}{8}$ и так как на E_1 функция $\psi(x)$ монотонно не возрастает, то для любого множества H, $\operatorname{mes} H \leqslant \frac{\alpha}{8}$, имеет место

$$\int\limits_{E_1\cdot[0,\beta]-H} \psi(x)\,dx \geqslant \int\limits_{E_1\cdot[\alpha,\beta]} \psi(x)\,dx,$$

а отсюда

$$\int\limits_{E\cdot[0,\beta]-H} \varphi(x)\,dx \geqslant \frac{1}{C_1}\ln\frac{n_2}{n_1}, \tag{6}$$

если только

$$\beta \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1-\frac{\pi}{6}}} \quad \text{и} \quad \operatorname{mes} H \leqslant \frac{1}{8\sqrt{2\pi n_2+\frac{\pi}{6}}}.$$

3°. Обратимся теперь к точкам ρ_m. Пусть

$$\tau = \min_{i,j} |h_i - h_j| \qquad (i \neq j).$$

По предположению $\tau > 0$. Пусть $m_1 < m_2$ и

$$|\rho_{m_2} - \rho_{m_1}| < \tau.$$

Докажем, что тогда

$$\left[\frac{m_1}{s}\right] < \left[\frac{m_2}{s}\right]. \tag{7}$$

В самом деле, допустим, что это не так. Тогда имеем

$$\left[\frac{m_1}{s}\right] = \left[\frac{m_2}{s}\right].$$

Это означает, что существует такое k, что

$$\rho_{m_1} = r_k + h_i \text{ и } \rho_{m_2} = r_k + h_j \qquad (i \neq j),$$

но это невозможно, так как $|\rho_{m_2} - \rho_{m_1}| < \tau$.

4°. Пусть теперь $\Delta = (a, b)$ — произвольный интервал иа $[0, 1]$. Мы утверждаем, что найдется точка $\rho_n \in \Delta$ с произвольно большим номером n и такая, что интервал $J_n = \left(\rho_n - \frac{1}{2^n}, \; \rho_n + \frac{1}{2^n}\right)$ целиком принадлежит интервалу Δ и на J_n отсутствуют точки ρ_ν при $\nu < n$.

Действительно, пусть

$$\rho_{n_1}, \rho_{n_2}, \ldots, \rho_{n_k}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$$

суть точки последовательности $\{\rho_n\}$, попавшие на интервал Δ. При произвольном достаточно большом k_0 имеет место неравенство

$$\frac{b-a}{n_{k_0}} > 8 \frac{1}{2^{n_{k_0}}}.$$

Посмотрим, как расположены на прямой точки a, b, ρ_{n_1}, ρ_{n_2}, ..., $\rho_{n_{k_0}}$. Среди них, очевидно, обязательно найдутся две соседние, такие,что расстояние между ними больше, чем $4 \cdot \frac{1}{2^{n_{k_0}}}$. Обозначим левую из них через α, а правую через β. На интервале (α, β) нет точек ρ_ν с индексом $\nu < n_{k_0}$. Окружим каждую из точек $\rho_\nu \in (\alpha, \beta)$ интервалом J_ν длины $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ с центром в ρ_ν. Чтобы доказать наше утверждение, достаточно доказать, что один из этих интервалов, пусть это J_{ν_0}, таков, что $J_{\nu_0} \in (\alpha, \beta)$ и не существует точек $\rho_\nu \in J_{\nu_0}$ при $\nu < \nu_0$. Пусть это не так. Тогда сумма всех интервалов J_ν, построенных нами для точек $\rho_\nu \in (\alpha, \beta)$, образует либо два интервала, один из которых содержит точку α, а другой точку β, либо только один интервал, содержащий одну из точек α или β. Чтобы убедиться в этом, рассуждаем так: возьмем произвольный интервал J_ν с центром $\rho_\nu \in (\alpha, \beta)$. Если он не целиком лежит на (α, β), то он, очевидно, уже содержит либо точку α, либо точку β. Если же $J_\nu \in (\alpha, \beta)$, то согласно допущению от противного существует точка $\rho_{\nu'} \in J_\nu$, такая, что $\nu' < \nu$. Рассмотрим интервал $J_{\nu'}$. Он также либо содержит одну из точек α или β, либо содержит точку $\rho_{\nu''}$, $\nu'' < \nu'$, для которой берем $J_{\nu''}$ и повторяем рассуждение. Так как чисел, меньших ν, конечное число, то на конечном шаге процесс оборвется; но он не может оборваться ранее, чем мы дойдем до интервала, содержащего точку α или β. Сумма этой цепочки интервалов дает, очевидно, интервал, содержащий наш произвольный интервал J_ν и одну из точек α или β.

Для полученной суммы двух интервалов (или для одного интервала) сумма их длин (или соответственно его длина) не превосходит $2 \cdot \frac{1}{2^{n_{k_0}}}$, так как для точек $\rho_\nu \in (\alpha, \beta)$ мы должны иметь $\nu \geqslant n_{k_0}$; но длина (α, β) больше $4 \cdot \frac{1}{2^{n_{k_0}}}$, поэтому интервалы J_ν, а значит, и точки ρ_ν, не могут быть расположены всюду плотно на (α, β). Мы пришли к противоречию.

Итак, обязательно найдется точка $\rho_n \in \Delta$, $n > n_{k_0}$, такая, что интервал $J_n \subset \Delta$ и на J_n отсутствуют точки ρ_ν при $\nu < n$. Так как n_{k_0} может быть взято произвольно большим, то точка ρ_n может иметь как угодно большой номер.

5°. Из (5) следует, что можно найти столь большое N_1, что при $n > N_1$ и при любом натуральном p имеем

$$|A_{n+p}| < \frac{1}{4^{n+p}} \frac{|A_n|}{8(n+p)^2},$$

если только (8)

$$\left[\frac{n+p}{s}\right] > \left[\frac{n}{s}\right].$$

Положим

$$n_2 = \left[e^{\frac{2^n \cdot n^2}{|A_n|}}\right]$$

и предположим, что при заданном n число n_1 есть наименьшее натуральное число, для которого

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n_1 - \frac{\pi}{6}}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}};$$

тогда из (6) следует, что можно найти такое N_2, что при $n > N_2$ имеем

$$\int\limits_{E\cdot\left[0,\ \frac{1}{2^{n+1}}\right]-H} \varphi(x)\,dx > \frac{1}{2C_1}\,\frac{2^n\cdot n^2}{|A_n|},\tag{9}$$

если

$$\operatorname{mes} H < \frac{1}{8\sqrt{2\pi n_2 + \frac{\pi}{6}}}.$$

Пусть теперь Δ — произвольный интервал на $[0, 1]$. Выберем n_0 произвольно, лишь бы оно было больше чем $\max(N_1, N_2)$ и, кроме того, чтобы выполнялось $\frac{1}{2^{n_0}} < \tau$.

Согласно пункту 4° существует точка $\rho_\mu \in \Delta$, $\mu > n_0$, такая, что интервал

$$J_\mu = \left(\rho_\mu - \frac{1}{2^\mu},\quad \rho_\mu + \frac{1}{2^\mu}\right)$$

принадлежит интервалу Δ и на J_μ нет точек ρ_ν при $\nu < \mu$.

Рассмотрим случай, когда $\rho_\nu \in J_\mu$ и $\nu > \mu$.

Тогда, принимая во внимание, что

$$|\rho_\nu - \rho_\mu| < \frac{1}{2^{\mu-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} < \tau,$$

мы получаем на основании 3°

$$\left[\frac{\nu}{s}\right] > \left[\frac{\mu}{s}\right].$$

Обозначим для любого множества $A \subset [0, 1]$ через A_μ множество точек $x - \rho_\mu$, для которых $x \in A$. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{A_\mu} \varphi(x - \rho_\mu)\,dx = \int\limits_{A} \varphi(x)\,dx.\tag{10}$$

Обозначим через $\delta_{\mu+p}$ интервал

$$(\rho_{\mu+p} - \omega_{\mu,p},\quad \rho_{\mu+p} + \omega_{\mu,p}),$$

где, полагая

$$\mu_1 = \left[e^{\frac{2^\mu \mu^2}{|A_\mu|}}\right],$$

мы обозначили через $\omega_{\mu, p}$ величину

$$\omega_{\mu, p}=\frac{1}{2^{\mu+p}\cdot 32\pi\mu_1}.$$

Положим

$$p_0=\left(\left[\frac{\mu}{s}\right]+1\right)s-\mu.$$

Тогда

$$\left[\frac{\mu+p}{s}\right]>\left[\frac{\mu}{s}\right], \quad \text{если} \quad p\geqslant p_0,$$

и следовательно, выполняется неравенство (8).

С другой стороны, если $0<p<p_0$, то

$$\left[\frac{\mu+p}{s}\right]=\left[\frac{\mu}{s}\right]. \tag{11}$$

Положим

$$\mathscr{E}_\mu=\sum_{p=p_0}^{\infty}\delta_{\mu+p}.$$

Имеем

$$\text{mes}\,\mathscr{E}_\mu<\frac{1}{16\pi\mu_1}<\frac{1}{8\sqrt{2\pi\mu_1+\frac{\pi}{6}}}.$$

Кроме того, $\varphi(x-\rho_\mu)\geqslant 0$, если $x\in E_\mu$. Следовательно, полагая $\Gamma_\mu=\left(\rho_\mu-\frac{1}{2^{\mu+1}},\quad \rho_\mu+\frac{1}{2^{\mu+1}}\right)$, имеем

$$\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathscr{E}_\mu}\varphi(x-\rho_\mu)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{E_\mu\cdot\left[\rho_\mu,\,\rho_\mu+\frac{1}{2^{\mu+1}}\right]-\mathscr{E}_\mu}\varphi(x-\rho_\mu)\,dx>\frac{2^\mu\mu^2}{2C_1\,|A_\mu|}. \tag{12}$$

Мы имеем при $0<\alpha<\beta\leqslant 1$

$$\int\limits_\alpha^\beta|\varphi(x)|\,dx<2\ln\frac{1}{\alpha}+2$$

и

$$\int\limits_{-\beta}^{-\alpha}|\varphi(x)|\,dx<2\ln\frac{1}{\alpha}+2.$$

Предположим, что $\rho_{\mu+p} \in [0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{[0,1]-\mathcal{E}_\mu} |\varphi(x-\rho_{\mu+p})|\,dx \leqslant \int\limits_{[0,1]-\delta_{\mu+p}} |\varphi(x-\rho_{\mu+p})|\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\rho_{\mu+p}}^{-\omega_{\mu,p}} |\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{\omega_{\mu,p}}^{1-\rho_{\mu+p}} |\varphi(x)|\,dx < 4\left(\ln\frac{1}{\omega_{\mu,p}}+1\right) <$$

$$< 4\,(\ln\mu_1 + \ln 2^{\mu+p} + \ln 32\pi + 1) < 8\,\frac{2^{\mu+p}(\mu+p)^2}{|A_\mu|}$$

при $p \geqslant p_0$.

Отсюда согласно (8) получаем

$$\int\limits_{[0,1]-\mathcal{E}_\mu} |A_{\mu+p}\,\varphi(x-\rho_{\mu+p})|\,dx < \frac{1}{2^{\mu+p}},$$

откуда

$$\int\limits_{[0,1]-\mathcal{E}_\mu} \sum_{p=p_0}^{\infty} |A_{\mu+p}\,\varphi(x-\rho_{\mu+p})| < 1. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь точки

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{\mu-1},\ \rho_{\mu+1},\ \ldots,\ \rho_{\mu+p_0-1}. \tag{14}$$

Их не более $\mu+s$, и все они лежат вне интервала

$$\left(\rho_\mu - \frac{1}{2^\mu},\quad \rho_\mu + \frac{1}{2^\mu}\right).$$

В самом деле, из определения числа μ (пункт 5°) следует, что

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\mu-1} \,\overline{\in}\, J_\mu.$$

Рассмотрим теперь точки

$$\rho_{\mu+1}, \ldots, \rho_{\mu+p_0-1}.$$

Из (11) получаем $\left[\frac{\mu}{s}\right] = \left[\frac{\mu+p}{s}\right]$, где $p = 1, 2, \ldots, p_0-1$.

Следовательно, на основании пункта 3° имеем $|\rho_\mu - \rho_{\mu+p}| \geqslant \tau$ $(p = 1, 2, \ldots, p_0-1)$, т. е. точки $\rho_{\mu+p}$ лежат вне интервала J_μ $\left(\text{так как } \frac{1}{2^\mu} \leqslant \tau_0\right)$, а это и надо было доказать.

Из доказанного следует, что на вдвое меньшем интервале $\Gamma_\mu = \left(\rho_\mu - \frac{1}{2^{\mu+1}},\ \rho_\mu + \frac{1}{2^{\mu+1}}\right)$ значение функции $\varphi(x-\rho_\mu)$, где

ρ_μ — одна из точек конечной последовательности (14), не превосходит по модулю $2\cdot 2^{\mu+1}+2<8\cdot 2^\mu$.

Отсюда

$$\int\limits_{\Gamma_\mu} \sum_{\substack{m=0\\ m\neq\mu}}^{\mu+p_0-1} |A_m\varphi(x-\rho_m)|\,dx \leqslant 8\cdot 2^\mu(\mu+s). \tag{15}$$

Соединяя (12), (13) и (15), получаем

$$\left|\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi(x-\rho_n)\,dx\right| =$$

$$=\left|\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu} -\sum_{n=0}^{\infty} A_n\frac{d}{dx}\left[(x-\rho_n)^2\sin\frac{1}{(x-\rho_n)^2}\right]dx\right|>$$

$$>\frac{1}{2C_1}2^\mu\mu^2-8\cdot 2^\mu(\mu+s)-1>2^\mu$$

(при достаточно большом μ).

Отсюда следует, что если $A_\mu>0$, то

$$\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\frac{-|\sigma(x)|+\sigma(x)}{2}\,dx\leqslant\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\sigma(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{d}{dx}\left[(x-\rho_n)^2\sin\frac{1}{(x-\rho_n)^2}\right]dx<-2^\mu,$$

а если $A_\mu<0$, то

$$\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\frac{|\sigma(x)|+\sigma(x)}{2}\,dx\geqslant\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\sigma(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{E_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{d}{dx}\left[(x-\rho_n)^2\sin\frac{1}{(x-\rho_n)^2}\right]dx>2^\mu.$$

Совершенно так же доказывается, что если $A_\mu>0$, то

$$\int\limits_{\overline{E}_\mu\cdot\Gamma_\mu-\mathcal{E}_\mu}\frac{-|\sigma(x)|+\sigma(x)}{2}\,dx<-2^\mu,$$

а если $A_\mu < 0$, то

$$\int\limits_{\overline{E}_\mu \cdot \Gamma_\mu - \mathscr{E}_\mu} \frac{|\sigma(x)| + \sigma(x)}{2}\, dx > 2^\mu.$$

При этом

$$E_\mu \cdot \Gamma_\mu - \mathscr{E}_\mu \subset \Delta \quad \text{и} \quad \overline{E}_\mu \cdot \Gamma_\mu - \mathscr{E}_\mu \subset \Delta.$$

Так как μ может быть как угодно велико, это значит, что на интервале Δ найдутся такие множества, на которых соответственно $\int (|\sigma| + \sigma)\, dx$ как угодно велик и $\int -(|\sigma(x)| - \sigma(x))\, dx$ отрицателен и как угодно велик по абсолютной величине, а это и значит, что $|\sigma(x)| + \sigma(x)$ и $|\sigma(x)| - \sigma(x)$ не суммируемы на Δ. Но Δ — любой интервал на $[0, 1]$. Значит, наше утверждение доказано.

[65] Здесь предполагается, что мы сможем проверить выполнение этих аксиом после того, как будут определены числа, называемые «интегралами» от наших функций. Эти числа и определяются дальше (стр. 144).

[66] Чтобы доказать, что все аксиомы выполняются, мы вспомним, что всякая функция $f(x) \in K_0$ может быть на Δ_i представлена в виде

$$f(x) = f_i(x) + \sigma_i(x),$$

где $f_i(x)$ суммируема на Δ_i, а $|\sigma_i| + \sigma_i$ и $|\sigma_i| - \sigma_i$ не суммируемы всюду на $[0, 1]$ кроме случая, когда все $\lambda_p^{(i)} = 0$.

Что аксиомы 1, 2 и 3 выполнены, это очевидно. Относительно аксиомы 5 можно сказать, что $f(x) \equiv 1$ только тогда, когда все $\lambda_p^{(i)} = 0$, а $f_i(x) \equiv 1$, а тогда ясно, что она выполнена. Чтобы рассмотреть аксиомы 4 и 6, нам понадобится доказать такое вспомогательное предложение.

Если $f(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема, а $\sigma(x)$ такова, что $|\sigma(x)| + \sigma(x)$ и $|\sigma(x)| - \sigma(x)$ не суммируемы ни в каком интервале на $[0, 1]$, то случай $f(x) \geqslant 0$ на некотором (a, b), лежащем на $[0, 1]$, невозможен.

В самом деле, пусть на некотором (a, b), лежащем на $[0, 1]$, имеем

$$f(x) = \varphi(x) + \sigma(x) \geqslant 0.$$

Положим

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2}(|\sigma(x)| + \sigma(x)),$$

$$\sigma_2(x) = \frac{1}{2}(|\sigma(x)| - \sigma(x)).$$

Тогда в силу наших условий обе функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ не суммируемы на (a, b). Заметим еще, что

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) - \sigma_2(x).$$

Значит,

$$f(x)=\varphi(x)+\sigma_1(x)-\sigma_2(x)\geqslant 0 \quad \text{на} \quad (a, b).$$

Положим

$$\psi(x)=0, \qquad \text{если} \quad \sigma(x)\geqslant 0,$$
$$\psi(x)=\varphi(x), \quad \text{если} \quad \sigma(x)<0.$$

Ясно, что $\psi(x)$ суммируема на $[0, 1]$. Покажем, что $\sigma_2(x)\leqslant\psi(x)$ всюду на (a, b). Действительно, если $\sigma(x)\geqslant 0$, то $\sigma_2(x)=0$ и $\psi(x)=0$, значит, $\sigma_2(x)=\psi(x)$; если же $\sigma(x)<0$, то $\psi(x)=\varphi(x)$ и, кроме того, $\sigma_1(x)=0$, значит, неравенство

$$\varphi(x)+\sigma_1(x)-\sigma_2(x)\geqslant 0 \quad \text{на} \quad (a, b)$$

дает

$$\psi(x)-\sigma_2(x)\geqslant 0,$$

т. е. $\sigma_2(x)\leqslant\psi(x)$.

Итак,

$$\sigma_2(x)\leqslant\psi(x) \quad \text{на} \quad (a, b).$$

Но $\sigma_2(x)$ неотрицательна, значит, $\psi(x)$ тоже. Кроме того, $\psi(x)$ суммируема. Тогда $\sigma_2(x)$ на (a, b) мажорируется неотрицательной суммируемой функцией, что противоречит ее несуммируемости на всяком интервале, лежащем на $[0, 1]$.

Наше вспомогательное утверждение доказано. Из него мгновенно следует, что аксиома 4 выполнена, так как $f(x)$ из класса K может быть неотрицательна только в том случае, когда член вида $\sigma(x)$ отсутствует, а тогда $f(x)$ суммируема и дело сводится к выполнимости аксиомы 4 для интеграла Лебега.

Прежде чем говорить о выполнении аксиомы 6, уточним, в какой форме мы предполагаем ее высказанной (см. примечание 60). Мы будем доказывать, что она выполнена, предполагая ее высказанной в той форме, которую в примечании 60 мы назвали аксиомой 6'.

Пусть $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ — последовательность функций класса K_0, причем

$$F_1(x)\leqslant F_2(x)\leqslant \ldots \leqslant F_n(x)\leqslant \ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x).$$

В таком случае все разности $F_n(x)-F_{n-1}(x)$, а также $F(x)-F_n(x)$ неотрицательны, а потому в силу сделанного замечания, если на некотором Δ имеем

$$F_n=f_n+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{(n)}\,\omega(x+h_i^{(n)}),$$

$$F_{n+1}=f_{n+1}+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{(n)}\,\omega(x+h_i^{(n)}),$$

то числа $\lambda_i^{(n)}$ при одном и том же i одинаковы для всех значений n (иначе бы неотрицательная разность $F_{n+1}(x)-F_n(x)$ представилась в виде суммируемой функции плюс функция вида $\sigma(x)$, что, как мы видели, невозможно).

Если так, то для всех n

$$F_n(x)=f_n(x)+\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ одна и та же, а тогда из существования $\lim F_n(x)=F(x)$ следует существование $f(x)=\lim f_n(x)$, причем раз $F_n(x)$ возрастали монотонно, то это же будет иметь место и для $f_n(x)$. Но в силу условий аксиомы 6′ интегралы от $F_n(x)$ на Δ должны стремиться к конечному пределу, а это значит, что то же должно иметь место для $f_n(x)$. В силу того, что суммируемые функции удовлетворяют аксиоме 6′, мы увидим, что $f(x)$ суммируема и $\int\limits_\Delta f(x)\,dx = \lim \int\limits_\Delta f_n(x)\,dx$. Но тогда и $\int\limits_\Delta F(x)\,dx$ должен существовать и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Delta F_n(x)\,dx=\int\limits_\Delta F\,dx,$$

что и требовалось доказать.

[67] А. Н. Колмогоров ([4]), стремясь ввести для интеграла такие аксиомы, которые были бы наиболее «естественны» [1]) и тем не менее позволяли определить интеграл для всех измеримых функций, пришел к следующему выводу: если бы удалось определить такой интеграл, то это привело бы к построению без аксиомы Цермело функции, не измеримой по Лебегу. Однако современное развитие методов математической логики позволяет думать, что такое построение принципиально неосуществимо.

[68] Чтобы не отсылать читателя к работе Юнга, мы дадим здесь доказательство возможности заключить E в систему интервалов δ_1, δ_2, δ_3, ..., δ_n, ..., обладающую указанными свойствами.

Для каждой точки $\xi\in E$ мы нашли такое H, что при $|h|<H$ имеет место

$$\left|\frac{\psi(\xi+h)-\psi(\xi)}{h}\right|<\eta. \tag{1}$$

Заключим каждую точку $\xi\in E$ в интервал $\delta=(\xi-h_1,\ \xi+h_1)$, где $0<h_1<\frac{H}{2}$ (H и h_1 зависят от точки ξ).

Обозначим через G теоретико-множественную сумму всех интервалов δ. G — открытое множество и, следовательно, представимо в виде суммы конечного или счетного числа непересекающихся

1) Законность вынесения постоянного множителя за знак интеграла; условие, чтобы интеграл от суммы существовал и был равен сумме интегралов, и некоторые другие.

интервалов. Обозначим эти интервалы через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ и покажем, что они обладают требуемыми свойствами. Прежде всего они, очевидно, не пересекаются и образуют в совокупности покрытие множества E.

Рассмотрим произвольный интервал δ_i. Пусть $\Delta_i \subset \delta_i$ — произвольный сегмент. Δ_i целиком покрыт интервалами δ, и, следовательно, по лемме Гейне-Бореля мы можем выбрать конечное число этих интервалов, которые также образуют покрытие отрезка Δ_i. Пусть это интервалы $\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}, \ldots, \delta_{\xi_s}$, с центрами соответственно в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Относительно этих интервалов мы можем предполагать, что ни один из них не лежит целиком внутри другого. В противном случае мы могли бы выбросить внутренние. Обозначим через $\delta^*_{\xi_1}, \delta^*_{\xi_2}, \ldots, \delta^*_{\xi_s}$ интервалы с центрами $\xi_1, \ldots, \xi_s$, но вдвое большей длины, чем $\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}, \ldots, \delta_{\xi_s}$. Тогда две соседние точки из последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_s$, пусть это ξ_{i_1} и ξ_{i_2}, попадают обе одновременно либо в интервал $\delta^*_{\xi_{i_1}}$, либо в интервал $\delta^*_{\xi_{i_2}}$, и, следовательно, согласно неравенству (1)

$$|\psi(\xi_{i_1}) - \psi(\xi_{i_2})| < \eta\,|\xi_{i_1} - \xi_{i_2}|, \tag{2}$$

а отсюда получаем, что для любой точки $x \in \Delta_i$

$$|\psi(\xi_1) - \psi(x)| < \eta\,|\xi_1 - x|. \quad (3$$

Действительно, если $x \in \delta^*_{\xi_1}$, то это следует непосредственно из неравенства (1). В противном случае рассмотрим все точки ξ_i, лежащие между ξ_1 и x. Пусть это $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_k}$ и пусть они расположены в порядке от ξ_1 к x. Тогда $x \in \delta^*_{\xi_{j_k}}$ и, значит,

$$|\psi(x) - \psi(\xi_{j_k})| < \eta\,|\xi_{j_k} - x|. \tag{4}$$

Соединяя (4) и (2) и замечая, что $|\xi_1 - x| = |\xi_{j_k} - x| + \sum |\xi_{j_{m+1}} - \xi_{j_m}|$, получаем требуемое неравенство (3).

Следовательно, колебание функции $\psi(x)$ на Δ_i меньше, чем $2\eta \cdot$ длина Δ_i. Но так как Δ_i был любой сегмент, принадлежащий δ_i, а функция $\psi(x)$ непрерывна, то $\omega_n \leqslant 2\eta \cdot$ длина δ_n, где ω_n есть колебание $\psi(x)$ на δ_n, что и требовалось доказать.

[69] Легко показать, что сумма двух функций, обладающих N-свойством, не должна обладать N-свойством. В самом деле, даже сумма двух функций с нулевым изменением не должна обладать N-свойством [1]) (определение функций с нулевым изменением и доказательство того, что они обладают N-свойством даны в § 48 диссертации Н. Н. Лузина). Примеры такого рода Н. Н. Лузину были известны, и именно поэтому он ставил вопрос, *когда* сумма двух функций, обладающих N-свойством, сама обладает N-свойством. Мы

---

[1]) См. об этом в примечании 70.

не можем дать исчерпывающего ответа на этот вопрос и ограничиваемся указанием того, что известно в настоящее время.

Прежде всего вопрос о существовании производных у функций, обладающих N-свойством, также поставленный Н. Н. Лузиным, в настоящее время разрешен. Именно С. Банах ([2]) доказал, что всякая функция, обладающая N-свойством, обязательно имеет производную на множестве, мера которого положительна в каждом интервале. Этот результат не может быть усилен в том смысле, чтобы утверждать наличие у функции, обладающей N-свойством, производной почти всюду. В самом деле, в работе Н. К. Бари ([1]) доказана возможность для любого совершенного нигде не плотного множества P построить такую $F(x)$, что $F(x) = f[\varphi(x)]$, где f и φ абсолютно непрерывны (т. е. F заведомо обладает N-свойством), и однако $F(x)$ не имеет производной во всякой точке множества P (стр. 212).

Таким образом, функции, обладающие N-свойством, должны иметь производную на множестве, мера которого всюду положительна, но не обязательно почти всюду. Отсюда уже ясно, что сумма двух функций, обладающих N-свойством, не будет функцией, обладающей N-свойством, если она лишена производной почти всюду. Между тем в той же работе Н. К. Бари (стр. 229) показано, что даже сумма двух суперпозиций из абсолютно непрерывных функций (а не только просто функций, обладающих N-свойством) может не иметь производной почти всюду.

Заметим, наконец, что Н. К. Бари ([1]) доказала следующее предложение (см. стр. 611): всякую непрерывную функцию можно представить в виде суммы трех функций, каждая из которых есть суперпозиция абсолютно непрерывных функций. Таким образом сложением трех функций, обладающих N-свойством, можно получить любую непрерывную функцию. Это в известном смысле дает ответ на вопрос о том, что можно сказать о классе функций, обладающих N-свойством.

[[70]] Из примера, который мы сейчас дадим, ясно, что сумма двух функций с нулевым изменением не только не должна быть функцией с нулевым изменением, но даже не должна обладать N-свойством. В самом деле, будет показано, что существуют две различающиеся не на константу функции с нулевым изменением, которые имеют одинаковую производную почти всюду. Следовательно, разность этих двух функций с нулевым изменением имеет производную, почти всюду равную нулю, а значит, не обладает N-свойством.

Пример, приводимый ниже, принадлежит В. А. Ходакову, мы лишь несколько видоизменяем его изложение.

Пример двух функций с нулевым изменением, у которых производные равны почти всюду, но разность их не постоянна.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — последовательность целых чисел, которые мы определим позже.

Построим совершенное множество P меры нуль так: делим отрезок $[0, 1]$ на $2n_1+1$ равных частей, нумеруем их слева направо и выкидываем каждый четный интервал, сохраняя каждый нечетный сегмент. Выкинутые n_1 интервалов называем интервалами 1-го ранга, оставшиеся n_1+1 сегментов — сегментами 1-го ранга. Каждый сегмент 1-го ранга делим на $2n_2+1$ равных частей и, выбрасывая n_2 интервалов, оставляем n_2+1 сегментов (расположенных, как и в первом шаге построения). Интервалы, выброшенные во втором шаге, назовем интервалами 2-го ранга, оставшиеся сегменты — сегментами 2-го ранга и т. д. После k шагов остается $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ сегментов k-го ранга. После счетного множества шагов останется совершенное множество P меры нуль.

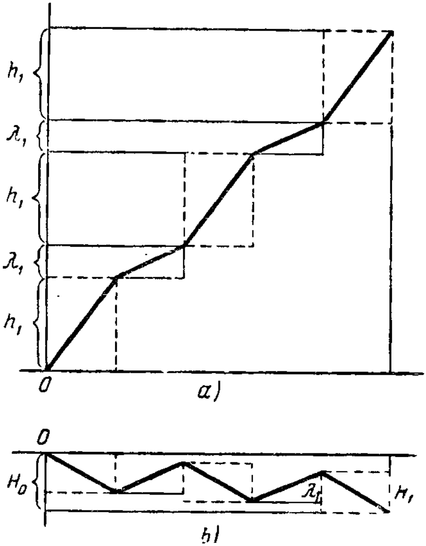
Пусть H_0 — иррациональное число, $0<H_0<2$. Полагаем

$$\lambda_1=\frac{H_0}{2}, \quad n_1=\left[\frac{1}{\lambda_1}\right]=\left[2\frac{h_0}{H_0}\right]$$

и находим h_1 из условия

$$(n_1+1)h_1+n_1\lambda_1=h_0=1. \tag{1}$$

Ясно, что $h_1>0$, ибо $n_1\lambda_1<1$.



Черт. 10.

Строим непрерывную функцию $\varphi_1(x)$ так: $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(1)=1$. $\varphi_1(x)$ линейна на каждом интервале и на каждом сегменте 1-го ранга. $\Delta\varphi_1=\lambda_1$ на интервалах 1-го ранга. $\Delta\varphi_1=h_1$ на сегментах 1-го ранга.

В силу (1) такое построение возможно; функция $\varphi_1(x)$ изобразится ломаной линией (черт. 10, a).

Далее, находим H_1 из условия

$$(n_1+1)H_1 - n_1\lambda_1 = H_0. \tag{2}$$

Ясно, что $H_1 > 0$. Строим непрерывную $\psi_1(x)$ так:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi_1(1) = -H_0.$$

$\psi_1(x)$ линейна на каждом интервале и сегменте 1-го ранга. $\Delta\psi_1 = -H_1$ на сегментах 1-го ранга. $\Delta\psi_1 = \lambda_1$ на интервалах 1-го ранга.

В силу (2) это построение возможно. Функция $\psi_1(x)$ изобразится ломаной линией (черт. 10, b). На чертежах 10, a и b изображенные пунктиром прямоугольники указывают области, внутри которых должны находиться функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые мы собираемся построить для решения поставленной проблемы.

Из (1) и (2) получаем

$$(n_1+1)(H_1-h_1) - 2n_1\lambda_1 = H_0 - h_0.$$

Но $2\lambda_1 = H_0$, а $n_1 = \left[2\frac{h_0}{H_0}\right]$, а потому

$$(n_1+1)(H_1-h_1) = (n_1+1)H_0 - h_0 > \left(2\frac{h_0}{H_0}\right)H_0 - h_0 = h_0 = 1,$$

следовательно,

$$h_1 < H_1.$$

Покажем, кроме того, что $\frac{h_1}{H_1}$ иррационально. Действительно, из (1) и (2) вытекает:

$$h_1 = \frac{1-n_1\lambda_1}{n_1+1}; \quad H_1 = \frac{\lambda_1(2+n_1)}{n_1+1},$$

поэтому

$$\frac{h_1}{H_1} = \frac{1-n_1\lambda_1}{\lambda_1(2+n_1)} = \frac{\frac{1}{\lambda_1}-n_1}{2-n_1} = \frac{\frac{2}{H_0}-n_1}{2-n_1}.$$

Но H_0 иррационально, значит, $\frac{h_1}{H_1}$, а следовательно, и $\frac{H_1}{h_1}$ иррационально. Полагаем

$$n_2 = \left[2\frac{H_1}{h_1}\right].$$

Ясно, что $2 \leqslant n_2 < 2\frac{H_1}{h_1}$, и равенство $n_2 = 2\frac{H_1}{h_1}$ невозможно.

Пусть теперь $\lambda_2 = \frac{h_1}{2}$, тогда $n_2\lambda_2 < H_1$, и поэтому можно найти $H_2 > 0$ из условия

$$(n_2+1)H_2 + \lambda_2 n_2 = H_1. \tag{3}$$

Находим, кроме того, h_2 из уравнения

$$(n_2+1)\,h_2 - \lambda_2 n_2 = h_1. \tag{4}$$

Ясно, что и h_2 положительно.

Строим непрерывные функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ так:

$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$ при $x=0$, $x=1$ и на всех интервалах 1-го ранга, включая их концы.

$\psi_2(x) = \psi_1(x)$ при $x=0$, $x=1$ и на всех интервалах 1-го ранга, включая их концы.

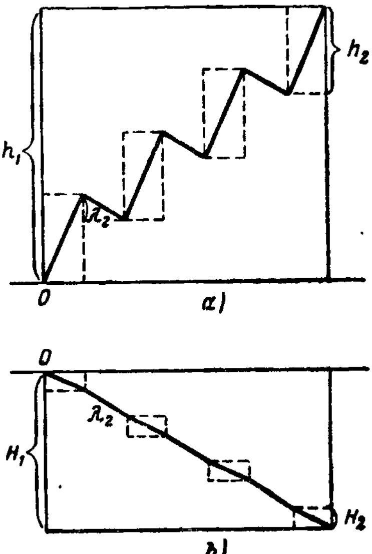
$\Delta\varphi_2 = \Delta\psi_2 = -\lambda_2$ на интервалах 2-го ранга.

Каждая из функций $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ линейна на всех сегментах и интервалах 2-го ранга.

$\Delta\varphi_2 = h_2$ на сегментах 2-го ранга.

$\Delta\psi_2 = -H_2$ на сегментах 2-го ранга.

Построенные функции представляются ломаными линиями. На чертежах 11, *a* и *b* мы изображаем поведение $\varphi_2(x)$ (соответственно $\psi_2(x)$) на некотором сегменте 1-го ранга. Пунктирные прямоугольники — области, где будут располагаться впоследствии функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.



Черт. 11.

Покажем, что $h_2 > H_2$. Действительно, из (3) и (4) следует

$$(n_2+1)(h_2 - H_2) - 2\lambda_2 n_2 = h_1 - H_1,$$

а значит, в силу $\lambda_2 = \frac{h_1}{2}$ и $n_2 = \left[2\frac{H_1}{h_1}\right]$ имеем

$$(n_2+1)(h_2 - H_2) = 2\lambda_2 n_2 + h_1 - H_1 > 2\frac{h_1}{2}\left(2\frac{H_1}{h_1} - 1\right) + h_1 - H_1 =$$

$$= 2H_1 - h_1 + h_1 - H_1 = H_1 > 0.$$

Кроме того, так как $\frac{H_1}{h_1}$ иррационально, а $\lambda_2 = \frac{h_1}{2}$, то и $\frac{h_2}{H_2}$ иррационально, как показывает элементарный подсчет.

Допустим, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ уже построены, причем каждая из них изображается непрерывной ломаной линией, и удовлетворены условия $\varphi_{s+1}(x) = \varphi_s(x)$ для $x=0$, $x=1$

и на всех интервалах ранга $1, 2, \ldots, s$, включая и их концы ($s=1, 2, \ldots, k-1$), и аналогично для $\psi_s(x)$ при тех же условиях.

Кроме того, мы предполагаем, что

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_s=\Delta\psi_s=\lambda_s \text{ на интервалах ранга } s, \text{ если } s \text{ нечетно},\\ \Delta\varphi_s=\Delta\psi_s=-\lambda_s \text{ на интервалах ранга } s, \text{ если } s \text{ четно}\\ (s=1, 2, \ldots, k),\\ \Delta\varphi_s=h_s \quad \text{на сегментах } s\text{-го ранга},\\ \Delta\psi_s=-H_s \text{ на сегментах } s\text{-го ранга}\\ (s=1, 2, \ldots, k);\end{gathered}$$

при этом

$$\lambda_s=\frac{h_{s-1}}{2}, \quad \text{если } s \text{ четно}, \tag{5}$$

$$\lambda_s=\frac{H_{s-1}}{2}, \quad \text{если } s \text{ нечетно} \tag{6}$$

$$(s=2, 3, \ldots, k).$$

Наконец, мы предполагаем, что

$$n_s=\left[2\frac{H_{s-1}}{h_{s-1}}\right], \quad \text{если } s \text{ четно}, \tag{7}$$

$$n_s=\left[2\frac{h_{s-1}}{H_{s-1}}\right], \quad \text{если } s \text{ нечетно} \tag{8}$$

$$(s=2, \ldots, k)$$

и что связь между n_s, h_s, H_s и λ_s такова:

$$\left.\begin{aligned} &(n_s+1)\,h_s-n_s\lambda_s=h_{s-1}, \text{ если } s \text{ четно}, &(9)\\ &(n_s+1)\,h_s+n_s\lambda_s=h_{s-1}, \text{ если } s \text{ нечетно}, &(10)\\ &(n_s+1)\,H_s+n_s\lambda_s=H_{s-1}, \text{ если } s \text{ четно}, &(11)\\ &(n_s+1)\,H_s-n_s\lambda_s=H_{s-1}, \text{ если } s \text{ нечетно} &(12)\end{aligned}\right\}(s=2, \ldots, k),$$

причем $h_s<H_s$, если s нечетно, и $H_s<h_s$, если s четно ($s=1, 2, \ldots, k$); кроме того, всегда

$$\frac{h_s}{H_s} \text{ иррационально} \quad (s=1, 2, \ldots, k).$$

Мы видели, что для $s=1$ и $s=2$ все эти условия выполнены.

Покажем, что можно построить $\varphi_{k+1}(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ так, чтобы все поставленные условия соблюдались.

С этой целью мы сначала возьмем

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{k+1}&=\frac{h_k}{2}, \quad \text{если } k \text{ нечетно},\\ \lambda_{k+1}&=\frac{H_k}{2}, \quad \text{если } k \text{ четно},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

тогда (5) или (6) будет удовлетворено. Затем положим

$$n_{k+1} = \left[2\frac{h_k}{H_k}\right], \quad \text{или} \quad \left[2\frac{H_k}{h_k}\right], \tag{14}$$

смотря по четности и нечетности k,— тогда будет удовлетворено (7) или (8). При этом всегда будем иметь

$$2 \leqslant n_{k+1} < 2\frac{h_k}{H_k} \quad \text{или} \quad 2\frac{H_k}{h_k},$$

ибо отношение $\frac{h_k}{H_k}$ $\left(\text{или } \frac{H_k}{h_k}\right)$ больше 1 и не есть целое число.

Мы определяем теперь h_{k+1} и H_{k+1}, полагая $s = k+1$ и требуя, чтобы удовлетворялись равенства (9) и (11), если $k+1$ четно, или (10) и (12), если $k+1$ нечетно. Они будут всегда положительны, ибо

$$n_{k+1}\lambda_{k+1} = n_{k+1}\frac{h_k}{2} < H_k, \quad \text{если } k \text{ нечетно},$$

$$n_{k+1}\lambda_{k+1} = n_{k+1}\frac{H_k}{2} < h_k, \quad \text{если } k \text{ четно}.$$

Совершенно так же, как это было сделано при доказательстве того, что $h_1 < H_1$ и $h_2 > H_2$, мы проверяем, что $h_{k+1} < H_{k+1}$ или $h_{k+1} > H_{k+1}$, смотря по тому, будет ли $k+1$ нечетно или четно. Наконец, иррациональность отношения $\frac{h_{k+1}}{H_{k+1}}$ выводится из формул, определяющих эти числа, из соотношения $\lambda_{k+1} = \frac{h_k}{2}$ или $\frac{H_k}{2}$ и из того, что $\frac{h_k}{H_k}$ иррационально.

После того как все это доказано, мы видим, что возможно определить $\varphi_{k+1}(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ так, чтобы

$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x)$ для $x = 0$, $x = 1$ и на всех интервалах ранга $1, 2, \ldots, k$, включая и их концы;

$\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x)$ в тех же случаях,

чтобы эти функции были непрерывны, линейны на каждом интервале и каждом сегменте $(k+1)$-го ранга и чтобы

$$\Delta\varphi_{k+1} = \Delta\psi_{k+1} = \begin{cases} +\lambda_{k+1} & \text{на интервалах ранга } k+1, \text{ если } k+1 \text{ нечетно}, \\ -\lambda_{k+1} & \text{на интервалах ранга } k+1, \text{ если } k+1 \text{ четно}, \end{cases}$$

$\Delta\varphi_{k+1} = h_{k+1}$ на сегментах $(k+1)$-го ранга,

$\Delta\psi_{k+1} = -H_{k+1}$ на сегментах $(k+1)$-го ранга.

Нетрудно убедиться на основании формул (9), (10), (11) и (12), что все эти требования выполнимы.

Чтобы представить себе поведение функций $\varphi_{k+1}(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ на сегментах k-го ранга, надо смотреть на чертежи 10, a и b, если $k+1$ нечетно, на чертежи 11, a и b, если $k+1$ четно.

Таким образом мы построим последовательности

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$$

и

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x), \ldots$$

Так как каждая из $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ линейна на всяком сегменте k-го ранга, то ее абсолютный минимум и абсолютный максимум находятся в концах этого сегмента, значит,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{osc}\varphi_k(x) &= |\Delta\varphi_k(x)|\\ \operatorname{osc}\psi_k(x) &= |\Delta\psi_k(x)|\end{aligned}\right\}\text{ на всяком сегменте } k\text{-го ранга,}$$

Далее из построения $\varphi_{k+1}(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ можно вывести, что

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{osc}\varphi_{k+1}(x) &= |\Delta\varphi_k(x)|,\\ \operatorname{osc}\psi_{k+1}(x) &= |\Delta\psi_k(x)|\end{aligned}\right\}\text{ на всяком сегменте } k\text{-го ранга.}$$

Действительно, это очевидно, когда $\varphi_{k+1}(x)$ или $\psi_k(x)$ монотонна на сегменте k-го ранга (что наблюдается для φ_{k+1}, если $k+1$ нечетно, и для ψ_{k+1}, если $k+1$ четно; см. черт. 10 и 11); если же $k+1$ четно, то имеем из (9) для $\varphi_{k+1}(x)$

$$(n_{k+1}+1)\,h_{k+1}-n_{k+1}\lambda_{k+1}=h_k, \tag{15}$$

из (12) для ψ_{k+1} при $k+1$ нечетном

$$(n_{k+1}+1)\,H_{k+1}-n_{k+1}\lambda_{k+1}=H_k; \tag{16}$$

это позволяет утверждать, что при любом p, $1\leqslant p\leqslant n_{k+1}$, имеем

$$(p+1)\,h_{k+1}-p\lambda_{k+1}\leqslant h_k \text{ при } k+1 \text{ четном} \tag{17}$$

(и аналогично для H_k, если $k+1$ нечетно).

В самом деле, из (15) и (13) имеем

$$(n_{k+1}+1)\,h_{k+1}=h_k\left(1+\frac{n_{k+1}}{2}\right),$$

или

$$\frac{1+n_{k+1}}{1+\dfrac{n_{k+1}}{2}}=\frac{h_k}{h_{k+1}}.$$

Но так как $\dfrac{1+p}{1+\dfrac{p}{2}}$ есть возрастающая функция от p, и при $p=n_k$ она равна $\dfrac{h_k}{h_{k+1}}$, то

$$\frac{1+p}{1+\dfrac{p}{2}}\leqslant\frac{h_k}{h_{k+1}},\quad 1\leqslant p\leqslant n_{k+1},$$

а это есть неравенство (17).

Неравенство для H_{k+1} при $k+1$ четном доказывается в точности так же.

Вдумаемся теперь в геометрический смысл неравенства (17).

Вспомним, что ломаная $\varphi_{k+1}(x)$ на сегментах $(k+1)$-го ранга возрастает на h_{k+1}, а на интервалах $(k+1)$-го ранга убывает на

λ_{k+1}; так как подъемы чередуются со спусками, то, пройдя последовательно $p+1$ сегмент $(k+1)$-го ранга, чередующихся с p интервалами $(k+1)$-го ранга, ломаная подымется на величину

$$(p+1)\,h_{k+1}-p\lambda_{k+1},$$

и в силу (17) она при $p<n_{k+1}$ не подымется больше чем на h_k, а в силу (15) при $p=n_{k+1}$ подымется именно на h_k. Это и значит, что

$$\operatorname{osc}\varphi_{k+1}(x)=|\Delta\varphi_k|$$

на всяком сегменте k-го ранга. Аналогично и для $\psi_{k+1}(x)$.

Покажем теперь, что h_k и H_k стремятся к нулю при $k\to\infty$ и притом подсчитаем, с какой скоростью они стремятся к нулю, так как это понадобится в дальнейшем.

Мы имеем в силу (10) при нечетном

$$(n_k+1)\,h_k+n_k\lambda_k=h_{k-1} \tag{18}$$

или в силу (13)

$$(n_k+1)\,h_k+n_k\frac{H_{k-1}}{2}=h_{k-1}.$$

Но в силу (14)

$$n_k>2\frac{h_{k-1}}{H_{k-1}},$$

а потому

$$(n_k+1)\,h_k+\left(2\frac{h_{k-1}}{H_{k-1}}-1\right)\frac{H_{k-1}}{2}<h_{k-1}$$

и, значит,

$$(n_k+1)\,h_k<\frac{H_{k-1}}{2}\ \text{при } k \text{ нечетном.} \tag{19}$$

Но если k нечетно, то $k-1$ четно. Поэтому в силу (11) имеем

$$(n_{k-1}+1)\,H_{k-1}+n_{k-1}\lambda_{k-1}=H_{k-2}.$$

Отсюда абсолютно так же, как мы вывели (19) из (18), находим

$$(n_{k-1}+1)\,H_{k-1}<\frac{h_{k-2}}{2}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) выводим

$$h_k<\frac{1}{2^2(n_k+1)}\,\frac{1}{(n_{k-1}+1)}\,h_{k-2}.$$

Продолжая это рассуждение и замечая, что $H_0<2$, найдем

$$h_k<\frac{1}{2^{k-1}(n_k+1)(n_{k-1}+1)\,\ldots\,(n_1+1)}, \tag{21}$$

и аналогичное неравенство будет справедливо для H_k при k четном.

Отсюда уже ясно, что последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ сходятся равномерно к некоторым непрерывным функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В силу того что сегментов k-го ранга имеется $(n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ штук и колебание $\varphi_k(x)$ на каждом из них есть h_k, то в силу (21) сумма колебаний $\varphi_k(x)$ на совокупности всех сегментов k-го ранга меньше, чем $\frac{1}{2^{k-1}}$ (при нечетном k), а так как при любом k имеем $\operatorname{osc}\varphi_{k+1}(x)=|\Delta\varphi_k|=\operatorname{osc}\varphi_k(x)$ на каждом сегменте k-го ранга, то отсюда легко вывести, что сумма колебаний $\varphi(x)$ на совокупности всех сегментов k-го ранга стремится к нулю при $k\to\infty$. Аналогичное рассуждение справедливо для $\psi(x)$. Отсюда легко вывести, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции с нулевым изменением. Действительно, по самому своему построению они линейны на каждом смежном интервале к P. Пусть E — любое множество меры нуль; тогда его можно разложить на два слагаемых: $E=E_1+E_2$, где $E_1=E\cdot P$, и $E_2=E\cdot CP$. Если мы покроем E_2 любой системой интервалов, то сумма колебаний $\varphi(x)$ или $\psi(x)$ на них будет стремиться к нулю вместе с суммой длин этих интервалов в силу линейности $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на интервалах, образующих CP. Что же касается E_1, то его можно покрыть сегментами k-го ранга при как угодно большом k, а на них, как мы видели, сумма колебаний $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремится к нулю. Итак, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции с нулевым изменением.

Наконец, заметим, что по построению $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ — прямые, изображающие ход этих функций на каждом интервале ранга $1, 2, \ldots, k$, имеют всегда одинаковый тангенс угла наклона, а поэтому и предельные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ изображаются на каждом смежном к P интервале прямыми с одинаковым наклоном, т. е. $\varphi'(x)=\psi'(x)$ на каждом таком интервале, а значит, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции с нулевым изменением, у которых производные равны почти всюду, и однако $\varphi(x)\neq\psi(x)+\mathrm{const}$, а это и надо было доказать.

[71] См. примечание 25.

[72] Здесь речь идет о теореме: неопределенный интеграл Лебега есть абсолютно непрерывная функция, доказательство которой можно найти в любом современном курсе теории функций.

[73] Мы уже видели (см. примечание 70), что функция может иметь две различные примитивные с нулевым изменением. Но этого мало: В. А. Ходаков доказал, что если $f(x)$ не суммируема ни в каком интервале, то она заведомо не может иметь единственную примитивную с нулевым изменением (этот результат пока не опубликован).

[74] Чтобы разъяснить это неравенство, рассмотрим функцию $F(x)$, определенную следующим образом: при $x\in P$ $F(x)=F_0(x)+\sum_x \omega_n$, где $\sum_x$ — сумма, распространенная на ω_n, соответствующие δ_n, лежащим левее точки x. На самих же δ_n $F(x)$ интерполи-

руется линейно. Тогда, очевидно,

$$F(0)=F_0(0)=0 \quad \text{и} \quad F(1)=F_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n.$$

Далее, функция $F(x)$ монотонно не убывает, а значит, $\int_0^1 F'(x)\,dx \leqslant F(1)-F(0)=F(1)$, и так как $f(x)\leqslant F'(x)$ в тех точках $x\in P$, где существует $F'(x)$, т. е. в силу монотонности F почти во всех точках множества P и $F'(x)\geqslant 0$, то $\int_P f(x)\,dx \leqslant F(1)=$ $=F_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$, или $|F_0(1)|\geqslant F_0(1)\geqslant \int_P f(x)\,dx-\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$.

[75] Существование функций, не интегрируемых по Данжуа, но имеющих примитивную с нулевым изменением, доказано Н. Н. Лузиным в §§ 52—57 его диссертации. Что такая примитивная не единственная, следует из результата В. А. Ходакова, отмеченного в примечании 73.

[76] Мы уже знаем (см. примечание 73), что в общем случае функция $f(x)$ не может иметь единственную примитивную с нулевым изменением. Поэтому, желая определить интеграл, следует, очевидно, выбрать какую-то одну примитивную с нулевым изменением (если они вообще существуют в пучке примитивных для данной $f(x)$). Нельзя поэтому говорить о выполнении аксиом Лебега, так как этот вопрос зависит от того, как именно будет сделан выбор одной примитивной с нулевым изменением.

Здесь уместно остановиться на некоторых результатах В. А. Ходакова, связанных с вопросом о выборе «неопределенного интеграла» в пучке примитивных.

Пусть для некоторой функции $F(x)$, заданной на каком-либо отрезке $[a, b]$, в каждой точке x определено число

$$R_F(x)=\sup_{a\leqslant x'\leqslant b}\left|\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}\right|$$

(это число может и равняться $+\infty$). Пусть E_n — множество тех точек x, где $R_F(x)>n$, т. е.

$$E_n=E\,(R_F(x)>n).$$

Если $\operatorname{mes} E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ¹), то мы для краткости условимся называть такую функцию $F(x)$ «примитивной x». Название «примитив-

¹) Мы пользуемся общепринятым теперь обозначением: если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, определенные для всех x, начиная с не-

ная» оправдывается тем, что, как показал Ходаков, эти функции действительно имеют производную почти всюду.

Каждая «примитивная x» есть функция с нулевым изменением, но преимущество их перед функциями с нулевым изменением заключается в том, что они образуют кольцо (т. е. сумма, разность и произведение двух таких примитивных обладают тем же свойством); если две «примитивные x» имеют почти всюду одинаковые производные, то они отличаются лишь на константу. Всякая абсолютно непрерывная функция есть «примитивная x», однако существуют «примитивные x», у которых производная не суммируема ни в каком интервале.

Из свойств «примитивных x» вытекает, что если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ «примитивную x», то только одну. Пусть $F(x)$ — эта примитивная. Назовем тогда «интегралом x» $f(x)$ на $[a, b]$ величину $F(b) - F(a)$; интегралы x удовлетворяют всем аксиомам Лебега. Интеграл x по множеству может быть определен как интеграл по отрезку от функции, совпадающей с данной на множестве и равной нулю вне его.

Отправляясь от таких «интегралов x» и применяя трансфинитный процесс Данжуа, можно построить новый интеграл. Существуют функции, не интегрируемые по Данжуа (ни в узком, ни в широком смысле) и интегрируемые этим новым интегралом.

Все эти результаты будут изложены в диссертации В. А. Ходакова.

[77] В настоящее время можно ответить на этот вопрос отрицательно. Действительно, можно построить непрерывную функцию, для которой $F'(x) = 0$ почти всюду и притом

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi F(\alpha)\, n \cos n\alpha \, d\alpha = 0. \tag{A}$$

Первый пример такой функции был дан Д. Е. Меньшовым, когда он решал проблему о единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Построение этого примера можно найти или в работе Д. Е. Меньшова ([2]) или в статье Н. К. Бари ([2]).

Так как функция $F(x) \equiv 0$ есть примитивная для $f(x) = 0$, удовлетворяющая равенству (А), и функция $F(x)$, построенная

которого x_0 и $g(x) > 0$, то пишут $f(x) = O(g(x))$, если $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ остается ограниченным для всех достаточно больших значений x. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to \infty$, то пишут $f(x) = o(g(x))$. В частности, говорят, что некоторое выражение есть $o(1)$, если оно стремится к нулю, или $O(1)$, если оно остается ограниченным. То же обозначение применяется и при $x \to -\infty$ или когда x стремится к конечному пределу; можно также рассматривать случай, когда x стремится к своему пределу по дискретной последовательности значений.

Д. Е. Меньшовым, тоже является примитивной для $f(x)$, удовлетворяющей этому равенству, то поставленный Н. Н. Лузиным вопрос о единственности такой примитивной решается отрицательно.

[78] Здесь Н. Н. Лузин специально ставит проблему о структуре *непрерывных* функций $F(x)$, удовлетворяющих равенству

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = 0. \qquad (u)$$

Задача эта не решена и до сих пор. Полезно заметить, что требование непрерывности не напрасно формулируется отдельно, так как функция, удовлетворяющая равенству (u), может быть неограниченной во всяком интервале, как бы мал он ни был. Примеры такого рода были известны уже Н. Н. Лузину (см. об этом подробнее в примечании 80). Однако доказательство существования всюду неограниченной функции, удовлетворяющей равенству (u), получается у него косвенным путем, и было бы очень трудно фактически выписать ряд Фурье этой функции. Поэтому нам представляется целесообразным дать здесь простой пример функции такого вида. Этот пример принадлежит Г. П. Толстову.

Итак мы покажем, что существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (1)$$

у которого коэффициенты имеют вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е. условие (u) удовлетворено, а сумма его $F(x)$ не ограничена на всяком отрезке $[a, b]$, лежащем на $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, всюду плотное на $[0, 2\pi]$. Пусть

$$F_k(x) = C_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\cos n(x - x_k)}{n \ln n} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (2)$$

где число C_k мы подберем так, чтобы последовательность

$$C_k, \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}, \quad \frac{1}{(k+2)\ln(k+2)}, \ \ldots$$

была выпуклой [1]), что возможно, так как последовательность $\left\{\frac{1}{n \ln n}\right\}$ выпукла.

[1]) Последовательность $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ называется выпуклой, если $\Delta^2\lambda_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $\Delta^2\lambda_n = \Delta\lambda_n - \Delta\lambda_{n+1}$.

В силу сделанной гипотезы о выборе чисел C_k все функции $F_k(x)$ будут неотрицательны. Действительно, имеет место такая теорема: если $a_n \to 0$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

сходится, за исключением точки $x=0$, к неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$ (см. Зигмунд ([1]), стр. 112).

Кроме того, имеем

$$\lim_{x \to x_k} F_k(x) = +\infty. \tag{3}$$

Действительно (см. Зигмунд ([1]), стр. 118), если $a(x)$ при $x \geqslant 0$ — положительная выпуклая функция, стремящаяся к 0 при $x \to \infty$, если $n(a_n - a_{n+1})$, где $a_n = a(n)$, не возрастает и $a_0 + a_1 + \ldots$ $\ldots + a_n + \ldots = +\infty$, то для суммы $f(x)$ ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ имеют место соотношения

$$(x) \sim \int_1^x t\,[a(t) - a(t+1)]\,dt \sim \int_0^{\frac{1}{x}} t\,|a'(t)|\,dt.$$

В нашем случае, полагая $a(x) = \frac{1}{x \ln x}$, сразу видим, что $n(a_n - a_{n+1})$ не возрастает и ряд $\sum\limits_0^{\infty} a_n = +\infty$; поэтому если

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \cos kx,$$

то

$$f(x) \sim \int_0^{\frac{1}{x}} \left| \frac{1}{t \ln t} + \frac{1}{t \ln^2 t} \right| dt,$$

и так как последний интеграл расходится, то $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$, а значит, $F(x_k) \to +\infty$ при $x \to x_k$, а это и есть соотношение (3).

Так как каждая $F_k(x)$ есть неотрицательная интегрируемая функция, то можно выбрать положительные числа ε_k так, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \int_0^{2\pi} F_k(x)\,dx$$

сходился, а тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k F_k(x)$$

сходится почти всюду и определяет некоторую суммируемую функцию $F(x)$.

Для того чтобы найти ее коэффициенты Фурье, подсчитаем сначала

$$F(x)\cos mx = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k F_k(x)\cos mx \qquad (m \geqslant 2). \tag{4}$$

Так как

$$|\varepsilon_k F_k(x)\cos mx| < \varepsilon_k F_k(x),$$

то ряд (4) можно почленно интегрировать. Поэтому

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos mx\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \frac{1}{\pi} F_k(x)\cos mx\,dx.$$

В силу (2) очевидно, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_k(x)\cos mx\,dx = \begin{cases} \dfrac{\cos mx_k}{m\ln m} & (k<m), \\ 0 & (k \geqslant m). \end{cases}$$

Поэтому

$$a_m = \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k \frac{\cos mx_k}{m\ln m},$$

и следовательно,

$$|a_m| < \frac{1}{m\ln m}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k,$$

откуда видно, что $ma_m \to 0$ при $m \to \infty$. Аналогично доказывается, что и $mb_m \to 0$.

Итак, ряд Фурье от $F(x)$ имеет коэффициенты вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а между тем $F(x)$ не ограничена на любом интервале, лежащем на $[0, 2\pi]$, так как

$$F(x) = \sum \varepsilon_k F_k(x),$$

значит, $F(x) \geqslant \varepsilon_k F_k(x)$ при любом k, а потому при $x \to x_k$ имеем в силу (3)

$$\lim_{x \to x_k} F(x) = +\infty,$$

и остается заметить, что множество $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ всюду плотно на $(0, 2\pi)$.

Мы показали, что функции с коэффициентами Фурье вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$ могут быть не ограниченными во всяком интервале, как бы мал он ни был. Однако такие функции все же обладают некоторыми интересными свойствами, которые здесь стоит отметить.

Прежде всего заметим, что если ряд имеет коэффициенты вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то он сходится почти всюду, но не обязательно всюду, т. е. сумма его $F(x)$ таким образом даже не всюду определена. Однако можно доказать, что на множестве, где она определена, она обладает «свойством Дарбу».

Мы говорим, что некоторая функция $\varphi(x)$ обладает «свойством Дарбу» на множестве E, если каждый раз, как $\alpha \in E$ и $\beta \in E$, для любого C, содержащегося между $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, найдется такое $\gamma \in E$ и лежащее между α и β, что $\varphi(\gamma) = C$. Известно, что если E есть отрезок и $\varphi(x)$ непрерывна, то она обладает на E «свойством Дарбу». Название же это вызвано тем, что Дарбу доказал это свойство для функций, являющихся точными производными.

Итак, докажем, что *если некоторый ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

имеет коэффициенты вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то его сумма $F(x)$ обладает свойством Дарбу на множестве, где она определена. Этот результат был получен Г. П. Толстовым, но не опубликован. Значительно позже он появился в работе Зигмунда [2].

Рассмотрим функцию $\Phi(x)$, являющуюся суммой ряда, получающегося интегрированием ряда (1). На основании классических результатов Римана (см., например, Зигмунд [1], стр. 267) эта функция непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h} = 0. \tag{5}$$

Функции, удовлетворяющие равенству (5), Зигмунд предлагает называть «гладкими», так как они не могут иметь угловых точек (если бы существовала производная, справа отличная от производной слева, то равенство (5) не имело бы места). Правда, как показал Зигмунд, гладкие функции могут быть лишены производной почти всюду; однако они непременно имеют производную на множестве, всюду плотном и мощности континуума в каждом интервале.

В очень интересной работе, посвященной гладким функциям, Зигмунд [2] установил ряд свойств этих функций, а также функций, которые удовлетворяют несколько более слабым требованиям, чем условие (5). Мы здесь ограничимся рассмотрением лишь одного свойства гладких функций, нужного нам для изучения структуры функций с коэффициентами вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Заметим сначала, что в силу теоремы Фату [1]), для того чтобы ряд с коэффициентами вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$ сходился в некоторой точке x_0 к числу S, необходимо и достаточно, чтобы сумма ряда, получаемого в результате интегрирования первоначального ряда, имела в точке x_0 производную, равную числу S.

Отсюда вытекает такое следствие: если для непрерывной гладкой функции $\Phi(x)$ будет доказано, что ее производная $\Phi'(x)$ обладает свойством Дарбу на том множестве, где она существует, то сумма $F(x)$ ряда (1) будет также обладать свойством Дарбу на множестве, где она определена.

Итак, вопрос сводится к изучению производных от непрерывных гладких функций.

Прежде всего заметим, что если такая функция, пусть это $\Phi(x)$, имеет в некоторой внутренней точке x_0 отрезка максимум или минимум, то $\Phi'(x_0)$ существует и равна нулю. В самом деле, в формуле

$$\frac{\Phi(x_0+h)+\Phi(x_0-h)-2\Phi(x_0)}{h}=$$
$$=\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}+\frac{\Phi(x_0-h)-\Phi(x_0)}{h}$$

оба члена в правой части одного знака при h, достаточно малом, а поэтому, если их сумма стремится к 0, то это верно для каждого из них в отдельности, а значит, $\Phi'(x_0)$ существует и равна нулю.

Чтобы доказать, что $\Phi'(x)$ обладает свойством Дарбу на множестве E, где она существует, рассуждаем так. Пусть $\alpha \in E$ и $\beta \in E$; пусть $\Phi'(\alpha)=A$, $\Phi'(\beta)=B$ и C — некоторое число между A и B. Для определенности мы предположим $A<C<B$. Мы должны доказать существование такого x_0 внутри $[\alpha, \beta]$, что $\Phi'(x_0)=C$. Если вычесть Cx из $\Phi(x)$, то можно принять $C=0$, тогда $A<0<B$.

Положим

$$G(x)=\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}.$$

Возьмем h положительным, меньшим чем $\beta-\alpha$, и фиксированным, но столь малым, что

$$G(\alpha)<0,\quad G(\beta)>0,\quad \frac{\Phi(\beta)-\Phi(\beta-h)}{h}>0.$$

Так как $G(x)$ непрерывна, то на $[\alpha, \beta]$ есть точки, где она обращается в нуль. Пусть γ — самая левая из таких точек. Из

$$G(\gamma)=\frac{\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)}{h}=0$$

[1]) Доказательство этой теоремы мы дасм в примечании 120.

следует $\Phi(\gamma+h)=\Phi(\gamma)$. Если x_0 есть точка на $(\gamma,\ \gamma+h)$, где $\Phi(x)$ достигает максимума или минимума, то $\Phi'(x_0)=0=C$. Но так как $G(\alpha)<0$ и $G(\beta-h)=\frac{\Phi(\beta)-\Phi(\beta-h)}{h}>0$ в силу сделанного выбора h, то $\alpha<\gamma<\beta-h$ и $(\gamma,\ \gamma+h)$ лежит внутри $(\alpha,\ \beta)$. Значит, x_0 лежит внутри $(\alpha,\ \beta)$, и теорема доказана.

Мы хотим сделать еще одно последнее замечание по поводу свойств функций $F(x)$ с коэффициентами Фурье вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Если рассмотреть тот специальный случай, когда $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то вопросу о структуре таких функций был посвящен ряд работ; подробнее об этом см. в примечании 155.

[79] См. об этом на стр. 256—257 диссертации Н. Н. Лузина.

[80] На стр. 252 своей диссертации Н. Н. Лузин предлагал для выбора неопределенного интеграла поступать так: пусть для некоторой $f(x)$ существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{1}$$

сходящийся к ней почти всюду. Проинтегрируем этот ряд, получим ряд

$$C+\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx, \tag{2}$$

сходящийся почти всюду¹), тогда сумму $F(x)$ этого ряда назовем «неопределенным интегралом» от $f(x)$.

Н. Н. Лузин считал чрезвычайно вероятным, что если существует ряд, сходящийся почти всюду к некоторой $f(x)$, то такой ряд только один. Если бы это было так, то и «неопределенный интеграл», построенный так, как только что было указано, был бы однозначно определен, и, было бы совершенно естественно изучать его структурные свойства. В частности, Н. Н. Лузин обнаружил, что такой «интеграл» может быть функцией, не ограниченной во всяком интервале, как бы мал он ни был. Действительно, в § 74 своей диссертации он построил функцию $f(x)$ [см. формулу (31)], для которой ряд Фурье сходится почти всюду и его сопряженный тоже; однако интегрирование этого сопряженного ряда приводит к ряду, сумма которого $G(x)$ есть функция, не ограниченная во всяком

¹) У ряда (1) коэффициенты должны стремиться к нулю по теореме Кантора (см., например, Зигмунд (¹), стр. 265), а тогда у ряда (2) они имеют вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а значит, ряд (2) сходится почти всюду по теореме Фату (см. примечание 120).

интервале, как бы мал он ни был. Примеры такого рода и побудили Н. Н. Лузина сказать, что на известных стадиях обобщения интеграла приходится искать примитивную уже среди разрывных функций.

[81] Примитивная с нулевым изменением может быть не единственной. См. по этому поводу примечание 70.

[82] Мы здесь докажем [1]) несколько более общее предложение, а именно: пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — всюду плотное множество на $[0, 1]$ и пусть каждая из функций

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots$$

дифференцируема сколько угодно раз всюду, за исключением, быть может, соответствующей точки x_n [2]).

Будет доказано, что при достаточно быстро убывающих коэффициентах $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$: 1) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n^{(p)}(x) \tag{1}$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$, каково бы ни было p [3]); 2) при любом p сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n^{(p+1)}(x) \tag{2}$$

получается асимптотическим дифференцированием суммы ряда (1) [4]).

Докажем 1). Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$ $(\varepsilon_n > 0)$. Заключим каждую точку x_n в интервал δ_n длины $2\varepsilon_n$ с центром в этой точке и обозначим через M_k максимум значений $|F_k|, |F'_k|, \ldots, |F_k^{(k)}|$ вне интервала δ_k. Подберем числа η_k так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$M_k \eta_k \leqslant \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Остается принять $|A_k| \leqslant \eta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Действительно, отнесем к множеству E всякую точку $x \in [0, 1]$, которая попадает в бесконечное множество интервалов δ_n. Очевидно,

$$E \subset \delta_n + \delta_{n+1} + \ldots, \quad \operatorname{mes} E < 2 \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

при любом n, и следовательно,

$$\operatorname{mes} E = 0.$$

---

[1]) Это доказательство принадлежит Г. П. Толстову.

[2]) Мы не предполагаем непрерывности $F_n(x)$ в точке x_n.

[3]) Считаем $F_n^{(0)}(x) \equiv F_n(x)$.

[4]) Утверждение 2) нам понадобится позже.

Пусть $x \overline{\in} E$ и $x \neq x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Это означает:

α) $F_k^{(p)}(x)$ определена при любых p и k.

β) существует индекс N такой, что

$$x \overline{\in} \sum_{k=N}^{\infty} \delta_k.$$

Разобьем ряд (1) на две части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k F_k^{(p)}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x),$$

где $n = \max\{p, N\}$ [1]).

Так как для $k \geqslant n \geqslant p$

$$|F_k^{(p)}(x)| \leqslant M_k,$$

то

$$|A_k F_k^{(p)}(x)| \leqslant \eta_k M_k \leqslant \varepsilon_k,$$

и следовательно, ряд

$$\sum_{k=n}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x)$$

сходится. Это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x)$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Докажем 2). Каждая из функций $F_k^{(p)}(x)$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица на отрезках $[0, x_k - \varepsilon_k]$ и $[x_k + \varepsilon_k, 1]$ [2]). Отсюда легко следует, что отношение

$$\left| \frac{F_k^{(p)}(x_2) - F_k^{(p)}(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \tag{3}$$

ограничено некоторой постоянной M_{kp}, когда x_1 и x_2 лежат вне δ_k (k и p фиксированы).

Обозначим через $\overline{M}_k$ наибольшую из величин M_{kp}, $p = 0, 1, 2, \ldots, k$, и выберем числа $\overline{\eta}_k$ так, чтобы было

$$\overline{M}_k \cdot \overline{\eta}_k \leqslant \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) При $n = 1$ первая сумма отсутствует.

[2]) Величины $\varepsilon_k > 0$ попрежнему образуют сходящийся ряд.

Остается положить

$$|A_k| \leqslant \min\{\eta_k, \bar{\eta}_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

(η_k определены при доказательстве 1)).

Действительно, пусть

$$\mathfrak{E}_n = [0, 1] - (\delta_n + \delta_{n+1} + \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где δ_n — попрежнему представляет собой интервал длины $2\varepsilon_n$ с центром в точке x_n. Очевидно, $\mathfrak{E}_n$ — замкнутое множество и

$$\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{E}_n \subset \ldots, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \mathfrak{E}_n = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{E}_n^*$ совокупность точек плотности множества $\mathfrak{E}_n$. Тогда

$$\mathfrak{E}_1^* \subset \mathfrak{E}_2^* \subset \ldots \subset \mathfrak{E}_n^* \subset \ldots, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \mathfrak{E}_n^* = 1.$$

Очевидно,

$$\operatorname{mes} \sum_{k=n}^{\infty} \mathfrak{E}_k^* = 1.$$

Пусть $x \neq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{E}_n^*$.

Обозначим через N индекс, для которого $x \in \mathfrak{E}_N^*$ в первый раз, и предположим, что $x + h \neq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $x + h \in \mathfrak{E}_N$. Ясно, что $x \bar{\in} E$ и $x + h \bar{\in} E$ (см. доказательство свойства 1)). Поэтому ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p)}(x+h), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p+1)}(x)$$

сходятся. Для $n \geqslant \max\{N, p\}$ рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} A_k \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h}. \tag{6}$$

Ввиду (4) и (5) $x \in \mathscr{E}_k^* \in \mathscr{E}_k$, $x+h \in \mathscr{E}_k$ при $k \geqslant N$, т. е. для таких k точки x и $x+h$ лежат вне δ_k. Поэтому для $k \geqslant n \geqslant p$

$$\left| \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h} \right| \leqslant \overline{M}_k$$

(см. (3) и далееe). Следовательно, последняя сумма в (6) по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_{k=n}^{\infty} |A_k| \cdot \overline{M}_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \overline{\eta}_k \overline{M}_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k,$$

т. е. сколь угодно мала при большом n, какова бы ни была точка $x+h \in \mathscr{E}_N$. С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h} \to \sum_{k=1}^{n-1} A_k F_k^{(p+1)}(x)$$

при $h \to 0$.

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in \mathscr{E}_N}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{F_k^{(p)}(x+h) - F_k^{(p)}(x)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k^{(p+1)}(x).$$

Это и доказывает свойство 2).

[83] Так как термин «производное число» разными авторами употребляется в разных смыслах, мы подчеркиваем, что здесь Н. Н. Лузин имел в виду то определение, которое имеется в книге Лебега, т. е., например, верхнее правое производное число есть верхний предел отношения

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

при h, стремящемся к нулю по положительным значениям (аналогично для нижнего правого производного числа и для левых производных чисел). Соответствующие обозначения Λ_d, λ_d, Λ_g, λ_g также взяты у Лебега (d — правый, g — левый, Λ — верхнее, λ — нижнее).

[84] Если $F(x)$ имеет ограниченные производные числа, то она удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, будет абсолютно непрерывной, а значит, и подавно с ограниченным изменением.

[85] См. примечание 23.

[86] Позднее Данжуа доказал, что кроме точек некоторого множества меры нуль четыре производных числа непрерывной

функции $F(x)$ могут занимать только одно из следующих четырех положений:

1°. Все четыре производных числа конечны и равны между собой, т. е. существует обыкновенная конечная производная.

2°. $\Lambda_g = +\infty$,
$\lambda_g = \Lambda_d =$ конечному числу,
$\lambda_d = -\infty$.

3°. $\Lambda_d = +\infty$,
$\Lambda_g = \lambda_d =$ конечному числу,
$\lambda_g = -\infty$.

4°. $\Lambda_d = \Lambda_g = +\infty$, $\lambda_g = \lambda_d = -\infty$.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в русском переводе Лебега ([1]), стр. 203 или в книге Сакса ([1]), стр. 388.

Чтобы убедиться в том, что случаи 2°, 3°, 4° фактически могут выполняться на множествах положительной меры, укажем здесь примеры, принадлежащие Данжуа ([1]) (несколько видоизмененные).

1. Пусть P — совершенное нигде не плотное множество, лежащее на отрезке $[a, b]$, $\operatorname{mes} P > 0$, и (a_n, b_n) — его смежные интервалы.

Удалим из отрезка $[a, b]$ интервалы (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{n-1}, b_{n-1}). Интервал (a_n, b_n) лежит на одном из оставшихся сегментов. Обозначим через ρ_n длину этого сегмента (ρ_1 положим равным $b - a$). После этого полагаем

$$f(x) = 0 \quad \text{на} \quad P$$

и

$$f(x) = \sqrt{\rho_n} \cdot \frac{1}{b_n - a_n} \cdot \sqrt{(x - a_n)(b_n - x)} \quad \text{на} \quad (a_n, b_n).$$

Тогда в каждой точке множества P будем иметь

$$\Lambda_d = +\infty, \quad \lambda_d = \Lambda_g = 0, \quad \lambda_g = -\infty.$$

2. Если мы теперь положим

$$f(x) = 0 \quad \text{на} \quad P$$

и

$$f(x) = \sqrt{\rho_n} \cdot \frac{1}{b_n - a_n} \cdot \sqrt{(x - a_n)(b_n - x)} \cdot \sin \frac{(b_n - a_n)^2}{(x - a_n)(b_n - x)}$$

$$\text{на } (a_n, b_n),$$

то получим во всех точках из P

$$\Lambda_d = \Lambda_g = +\infty, \quad \lambda_d = \lambda_g = -\infty.$$

Заметим еще, что полученные Данжуа результаты о поведении производных чисел были перенесены А. Я. Хинчиным ([8]) на случай асимптотических производных чисел и Ю. Б. Гермейером ([1]) на случай симметрических производных чисел Шварца.

[27] То, что здесь Н. Н. Лузин назвал «обобщенной производной», А. Я. Хинчин назвал «асимптотической», а Данжуа «апроксимативной производной». В настоящее время в математической литературе употребляются как термин асимптотическая, так и термин апрокси-

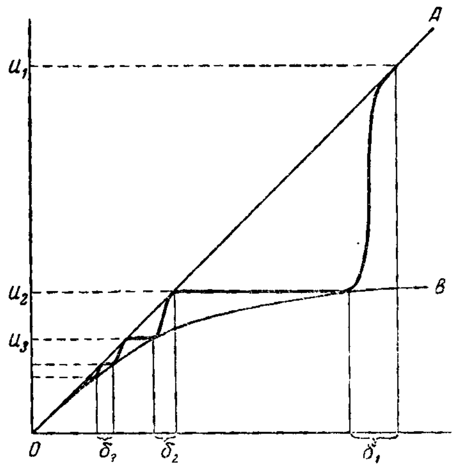
мативная производная. А. Я. Хинчин и А. Данжуа почти одновременно и независимо друг от друга ввели это понятие и приложили его к изучению свойств интеграла, носящего в настоящее время название «интеграла Данжуа-Хинчина» (см. примечание 43).

Связь понятия асимптотической производной с другими обобщениями производной изучена А. Я. Хинчиным ([3]). Ряд интересных результатов, касающихся асимптотической производной, получен Г. П. Толстовым ([1, 2, 3]).

[88] Доказательство того, что формула ¹)

$$\{F[\varphi(t)]\}'_{\text{ao}} = F'_{\text{ao}}(\varphi)\,\varphi'_{\text{ao}}(t) \qquad (1)$$

справедлива *почти* всюду, если F и φ всюду асимптотически дифференцируемы, можно найти в работе Г. П. Толстова ([3]).



Черт. 12.

Заметим, что слово «почти» в этой формулировке нельзя изъять. Действительно, покажем, что функция F может быть всюду асимптотически дифференцируемой, а $\varphi(t)$ — дифференцируемой в обычном смысле, и однако в индивидуальной точке формула (1) нарушается, хотя в этой точке даже $\varphi'(t) \neq 0$. Этот пример также принадлежит Г. П. Толстову.

Пусть OA — прямая, проходящая через начало координат, и OB — дуга, касающаяся этой прямой в точке O (черт. 12).

Пусть интервалы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ не перекрываются и построены так, чтобы их концы стремились к точке O, а множество E, составленное из всех точек этих интервалов, имело в O точку разрежения.

---

¹) Мы пишем F'_{ao} для обозначения асимптотической производной.

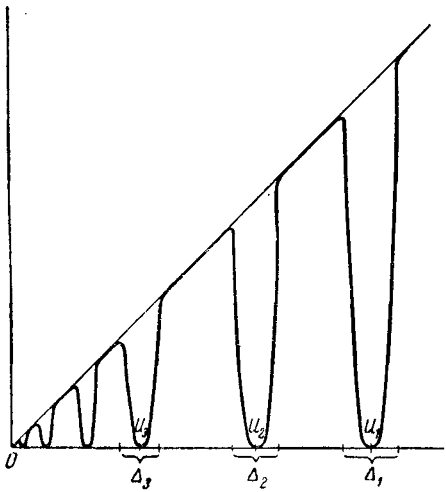
Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная всюду дифференцируемая функция, причем ее значения в правых концах интервалов δ_n, обозначаемые через u_n, изображаются точками прямой OA. Величины $\varphi(t)$ в левых концах δ_n лежат на OB. Между δ_n и δ_{n+1} функция $\varphi(t)$ постоянна ($n = 1, 2, \ldots$). Этим условиям можно удовлетворить, если определить кривую OB подходящим образом. Из построения ясно, что $\varphi'(0) \neq 0$. Пусть теперь $F(u)$ построена так (черт. 13):

$$F(0) = 0,$$

$$F(u_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$F(u) = u \text{ вне интервалов } \Delta_n,$$

где Δ_n — интервалы с центрами в u_n и такие, что точка O есть точка разрежения для множества, составленного из всех этих интервалов. На интервалах Δ_n функция $F(u)$ строится как угодно, лишь бы она была дифференцируема всюду, кроме точки O.



Черт. 13.

Ясно, что F'_{ao} существует всюду, и в частности, в точке O, и при этом $F'_{ao}(0) \neq 0$.

Ясно, что в каждой точке t, не принадлежащей ни одному из δ_n имеем $F[\varphi(t)] = 0$, а значит,

$$\{F[\varphi(0)]\}'_{ao} = 0,$$

а между тем $F'_{ac}(0) \neq 0$ и $\varphi'(0) \neq 0$.

[89] Мы здесь даем простой пример *непрерывной функции, не имеющей обыкновенной производной ни в какой точке и почти всюду имеющей асимптотическую производную*, принадлежащий Г. П. Толстову.

Прежде всего рассмотрим функцию $\varphi(x)$, определяемую на некотором отрезке $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ так:

1) $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими производными до 2-го порядка включительно.

2) Для некоторого δ, $0<\delta<\frac{l}{2}$, функция $\varphi(x)$ положительна всюду на $(-\delta, \delta)$ и равна 0 вне $(-\delta, \delta)$.

3) $\varphi(0)=l$, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant l$, на $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

Мы продолжим ее затем периодически с периодом l, т. е.

4) $\varphi(x+l)=\varphi(x)$ при любом x.

Покажем, что для каждого x найдутся такие h и h', что

а) $l\leqslant h\leqslant 2l$, $\qquad l\leqslant h'\leqslant 2l$,

б) $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\dfrac{\varphi(x+h')-\varphi(x)}{h'}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

Действительно, на отрезке $[x+l, x+2l]$ можно найти точки x_1 и x_2, в которых соответственно $\varphi(x_1)=l$ и $\varphi(x_2)=0$. Полагая

$$h=x_1-x,\quad h'=x_2-x,$$

видим, что условие а) удовлетворено. Имеем

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\frac{\varphi(x+h')-\varphi(x)}{h'}=\frac{l-\varphi(x)}{h}+\frac{\varphi(x)}{h'}.$$

Если обозначить через h_0 наибольшее из чисел h и h', то из $h_0\leqslant 2l$ и $0\leqslant\varphi(x)\leqslant l$ находим

$$\frac{l-\varphi(x)}{h}+\frac{\varphi(x)}{h'}\geqslant\frac{l-\varphi(x)}{h_0}+\frac{\varphi(x)}{h_0}=\frac{l}{h_0}\geqslant\frac{1}{2},$$

и значит, условие б) выполнено.

Пусть ε_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{1}{8}. \tag{1}$$

Пусть $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ — последовательность положительных целых чисел, которые мы определим позже, и

$$\delta_k=\frac{\varepsilon_k}{2n_k}\qquad(k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi_k(x)$ функцию, построенную так, как было указано для $\varphi(x)$, но роль l должно играть число $\frac{1}{n_k}$, а роль δ — число δ_k.

Принимая $n_1 = 1$, мы построим $\varphi_1(x)$.

Выберем теперь n_2 столь большим, чтобы

$$\frac{2n_1}{n_2} \leqslant \varepsilon_2$$

и чтобы, кроме того, для $|h| \leqslant \frac{2}{n_2}$ и для любого x выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} - \varphi_1'(x) \right| \leqslant \varepsilon_1.$$

Это возможно в силу свойств 1) и 4) функции $\varphi(x)$.

После того как n_2 выбрано, функция $\varphi_2(x)$ определена. Продолжая определять по индукции числа δ_k и n_k, мы можем потребовать, чтобы

$$\frac{2n_{k-1}}{n_k} \leqslant \varepsilon_k \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

и чтобы для любого x при $|h| \leqslant \frac{2}{n_{k+1}}$ иметь

$$\left| \frac{\varphi_k(x+h) - \varphi_k(h)}{h} - \varphi_k'(x) \right| \leqslant \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Так как по самому построению функций $\varphi_k(x)$ имеем

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \frac{1}{n_k}, \tag{5}$$

то для любых x и для $|h| \geqslant \frac{1}{n_k}$ найдем в силу условия (3)

$$\left| \frac{\varphi_{k+p}(x+h) - \varphi_{k+p}(x)}{h} \right| \leqslant \frac{2n_k}{n_{k+p}} \leqslant \frac{2n_{k+p-1}}{n_{k+p}} < \varepsilon_{k+p}$$
$$(p = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Поскольку

$$\frac{1}{n_k} < \varepsilon_k,$$

из (5) и (1) следует, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \tag{7}$$

есть сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, а потому она непрерывна.

Докажем, что $f(x)$ не имеет ни при каком x ни конечной, ни бесконечной производной.

Пусть x задано. Из построения функций $\varphi_m(x)$ и свойств а) и б) функции $\varphi(x)$ следует, что для любого m можно найти два числа h и h' таких, что

$$\frac{1}{n_m} \leqslant h \leqslant \frac{2}{n_m}, \quad \frac{1}{n_m} \leqslant h' \leqslant \frac{2}{n_m} \tag{8}$$

и

$$\frac{\varphi_m(x+h)-\varphi_m(x)}{h} - \frac{\varphi_m(x+h')-\varphi_m(x)}{h'} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{9}$$

На основании (7) имеем

$$\Delta = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+h')-f(x)}{h'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{\varphi_k(x+h)-\varphi_k(x)}{h} - \frac{\varphi_k(x+h')-\varphi_k(x)}{h'}\right] +$$

$$+ \left[\frac{\varphi_m(x+h)-\varphi_m(x)}{h} - \frac{\varphi_m(x+h')-\varphi_m(x)}{h'}\right] +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k(x+h)-\varphi_k(x)}{h} - \frac{\varphi_k(x+h')-\varphi_k(x)}{h'}\right]. \tag{10}$$

Так как $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, то из (8) вытекает

$$|h| \leqslant \frac{2}{n_m} \leqslant \frac{2}{n_{k+1}} \quad \text{и} \quad |h'| \leqslant \frac{2}{n_m} \leqslant \frac{2}{n_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Поэтому в силу (4) каждый член первой суммы в формуле (10) по модулю не превосходит $2\varepsilon_k$ и, значит, вся эта сумма не превосходит $2\sum\limits_{k=1}^{m-1}\varepsilon_k$. Среднее слагаемое в силу (9) не меньше, чем $\frac{1}{2}$; наконец, последняя сумма в силу неравенств

$$|h| \geqslant \frac{1}{n_m} > \frac{1}{n_k}, \quad |h'| \geqslant \frac{1}{n_m} > \frac{1}{n_k} \qquad (k > m)$$

и неравенства (6) по модулю не превосходит $2\sum\limits_{m+1}^{\infty}\varepsilon_k$, поэтому в силу (1)

$$\Delta \geqslant \frac{1}{2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \tag{11}$$

Так как в этом рассуждении m было произвольным, то из неравенств (8) следует, что существуют как угодно малые h и h', для которых справедливо неравенство (11), а это показывает, что $f(x)$ не может иметь конечной производной в точке x. Но точка x была любая, значит, $f(x)$ нигде не имеет конечной производной.

Докажем, что при любом x она не может иметь и бесконечной производной в точке x.

Пусть m — любое целое. Возьмем $h''=\frac{1}{n_m}$ и заметим, что

$$\frac{\varphi_m(x+h'')-\varphi_m(x)}{h''}=0,$$

так как $\varphi_m(x)$ имеет период $\frac{1}{n_m}$, а потому числитель дроби равен нулю. Так как

$$\frac{f(x+h'')-f(x)}{h''}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi_k(x+h'')-\varphi_k(x)}{h''}+\frac{\varphi_m(x+h'')-\varphi_m(x)}{h''}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x+h'')-\varphi_k(x)}{h''},$$

то, рассуждая совершенно так же, как при вычислении величины Δ, убедимся, что

$$\left|\frac{f(x+h'')-f(x)}{h''}\right|\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\frac{1}{4}. \qquad (12)$$

Но в этом рассуждении m любое, значит, найдутся как угодно малые h'', для которых справедливо (12), а потому производная в точке x не может быть равна ∞.

Покажем теперь, что $f(x)$ почти всюду асимптотически дифференцируема.

Для этого обозначим через E_k множество тех точек x из $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, в которых $\varphi_k(x)\neq 0$. В силу определения этой функции E_k есть система из n_k интервалов длины $2\delta_k$, а потому

$$\operatorname{mes} E_k=2n_k\delta_k=\varepsilon_k \qquad (k=1,\ 2,\ldots)$$

в силу (3). Полагая

$$F_m=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]-\sum_{k=m}^{\infty}E_k,$$

видим, что F_m замкнуто в $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_m \subset \ldots$ Ясно, что $\operatorname{mes} F_m = 1 - \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k$, а потому, полагая

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} F_m,$$

имеем $\operatorname{mes} E = 1$.

Покажем, что $f'_{ac}(x)$ существует почти всюду на E, т. е. почти всюду на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Действительно, на F_m функции $\varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \ldots, \varphi_{m+p}(x), \ldots$ равны нулю. Поэтому, если x есть точка плотности для F_m, то функция

$$\sum_{k=m}^{\infty} \varphi_k(x)$$

имеет асимптотическую производную, равную нулю. Сумма же

$$\sum_{k=1}^{m-1} \varphi_k(x)$$

дифференцируема в обычном смысле.

Следовательно, $f(x)$ асимптотически дифференцируема почти всюду на каждом E_m, а значит, и почти всюду на E.

[90] Доказательство этого факта содержится наряду с другими в примечании 82.

[91] Это замечание вполне справедливо для того времени, когда писалась диссертация Н. Н. Лузина.

В настоящее время в теории тригонометрических рядов уже есть теоремы, касающиеся строения множеств, а не их меры. Таковы, например, теоремы, касающиеся единственности разложения функции в тригонометрический ряд (см., например, Н. К. Бари ([2])), теоремы, касающиеся множеств, на которых ряд может сходиться абсолютно, без того чтобы сходиться абсолютно всюду, и другие. Сюда же относится вопрос о строении множеств, для которых можно построить тригонометрический ряд, сходящийся всюду на данном множестве и расходящийся всюду на его дополнении.

Что касается теорем из теории тригонометрических рядов, связанных с мощностью множеств, то в этом направлении, повидимому, ничего нового не появилось. Точнее говоря, каждый раз, как доказывается некоторый результат из теории тригонометрических рядов, верный для всех счетных множеств, он оказывается верным и для некоторых (в каком-то смысле достаточно «жидких») несчетных множеств.

Новых теорем о категории, насколько нам известно, тоже нет. Мы здесь укажем лишь одну теорему, отмеченную С. Б. Стечкиным, но не опубликованную им, так как она мгновенно вытекает из одного результата Зигмунда.

Зигмунд ([3]) доказал следующую теорему:

Если в каждой точке некоторого интервала I частные суммы лакунарного ряда[1])

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \qquad (1)$$

ограничены, то $\sum |a_k| + |b_k| < +\infty$.

С. Б. Стечкин отмечает, что эта теорема сохраняет силу, если вместо интервала I взять множество E не первой категории.

В самом деле, обозначим через E_n^p множество точек, для которых

$$|S_n(x)| \leqslant p$$

(здесь $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда (1)).

Ясно, что E_n^p замкнуто, а значит, и $E_p = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^p$ замкнуто. Следовательно, множество точек x, где

$$|S_n(x)| \leqslant p \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (2)$$

замкнуто. Но в каждой точке E при некотором p условие (2) соблюдено, значит, $E = \sum_{p=1}^{\infty} E_p$.

Так как E не первой категории, то хотя одно из E_p не первой категории, и будучи замкнутым, оно тогда должно содержать отрезок. Если так, то по теореме Зигмунда $\sum |a_k| + |b_k| < +\infty$.

В частности, *если лакунарный тригонометрический ряд сходится на множестве не первой категории, то он сходится абсолютно на всем отрезке* $(0, 2\pi)$.

[92] См. также Зигмунд ([1]), стр. 265.

[93] Для упрощения доказательства мы рассмотрим вместо ряда, предложенного Н. Н. Лузиным, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{2n} x.$$

Пусть E_n есть множество, состоящее из сегментов $\delta_k^{(n)}$ длины $\frac{\pi}{n^{2n+2}}$ с центром в точке $k\frac{\pi}{n^{2n}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n^{2n} - 1)$. Так как во

---

[1]) Ряд (1) называется лакунарным, если $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$ для $k = 1, 2, \ldots$

всякий сегмент $\delta_k^{(n)}$ попадает по крайней мере 16 точек вида $p\dfrac{\pi}{(n+1)^{2(n+1)}}$, потому что

$$(n+1)^{2(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+2}n^{2n+2}\geqslant 16n^{2n+2},$$

то, даже если бы две из них попадали в концы $\delta_k^{(n)}$, существует не менее 14 сегментов $\delta_j^{(n+1)}$ внутри каждого $\delta_k^{(n)}$, а следовательно, пересечение

$$E=E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n\cdot\ldots$$

содержит совершенное множество.

Но для $x\in E_n$ имеем (обозначая через θ некоторое число $|\theta|<1$)

$$|\sin n^{2n}x|=\left|\sin n^{2n}\left(k\frac{\pi}{n^{2n}}+\theta\frac{\pi}{n^{2n+2}}\right)\right|\leqslant\frac{\pi}{n^2}.$$

Поэтому на E ряд $\sum\sin n^{2n}x$ сходится абсолютно.

Ясно, что, каков бы ни был сегмент Δ на $[0,\pi]$, при достаточно большом m в нем содержится некоторый сегмент $\delta_k^{(m)}$ из множества E_m, а тогда содержится не менее 14 сегментов из E_{m+1} и т. д., т. е. содержится совершенное множество, на котором все члены рассматриваемого ряда, начиная с m-го, меньше членов ряда $\sum\frac{\pi}{n^2}$, а значит, этот ряд сходится абсолютно.

Итак, рассматриваемый ряд сходится абсолютно на множестве мощности континуума во всяком интервале на $[0,\pi]$ (а значит, и на $[-\pi,\pi]$ в силу нечетности $\sin x$). И однако коэффициенты этого ряда не стремятся к нулю.

[94] В настоящее время эту теорему Юнга можно получить из результата Райхмана, согласно которому множество точек, где ряд с коэффициентами, не стремящимися к нулю, сходится, содержится в сумме счетного множества так называемых «H-множеств» (определение этих множеств и доказательство теоремы Райхмана можно найти, например, у Зигмунда ([1]), стр. 266—267). Так как каждое H-множество нигде не плотно, множество точек, где ряд с коэффициентами, не стремящимися к нулю, сходится, должно быть множеством I категории.

[95] Или Зигмунд ([1]), стр. 51, 56 и 268.

[96] Этот пример опубликован также в работе Н. Н. Лузина «Об одном случае ряда Тейлора» ([3]); эта работа перепечатана в настоящем издании (стр. 271).

Следует отметить, что в настоящее время существуют уже очень простые примеры тригонометрических рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю и расходящиеся почти всюду (см. примечание 98), а также и всюду (см., например, Зигмунд ([1]), стр. 280).

[97] Н. Н. Лузин, желая опровергнуть гипотезу Фату о том, что стремление коэффициентов тригонометрического ряда к нулю влечет

его сходимость почти всюду, дал тот пример, который мы публикуем ниже (см. стр. 271). Повидимому, он не ставил себе целью доказать расходимость в каждой точке и удовлетворился расходимостью почти всюду. Любопытно отметить, что, как показал С. Б. Стечкин[1]), оказывается в примере Н. Н. Лузина фактически уже достигнута расходимость всюду. Именно удается показать, что у построенного Н. Н. Лузиным всюду расходящегося степенного ряда действительная часть и мнимая часть в отдельности являются тригонометрическими рядами, которые расходятся всюду. Если бы это было замечено Штейнгаузом, ему не пришлось бы преобразовывать пример Н. Н. Лузина.

Вопросу о всюду расходящихся степенных и тригонометрических рядах был посвящен в дальнейшем целый ряд работ. Здесь главным образом изучали, насколько быстро могут стремиться к нулю коэффициенты таких рядов. Мы не останавливаемся на перечислении отдельных результатов, полученных в этом направлении, а укажем сразу наиболее сильную теорему, а именно: какова бы ни была *монотонная* последовательность положительных чисел $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n, \ldots$, таких, что $\sum c_n^2 = +\infty$, можно найти тригонометрический ряд с коэффициентами $O(c_n)$ и расходящийся в каждой точке. Эта теорема была доказана А. Н. Колмогоровым, но не опубликована. В настоящее время ее восстановил С. Б. Стечкин (см. Успехи математических наук, т. VI, вып. 2(42) (1951)).

Аналогичная теорема для степенных рядов была доказана Недером (1).

Наконец, следует отметить, в качестве продолжения исследования расходящихся рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, результат Д. Е. Меньшова (8): он построил тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, у которого любая подпоследовательность частных сумм расходится почти всюду.

[98] В настоящее время можно даже точно сказать, какие из рядов вида

$$\sum b_n \sin 2^n x \tag{1}$$

почти всюду сходятся и какие почти всюду расходятся.

Действительно, рассматриваемые ряды являются лакунарными[2]). Для рядов этого вида существует теорема: если ряд $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то лакунарный ряд сходится почти всюду; наоборот, если лакунарный ряд сходится на множестве положительной меры, то $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ (см. Зигмунд (1), стр. 123 и 250).

Итак, в примере Н. Н. Лузина все ряды вида (1) сходятся почти всюду, если $\sum b_n^2 < +\infty$, и расходятся почти всюду, если $\sum b_n^2 = +\infty$.

---

[1]) См. Успехи математических наук, т. VI, вып. 2(42) (1951).

[2]) См. определение лакунарного ряда в примечании 91.

Заметим, что таким образом легко строить ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящиеся почти всюду.

[99] В дальнейшем ряд работ был посвящен построению тригонометрических рядов, сходящихся всюду на некотором заданном множестве E (удовлетворяющем известным условиям) и расходящимся всюду вне его, а также аналогичной проблеме для степенных рядов, если E лежит на единичной окружности.

Райхман разрешил поставленную проблему как для степенных, так и для тригонометрических рядов, считая E произвольным замкнутым множеством (этот результат можно найти в книге Зигмунда (1), стр. 279). Мазуркевич (1) решил проблему для степенных рядов как в случае, уже разобранном Райхманом, так и в случае, когда E — любое открытое множество. Наконец, совсем недавно Ф. Герцог и Ж. Пираниан (1) разрешили проблему для степенных рядов в случае, когда E есть любое множество типа F_σ (т. е. состоящее из счетного множества замкнутых множеств), а С. Б. Стечкин сделал то же самое, но уже для тригонометрических рядов (см. Успехи математических наук, т. VI, вып. 2(42) (1951)).

Наконец, С. Б. Стечкин поставил такой вопрос: каким условиям должно удовлетворять множество E для того, чтобы можно было построить тригонометрический ряд, сходящийся всюду на E, расходящийся всюду вне E и, кроме того, имеющий всюду вне E неограниченные частные суммы? Он дал на это ответ: для существования такого тригонометрического ряда необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа F_σ. См. там же.

[100] В настоящее время, однако, известно, что существуют ряды Фурье-Лебега, расходящиеся даже в каждой точке. Пример такого ряда был дан А. Н. Колмогоровым (2). См. также Зигмунд (1), стр. 175.

[101] Пример тотализуемой функции, у которой коэффициенты Фурье не стремятся к нулю, можно найти у Данжуа (2), стр. 204—206. Построенная им функция интегрируема и по Гарнаку [1]), так как она становится неограниченной только в окрестности одной точки.

[102] В мемуаре Данжуа (2), стр. 201 доказано [2]), что для тотализуемой функции $f(x)$ функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ также тотализуемы, так как Данжуа установил, что если $f(x)$ тотализуема, а $g(x)$ имеет непрерывную производную, то $f(x)\,g(x)$ тотализуема.

[103] В указанной заметке Н. Н. Лузин сформулировал вторую теорему о среднем значении для интеграла Данжуа и указал, что ее можно доказать, проводя последовательно шаги процесса тотализации Данжуа. Не считая возможным проводить подробно это доказательство здесь, мы рекомендуем читателю обратиться к книге Гобсона (1), т. 1, стр. 652.

[104] Марцинкевич (1) доказал, что если f интегрируема по Данжуа (в узком смысле), то ее ряд Фурье суммируется методом средних

---

1) Об интеграле Гарнака см. примечание 44.

2) Эти работы Данжуа появились уже после диссертации Н. Н. Лузина.

арифметических почти всюду, а стало быть, и методом Пуассона-Абеля (известно, что если числовой ряд суммируется методом средних арифметических, то и методом Абеля). Интересно заметить, что для функций f, интегрируемых по Данжуа-Хинчину, эта теорема уже перестает быть верной. В уже упомянутой работе Марцинкевич строит пример функции, интегрируемой в смысле Данжуа-Хинчина и у которой ряд Фурье не суммируется методом Пуассона на множестве меры, большей нуля.

[105] Доказательство этой теоремы можно найти в целом ряде книг (см., например, И. П. Натансон (1), стр. 158).

[106] Действительно, имеем

$$a_n \cos nx + b_n' \sin nx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha)(\sin n\alpha \cos nx - \cos n\alpha \sin nx)\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \sin n(\alpha - x)\, d\alpha.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \sum_{k=1}^{n} \sin k(\alpha - x)\, d\alpha,$$

и так как

$$\sum_{k=}^{n} \sin kt = \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

(в чем можно убедиться, умножив обе части равенства на $2 \sin \frac{t}{2}$ и замечая, что

$$2 \sin \frac{t}{2} \sin kt = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)t - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)t),$$

то

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \left\{ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha - x}{2}} - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}} \right\} d\alpha,$$

откуда уже сразу получается формула (4).

[107] Так как ряды

$$P(\rho, x) = \frac{1}{2} + \sum \rho^n \cos nx \quad \text{и} \quad Q(\rho, x) = \sum \rho^n \sin nx$$

представляют действительную и мнимую части степенного ряда $\frac{1}{2}+$ $+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$ при $z=\rho e^{ix}$, то

$$P(\rho, x)=\frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos x+\rho^2} \quad \text{и} \quad Q(\rho, x)=\frac{\rho\sin x}{1-2\rho\cos x+\rho^2}.$$

[108] На русском языке см., например, Зигмунд (1), стр. 60.

[109] Условие Дини заключается в том, что для некоторого $\delta>0$ оба интеграла Лебега

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt \quad \text{и} \quad \int_0^\delta \left|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\right| dt$$

конечны. Если это условие выполнено, то в точке x ряд Фурье от $f(x)$ сходится к ней.

[110] В настоящее время известна чрезвычайно общая теорема А. И. Плесснера (3): если тригонометрический ряд сходится на некотором множестве E, $\operatorname{mes} E>0$, то сопряженный ряд сходится почти всюду на этом множестве. Но в 1915 г. о сходимости рядов, сопряженных не только к произвольному тригонометрическому ряду, но и к ряду Фурье, почти ничего не было известно. Н. Н. Лузин (в личной беседе с Д. Е. Меньшовым) высказал гипотезу, впоследствии подтвердившуюся в виде теоремы А. И. Плесснера.

[111] Здесь Н. Н. Лузин ссылается на свою заметку, где им впервые была сформулирована теорема о существовании особого интеграла. Относительно доказательств этой теоремы см. примечание 114.

[112] Такой пример можно найти у Зигмунда (1), стр. 81.

Отметим также работу Качмажа (1), доказавшего существование непрерывных функций $f(x)$, у которых интегралы

$$\int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| dt, \quad \int_0^1 \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| dt$$

или

$$\int_0^1 \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| dt$$

равны $+\infty$ в каждой точке.

Мазуркевич (2) построил непрерывную функцию, у которой

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\, dt$$

расходится для всякого x.

Все эти результаты указывают на то, что существование особого интеграла

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$$

является фактом не поверхностным, а очень глубоким, так как здесь все дело не в малости абсолютной величины подинтегрального выражения, а в интерференции его положительных и отрицательных значений.

[119] *Пример непрерывной* $f(x)$, *для которой особый интеграл*

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

лишен смысла на множестве, всюду плотном и всюду мощности континуума на $[0, 2\pi]$.

Прежде всего очевидно, что если мы построим функцию, которая будет удовлетворять поставленным условиям для множества, лежащего на $[0, a]$, где a — какое-то положительное, то и для $[0, 2\pi]$ это удастся. Для упрощения рассуждений мы поэтому будем строить нужную функцию на отрезке $[0, a]$, где a — некоторое фиксированное число $a < \frac{1}{2}$.

Вспомогательное построение: пусть $g(x)$ определена так:

$$g(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \leqslant 0,$$

$$g(x) = \frac{-1}{\ln x} \quad \text{для} \quad 0 < x \leqslant 2a.$$

Ясно, что $g(x)$ непрерывна, неотрицательна, монотонна на $-2a \leqslant x \leqslant 2a$. Отметим, кроме того, следующие ее свойства.

а) Для любого $\delta > 0$ найдется такое M, что, каковы бы ни были x' и x'', лишь бы $\delta \leqslant |x'| \leqslant 2a$ и $\delta \leqslant |x''| \leqslant 2a$, имеем

$$\left|\frac{g(x')-g(x'')}{x'-x''}\right| < M.$$

Это ясно, потому что производная от $g(x)$ ограничена на рассматриваемой системе двух отрезков $[-2a, -\delta]$ и $[\delta, 2a]$.

б) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon)$, что $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и при этом интеграл

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\eta \frac{g(\alpha)-g(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

стремится к $+\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства этого свойства функции $g(\alpha)$ заметим, что $g(-\alpha)=0$, если $\alpha \geqslant 0$, а потому

$$I(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{-d\alpha}{\alpha \ln \alpha}=\ln|\ln \alpha|\Big|_{\varepsilon}^{\eta}=\ln|\ln \eta|-\ln|\ln \varepsilon|.$$

Если теперь выбрать η так, чтобы $-\ln \eta=\ln^2 \varepsilon$ $\left(\text{или } \eta=\frac{1}{\varepsilon^{\ln \varepsilon}}\right)$, то ясно, что при $\varepsilon \to 0$ имеем $\eta \to 0$, а между тем

$$I(\varepsilon)=\ln \frac{|\ln \eta|}{|\ln \varepsilon|}=\ln \frac{\ln^2 \varepsilon}{|\ln \varepsilon|}=\ln|\ln \varepsilon| \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. свойство б) доказано.

Пусть теперь $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — совокупность всех рациональных чисел на $[0, a]$.

Положим

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x-r_n), \tag{1}$$

где все $a_n>0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$. Ясно, что $f(x)$ непрерывна на $[-a, a]$.

Докажем прежде всего, что для любой точки r_k интеграл

$$I_k(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{f(r_k+\alpha)-f(r_k-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \tag{2}$$

стремится к $+\infty$ при $\varepsilon \to 0$ (здесь η определено так, как в свойстве б) функции $g(x)$).

Действительно, в силу равномерной сходимости ряда (1) имеем

$$I_k(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{g(r_k-r_n+\alpha)-g(r_k-r_n-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha. \tag{3}$$

Разобьем все числа r_n на два класса: те r_n, для которых $|r_n-r_k| \geqslant \frac{a}{2}$, и все остальные.

Тогда

$$I_k(\varepsilon)=\sum_{|r_n-r_k| \geqslant \frac{a}{2}}+\sum_{|r_n-r_k|<\frac{a}{2}}=I_k'(\varepsilon)+I_k''(\varepsilon). \tag{4}$$

Предположим ε уже достаточно малым для того, чтобы $\eta(\varepsilon)<\frac{a}{4}$ (так как $\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то это возможно). Тогда, так как при этом и само $\varepsilon<\frac{a}{4}$, имеем

$$\frac{a}{4}\leqslant |r_k-r_n\pm\alpha|\leqslant\frac{5}{4}a \quad \text{для} \quad \underset{\varepsilon<\alpha<\eta}{|r_k-r_n|\geqslant\frac{a}{2}},$$

а потому для интегралов, входящих в $I_k'(\varepsilon)$, подинтегральные выражения удовлетворяют условию

$$\left|\frac{g(r_k-r_n+\alpha)-g(r_k-r_n-\alpha)}{\alpha}\right|=$$

$$=2\left|\frac{g(r_k-r_n+\alpha)-g(r_k-r_n-\alpha)}{(r_k-r_n+\alpha)-(r_k-r_n-\alpha)}\right|\leqslant 2M$$

на основании свойства а) функции $g(x)$, где роль δ играет $\frac{a}{4}$.

Поэтому

$$|I_k'(\varepsilon)|<2M\eta\sum_{n=1}^{\infty}a_n<C\eta(\varepsilon),$$

и так как $\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_k'(\varepsilon)=0. \tag{5}$$

Перейдем к оценке $I_k''(\varepsilon)$; для этого заметим, что в силу монотонности $g(x)$ все выражения вида $\frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}$ для любого x неотрицательны при $\alpha>0$. Кроме того, заметим, что член, содержащий $n=k$, непременно входит в $I_k''(\varepsilon)$, ибо $|r_n-r_k|<\frac{a}{2}$ при $n=k$. Отсюда

$$I_k''(\varepsilon)>a_k\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{g(\alpha)-g(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

так как мы отбросили лишь неотрицательные члены. Но так как

$$\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{g(\alpha)-g(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=I(\varepsilon)\to\infty \text{ при } \varepsilon\to 0,$$

то

$$I_k''(\varepsilon)\to+\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0,$$

откуда в силу (4) и (5) следует

$$I_k(\varepsilon) \to +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Но в силу монотонности $g(x)$ и положительности чисел a_n функция $f(x)$ также монотонна, а потому

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} \geqslant 0 \quad \text{при любом } x \text{ и } \alpha > 0.$$

Значит,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \geqslant \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

а потому для любого r_k имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(r_k+\alpha)-f(r_k-\ )}{\alpha}\,d\alpha = +\infty.$$

Заметим теперь, что если ε фиксировано, то

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

есть непрерывная функция от x; обозначая ее через $I_\varepsilon(x)$, замечаем, что с ростом ε она монотонно возрастает, и для множества точек x, всюду плотного на $[0, a]$, она стремится к $+\infty$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда легко заключить, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x) = +\infty$ для множества точек x, имеющего мощность континуума в каждом интервале на $[0, a]$. В самом деле, пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ — последовательность чисел, стремящихся к нулю. Пусть F_n^m — множество точек $[0, a]$, для которых

$$|I_{\varepsilon_m}(x)| \leqslant n.$$

Ясно, что F_n^m замкнуто; поэтому и $F_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n^m$ тоже замкнуто. Но множество F_n нигде не плотно на $[0, a]$, так как если бы этого не было, оно содержало бы отрезок, а тогда на этом отрезке нашлась бы точка x, где $I_\varepsilon(x) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, что противоречит определению F_n. Если теперь положить $E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то E — первой категории, а значит, его дополнение CE — второй категории. Но если

$x \in CE$, то ясно, что $\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x) = +\infty$. Значит, множество тех x, где

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

не имеет смысла, есть множество второй категории на $[0, a]$, т. е. оно всюду плотно и всюду мощности континуума на этом отрезке.

[114] Проблемой, поставленной здесь Н. Н. Лузиным в 1921 г., занялся А. С. Безикович ([1, 2]). Он доказал существование особого интеграла для функции с интегрируемым квадратом, не пользуясь методами комплексного переменного. Однако его доказательство не удовлетворило Н. Н. Лузина, так как оно содержало довольно сложные арифметические подсчеты, затемнявшие теоретико-функциональную картину. Вдумываясь в смысл доказательства А. С. Безиковича, Н. Н. Лузин получил новое, уже построенное на чистых методах теории функций действительного переменного, доказательство существования почти всюду на $[0, 2\pi]$ особого интеграла

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

и обобщил потом эту теорему, доказав существование почти всюду на бесконечной оси OX интеграла

$$\int_0^\infty \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

если $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей бесконечной оси. Это доказательство им никогда не было опубликовано. В настоящее время мы печатаем его в данном издании (стр. 287) по рукописи, найденной в бумагах Н. Н. Лузина после его смерти.

Следует еще указать, что позднее другими авторами было доказано существование особого интеграла уже для функций с неинтегрируемым квадратом. Так, И. И. Привалов ([1]) получил этот результат для суммируемых функций, А. И. Плесснер ([1]) — для функций, интегрируемых в смысле Данжуа, и, наконец, Марцинкевич — для функций, интегрируемых по Данжуа-Хинчину, если их примитивные имеют почти всюду производную. Точнее, Марцинкевич доказал, что если $f(x)$ интегрируема в смысле Данжуа-Хинчина, то, для того чтобы особый интеграл

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

существовал почти всюду на некотором множестве E, необходимо и достаточно, чтобы примитивная от $f(x)$ имела производную почти всюду на E.

[115] Эта гипотеза, высказанная Н. Н. Лузиным 35 лет тому назад, до сих пор не опровергнута, но и не подтверждена. Если отказаться от требования интегрируемости квадрата от рассматриваемой функции, то, как показал А. Н. Колмогоров (1, 2), ряд Фурье может расходиться даже в каждой точке. Но для функций с интегрируемым квадратом вопрос до сих пор не решен.

[116] См. примечание 8.

[117] Дадим пример измеримого множества E, для которого характеристическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty$$

почти всюду на $[0, 1]$. Примеры такого рода строились разными лицами (В. А. Ходаковым, Е. М. Ландисом и другими), вот их общая идея.

Прежде всего на $[0, 1]$ строим совершенное множество P, меру которого можно сделать как угодно близкой к 1, причем, если $\varphi(x)$ — его характеристическая функция, то

$$\int_0^1 \left| \frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty \text{ почти всюду на } P.$$

Для построения такого множества мы берем $\varepsilon > 0$ и последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, монотонно убывающих и таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. Из отрезка $\sigma^0 = [0, 1]$ мы удаляем q_1 равных интервалов 1-го ранга длины $\delta^{(1)} = \frac{\varepsilon_1}{q_1}$, так чтобы оставшиеся сегменты 1-го ранга имели равную длину $\sigma^{(1)}$. Из каждого из сегментов 1-го ранга мы удалим q_2 интервалов 2-го ранга длины $\delta^{(2)} = \sigma^{(1)} \frac{\varepsilon_2}{q_2}$, так чтобы оставшиеся сегменты 2-го ранга имели равную длину $\sigma^{(2)}$ и т. д. Вообще, если сегменты $(n-1)$-го ранга и равной длины $\sigma^{(n-1)}$ уже построены, мы удаляем из каждого из них q_n интервалов n-го ранга длины $\delta^{(n)} = \sigma^{(n-1)} \frac{\varepsilon_n}{q_n}$, так чтобы оставшиеся сегменты n-го ранга имели равную длину $\sigma^{(n)}$. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим совершенное множество P, причем

$$\operatorname{mes} P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n).$$

Ясно, что его мера может быть сделана как угодно близкой к единице, причем это достигается только за счет выбора чисел ε_n, а числа q_n пока вполне произвольны; мы предположим только, что они возрастают монотонно.

Оценим снизу среднюю плотность множества P на любом интервале δ длины $\delta^{(n)}$, лежащем целиком в некотором сегменте n-го ранга.

Для этого заметим, что из

$$\delta^{(n)} = \sigma^{(n-1)} \frac{\varepsilon_n}{q_n} \tag{1}$$

следует

$$\sigma^{(n)} = \sigma^{(n-1)}(1 \cdot \varepsilon_n) \frac{1}{q_n + 1}. \tag{2}$$

Поэтому

$$\frac{\delta^{(n)}}{\sigma^{(n)}} < \frac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n} \frac{q_n + 1}{q_n} = \frac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n}\left(1 + \frac{1}{q_n}\right) < \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}\left(1 + \frac{1}{q_1}\right). \tag{3}$$

Далее нам понадобится оценка

$$\frac{\sigma^{(n)}}{\delta^{(n)}} = \frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \frac{q_n}{q_n + 1} < \frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \tag{4}$$

и вытекающее из нее неравенство

$$\frac{\sigma^{(n+1)}}{\delta^{(n)}} = \frac{\sigma^{(n+1)}}{\sigma^{(n)}} \cdot \frac{\sigma^{(n)}}{\delta^{(n)}} <$$

$$< (1 - \varepsilon_{n+1}) \frac{1}{q_{n+1} + 1} \cdot \frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} < \frac{1}{q_{n+1}\varepsilon_n} < \frac{1}{q_2 \varepsilon_1}. \tag{5}$$

Заметим, что в любой интервал длины $\delta^{(n)}$, целиком лежащий иа некотором сегменте n-го ранга, попадает не меньше, чем

$$\left[\frac{\delta^{(n)}}{\sigma^{(n+1)} + \delta^{(n+1)}}\right] - 1 \geqslant \frac{\delta^{(n)}}{\sigma^{(n+1)} + \delta^{(n+1)}} - 2$$

сегментов $(n+1)$-го ранга (здесь, как обычно, символ $[\quad]$ означает целую часть).

Так как для любого сегмента $\sigma_i^{(n+1)}$ ранга $n+1$ мы имеем

$$\operatorname{mes}(\sigma_i^{(n+1)} \cdot P) = \sigma^{(n+1)} \prod_{k=n+2}^{\infty} (1 - \varepsilon_k) > \sigma^{(n+1)} \operatorname{mes} P,$$

то для любого δ длины $\delta^{(n)}$, лежащего на каком-нибудь сегменте n-го ранга, имеем

$$\operatorname{mes}(P\delta) \geqslant \left\{ \frac{\delta^{(n)}}{\sigma^{(n+1)} + \delta^{(n+1)}} - 2 \right\} \sigma^{(n+1)} \operatorname{mes} P =$$

$$= \operatorname{mes} P \left\{ \frac{\delta^{(n)}}{1 + \dfrac{\delta^{(n+1)}}{\sigma^{(n+1)}}} - 2\sigma^{(n+1)} \right\},$$

откуда в силу (3) и (4)

$$\frac{\operatorname{mes}(P\delta)}{\delta} \geqslant \operatorname{mes} P \left\{ \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\left(1 + \dfrac{1}{q_1}\right)} - 2\frac{1}{q_2\varepsilon_1} \right\} = \gamma P = r > 0. \quad (6)$$

Здесь $\gamma > 0$ и $r > 0$ — постоянные числа. Если ε_1 уже выбрано, то q_1 (и значит, и $q_2 > q_1$) можно взять столь большими, чтобы γ было как угодно близко к $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}} = 1 - \varepsilon_1$.

В дальнейшем мы для определенности предположим

$$\varepsilon_n = \frac{1}{8n^2}, \quad (7)$$

$$q_n = 2^{2^{n+1}}. \quad (8)$$

Тогда

$$\gamma = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{7}\left(1 + \dfrac{1}{16}\right)} - \frac{2}{256 \cdot \dfrac{1}{8}} > \frac{3}{4}. \quad (9)$$

Сегменты n-го ранга мы будем нумеровать слева направо, записывая их как $\sigma_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, q_n$; аналогично нумеруем и интервалы ранга n.

Рассмотрим теперь некоторый сегмент $\sigma^{(n-1)}$ и порцию P в нем. Пусть x — любая точка некоторого $\sigma_j^{(n)}$, помещающегося в нашем $\sigma^{(n-1)}$, причем, во-первых, $2^{2^n} + 1 \leqslant j \leqslant 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}$ и, во-вторых, x отстоит от центра $\sigma_j^{(n)}$ на расстоянии, не меньшем чем $\dfrac{\delta^{(n)}}{2}$.

Так как величина интеграла

$$\int_0^1 \left| \frac{\varphi(x+\alpha) - \varphi(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha \quad (10)$$

может только уменьшаться, если α будет пробегать лишь часть отрезка $[0, 1]$, то мы будем α изменять так, чтобы $x+\alpha$ и $x-\alpha$ не покидали отрезка $\sigma^{(n-1)}$, в котором лежит наш $\sigma_j^{(n)}$. Но если $x+\alpha$ и $x-\alpha$ оба входят в $\sigma^{(n-1)}$, они не могут оба принадлежать двум интервалам вида $\delta_s^{(n)}$ в силу того, что x отдалено не менее чем на $\frac{\delta^{(n)}}{2}$ от центра $\sigma_j^{(n)}$.

Значит, если $x+\alpha=t$ пробегает некоторый $\delta_i^{(n)}$, лежащий правее $\sigma_j^{(n)}$, в это время $x-\alpha$ пробегает некоторый интервал длины $\delta^{(n)}$ и попадает только в точки какого-то $\sigma_k^{(n)}$, следовательно, мера множества тех α, для которых $x-\alpha$ попадает на P, в силу предыдущих вычислений будет не меньше чем $r\delta^{(n)}$. Обозначая через $\widetilde{P}_x$ множество, симметричное с P относительно x, мы видим, что когда $x+\alpha\in\delta_i^{(n)}\cdot P_x$, то $|\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)|=1$ и $\operatorname{mes}(\widetilde{P}_x\delta_i^{(n)})\geqslant r\delta^{(n)}$, где r — константа из неравенства (6).

Так как для всех $\delta_i^{(n)}$, лежащих правее $\sigma_j^{(n)}$, имеем $j\leqslant i\leqslant 2^{2^{n+1}}$, то отсюда заключаем

$$\int_0^1\left|\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha\geqslant\sum_{i=j}^{2^{2^{n+1}}}\int_{\widetilde{P}_x\delta_i^{(n)}}\frac{dt}{t-x}. \tag{11}$$

Если мы обозначим через α_j левый конец всякого $\delta_j^{(n)}$, то

$$\int_{\widetilde{P}_x\delta_i^{(n)}}\frac{dt}{t-x}\geqslant\frac{1}{\alpha_{i+1}-\alpha_j}\operatorname{mes}(\widetilde{P}_x\delta_i^{(n)})\geqslant$$

$$\geqslant r\delta^{(n)}\frac{1}{(i+1-j)(\delta^{(n)}+\sigma^{(n)})}. \tag{12}$$

Но $\frac{\sigma^{(n)}}{\delta^{(n)}}\leqslant 8n^2-1$ в силу (4) и (7), поэтому $\frac{\delta^{(n)}}{\delta^{(n)}+\sigma^{(n)}}\geqslant\frac{1}{8n^2}$; кроме того, заметим, что $2^{2^{n+1}}-j\geqslant 2^{2^n}$, откуда окончательно из (11) и (12)

$$\int_0^1\left|\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha\geqslant\frac{r}{8n^2}\sum_{k=1}^{2^{2^n}+1}\frac{1}{k}>$$

$$>\frac{r}{8n^2}\ln 2\cdot 2^n\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Но на $\sigma_j^{(n)}$ множество точек, отстоящих от центра на расстоянии $\geqslant \frac{\delta^{(n)}}{2}$, имеет меру $\sigma^{(n)} - \delta^{(n)}$; таких значений j, для которых мы рассматриваем соответствующие точки x, на сегменте $\sigma^{(n-1)}$ имеется $2^{2^{n}+1} - 2\cdot 2^{2^n}$ штук, поэтому средняя плотность на $\sigma^{(n-1)}$ множества тех x, для которых была произведена предыдущая оценка интеграла, не меньше чем

$$\frac{\sigma^{(n-1)} \prod\limits_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{8k^2}\right) - 2\sigma^{(n)}2^{2^n} - (2^{2^n+1} - 2\cdot 2^{2^n})\,\delta^{(n)}}{\sigma^{(n-1)}} >$$

$$> \prod_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{1}{8k^2}\right) - 2^{2^n+1}\cdot\frac{1}{2^{2^n+1}} - (2^{2^n+1} - 2\cdot 2^{2^n})\,\frac{1}{8n^2\cdot 2^{2^n+1}} \to 1$$

при $n \to \infty$.

Так как это рассуждение справедливо для любого из сегментов $\sigma_i^{(n-1)}$, то можно утверждать, что каково бы ни было N, можно найти такое подмножество $\mathfrak{E}$ множества P, что $\operatorname{mes}(P-\mathfrak{E}) < \varepsilon$ и

$$\int_0^1 \left|\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha > N \quad \text{для всех} \quad x \subset \mathfrak{E}.$$

Отсюда уже следует, что

$$\int_0^1 \left|\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha = +\infty \quad \text{почти всюду на } P.$$

Покажем теперь, что если бы для некоторого θ, $0 < \theta < r$ (где r — ранее определенная константа), мы поместили в каждый смежный к P интервал любое множество средней плотности $\leqslant \theta$ и обозначили через E сумму множества P и этих множеств, то для его характеристической функции $\psi(x)$ соответствующий особый интеграл оказался бы снова расходящимся почти всюду на P.

В самом деле, заставим x попрежнему оставаться на $\sigma_i^{(n)}$ и повторим предыдущие рассуждения; вместо $\widetilde{P}_x$ надо будет брать $\widetilde{E}_x$ и заметить, что когда $x+\alpha \in \delta_i^{(n)}\cdot\widetilde{E}_x\cdot CE$, то $|\psi(x+\alpha) - \psi(x-\alpha)| = 1$. Мера этого множества оценивается так:

$$\operatorname{mes}(\delta_i^{(n)}\cdot\widetilde{E}_x\cdot CE) \geqslant \operatorname{mes}(\delta_i^{(n)}\cdot\widetilde{E}_x) - \operatorname{mes}(\delta_i^{(n)}\cdot E) \geqslant$$

$$\geqslant r\delta_i^{(n)} - \theta\delta_i^{(n)} = (r-\theta)\,\delta_i^{(n)},$$

а так как мы предположили $\theta < r$, то все предыдущие неравенства сохраняют силу, если вместо константы r брать положительную константу $r-\theta$. Но мы видели в силу неравенства (6) и (9), что если мера рассматриваемого множества есть μ, то за r можно принять число $\gamma\mu$, где $\gamma > \frac{3}{4}$, поэтому если $\theta < \frac{3}{4}\mu$, мы уже имеем $\theta < r$.

В результате вычислений мы обнаружим, что

$$\int_0^1 \left| \frac{\psi(x+\alpha)-\psi(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty$$

для почти всех точек $x \in P$, хотя теперь уже $\psi(x)$ — характеристическая функция для E.

Заметим еще, что если в некотором особом интеграле мы заменим характеристическую функцию $f_E(x)$ какого-то множества E на характеристическую функцию $f_{CE}(x)$ его дополнения CE, то величина особого интеграла не изменится, так как $f_{CE}(x) = 1 - f_E(x)$.

Установив это, переходим к построению множества, которое уже дает окончательный результат.

Пусть $P^0 = P$, где P — только что построенное множество. Поместим в каждый смежный интервал δ_n к множеству P^0 по множеству $P_n^{(1)}$, подобному P и концы которого совпадают с δ_n. Пусть $P^{(1)} = P^0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n^{(1)}$. Множество $P^{(1)}$ совершенное; поместим в каждый его смежный интервал по множеству, подобному P, так, чтобы его концы совпадали с концами смежных к $P^{(1)}$ интервалов; пусть $P_n^{(2)}$ все эти множества и $P^{(2)} = P^{(1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n^{(2)}$ и т. д. Процесс продолжаем неограниченно. Составим множество M из P и всех тех $P_i^{(n)}$, у которых верхний индекс — *четное* число, т. е.

$$M = P + \sum P_n^{(2)} + \sum P_n^{(4)} + \ldots + \sum P_n^{(2k)} + \ldots,$$

и докажем, что если $f(x)$ — его характеристическая функция, то

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty \quad \text{почти всюду на } [0, 1].$$

С этой целью мы прежде всего заметим, что

$$\mu = \operatorname{mes} P = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{8n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если положить

$$M' = \sum P_n^{(1)} + \sum P_n^{(3)} + \ldots + \sum P_n^{(2k+1)} + \ldots,$$

то ясно, что

$$\operatorname{mes}(M + M') = 1,$$

так как мера каждого из множеств $P_n^{(k)}$ превосходит половину длины того интервала, в который мы его вкладываем.

Мы хотим показать, что особый интеграл от $f(x)$ расходится для почти всех точек множества $M + M'$, т. е. почти всюду на $[0, 1]$.

Действительно, пусть сначала x есть некоторая точка M, значит, она принадлежит какому-то $P_i^{(2k)}$. Для почти всех точек x из $P_i^{(2k)}$ характеристическая функция от $P_i^{(2k)}$ имеет расходящийся особый интеграл. Но на любом смежном интервале к $P_i^{(2k)}$ средняя плотность множества $\sum\limits_{s=k+1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j^{(2s)}$ не превосходит одну и ту же фиксированную константу θ. (Легко подсчитать, что

$$\theta = \mu(1-\mu) + \mu(1-\mu)^3 + \ldots = \mu\frac{1-\mu}{1-(1-\mu)^2} = \frac{1-\mu}{2-\mu}.)$$

Так как $\mu > \frac{1}{2}$, то $\theta < \frac{3\mu}{4}$, а потому из предыдущего рассуждения вытекает, что для почти всех точек из M характеристическая функция от $f(x)$ имеет расходящийся особый интеграл.

Остается рассмотреть поведение этого интеграла в точках M'. Пусть x — такая точка; она принадлежит некоторому $P_i^{(2k+1)}$; средняя плотность множества $\sum\limits_{s=k+1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j^{(2s+1)}$ в каждом смежном к $P_i^{(2k+1)}$ интервале не превосходит то же число θ. Если мы рассмотрим особый интеграл для характеристической функции множества CM, то он, с одной стороны, должен равняться особому интегралу для $f(x)$, а с другой стороны, так как CM содержит $P_i^{(2k+1)}$ и в каждом смежном к $P_i^{(2k+1)}$ интервале отличается от $\sum\limits_{s=k+1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j^{(2s+1)}$

лишь на множество меры 0, потому что $\operatorname{mes}(M+M')=1$, т. е. опять имеет среднюю плотность $\leqslant \theta$, мы видим, что интеграл

$$\int_0^1 \left| \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} \right| d\alpha = +\infty$$

почти всюду на M', т. е. окончательно почти всюду на [0, 1].

[118] Пример измеримого множества, для которого интеграл

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha \tag{1}$$

не имеет смысла в некоторой точке плотности или в некоторой точке разрежения, если $g(x)$ — характеристическая функция этого множества, может быть получен хотя бы так [1]):

Пусть

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \quad x_n' = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad (n=3, 4, \ldots).$$

Так как для $n \geqslant 3$ имеем

$$\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2^{n+1}},$$

то интервалы (x_n', x_n) не перекрываются; кроме того,

$$x_n - x_n' = \frac{1}{n \cdot 2^n}. \tag{2}$$

Все эти интервалы лежат на $[0, \pi]$ и накапливаются около $x=0$.

Пусть E — множество, лежащее на $[-\pi, +\pi]$ и составленное из точек всех (x_n', x_n). Докажем, что для него $x=0$ есть точка разрежения. Так как E пусто налево от $x=0$, то, очевидно, достаточно доказать, что при $x>0$ имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{mes} E[0, x]}{x} = 0.$$

Пусть $x_{n+1} < x \leqslant x_n$. Тогда

$$\frac{\operatorname{mes} E[0, x]}{x} < \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} (x_k - x_k')}{x_{n+1}} = 2^{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} < \frac{4}{n},$$

---

1) Пример принадлежит Г. П. Толстову.

и значит, наше утверждение доказано, так как при $x \to 0$ имеем $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь характеристическую функцию множества E. В точке $x = 0$ интеграл (1) принимает вид

$$\int_0^\pi \frac{g(\alpha) - g(-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_0^\pi \frac{g(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha, \tag{3}$$

так как левее точки O множество E пусто и, значит, $g(-\alpha) = 0$.

Так как $g(\alpha) = 1$ при $\alpha \in E$ и $g(\alpha) = 0$ при $\alpha \in CE$, то

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\pi \frac{g(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_{E[\varepsilon,\, \pi]} \frac{d\alpha}{\alpha} > \sum_{n=1}^{N} \int_{x_n'}^{x_n} \frac{d\alpha}{\alpha},$$

где $N = N(\varepsilon)$ — индекс последнего интервала (x_n', x_n), целиком лежащего на $[\varepsilon, \pi]$.

Но

$$\int_{x_n'}^{x_n} \frac{d\alpha}{\alpha} > \frac{1}{x_n} \int_{x_n'}^{x_n} d\alpha = \frac{x_n - x_n'}{x_n} = \frac{1}{n}$$

в силу (2), а потому

$$I_\varepsilon > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = +\infty,$$

т. е. интеграл (3) не существует.

Если бы мы хотели рассмотреть случай точки плотности, то достаточно было бы рассмотреть множество CE. Если $\psi(x)$ — его характеристическая функция, то

$$\psi(x) = 1 - g(x).$$

Тогда O для CE является точкой плотности, а интеграл

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = -\int_\varepsilon^\pi \frac{g(\alpha) - g(-\alpha)}{\alpha}\, d\alpha,$$

и следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\psi(\alpha)-\psi(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

опять не существует.

[119] Мысль о том, что сходимость рядов Фурье зависит от свойства симметрии измеримых множеств и функций, развивалась Н. Н. Лузиным и в других его работах. Так например, в работе (9) (в настоящей книге см. стр. 320), отмечая, что вопрос о сходимости ряда Фурье от любой суммируемой $f(x)$ сводится к изучению поведения интеграла

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

при $n\to\infty$ (ε_1 и ε_2 — фиксированные положительные числа как угодно малые), он разбивает этот интеграл на два слагаемых:

$$J_n^-=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon_1}^{0} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

и

$$J_n^+=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\varepsilon_2} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

и показывает, что можно построить непрерывную функцию $f(x)$, для которой $J_n(x)$ стремится равномерно на $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ к $f(x)$ при $n\to\infty$, но каждая из последовательностей $J_n^-(x)$ и $J_n^+(x)$ расходится и даже имеет бесконечные пределы неопределенности для почти всех значений x.

Это означает, что мы снова имеем дело с интерференцией положительных и отрицательных величин, только благодаря ей была возможна сходимость.

[120] Для удобства читателя мы приведем здесь доказательство этой теоремы Фату, тем более, что в нем содержатся и другие факты, которыми нам придется пользоваться.

Пусть ряд

$$\sum A_n\cos nx+B_n\sin nx \tag{1}$$

имеет коэффициенты вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Так как $\sum A_n^2+B_n^2$ сходится, то ряд (1) есть ряд Фурье от некоторой функции $F(x)$ с интегрируемым квадратом. Пусть $\Phi(x)$ есть неопределенный интеграл Лебега от $F(x)$, тогда $\Phi(x)$ имеет почти всюду производную $\Phi'(x) = F(x)$. Докажем, что в каждой точке, где $\Phi'(x)$ существует, ряд (1) сходится к $\Phi'(x)$, этим будет доказана сходимость ряда (1) почти всюду.

С этой целью заметим прежде всего, что если для некоторой точки x_0 существует $\Phi'(x_0)$, то существует и

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0-h)}{2h}, \tag{2}$$

и он снова равен $\Phi'(x_0)$ (существование обыкновенной производной всегда влечет существование симметрической производной).

Но так как ряд (1) есть ряд Фурье, а эти ряды, как известно, можно почленно интегрировать, то

$$\Phi(x) = C + \sum -\frac{B_n}{n}\cos nx + \frac{A_n}{n}\sin nx, \tag{3}$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно, так как его коэффициенты имеют вид $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Элементарные вычисления дают

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x-h)}{2h} = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right).$$

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$. Мы покажем, что если $N = \left[\frac{1}{h}\right]$, то

$$\lim_{h \to 0}\left[\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0-h)}{2h} - S_N(x_0)\right] = 0. \tag{4}$$

Так как при $h \to 0$ число $N \to \infty$, принимая последовательно все целые значения, то тем самым будет доказана сходимость ряда (1) к $\Phi'(x_0)$ в каждой точке, где $\Phi'(x_0)$ существует.

Имеем

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0-h)}{2h} - S_N(x_0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx_0 + B_n\sin nx_0)\left(\frac{\sin nh}{nh} - 1\right) +$$

$$+ \sum_{N+1}^{\infty}(A_n\cos nx_0 + B_n\sin nx_0)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right) = P + Q.$$

Так как члены в сумме Q имеют вид $o\left(\frac{1}{n^2h}\right)$, то $Q=o\left(\frac{1}{Nh}\right)$, а потому, в силу соотношения $N=\left[\frac{1}{h}\right]$, ясно, что $Q=o(1)$.

Относительно P рассуждаем так:

При $|u|\leqslant 1$ имеем $\left|\frac{\sin u}{u}-1\right|\leqslant u^2\leqslant|u|$, поэтому при $n\leqslant N$ и $N=\left[\frac{1}{h}\right]$ имеем $\left|\frac{\sin nh}{nh}-1\right|\leqslant nh$, а так как A_n и B_n имеют вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то n-й член в сумме P имеет вид $\varepsilon_n h$, значит,

$$|P|<\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_N}{N}Nh<\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_N}{N}$$

и, значит, $P\to 0$ при $N\to\infty$, ибо $\varepsilon_n\to 0$.

Теорема доказана.

Однако нам будет полезно извлечь из этого доказательства еще один факт. Доказанное нами равенство (4) позволяет утверждать, что если в некоторой точке x_0 ряд (1) сходится к некоторому числу S, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0-h)}{2h}=S.$$

Значит, в каждой точке, где ряд (1) сходится, функция $\Phi(x)$ имеет симметрическую производную, и она равна сумме ряда (1). Но можно утверждать и несколько больше. Для произвольной непрерывной функции существование симметрической производной в некоторой точке, разумеется, не влечет за собой существование обыкновенной производной в этой точке, но для рассматриваемой нами $\Phi(x)$ это имеет место.

В самом деле, прежде всего заметим, что, дифференцируя ряд (1) почленно, мы получим ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. Для него ряд (3) будет результатом двукратного почленного интегрирования. Поэтому функция $\Phi(x)$, являющаяся суммой этого ряда, есть так называемая функция Римана, т. е. та функция, свойства которой Риман изучил и пользовался ими для своего метода суммирования рядов. Известны классические результаты Римана по этому поводу, в частности и то, что $\Phi(x)$ должна удовлетворять условию

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)}{h}=0.$$

Мы уже говорили (см. примечание 78), что функции, удовлетворяющие такому условию, Зигмунд предложил называть гладкими. Для гладкой функции из наличия симметрической производной в некоторой точке мгновенно вытекает существование обыкновенной производной в той же точке (и, разумеется, их равенство).

Соединяя вместе все сказанное, мы видим, что доказали следующее утверждение.

Для того чтобы ряд с коэффициентами вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$ *сходился в некоторой точке* x_0 *к числу* S, *необходимо и достаточно, чтобы сумма* $\Phi(x)$ *ряда, полученного из него почленным интегрированием, имела в этой точке* x_0 *производную, причем* $\Phi'(x_0)=S$.

[121] Для удобства читателя мы дадим здесь предложенное Юнгом доказательство упомянутой теоремы, т. е. докажем, что если $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы, то интеграл

$$\int f(x+t)\,g(t)\,dt$$

существует в смысле Лебега для всех x, кроме точек некоторого множества меры нуль, и является суммируемой функцией от x [1]).

Пусть

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

Тогда функция

$$\int [F(x+t)-F(a+t)]\,g(t)\,dt=\int dt\int_a^x f(t+u)\,g(t)\,du \qquad \text{(A)}$$

существует и конечна для всякого x.

Достаточно рассмотреть случай, когда $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$.

Полагаем

$$f(t,\ u,\ M)=f(t+u)\,g(t), \quad \text{если} \quad f(t+u)\,g(t)\leqslant M,$$
$$f(t,\ u,\ M)=M, \quad \text{если} \quad f(t+u)\,g(t)>M.$$

Имеем

$$\int dt\int_a^x f(t+u)\,g(t)\,du=\int dt\lim_{M\to\infty}\int_a^x f(t,\ u,\ M)\,du=$$
$$=\lim_{M\to\infty}\int dt\int_a^x f(t,\ u,\ M)\,du=$$
$$=\lim_{M\to\infty}\int_a^x du\int f(t,\ u,\ M)\,dt=$$
$$=\int_a^x du\lim_{M\to\infty}\int f(t,\ u,\ M)\,dt. \qquad \text{(B)}$$

---

1) Автор здесь предполагает, что интеграл берется по некоторому интервалу $(a,\ b)$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы на некотором достаточно большом интервале, содержащем $(a,\ b)$. В случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ — периодические, за интервал $(a,\ b)$ можно принять любой интервал.

Предел $\lim\limits_{M\to\infty}\int f(t, u, M)\,dt$ может равняться $+\infty$, но в силу равенства (B) это возможно только для точек некоторого множества меры нуль. В тех же точках, где он конечен, этот предел есть интеграл $\int f(t+u)\,g(t)\,dt$.

[122] Для доказательства[1]) всех высказанных здесь Н. Н. Лузиным утверждений рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left|\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right|^{\frac{3}{2}}}.$$

Отметим следующие ее свойства:

а) $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду на $[0, 2\pi]$, кроме $x=0$.

б) $\varphi(x)\geqslant 0$.

в) $\varphi(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$.

г) $$\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\left|\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right|dt=+\infty.$$

Покажем, что функция

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\varphi(x-r_n) \tag{1}$$

при $A_n>0$ и выбранных так, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ достаточно быстро сходился, удовлетворяет условиям 1°, 2° и 3°, высказанным Н. Н. Лузиным для его функции, определяемой формулой (31). (Разумеется, точки $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ образуют, как и у Н. Н. Лузина, всюду плотное на $[0, 2\pi]$ множество.)

Для доказательства свойства 1° достаточно предположить только сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. В самом деле, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x-r_n)\,dx$$

---

[1]) Это доказательство, с точностью до некоторых деталей в изложении, принадлежит Г. П. Толстову.

сходится. Но, как известно, если ряд из интегралов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

сходится, причем все $u_n(x) \geqslant 0$, то ряд $\sum u_n(x)$ сходится почти всюду на (a, b) к суммируемой функции (см., например, Валле-Пуссен ([1]), т. I, стр. 440). Таким образом 1° доказано.

Для доказательства 2° возьмем числа $\varepsilon_n > 0$ и такие, что $\sum \varepsilon_n < +\infty$. Пусть M_n — такое число, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right| \leqslant M_n, \tag{2}$$

когда x и $x+h$ лежат оба вне интервала $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$, причем h может быть любого знака; такое M_n существует в силу условия а) для функции $\varphi(x)$.

Потребуем, чтобы

$$A_n < \frac{\varepsilon_n}{M_n}. \tag{3}$$

Наконец, потребуем еще, чтобы

$$A_n \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \varphi(x)\,dx \leqslant \varepsilon_n^2. \tag{4}$$

Докажем, что при таком выборе чисел A_n функция $f(x)$ удовлетворяет почти всюду условию

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty, \tag{5}$$

где $\delta > 0$ — некоторое положительное число, а тогда в силу признака Дини (см. Зигмунд ([1]), стр. 227) ряд Фурье от $f(x)$ будет сходиться почти всюду.

Обозначим через E множество тех x, где $f(x)$ не определена, всех r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и, наконец, тех x, которые принадлежат бесконечному множеству интервалов $(r_n - 2\varepsilon_n, r_n + 2\varepsilon_n)$. В силу $\sum \varepsilon_n < +\infty$ ясно [1]), что

$$\operatorname{mes} E = 0.$$

---

[1]) Если $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ есть последовательность множеств, для которых $\sum \operatorname{mes} E_n < +\infty$, то $\overline{\lim}\, E_n$ имеет меру нуль (см., например, статью Н. Н. Лузина «О последовательностях измеримых функций» ([10]), в настоящем издании — стр. 333).

Покажем, что если x не принадлежит E, то в такой точке x условия (5) выполнены для некоторого положительного δ (вообще зависящего от x).

Раз x не входит в E, то найдется такое N, что x не принадлежит $(r_n - 2\varepsilon_n,\ r_n + 2\varepsilon_n)$ для всех $n > N$. Кроме того, так как $x \neq r_n$ ни при каком n (по определению E), то при δ достаточно малом величины

$$\int_0^\delta \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt \quad \text{и} \quad \int_0^\delta \left| \frac{\varphi(x - r_n - t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt$$

конечны при $n = 1, 2, \ldots, N$ в силу свойства а) функции $\varphi(x)$.

Имеем, очевидно,

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} A_n \int_0^\delta \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \int_0^\delta \left| \frac{\varphi(x - r_n + t) - \varphi(x - r_n)}{t} \right| dt. \tag{6}$$

В силу только что сделанного замечания первая сумма в правой части неравенства (6) есть конечная величина. Остается исследовать вторую сумму.

С этой целью заметим, что при $n > N$ всегда имеем x вне $(r_n - 2\varepsilon_n,\ r_n + 2\varepsilon_n)$, т. е. полагая $\alpha_n = x - r_n$, имеем α_n вне $(-2\varepsilon_n,\ 2\varepsilon_n)$. Если $\alpha_n + t$ лежит вне $(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)$, то, обозначая через E_n совокупность тех t из $(0, \delta)$, для которых $\alpha_n + t$ вне $(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)$, на основании условия (3), наложенного на числа A_n, имеем

$$A_n \int_{E_n} \left| \frac{\varphi(\alpha_n + t) - \varphi(\alpha_n)}{t} \right| dt < A_n M_n \delta < \varepsilon_n \delta. \tag{7}$$

Если же CE_n есть совокупность точек $(0, \delta)$, не входящих в E_n, то для них $\alpha_n + t$ лежит на $(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)$, а α_n — вне $(-2\varepsilon_n,\ 2\varepsilon_n)$, значит, $|t| \geqslant \varepsilon_n$. Поэтому

$$A_n \int_{CE_n} \left| \frac{\varphi(\alpha_n + t) - \varphi(\alpha_n)}{t} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{CE_n} \varphi(\alpha_n + t)\, dt + \frac{A_n}{\varepsilon_n} \int_{CE_n} \varphi(\alpha_n)\, dt. \tag{8}$$

Но при α_n+t на $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ имеем $-\varepsilon_n-\alpha_n\leqslant t\leqslant-\alpha_n+\varepsilon_n$. Значит, первый интеграл в правой части неравенства (8) не превосходит

$$\frac{A_n}{\varepsilon_n}\int\limits_{-\varepsilon_n-\alpha_n}^{+\varepsilon_n-\alpha_n}\varphi(\alpha_n+t)\,dt=\frac{A_n}{\varepsilon_n}\int\limits_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n}\varphi(u)\,du\leqslant\frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_n}=\varepsilon_n$$

на основании условия (4). Второй интеграл $\leqslant 2A_n\varphi(\alpha_n)=$ $=2A_n\varphi(x-r_n)$, так как $\operatorname{mes} CE_n\leqslant 2\varepsilon_n$.

Сравнивая этот результат с (7) и (8), находим

$$A_n\int\limits_0^\delta\left|\frac{\varphi(x-r_n+t)-\varphi(x-r_n)}{t}\right|dt\leqslant\varepsilon_n(1+\delta)+2A_n\varphi(x-r_n).$$

Но точка x не принадлежит E, значит, в ней $\sum A_n\varphi(x-r_n)$ сходится, а это заканчивает доказательство конечности интеграла в левой части (6).

Ясно, что замена t на $-t$ ничего не изменит в доказательстве, и таким образом, признак Дини выполнен всюду вне E, т. е. почти всюду, а это и надо было доказать.

Мы убедились, что ряд Фурье от функции $f(x)$, заданной формулой (31), сходится почти всюду. Н. Н. Лузин в свойстве 2° утверждает также сходимость сопряженного к нему ряда. Чтобы убедиться в этом, ему надо было базироваться на специальных свойствах этого ряда. Нам не придется этого делать, так как в настоящее время можно сослаться на общий результат Плесснера ([3]): если тригонометрический ряд сходится на некотором множестве положительной меры, то сопряженный ряд сходится почти всюду на этом множестве.

Переходим к доказательству свойства 3°. С этой целью, так как $\varphi(x)\geqslant 0$, рассмотрим для удобства функцию $-G(x)$ (где $G(x)$ определена равенством (30), стр. 226 диссертации); имеем

$$-G(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x+\alpha)\left|\ln\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right|d\alpha\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x-r_n+\alpha)\left|\lg\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right|d\alpha$$

для любого n $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

В силу условия г), которому удовлетворяет функция $\varphi(x)$, ясно, что когда $x\to r_n$, то $-G(x)$ неограниченно возрастает, а так как множество точек $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ всюду плотно на $[0, 2\pi]$, то функция $G(x)$ не ограничена ни в каком интервале на $[0, 2\pi]$, а это и есть утверждение 3°.

[123] **В самом деле, если бы $g(x)$ была суммируема, то ряд, сопряженный к ряду Фурье для $f(x)$, был бы ее рядом Фурье (эта теорема принадлежит В. И. Смирнову (1), см. также Зигмунд (1), стр. 164), а тогда $G(x)$ была бы неопределенным интегралом от $g(x)$.**

[124] В настоящее время известно, что если $f(x)$ суммируема, то сопряженная $g(x)$ суммируема в степени p, $0<p<1$; далее, если $|f|\ln^{+}|f|$ суммируема¹), то сопряженная $g(x)$ суммируема. Последний результат в некотором смысле не может быть ослаблен, так как если $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)$ суммируема, то $f\ln^{+}f$ непременно суммируема. Все эти результаты можно найти у Зигмунда (1), стр. 151—152.

Наконец, можно поставить вопрос так: при каком обобщении понятия интеграла из суммируемости f должна вытекать интегрируемость сопряженной функции в этом обобщенном смысле?

Чтобы дать ответ на этот вопрос, дадим сначала определение «интеграла B» (принадлежащее Данжуа).

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $a\leqslant x<b$; воспроизведем ее периодически на всех полуинтервалах

$$a+kh\leqslant x<a+(k+1)h \qquad (k=\pm 1,\ \pm 2,\ldots),$$

где $h=b-a$. Пусть $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ есть любое подразделение интервала (a,b), ξ_i — произвольная точка на (x_{i-1}, x_i) и $\rho=\max(x_i-x_{i-1})$. Рассмотрим выражение

$$I(t)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i+t)(x_i-x_{i-1}) \qquad (0\leqslant t<b-a)$$

и предположим, что существует число I, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что $|I(t)-I|<\varepsilon$ для всех t, за исключением множества меры, меньшей чем ε, если только $\rho\leqslant\delta$ (независимо от выбора значений x_i, ξ_i). Мы будем говорить тогда, что $f(x)$ интегрируема B на отрезке $[a, b]$ и что I есть значение этого интеграла.

Доказывается, что если f суммируема, то она интегрируема B.

Мы можем теперь дать ответ на поставленный вопрос о сопряженных рядах. Он дается теоремой А. Н. Колмогорова (8):

Для всякой суммируемой f сопряженная функция $\bar{f}$ интегрируема B на $[0, 2\pi]$, и ряд, сопряженный к ряду Фурье от f, будет рядом Фурье от $\bar{f}$, если коэффициенты Фурье определять как интегралы B.

Доказательство этой теоремы можно найти также у Зигмунда (1), стр. 154.

[125] В настоящее время доказано, что множитель Вейля может быть понижен до $\ln n$. Этот результат получен А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым (1, 2), а также А. И. Плесснером (2). Вопрос о том, возможен ли дальнейший спуск множителя Вейля для тригонометрических рядов, остается открытым.

---

¹) Принято называть $\ln^{+}\varphi$ функцию, совпадающую с $\ln\varphi$, когда $\ln\varphi>0$, и равную нулю, когда $\ln\varphi<0$.

Доказательство указанной теоремы о том, что из сходимости $\sum (a_n^2+b_n^2)\ln n$ вытекает сходимость почти всюду ряда $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$, можно найти также и в книге Зигмунда ([1]), стр. 251.

[126] Д. Е. Меньшовым ([3]) и Радемахером доказано, что для любых ортогональных систем $\ln^2 n$ есть множитель Вейля, и кроме того, Д. Е. Меньшов ([6]) доказал, что существуют такие ортогональные системы, для которых этот множитель понизить нельзя.

[127] Затронутая здесь Н. Н. Лузиным трудная проблема о связи между характером неограниченности функции и асимптотическим законом ее коэффициентов Фурье даже до настоящего времени мало продвинута. Кроме теорем Хаусдорфа и Ф. Рисса (см. примечание 128) в этом направлении можно указать еще теоремы Пэли (см., например, Зигмунд ([1]), стр. 202), справедливые не только для тригонометрической, но для любой нормированной ортогональной системы, состоящей из функций, ограниченных в своей совокупности. Чтобы их сформулировать, введем обозначение: если $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ есть любая последовательность комплексных чисел, стремящихся к нулю, то мы будем обозначать через $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*, \ldots$ последовательность модулей $|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|, \ldots$, расположенных в убывающем порядке (если несколько $|c_n|$ равны между собой, то в последовательности c_n^* будет соответствующее количество повторяющихся членов). Тогда

1) Если $q \geqslant 2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^*)^q n^{q-2}$$

сходится, то существует функция $f(x)$, такая, что $|f(x)|^q$ суммируема, и числа c_n являются ее коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n\}$ (здесь $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортонормированная система, для которой $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$).

2) Если $1 < p \leqslant 2$ и $|f(x)|^p$ суммируема, а $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей тем же условиям, как и в предыдущей теореме, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^*)^p n^{p-2}$$

сходится.

[128] В настоящее время эти теоремы обобщены. Если для всякого числа $r > 1$ мы будем обозначать через r' число, определяемое из равенства $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, то можно так сформулировать две теоремы, доказанные Хаусдорфом:

а) Если $p < 1$ и $f(x)$ суммируема в степени p, то $\sum a_n^{p'} + b_n^{p'}$ сходится.

б) Если $p<1$ и $\sum a_n^p+b_n^p$ сходится, то найдется функция $f(x)$ с коэффициентами Фурье a_n и b_n, причем она суммируема в степени p'.

Ясно, что, полагая $p'=2k$ ($k=1, 2, \ldots$), мы можем из теорем Хаусдорфа получить теоремы Юнга. Доказательство теорем Хаусдорфа можно найти у Зигмунда ([1]), стр. 191.

Теорема Хаусдорфа-Юнга была обобщена Ф. Риссом. Он доказал, что если $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная система ортогональных, нормированных функций, ограниченных в своей совокупности, и $\{c_n\}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по этой системе, то 1) если $|f(x)|^p$ суммируема, ряд $\sum|c_n|^{p'}$ сходится, и 2) если для некоторой последовательности $\{c_n\}$ ряд $\sum|c_n|^p$ сходится, существует $f(x)$ такая, что $|f(x)|^{p'}$ суммируема и числа c_n являются ее коэффициентами Фурье по рассматриваемой системе.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Зигмунда ([1]), стр. 191 и 201.

[129] Можно утверждать даже больше, чем здесь высказано Н. Н. Лузиным, а именно: существует тригонометрический ряд, у которого

$$\sum|a_n|^q+|b_n|^q<+\infty$$

для любого $q>2$, и однако он не может быть рядом Фурье от суммируемой функции. Действительно, таков, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n x}{\sqrt{n}}.$$

Будучи лакунарным (определение лакунарности дано в примечании 91), он мог бы быть рядом Фурье лишь при условии сходимости ряда из квадратов его коэффициентов, а этого нет. Между тем, $\sum\frac{1}{(\sqrt{n})^q}$ сходится для любого $q>2$.

Что касается второй теоремы Хаусдорфа, то для доказательства ее необратимости заметим следующее: так как из $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ следует, что при p', очень большом, число p как угодно близко к 1, то для непрерывных функций (которые суммируемы в любой степени p') в случае обратимости теоремы мы должны были бы иметь при любом $\varepsilon>0$

$$\sum|a_n|^{1+\varepsilon}+|b_n|^{1+\varepsilon}<+\infty.$$

Однако это неверно: можно построить непрерывную функцию, для которой

$$\sum|a_n|^{2-\varepsilon}+|b_n|^{2-\varepsilon}=+\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$ (см., например, Зигмунд (1), стр. 122 и 129 или Карлеман (1), где дано очень простое доказательство существования таких функций).

Можно, однако, не прибегая к этим общим рассмотрениям, совершенно элементарно построить пример, указанный Н. Н. Лузиным, а именно построить такую $f(x)$, для которой $[f(x)]^4$ суммируема, а ряд $\sum |a_n|^{\frac{4}{3}} + |b_n|^{\frac{4}{3}}$ расходится.

С этой целью полагаем

$$(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^{\frac{3}{4}}} \cos nx.$$

Так как

$$a_n = \frac{1}{(n \ln n)^{\frac{3}{4}}}, \quad \text{то} \quad \sum a_n^{\frac{4}{3}} = \sum \frac{1}{n \ln n} = +\infty.$$

Однако мы докажем, что $[f(x)]^4$ суммируема. Действительно, пусть ряд Фурье от $f^2(x)$ есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx.$$

Если мы убедимся, что $\sum_{0}^{\infty} A_n^2$ сходится, то $f^4(x)$ будет суммируема, так как в силу равенства Парсеваля имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^4(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f^2(x)]^2 dx = \sum_0^{\infty} A_n^2 < +\infty.$$

Но по известным формулам для коэффициентов Фурье от произведения двух функций имеем

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} a_p (a_{p+n} + a_{p-n}) \qquad (a_{-k} = a_k)$$

(это — частный случай общей формулы, где учтено, что $a_0 = 0$ и все $b_n = 0$).

Имеем

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n} a_p (a_{p+n} + a_{n-p}) + \frac{1}{2} \sum_{p=2n+1}^{\infty} a_p (a_{p+n} + a_{p-n}).$$

Так как в нашем случае a_n положительны и монотонно убывают, то

$$A_n \leqslant \sum_{p=1}^{2n} a_p a_{|n-p|} + \sum_{p=2n+1}^{\infty} a_p a_{p-n} = A_n' + A_n''.$$

Но

$$A_n' = \sum_{p=1}^{n} a_p a_{n-p} + \sum_{p=n+1}^{2n} a_p a_{p-n} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_p a_{n-p} + \sum_{k=1}^{n} a_{n+k} a_n \leqslant 2 \sum_{p=1}^{n} a_p a_{n-p}.$$

Так как из двух чисел p и $n-p$ хотя одно не меньше, чем $\frac{n}{2}$, то

$$A_n' \leqslant \frac{4}{\left(\ln\frac{n}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{3}{4}}} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\frac{3}{4}}} < \frac{C_1 n^{\frac{1}{4}}}{(\ln n)^{\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{4}}} = \frac{C_1}{n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^{\frac{3}{4}}},$$

где C_1 — абсолютная константа.

Подобно этому

$$A_n'' = \sum_{p=2n+1}^{\infty} a_p a_{p-n} = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_{p+n} a_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln p)^{\frac{3}{4}} p^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{[\ln(n+p)]^{\frac{3}{4}} p^{\frac{3}{4}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\ln n)^{\frac{3}{4}}} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{C_2}{n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^{\frac{3}{4}}},$$

где C_2 — абсолютная константа.

Таким образом,

$$A_n \leqslant \frac{C_n}{n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^{\frac{3}{4}}},$$

где $C = C_1 + C_2$ — абсолютная константа, и значит, $\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2 < +\infty$.

[130] На русском языке изложение всех трех упомянутых методов можно найти в книге Зигмунда (1) на стр. 51—54, 56—60 и 267—268. О методах Фейера и Римана см. также Валле-Пуссен (1), т. II, стр. 150 и 160.

[131] См. примечание 130.

[132] См. примечание 104.

[133] Гипотеза Н. Н. Лузина о том, что всякий ряд Фурье-Данжуа суммируем методом Римана, вполне оправдалась. Доказательство этого предложения в настоящее время можно получить из результатов Ю. Б. Гермейера ([1]).

Прежде всего заметим, что если $f(x)$ интегрируема по Данжуа (в узком смысле, как это имел в виду Н. Н. Лузин), то ее неопределенный интеграл в смысле Данжуа есть непрерывная функция $F(x)$, имеющая почти всюду производную $F'(x) = f(x)$. Если мы составим для $F(x)$ ее ряд Фурье-Лебега

$$\frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos nx + B_n \sin nx, \tag{1}$$

то

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin nx\, dx,$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега, но можно их понимать и в смысле Данжуа, так как интеграл Данжуа от суммируемой функции совпадает с ее интегралом Лебега. Но известно, что для интегралов Данжуа справедлива формула интегрирования по частям, а потому [1])

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{n} b_n,$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} a_n,$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье-Данжуа от функции $f(x)$.

Отсюда следует, что ряд (1) есть результат интегрирования ряда Фурье-Данжуа от функции $f(x)$, т. е. ряда

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{2}$$

Следовательно, двойное интегрирование ряда (2) эквивалентно однократному интегрированию ряда (1) и дает ряд, сходящийся

---

[1]) Для упрощения формул мы предполагаем, что $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = 0$, чего всегда можно добиться, изменяя $f(x)$ лишь на постоянную; тогда $F(\pi) = F(-\pi)$, и при интегрировании по частям обинтегрированный член будет равен нулю.

к функции $\Phi(x)$, имеющей $F(x)$ своей производной в каждой точке, так как $F(x)$ непрерывна и (1) есть ее ряд Фурье-Лебега.

Покажем, что вторая производная Шварца от $\Phi(x)$ совпадает почти всюду с $f(x)$; это и будет означать, что ряд Фурье-Данжуа от $f(x)$ суммируется к ней методом Римана.

Имеем

$$\frac{\Delta^2\Phi(x, h)}{h^2} = \frac{\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h [F(x+t)-F(x-t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h \frac{F(x+t)-F(x-t)}{2t}\,2t\,dt.$$

Во всякой точке x, где $F'(x)$ существует, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(x+t)-F(x-t)}{2t}$ тоже существует, поэтому при достаточно малом h найдется такое K_x, что

$$\left|\frac{F(x+t)-F(x-t)}{2t}\right| \leqslant K_x,$$

а тогда

$$\left|\frac{\Delta^2\Phi(x, h)}{h^2}\right| < K_x\frac{1}{h^2}\int_0^h 2t\,dt = K_x,$$

следовательно,

$$\overline{\lim}\left|\frac{\Delta^2\Phi(x, h)}{h^2}\right| < +\infty$$

во всякой точке, где $F'(x)$ существует, т. е. почти всюду.

Из этого в силу результатов Ю. Б. Гермейера (см. примечание 152) вытекает, что $D^2\Phi(x)$ существует почти всюду. Но в силу тех же результатов Ю. Б. Гермейера мы должны иметь

$$D^2\Phi(x) = \Phi''_{ao}(x) = F'_{ao}(x) = f(x),$$

а это и требовалось доказать.

[154] Н. Н. Лузин ставит здесь проблему о взаимоотношении трех методов суммирования. В период, когда он писал свою диссертацию, было известно только, что если ряд суммируем методом средних арифметических, то он суммируем и методом Пуассона (это справедливо в каждой индивидуальной точке, так как числовой ряд, суммируемый методом средних арифметических, суммируется и методом Абеля-Пуассона).

Связь между методом Римана и методом Пуассона была установлена Райхманом ([1]), показавшим, что если $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, то, обозначая через $\underline{D}^2F(x)$ и $\overline{D}^2F(x)$ соответственно нижний и верхний пределы неопределенности отношения

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2},$$

где $F(x)$—сумма двукратно обинтегрированного ряда $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$, и через $P(r, x)$ — выражение

$$P(r, x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n,$$

имеем

$$\underline{D}^2F(x) \leqslant \overline{\lim_{r\to 1}}\, P(r, x),$$

$$\underline{\lim_{r\to 1}}\, P(r, x) \leqslant \overline{D}^2F(x).$$

Можно показать, что если $\underline{D}^2F(x) = \overline{D}^2F(x) \neq \infty$, то и $\lim\limits_{r\to 1} P(r, x)$ существует и равен тому же числу, а значит, если $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, то из суммируемости ряда методом Римана к конечному числу следует его суммируемость методом Пуассона (но вообще отрезок $[\underline{\lim\limits_{r\to 1}}\, P(r, x), \overline{\lim\limits_{r\to 1}}\, P(r, x)]$ не содержится в $[\underline{D}^2F(x), \overline{D}^2F(x)]$.

Райхман и Зигмунд ([1]) изучили также связь между методом Чезаро и некоторым обобщением метода Римана (см. об этом Зигмунд ([1]), стр. 293).

[135] Доказательство того, что ряд Фурье от непрерывной $F(x)$ сходится в такой точке, где $F'(x)$ существует, можно найти в любом курсе, где излагается теория рядов Фурье. См., например, И. И. Привалов ([2]), стр. 67.

[136] См. также Зигмунд ([1]), стр. 58—59.

[137] Д. Е. Меньшову удалось еще уточнить полученный Н. Н. Лузиным результат относительно изобразимости функций тригонометрическими рядами, а именно он показал ([5]), что для любой измеримой функции, конечной почти всюду, существует почти всюду сходящийся к ней тригонометрический ряд.

Что касается изображения тригонометрическими рядами функций, принимающих значения $+\infty$ и $-\infty$ на множестве точек меры, большей нуля, то эта проблема, поставленная Н. Н. Лузиным, до сих пор еще полностью не решена. Ю. Б. Гермейер ([2]) доказал, что не может существовать тригонометрический ряд, суммируемый методом Римана к $+\infty$ на множестве положительной меры. Отсюда, однако, еще не вытекает, что нельзя построить ряд, *сходящийся* к $+\infty$ на множестве положительной меры, ибо теорема о том, что если ряд сходится к некоторой сумме s в точке x_0, то он суммируется к s в точке x_0 методом Римана, верна лишь для s *конечного*.

Что касается метода Пуассона, то здесь дело обстоит иначе. А именно И. И. Приваловым и Н. Н. Лузиным ([7]) было доказано, что существует аналитическая функция $w(z)$, голоморфная внутри круга $|z|<1$ и такая, что $\operatorname{Reel} w(z)$ стремится к ∞, когда z стремится по радиусам к точкам некоторого множества меры 2π, лежащего на окружности (стр. 183—185) (на русском языке см. И. И. Привалов ([3]), гл. IV, § 5). Так как действительная часть аналитической функции есть гармоническая функция, то ее можно изобразить в виде

$$P(r, x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) r^n$$

и утверждать, что при $r \rightarrow 1$ функция $P(r, x) \rightarrow+\infty$ для всех x, принадлежащих некоторому E, $\operatorname{mes} E=2\pi$. Следовательно, ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx$$

суммируем к $+\infty$ почти всюду методом Пуассона.

Наконец, по поводу поставленной Н. Н. Лузиным проблемы об изобразимости тригонометрическим рядом функций, обращающихся в ∞ на множестве меры, большей нуля, необходимо указать на последние результаты Д. Е. Меньшова. Именно, Д. Е. Меньшов ([9]) показал, что для любой измеримой функции (значит, в частности, и такой, которая может обращаться в $+\infty$ или $-\infty$ на множестве меры >0) существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней *по мере*.

При этом, считая понятие сходимости по мере для случая конечной функции известным, дается такое определение для сходимости по мере в общем случае: говорят, что последовательность $S_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, если $S_n(x)$ можно представить в виде $\sigma_n(x)+g_n(x)$, где $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)=f(x)$ почти всюду, а $g_n(x)$ сходится по мере к нулю.

[138] Это отсутствие единственности изображения сохраняется даже тогда, когда вместо ряда, суммируемого к $f(x)$, рассматривают ряд, сходящийся к $f(x)$ почти всюду (такой ряд существует по теореме Д. Е. Меньшова, упомянутой в примечании 137).

В самом деле, Д. Е. Меньшов ([2]) доказал, что существуют тригонометрические ряды с коэффициентами, отличными от нуля и сходящиеся к нулю почти всюду [1]). Такие ряды сейчас принято называть нуль-рядами. Путем добавления к ряду, сходящемуся к $f(x)$ почти всюду, некоторого нуль-ряда получим новый ряд, который также сходится почти всюду к $f(x)$.

---

[1]) По поводу таких рядов см. также статью Н. К. Бари ([2]).

[139] О борелевском понятии моногенной функции см. Борель (1).

[140] Доказательство того, что это необходимое условие не является достаточным для того, чтобы функция была аналитически изобразима (т. е. входила в классификацию Бэра), можно будет найти в книге Н. Н. Лузина «Теория аналитических множеств», готовящейся к печати.

[141] Здесь опять (см. примечание 6) происходит смешение понятий функции, аналитически представимой (или функции, измеримой по Борелю), и функции, которую можно определить без принципа произвольного выбора. В примечании 6 было уже указано, что эти понятия не совпадают, так как самим Н. Н. Лузиным впоследствии было обнаружено существование функций, определяемых без принципа произвольного выбора и, однако, не являющихся измеримыми по Борелю (следовательно, они не являются аналитически представимыми в том смысле, в каком эти слова употребляются автором).

[142] См. примечание 141.

[143] Можно доказать и более общее предложение: если для ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, функции $\overline{\lim}\, S_n(x)$ и $\underline{\lim}\, S_n(x)$ конечны всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества E, и если $\underline{\lim}\, S_n(x) \geqslant g(x)$, где $g(x)$ суммируема (в частности, если $\underline{\lim}\, S_n(x)$ суммируема), то тогда этот ряд есть ряд Фурье от $f(x) = D^2F(x)$ (здесь под $F(x)$ понимается сумма ряда, получающегося от двукратного интегрирования основного тригонометрического ряда). Доказательство этой теоремы можно найти в книге Зигмунда (1), стр. 275.

Важным частным случаем теоремы Валле-Пуссена является результат: если ряд сходится всюду, кроме счетного множества точек, к суммируемой функции, то он есть ряд Фурье-Лебега от этой функции.

[144] Здесь полезно заметить, что если тригонометрический ряд сходится всюду, за исключением счетного множества, к некоторой конечной функции $f(x)$, то в классе $\{T\}_f$ изображающих [1]) ее тригонометрических рядов такой ряд только один. Однако $f(x)$ может оказаться несуммируемой. Но Данжуа дал такое обобщение понятия интеграла, при котором каждый раз, как ряд сходится всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, к некоторой конечной $f(x)$, его коэффициенты определяются по формулам Фурье, отправляясь от этой функции и понимая интеграл в этом обобщенном смысле (см. примечание 3).

[145] См. также Зигмунд (1), стр. 271—282.

[146] Мы уже говорили о том, что Д. Е. Меньшов построил пример тригонометрического ряда с не равными нулю коэффициентами, сходящегося к нулю почти всюду (см. примечание 138). Этот пример Д. Е. Меньшова послужил началом целой серии работ,

---

[1]) Слово «изображающих» здесь надо понимать в том смысле, как это указано Н. Н. Лузиным на стр. 236 его диссертации.

посвященных проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд (см. Н. К. Бари (2)).

[147] Если $f(x)$ измерима и почти всюду конечна, то сходящиеся к ней почти всюду тригонометрические ряды существуют в силу теоремы Д. Е. Меньшова (см. примечание 137).

[148] См. примечание 138.

[149] Для случая, когда ряд сходится в каждой точке и, следовательно, коэффициенты единственным образом определены заданием функции $f(x)$, эта операция была построена Данжуа (см. примечания 3 и 144).

[150] Доказательство теоремы Фату дано в примечании 120.

[151] Если рассматриваемый тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ лишь почти всюду, но не всюду, на некотором отрезке $[a, b]$, то в настоящее время уже ясно, что нельзя оправдать корректность определения неопределенного интеграла как суммы обинтегрированного ряда. Действительно, мы уже знаем (примечание 138), что существуют тригонометрические ряды, сходящиеся к нулю почти всюду, и такие, что обинтегрированные ряды сходятся к функции, отличной от нуля, а потому, если существует хоть один, то найдется и бесконечное множество рядов, сходящихся почти всюду к $f(x)$, но таких, что обинтегрированные ряды сходятся к разным функциям, и это лишает нас возможности корректно определить неопределенный интеграл.

Однако высказанные Н. Н. Лузиным в начале § 90 его диссертации требования, предъявляемые им к интегралу, выполняются, если предполагать, что речь идет о сходимости рассматриваемого ряда к конечной функции $f(x)$ в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$. Именно в этом предположении Н. Н. Лузин и доказывал законность почленного интегрирования тригонометрического ряда [1]. Заметим, что при том же условии сходимости в каждой точке сразу получается и независимость величины «интеграла» на отрезке $[a, b]$ от значений функции вне $[a, b]$.

В самом деле, пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

и

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \tag{2}$$

— два тригонометрических ряда, сходящихся на некотором отрезке $[a, b]$ в каждой точке к конечной функции $f(x)$. Тогда, с одной стороны, неопределенным интегралом от $f(x)$ следует назвать функцию $F(x)$, являющуюся суммой ряда

$$\frac{a_0}{2} x + C + \sum \frac{b_n}{n} \cos nx - \frac{a_n}{n} \sin nx, \tag{3}$$

[1]) В формулированной им на стр. 254 теореме функция $f(x)$ предположена непрерывной, но доказательство сохраняет силу и для суммируемой $f(x)$ (см., например, Зигмунд (1), стр. 283).

а с другой стороны — функцию $F_1(x)$, являющуюся суммой ряда

$$\frac{\alpha_0}{2}x + C_1 + \sum \frac{\beta_n}{n}\cos nx - \frac{\alpha_n}{n}\sin nx, \tag{4}$$

а интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$ надо назвать разность $F(b) - F(a)$ или $F_1(b) - F_1(a)$.

Но так как разность рядов (1) и (2) сходится к 0 в каждой точке $[a, b]$, то на основании доказанной Н. Н. Лузиным (стр. 254) законности почленного интегрирования ряда, сходящегося всюду на $[a, b]$ к непрерывной функции, мы получаем, что разность рядов (3) и (4) сходится к постоянной величине на $[a, b]$, т. е. $F(x) = K + F_1(x)$ на $[a, b]$, а значит, $F(b) - F(a) = F_1(b) - F_1(a)$.

[152] В настоящее время это предложение может быть выведено из результатов Ю. Б. Гермейера ([1]). Он доказал, что если $\Phi(x)$ измерима и конечна почти всюду на множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$, то почти всюду на этом множестве либо существуют первая и вторая асимптотические производные $\Phi'_{ao}(x)$ и $\Phi''_{ao}(x)$ и вместе с тем вторая шварцева асимптотическая производная $D^2_{ao}\Phi(x)$, причем $D^2_{ao}\Phi(x) = \Phi''_{ao}(x)$, либо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\, \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} &= +\infty, \\ \underline{\lim}\, \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} &= -\infty \end{aligned} \tag{A}$$

при $h \to 0$ по любому множеству, симметричному относительно нуля и положительной нижней плотности в точке O.

Отсюда легко выводится нужная нам теорема (если предположить $f(x)$ конечной почти всюду). Действительно, пусть ряд T сходится к $f(x)$ почти всюду. Тогда, проинтегрировав его два раза, получаем ряд, сходящийся равномерно к некоторой непрерывной $\Phi(x)$. В силу классических результатов Римана $\Phi(x)$ должна иметь во всех точках, где ряд T сходится, шварцеву производную, равную сумме этого ряда, значит, $D^2\Phi(x) = f(x)$ почти всюду. Раз мы предположили $f(x)$ почти всюду конечной, то условия (A) не могут выполняться на множестве меры >0, а тогда в силу результата Гермейера должны существовать почти всюду $\Phi'_{ao}(x)$ и $\Phi''_{ao}(x)$, причем $\Phi''_{ao}(x) = f(x)$ почти всюду. Но ряд F, являющийся результатом однократного интегрирования ряда T, есть ряд Фурье. Он сходится почти всюду к некоторой $F(x)$. Так как ряд Фурье можно почленно интегрировать, то $\Phi(x)$ имеет $F(x)$ своей производной почти всюду. Следовательно, $\Phi'_{ac}(x) = \Phi'(x) = F(x)$ почти всюду, а потому из $\Phi''_{ac}(x) = f(x)$ вытекает, что $f(x) = F'_{ac}(x)$ почти всюду, что и доказывает теорему стр. 256—257.

[153] Можно построить непрерывную функцию $F(x)$ с ограниченным изменением, для которой коэффициенты Фурье не могут

иметь вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а так как у функции с ограниченным изменением производная почти всюду существует, то $F(x)$ можно назвать «примитивной», и однако, она не может быть суммой ряда

$$C+\frac{a_0}{2}x+\sum -\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx,$$

где $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$.

Чтобы получить такую $F(x)$, достаточно рассмотреть любую непрерывную функцию с ограниченным изменением, постоянную на всех смежных интервалах к канторовскому совершенному множеству, но не равную константе. Если бы у $F(x)$ коэффициенты Фурье имели вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то, продифференцировав ряд Фурье для $F(x)$, мы получили бы тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю. Легко показать, что такой ряд сходился бы к нулю во всех смежных интервалах к *канторовскому* множеству, а тогда все его коэффициенты должны были бы равняться нулю (см., например, Н. К. Бари (²), что невозможно, так как $F(x) \neq \text{const}$).

[154] Это мгновенно проверяется интегрированием по частям.

[155] Если функция удовлетворяет условиям (u) и на нее не наложено никаких дополнительных ограничений, то она может быть неограниченной во всяком интервале внутри $[0, 2\pi]$ (см. примечание 78). Насколько нам известно, в математической литературе нет работ, где изучалась бы структура таких функций с дополнительным требованием непрерывности. Но есть ряд работ, где изучаются функции с ограниченным изменением, удовлетворяющие условиям (u) при $k=0$, т. е. с коэффициентами Фурье вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом последнем случае рассматриваемые условия могут также быть записаны в виде

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,dF=0. \tag{A}$$

Функции, удовлетворяющие этому условию, изучались целым рядом авторов с различных точек зрения (в частности, в связи с проблемой единственности разложения в тригонометрический ряд). Ю. А. Шрейдер [1]) показал, что если $F(x)$ удовлетворяет условию (A), то для любых a, b на отрезке $[0, 2\pi]$ также имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b e^{inx}\,dF=0,$$

т. е. эти функции входят в адамаровский класс функций à écart nul.

[1]) В работе, в настоящее время печатающейся в Математическом сборнике.

Далее (в той же работе) Ю. А. Шрейдер подверг эти функции детальному изучению и нашел необходимое и достаточное условие, которому они должны удовлетворять.

Чтобы его сформулировать, понадобится ввести следующие определения (также принадлежащие Ю. А. Шрейдеру).

Рассмотрим последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, лежащих на $[0, 1]$; для любого интервала Δ на $[0, 1]$ и любого целого k обозначим через $N_\Delta^{(k)}$ число точек из $a_1, a_2, \ldots, a_k$, которые попали в интервал Δ, и пусть

$$\rho(\Delta) = \lim_{k \to \infty} \frac{N_\Delta^{(k)}}{k},$$

если этот предел существует.

Определение 1. Последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ отрезка $[0, 1]$ называется распределенной по Вейлю, если 1) для всякой точки x, кроме, быть может, счетного множества, интервал $\Delta = (0, x)$ таков, что величина $\rho(\Delta)$ существует, 2) найдется такое Δ, что $\rho(\Delta) \neq \Delta$.

Определение 2. Множество E на $[0, 2\pi]$ называется множеством типа ω, если существует возрастающая последовательность целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, такая, что для любой точки x из E последовательность

$$\left\{n_1 \frac{x}{2\pi}\right\}, \left\{n_2 \frac{x}{2\pi}\right\}, \ldots, \left\{n_k \frac{x}{2\pi}\right\}, \ldots$$

(где $\{t\}$ есть дробная часть t) является распределенной по Вейлю.

Теперь можно сформулировать теорему Шрейдера:

Для того чтобы функция $F(t)$ с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$ удовлетворяла условию

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} e^{int}\, dF = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы ее изменение [1]) на всяком множестве типа ω было равно нулю.

Мы привели здесь эту теорему для того, чтобы показать сложность поставленной Н. Н. Лузиным проблемы о структуре функций,

---

[1]) Изменение $\operatorname*{var}_E F$ функции $F(x)$ на измеримом множестве E определяется следующим образом:

Функция действительного переменного $F(x)$ определяет аддитивную функцию отрезка $F[a, b]$, равную $F(b) - F(a)$. Последняя в свою очередь определяет аддитивную функцию множества $F^*(E)$ (см. Сакс ([1]), стр. 100), и $\operatorname*{var}_E F$ полагается равной вариации F^* на E (Сакс ([1]), стр. 23).

удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Оказывается, что даже дополнительное требование ограниченности изменения из таких функций не приводит к простым результатам. Для изучения структуры таких функций приходится рассматривать арифметические свойства множеств, на которых их изменение отлично от нуля.

[156] Н. Н. Лузину казалось маловероятным существование рядов, сходящихся к нулю почти всюду (см. его диссертацию, настоящее издание стр. 250). Поэтому, показывая здесь отсутствие N-свойства у функции $\psi(x)$, он и высказал мысль, что выбор примитивной при помощи тригонометрического ряда вполне согласуется с требованием главы IV, чтобы примитивная обладала N-свойством.

Мы уже говорили (см. примечание 138), что в 1916 г. Д. Е. Меньшов построил тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне некоторого совершенного множества меры 0. Почленное интегрирование этого ряда Д. Е. Меньшова дает ряд, сходящийся к непрерывной функции $F(x)$, имеющей обыкновенную производную, равную нулю почти всюду. Этим доказано существование непрерывных функций, не обладающих N-свойством и, однако, получающихся в результате интегрирования тригонометрического ряда.

[157] В настоящее время известно, что любую измеримую функцию, конечную почти всюду, можно представить тригонометрическим рядом, сходящимся к ней почти всюду. Это — результат Д. Е. Меньшова, о котором уже говорилось в примечании 137.

Таким образом, из выведенных Н. Н. Лузиным условий и из теоремы Д. Е. Меньшова вытекает существование для любой измеримой конечной почти всюду $f(x)$ такой $F(x)$, которая удовлетворяет условию 2′, а значит, и такой $\Phi(x)$, которая удовлетворяет условию 2°.

[158] Эта гипотеза не оправдалась (см. примечание 160).

[159] Вопросу об условиях, при которых из суммируемости ряда некоторым методом следует его сходимость, посвящен большой цикл работ. Интересующихся отсылаем к монографии Качмажа ([1]).

[160] Эта гипотеза, как и гипотеза о методе Римана, не оправдалась. В самом деле, мы уже знаем, что существуют ряды Фурье, которые расходятся всюду (см. примечания 100 и 115). Но так как всякий ряд Фурье суммируется почти всюду методом Римана и методом Пуассона, то, следовательно, суммируемость ряда почти всюду одним из этих методов еще не влечет сходимость этого ряда.

КОММЕНТАРИИ К СТАТЬЯМ Н. Н. ЛУЗИНА, ПОМЕЩЕННЫМ В НАСТОЯЩЕМ ИЗДАНИИ

К статье «Об одном случае ряда Тейлора»

[161] С. Б. Стечкин доказал, что построенный Н. Н. Лузиным трнгонометрический ряд расходится в каждой точке (этот результат помещен в статье, готовящейся к печати).

По поводу появившихся после работы Н. Н. Лузина примеров тригонометрических рядов, расходящихся почти всюду или всюду, см. примечания 96 и 97 к диссертации Н. Н. Лузина.

[162] Чтобы убедиться в том, что для любого тригонометрического ряда множество точек расходимости измеримо, обозначим через $S_n(x)$ сумму его первых n членов и заметим, что $S_n(x)$ непрерывна а значит, и подавно измерима. В таком случае и функции

$$\omega(x) = \varliminf_{n \to \infty} S_n(x) \quad \text{и} \quad \Omega(x) = \varlimsup_{n \to \infty} S_n(x)$$

измеримы (см., например, Валле-Пуссеи (1), т. I, стр. 69). Следовательно, и их разность $\Omega(x) - \omega(x)$ есть измеримая функция, а потому множество E тех точек, где она не равна нулю, измеримо. Но множество $\mathfrak{E}$ тех точек, где ряд расходится, состоит из точек E и из точек, в которых $\omega(x) = \Omega(x) = +\infty$ или $\omega(x) = \Omega(x) = -\infty$, и так как эти два множества тоже измеримы, то и E измеримо.

К статье «К основной теореме интегрального исчисления»

[163] Здесь мы перепечатали лишь первую часть статьи Н. Н. Лузиа «К основной теореме интегрального исчисления».

Из следующих двух частей первую, посвященную C-свойству измеримых функций, можно найти в статье Н. Н. Лузина «О строении измеримых функций» (11) (в настоящем издании стр. 358), а вторую, содержащую доказательство того, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, имеет непрерывную примитивную, можно найти в диссертации Н. Н. Лузина (стр. 78 настоящего издаиия) причем, как это замечено самим Н. Н. Лузиным, доказательство, приведенное в диссертации, проще того, которое помещено в этой статье.

[164] О методе Гарнака см. примечание 44 к диссертации Н. Н. Лузина.

[165] См. статью «О строении измеримых функций» (11), § 1 (в настоящем издании стр. 338).

[166] В настоящее время принято эти интервалы называть «смежными»; этой терминологией сам Н. Н. Лузин пользовался в своих более поздних работах.

[167] То, что множество π имеет меру нуль, следует как из общей теоремы, доказанной Н. Н. Лузиным в этой статье, так и из того, что монотонная функция должна иметь конечную производную почти всюду, а рассматриваемая здесь функция $\Phi(x)$ есть возрастающая. Это замечание было сделано самим Н. Н. Лузиным (5).

К статье «Об одном особом интеграле»

[168] Эта статья Н. Н. Лузина никогда не была опубликована. Мы печатаем ее без всяких изменений по рукописи Н. Н. Лузина, найденной в его бумагах после его смерти. Из личных бесед с Н. Н. Лузиным известно, что он написал эту работу после появления статьи А. С. Безиковича (см. примечание 120 к диссертации Н. Н. Лузина), вызванной поставленной Н. Н. Лузиным проблемой. Известно также, что теорему о существовании особого интеграла он надеялся использовать для получения теоремы: всякий ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом сходится почти всюду (см. об этом стр. 219 его диссертации). Именно поэтому он и искал прямых методов доказательства существования особого интеграла, и получив такой метод, он стремился применить его к решению проблемы о сходимости рядов Фурье от функций с интегрируемым квадратом. Однако эта проблема столь трудна, что не решена и до сих пор.

Поскольку Н. Н. Лузин свою работу об особом интеграле не подготовил к печати, она сохранилась в несколько сыром виде, именно ряд вычислений проделан чрезвычайно подробно, как это делают авторы лишь для себя. Мы, однако, не сочли возможным переделывать что-либо в рукописи и публикуем ее без всяких изменений, хотя, конечно, можно было бы за счет таких изменений сократить ее объем.

[169] По поводу приведенных совершенных множеств см. статью Н. Н. Лузина «О строении измеримых функций» (11) (стр. 339 настоящего издания).

К статье «Об одном виде сходимости интеграла Дирихле»

[170] По поводу связи поставленной здесь проблемы с теми вопросами, которые Н. Н. Лузин затрагивал в своей диссертации, см. примечание 119 к его диссертации.

К статье «О последовательностях измеримых функций»

[171] См., например, Валле-Пуссен (1), т. I, стр. 69.

[172] Теорема, разумеется, сохраняет силу, если вместо сегмента $[a, b]$ рассматривать произвольное измеримое множество $\mathfrak{E}$, тогда надо только сказать, что мера E как угодно близка к мере $\mathfrak{E}$. Доказательство полностью сохраняется. Мы отмечаем этот элементарный факт здесь, так как часто приходится пользоваться теоремой именно в этом виде.

[173] Здесь также (см. примечание 172) можно говорить о сходимости не на сегменте, а на любом измеримом множестве $\mathfrak{E}$. Надо будет только сказать, что оставшееся множество имеет меру, превосходящую $\operatorname{mes}\mathfrak{E}-\eta$.

Кроме того, заметим, что так как всякое множество меры >0 содержит в себе совершенное множество, по мере как угодно близкое к мере данного множества, то можно теорему Д. Ф. Егорова сформулировать и так:

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ есть последовательность измеримых функций, каждая из которых определена и конечна почти всюду на некотором измеримом множестве $\mathfrak{E}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{E}=\mu>0$. Пусть эта последовательность сходится к конечному определенному числу $f(x)$ почти всюду на $\mathfrak{E}$. Тогда каково бы ни было $\varepsilon>0$, множество $\mathfrak{E}$ содержит в себе совершенное множество P, $\operatorname{mes}P>\mu-\varepsilon$, на котором последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ равномерно сходится.

Именно в этой форме и сформулирована теорема Д. Ф. Егорова на стр. 64 диссертации Н. Н. Лузина, и в такой форме ею обычно и пользуются.

[174] Эту теорему можно доказать так: в силу теоремы Д. Ф. Егорова для всякого n можно найти такое P_n, $\operatorname{mes}P_n>(b-a)-\frac{1}{n}$, на котором ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно.

Пусть $\pi_n=P_1+P_2+\ldots+P_n$. Если ряд сходится равномерно на каждом P_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, то и на π_n. Поэтому можно найти такое N_n, что

$$\left|\sum_{k=N_n+1}^{N_n+p}u_k(x)\right|<\frac{1}{n^2} \quad \text{для любого } p>0 \text{ и } x\in\pi_n.$$

Числа N_n можно, не нарушая общности, предположить монотонно возрастающими. Тогда, в частности, имеем

$$\left|\sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}}u_k(x)\right|<\frac{1}{n^2} \quad \text{для } x\in\pi_n.$$

Сгруппируем теперь наш ряд так:

$$[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_{N_1}(x)]+[u_{N_1+1}(x)+\ldots+u_{N_2}(x)]+\ldots$$
$$\ldots+[u_{N_n+1}(x)+\ldots+u_{N_{n+1}}(x)]+\ldots$$

и докажем, что этот сгруппированный ряд сходится абсолютно почти всюду на $[a, b]$.

В самом деле, пусть $Q=P_1+P_2+\ldots+P_m+\ldots$ Пусть $x_0 \in Q$; тогда найдется такое m, что $x_0 \in P_m$, а тогда и $x_0 \in \pi_m$; но $\pi_1 \subset \pi_2 \subset \ldots \subset \pi_n \subset \ldots$, значит, $x_0 \in \pi_n$ для всех $n \geqslant m$.

Поэтому имеем

$$\left|\sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} u_k(x_0)\right|<\frac{1}{n^2} \quad \text{для } n \geqslant m,$$

и значит, члены сгруппированного ряда при $x=x_0$ по модулю меньше членов сходящегося ряда $\sum \frac{1}{n^2}$, поэтому сгруппированный ряд сходится абсолютно при $x=x_0$. Но x_0 — любая точка Q; значит, ряд сходится абсолютно на Q, но $\operatorname{mes} Q \geqslant \operatorname{mes} P_n$ при любом n, а так как $\operatorname{mes} P_n>(b-a)-\frac{1}{n}$, то $\operatorname{mes} Q=b-a$.

Итак, сгруппированный ряд сходится абсолютно почти всюду на $[a, b]$.

К статье «О строении измеримых функций»

[175] Об элементарных доказательствах теоремы о точках плотности см. примечание 8 к диссертации Н. Н. Лузина.

[176] Если положим $\mu_1=\operatorname{mes} E_1$, $\mu_2=\operatorname{mes} E_2$, то по условию $\mu_1+\mu_2=S>b-a$. Тогда, так как $C(E_1 \cdot E_2)=CE_1+CE_2$, имеем $\operatorname{mes} C(E_1 \cdot E_2) \leqslant \operatorname{mes} CE_1+\operatorname{mes} CE_2$. Но $\operatorname{mes} CE_1=b-a-\mu_1$ и $\operatorname{mes} CE_2=b-a-\mu_2$, откуда $\operatorname{mes} C(E_1 \cdot E_2) \leqslant 2(b-a)-S$, а значит, $\operatorname{mes}(E_1 \cdot E_2) \geqslant S-(b-a)$, а это и требовалось доказать.

[177] По поводу таких дифференциальных свойств измеримых множеств см. § 71 диссертации Н. Н. Лузина.

[178] Здесь Н. Н. Лузин, повидимому, имеет в виду работы А. Я. Хинчина (4, 5, 6) и работу Харди и Литтлвуда (1). Лицам, интересующимся этим вопросом, рекомендуем также книгу А. Я. Хинчина (7), гл. III.

[179] В настоящее время известно, что Гильберт только наметил пути такого доказательства, но самого доказательства ему провести не удалось. Последний результат в этом направлении принадлежит Геделю (1), который доказал, что в некоторой чрезвычайно мощной системе аксиом теории множеств аксиома Цермело не стоит в

противоречии с остальными аксиомами, если считать, что они без нее непротиворечивы. Система аксиом теории множеств, рассмотренная Геделем, такова, что все положения, составляющие объем современной математики, могут быть выведены из аксиом этой системы.

[180] Заметим, что измеримость функции $\varphi_n(x)$ можно было бы доказать в два слова, пользуясь ее непрерывностью на π_n и равенством нулю вне его; однако доказательство Н. Н. Лузина дает не только измеримость $\varphi_n(x)$, но и утверждение, что она есть предел непрерывных функций. Это обстоятельство им используется ниже (стр. 360) при доказательстве теоремы Витали.

[181] Это замечание надо понимать в том смысле, что неизмеримые функции строились до сих пор только при помощи аксиомы Цермело, и Н. Н. Лузин высказывает мысль, что, повидимому, их иначе и нельзя построить. Что же касается математических объектов, которые строятся при помощи аксиомы Цермело, то здесь взгляды Н. Н. Лузина ясно отражены в главе «Неизмеримые множества» этой статьи (в настоящем издании стр. 348).

[182] Эта теорема была доказана В. В. Степановым (1).

[183] В самом деле, пусть x_0 — точка асимптотической непрерывности $f(x)$. Значит, найдется такое совершенное P, имеющее x_0 своей точкой плотности, на котором $f(x)$ непрерывна в точке P_0. Пусть

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Имеем

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{P_h} f(t)\,dt+\frac{1}{h}\int_{CP_h} f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где через P_h мы обозначили часть P, попавшую на интервал (x_0, x_0+h) (или (x_0+h, x_0), если $h<0$).

Пусть $\varepsilon>0$ — любое. Найдем такое δ, что

$$\left|\frac{\operatorname{mes} P_h}{h}\right|>1-\varepsilon, \quad \text{если} \quad |h|<\delta,$$

что возможно, так как x_0 — точка плотности для P.

Кроме того, в силу непрерывности $f(x)$ на P в точке x_0 имеем если δ достаточно мало:

$$|f(x_0)-f(t)|<\varepsilon \quad \text{для} \quad t\in P_h.$$

Тогда, замечая, что $|f(x)| \leqslant M$ по условию, имеем

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{h}\int\limits_{P_h} f(t)\,dt - f(x_0)\right| + \left|\frac{1}{h}\int\limits_{CP_h} f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{h}\int\limits_{P_h} [f(t)-f(x_0)]\,dx + f(x_0)\frac{\operatorname{mes} P_h}{h} - f(x_0)\right| +$$

$$+\frac{1}{|h|} M \operatorname{mes} CP_h \leqslant \varepsilon \frac{\operatorname{mes} P_h}{|h|} + \varepsilon M + \varepsilon M < \varepsilon(2M+1),$$

и так как ε как угодно мало, то теорема доказана.

[184] См. примечание 87 к диссертации Н. Н. Лузина.

[185] Такой пример можно найти в примечании 89 к диссертации Н. Н. Лузина.

[186] Такой пример можно найти, например, в работе А. Я. Хинчина (3).

[187] Доказательство можно найти в статье А. С. Безиковича (8).

КОММЕНТАРИИ К СПИСКУ ПРОБЛЕМ

[188] **К вопросу 1.** Для того чтобы эта проблема могла быть решена в положительном смысле, необходимо, чтобы существовали всюду расходящиеся ряды Фурье от функций с интегрируемым квадратом. Однако до сих пор не найдено ни одного ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом, который расходился бы на множестве положительной меры. См. по поводу этой проблемы примечание 115 к диссертации Н. Н. Лузина.

[189] **К вопросу 2.** В поставленной здесь Н. Н. Лузиным проблеме содержится, в сущности, несколько вопросов.

Прежде всего, существует ли тригонометрический ряд, сходящийся на некотором отрезке всюду и не являющийся рядом Фурье? Затем сходящийся всюду на некотором отрезке и расходящийся всюду вне его? И наконец, вопрос о поведении сопряженного ряда в том же интервале.

Ответы на эти вопросы можно дать в настоящее время такие.

Существует тригонометрический ряд с отличными от нуля коэффициентами, сходящийся к нулю во всех смежных интервалах к некоторому совершенному множеству меры нуль (см., например, примечание 138 к диссертации Н. Н. Лузина). Такой ряд не может быть рядом Фурье, так как иначе все его коэффициенты были бы нулями. Значит, может существовать ряд не-Фурье, сходящийся к нулю, т. е. к голоморфной функции, на некотором отрезке.

Можно построить ряд, сходящийся к нулю на данном отрезке и расходящийся всюду вне его. Этот результат есть частный случай более общей теоремы Райхмана: для всякого замкнутого множества F найдется тригонометрический ряд, сходящийся к нулю на F и расходящийся всюду вне F (см. Зигмунд ([1]), стр. 279).

Можно, наконец, решить одновременно обе предыдущие проблемы, т. е. построить ряд не-Фурье, сходящийся к нулю всюду на данном отрезке $[a, b]$ и расходящийся всюду вне его. Для этого надо несколько детальнее рассмотреть доказательство теоремы Райхмана, о которой мы только что упоминали, и сделать одно небольшое добавление.

Возьмем тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

расходящийся всюду на $(0, 2\pi)$ и, кроме того, не суммируемый ни в какой точке методом Пуассона. Такие ряды существуют (см. Зигмунд ([1]), стр. 122).

Построим теперь функцию $\lambda(x)$, непрерывную вместе со своими производными до третьего порядка включительно, равную нулю на данном отрезке $[a, b]$ и отличную от нуля всюду вне его. Ее коэффициенты Фурье имеют вид $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Поэтому можно применить теоремы Райхмана о «формальном произведении» к ряду (1) и ряду Фурье от $\lambda(x)$. Получается ряд, сходящийся к нулю на $[a, b]$ и всюду вне этого отрезка не только расходящийся, но и не суммируемый методом Пуассона (см. Зигмунд ([1]), стр. 277). Раз так, то этот ряд не может быть рядом Фурье (как известно, всякий ряд Фурье суммируется методом Пуассона почти всюду), и однако он сходится на $[a, b]$ к голоморфной функции и расходится всюду вне $[a, b]$.

Наконец, вопрос о сопряженном ряде, как указал сам Н. Н. Лузин, следует решать, опираясь на теорему Фату-Рисса. Вопрос только, находимся ли мы в условиях, когда ее можно применить.

Теорема Фату-Рисса заключается в том, что если степенной ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, имеет радиус сходимости, равный единице, и если его сумма $F(z)$ аналитически продолжаема через дугу γ на единичной окружности, то этот ряд сходится равномерно на всякой дуге, внутренней к γ (см. Зигмунд ([1]), стр. 280).

Следовательно, если мы рассмотрим степенной ряд, действительная часть которого совпадает с заданным тригонометрическим рядом, и докажем, что его сумма $F(z)$ аналитически продолжаема за дугу $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$, то сопряженный ряд будет сходиться равномерно на всякой дуге, внутренней к $h_1 \leqslant x \leqslant h_2$.

С целью изучения продолжаемости $F(z)$ положим

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

по условию сходится к функции $f(\theta)$, аналитической на дуге γ, удовлетворяющей условиям $\rho = 1$, $h_1 < \theta < h_2$. В силу принципа локализации он сходится равномерно на всякой дуге γ', лежащей внутри γ. Пусть S — замкнутый сектор с вершиной в начале координат, опирающийся на γ'. Так как ряд (1) сходится в концах дуги γ', то ряд (1) сходится равномерно на радиусах, являющихся боковыми сторонами сектора S. Частные суммы ряда (1) являются гармоническими функциями во всех конечных точках плоскости; поэтому ряд (1) сходится равномерно в секторе S, и следовательно, $u(\rho, \theta)$ непрерывна в этом секторе. Так как γ'—любая дуга, внутренняя к γ, мы приходим к заключению, что функция, равная $u(\rho, \theta)$ в открытом круге K и равная $f(\theta)$ на γ, будет непрерывна на множестве $K+\gamma$. В этих условиях $u(\rho, \theta)$ может быть продолжена как гармоническая через дугу γ (см. И. И. Привалов ([3]), гл. XII, § 2, стр. 330 и 332).

Если мы теперь обозначим через $v(\rho, \theta)$ гармоническую функцию, сопряженную с нашей продолженной $u(\rho, \theta)$, то $F(z)=u(\rho, \theta)+ iv(\rho, \theta)$ будет голоморфной в расширенной области. Отсюда следует, что первоначально заданная функция $F(z)$, действительной частью которой была $u(\rho, \theta)$, допускает аналитическое продолжение за дугу γ, а это и надо было установить.

[190] **К вопросу 3.** Д. Е. Меньшов ([8]) доказал, что существует тригонометрический ряд (с коэффициентами, стремящимися к нулю), у которого любая подпоследовательность частных сумм расходится почти всюду.

Следует, однако, заметить, что если бы предполагать не просто стремление к нулю коэффициентов a_n и b_n рассматриваемого ряда а предположить, что $\sum a_n^2+b_n^2<+\infty$ (т. е. это ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом), то существует последовательность n_p, для которой $\lim S_{n_p}(x)$ существует почти всюду и не зависит от выбора коэффициентов a_n, b_n. За такую последовательность можно принять любую лакунарную последовательность, т. е такую, что

$$\frac{n_p+1}{n_p}>\lambda>1 \qquad (p=1, 2, 3, \ldots)$$

Это — результат А. Н. Колмогорова ([5]) (см. также Зигмунд ([1]), стр. 250). Он доказал, что

$$\lim_{p\to\infty} S_{n_p}(x)=f(x)$$

почти всюду, где $f(x)$ — та функция, для которой рассматриваемый ряд есть ряд Фурье.

[191] **К вопросу 4.** Так как для всякой $f(x)$ существует бесконечное множество примитивных $F(x)$, не отличающихся на постоянную величину, то написанные Н. Н. Лузиным формулы не могли бы определить коэффициенты Фурье, если бы не сделать дополнительных гипотез. Поэтому он вводит требование $a_n\to 0$ и $b_n\to 0$, т. е. коэффициенты Фурье для $F(x)$ имеют вид $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Он ожидал, что при этом условии такая $F(x)$ будет только одна (см. стр. 163 диссертации). Однако это ожидание не оправдалось (см. примечание 77 к диссертации Н. Н. Лузина).

[192] **К вопросу 5.** Повидимому, эту проблему следует рассматривать как подход к решению проблемы о существовании функции,

у которой производная $F'(x)=0$ почти всюду, но

$$n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx \to 0$$

и (*u*)

$$n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx \to 0.$$

Действительно, $\sin nx$ и $\cos nx$ принимают альтернативно знаки $+$ и $-$ в интервалах равной длины $\frac{\pi}{n}$. В случае, когда $F(x)$ с ограниченным изменением, имеем заведомо

$$\left| n\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx \right| \leqslant K$$

и

$$\left| n\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx \right| \leqslant K,$$

где K — постоянное, зависящее только от $F(x)$ (см., например, Зигмунд (1), стр. 23).

К проблеме о существовании $F(x)$ с производной, равной нулю и удовлетворяющей условиям (*u*), Н. Н. Лузин несколько раз возвращался. См. диссертацию, стр. 163 и 258.

[193] **К вопросу 6.** Речь идет о какой-то личной беседе Н. Н. Лузина с Д. Ф. Егоровым, содержание которой нам неизвестно. Поэтому нельзя ничего высказать о поставленной проблеме.

[194] **К вопросу 7.** В самом деле, раз для некоторого фиксированного y имеем $\sum a_n^2(y)+b_n^2(y)<\infty$, то ряд

$$\frac{a_0(y)}{2}+\sum_1^\infty a_n(y)\cos nx + b_n(y)\sin nx$$

есть ряд Фурье от некоторой $f(x, y)$, причем для любого y она есть функция с интегрируемым квадратом относительно x. Так как всякий ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом сходится к ней в среднем, то можно всегда выбрать такую подпоследовательность $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, что

$$\lim_{p\to\infty} S_{n_p}(x, y)=f(x, y)$$

(см., например, Натансон ([1]), стр. 149, теорема 5). Вопрос о том можно ли эти n_p выбрать одними и теми же для всех y, поставленный Н. Н. Лузиным, в настоящее время разрешен в положительном смысле благодаря результату А. Н. Колмогорова (см. примечание к проблеме 3).

[195] **К вопросу 8.** Эта проблема разрешена в положительном смысле. Харди и Литтлвуд ([2]) доказали, что существует степенной ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и не суммируемый нигде методом Абеля-Пуассона (см. Зигмунд ([1]), стр. 122).

[196] **К вопросу 9.** Здесь не сказано, как появляется ряд, приводимый в соответствие функции $f(x)$; но можно догадаться, что он должен был быть построен так: сначала строится ряд Фурье для функции $F(x)$, являющейся точной примитивной от $f(x)$, затем этот ряд дифференцируется почленно, и тогда появляется ряд $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Будем предполагать проблему поставленной для всюду конечной $f(x)$. Если так, то коэффициенты a_n, b_n будут коэффициентами Фурье-Данжуа. Действительно, $f(x)$ тотализуема (как всякая всюду конечная точная производная), и если

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

где интегралы берутся в смысле Данжуа, то, интегрируя по частям (для интегралов Данжуа это законно), сразу найдем, что a_n и b_n совпадают с коэффициентами продифференцированного ряда для $F(x)$.

Но мы покажем (см. ответ на вопрос 36), что существуют такие $f(x)$, которые являются всюду конечными точными производными, и однако их коэффициенты Фурье-Данжуа не стремятся к нулю. Если так, то соответствующий ряд Фурье-Данжуа заведомо расходится почти всюду.

[197] **К вопросу 10.** Эта проблема поставлена в явном виде в диссертации Н. Н. Лузина (стр. 164). См. по поводу нее примечания 78 и 155 к диссертации.

[198] **К вопросу 11.** Ответ на этот вопрос отрицательный. См. по этому поводу ответ на вопрос 9.

[199] **К вопросу 12.** На стр. 256 диссертации Н. Н. Лузина находим теорему: если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится почти всюду к функции $f(x)$, тогда сумма $F(x)$ ряда

$$C + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx$$

имеет обобщенную производную $F^{[1]}(x)$, равную почти всюду $f(x)$ (слово «обобщенная» здесь означает «асимптотическая»). (По поводу доказательства этой теоремы см. примечание 152 к диссертации Н. Н. Лузина.) Поставленная здесь проблема 12 есть пожелание получить результат несколько более сильный, чем тот, который содержится в сформулированной теореме, а именно, надо было бы вместо сходимости предполагать лишь суммируемость данного ряда методом Пуассона на множестве положительной меры и некоторой $f(x)$ и показать, что $F^{[1]}(x)$ существует и равна $f(x)$ почти всюду на этом множестве. Мы не знаем, решается ли эта проблема в положительном смысле.

[200] **К вопросу 13.** Ответ на этот вопрос отрицательный. Можно даже показать, что такая $F(x)$ может не иметь нигде конечной производной. Действительно, Фату доказал (см. Зигмунд (¹), стр. 58), что если функция $F(x)$ имеет в некоторой точке конечную производную (и даже достаточно, чтобы она имела лишь асимптотическую производную), то, продифференцировав ее ряд Фурье, получим такой ряд, который суммируется в этой точке методом Абеля.

Возьмем теперь ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, и нигде не суммируемый методом Абеля (о существовании таких рядов см. примечание к проблеме 8). Пусть

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum \alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx \tag{1}$$

— этот ряд. Тогда, проинтегрировав его почленно, получим ряд

$$C+\frac{\alpha_0}{2}+\sum -\frac{\beta_n}{n}\cos nx+\frac{\alpha_n}{n}\sin nx,$$

сходящийся к некоторой $F(x)$ с коэффициентами

$$a_n=-\frac{\beta_n}{n},\quad b_n=\frac{\alpha_n}{n},$$

т. е. удовлетворяющими условию $\lim na_n=0$, $\lim nb_n=0$. Если бы у $F(x)$ была конечная производная хотя бы в одной точке, то по теореме Фату ряд (1) должен был бы в этой точке суммироваться методом Пуассона, а этого нет. Итак, вопрос 13 решается отрицательно.

[201] **К вопросу 14.** Вопросу о том, каковы функции, изобразимые всюду сходящимися тригонометрическими рядами, посвящена целая серия работ Данжуа. См. об этом Данжуа (³).

Что касается изображения тригонометрическими рядами, сходящимися почти всюду, то исчерпывающим ответом на этот вопрос является теорема Д. Е. Меньшова (⁵): всякая измеримая функция, конечная почти всюду, может быть изображена тригонометрическим рядом, сходящимся к ней почти всюду.

[202] **К вопросу 15.** Здесь Н. Н. Лузин высказывает гипотезу, сформулированную им также в его диссертации (в настоящем издании стр. 219), а именно: всякий ряд Фурье-Лебега от функции

с интегрируемым квадратом сходится почти всюду. Эта гипотеза, как известно, до сих пор не подтверждена, но и не опровергнута.

Второй вопрос не очень ясно сформулирован. Во всяком случае некоторым ответом на него может служить результат В. Я. Козлова ([1]) о существовании так называемых «универсальных» рядов, т. е. рядов, обладающих следующим свойством: какова бы ни была $f(x)$, измеримая и конечная почти всюду, в этом ряде найдется такая подпоследовательность частных сумм, которая сходится к $f(x)$ почти всюду.

[[203]] **К вопросу 16.** Ответ на этот вопрос отрицательный. См. примечание 86 к диссертации Н. Н. Лузина.

[[204]] **К вопросу 17.** Положительный ответ на этот вопрос был дан самим Н. Н. Лузиным в его диссертации (в настоящем издании стр. 180).

[[205]] **К вопросу 18.** Вопрос, конечно, может ставиться только о существовании рядов второго класса, так как всякий всюду сходящийся ряд принадлежит к первому классу. Что касается рядов второго класса, то вопрос о их существовании в то время еще не был разрешен, но теперь мы имеем много примеров таких рядов (см., например, Зигмунд ([1]), стр. 171).

[[206]] **К вопросу 19.** Здесь так же, как и в предыдущей проблеме, непустота первого класса тривиальна, и речь может идти лишь о непустоте второго класса (если не предполагать, что от функций первого класса требуется что-то дополнительное). Существование функций второго класса вытекает из того, что если функция имеет ограниченное изменение на совершенном множестве P, $\operatorname{mes} P > 0$, то она на нем должна иметь асимптотическую производную почти всюду, а между тем существуют непрерывные функции, лишенные асимптотической производной почти всюду (см. А. Я. Хинчин ([3]).

[[207]] **К вопросу 20.** Здесь постановка вопроса неясна, и мы затрудняемся указать, что Н. Н. Лузин имел в виду.

[[208]] **К вопросу 21.** Этот вопрос был решен в отрицательном смысле Ю. Гольдовским ([1]), доказавшим и следующую теорему: непрерывная и всюду дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$, производная которой $f(x)$ (конечная или нет) почти всюду равна нулю на $[a, b]$, обращается в постоянную на $[a, b]$.

Теорема Шеффера, о которой упоминает Н. Н. Лузин, заключается в том, что непрерывная $F(x)$ должна быть константой, если ее производная $f(x)$ существует и равна нулю всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества (доказательство ее можно найти в книге Лебега ([1]) стр. 73).

Вопрос о разложении функции $F(x)$, для которой $F'(x) = 0$ почти всюду, в ряд Фурье и о ряде, получающемся из него почленным дифференцированием, тесно связан с проблемой существования нуль-рядов, к которой Н. Н. Лузин неоднократно возвращался. См. по этому поводу, например, его диссертацию (в настоящем издании стр. 259) (а также комментарии 138 и 156 к диссертации).

[[209]] **К вопросу 22.** Этот вопрос впоследствии был сформулирован Н. Н. Лузиным в его работе ([4]), и ответ на него был дан Штейнхаузом (см. об этом в диссертации Н. Н. Лузина стр. 197; см. также примечание 99 к диссертации Н. Н. Лузина).

[210] **К вопросу 23.** К сожалению, мы не знаем, в связи с чем Н. Н. Лузин поставил этот вопрос. Ясно только, что здесь речь идет о тонких арифметических свойствах множеств меры нуль. Если бы мы потребовали, чтобы заданное множество было второй категории, то при любом его сдвиге получится снова множество второй категории и в пересечении опять множество второй категории, поэтому процесс нигде не оборвется. Такое же явление наблюдалось бы, если рассматривать множество меры 2π, т. е. меры, равной длине окружности ($R = 1$); здесь процесс нигде не оборвется, как бы мы ни выбирали сдвиги. Не только для множеств меры 0, но и для множеств меры μ, $0 < \mu < 2\pi$, конечно, может встретиться случай, когда процесс обрывается и даже с первого же шага (хотя бы, например, когда это множество есть маленькая дуга окружности; при подходяще подобранном сдвиге она перейдет в дугу, не имеющую ни одной общей точки с начальной дугой), но такие тривиальные примеры ничего не дают. Вопрос же ставится так: может ли найтись такое множество меры нуль, для которого процесс не оборвется, как бы мы ни выбирали сдвиги. Заметим, что если x есть точка данного множества M, то точка сдвинутого множества имеет вид $y = x - t$; сказать, что при любом t множество M и множество, получаемое из него сдвигом на t, пересекаются, это значит сказать, что при любом t найдутся две точки x и y из M, такие, что $x - y = t$. Множества меры нуль могут обладать этим свойством, например, канторово множество им обладает (см., например, Зигмунд (1), стр. 136). Таким образом, на первом шаге процесс, рассмотренный Н. Н. Лузиным, уже во всяком случае не должен оборваться. Но требуется узнать, нет ли такого множества меры нуль и первой категории, где этот процесс ни на каком шаге не оборвется.

Оказывается, что эта проблема разрешается в положительном смысле. Ответ был дан недавно Фалевичем (в докладе на семинаре под руководством проф. П. С. Новикова). Если обозначить через E_n множество тех чисел x, у которых в их разложении в n-ичную дробь не содержится ни одного нуля, то множество $E = E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ обладает нужным свойством.

Кроме того, Фалевич доказал, что если бы от множества E, к которому мы применяем процесс Н. Н. Лузина, потребовать, чтобы оно было нигде не плотным, то процесс обязательно должен оборваться на конечном числе шагов.

[211] **К вопросу 24.** В формулировке теоремы Фату-Рисса (слова «сходится равномерно») имелась в виду равномерная сходимость на всякой внутренней дуге.

Ответ на поставленный вопрос в настоящее время дается теоремой: если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю равномерно, суммируем методом Абеля для $a \leqslant x \leqslant b$ к функции $f(x)$, непрерывной вместе со своими первой и второй производными, то ряд этот равномерно сходится во всяком интервале (a', b'), целиком лежащем внутри (a, b).

Доказательство этой теоремы можно найти у Зигмунда ([1]), стр. 281. Зигмунд отмечает там же, что теорема остается в силе, если предположить $f(x)$ только непрерывной и имеющей ограниченное изменение.

[212] **К вопросу 25.** Повидимому, здесь речь идет просто о том, должен ли степенной ряд сходиться почти всюду на периферии ($R=1$), если его коэффициенты стремятся к нулю. Эту проблему сам Н. Н. Лузин разрешил в отрицательном смысле еще в 1911 г., построив пример степенного ряда, расходящегося в каждой точке периферии ($R=1$), хотя его коэффициенты стремятся к нулю. Эта работа Н. Н. Лузина ([8]) перепечатана в настоящем издании, см. стр. 271.

[213] **К вопросу 26.** Слова «$f(r, \theta)$ имеет смысл на дуге радиуса 1» Н. Н. Лузин, повидимому, понимал так:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,r^n$$

сходится для $r<1$ к $f(r, \theta)$, причем при $r\to 1$ существует конечный предел для всех θ, $\alpha<\theta<\beta$, и этот предел есть функция $f(\theta)$ с интегрируемым квадратом. Вопрос ставится о сходимости ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$$

на этой дуге.

Повидимому, речь идет о сходимости почти всюду, так как не только для функций с интегрируемым квадратом, но и для непрерывных функций расходимость в отдельных точках была известна задолго до того, как Н. Н. Лузин ставил свой вопрос.

Ясно, что надо интересоваться лишь случаем, когда $a_n\to 0$ и $b_n\to 0$, так как если этого не предполагать, то ряд может расходиться всюду и, однако, суммироваться методом Абеля к 0 в каждой точке. Таков, например, ряд

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\ldots,$$

указанный Н. Н. Лузиным в его диссертации (в настоящем издании стр. 250).

Наконец, если сосредоточиться на случае $a_n\to 0$, $b_n\to 0$, то поставленный вопрос эквивалентен вопросу о сходимости ряда Фурье от функции с интегрируемым квадратом. Действительно, прежде всего ясно, что если бы поставленный здесь вопрос решался положительно, то это значило бы, что для всякой функции с интегрируемым квадратом ряд Фурье сходится почти всюду. Напротив, допустим, что для всякой функции с интегрируемым квадратом ряд Фурье почти всюду сходится. Тогда, полагая $F(\theta)=f(\theta)$ на (α, β) и $F(\theta)=0$ вне этой дуги, убедимся, что ряд Фурье для $F(\theta)$ сходится почти всюду. Но на всякой дуге (α', β'), внутренней к (α, β), интересующий нас тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, будет равномерно равносходящимся с рядом Фурье от $F(\theta)\,\lambda(\theta)$, где $\lambda(\theta)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, равна единице (на α', β') и равна нулю вне (α, β) (см. Зигмунд ([1]), стр. 282). Отсюда ясно, что рассматриваемый тригонометрический ряд также сходится почти всюду на (α, β).

[214] **К вопросу 27.** Н. Н. Лузин уже знал, что функция, сопряженная с непрерывной, может быть неограниченной во всяком интервале (позже он написал об этом в своей диссертации, см. § 74). Поэтому, естественно, он поставил вопрос об ограничениях на непрерывную $f(x)$, при которых сопряженная функция $\bar{f}(x)$ будет непрерывной. В качестве некоторых ответов на эти вопросы можно указать, во-первых, теорему И. И. Привалова: если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0<\alpha<1$, то и $\bar{f}(x)$ удовлетворяет этому условию при том же α (см., например, Зигмунд ([1]), стр. 158). Можно также отметить (см. Зигмунд ([1]), стр. 159), что если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка единицы, то сопряженная имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий условию $\omega(\delta, \bar{f}) = O\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right)$.

[215] **К вопросу 28.** Как известно, существует такая теорема П. Л. Чебышева: пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и $T(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n. Если существуют $2n+2$ точки

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2} \qquad (0 \leqslant x_k < 2\pi),$$

в которых разность $T(x) - f(x)$ достигает своего наибольшего абсолютного значения $\Delta(T)$, причем знак этой разности меняется при каждом переходе от точки x_i к следующей x_{i+1}, то $T(x)$ есть полином наименьшего уклонения от $f(x)$ (см., например, Натансон ([2]), стр. 101).

Из этой теоремы сразу же вытекает, что если n как угодно велико, но фиксировано, то всегда можно найти такую $f(x)$, что наименее уклоняющийся от нее тригонометрический полином порядка n удален от нее максимально на множестве, мера которого как угодно близка к 2π. Действительно, пусть $T(x)$ — любой тригонометрический полином порядка n; возьмем полосу ширины 2Δ около него (Δ — любая положительная величина) и разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на $2n+2$ отрезочков при помощи точек $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n+1}$, выбранных как угодно. Возьмем интервалы δ_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ с центрами в точках ξ_i и столь малые, что $\sum_{i=1}^{2n+1} \delta_i < \varepsilon$, где ε наперед задано.

Пусть теперь $f(x) = T(x) - \Delta$ левее δ_1, $f(x) = T(x) + \Delta$ между δ_1 и δ_2, $f(x) = T(x) - \Delta$ между δ_2 и δ_3 и т. д., т. е. $f(x)$ вне всякого δ_i совпадает попеременно то с $T(x) - \Delta$, то с $T(x) + \Delta$, а в интервалах δ_i мы ее проинтерполируем линейно. Тогда $f(x)$ непрерывна и $T(x)$ — наименее уклоняющийся от нее полином порядка n, так как условия теоремы Чебышева здесь удовлетворены, но, кроме того, то множество, где уклонение $T(x)$ от $f(x)$ достигает своего максимума по абсолютной величине, имеет меру $> 2\pi - \varepsilon$.

Однако эта конструкция удалась при n фиксированном. Если взять некоторую функцию $f(x)$ и рассматривать для всех целых n полиномы $T_n(x)$, которые наименее от нее уклоняются, то можно вопрос ставить так: не должна ли мера того множества, где $|f(x) - T_n(x)|$ достигает своего максимума Δ_n, стать равной нулю, как только n станет достаточно большим? Этот вопрос, повидимому, остается открытым. Проблема о метрических свойствах наилучших приближений представляет значительный интерес и еще очень мало изучена.

[216] **К вопросу 29.** В настоящее время известно, что существуют такие тригонометрические ряды, даже сходящиеся к нулю почти всюду. Первый пример такого ряда был построен Д. Е. Меньшовым. По поводу этой проблемы см. примечание 138 к диссертации Н. Н. Лузина.

[217] **К вопросу 30.** Насколько нам известно, ответа на этот вопрос в математической литературе нет. Существуют оценки для коэффициентов Фурье от ограниченной функции, но нет точной величины содержащего их интервала, нет также и точной величины для наибольшего по модулю коэффициента Фурье. Имеются работы, в которых дается оценка для коэффициентов a_n, b_n, если a_0, a_1, $b_1, \ldots, a_{n-1}$, b_{n-1} уже даны и функция $f(x)$ ограничена. Но нет никаких окончательных результатов.

[218] **К вопросу 31.** Этот вопрос решен работой Карлемана (1), доказавшего, что существует непрерывная функция, для которой ряд

$$\sum a_n^\sigma + b_n^\sigma$$

расходится при любом $\sigma < 2$ (см. также Зигмунд (1), стр. 122). Таким образом нижняя грань таких σ есть число 2 даже для непрерывных функций.

[219] **К вопросу 32.** Ответом на этот вопрос могла бы служить теорема Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (1) (стр. 65). Для того чтобы существовала измеримая функция $f(t)$, удовлетворяющая соотношениям

$$-L \leqslant f(t) \leqslant L,$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt}\, dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-2\pi L \leqslant c_0 \leqslant 2\pi L$$

и чтобы была ненегативна[1]) на окружности последовательность γ_0, γ_1, $\gamma_2, \ldots$, определяемая с помощью разложения

$$\exp\left\{\frac{i}{2L}\left(\frac{c_0}{2}+c_1z+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots\right)\right\}=$$
$$=\gamma+\gamma_1z+\ldots+\gamma_{n-1}z^{n-1}+\ldots,$$
$$\gamma_0=\gamma+\bar{\gamma}=2\cos\frac{c_0}{4L}.$$

Пользуясь теоремой Каратеодори-Теплица, доказанной в этой же книге Ахиезера и Крейна (стр. 48), можно было бы выразиться еще так: необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$, определяемая рядом $\gamma+\gamma_1z+\ldots+\gamma_nz^n+\ldots$, была регулярна в круге $|z|<1$ и имела положительную вещественную часть.

Однако вряд ли эта теорема может рассматриваться как ответ на вопрос Н. Н. Лузина. Здесь даны очень точные (хотя, к сожалению, непрозрачные) условия для того, чтобы заданная последовательность могла быть последовательностью коэффициентов Фурье (комплексных) от ограниченной функции. Повидимому, Н. Н. Лузин искал условий, аналогичных теореме Фишера-Рисса (сходимость $\sum a_n^2+b_n^2$ влечет то, что $f(x)$ с интегрируемым квадратом, и наоборот). Такие условия вряд ли возможно найти для ограниченных функций, раз мы знаем (см. примечание к проблеме 31), что даже для непрерывной функции может случиться, что ряд $\sum|a_n^\sigma|+|b_n^\sigma|$ расходится при любом $\sigma<2$.

Заметим еще, что если бы искомое условие существовало, то во всяком случае — не в терминах малости абсолютных величин коэффициентов ряда Фурье. В самом деле, как показал сам Н. Н. Лузин (см. его диссертацию в настоящем издании, стр. 227), непрерывная функция может иметь сопряженную функцию всюду разрывной и всюду неограниченной, а между тем, если a_n и b_n — коэффициенты Фурье для этой непрерывной функции, то для сопряженной это будут b_n и $-a_n$.

Отметим еще, что имеет место такая теорема (см. Зигмунд ([1]), стр. 83): для того чтобы некоторый тригонометрический ряд был рядом Фурье от ограниченной функции, необходимо и достаточно

[1]) Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется ненегативной на окружности $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, если при любом n из соотношений

$$\sum_{k=-n}^{k=n} A_kz^k\not\equiv 0 \quad\text{и}\quad \sum A_ke^{ikt}\geqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

всегда следует

$$\sum_{k=-n}^{k=n} A_ka_k\geqslant 0,\ \text{здесь}\ a_{-k}=\bar{a}_k \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

чтобы фейеровские суммы $\sigma_n(x)$ (т. е. средние арифметические частных сумм данного ряда) были ограничены в своей совокупности. Правда, это не есть условие, выраженное только через коэффициенты ряда, но все же — способ заключать по виду ряда об ограниченности его суммы.

[220] **К вопросу 33.** Что касается $\int\limits_0^{2\pi} f^4(x)\,dx$, то этот вопрос решить очень легко, так как если ряд Фурье для $f^2(x)$ имеет вид

$$\frac{A_0}{2}+\sum A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

то в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^4(x)\,dx = \frac{A_0^2}{2}+\sum A_n^2 + B_n^2,$$

а сами числа A_n и B_n можно найти, отправляясь от a_n и b_n и пользуясь классическими формулами для коэффициентов Фурье от произведения двух функций, где за сомножители (одинаковые в данном случае) принята сама $f(x)$. Формула будет выглядеть сложно, но будет вполне точной. Вероятно, Н. Н. Лузин и имел в виду, что для степеней $f(x)$ вычисления хотя и громоздки, но могут быть доведены до конца, поэтому и предлагал рассмотреть более сложные функции. Мы не знаем, занимался ли кто-либо такой проблемой.

[221] **К вопросу 34.** Здесь не очень ясно, что Н. Н. Лузин разумеет под абсолютной интегрируемостью, так как обычно для интегрируемости по Лебегу он употреблял термин «суммируемость». Однако в проблеме 36 говорится «абсолютно интегрируема в смысле Лебега». Если и здесь понимать эти слова так же, то можно сказать, что положительный ответ на поставленный вопрос был дан самим Н. Н. Лузиным в его диссертации (в настоящем издании, стр. 227).

[222] **К вопросу 35.** Если здесь слова «абсолютно интегрируемой» понимать в смысле «суммируемой», то вопрос вполне понятен: известно, что для ряда Фурье-Лебега

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

необходимо имеем, что ряд $\sum \frac{b_n}{n}$ сходится (см., например, Зигмунд (1), стр. 33). Естественно спросить, можно ли высказать что-либо аналогичное для коэффициентов при $\cos nx$, а не при $\sin nx$.

Ответ на поставленный Н. Н. Лузиным вопрос оказывается положительным. Действительно, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

есть ряд Фурье-Лебега, и однако $\sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится (см. по поводу этого ряда Зигмунд ([1]), стр. 113).

[223] **К вопросу 36.** Этот вопрос есть уточнение вопроса 11. Здесь добавляется требование конечности функции $f(x)$. Мы покажем, что ответ на этот вопрос является отрицательным. С этой целью мы заметим, что уже Данжуа построил пример тотализуемой функции, у которой коэффициенты Фурье-Данжуа не стремятся к нулю (см. Данжуа ([2])). В его примере, однако, рассматриваемая функция не была точной производной. Несколько видоизменяя его построение, мы дадим сейчас пример функции $f(x)$ всюду конечной, являющейся точной производной и такой, что ее коэффициенты Фурье-Данжуа не стремятся к нулю.

Пример функции всюду конечной, являющейся точной производной и такой, что ее коэффициенты Фурье-Данжуа не стремятся к нулю.

Для построения этого примера определим последовательность нечетных целых чисел k_n так, чтобы

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} > e^{4n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и положим

$$a_1 = \pi; \quad a_n = \frac{\pi}{2k_n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Таким образом числа a_n, монотонно убывая, стремятся к нулю. Положим

$$f(x) = 0 \qquad \text{на } [-\pi, 0],$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos p_n x \qquad \text{на } [a_{n+1}, a_n] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$p_n = k_n k_{n+1}^2 p_n',$$

а числа p_n' будут определены рекуррентно, пока же мы требуем от них только, чтобы они были целые и нечетные.

В силу нечетности всех чисел k_n и p_n' имеем для $n = 2, 3, \ldots$

$$\cos p_n a_n = \cos k_{n+1}^2 p_n' \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos p_n a_{n+1} = \cos k_n k_{n+1} p_{n+1}' \frac{\pi}{2} = 0,$$

а потому $f(x)=0$ во всех a_n $(n=2, 3, \ldots)$, и таким образом ясно, что она непрерывна на $[-\pi, \pi]$ всюду, кроме точки $x=0$, как бы мы ни определили числа p'_n, лишь бы они были нечетны.

Будем теперь определять числа p'_n. Для этого прежде всего заметим, что если $u(x)$ — любая суммируемая на (α, β), то

$$\int\limits_{\alpha'}^{\beta'} u(x)\cos px\,dx \to 0 \qquad \text{при} \quad p\to\infty$$

равномерно относительно α' и β', лежащих в (α, β), и, с другой стороны,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x)\cos^2 px\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x)\,[1+\cos 2px]\,dx \to \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x)\,dx.$$

Раз так, то p'_1 можно выбрать так, чтобы для соответствующего p_1 выполнялись неравенства

$$\left|\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\cos p_1 x}{x}\,dx\right| < 1$$

для любых α_2 и α_1 между a_2 и a_1 и

$$\int\limits_{a_2}^{a_1} \frac{\cos^2 p_1 x}{x}\,dx > \frac{1}{4}\int\limits_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{x};$$

если $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{n-1}$ уже выбраны (а значит, и $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ тем самым уже определены), то p'_n мы будем подбирать столь большим, чтобы были удовлетворены следующие условия:

1° $$\left|\int\limits_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} \frac{\cos p_n x}{x}\,dx\right| < \frac{1}{n^2}$$

для любых α_{n+1} и α_n между a_{n+1} и a_n,

2° $$\left|\int\limits_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\cos^2 p_n x}{x}\,dx\right| > \frac{1}{4}\int\limits_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{4}\ln\frac{k_{n+1}}{k_n} > n$$

(в силу условия, наложенного на числа k_n),

$$3^\circ \qquad \left|\sum_{h=1}^{n-1}\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n}\frac{1}{x}\cos p_h x\cos p_n x\,dx\right|<1$$

для любых α_{n+1} и α_n между a_{h+1} и a_h,

$$4^\circ \qquad \left|\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n}\frac{1}{x}\cos p_h x\cos p_n x\,dx\right|<\frac{1}{n^2}$$

для всех $h<n$.

В силу сделанных замечаний можно добиться удовлетворения всех этих условий, если только взять p'_n (а следовательно, тем самым и p_n) достаточно большим.

Докажем, что построенная нами функция $f(x)$ тотализуема.

Действительно, мы уже видели, что если $0<\alpha<a_1$, то $f(x)$ непрерывна на (α, a_1). Значит, она суммируема на (α, a_1). Если $a_{m+1}\leqslant\alpha\leqslant a_m$, то

$$\int_\alpha^{a_1} f(x)\,dx=\int_\alpha^{a_m} f(x)\,dx+\int_{a_m}^{a_{m-1}} f(x)\,dx+\ldots+\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx.$$

Правая часть заведомо стремится к пределу при $m\to\infty$, так как в силу условия 1° первый член суммы стремится к нулю, а остальные образуют абсолютно сходящийся ряд. Значит, $f(x)$ тотализуема на $(0, a_1)$, а значит, и на $[-\pi, \pi]$.

Пусть

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx,$$

где интеграл понимается в смысле Данжуа. Докажем, что $F'(x)=f(x)$ в каждой точке. Это очевидно для $-\pi\leqslant x<0$. Если $\alpha>0$, то

$F(x)=F(\alpha)=\int_\alpha^x f(x)\,dx$, но $f(x)$ непрерывна на (α, π), поэтому

ясно, что для $x>0$ имеем также $F'(x)=f(x)$. Остается доказать, что и в точке O имеем $F'(0)=f(0)$. Так как $f(0)=0$ и $F(0)=0$, то, значит, мы должны доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=0.$$

При этом, так как $F(x)=0$ на $(-\pi, 0)$, то достаточно рассмотреть поведение $\frac{F(x)}{x}$ при $x \to 0$ справа. Пусть $\pi > x > 0$ задано. Выберем m так, чтобы $a_{m+1} \leqslant x < a_m$. Для любого n мы имеем

$$F(a_n) - F(a_{n+1}) = \int\limits_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int\limits_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\cos p_n x}{x}\,dx.$$

Но по второй теореме о среднем имеем

$$\left| \int\limits_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{\cos p_n x}{x}\,dx \right| \leqslant \left| \frac{1}{a_{n+1}} \int\limits_{a_{n+1}}^{\xi} \cos p_n x\,dx \right|,$$

где $a_{n+1} < \xi < a_n$, откуда

$$|F(a_n) - F(a_{n+1})| < \frac{1}{a_{n+1}} \frac{2}{p_n} = \frac{4k_{n+1}}{\pi p_n' k_n k_{n+1}^2} = \frac{4}{\pi p_n' k_n k_{n+1}},$$

и аналогично

$$|F(x) - F(a_{m+1})| < \frac{1}{a_{m+1}} \frac{2}{p_m} = \frac{4}{\pi p_m' k_m k_{m+1}}.$$

Тогда можно написать

$$F(x) = [F(x) - F(a_{m+1})] + [F(a_{m+1}) - F(a_{m+2})] + \ldots$$
$$\ldots + [F(a_n) - F(a_{n+1})] + \ldots,$$

причем ряд справа абсолютно сходится. Поэтому

$$|F(x)| < \frac{4}{\pi} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p_n' k_n k_{n+1}}.$$

Следовательно, при $a_{m+1} \leqslant x < a_m$ имеем

$$\left| \frac{F(x)}{x} \right| < \frac{4}{\pi a_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p_n' k_n k_{n+1}} \leqslant \frac{8k_{m+1}}{\pi^2 k_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{p_n' k_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8}{\pi^2 p_m'} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{k_n}.$$

В силу условия $\frac{k_{n+1}}{k_n} > e^{4n}$ ясно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ сходится, а потому правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$ и, значит,

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

Итак, мы доказали, что $F'(x) = f(x)$ всюду. Кроме того, мы знаем, что $f(x)$ всюду конечна. Остается доказать, что ее коэффициенты Фурье-Данжуа не стремятся к нулю.

Чтобы убедиться в этом, мы докажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos p_n x \, dx = +\infty.$$

С этой целью заметим, что на $(-\pi, 0)$ имеем $f(x) = 0$. Оценим величину тотала между α и $a_n = \pi$, где α — любое положительное. Так как впоследствии α будет стремиться к 0, мы можем сразу предположить, что оно меньше, чем $a_n + 1$. Пусть m таково, что $a_{m+1} \leqslant \alpha < a_m$, тогда $m > n$; разбиваем тотал на части: части, относящиеся к (a_h, a_{h-1}), где $h \leqslant n$, таковы, что в них под знаком тотала стоит $\frac{1}{x} \cos p_h x \cos p_n x$ и в силу условия 3° ясно, что на (a_n, a_n) тотал будет < 1 по абсолютной величине. Тотал от $f(x) \cos p_n x$, т. е. от $\frac{1}{x} \cos^2 p_n x$, на (a_{n+1}, a_n) превосходит n в силу условия 2°. Наконец, если $h \geqslant n+1$, то тотал на (a_{n+1}, a_n) от $f(x) \cos p_n x = \frac{1}{x} \cos p_h x \cos p_n x$ будет $< \frac{1}{h^2}$ по абсолютной величине, а на (α, a_m) он $< \frac{1}{m^2}$ по абсолютной величине (в силу условия 4°). Таким образом тотал от $f(x) \cos p_n(x)$ между α и π оказывается больше, чем

$$n - 1 - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = n - C,$$

где C — некоторая постоянная. Так как α — любое положительное, то отсюда следует, что тотал от $-\pi$ до $+\pi$ неограниченно растет вместе с n.

[224] **К вопросу 37.** Эта проблема связана с проблемой суммируемости методом Пуассона рядов Фурье-Данжуа. Действительно, если $f(x)$ есть точная производная, то она тотализуема и коэффициенты, определенные по формулам, указываемым Н. Н. Лузиным в проблеме 36, являются ее коэффициентами Фурье-Данжуа. О суммируемости рядов Фурье-Данжуа см. примечание 104 к диссертации Н. Н. Лузина.

Мы затрудняемся сказать, какую теорему Пикара здесь имел в виду Н. Н. Лузин; мы склонны думать, что здесь, вероятно, речь должна итти о теореме Фату о поведении интеграла Пуассона при приближении точки к периферии круга.

[225] **К вопросу 38.** Этот вопрос был поставлен до введения интеграла Данжуа. Хорошо известно, что всякая точная производная, если она всюду конечна, интегрируется процессом Данжуа, и при этом неопределенный интеграл Данжуа совпадает с ее точной примитивной.

[226] **К вопросу 39.** Мы не знаем, что̀ здесь Н. Н. Лузин назвал своей теоремой относительно признака сходимости Таубера-Юнга, и сделаем только попытку расшифровать эту фразу. Как известно, Н. Н. Лузин получил необходимый и достаточный признак сходимости рядов Фурье от функций с интегрируемым квадратом (см. § 65 его диссертации). Из этого признака он вывел (см. § 69 там же), что если $f(x)$ с интегрируемым квадратом, то интеграл

$$\int_0^\pi \frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha$$

(существующий для почти всех x) есть функция с интегрируемым квадратом. Повидимому, поставленный вопрос следует понимать как желание получить это предложение без тригонометрических рядов. Позже это и было сделано самим Н. Н. Лузиным (см. его статью «Об одном особом интеграле», стр. 287 настоящего издания). Очевидно, сначала он еще не ставил проблему для произвольной $f(x)$ с интегрируемым квадратом, а наложил на нее некоторые специальные ограничения.

Остается вопрос, почему здесь упомянуты Таубер и Юнг. Что касается Таубера, то мы затрудняемся дать какое-либо объяснение. Имя Юнга могло появиться, как нам кажется, в связи с такой теоремой: если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то необходимым и достаточным условием для сходимости ряда, сопряженного с ее рядом Фурье в точке x, является существование интеграла

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{\pi}\int_h^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt\right],$$

представляющего тогда сумму этого ряда (доказательство этой теоремы Юнга можно найти в книге Зигмунда (1), стр. 32).

Для удобства перефразируем эту теорему так: допустим, что функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом такова, что ряд, сопряженный с ее рядом Фурье, представляет собой ряд Фурье от функции $g(x)$ с ограниченным изменением. Тогда ряд Фурье от $f(x)$ сходится во всякой точке, в которой существует интеграл

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

или, что все равно, интеграл

$$\int_0^\pi \frac{g(x+\alpha)-g(x-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha.$$

Предположим на одно мгновение, что теорема Юнга осталась бы справедливой при одной лишь гипотезе интегрируемости квадрата от $f(x)$ (и, следовательно, интегрируемости квадрата от $g(x)$). Тогда, так как по теореме Н. Н. Лузина последний интеграл существует почти всюду, получилось бы, что ряд Фурье от $f(x)$ почти всюду сходится. Эту теорему, как мы уже не раз говорили, Н. Н. Лузин считал чрезвычайно правдоподобной и свой признак сходимости рассматривал как шаг на пути к ее доказательству. Весьма вероятно, что поэтому он и выразился об этом результате как о теореме, относящейся к признаку сходимости Юнга.

[227] **К вопросу 40.** Повидимому, здесь имеется в виду следующее. Как известно, Бэр дал необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторая функция была функцией первого класса. Всякая точная производная есть функция первого класса, но обратное, разумеется, неверно. Н. Н. Лузин хотел найти свойство точной производной, столь же характеризующее ее, как теорема Бэра полностью характеризует функции первого класса.

В личных беседах Н. Н. Лузин высказал следующую гипотезу: если $f(x)$ есть функция первого класса и удовлетворяет свойству Дарбу на некотором $[a, b]$ (см. о свойстве Дарбу примечание 78 к диссертации Н. Н. Лузина), то можно найти такую монотонную функцию $x=\varphi(t)$, $\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$, что функция $f[\varphi(t)]=f_1(t)$ уже является точной производной. Если такая теорема верна, она в известном смысле решает вопрос о характеристическом свойстве точной производной.

Что касается регулярного процесса для нахождения примитивной по точной производной, то этот вопрос, как известно, разрешен работами Данжуа.

[228] **К вопросу 41.** Поставленный вопрос можно иначе сформулировать так: пусть

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,\rho^n$$

есть гармоническая функция, ограниченная снизу внутри единичного круга. Если ее радиальные предельные значения существуют почти всюду на единичной окружности и определяют функцию $f(\theta)$, должна ли эта $f(\theta)$ быть суммируемой на $[0, 2\pi]$?

Покажем, что ответ на этот вопрос является положительным, даже если не предполагать, что коэффициенты ряда стремятся к нулю.

В самом деле, в силу сделанных предположений существует такая постоянная a, что

$$u(\rho, \theta) > a$$

всюду внутри единичного круга.

Полагая

$$v(\rho, \theta) = u(\rho, \theta) - a,$$

видим, что $v(\rho, \theta)$ — положительная гармоническая функция внутри единичного круга, а потому она в этом круге может быть представлена интегралом Пуассона-Стильтьеса, т. е.

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \, d\psi(t),$$

где $\psi(t)$ есть ограниченная неубывающая функция на $[0, 2\pi]$ (см. И. И. Привалов ([3]), стр. 57).

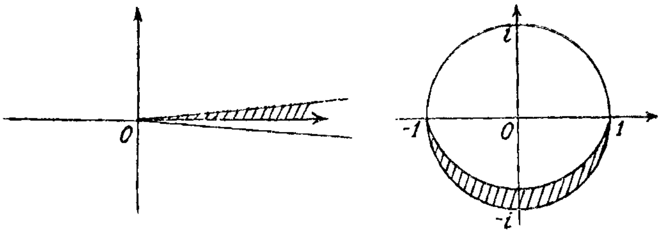
В таком случае $v(\rho, \theta)$ имеет почти всюду на единичной окружности радиальные предельные значения, равные $\psi'(t)$. Следовательно, при выполнении упомянутых выше условий для функции $u(\rho, \theta)$ предельная функция, равная $f(\theta) = \psi'(\theta) + a$, будет всегда суммируемой, а это и надо было доказать.

[229] **К вопросу 42.** К этому вопросу Н. Н. Лузин неоднократно возвращался в своей диссертации. Прежде всего доказав, что для всякой измеримой функции, конечной почти всюду, существуют примитивные (и притом их бесконечное множество), он стремился из пучка примитивных выделить одну, которую было бы естественно назвать неопределенным интегралом. Если бы удалось найти регулярный процесс, выделяющий такую единственную примитивную (причем она должна совпадать с интегралом Лебега или Данжуа в том случае, когда заданная функция суммируема или тотализуема), то числа a_n и b_n можно было бы определять по формулам Фурье, понимая интеграл в смысле этой единственной примитивной. В попытках выделить единственную примитивную Н. Н. Лузин ввел понятие функции с нулевым изменением. Однако положительного результата здесь не получилось. См. об этом подробнее в комментариях к диссертации Н. Н. Лузина, комментарии 70 и 73. В комментарии 76 мы указываем результаты В. А. Ходакова, который, продолжая мысль Н. Н. Лузина, получил для некоторого класса функций единственную примитивную, обладающую свойствами «неопределенного интеграла».

Далее Н. Н. Лузин предлагал также ставить функции $f(x)$ в соответствие тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду, если такой существует и только один. В этом случае числа a_n и b_n определялись бы как коэффициенты этого ряда. Но теперь мы знаем, что хотя для всякой $f(x)$, измеримой и конечной почти всюду, существует почти всюду сходящийся к ней тригонометрический ряд (см. примечание 137 к диссертации Н. Н. Лузина), но он заведомо не один (см. примечание 138 к диссертации Н. Н. Лузина). Вопрос о существовании регулярного процесса, выделяющего из всех рядов, сходящихся почти всюду к данной функции, некоторый единственный ряд, в известном смысле наиболее тесно с ней связанный, остается открытым[1]).

[230] **К вопросу 43.** Ответ на поставленный вопрос является положительным. Действительно, имеет место следующая теорема (см. Зигмунд ([1]), стр. 275): если $\underline{\lim}\, S_n(x)$ и $\overline{\lim}\, S_n(x)$ конечны всюду, за исключением некоторого счетного множества E, и если $\underline{\lim}\, S_n(x) \geqslant g(x)$, где $g(x)$ суммируема, то рассматриваемый тригонометрический ряд является рядом Фурье.

В частности, в нашем случае $\underline{\lim}\, S_n(x) = S(x) \geqslant 0$, а потому ряд является рядом Фурье, но его сумма есть $S(x)$; значит, она суммируема.



a) *b*)

Черт. 14.

[231] **К вопросу 44.** Такую гармоническую функцию действительно можно построить[2]). Для этого воспользуемся одним результатом Миттаг-Леффлера: существует целая функция $E(z)$ бесконечного порядка, которая стремится к нулю при $z \to \infty$, если из плоскости исключить сколь угодно малый угол с биссектрисой вдоль положительной части действительной оси (черт. 14, *a*). Ее мнимая часть $v(x, y)$ есть гармоническая функция в верхней полуплоскости, стремящаяся к нулю при приближении точки $z = x + iy$ к любой конечной точке действительной оси по всем путям, не лежащим в сколь угодно малом углу, прилегающем к положительной части действительной оси.

---

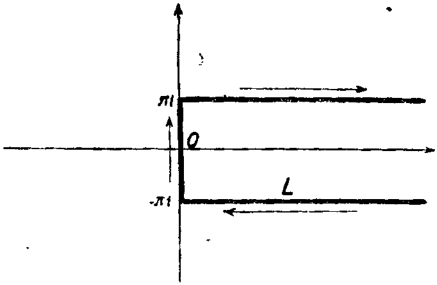
[1]) Естественно было бы потребовать, чтобы коэффициенты этого ряда были линейными функционалами от его суммы.

[2]) Нижеуказанное построение принадлежит А. И. Маркушевичу.

Если произвести замену переменного

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i},$$

превращающую верхнюю полуплоскость в единичный круг, то $v(x, y)$ перейдет в $v^*(\xi, \eta)$ — функцию, гармоническую в единичном круге и обладающую требуемым свойством. Действительно, при приближении точки ζ к любой точке окружности, кроме точки 1, по любым путям она стремится к нулю; при приближении ζ к 1 по любым путям, лежащим вне заштрихованного на черт. 14, *b* кусочка, который может быть сделан как угодно узким, она тоже стремится к нулю, т. е. при приближении к точке 1 по любому пути, не касательному к окружности, она стремится к нулю.



Черт. 15.

Что касается функции $E(z)$, то она может быть определена посредством интеграла типа Коши

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{e^t}}{t-z}\, dt,$$

где контур L изображен на черт. 15 (см. Полиа и Сеге [1], т. 1, стр. 141—142, задачи 158, 159, 160).

[232] **К вопросу 45.** Слова «принимает (в абсолютном смысле) значение», повидимому, надо понимать в смысле стремления к пределу по всем некасательным путям. Однако для решения поставленного вопроса достаточно предположить, что функция принимает значения в смысле перехода к пределу при $\rho \to 1$ и постоянном φ.

Слова «тригонометрический ряд

$$\int P(\rho, \varphi)\, d\varphi$$

сходится», очевидно, означают сходимость ряда, получаемого почленным интегрированием из ряда, изображающего $P(\rho, \varphi)$.

После этих разъяснений можно утверждать, что если $P(1, \varphi)$ есть точная производная, то поставленный Н. Н. Лузиным вопрос решается утвердительно.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала случай, когда $P(1, \varphi)$ — не только точная производная, но и суммируемая функция.

Докажем вспомогательное предложение: если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Абеля к конечной суммируемой функции $f(\varphi)$ на некотором интервале (φ_0, φ_1), то его можно интегрировать почленно на этом интервале.

В самом деле, на любом интервале (α', β'), лежащем целиком внутри (φ_0, φ_1), рассматриваемый ряд является равномерно равносходящимся с рядом Фурье от функции $f(\varphi)\lambda(\varphi)$, где $\lambda(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\lambda''(\varphi)$ для любого φ, причем $\lambda(\varphi) = 1$ для $\alpha' \leqslant \varphi \leqslant \beta'$ и $\lambda(\varphi) = 0$ вне (φ_0, φ_1) (см., например, Зигмунд (1), стр. 281, 282).

Но ряд Фурье от $f(\varphi)\lambda(\varphi)$ можно интегрировать почленно, а разность между заданным рядом и этим рядом Фурье сходится равномерно на (α', β'), значит, эту разность также можно интегрировать почленно на (α', β'), но (α', β') — любой интервал внутри (φ_0, φ_1), следовательно, наше утверждение доказано.

Из этой теоремы получаем: если ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Абеля к точной производной $P(1, \varphi)$ всюду на (φ_0, φ_1), то сумма ряда, получающегося из него почленным интегрированием, имеет производную, равную $P(1, \varphi)$ всюду на (φ_0, φ_1), а это и есть ответ на вопрос Н. Н. Лузина.

Если $P(1, \varphi)$ есть точная производная, всюду конечная на (φ_0, φ_1), но не суммируемая, предыдущее рассуждение сохраняет силу. Чтобы убедиться в этом, надо только заметить, что для интеграла Данжуа в узком смысле все теоремы локализации справедливы. Это утверждение (без доказательства) имеется у Зигмунда (1) на стр. 297.

[233] **К вопросу 46.** Благодаря личным беседам Н. Н. Лузина с Д. Е. Меньшовым удается расшифровать мысль, изложенную здесь лишь в виде намека. Речь идет о существовании или несуществовании ряда Фурье от непрерывной функции, расходящегося на множестве меры, большей нуля. Чтобы изучить этот вопрос, предполагалось заменить непрерывную $f(x)$ ступенчатой $f_n(x)$; для этой последней в силу разрывов первого рода имеет место явление Гибса[1]). Таким образом поведение $S'_n(x)$ вполне ясно. Следовало как-то оценить поведение $S_n(x)$, сравнивая его с поведением $S'_n(x)$, и придти к выводу (положительному или отрицательному) о сходимости ряда Фурье от непрерывной функции.

[234] **К вопросу 47.** Не совсем понятно, как именно Н. Н. Лузин представлял себе «восстановление» $U(x)$ в тех точках, где она не

---

[1]) См. по поводу явления Гибса, например, Зигмунд (1), стр. 180—182.

определена. Но постановка проблемы об определении $U(\xi_2)-U(\xi_1)$, если ξ_1 и ξ_2 — точки сходимости обинтегрированного ряда, совершенно ясная, и ответ можно найти в работах Данжуа. Мы уже говорили (см. примечания 3 и 149 к диссертации Н. Н. Лузина), что Данжуа полностью изучил свойства функций, определяемых всюду сходящимися тригонометрическими рядами, и указал регулярный процесс для отыскания для них «интеграла» (так называемая тотализация с двумя индексами). Этот процесс и позволит определить для любых двух точек x_1 и x_2 величину $U(x_1)-U(x_2)$, так как она совпадает с разностью $F(x_1)-F(x_2)$, где $F(x)$ — функция, найденная процессом тотализации с двумя индексами.

[235] **К вопросу 48.** Этот вопрос, очевидно, был поставлен после появления заметок Данжуа в Comptes Rendus Парижской Академии, где он впервые дал свое определение интеграла, но до появления большого мемуара Данжуа ([2]), где он уже ответил положительно на поставленный здесь вопрос.

[236] **К вопросу 49.** Рядам указанного вида посвящены §§ 52—58 диссертации Н. Н. Лузина. Считая там x действительным, Н. Н. Лузин доказал, что $F(x)$ имеет $f(x)$ своей производной почти всюду, если $\sum|A_n|$ достаточно быстро сходится. К этому можно добавить, что если x_n считать действительными, а x заменить комплексным переменным z, то ряд, изображающий функцию $F(z)$, как легко видеть, сходится равномерно в любой ограниченной замкнутой области, не содержащей точек на действительной оси. В таком случае, как известно (см., например, Маркушевич ([1]), гл. III, § 4, стр. 201), ряд, изображающий функцию $F(z)$, можно дифференцировать почленно в любой точке z, не лежащей на действительной оси. Следовательно, для любой такой точки справедливо равенство $F'(z)=f(z)$, причем $f(z)$ голоморфна всюду вне действительной оси.

[237] **К вопросу 50.** Как известно, Хаар ([1]) построил ортогональную систему функций, обладающую тем свойством, что ряд Фурье от любой непрерывной функции по этой системе сходится равномерно к этой функции, а для любой суммируемой функции ряд Фурье от этой функции по системе Хаара сходится к ней почти всюду (определение системы Хаара и доказательство обоих этих предложений можно найти также в книге Качмажа и Штейнгауза ([1]), стр. 121—122).

Поставленная здесь Н. Н. Лузиным проблема, очевидно, основана на следующей мысли: можно надеяться в силу хороших свойств системы Хаара, что любую функцию $f(x)$, являющуюся суммой почти всюду сходящегося тригонометрического ряда, удается разложить в почти всюду сходящийся ряд по системе Хаара. Если бы среди этих рядов только один после почленного интегрирования оказался почти всюду сходящимся, то его сумму следовало бы считать за наиболее «естественный» неопределенный интеграл от $f(x)$. Этим решался бы много раз поднимаемый Н. Н. Лузиным вопрос о выделении «неопределенного интеграла» из пучка примитивных для данной функции.

Посмотрим, как можно ответить на эти вопросы. Вопрос о разложимости функций по системе Хаара решается положительно в наиболее общем виде. Именно можно доказать следующее предложение (аналогичное теореме Меньшова, упоминаемой в примечании 137 к диссертации Н. Н. Лузина).

Теорема. Для всякой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 1]$, существует ряд по системе Хаара, сходящийся к ней почти всюду.

Доказательство. По теореме Лузина (см. стр. 78 настоящей книги) можно найти непрерывную $F(x)$, такую, что

$$F'(x) = f(x) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Условимся обозначать через $\Delta(F, \delta)$ разность $F(b) - F(a)$, если $\delta = (a, b)$. Пусть $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$ и $\bar{\delta}_n^{(k)}$ — те интервалы, где функция Хаара $\chi_n^{(k)}$ принимает соответственно значения $\sqrt{2^n}$ и $-\sqrt{2^n}$. Положим

$$c_n^{(k)} = \sqrt{2^n}\left[\Delta\left(F, \overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}\right) - \Delta\left(F, \bar{\delta}_n^{(k)}\right)\right] \tag{1}$$

для $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ и для всех n и докажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x) \tag{2}$$

сходится к $f(x)$ почти всюду.

Чтобы убедиться в этом, расположим все функции Хаара в одну последовательность, как это делается всегда, т. е. в таком порядке:

$$\chi_0^0, \chi_0^1, \chi_1^1, \chi_1^2, \ldots, \chi_n^1, \chi_n^2, \ldots, \chi_n^{2^n}. \tag{3}$$

Пусть m задано. Рассмотрим первые m функций последовательности (3) и обозначим через n наибольшее из тех целых чисел ν, для которых $\chi_\nu^{(k)}$ встречаются среди этих первых m функций хотя бы при одном номере k.

Построим ступенчатую функцию $f^*(x)$, определяемую так:

$$f^*(x) = 2^{n+1}\Delta\left(F, \overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}\right) \text{ на } \overset{+}{\delta}{}_n^{(k)} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n,$$

$$f^*(x) = 2^{n+1}\Delta\left(F, \bar{\delta}_k^{(n)}\right) \text{ на } \bar{\delta}_n^{(k)} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

Таким образом $f^*(x)$ определена всюду на $[0, 1]$, кроме конечного числа точек. Мы сейчас докажем, что если $s_m(x)$ есть сумма m первых членов ряда (2), а $s_m^*(x)$ — сумма m первых членов ряда Фурье от $f^*(x)$ по системе Хаара, то

$$s_m(x) = s_m^*(x). \tag{4}$$

Для этого достаточно убедиться, что если

$$\gamma_s^{(k)} = \int_0^1 f^*(x)\,\chi_s^{(k)}\,dx,$$

то для всех $s = 1, 2, \ldots, n$ и для любого k, $1 \leqslant k \leqslant 2^s$ мы имеем $\gamma_s^{(k)} = c_s^{(k)}$.

Сначала убедимся в этом для $s = n$. Имеем

$$\gamma_n^{(k)} = \int_0^1 f^*(x)\,\chi_n^{(k)}\,dx = \sqrt{2^n}\int_{\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}} f^*(x)\,dx - \sqrt{2^n}\int_{\overset{-}{\delta}{}_n^{(k)}} f^*(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2^n}\cdot 2^{n+1}\Delta\left(F, \overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}\right)\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)} - \sqrt{2^n}\Delta\left(F, \overset{-}{\delta}{}_n^{(k)}\right)\overset{-}{\delta}{}_n^{(k)}\cdot 2^{n+1} =$$

$$= \sqrt{2^n}\,[\Delta(F, \overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}) - \Delta(F, \overset{-}{\delta}{}_n^{(k)})] = c_n^{(k)},$$

так как длина $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)} =$ длина $\overset{-}{\delta}{}_n^{(k)} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Пусть теперь $s < n$. Всякий интервал $\overset{+}{\delta}{}_s^{(j)}$ или $\overset{-}{\delta}{}_s^{(j)}$ распадается целиком на интервалы вида $\delta_n^{(k)}$ (если мы опускаем знак $+$ или $-$ вверху, это значит, что речь идет об интервале вида $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$ или $\overset{-}{\delta}{}_n^{(k)}$ безразлично). Но для всякого $\delta_n^{(k)}$ имеем по построению $f^*(x)$:

$$\int_{\delta_n^{(k)}} f^*\,dx = \Delta(F, \delta_n^{(k)}),$$

откуда ясно, что

$$\int_{\delta_s^{(j)}} f^*\,dx = \Delta(F, \delta_s^{(j)}),$$

так как левая часть распадается на сумму конечного числа интервалов, на каждом из которых интеграл от f^* равен приращению $F(x)$ на том же интервале, а сумма приращений на всех интервалах вида $\delta_n^{(k)}$, входящих в некоторый $\delta_s^{(j)}$, равна приращению F на этом $\delta_s^{(j)}$. Но тогда

$$\gamma_s^{(j)} = \int_0^1 f^*\chi_s^{(j)}\,dx = \sqrt{2^s}\int_{\overset{+}{\delta}{}_s^{(j)}} f^*\,dx - \sqrt{2^s}\int_{\overset{-}{\delta}{}_s^{(j)}} f^*\,dx =$$

$$= \sqrt{2^s}\,[\Delta(F, \overset{+}{\delta}{}_s^{(j)}) - \Delta(F, \overset{-}{\delta}{}_s^{(j)})] = c_s^{(j)},$$

а это и надо было установить.

Итак,

$$s_m(x) = \overset{*}{s}_m(x).$$

Однако известно (см. Хаар ([1]), стр. 367), что если $\varphi(t)$ суммируема и мы остановили ее разложение в ряд Фурье по системе Хаара на члене, содержащем $\chi_n^{(k)}$, то соответствующая частная сумма, пусть $\tilde{s}_m(x)$, для любой внутренней точки x интервала $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$ или $\bar{\delta}_k^{(n)}$ выражается так:

$$\tilde{s}_m(x) = \frac{1}{\delta_k^{(n)}} \int\limits_{\delta_k^{(n)}} \varphi(x)\,dx,$$

где $\delta_k^{(n)} = \overset{+}{\delta}{}_k^{(n)}$ или $\bar{\delta}_k^{(n)}$.

В частности, если положить $\varphi(x) = f^*(x)$, то у нас получится

$$\overset{*}{s}_m(x) = \frac{1}{\delta_k^{(n)}} \int\limits_{\delta_k^{(n)}} f^*(x)\,dx = f^*(x),$$

так как $f^*(x)$ постоянна на каждом $\delta_k^{(n)}$.

Итак,

$$\overset{*}{s}_m(x) = f^*(x) \tag{5}$$

всюду, кроме точек, являющихся концами какого-либо $\delta_k^{(n)}$, т. е. кроме конечного числа точек.

Но так как длина $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$ = длина $\bar{\delta}_n^{(k)} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$, то

$$f^*(x) = \frac{\Delta(F, \delta_n^{(k)})}{\delta_n^{(k)}}$$

как для $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$, так и для $\bar{\delta}_n^{(k)}$.

Пусть x — любая точка $[0, 1]$, в которой $F'(x) = f(x)$. Если, кроме того, она не есть двоично рациональная, то она является внутренней для интервалов вида $\delta_\nu^{(k)}$ при всяком ν и $k = 1, 2, \ldots, 2^\nu$. Пусть она принадлежит последовательности интервалов $\delta_1^{k_1}, \delta_2^{k_2}, \ldots, \delta_\nu^{k_\nu}, \ldots$ Тогда

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\Delta(F, \delta_\nu^{(k_\nu)})}{\delta_\nu^{(k_\nu)}} = f(x),$$

а так как с ростом m растет и n, которое было определено нами в начале доказательства, то

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x), \tag{6}$$

и это справедливо во всякой точке x, где $F'(x) = f(x)$, которая не является двоично рациональной, т. е. почти всюду. Итак, ряд (2) почти всюду сходится к $f(x)$.

Замечание. Так как мы могли выбрать любую из примитивных функций $f(x)$, а они не должны отличаться только на константу, то таких рядов (2) можно найти бесконечное множество.

Ответ на второй из вопросов Н. Н. Лузина, т. е. не будет ли среди этих рядов только один обладать тем свойством, что после его почленного интегрирования получится ряд, сходящийся почти всюду, является отрицательным.

Действительно, докажем, что любой из рядов вида (2), будучи почленно проинтегрирован, сходится всюду.

В самом деле, пусть $\sigma_m(x)$ есть m-я частная сумма проинтегрированного ряда (2). Тогда

$$\sigma_m(x) = \int_0^x s_m(x)\,dx.$$

Предполагая $F(0) = 0$, докажем, что

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) \tag{7}$$

всюду на $[0, 1]$.

В самом деле, выбирая n так, как это было сделано при доказательстве сходимости ряда (2), и сохраняя прежнее определение для $f^*(x)$, мы знаем, что $s_m(x) = f^*(x)$, а потому

$$\sigma_m(x) = \int_0^x f^*(x)\,dx.$$

Пусть $a_n^{(k)}$ — левый конец того интервала вида $\overset{+}{\delta}{}_n^{(k)}$ или $\overline{\delta}{}_n^{(k)}$, внутрь которого или на его границу попала точка x. Тогда

$$\sigma_m(x) = \int_0^{a_n^{(k)}} f^*(x)\,dx + \int_{a_n^{(k)}}^x f^*(x)\,dx.$$

Так как между 0 и $a_n^{(k)}$ попало целое число интервалов вида $\overset{+}{\delta}{}_n^{(j)}$ или $\overline{\delta}{}_n^{(j)}$, то, как мы уже видели, интеграл от 0 до $a_n^{(k)}$ от $f^*(x)$ должен быть равен сумме приращений $F(x)$ на всех этих интервалах, т. е. в конечном итоге

$$\int_0^{a_n^{(k)}} f^*(x)\,dx = F\left(a_n^{(k)}\right) - F(0) = F\left(a_n^{(k)}\right).$$

С другой стороны,

$$\left|\int_{a_n^{(k)}}^{x} f^*(x)\,dx\right| = \left|\frac{\Delta\left(F, \delta_n^{(k)}\right)}{\delta_n^{(k)}}\left(x - a_n^{(k)}\right)\right| \leqslant \left|(\Delta\left(F, \delta_n^{(k)}\right)\right|.$$

Значит,

$$|F(x) - \varphi_m(x)| \leqslant \left|F(x) - F\left(a_n^{(k)}\right)\right| + \left|\Delta\left(F, \delta_n^{(k)}\right)\right|,$$

и так как $F(x)$ непрерывна, а $n \to \infty$ при $m \to \infty$, то правая часть стремится к нулю, а значит, (7) доказано.

[238] **К вопросу 51.** Решение этого вопроса связано с решением континуум-проблемы. Если бы она решалась положительно, то вопрос бы отпал. Однако эта проблема не эквивалентна континуум-проблеме, так как возможно, что ее решение для континуум-проблемы ничего не дает.

По поводу континуум-проблемы см. книгу Н. Н. Лузина ([8]) (в русском переводе «Теория аналитических множеств», готовится к печати).

[239] **К вопросу 52.** Этот вопрос отличается от вопроса 30 только тем, что вместо ограниченности функции требуется ее непрерывность Вопрос, насколько нам известно, также не решен.

ЛИТЕРАТУРА, ЦИТИРОВАННАЯ В КОММЕНТАРИЯХ К ДИССЕРТАЦИИ, СТАТЬЯМ И ПРОБЛЕМАМ Н. Н. ЛУЗИНА

Александров П. С.

1. L'intégration au sens de M. Denjoy considérée comme recherche des fonctions primitives. *Матем. сб.* 31 (1924), 465—476.

2. Über die Aequivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes. *Math. Zeitschr.* 20 (1924), 213—222.

Александров П. С. и Колмогоров А. Н.

1. Введение в теорию функций действительного переменного. Изд. 3. М.—Л., ОНТИ (1938), 1—268.

Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г.

1. О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Научно-техн. изд. Украины, Харьков (1938), 1—255.

Банах С. (Banach S.)

1. Sur le problème de la mesure. *Fund. Math.* т. IV (1923), 7—33.

2. Sur une classe de fonctions continues. *Fund. Math.*, т. VIII (1926), 166—172.

Бари Н. К.

1. Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues. *Math. Ann.* 103 (1930), 145—248; 598—653.

2. Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд. *Успехи матем. наук*, т. IV, вып. 3 (1949), стр. 1—68.

Безикович А. С.

1. Об одном структурном свойстве функций и ансамблей. *Матем. сб.* 31 (1922), 128—147.

2. Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables. *Fund. Math.*, т. IV (1923), 172—195.

3. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. *Матем. сб.* (1927), 529—556.

Бермант А. Ф. и Маркушевич А. И.

1. Теория функций комплексного переменного. «Математика в СССР за тридцать лет», стр. 319—414.

Борель Э. (Borel E.)

1. Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Paris, Gauthier-Villars (1917).

Бэр Р. (Baire R.)
1. Теория разрывных функций. ГТТИ, М.—Л., 1932.
Валле-Пуссен Ш. (Vallée-Poussin Ch.)
1. Курс анализа бесконечно малых. ГТТИ (1933), т. 1, стр. 1—461, т. 2, стр. 1—463.
Гагаев Б. М.
1. Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement á la dérivation. *C. R. Acad. Sc.* 188 (1929), 222—225.
Гедель К.
1. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств (перевод А. А. Маркова). *Успехи матем. наук*, т. III, вып. 1 (1948), стр. 96—149.
Гермейер Ю. Б.
1. О симметрических производных числах. *Матем. сб.* 12 (54) (1943), 121—145.
2. Производные Римана и Валле-Пуссена и их применение к некоторым вопросам из теории тригонометрических рядов. М. Диссертация (1946).
Герцог Ф. и Пирани ан Ж. (Herzog F. and Piranian G.)
1. Sets of convergence of Taylor series. *Duke Math. Journ.*, т. 16 (1949), 529—534.
Гнеденко Б. В.
1. О единственности системы ортогональных функций, инвариантной относительно дифференцирования. ДАН, т. 14 (1937), 159—162.
Гобсон Е. (Hobson E.)
1. The Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series. *Cambridge University Press*, т. 1 (1926), 1—671; т. 2 (1926), 1—780.
Гольдовский Ю.
1. Note sur les dérivées exactes. *Матем. сб.* 35 (1928), 35—36.
Данжуа А. (Denjoy A.)
1. Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues. *Journ. Math. Pures et Appl.* (7) 1 (1915), 105—240.
2. Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables. *Ann. Ec. Norm. Sup.* 33 (1916), 127—222. *Ann. Ec. Norm. Sup.* 34 (1917), 181—238.
3. Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. Première partie: La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques. Paris, Gauthier-Villars, 1941, стр. 1—84. Deuxième partie. Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions. Paris, Gauthier-Villars, 1941, стр. 85—228. Troisième partie: Détermination d'une fonction continue par les nombres dérivés seconds généralisés extrêmes finis. Paris, Gauthier-Villars, 1941, стр. 229—326. Quatrième partie. Les totalisations. Solution du problème de Fourier. Premier fascicule: Les totalisations. Deuxième fascicule: Appendices et Tables Genérales. Paris, Gauthier-Villars, 1949, Fasc. I, стр. 327—481. Fasc. II, стр. 483—715.
Зигмунд А. (Zygmund A.)
1. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, М.—Л., 1939.
2. Smooth functions. *Duke math. Journ.*, т. 12 (1945), 47—76.

3. Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances. *Studia Mathematica*, т. III (1931), 77—91.

Карамата Ж. (Karamata J.)

1. Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité. Actualités Scientifiques et industrielles, 450 (1937).

Карлеман Т. (Carleman T.)

1. Über die Fourier Koeffizienten einer stetigen Funktion. *Acta Mathematica* 41 (1918), 377—384.

Качмаж С. (Kaczmarz S.)

1. Integrale vom Dini'schen Typus. *Studia Math.*, т. III (1931), 189—199.

Качмаж С. и Штейнгауз (Kaczmarz S. und Steinhaus H.)

1. Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa-Lwow, 1935, 1—298.

Козлов В. Я.

1. О полных системах ортогональных функций. *Матем. сб.* 26 (1950), 351—364.

Колмогоров А. Н.

1. Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout. *Fund. Math.*, т. IV (1923), 324—326.

2. Sur une série de Fourier-Lebesgue divergente partout. *C. R. Ac. Sci.* 183 (1926), 1327—1329.

3. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. *Fund. Math.*, т. VII (1925), 362—364.

4. La définition axiomatique de l'intégrale. *C. R. Ac. Sci.* 180 (1925), 110—111.

5. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier. *Fund. Math.*, т. V (1924), 96—97.

Колмогоров А. Н. и Селиверстов Г. А.

1. Sur la convergence des séries de Fourier. *C. R. Ac. Sci.* 178 (1924), 303—306.

2. Sur la convergence des séries de Fourier. *Atti Acad. naz. Lincei* 3 (1926), 307—310.

Лебег А. (Lebesgue H.)

1. Интегрирование и отыскание примитивных функций. ГТТИ, М.—Л., 1934.

Лузин Н. Н.

1. Über eine Potenzreihe (Об одном степенном ряде). *R. C. Circ. mat.*, Palermo, 1911, т. 32, стр. 386—390.

2. К основной теореме интегрального исчисления. *Матем. сб.* 28 (1912), 266—294.

3. Об одном случае ряда Taylor'а. Там же, стр. 295—303.

4. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques. (К абсолютной сходимости тригонометрических рядов). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1912, т. 155, стр. 580—582.

5. Добавление к статье «К основной теореме интегрального исчисления». *Матем. сб.* 28 (1912), стр. 544.

6. Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles. (Элементарное доказательство основной теоремы о плотности множеств). *R. C. Circ. mat.*, Palermo, 1917, т. 42, стр. 167—172 (совместно с В. К. Серпинским).

7. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (О единственности и множественности аналитических функций). *Ann. sci. Éc. norm. sup.*, Paris, série 3, 1925, т. 42, No 6, стр. 143—191 (совместно с И. И. Приваловым).

8. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (Лекции об аналитических множествах и их приложениях). Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1930, стр. 328.

9. Sur une mode de convergence de l'intégrale de Dirichlet (Об одном виде сходимости интеграла Дирихле). *Изв. Физ.-матем. о-ва Казан. ун-та*, 1934, т. 6, сер. 3, стр. 1—4.

10. О последовательностях измеримых функций. В кн. Лебега «Интегрирование и отыскание примитивных функций», М.—Л., ГТТИ, 1934, стр. 283—290.

11. О строении измеримых функций. Там же, стб. 290—310.

12. Теория функций действительного переменного. М., Учпедгиз, 1940.

13. Функция (в математике). БСЭ, т. 59, стб. 314—334 (1934).

14. Дифференциальное исчисление. БСЭ, т. 22 (1935), стб. 622—642.

15. Ньютонова теория пределов. В кн. «Исаак Ньютон», 1643—1727. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения, М.—Л., АН СССР, 1943, стр. 53—74.

16. И. Ньютон как математик и натуралист. Журнал «Природа» № 3 (1943), стр. 74—83.

17. Эйлер. По поводу 150-летия со дня смерти. Сорена, 1933, в. 8, стр. 3—24.

Мазуркевич С. (Mazurkiewicz S.)

1. Sur les séries de puissances. *Fund. Math.*, т. III (1922), 52—58.

2. Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt$. *Studia Math.*, т. III. (1931), 114—118.

Маркушевич А. И.

1. Теория аналитических функций. ГТТИ, М.—Л., 1950, 1—703.

Марцинкевич Ж. (Marcinkiewicz J.)

1. Sur les séries de Fourier. *Fund. Math.*, т. XXVII (1936), 38—69.

Меньшов Д. Е.

1. Взаимоотношение между интегралом Borel'я и Denjoy. *Матем. сб.* 30 (1916), 288—295.

2. Sur l'unicité du développement trigonométrique. *C. R.*, т. 163 (1916), 433—436.

3. Sur les séries de fonctions orthogonales. *Fund. Math.*, т. IV (1923), 82—105.

4. Sur la représentation conforme des domaines plans. *Math. Ann* 95 (1926), 641—670.

5. Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques. *Матем. сб.* 9 (51) (1941), 667—692.

6. Sur les multiplicateurs de convergence pour les séries de polynômes orthogonaux. *Матем. сб.* 6 (48) (1939), 27—52.
7. Об изображении измеримых функций тригонометрическими рядами. ДАН, т. 26 (1940), 222—224.
8. О частных суммах тригонометрических рядов. ДАН, т. 41 (1943), 55—57.
9. О сходимости по мере тригонометрических рядов. *Труды математич. ин-та им. Стеклова,* вып. 32 (1950).

Натансон И. П.
1. Теория функций вещественной переменной. ГТТИ, М.—Л., 1950.
2. Конструктивная теория функций. ГТТИ, М.—Л., 1949.

Недер А. (Neder A.)
1. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.* 84 (1921), 117—136.

Плесснер Я. И.
1. Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. *Mitteil. d. Math. Semin, d. Uniw. Giessen,* 10 (1923), 1—36.
2. Ueber Konvergenz, von trigonometrischen Reihen. J. *reine u. angew. Math.*, 155 (1925), 15—25.
3. О сопряженных тригонометрических рядах. ДАН, 4, (1935), 235—238.

Привалов И. И.
1. Интеграл Cauchy. *Саратов. Изв. ун-та, физ.—мат. фак.*, 11:1 (1918), 94—105.
2. Ряды Фурье. ГТТИ, М.—Л., 1934.
3. Граничные свойства аналитических функций. ГТТИ, М.—Л., 1950.
4. Введение в теорию функций комплексного переменного. ГТТИ. М—Л., 1940.

Полиа Г. и Сеге Г.
1. Задачи и теоремы из анализа. ОНТИ, М. — Л., 1937.

Райхман А. (Rajchman A.)
1. Séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson. *Prace Math. fiz.* 30 (1919), 19—88.

Райхман А. и Зигмунд А. (Rajchman A. et Zygmund A.).
1. Sur la relation du procédé de sommation de Cesaro et celui de Riemann. *Bull. de l'Acad. Polonaise* (1925), 69—80.

Риман Б. (Riemann B.)
1. Сочинения, ОГИЗ ГТТИ, М.—Л. (1948), 1—543.

Сакс С.
1. Теория интеграла. Изд. ин. лит., Москва, 1949, 1—494.

Смирнов В. И.
1. Sur les valeurs limites des fonctions analytiques. *C. R.* 188 (1929), 131—133.

Степанов В. В.
1. Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables, *Матем. сб.* 31 (1924), 487—489.

Стечкин С. Б.
1. О сходимости и расходимости тригонометрических рядов (в печати).

Толстов Г. П.
1. Sur la dérivée approximative exacte. *Матем. сб.* 4 (46) (1938), 499—504.
2. Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues. *Матем. сб.* 5 (47) (1939), 637—646.
3. Асимптотическая производная сложной функции. *Матем. сб.* 27 (69) (1950), 325—332.
Тонелли Л. (Tonelli L.)
1. Sulla nozione di Integrale. *Annali di Matem.*, сер. IV, т. 1 (1924), стр. 105—145.
Хаар А. (Haar A.)
1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Annalen*, 69 (1910), 331—371.
Харди и Литтлвуд (Hardy G. and Littlewood J.)
1. Some problems of Diophantine Approximation. *Acta math.*, т. 37 (1914), 193—238.
2. Some problems of Diophantine Approximation. *Proc. Nation. Acad. Sc.* 2 (1916), 583—586.
Хинчин А. Я.
1. Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy. *C. R. Acad. Sc.* 162 (1916), 287—291.
2. Новое доказательство основной теоремы метрической теории множеств. *Изв. Иваново-возн. политехн. института* № 6 (1922), 39—41.
3. Исследование о строении измеримых функций. *Матем. сб.* 31 (1924), 265—285 и 377—433.
4. Ein Satz über Kettenbrüche mit arithmetischen Anwendungen. *Math. Zeitschr.*, Bd 18, Heft 3/4 (1923), 289—306.
5. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, Bd 92, Heft 1/2 (1924), 115—125.
6. Zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, Bd 24, Heft 4 (1926), 706—714.
7. Цепные дроби. ОНТИ НКТП СССР (1935), 1—104.
Шрейдер Ю. А.
1. О коэффициентах Фурье-Стильтьеса функций с ограниченным изменением. ДАН, т. 74 (1950), 663—664.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ ТРУДОВ Н. Н. ЛУЗИНА

1911

Über eine Potenzreihe (Об одном степенном ряде). *R. C. Circ. mat.*, Palermo, 1911, т. 32, стр. 386—390.

1912

К основной теореме интегрального исчисления. *Матем. сб.*, 1912, т. 28, в. 2, стр. 266—294.

Об одном случае ряда Taylor'а. Там же, стр. 295—302.

К абсолютной сходимости тригонометрических рядов. *Матем. сб.*, 1912, т. 28, в. 3, стр. 461—472.

Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques (К абсолютной сходимости тригонометрических рядов), *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1912, т. 155, стр. 580—582.

Добавление к статье «К основной теореме интегрального исчисления» (*Матем. сб.*, 1912, т. 28, в. 2, стр. 266—294). *Матем. сб.*, 1912, т. 28, в. 4, стр. 544.

Sur les propriétés des fonctions mesurables (О свойствах измеримых функций). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1912, т. 154, стр. 1688—1690.

Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy (О свойствах интеграла Данжуа). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1912, т. 155, стр. 1475—1477.

1913

Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier (О сходимости тригонометрических рядов Фурье). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1913, т. 156, стр. 1655—1658.

1914

Sur un problème de M. Baire (Об одной проблеме Бэра). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1914, т. 158, стр. 1258—1261.

1915

Интеграл и тригонометрический ряд. М., тип. Лисснера и Собко, 1915, 242 стр. Диссертация.

1916

Интеграл и тригонометрический ряд. *Матем. сб.*, 1916, т. 30, в. 1, стр. 1—242.

Sur la recherche des fonctions primitives (Об отыскании примитивных функций). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1916, т. 162, стр. 975—978.

1917

Sur la classification de M. Baire (О классификации Бэра).

Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non-dénombrable d'ensembles non-mesurables (О разбиении интервала на несчетное множество неизмеримых множеств). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1917, т. 165, стр. 422—424. Совместно с В. Серпинским.

Sur une propriété du continu (Об одном свойстве континуума). Там же, стр. 498—500. Совместно с В. Серпинским.

Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles (Элементарное доказательство основной теоремы о плотности множеств). *R. C. Circ. mat.*, Palermo, 1917, т. 42, стр. 167—172. Совместно с В. Серпинским.

Sur la notion de l'intégrale (О понятии интеграла). *Ann. Mat. pura, appl.*, série 3, 1917, т. 26, в. 2—3, стр. 77—127.

1918

Sur quelques propriétés des ensembles (A) (О некоторых свойствах *A*-множеств). *Bull. int. Acad. Sci.*, Cracovie, série A, 1918, № 4—5 A, стр. 35—48. Совместно с В. Серпинским.

1919

Sur la représentation conforme (О конформном отображении) *Изв. Иваново-возн. политехн. института*, 1919, в. 2, стр. 77—80

1921

Sur l'existence d'un ensemble non-dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait (О существовании несчетного множества первой категории на всяком совершенном множестве). *Fundam. Math.*, 1921, т. 2, стр. 155—157.

1922

О существовании аналитических функций, равномерно бесконечных вблизи купюры. *Изв. Иваново-возн. политехн. института*, 1922, в. 5, стр. 20—26.

Sur une décomposition du continu (О разбиении континуума). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1922, т. 175, стр. 357—359. Совместно с В. Серпинским.

1923

Sur un ensemble non-mesurable *B* (Об одном множестве, не измеримом *B*). *J. Math. pures, appl.*, série 9, 1923, т. 2, стр. 53—72. Совместно с В. Серпинским.

1924

Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (О единственности и множественности аналитических функций), *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1924, т. 178, стр. 456—459. Совместно с И. И. Приваловым.

1925

Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (О единственности и множественности аналитических функций). *Ann. sci. Ec. norm. sup.*, Paris, série 3, 1925, т. 42, № 6, стр. 143—191. Совместно с И. И. Приваловым.

Sur un problème de M. Emile Borel et les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue; les ensembles analytiques (Об одной проблеме Эмиля Бореля и проективных множествах Анри Лебега; аналитические множества). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1925, т. 180, стр. 1318—1320.

Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue (О проективных множествах Анри Лебега). Там же, стр. 1572—1574.

Les propriétés des ensembles projectifs (Свойства проективных множеств). Там же, стр. 1817—1818.

Sur les ensembles non-mesurables *B* et l'emploi de la diagonale de Cantor (О множествах, не измеримых *B*, и о применении диагонали Кантора). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1925, т. 181, стр. 95—96.

Sur le problème de M. Emile Borel et la méthode des résolvantes (О проблеме Эмиля Бореля и методе резольвент). Там же, стр. 279—281.

1926

Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs (Мемуар об аналитических и проективных множествах). *Матем. сб.*, 1926, т. 33, в. 3, стр. 237—290.

Remarques sur un lemme de Poincaré (Замечания об одной лемме Пуанкаре). *Матем. сб.* 1926, т. 33, в. 4, стр. 357—362.

Sur un exemple arithmétique d'une fonction ne faisant pas partie de la classification de M. René Baire (Об одном арифметическом примере функции, не входящей в классификацию Рене Бэра). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1926, т. 182, стр. 1521—1522.

1927

Sur une question concernant la propriété de M. Baire (Об одном вопросе, касающемся свойства Бэра). *Fundam. Math.*, 1927, т. 9, стр. 116—118.

Sur les ensembles analytiques (Об аналитических множествах). *Fundam. Math.*, 1927, т. 10, стр. 1—95.

Remarques sur les ensembles projectifs (Замечания о проективных множествах). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1927, т. 185, стр. 835—837.

Современное состояние теории функций действительного переменного. Москва, Труды Всероссийского матем. съезда, стр. 11—32.

1928

Sur l'accessibilité des points (О достижимости точек), *Fundam. Math.*, 1928, т. 12, стр. 158—159.

Sur un ensemble non-dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait (Об одном несчетном множестве) первой категории на всяком совершенном множестве). *R. C. Accad. Lincei*, 1928, т. 7, в. 3, стр. 214—215. Совместно с В. Серпинским.

1929

Sur les voies de la théorie des ensembles (О путях теории множеств). Atti del Congresso internationale dei matematici 3—10 settembre 1928, т. 1, Bologna, Zanichelli, 1929. стр. 295—299.

Sur le problème des fonctions implicites (О проблеме неявных функций). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1929, т. 189, стр. 80—82.

Sur la représentation paramétrique semirégulière des ensembles (О параметрическом полурегулярном изображении множеств). Там же, стр. 229—231.

Sur les fonctions implicites à une infinité dénombrable de valeurs (О неявных функциях со счетным множеством значений). Там же, стр. 313—316.

Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques (Об одном общем принципе теории аналитических множеств). Там же, стр. 390—392.

Sur les classes des constituantes d'un complémentaire analytique (О классах конституант аналитических дополнений). *C. R. Ac. Sci.*, Paris, 1929, 189, стр. 794—797. Совместно с В. Серпинским.

Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable *B* (О точках единственности множеств, измеримых *B*). *C. R. Ac. Sci.*, Paris, т. 189 (1929), 422—425.

1930

Leçons sur les ensembles analytiques el leurs applications (Лекции об аналитических множествах и их приложениях). Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1930, стр. 328.

Analogies entre les ensembles mesurables *B* et les ensembles analytiques (Аналогии между множествами измеримыми *B*. и аналитическими множествами). *Fundam. Math.*, 1930, т. 16, стр. 48—76.

Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles (О проблеме Адамара униформизации множеств). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1930, т. 190, стр. 349—351.

Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles (О проблеме Адамара униформизации множеств). *Mathematica*, Cluj, 1930, т. 4, стр. 54—66.

Sur une propriété des fonctions à carré sommable (Об одном свойстве функций с интегрируемым квадратом). *Bull. Calcutta math. Soc.*, 1930, т. 20, стр. 139—154, fig.

1931

О методе академика А. Н. Крылова составления векового уравнения. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 7, стр. 903—958.

Sur une famille de complémentaires analytiques (Об одном семействе аналитических дополнений). *Fundam. Math.*, 1931, т. 17, стр. 4—7.

1932

О методе приближенного интегрировании академика С. А. Чаплыгина. М.—Л., Гос. авиац. и автотр. изд., 1932, 35 стр., черт. (Тр. ЦАГИ, в. 141).

О некоторых свойствах перемещающегося множителя в методе академика А. Н. Крылова. Ч. 1—3. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1932, № 5, стр. 595—638; № 6, стр. 735—762; № 8, стр. 1065—1102.

О качественном исследовании уравнения движения поезда. *Матем. сб.*, 1932, т. 39, в. 3, стр. 6—26.

1933

Современное состояние теории функций действительного переменного. М.—Л., ГТТИ, 1933, 58 стр.

Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques (О классах конституант аналитических дополнений). *Ann. Scu. norm. sup.*, Pisa, série 2, 1933, т. 2, fasc. 3, стр. 269—282.

Sur les ensembles toujours de première catégorie. (О множествах, которые всегда являются множествами первой категории). *Fundam. Math.*, 1933, т. 21, стр. 114—126.

1934

Sur une mode de convergence de l'intégrale de Dirichlet (Об одном виде сходимости интеграла Дирихле). Изв. Физ.-матем. об-ва Казан. ун-та, 1934, т. 6, серия 3, стр. 1—4.

О стационарных последовательностях. Тр. Физ.-матем. ин-та, отд. мат., 1934, т. 5, стр. 125—147.

Несколько замечаний о кратной отделимости. ДАН СССР, 1934, т. 2, № 5, стр. 280—284.

Sur les suites stationnaires (О стационарных последовательностях). Paris, Hermann et C-ie, 1934, 19 стр. (Actualité scientifiques et industrielles. 149. Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jaques Herbrand. V) (Новости науки и промышленности. 149. Математические доклады, опубликованные в память Жака Гербранда. V).

О последовательностях измеримых функций. В кн. Лебега «Интегрирование и отыскание примитивных функций». М.—Л., ГТТИ, 1934, стр. 283—290.

О строении измеримых функций. Там же, стр. 290—310.

О построении множеств, не измеримых *B*. Там же, стр. 310—324.

Sur une propriété nouvelle des ensembles mesurables *B* (Об одном новом свойстве множеств, измеримых *B*). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1934, т. 198, стр. 1116—1118.

Sur quelques problèmes difficiles de la théorie des fonctions (О некоторых трудных проблемах теории функций). Там же, стр. 1296—1298.

Sur la décomposition des ensembles (О разбиении множеств). Там же, стр. 1671—1674.

Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analytiques (Некоторые замечания о кривых, которые являются аналитическими дополнениями). *Mathematica*, Cluj, 1934, v. 10, p. 70—80 (Bul. Soc. Sti., Cluj, т. 7, стр. 599—609).

Современные проблемы теории функций действительного переменного. Тезисы доклада в кн. Бюллетень II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г. Л., АН СССР, 1934, стр. 8—10.

1935

О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.—Л., АН СССР, 1935, 86 стр.

Sur les ensembles analytiques nuls (О пустых аналитических множествах) *Fundam. Math.*, 1935, т. 25, стр. 109—131.

Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible (Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном решетом). Там же, стр. 559—560. Совместно с С. П. Новиковым.

Sur un raisonnement nouveau dans la théorie des fonction descriptive (Об одном новом рассуждении в дескриптивной теории функций). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1935, т. 201, стр. 638—640.

Sur un choix d'ensemble parfait distingué dans un complémentaire analytique arbitraire ayant des constituants non-dénombrables (О выборе специального совершенного множества в произвольном аналитическом дополнении, имеющем несчетные конституанты). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1935, т. 201, стр. 806—809.

1938

Об одной теореме теории уравнений с частными производными. ДАН СССР, 1938, т. 18, № 8, стр. 529—532.

О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. ДАН СССР, 1938, т. 19, № 1—2, стр. 21—26 и № 4, стр. 227—232.

1939

Доказательство одной теоремы теории изгибания. Изв. АН СССР, ОТН, 1939, № 2, стр. 81—106; № 7, стр. 115—132; № 10, стр. 65—84.

1940

К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. *Автомат. и телемех.*, 1940, № 5, стр. 3—66.

1941

Об одном случае теоремы Janet Riquier. ДАН СССР, 1941, т. 31, № 1, стр. 5—8 и № 5, стр. 419—424.

Реф. «Изучение матричной теории дифференциальных уравнений» в кн. Рефераты научных работ 1940 г. Отделение технических наук АН СССР. М., АН СССР, 1941, стр. 126—127.

1943

О частях натурального ряда. ДАН СССР, 1943, т. 40, № 5 стр. 195—199.

1946

К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1946, т. 51, № 4, стр. 247—249; № 5, стр. 331—333. Совместно с П. И. Кузнецовым.

1947

О локализации принципа конечной площади. ДАН СССР, 1947, т. 56, № 5, стр. 447—450.

О частях натурального ряда. Изв. АН СССР, серия матем., 1947, т. 11, № 5, стр. 403—410.

Проблемы приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина (работа должна была быть опубликована в книге «Труды Научно-технического совещания по автоматизированному электроприводу», но это издание не состоялось. В ближайшее время работа будет опубликована в одном из математических журналов).

1949

О регулярном решении задачи изгибания поверхностей на главном основании (работа осталась неоконченной из-за смерти Н. Н. Лузина).

Статьи по истории математики, статьи в Большой Советской Энциклопедии, некрологи и т. д.

1. Борель Эмиль. БСЭ, т. 7, 1927, стб. 142—143.
2. Поль Аппель (1885—1930). Некролог. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 3, стр. 319—322.
3. Иван Александрович Лаппо-Данилевский (1896—1931). Некролог. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1931, № 6, стр. 729—732.
4. Эйлер. По поводу 150-летия со дня смерти. *Сорена*, 1933, в. 8, стр. 3—24.
5. Функция. БСЭ, т. 59, стб. 314—334 (1934).

6. Дифференциальное исчисление. БСЭ, т. 22 (1935), стб. 622—642.

7. Ньютонова теория пределов. В кн. «Исаак Ньютон», 1643—1727. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. М.—Л., АН СССР, 1943, стр. 53—74.

8. И. Ньютон как математик и натуралист. «Природа» № 3—4 (1943), стр. 74—83.

9. Валле-Пуссен Шарль Жан. БСЭ, т. 8, стб. 564.

10. Бэр Ренэ (совместно с А. В. Хромым). БСЭ, 2-е издание (в печати).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЛИТЕРАТУРА О Н. Н. ЛУЗИНЕ

Егоров Д. Ф., Отзыв о диссертации Н. Н. Лузина. Ученые записки Моск. университета, т. 28 (1916).

Лазарев П. П. и Иоффе А. Ф., Записка об ученых трудах проф. Н. Н. Лузина. Изв. АН СССР, 6-я серия, 1927, т. 21, № 18, стр. 1429—1431.

Крылов А. Н., Записка об ученых трудах Н. Н. Лузина. В кн. Записки об ученых трудах действительных членов АН СССР по отделу гуманитарных наук, избранных 12 января и 13 февраля 1929 г. Л., АН СССР, 1930, стр. 48—64.

Николай Николаевич Лузин. К 60-летию со дня рождения. Успехи матем. наук, 1946, т. I, в. 1, стр. 226—228.

Николай Николаевич Лузин. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

Памяти Н. Н. Лузина. Успехи матем. наук, т. V, вып. 4 (38), 1950.

Н. Н. Лузин. «Известия» от 3 марта 1950 г., № 53.

Академик Н. Н. Лузин. Математика в школе, № 3, май—июнь 1950 г.

Литература, освещающая роль Н. Н. Лузина и его школы в русской науке

Егоров Д. Ф., Успехи математики в СССР. Наука и техника СССР. 1917—1927, стр. 223—232.

Меньшов Д. Е. и Лаврентьев М. А., Успехи теории функций действительного переменного в СССР. Матем. сб. 35 (1928), доп. вып. 21—42.

Канторович Л. В. и Фихтенгольц Г. М. Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ. Сборник «Математика и естествознание в СССР», Изд. АН СССР (1938).

Ляпунов А. А. и Новиков П. С., Дескриптивная теория множеств. «Математика в СССР за 30 лет» (1917—1947).

Бари Н. К., Ляпунов А. А., Меньшов Д. Е. и Толстов Г. П., Метрическая теория функций действительного переменного, «Математика в СССР за 30 лет» (1917—1947).

Бермант А. Ф. и Маркушевич А. И., Теория функций комплексного переменного. «Математика в СССР за 30 лет» (1917—1947).

Александров П. С., Гнеденко Б. В., Степанов В. В., Математика в Московском университете в XX веке. В книге «Историко-математические исследования», вып. 1, ГИТТЛ, Москва—Ленинград, 1948.

Александров П. С., Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку. Ученые записки Моск. университета, вып. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры, т. I, книга 1.

Степанов В. В., Московская школа теории функций (в том же издании).

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Н. Н. ЛУЗИН

ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

(Диссертация)

РАБОТЫ Н. Н. ЛУЗИНА, ПРИМЫКАЮЩИЕ К ДИССЕРТАЦИИ «ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД»

КОММЕНТАРИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Е. М. Ландис.*
Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

*

Подписано к печати 23/VIII 1951 г. Бумага 84×108/32. 8,69 бум. л. 28,29 печ. л. + 2 вклейки. 30,82 уч.-изд. л. 43 470 тип. зн. в печ. л. Тираж 5000 экз. Т-05172.
Цена книги 18 р. 45 к. Переплёт 2 р.
Заказ № 2692.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.