

ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

# **Microwave Breakdown in Gases**

by

A. D. MacDONALD

Lockheed Palo Alto Research Laboratory

JOHN WILEY & SONS, INC., NEW YORK - LONDON - SYDNEY  
1966

**А. МАК-ДОНАЛД**

# **Сверхвысокочастотный пробой в газах**

Перевод с английского  
**М. М. САВЧЕНКО и А. Г. ФРАНК**

Под редакцией  
**М. С. РАБИНОВИЧА**

Первая в мировой научной литературе монография по сверхвысокочастотному пробоя в газах и плазме. Эта проблема имеет важное значение для радиотехники и электроники, физики ускорителей, в различных космических и геофизических исследованиях.

Теоретические расчеты носят направленный прикладной характер, доведены до расчетных формул. Результаты расчетов всюду сопоставляются с экспериментальными данными, обсуждаются методы измерений и границы применимости теории.

Материал изложен последовательно, в простой форме, благодаря чему книга доступна как физикам, так и инженерам, желающим разобраться в физике этого явления и овладеть методами расчета пробоя.

*Редакция литературы по физике*

**Инд 3-3-12**

**61-69**

---

**А. Мак-Доналд**

**СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ПРОБОЙ В ГАЗАХ**

Редактор *И. Г. Нахимсон*. Художник *П. Д. Смеляков*.

Художественный редактор *Л. Ф. Некундэ*. Технический редактор *Н. А. Турсукова*.

Сдано в производство 3/III 1969 г. Подписано к печати 18/VII 1969 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>==  
=бум. л. 13,25 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 11,69. Изд. № 2/4867. Цена 1 р. 35 к. Зак. 793

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати  
при Совете Министров СССР.  
Москва, Трехпрудный пер., 9

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга А. Д. Мак-Доналда является четвертой из серии книг по физике плазмы, выпущенных издательством «Джон Вилей энд Санс» (в США) под редакцией проф. С. Брауна<sup>1</sup>). Девизом авторов книг этой серии являются полнота и доступность изложения для лиц с высшим техническим образованием. В настоящее время физика плазмы изучается не только в лабораториях академических институтов и университетов — она стала рабочим инструментом многих разделов техники. Трудно себе представить современную радиоэлектронику, радиотехнику без физики плазмы. Физика плазмы — необходимый элемент космических исследований, ускорительной техники, не говоря уже о проблемах управляемого термоядерного синтеза и прямого превращения тепловой энергии в электрическую. Роль физики плазмы в дальнейшем еще более возрастет, так как для современной физики и техники характерно исследовать вещество в предельных состояниях: при сверхбольших плотностях и сверхвысоких температурах или, наоборот, при сверхнизких плотностях. Обычно в таких условиях вещество находится в состоянии плазмы.

Все это привлекает к проблемам физики плазмы возрастающее число инженеров и ученых разных специальностей. Именно для такого читателя и издается упомянутая серия книг. В частности, все сказанное относится и к настоящей книге, предлагаемой вниманию наших читателей. В этой книге систематически и на простом уровне изложена физика сверхвысокочастотного пробоя в газах. Читатель найдет здесь все, что необходимо, чтобы разобраться в методах расчета пробоя, а также в физических явлениях, сопутствующих разряду. Очень подробно разбирается методика эксперимента. Автор рассказывает обо всем, что связано с сверхвысокочастотным пробоем, не предполагая у читателя никакой специальной подготовки. Большая часть книги посвящена расчетам и сравнению с экспериментом, поэтому в каждой главе обсуждаются как экспериментальные, так и теоретические вопросы. Специальная

---

<sup>1</sup>) Две другие книги из этой серии уже вышли в русском переводе (М. Хилд и С. Уортон, Микроволновая диагностика плазмы, Атомиздат, 1968, и И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд-во «Мир», 1967). Перевод третьей книги (Бекефи, Радиационные процессы в плазме) готовится к изданию.

глава под названием «Экспериментальные методы» на самом деле посвящена не только некоторым специфическим особенностям высокочастотной и высоковакуумной систем для изучения пробоя, но также приближенным инженерным расчетам высокочастотной системы, необходимым для того, чтобы получить данные о пробое.

На первый взгляд СВЧ пробой в газах — не столь большой вопрос физики плазмы, чтобы ему посвящать отдельную книгу. Но на самом деле этот «небольшой» вопрос очень важен для многочисленных приложений, так как сверхвысокочастотный диапазон волн используется во многих разделах физики и техники. Основная часть книги посвящена изучению пробоя в водороде и некоторых инертных газах и смесях. Для разобранных случаев получается превосходное согласие между теорией и экспериментом. Высокая точность, в частности, достигнута для специально подобранных газов или смесей (например, для смеси ртути и гелия). В общем случае расчет может быть сделан лишь по порядку величины. Основной, очень полезный вывод автора, имеющий значение в общем случае, — это возможность рассчитать пробойные поля, если с той или иной степенью точности вычислить характерную диффузионную длину.

В книге проведены довольно точные расчеты этого параметра для некоторых специальных случаев. Читатель должен рассматривать их как примеры использования метода, который в принципе может быть применен и к более сложным случаям, если не стремиться к особой точности. Автор убедительно показывает, что физическая картина пробоя, положенная в основу расчета, правильна, и это самое важное.

Из применений автор подробно рассматривает только один вопрос, а именно сверхвысокочастотный пробой в атмосфере. Нет необходимости подчеркивать важность этого примера. Номограммы, построенные автором, позволяют определить условия пробоя в атмосфере практически при любых условиях. Автор очень кратко и несколько поверхностно рассматривает два других важных применения теории СВЧ пробоя. Это, во-первых, пробой в фокусе лазера и пробой вблизи космического корабля или спутника, спускающегося на Землю. При этом автор, по-видимому, стремится прежде всего показать, что общие представления и развитые расчеты сверхвысокочастотного поля можно применять для грубых оценок в таких случаях, когда, строго говоря, они неприменимы, и тем не менее получать разумные значения параметров пробоя. Наконец, совсем мало места посвящено сложному и интересному явлению пробоя в магнитном поле (гл. 6). Оно не рассматривается во всех деталях. Автор только показывает, что развитая в книге теория применима и к пробую в магнитном поле, если ввести новое определение эффективного электрического поля и характерной

диффузионной длины, которая теперь будет зависеть от направления. Сверхвысокочастотный пробой часто происходит вдали от стенок, и это дает основание автору не исследовать пристеночные явления и тем самым существенно упростить теорию. Однако для практиков, работающих с СВЧ установками, это, конечно, является недостатком книги, который только частично может быть восполнен при чтении работ, посвященных пробоем в постоянных полях.

Как во всякой книге, посвященной конкретным лабораторным исследованиям и методам расчета, переводчикам и редактору пришлось встретиться с английским лабораторным жаргоном, который они попытались передать общепринятым русским научным языком. Конечно, не всегда это удалось. Во всяком случае, мы старались без необходимости не вводить новые термины, а когда для одного и того же термина имеется несколько русских эквивалентов, позволили себе положиться на собственный вкус. Так, в книге широко используется термин «пробойные поля», еще совсем недавно употреблявшийся только в лаборатории, который мы предпочли термину «пробивные поля», использованному в переводе книги Г. Ретера (Электронные лавины и пробой в газах, изд-во «Мир», 1967). Мы использовали также термин «сечение передачи импульса» вместо «сечение переноса импульса», использованного в упомянутой выше книге Мак-Даниеля. Здесь мы воспользовались термином из классической книги Г. Месси и Е. Бархопа (Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958). Другие термины очевидны и не требуют пояснений.

Перевод книги выполнили М. М. Савченко (гл. 1—3, 8) и А. Г. Франк (гл. 4—7).

*М. С. Рабинович*





## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теперь прошло уже почти двадцать лет с тех пор, как я, будучи членом группы аспирантов, работавших в Массачусетском технологическом институте под руководством профессоров Брауна и Аллиса, впервые заинтересовался электрическим пробоем в газах. За прошедшие годы была проделана большая работа как по изучению взаимодействия микроволновых полей с газами вообще, так и по пробойным явлениям в частности. Хотя имеются книги, охватывающие многие аспекты этого взаимодействия, и хотя явления пробоя представляют значительный интерес в связи с распространением радиоволн между Землей и космическими кораблями, ни в одной из книг не рассмотрены основательно явления пробоя на высоких и сверхвысоких частотах. Настоящая книга написана с целью рассмотреть с единой точки зрения как экспериментальные, так и теоретические аспекты сверхвысокочастотного пробоя в газах. Книга в значительной степени содержит все необходимые для ее понимания сведения и вполне доступна для студентов старших курсов и аспирантов первого года, специализирующихся в области физики и электротехники.

Одной из интересных особенностей данного вопроса является способ сопоставления экспериментальных данных с результатами теоретического анализа, основанного на кинетической теории электронов в газе. Этот вопрос обсуждается довольно подробно, после чего делается попытка представить результаты теоретического рассмотрения, основанного на кинетическом уравнении Больцмана, таким образом, чтобы можно было получить соотношения между экспериментально измеряемыми параметрами.

В вводной главе кратко приведены основные сведения из теории размерностей. Это необходимо для того, чтобы объяснить выбор комбинаций экспериментальных переменных, обычно применяемых при описании явлений газового разряда. Вторая глава посвящена процессам столкновений электронов с нейтральными частицами; рассмотренные в ней вопросы существенны для развития теории пробоя.

Уравнение Больцмана для ионизованного газа трактуется как уравнение непрерывности для электронов в фазовом пространстве. Проводится разложение этого уравнения в ряд по координатам и по времени, после чего выводится дифференциальное уравне-

ние второго порядка для функции распределения электронов по энергиям. Довольно подробно обсуждается вопрос о пределах применимости используемых выражений. Основанная на функции распределения теория пробоя детально обсуждается в гл. 4 и 5. Возможности теоретического рассмотрения какого-либо конкретного газа ограничены тем, что частота столкновений электронов с атомами весьма сложно зависит от энергии. Однако для ряда газов можно провести вполне разумное сравнение теоретических предсказаний с экспериментальными данными. Согласие, которое при этом обнаруживается, подтверждает обоснованность предлагаемых теорий пробоя.

Гл. 7 содержит описание экспериментальных методик, с помощью которых получены приводимые данные, а также способов сверхвысокочастотных измерений; кроме того, в ней рассмотрена и современная вакуумная техника.

В связи с существующим в настоящее время интересом к пробоям в атмосфере и в ионизованной области ударных волн у баллистических объектов последняя глава посвящена пробоям в воздухе и атмосферных газах. Хотя для этих газов невозможно точное решение, основанное на рассмотрении функции распределения, тем не менее предлагаются полезные методы расчета и детально обсуждается как теория, так и эксперимент.

Я с удовольствием выражаю признательность многим лицам, оказавшим мне помощь при подготовке этой книги. Особенно я хочу поблагодарить проф. С. Брауна за помощь и поддержку, оказанные мне во время работы, за просмотр рукописи и многочисленные ценные замечания. Значительная часть книги была написана, когда я работал в Далхаузском университете. Проф. Лангстрот прочитал большую часть рукописи; я признателен ему за полезные советы. Наконец, я весьма обязан д-ру Уайтмеру и другим сотрудникам лаборатории электроники фирмы Локхид за многочисленные полезные дискуссии.

*А. Д. Мак-Доналд*

Пало-Альто, Калифорния  
Июнь 1966 г.

## Введение

В течение более ста лет внимание физиков привлекало множество интересных явлений, происходящих в газе при наложении электрического поля. Изучение «электрического разряда в газах», или «газового разряда», как обычно называют это явление, привело к многим фундаментальным открытиям. В течение последней половины девятнадцатого столетия и большей части двадцатого эта область исследования была тесно связана с основным направлением развития физики. Хотя понимание явлений не всегда было полным, их изучение привело к таким фундаментальным открытиям, как открытие катодных лучей, рентгеновских лучей, установлению свойств электронов и атомов, к созданию оптической спектрометрии и масс-спектрометрии. Явления в газовом разряде сейчас часто рассматриваются как часть более широкой области — физики плазмы, которая привлекает внимание все большего числа физиков, так как становится очевидным, что большая часть материи во Вселенной находится в состоянии плазмы — четвертом состоянии вещества.

Целью данной книги является описание небольшого раздела физики плазмы, раздела, который в основном развился после второй мировой войны, но который важен для понимания всей области, а именно описание высокочастотного электрического пробоя. Термин «пробой», применяемый к процессам инициирования разряда, представляется разумным в тех случаях, когда постоянное напряжение, прикладываемое к газоразрядной трубке, постепенно повышается до критического значения, при котором газ вдруг начинает светиться и становится проводящим. Естественно, что прежде всего и наиболее интенсивно изучались значения напряжений, при которых газ «пробивается» или при которых начинается искрение. Подобные исследования в течение многих лет занимали центральную часть в исследовании явлений газового разряда.

Уже довольно давно были начаты опыты с имевшимися тогда относительно низкочастотными напряжениями. Но эти первые вылазки в область переменных напряжений не открыли новых явлений. Однако при использовании более высоких частот был обнаружен ряд интересных эффектов. Термин «высокие частоты»

требует некоторых разъяснений, ибо при рассмотрении вопросов пробоя удобно называть так все частоты выше нескольких мегагерц. Основные представления и теории, о которых идет речь в данной книге, исходят главным образом из экспериментов в СВЧ диапазоне радиоволн. Однако при некоторых условиях они справедливы в гораздо более широком диапазоне частот. По этой причине некоторые из приводимых здесь расчетов применимы как к пробоям в диапазоне низких частот (2—3 Мгц), так и к пробоям в области оптических частот.

В данной главе мы рассмотрим в общих чертах экспериментальные данные и необходимые для их описания экспериментальные и теоретические модели, которые мы будем теперь называть теорией высокочастотного пробоя.

### ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

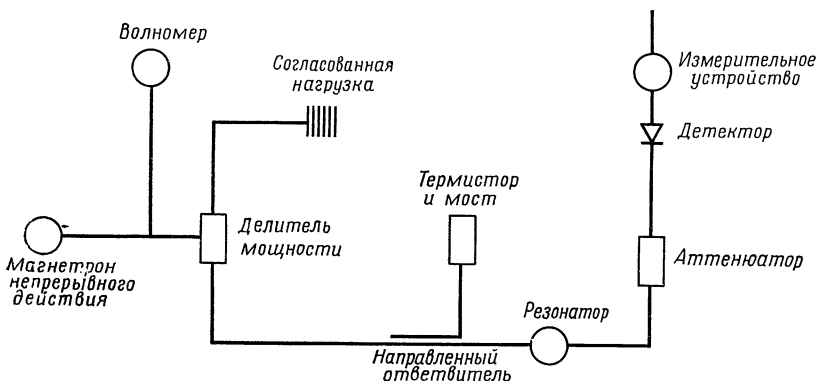
Когда к содержащей газ трубке прикладывается электрическое поле с напряженностью, достаточной для того, чтобы вызвать пробой, скорость электронов и ионов возрастает до очень больших значений. До тех пор пока частота приложенного поля не слишком велика, т. е. направление силы, действующей на заряженную частицу, не успевает измениться на обратное, прежде чем частица пересечет трубку, имеется большая вероятность того, что столкновение со стенкой вызовет рождение новых частиц; в результате концентрация ионов и электронов будет повышаться. Когда скорость рождения электронов за счет указанного механизма превышает скорость их исчезновения, происходит быстрое увеличение концентрации, вызывающее искрение, или пробой.

Электроны обычно играют доминирующую роль, ибо в заданном электрическом поле они ускоряются гораздо более эффективно, чем ионы. Рождение вторичных электронов и ионов при ударе об электроды или стенки является характерной особенностью разряда на постоянном токе. При некоторых переменных полях разряд может по существу происходить так же, как на постоянном токе. Другими словами, в этом случае в течение каждого полупериода приложенного поля просто происходят разряды на постоянном токе. При некоторых условиях такой процесс может протекать при частотах, достигающих сотен килогерц. Пробой в постоянном поле может в гораздо большей степени зависеть от материала электродов и условий на их поверхности, чем от свойств газа. По этой причине развитие представлений об основных явлениях в газах шло довольно медленно. В результате к концу второй мировой войны, несмотря на многолетние и обширные исследования, не было создано сколько-нибудь удовлетворительной теории, позволяющей предсказывать напряжение пробоя в газах.

Развитие радаров во время второй мировой войны привело к усовершенствованию СВЧ техники и широкому использованию СВЧ оборудования. Это открыло новые возможности во многих областях науки, и в частности в изучении газов. При использовании очень высокочастотных полей в газовом разряде электроны успевают пройти весьма небольшой путь до того, как поле изменит направление. Поэтому электроны не устраниваются полем из области разряда, а остаются в ней, двигаясь с относительно низкими скоростями. Следовательно, они практически не вызывают вторичных эффектов на стенках газоразрядной камеры. В силу указанных причин техника СВЧ сделала возможным изучение взаимодействий между электронами, атомами и ионами в условиях, когда влиянием явлений у электродов можно было пренебречь, что ранее было практически невозможно.

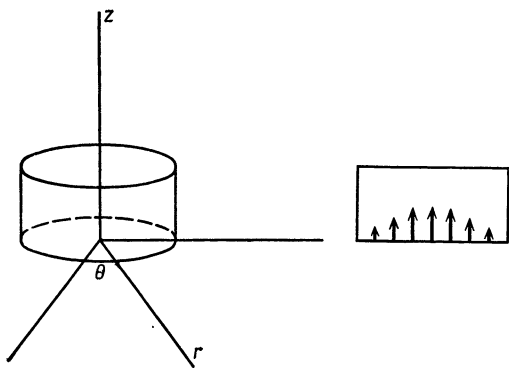
Из большого объема экспериментальных и теоретических данных мы сейчас остановимся только на некоторых, чтобы показать, какого рода эксперименты были проделаны. Детали экспериментов мы рассмотрим в следующих главах, ограничившись сейчас лишь самым необходимым для понимания экспериментальных методов.

**Эксперимент.** На фиг. 1.1 схематически показан упрощенный вариант типичного экспериментального устройства. Мощность, генерируемая очень стабильным магнетроном непрерывного режима,



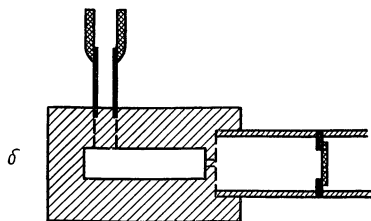
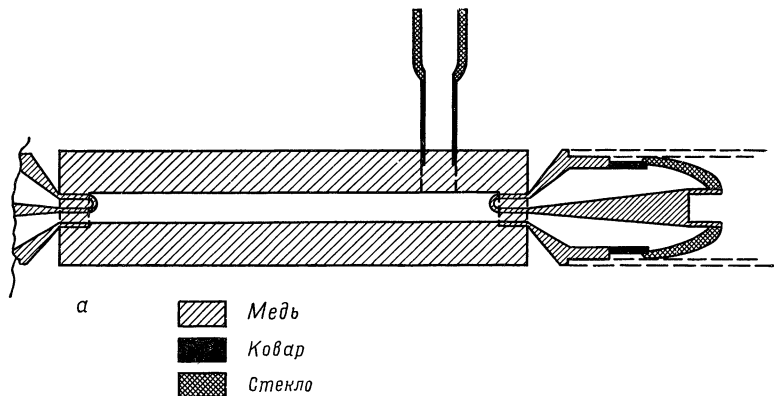
Ф и г. 1.1. Упрощенная схема типичной установки для измерения высокочастотных пробойных полей.

подается в резонансную полость. В волномер отвлекается небольшая часть мощности для измерения частоты. Термисторный мост, связанный с направленным ответвителем, контролирует поток



Ф и г. 1.2. Схема резонатора.

Показано направление электрического поля для моды  $TM_{010}$ .



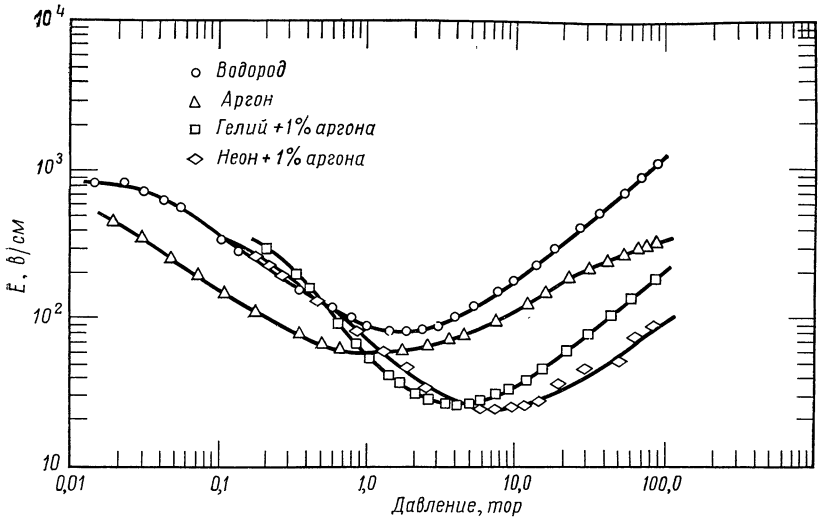
Ф и г. 1.3. Разрез двух типичных резонаторов высотой 6,25 мм.

а — резонатор связан с помощью петли связи с коаксиальной линией, частота  $\sim 3$  Гц;  
 б — резонатор связан с помощью возбуждающей диафрагмы с волноводом, частота 10 Гц.

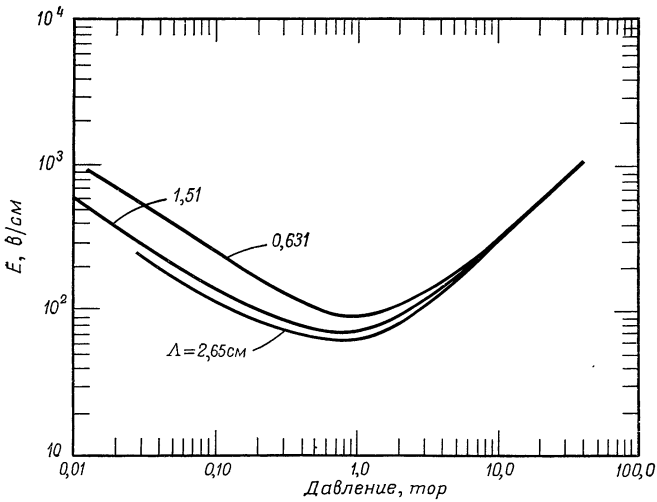
мощности, регулируемый делителем мощности. Небольшая часть мощности отводится через аттенюатор на детектирующее и измерительное устройство. Для данной частоты и данного резонатора комбинация аттенюатора и измерительного устройства калибруется с помощью термисторного моста и используется при пробойных измерениях для регистрации мощности в резонаторе, ибо измерения с мостом отнимают очень много времени.

Существенные различия в измерениях в низкочастотном диапазоне и в СВЧ диапазоне связаны с тем, что в СВЧ диапазоне длина волны применяемого поля соизмерима с размерами разрядной камеры. Поэтому свойства резонансной полости достаточно критичны. Поле можно считать однородным лишь в ограниченной области резонатора. Поэтому следует принимать предосторожности, чтобы измерения производились в области, где поле достаточно однородно. Обычно употребляется цилиндрический резонатор, возбуждаемый на моде  $TM_{010}$ , т. е. на низшей магнитной моде. Для такой моды резонансная частота не зависит от длины резонатора, а электрическое поле направлено вдоль оси прямого круглого цилиндра, как это видно на фиг. 1.2, где показано также распределение электрического поля вдоль радиуса цилиндра. Поле максимально в центре цилиндра и пропорционально бесселевой функции нулевого порядка  $J_0(2,405r/R)$ . Функция Бесселя нулевого порядка при малых  $r$  меняется медленно, так что имеется значительная область, где поле почти однородно. Пробой будет происходить в центре резонатора, где поле максимально. На фиг. 1.3 показаны разрезы двух типичных цилиндрических резонаторов, один из которых возбуждается посредством коаксиальной линии с петлей связи, а другой — от волновода с помощью возбуждающей диафрагмы.

Величина поля в резонаторе определяется путем измерений коэффициента стоячей волны напряжения при резонансе, добротности резонатора  $Q$  и подводимой мощности в момент пробоя. Техника таких измерений в настоящее время является достаточно стандартной и кратко описана в гл. 7. Сам резонатор изготавливается таким образом, чтобы его можно было откачать и наполнить нужным чистым газом при любом желаемом давлении. Вопросы, касающиеся вакуумной техники, также рассмотрены в гл. 7. Многие исследователи, используя описанную или подобную технику, провели измерения на большом числе газов при разнообразных условиях. На фиг. 1.4—1.6 показано, как меняется пробойное поле с давлением при различных значениях других параметров. На фиг. 1.4 таким параметром является род газа, на фиг. 1.5 — размер разрядной камеры, характеризуемый диффузионной длиной  $\Lambda$ , на фиг. 1.6 — частота применяемого поля. Таким образом, эти кривые показывают влияние четырех различных факторов на величину



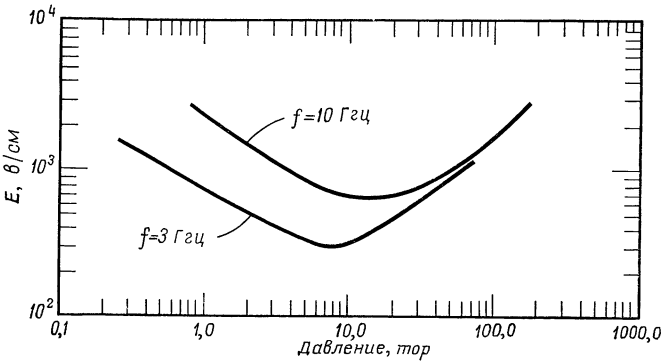
Ф и г. 1.4. Зависимость пробойного поля от давления для различных газов (частота 992 Мгц, диффузионная длина 0,631 см).



Ф и г. 1.5. Зависимость пробойного поля от давления для различных размеров разрядной камеры (газ — воздух, частота 992 Мгц).



пробойного поля; вместе с тем они иллюстрируют характер зависимостей, которые должны быть объяснены теоретически.



Ф и г. 1.6. Зависимость пробойного поля от давления для различных частот для Нег-газа (смесь Ne и Hg); диффузионная длина 0,6 см.

**Теория.** Для разных газов было предложено несколько различных теоретических расчетов, которые будут рассмотрены в последующих главах. Степень сложности того или иного расчета зависит от того, насколько полно учтены в нем процессы столкновений электронов, ионов и атомов. В простейшей теории используется модель, в которой все электроны имеют одинаковую скорость. Анализируя поведение такого среднего электрона, можно с хорошей точностью описать явления пробоя. Были развиты также методы расчета, учитывающие и тот факт, что электроны движутся хаотично с различными скоростями. Благодаря использованию функций распределения электронов по скоростям и энергиям удалось рассчитать пробойные поля, совпадающие с экспериментом в пределах ошибок при диапазоне изменения параметров и переменных, равном нескольким порядкам величин. Такие расчеты успешно описывают ряд газов, в частности некоторые инертные газы. Однако трудности математического характера не дали возможности провести подобные расчеты для всех представляющих интерес газов, для которых имеются экспериментальные данные. Одним из газов, для которых не удается провести точное аналитическое рассмотрение, является воздух. Однако взаимодействие СВЧ с атмосферой представляет значительный интерес; ему посвящена последняя глава. Наряду с экспериментальными результатами мы включили в нее феноменологическую теорию, которая достаточно успешно предсказывает пробойные поля для широкого диапазона изменений давления и частоты.

## АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Представляется уместным обсудить здесь некоторые вопросы теории размерностей. Использование результатов анализа размерностей, хотя об этом редко говорится прямо, оказало значительное влияние на развитие теории СВЧ пробоя. С использованием анализа размерностей связан и выбор специального способа представления экспериментальных и теоретических данных в этой области физики. Мы считаем указанные причины достаточно основательными для того, чтобы сделать сейчас отступление от основного предмета, которому посвящена данная книга.

Теория размерности, или принцип подобия, как его иногда называют, базируется на двух очень простых и, возможно, даже очевидных принципах.

1. Если имеется функциональная зависимость между физической величиной  $A$  и другими величинами  $B, C, D$ , в том числе и размерными константами, например скоростью света, то выбор системы единиц, используемых для измерения величин  $B, C, D$ , не влияет на значение величины  $A$ <sup>1)</sup>.

2. Во всяком уравнении, представляющем соотношение между физически измеряемыми величинами, единицы измерения левой и правой частей уравнения должны быть одинаковыми. Это утверждение, известное под названием «принцип размерностной гомогенности», подробно рассмотрено Бриджменом [1].

С помощью этих простых принципов, разумеется, нельзя получить таких же результатов, как путем составления и решения соответствующих дифференциальных уравнений. С другой стороны, не следует недооценивать силу этого метода, применение которого мы проиллюстрируем ниже. С помощью методов анализа размерностей были получены многие важные результаты. Анализ размерностей успешно и часто использовали два таких известных физика, как Рэлей и Джеймс Джинс.

**Простой пример.** Рассмотрим сначала очень простой пример из области механики. Предположим, что мы хотим найти, как зависит от других переменных период колебаний идеального маятника, представляющего собой массу  $m$ , подвешенную на конце легкой нити длиной  $l$ . Для этого мы прежде всего выпишем все переменные и все размерные константы, которые могут встречаться в задаче, а также их размерности. В данном случае, как обычно в механике,

---

<sup>1)</sup> Под значением величины  $A$  понимается реальное, а не численное значение, например, величина  $A$  может равняться 5 мм, или 0,5 см, или 0,05 м и т. д.— *Прим. ред.*

используем следующие первичные величины: длину, массу и время, которые мы обозначим через  $L$ ,  $M$  и  $T$ .

<i>Величина</i>	<i>Размерность</i>
Период колебаний $t$	$T$
Длина маятника $l$	$L$
Масса маятника $m$	$M$
Угловой размах колебаний $\theta$	Безразмерен
Ускорение силы тяжести $g$	$LT^{-2}$

Выразим теперь период колебаний через другие переменные, полагая, что каждая из них может фигурировать в виде сомножителя с неизвестным показателем степени

$$t = l^\alpha m^\beta \theta^\gamma g^\delta,$$

или, подставляя значение размерностей

$$T = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\delta}.$$

Из условия равенства размерностей в обеих частях соотношения следует, что

$$\alpha + \delta = 0,$$

$$\beta = 0,$$

$$-\gamma = 1.$$

Так как угол  $\theta$  безразмерен, он может входить в уравнение любым способом, поэтому мы сразу можем написать

$$T = f(\theta) \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где  $f(\theta)$  — некая функция от  $\theta$ , которая должна быть найдена каким-либо другим способом. Из элементарной механики мы знаем, что  $f(\theta) = 2\pi$  для малых  $\theta$ . Рассмотренная задача очень проста, однако тот факт, что полученная зависимость периода от длины маятника и ускорения силы тяжести и независимость от массы маятника оказалась правильной, является поразительным.

Анализ размерностей оказывается наиболее полезным при исследовании относительно сложных явлений. В таких случаях мы сталкиваемся обычно с большим числом переменных, учитываемых в эксперименте. Возникает вопрос о наиболее рациональном представлении полученных экспериментально данных или теоретических соотношений. Оказывается, что всякое физическое соотношение между размерными переменными и константами можно преобразовать к соотношению между безразмерными комплексами. Число таких безразмерных комплексов меньше числа размерных.

переменных, так что соотношение между безразмерными комплексами дает более экономную информацию о явлении.

Если известно, какие экспериментальные переменные существенны в данном явлении, то, исходя из сформулированных ранее принципов, можно вывести теорему, позволяющую определить число безразмерных комплексов, необходимых для полного описания данного явления. Эта теорема, обычно называемая  $\Pi$ -теоремой, по-видимому, впервые была сформулирована Букингемом [2], хотя фактически ее еще раньше использовал Джинс [3]. Доказательство, которое мы сейчас рассмотрим, является менее общим, чем доказательство Бриджмена [1], однако оно проще и достаточно для большинства практических целей. Оно подобно доказательству, предложенному Седовым [4].

**$\Pi$ -теорема.** Рассмотрим соотношение между некоторым числом размерных величин  $a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ , которое описывает какой-либо экспериментально или теоретически полученный закон природы:

$$a = f(b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_{n-1}). \quad (1.1)$$

Некоторые из величин  $b$  могут быть переменными для рассматриваемого явления, тогда как другие могут представлять собой размерные константы, такие, как гравитационная постоянная или скорость света в пустоте. Пусть первые  $k$  из этих величин имеют независимые размерности, тогда как размерности оставшихся  $n - 1 - k$  величин представляют собой комбинации размерностей первых  $k$  величин<sup>1)</sup>. Пусть величины  $b_1, b_2, \dots, b_k$  имеют размерность  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . В теории размерности это обычно обозначается следующим образом:

$$[b_1] = B_1, [b_2] = B_2, \dots, [b_k] = B_k. \quad (1.2)$$

В соответствии с принятым условием размерности других переменных в уравнении (1.1) являются комбинациями некоторых степеней размерностей первых  $k$  переменных, т. е.

$$\begin{aligned} [a] &= B_1^{s_1} B_2^{s_2} \dots B_k^{s_k}, \\ [b_{k+1}] &= B_1^{t_1} B_2^{t_2} \dots B_k^{t_k}, \\ &\vdots \\ [b_{n-1}] &= B_1^w B_2^w \dots B_k^w, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где числа  $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  и т. д. определяются соответствующими соотношениями между переменными.

<sup>1)</sup> По обычной терминологии, первые  $k$  величин называются первичными, а остальные  $n - 1 - k$  — вторичными.— *Прим. ред.*

Если произвольным образом изменить все единицы измерений величин  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , то вид основного уравнения не изменится, так что можно положить

$$\begin{aligned} b'_1 &= \beta_1 b_1, \\ b'_2 &= \beta_2 b_2, \\ &\vdots \\ b'_k &= \beta_k b_k, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где штрихи обозначают соответствующие величины после изменения системы единиц. Из соотношений (1.3) и (1.4) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} a' &= \beta_1^{s_1} \beta_2^{s_2} \dots \beta_k^{s_k} a, \\ b'_{k+1} &= \beta_1^{t_1} \beta_2^{t_2} \dots \beta_k^{t_k} b_{k+1}, \\ &\vdots \\ b'_{n-1} &= \beta_1^{w_1} \beta_2^{w_2} \dots \beta_k^{w_k} b_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Первое уравнение из этой системы эквивалентно следующему:

$$a' = \beta_1^{s_1} \beta_2^{s_2} \dots \beta_k^{s_k} f(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \tag{1.6}$$

но так как вид уравнения (1.1) не меняется при изменении системы единиц, величину  $a'$  можно также представить следующим образом:

$$a' = f(\beta_1 b_1, \beta_2 b_2, \dots, \beta_k b_k, \beta_1^{t_1} \beta_2^{t_2} \dots \beta_k^{t_k} b_{k+1}, \dots, \beta_1^{w_1} \beta_2^{w_2} \dots \beta_k^{w_k} b_{n-1}). \tag{1.7}$$

Масштабные множители произвольны, так что мы можем выбрать их любым образом, в частности можем положить<sup>1)</sup>

$$\beta_1 = \frac{1}{b_1}, \beta_2 = \frac{1}{b_2}, \dots, \beta_k = \frac{1}{b_k}.$$

В результате первые  $k$  аргументов в уравнении (1.7) обращаются в единицу. Оставшиеся переменные представляют собой различные комбинации разных  $b$ . Уравнение упрощается, если мы

1) Для простоты принимаем, что все величины  $b_1, b_2, \dots, b_k$  конечны и отличны от нуля. Рассмотрение можно обобщить и на случай, когда некоторые из величин  $b$  обращаются в нуль, но мы такое обобщение здесь проводить не будем.

ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \beta_1^{t_1} \beta_2^{t_2} \dots \beta_k^{t_k} b_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{b_1^{t_1} b_2^{t_2} \dots b_k^{t_k}}, \\ &\vdots \\ \Pi_{n-1-k} &= \frac{b_n}{b_1^{w_1} b_2^{w_2} \dots b_k^{w_k}}, \\ \Pi &= \frac{a}{b_1^{s_1} b_2^{s_2} \dots b_k^{s_k}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-1-k}). \quad (1.9)$$

Исследование уравнений (1.8) и сравнение их с соотношениями (1.2) и (1.3), определяющими размерности, сразу показывает, что все величины, обозначенные через  $\Pi$ , безразмерны по отношению к системе размерностей  $B$ , например

$$[\Pi] = \frac{[a]}{[b_1^{s_1}] [b_2^{s_2}] \dots [b_k^{s_k}]} = \frac{B_1^{s_1} B_2^{s_2} \dots B_k^{s_k}}{B_1^{s_1} B_2^{s_2} \dots B_k^{s_k}} = 1.$$

Поэтому соотношение (1.1) между  $n$  размерными величинами  $a, b_1, \dots, b_{n-1}$  эквивалентно соотношению (1.9) между  $n - k$  безразмерными  $\Pi$ -комплексам, где  $k$  — число первичных величин. В этом заключается  $\Pi$ -теорема; это очень общий результат анализа размерностей, потому что он справедлив при любом выборе системы единиц.

**Размерности в явлениях пробоя.** Рассмотрим теперь применение  $\Pi$ -теоремы к высокочастотному пробоя в газах. Мы хотим найти соотношение между пробойным значением напряженности электрического поля  $E_b$  и экспериментальными параметрами, определяющими пробой в тех или иных условиях. Два из этих параметров зависят особым образом от атомной структуры изучаемого газа — это потенциал ионизации  $u_i$ , измеряемый в вольтах, и длина свободного пробега  $l$ , т. е. расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями с атомами. Длина свободного пробега имеет, очевидно, размерность длины и обратно пропорциональна плотности частиц или, при заданной температуре, обратно пропорциональна давлению. Две другие переменные, влияющие на пробойное поле, являются внешними по отношению к газу. Одна из этих величин характеризует изменение электрического поля во времени (в качестве такой величины можно использовать длину волны в свободном пространстве  $\lambda$ ), вторая — размер

и форму разрядного объема, от которых зависит скорость диффузии. В качестве такой величины можно взять характерную диффузионную длину  $\Lambda$ . Более строгое определение длины свободного пробега и характерной диффузионной длины будет дано при подробном рассмотрении в последующих главах. Сейчас для нас важно лишь то, что обе эти переменные имеют размерность длины.

Таким образом, пробойное значение электрического поля можно записать в виде некоторой функции от четырех переменных:

$$E_b = E(u_i, l, \Lambda, \lambda). \quad (1.10)$$

Мы имеем пять переменных, но только две независимые размерности — потенциал и длину. Из  $\Pi$ -теоремы следует, что для представления функциональной зависимости, эквивалентной (1.10), достаточно трех независимых безразмерных комплексов.

Чтобы получить группу из трех безразмерных комплексов, величины можно скомбинировать различными способами. Например, можно взять комбинацию

$$\frac{El}{u_i}, \frac{\Lambda}{l}, \frac{\Lambda}{\lambda},$$

но можно выбрать и комбинацию такого вида:

$$\frac{E\Lambda}{u_i}, \frac{E\lambda}{u_i}, \frac{\lambda}{l}.$$

В любом случае, если мы можем представить один из этих безразмерных комплексов как функцию двух других, мы имеем полное решение проблемы.

Этот результат сразу показывает, почему описание явлений высокочастотного пробоя представляет собой более трудную задачу, чем описание пробоя в постоянных полях. Если длина волны поля не является параметром задачи, то число первичных величин остается равным двум, но полное число переменных уменьшается до четырех, так что проблема описывается всего двумя независимыми безразмерными комплексами, например  $E\Lambda/u_i$  и  $\Lambda/l$ . Таким образом, для описания пробоя в постоянном поле достаточно двумерного графика, в то время как для описания условий высокочастотного пробоя необходимо построить поверхность в трехмерном пространстве.

Отметим, что в указанной выше комбинации переменных для данного газа  $u_i$  является размерной константой. Кроме того, длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению газа, причем коэффициент пропорциональности также фиксирован для данного газа и данной энергии электронов. Поэтому часто удобно использовать следующие комплексы:

$$\frac{E}{p}, p\Lambda, \frac{\Lambda}{\lambda}$$

или

$EA, E\lambda, p\lambda,$

которые соответствуют приведенным ранее комбинациям комплексов. Такие комплексы, выбранные на основании рассмотрения размерностей, называются собственными переменными задачи [5], даже если они не все безразмерны.

Собственные переменные оказались очень удобными при описании основных явлений при пробое и будут часто использоваться в этой книге. Однако следует помнить, что порой следует проявлять осторожность, так как в действительности определяющей переменной является не плотность, а концентрация частиц. Важно также помнить, что при сравнении различных газов не следует игнорировать потенциал ионизации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bridgman P. W., Dimensional Analysis, New Haven, Conn., 1963.
2. Buckingham E., Phys. Rev., 4, 349 (1914).
3. Jeans J. H., Proc. Roy. Soc., 76, 545 (1905).
4. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, М., 1957.
5. Brown S. C., в книге Handbuch der Physik, Bd. 22, Berlin, 1956, S. 536.



## Электронные столкновения

Энергия электромагнитного поля передается газу посредством столкновений электронов или других заряженных частиц с нейтральными частицами, являющимися основной компонентой газа. Электроны ускоряются электрическим полем; количество приобретаемой ими при этом энергии в значительной степени определяет характер происходящих столкновений. Ионы обычно представляют меньший интерес, так как приобретаемая ими энергия мала, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в основном электроны. Так как характер столкновений очень важен при исследовании высокочастотного пробоя, в настоящей главе мы кратко остановимся на различных типах столкновений электронов с атомами и молекулами. Для более детального изучения этого вопроса можно обратиться, например, к книге Мак-Даниеля [1], где имеется обширная библиография, отражающая современное состояние вопроса.

Различают столкновения упругие и неупругие, причем неупругие столкновения в свою очередь делятся на неупругие столкновения первого рода (мы их будем называть просто неупругими столкновениями) и неупругие столкновения второго рода<sup>1)</sup>. При упругом столкновении электрон просто отражается от атома. При этом между электроном и атомом происходит некоторое перераспределение кинетической энергии, но внутренняя энергия атома не меняется. При неупругом столкновении происходит также изменение внутренней энергии атома. Это может быть возбуждение атома на один из высших энергетических уровней или его однократная или многократная ионизация. Возбужденный атом обычно очень быстро возвращается в основное состояние (высвечивается), излучая полученную энергию. Однако на некоторых уровнях атомы остаются в течение гораздо больших промежутков времени, измеряемых миллисекундами. Такие состояния атомов, называемые метастабильными, могут играть важную роль в явлениях газового разряда. Неупругие столкновения, сопровождаемые излучением световых

---

<sup>1)</sup> Автор вместо термина «неупругие столкновения второго рода» использует малоупотребительный в русской литературе термин «сверхупругие столкновения». — *Прим. перев.*

квантов (иногда с захватом электрона), называются радиационными. Неупругими столкновениями второго рода называются столкновения электронов с возбужденными атомами, при которых электрон получает энергию за счет внутренней энергии атома. В явлениях газового разряда высвечивание метастабильных состояний при такого рода столкновениях часто играет очень существенную роль.

В кинетической теории газов обычно предполагается, что время, в течение которого происходит столкновение (длительность столкновения), гораздо меньше всех других характерных времен. Так как силовые поля, окружающие атомы и молекулы, не локализованы резко в пространстве, трудно достаточно строго и точно определить длительность столкновения. Тем не менее мы можем определить время, в течение которого электрон находится в окрестности атома, если произвольно условимся считать окрестностью атома область размером  $10$  атомных радиусов. Для теплового электрона с энергией около  $1/40$  эв это время оказывается порядка  $10^{-14}$  сек. Оно крайне мало по сравнению с интервалом времени между столкновениями, а также по сравнению с периодом обычно применяемых высокочастотных электрических полей. Однако при рассмотрении пробоя в лазерном луче, где частота имеет порядок  $10^{15}$  сек $^{-1}$ , это обстоятельство следует учитывать.

## УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

### Средняя длина свободного пробега

Очень полезным является понятие средней длины свободного пробега, вводимое в классической кинетической теории газов. При этом атомы, молекулы и электроны рассматриваются как упругие гладкие твердые сферы очень малых размеров, хаотически движущиеся в газе. Движение каждой частицы происходит по сложной зигзагообразной траектории, изломы которой вызваны столкновениями того же типа, какие испытывают бильiardные шары. Расстояние, проходимое частицей между столкновениями, называется длиной свободного пробега, а среднее ее значение — средней длиной свободного пробега.

Функцию распределения длин свободных пробегов легко получить, предположив, что скорости всех частиц равны по абсолютной величине и что все направления равновероятны.

Пусть  $L(x)$  есть вероятность того, что длина свободного пробега превышает  $x$ . Вероятность того, что столкновение произойдет при длинах свободного пробега, заключенных между  $x$  и  $x + dx$ , пропорциональна  $dx$  и равна  $\alpha dx$ . Если среда однородна, коэффициент  $\alpha$  не зависит от  $x$ , но, разумеется, зависит от таких параметров, как давление и скорость. Вероятность того, что между  $x$  и  $x + dx$  столк-

новения не произойдет, равна  $1 - \alpha dx$ . Таким образом, вероятность того, что столкновения не произойдет, пока частица проходит путь длиной  $x + dx$ , есть произведение вероятностей  $1 - \alpha dx$  и  $L(x)$ . Следовательно,

$$L(x)(1 - \alpha dx) = L(x + dx) = L(x) + \frac{\partial L}{\partial x} dx,$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha L(x).$$

Интегрируя и используя очевидное условие  $L(0) = 1$ , получаем

$$L(x) = e^{-\alpha x}.$$

Тогда вероятность того, что длина свободного пробега частицы заключена между  $x$  и  $x + dx$ , равна

$$L(x) - L(x + dx) = -\frac{\partial L}{\partial x} dx = p(x) dx.$$

Функция  $p(x)$  и является функцией распределения длин свободных пробегов, а средняя длина свободного пробега равна

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} xp(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} = l. \quad (2.1)$$

Это вычисление средней длины свободного пробега проведено в предположении, что скорости всех электронов одинаковы. Если же имеются группы электронов с различными скоростями, то следует найти среднюю длину свободного пробега для каждой группы, а затем произвести усреднение, используя функцию распределения электронов по скоростям.

### Эффективное поперечное сечение столкновений

Вероятность того, что электрон столкнется с атомом, можно описывать и при помощи другого понятия — сечения столкновения<sup>1)</sup>. Это название, а также простой вывод соответствующих формул основаны на идеализированном представлении о том, что газ состоит из быстро движущихся маленьких гладких твердых сфер. Однако понятие сечения можно обобщить и на произвольные случаи взаимодействий; оно оказывается чрезвычайно полезным.

Рассмотрим однородный по скоростям пучок электронов, проходящий через газ идеализированных атомов в виде твердых сфер, каж-

<sup>1)</sup> Более правильно писать «эффективное поперечное сечение». Однако для краткости всюду далее мы используем сокращенный термин «сечение». — *Прим. ред.*

дая из которых имеет площадь поперечного сечения  $Q \text{ см}^2$ . Если плотность таких атомов равна  $N$  частиц на  $1 \text{ см}^3$ , то вероятность столкновения для каждого электрона пучка на пути  $dx$  пропорциональна  $NQdx$ . Электроны, испытавшие столкновение, выходят из пучка, так что относительное изменение тока пучка равно

$$\frac{dI}{I} = NQ dx. \quad (2.2)$$

Интегрирование дает

$$I = I_0 e^{-NQx}, \quad (2.3)$$

где  $I_0$  — начальный ток пучка, а  $I$  — ток в пучке после прохождения расстояния  $x$ .

Теперь рассмотрим такой же эксперимент в реальном газе, атомы которого уже не являются идеальными твердыми сферами. Здесь пучок тоже будет ослабевать в результате столкновений, выводящих некоторые электроны из пучка. Относительное количество таких отклоненных электронов пропорционально пройденному пути, так что ток будет меняться экспоненциально:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}.$$

Измерив  $\alpha$  и зная  $N$ , можно с помощью соотношения (2.3) вычислить эффективное сечение столкновений.

Плотность атомов газа определяется выражением

$$N = 2,687 \cdot 10^{19} \left( \frac{p}{760} \right) \left( \frac{273}{T} \right) \text{ см}^{-3},$$

где  $p$  — давление в торах,  $T$  — абсолютная температура. Отсюда сечение столкновений электронов заданной скорости с атомами газа равно

$$Q = \frac{\alpha}{N} = 1,034 \cdot 10^{-19} \alpha \left( \frac{T}{p} \right).$$

Описанная картина взаимодействия электронов с атомами довольно близка к действительности, так что понятие сечения столкновений можно с успехом использовать при интерпретации экспериментальных данных, относящихся к различным газам. Однако при более детальном рассмотрении обнаруживаются трудности. Дело в том, что взаимодействие атомов реального газа с другими частицами происходит и тогда, когда их центры разделены значительными расстояниями. Даже тот случай, когда потенциалы взаимодействия описываются функциями вида  $r^{-n}$ , где  $n$  велико (т. е. силы взаимодействия быстро убывают с увеличением расстояния), далеко не эквивалентен модели твердых сфер, где силы равны нулю при расстояниях, превышающих некоторое значение. При таком потенциале взаимодействия все электроны пучка, проходящего через газ, в той или иной мере испытывают отклонения от первоначаль-

ного направления, ибо силовое поле каждого атома распространяется на весь пучок. Поэтому сечение столкновений, определяемое в опытах по рассеянию электронного пучка, должно, казалось бы, зависеть от чувствительности применяемой методики и при бесконечном увеличении чувствительности должно неограниченно возрастать. Однако Мотт [2, 3], проанализировав проблему с квантовомеханической точки зрения, показал, что сечение является величиной конечной, если на больших расстояниях сила взаимодействия между электроном и атомом уменьшается быстрее чем  $r^{-3}$ . Эта конечная величина, которая может быть измерена экспериментально, и называется полным сечением столкновения.

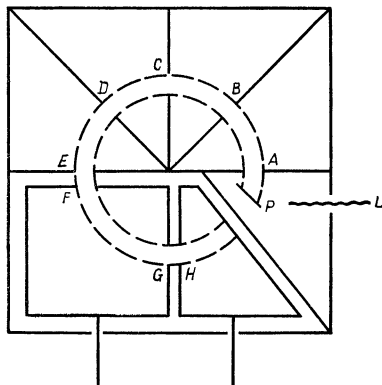
### Измерение сечений столкновений

Эксперименты по измерению ослабления электронного пучка, проходящего через различные газы, производились уже более 60 лет назад, но лишь Рамзауэр [4] выполнил первые надежные измерения сечений столкновений при разных энергиях электронов.

Схема установки, применявшейся Рамзауэром, приведена на фиг. 2.1. Свет, падающий на фотокатод  $P$ , вырывает из него электроны, которые получают затем ускорение в направлении к электроду  $A$ . Магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа, в сочетании с системой диафрагм приводит к тому, что электроны только заданной энергии будут двигаться по окружностям, обозначенным на фиг. 2.1 пунктиром.

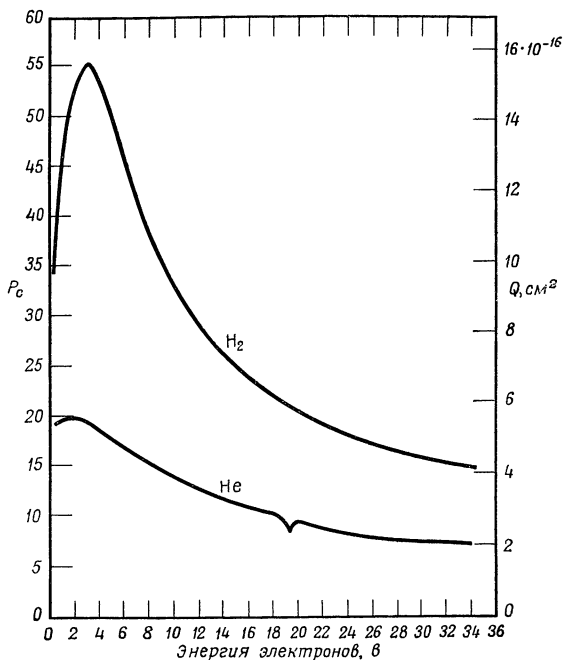
Свободная от электрических полей область между  $G$  и  $F$  содержит исследуемый газ. Измеряя электронный ток в сечениях  $F$  и  $H$ , можно найти число электронов, отклонившихся из пучка из-за столкновений, и таким образом определить сечение столкновений. Большинство последующих исследователей использовало аналогичную аппаратуру.

Норманд [5] и Броуд [6] измерили сечения столкновений для ряда различных газов. Однако результаты их измерений сильно расходятся, хотя оба автора использовали аналогичную аппаратуру. Недавно Голден и Бэндел<sup>1)</sup>, работая по методике, аналогичной

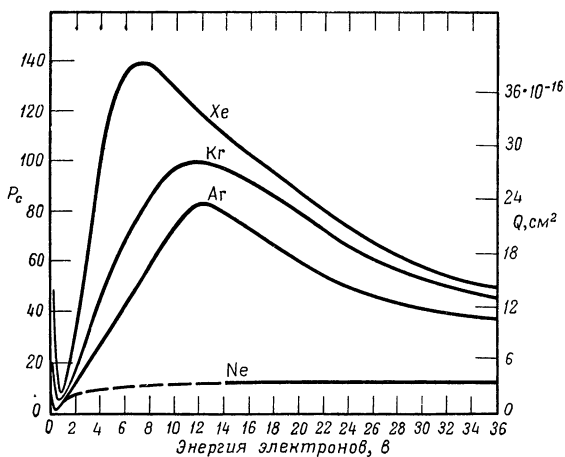


Ф и г. 2.1. Прибор Рамзауэра для измерения сечений рассеяния.

<sup>1)</sup> D. E. G o l d e n, H. W. B a n d e l, частное сообщение; см. также [7]



Ф и г. 2.2. Вероятности столкновения и сечение столкновения для гелия и водорода.



Ф и г. 2.3. Вероятности столкновения и сечение столкновения для неона, аргона, криптона и ксенона.

методике Рамзауэра, но используя такие усовершенствования, как дифференциальную откачку, сверхвысоковакуумную технику и современные электронные схемы, получили очень точные значения полного сечения упругого рассеяния электронов на атомах гелия и аргона. Было выполнено также много не прямых измерений сечений столкновений с использованием СВЧ техники. Особенно следует отметить работы Фелпса, Фандингсленда и Брауна [8]. Результаты некоторых из этих измерений приведены в книге Брауна [9], где они сопоставляются с результатами прямых измерений Голдена и Бэндела. Большая часть результатов получена при очень малых значениях энергии электронов.

На фиг. 2.2 и 2.3 приведены данные по рассеянию электронов на молекулах водорода и инертных газов. При этом использовались результаты Голдена и Бэндела, а для тех газов, с которыми эти авторы не работали, приведены результаты Норманда и Броуда.

### Дифференциальное сечение рассеяния

До сих пор мы ничего не говорили об угловом распределении электронов, рассеянных из пучка. При упругих столкновениях электроны рассеиваются из пучка на все возможные углы. Сечение упругого рассеяния можно представить в виде функции от угла между направлением пучка и направлением движения рассеянного электрона. Пусть

$$p(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi$$

— вероятность того, что электрон рассеется в элемент телесного угла  $\sin \theta d\theta d\varphi$ ; при этом должно выполняться очевидное условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 1.$$

Величина  $p(\theta) Q_0 \sin \theta d\theta d\varphi$  называется дифференциальным сечением упругого рассеяния в телесный угол  $\sin \theta d\theta d\varphi$ , а  $Q_0$  является полным сечением упругого рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния часто записывается в виде

$$I_0(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

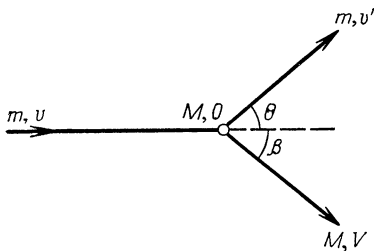
так что

$$Q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_0(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.4)$$

### Эффективное сечение передачи импульса

Во многих проблемах представляют интерес потери энергии, испытываемые электронами при упругих столкновениях с атомами и молекулами. Эти потери зависят от угла, на который рассеивается электрон, и их легко вычислить, найдя сначала изменение импульса.

Рассмотрим электрон с массой  $m$  и скоростью  $v$ , падающий на покоящийся атом с массой  $M$ . После столкновения электрон движется со скоростью  $v'$  под углом  $\theta$  относительно направления своего первоначального движения, а атом движется со скоростью  $V$  под углом  $\beta$ , как показано на фиг. 2.4. Закон сохранения энергии дает одно уравнение, связывающее  $v$ ,  $v'$  и  $V$ , а закон сохранения импульса дает еще два уравнения, содержащие также углы  $\theta$  и  $\beta$ . Исключая из этих уравнений  $\beta$  и  $V$  и предполагая, что отношение  $m/M$  мало и что, следовательно, членом  $(m/M)^2$  можно пренебречь, получаем следующее выражение для относительного изменения величины скорости электрона, равного относительному изменению его импульса:



Ф и г. 2.4. Столкновение электрона, обладающего массой  $m$  и скоростью  $v$ , с неподвижным атомом с массой  $M$ .

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{m}{M} (1 - \cos \theta). \quad (2.5)$$

Так как энергия пропорциональна  $v^2$  и  $\Delta(v^2) = 2v\Delta v$ , отсюда сразу видно, что доля энергии, теряемая электроном при столкновении, равна  $(2m/M)(1 - \cos \theta)$ . Во многих процессах существенна как раз передача энергии или импульса от электронов к атомам. При рассмотрении таких процессов используется так называемое сечение передачи импульса, или транспортное сечение, которое равно произведению дифференциального сечения, входящего в интегральное выражение полного сечения, на зависящий от угла множитель из выражения (2.5). Сечение передачи импульса снабжают обычно индексом  $d$ , так как оно используется при рассмотрении процессов диффузии, и обозначают через  $Q_d$ . Оно определяется выражением

$$Q_d = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I(\theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (2.6)$$

Из рассмотрения этого интеграла следует, что при  $I(\theta) = \text{const}$  сечение передачи импульса совпадает с полным сечением и значи-



тельно отличается от него лишь при наличии преимущественного рассеяния назад или вперед. Средняя длина свободного пробега частицы  $l$  связана с сечением выражением  $l = 1/NQ_0$ , а средняя длина свободного пробега для передачи импульса (транспортная длина) равна  $l_d = 1/NQ_d$ .

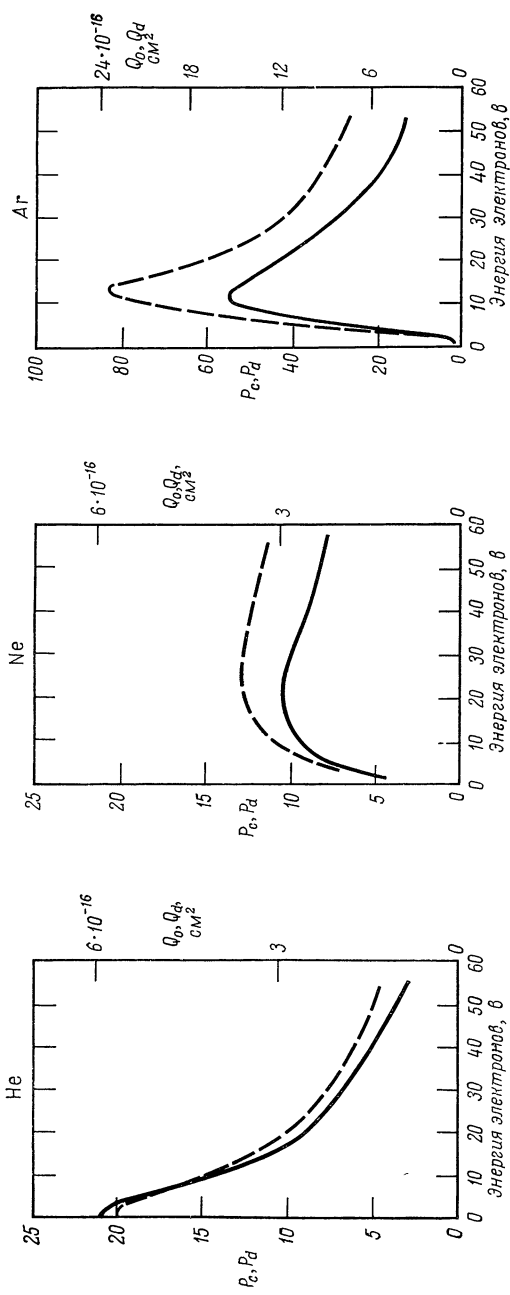
В последующих главах мы будем использовать как полные сечения и пробеги, так и транспортные сечения и пробеги. Различие между этими двумя величинами показано на фиг. 2.5, где приведены полученные Месси и Бархопом (см. [3], гл. 1 и 3) сечения передачи импульса и полные сечения рассеяния электронов на атомах гелия, неона и аргона. При этом дифференциальные сечения измерялись экспериментально и затем подставлялись в интеграл, определяющий сечение для передачи импульса.

### Вероятность столкновения

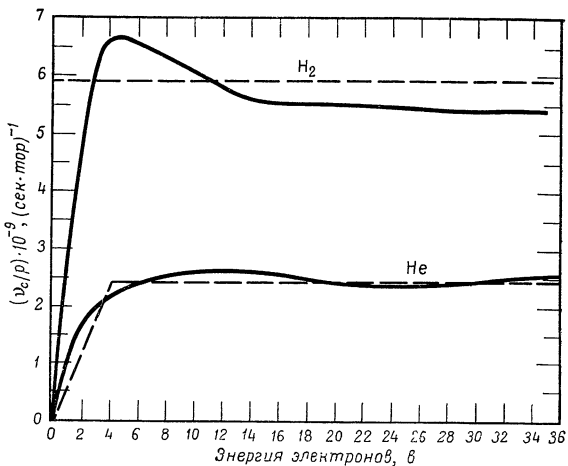
Взаимодействие электронов с атомами можно описывать также с помощью величины  $P_c$ , называемой вероятностью столкновения и определяемой из соотношения  $lP_cp = 1$ , где  $p$  — давление, а  $l$  — средняя длина свободного пробега. Отсюда видно, что сечение столкновения  $Q$  (в  $см^2$ ) получается из соответствующей вероятности столкновения просто умножением величины  $P_c$  на  $2,82 \cdot 10^{-17}$ , если пробег выражен в сантиметрах, а давление в торах. Если сечение измеряется в единицах  $\pi a_0^2$ , где  $a_0$  — радиус первой борховской орбиты для атома водорода, то переводный множитель равен 0,321. Очевидно, что подобным образом можно ввести транспортную вероятность сечения, которую мы обозначим через  $P_d$ . Далее мы будем использовать как понятие сечения, так и вероятности столкновения. В частности, в данных по электронным столкновениям, приведенным на фиг. 2.2 и 2.3, по оси ординат справа отложены сечения, а слева соответствующие вероятности столкновений.

### Частота столкновений

Частота столкновений  $\nu_c$  определяется как число столкновений электрона с атомами за 1 сек. Частота столкновений равна  $\nu/l$ , где  $\nu$  — скорость электрона, а  $l$  — средняя длина свободного пробега. Вообще говоря, частота столкновений есть функция скорости электрона, но для гелия и водорода она в широком диапазоне не зависит от энергии. В некоторых газах, где частота столкновений является функцией энергии, полезно ввести понятие средней частоты столкновений. Данные по частотам столкновений для некоторых газов приведены на фиг. 2.6 и 2.7. Эти результаты получены соответствующим пересчетом из данных, приведенных на фиг. 2.2 и 2.3. Иногда нам придется использовать понятие транспортной частоты столкно-

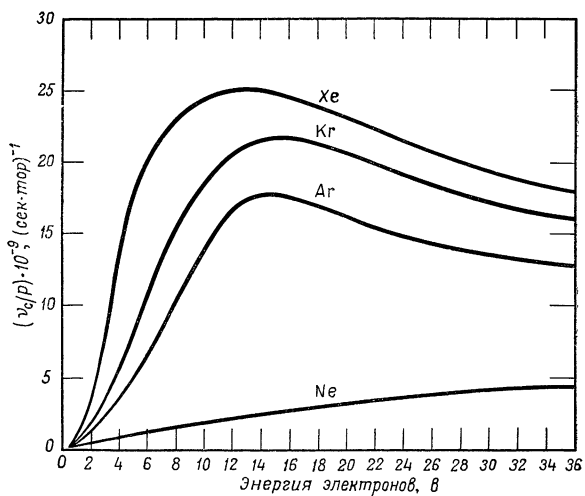


Ф и г. 2.5. Сравнение полного сечения (пунктирные кривые) с сечением передачи импульса (сплошные кривые).



Ф и г. 2.6. Отношение частоты столкновений электронов к давлению для гелия и водорода.

Пунктиром показано приближение, используемое в тексте.



Ф и г. 2.7. Отношение частоты столкновений электронов к давлению для неона, аргона, криптона и ксенона.

вений  $\nu_m$ , которая связана с сечением передачи импульса так же, как частота  $\nu_c$  связана с полным сечением столкновения. Приведем также некоторые полезные численные соотношения:

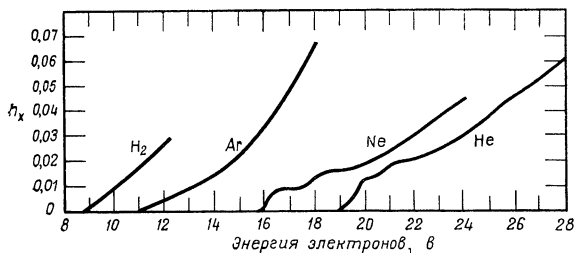
$$\nu_c = \nu_r P_c = 5,93 \cdot 10^7 u^{1/2} P_c = 21,0 \cdot 10^7 u^{1/2} P Q,$$

где  $u$  выражается в вольтах,  $p$  — в торах, а  $Q$  — в квадратных ангстремах.

## НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

### Возбуждение и ионизация

Если энергия сталкивающегося с атомом электрона достаточно велика, то столкновение может стать неупругим. При этом часть кинетической энергии электрона расходуется на увеличение внутренней энергии атома, в результате чего он переходит в одно из



Ф и г. 2.8. Эффективность возбуждения электронами гелия, неона, аргона и водорода.

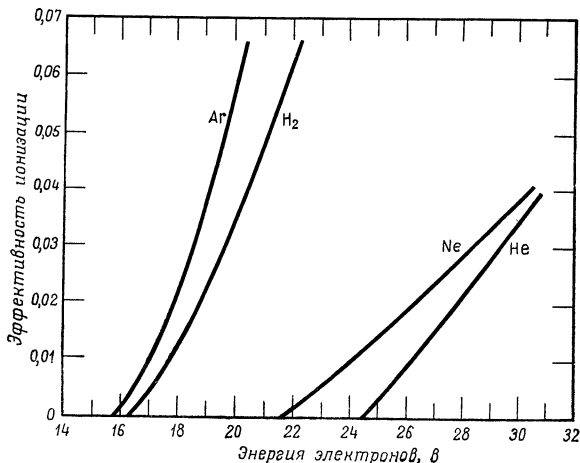
возбужденных состояний. Обычно возбужденный атом довольно быстро излучает энергию и возвращается в исходное основное состояние. Однако некоторые возбужденные уровни являются метастабильными и могут существовать в течение времени порядка миллисекунды, прежде чем излучат полученную при столкновении энергию. Если энергия сталкивающегося электрона больше некоторой минимальной величины, необходимой для полного удаления электрона из атома, то в результате такого столкновения может произойти ионизация атома.

Неупругие соударения электронов с атомами и молекулами представляют большой интерес для многих областей физики; этому вопросу посвящена обширная литература. Мы приведем здесь только основные определения и экспериментальные данные для некоторых газов. Для более подробного ознакомления с вопросом можно обратиться, например, к книге Мак-Даниеля [1].

Вероятности возбуждения и ионизации обычно обозначаются через  $P_x$  и  $P_i$ , но часто более удобно использовать понятие эффектив-

ности возбуждения  $h_x = P_x/P_c$  и эффективности ионизации  $h_i = P_i/P_c$ .

Измерения относительного числа столкновений, ведущих к возбуждению, очень трудны. Хотя опубликовано много результатов измерения эффективности возбуждения некоторых отдельных уровней, прямых измерений полной суммарной эффективности возбуждения выполнено очень мало. На фиг. 2.8 приведены данные Майера Лейбница [10] для гелия, неона и аргона и данные Рамьена [11] для водорода.



Ф и г. 2.9. Эффективность ионизации электронами гелия, неона, аргона и водорода.

Легче измеряется эффективность ионизации; многие результаты таких измерений приведены в книге Брауна [9]. На фиг. 2.9 для четырех газов представлены результаты измерения эффективности ионизации в довольно небольшом диапазоне энергий. Данные для гелия и неона взяты из работы Фокса [12], численные результаты которого основаны на работе Смита [13], данные для аргона — из работ Фокса [12] и Бликни [14], данные для водорода — из работы Тейта и Смита [15].

## ПРОЦЕССЫ ПОТЕРИ ЭЛЕКТРОНОВ

### Диффузия

Если в газе имеется градиент плотности или скорости, то возникает поток частиц в таком направлении, чтобы уменьшить этот градиент. Это явление называется диффузией.

**Свободная диффузия.** Рассмотрим диффузию электронов в неограниченном газе. Скорость диффузии можно характеризовать величиной, называемой коэффициентом диффузии  $D$ ; ниже мы свяжем его с сечением рассеяния. Введем понятие потенциала диффузии, определив его как произведение коэффициента диффузии  $D$  на плотность  $n$  диффундирующих частиц. Поток электронов в газе представляет собой электрический ток. Плотность этого потока электронов  $\Gamma$  равна взятому с обратным знаком градиенту диффузионного потенциала  $Dn$ :

$$\Gamma = -\nabla (Dn). \quad (2.7)$$

Это соотношение является также определением коэффициента диффузии. Уравнение непрерывности для электронов имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot \Gamma - P = 0,$$

где  $P$  — скорость образования или потерь электронов в рассматриваемом объеме. Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla^2 (Dn) + nv_i, \quad (2.8)$$

где  $nv_i$  есть скорость образования электронов каким-либо механизмом, например за счет ионизации газа в электрическом поле; иными словами,  $v_i$  представляет собой скорость ионизации, отнесенную к одному электрону.

В зависимости от граничных и начальных условий уравнение (2.8) имеет различные решения. Здесь мы рассмотрим некоторые вопросы, типичные для проблемы высокочастотного пробоя. В общем случае будем считать, что коэффициент диффузии не зависит от координат. Тогда в уравнении (2.8) можно разделить переменные и оно принимает вид

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} - v_i = \frac{D}{n} \nabla^2 n. \quad (2.9)$$

Если скорость ионизации не зависит от координат, то обе части уравнения (2.9) можно положить равными константе  $-\gamma$ , так что

$$\nabla^2 n = -\frac{\gamma n}{D} \quad (2.10)$$

и

$$\frac{dn}{dt} = (v_i - \gamma) n. \quad (2.11)$$

Если скорость ионизации не зависит от времени, то уравнение (2.11) легко решается:

$$n = n_0 e^{(v_i - \gamma)t}. \quad (2.12)$$

Решение уравнения (2.10) зависит от характера симметрии задачи, в соответствии с которой следует выбирать систему координат, иначе говоря, — от вида лапласиана. Мы рассмотрим здесь лишь прямоугольную систему координат, удобную для задач с плоскостью симметрии, и цилиндрическую систему, удобную для аксиально симметричных задач. Такая геометрия наиболее часто встречается в эксперименте.

Рассмотрим ионизацию в камере в форме параллелепипеда с размерами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , предполагая, что камера имеет металлические стенки, т. е. плотность электронов на граничных поверхностях равна нулю. Тогда решение уравнения (2.10) можно выразить через тригонометрические функции:

$$n = n_0 \sin \frac{\pi x}{X} \sin \frac{\pi y}{Y} \sin \frac{\pi z}{Z}. \quad (2.13)$$

Возможны также решения, содержащие высшие гармоники тригонометрических функций, но пока мы не будем их рассматривать. Из решения (2.13) получаем следующее выражение для собственных значений постоянной разделения  $\gamma$ :

$$\frac{\gamma}{D} = \frac{\pi^2}{X^2} + \frac{\pi^2}{Y^2} + \frac{\pi^2}{Z^2}. \quad (2.14)$$

Если рассматривать процесс в сосуде цилиндрической формы, то естественно использовать цилиндрическую систему координат. Тогда, записав лапласиан в цилиндрической системе координат и по-прежнему положив, что плотность электронов на стенках равна нулю, мы получим следующее решение диффузионного уравнения:

$$n = n_0 \sin \frac{\pi x}{X} J_0 \left( 2,405 \frac{r}{R} \right), \quad (2.15)$$

где  $X$  — высота, а  $R$  — радиус цилиндра. Собственные значения  $\gamma$  определяются из условия

$$\left( \frac{2,405}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{X} \right)^2 = \frac{\gamma}{D}. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что решение для случая бесконечных параллельных пластин, находящихся на расстоянии  $X$ , можно получить предельным переходом как из решения (2.14), устремив  $Y$  и  $Z$  к бесконечности, так и из решения (2.16), устремив к бесконечности  $R$ . В обоих случаях уравнение для собственных значений постоянной разделения  $\gamma$  будет иметь вид  $\gamma/D = \pi^2/X^2$ .

Так как величина  $\gamma/D$  имеет размерность квадрата обратной длины, удобно ввести характерную диффузионную длину  $\Lambda$ , поло-

жив

$$\frac{\gamma}{D} = \frac{1}{\Lambda^2}. \quad (2.17)$$

Так как большинство экспериментальных устройств содержит параллельные пластины, или что-то близкое к этому, характерная диффузионная длина равна расстоянию между пластинами, деленному на  $\pi$ . В случае цилиндрической геометрии иногда бывает нужно ввести небольшую поправку на конечный радиус.

С помощью (2.17) можно представить соотношение (2.12) в виде

$$n = n_0 e^{(v_i - D/\Lambda^2)t}. \quad (2.18)$$

Из соотношения (2.18) видно, что скорость изменения электронной плотности в некотором ионизируемом объеме, частицы из которого уходят путем диффузии, зависит от разности между скоростью ионизации и отношением коэффициента диффузии к квадрату диффузионной длины. Таким образом, это соотношение описывает увеличение электронной плотности, ведущее к пробоям. Как мы увидим позднее, при некоторых добавочных условиях оно позволяет получить критерий, определяющий величину пробойного поля.

При рассмотрении пробоя уравнение диффузии чаще всего решается методом разделения переменных. Однако при изучении тех условий пробоя, когда существенное значение имеет время образования плазмы, оказывается полезным решение вида [10]

$$n(x, t) = A (Dt)^{-1/2} e^{-(x^2/4Dt)}. \quad (2.19)$$

Мы рассмотрим такие решения более детально в связи с вопросами пробоя в атмосфере.

**Амбиполярная диффузия.** До сих пор мы рассматривали диффузию электронов в отсутствие взаимодействия их с ионами. Именно такая диффузия, называемая свободной диффузией, является обычно наиболее важным механизмом, определяющим пробой. Однако при достаточно больших плотностях электронов и ионов электростатические силы настолько велики, что движение положительных и отрицательных зарядов оказывается связанным, и процесс диффузии протекает иначе. Заряженные частицы диффундируют теперь быстрее, чем диффундировали бы ионы в отсутствие взаимодействия. Эта совместная диффузия электронов и ионов называется амбиполярной диффузией. Такая диффузия иногда важна при рассмотрении пробоя при большой плотности электронов. Мы обсудим этот вопрос более детально в гл. 8. Переход от свободной диффузии к амбиполярной подробно изучался Аллисом и Роузом [17, 18].



### Захват электронов (прилипание)

Прилипание электронов к нейтральным атомам и молекулам естественно рассматривать как процесс потери электронов, так как, прилипнув к тяжелым нейтральным частицам, электроны перестают играть существенную роль в процессах высокочастотного пробоя. Правда, потери, связанные с прилипанием, несколько отличаются от диффузионных потерь, при которых электроны удаляются из области, где существует электромагнитное поле. В результате прилипания электрона нейтральный атом получает отрицательный заряд; при этом вместо электрона, который мог бы приобрести в высокочастотном поле большую энергию, мы имеем отрицательный ион, обладающий по крайней мере в 2000 раз большей массой и поэтому приобретающий под действием высокочастотного поля относительно ничтожные скорости. Таким образом, ионы более или менее фиксированы в пространстве и играют незначительную роль в рассматриваемых нами процессах. Поэтому прилипание эквивалентно исчезновению электрона.

Электроны могут прилипнуть к атомам с почти заполненной внешней электронной оболочкой, как это имеет место, например, в хлоре или кислороде. В некоторых же газах прилипание ничтожно мало. Мерой вероятности прилипания является энергия сродства к электрону, значения которой для различных газов приведены в книге Брауна [9].

В литературе используются различные способы количественного описания прилипания. Если  $v_a$  — скорость прилипания, т. е. число прилипаний за 1 сек, то отношение  $h_a = v_a/v_c$  называется эффективностью прилипания в полной аналогии с рассмотренными ранее эффективностями возбуждения и ионизации. Эта величина часто называется также вероятностью прилипания; именно ее использовал Брэдбери [19] для описания результатов своих экспериментов. Результаты многих современных экспериментов описываются с помощью величины, обычно обозначаемой через  $\alpha/p$ , где  $\alpha$  — вероятность прилипания на 1 см пути.

Предположим, что  $n$  электронов начинают двигаться в направлении  $x$ . Если  $\alpha$  — вероятность прилипания на 1 см пути в направлении  $x$ , то количество электронов  $dn$ , потерянных при прохождении пути  $dx$ , равно

$$dn = \alpha n dx.$$

Это уравнение решается элементарно, и мы имеем

$$n = n_0 e^{-\alpha x}.$$

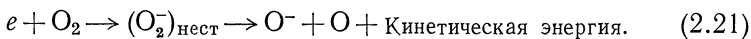
Полученные уравнения совершенно аналогичны уравнениям (2.2) и (2.3), так что логично ввести понятие средней длины свободного

пробега для прилипания  $l_a$  как величины, обратной  $\alpha$ , а также понятие частоты прилипания  $\nu_a$ , которая равна  $v/l_a$ , где  $v$  — скорость электрона. При обработке результатов экспериментов по прилипанию следует проявлять известную осторожность, поскольку здесь электроны не образуют пучка, как в опытах типа рамауэровских. Электроны движутся через газ в виде роя, средняя дрейфовая скорость которого направлена по  $x$ . Однако компоненты скорости и в других направлениях также имеют заметную величину, так что рой расплывается. Дрейфовая скорость под действием поля  $E$  равна  $\mu E$ , следовательно, частота прилипания составляет  $\alpha \mu E$ . Отсюда следует, что эффективность прилипания  $h_a$ , выраженная через измеряемые на опыте величины, равна  $\alpha \mu E / \nu_c$ .

Эксперименты по прилипанию чаще всего проводятся на кислороде, как из-за большой скорости прилипания, так и из-за того, что этот газ представляет практический интерес в связи с явлениями в земной атмосфере. Когда свободный электрон прилипает к молекуле кислорода, образуя отрицательный ион, избыточная энергия может выделяться в различных формах. Одной из возможностей является выделение энергии в виде излучения:

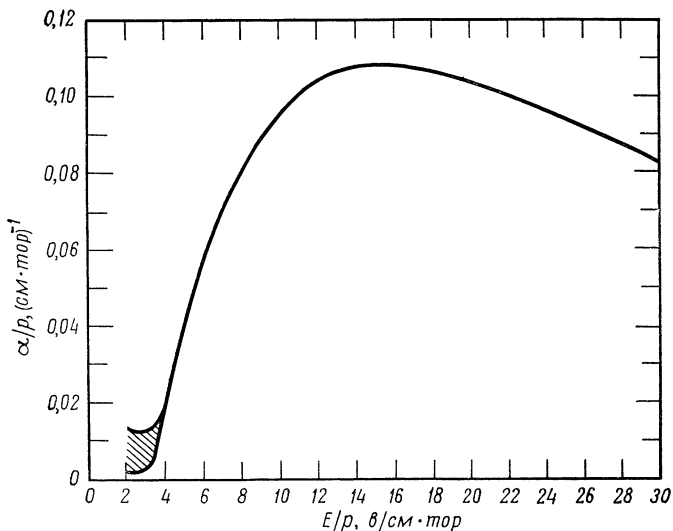


однако скорость этой реакции столь мала, что ею можно пренебречь. Гораздо более важную роль играет диссоциативное прилипание электрона к молекуле кислорода. Предполагается, что при этом процессе образуется нестабильное промежуточное состояние и что излишняя энергия распределяется между двумя атомами кислорода в виде кинетической энергии:

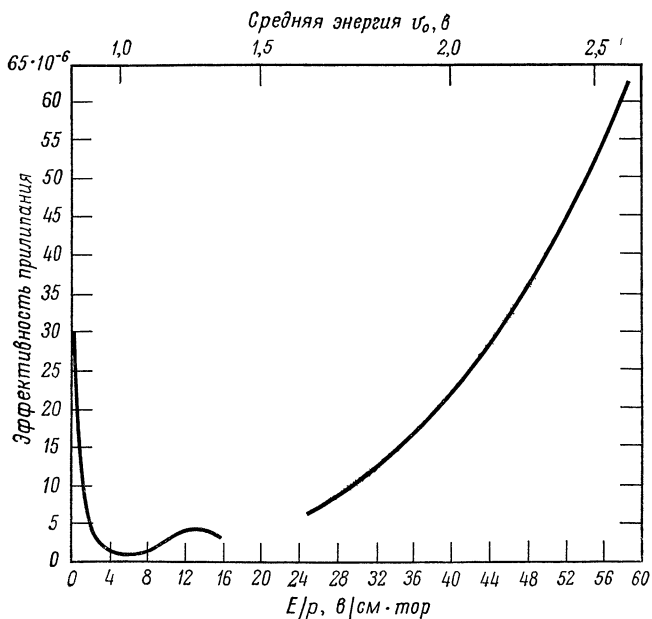


Эта реакция удовлетворительно объясняет большие скорости прилипания при высоких энергиях электронов, но не может объяснить большие скорости прилипания, наблюдаемые при низких энергиях. Для объяснения больших скоростей реакций при низких энергиях выдвигалось много теорий, но лишь недавно Чэнин, Фелпс и Бионди [20] показали, что при очень малых энергиях существует трехчастичный процесс. Названные авторы впервые измерили и идентифицировали трехчастичный процесс; это показывает, что их результаты для низких энергий в настоящее время являются наиболее точными.

Для пробы наиболее существенны энергии порядка десятков электронвольт, так что процессы трехчастичного прилипания, играющие важную роль при энергиях порядка долей электронвольта, здесь не имеют большого значения. Поэтому в данных по прилипанию для кислорода, изображенных на фиг. 2.10, мы не привели подробных результатов для низких энергий. Заштрихованная



Ф и г. 2.10. Коэффициент прилипания в кислороде.



Ф и г. 2.11. Эффективности прилипания электронов в воздухе.

Данные для малых  $E/p_0$  взяты из работы Брэдбери, для больших  $E/p_0$  — из работы Гаррисона и Джебола.

область в левой части фиг. 2.10 содержит на самом деле различные кривые, соответствующие трехчастичному прилипанию при разных давлениях. Данные для значений  $E/p$ , лежащих в пределах от 3 до 10  $v/cm \cdot тор$ , взяты из работы Чэнина, Фелпса и Бюнди [20], а для больших — из работы Бэрча и Джебола [21]. В последние годы было выполнено много других измерений прилипания в кислороде. В особенности следует отметить исследования Шульца [22], Крэгса, Торбэрна и Тозера [23], а также Бучельниковой [24], работавшей с более высокими энергиями. Все эти измерения довольно подробно рассмотрены в книге Мак-Даниеля [1], гл. 8.

Скорость прилипания в воздухе не так высока, как в кислороде, поэтому измерять ее трудней. Тщательные измерения прилипания в воздухе были проведены Брэдбери [19]. Его результаты приведены на фиг. 2.11, где изображена зависимость эффективности прилипания  $h_a$  от величины  $E/p$ . Хотя многие измерения, произведенные до 50-х годов, сомнительны из-за возможного влияния примесей, результаты Брэдбери для воздуха являются, по-видимому, лучшими из имеющихся в настоящее время. На фиг. 2.11 приведены также данные Гаррисона и Джебола [25] для больших значений  $E/p$ . На этой же фигуре показано изменение эффективности прилипания в зависимости от энергии электронов. Расчет средней энергии по электрическому полю основан на работе Кромптона, Хаксли и Саттона [26]. Хотя соответствие между средней энергией электрона и величиной  $E/p$  не является вполне точным, оно позволяет судить о диапазоне рассматриваемых энергий.

### Рекомбинация

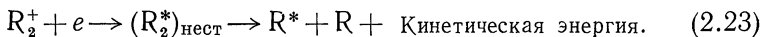
Вообще говоря, электроны возникают в результате ионизации; с другой стороны, если электрон сталкивается с положительным ионом, то имеется некоторая вероятность, что они рекомбинируют, образовав нейтральный атом. Это еще один процесс, приводящий к удалению электронов из разряда, хотя обычно диффузия и прилипание гораздо более существенны.

При рекомбинации электрона и иона образуется атом в возбужденном состоянии и освобождается избыток энергии, который расходуется тем или иным способом. Энергия может, например, излучаться в процессе типа



где  $R^*$  — возбужденное состояние атома  $R$ . Такая рекомбинация с излучением интенсивно изучалась как теоретически, так и экспериментально. Хотя имеется значительное расхождение между теоретическими и экспериментальными результатами, и те и другие показывают, что скорость рекомбинации с излучением очень мала.

С тех пор как Бионди и Браун [27] разработали СВЧ методику для точных измерений электронной плотности в ионизованных газах, интенсивно изучается и другой процесс, а именно диссоциативная рекомбинация. Бионди и Браун обнаружили, что коэффициент рекомбинации в инертных газах на несколько порядков величины больше, чем это могло бы быть при рекомбинации с излучением. Они предположили, что рекомбинация происходит с диссоциацией образовавшейся молекулы по следующей схеме:



Когда происходит рекомбинация, плотность положительных ионов и электронов меняется; скорость этого изменения пропорциональна количеству частиц каждого рода, так что

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{dn_e}{dt} = -\alpha_r n_+ n_e, \quad (2.24)$$

где  $\alpha_r$  — коэффициент рекомбинации. Обычно плотности положительных ионов и электронов равны, т. е.  $n_e = n_+ = n$ . При этом уравнение (2.24) приобретает вид

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha_r n^2. \quad (2.25)$$

Можно записать решение этого нелинейного уравнения:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} + \alpha_r t,$$

где  $n_0$  — начальная плотность. Характерная линейная зависимость между обратной электронной плотностью и временем позволяет экспериментально выделять рекомбинацию. Однако поскольку наряду с рекомбинацией протекают другие процессы, уменьшающие электронную плотность, например диффузия, идентификация процесса практически весьма трудна. Из-за этих трудностей имеется большой разброс в значениях коэффициентов рекомбинации, приводимых в различных публикациях. Этот вопрос обсуждается в последних исследованиях Бионди [28] и Роджерса [29]. Почти во всех случаях важная для высокочастотного пробоя электронная плотность достаточно низка для того, чтобы рекомбинацией можно было пренебречь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M s D a n i e l E. W., Collision Phenomena in Ionized Gases, New York, 1964. (Имеется перевод: И. М а к - Д а н и е л ь, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд-во «Мир», 1967.)
2. M o i t t N. F., Proc. Roy. Soc., A127, 658 (1930).
3. M a s s e y H. S. W., Burhop E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, London, 1952. (Имеется перевод: Г. М е с с и, Е. Б а р х о п, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958.)

4. Ramsauer C., *Ann. Phys.*, **66**, 546 (1921).
5. Normand C. E., *Phys. Rev.*, **35**, 1217 (1930).
6. Brode R. B., *Rev. Mod. Phys.*, **5**, 257 (1933).
7. Golden D. E., Bandel H. W., *Phys. Rev.*, **138**, A14 (1965).
8. Phelps A. V., Fundingsland O. T., Brown S. C., *Phys. Rev.*, **84**, 559 (1951).
9. Brown S. C., *Basic Data of Plasma Physics*, Cambridge, Mass., 1959.
10. Maier Leibnitz H., *Physik*, **95**, 499 (1935).
11. Ramien H., *Zs. Phys.*, **70**, 353 (1931).
12. Fox R. E., *Journ. Chem. Phys.*, **35**, 1379 (1961).
13. Smith P. T., *Phys. Rev.*, **36**, 1293 (1930).
14. Bleakney W., *Phys. Rev.*, **36**, 1303 (1930).
15. Tate J. T., Smith P. T., *Phys. Rev.*, **39**, 270 (1932).
16. Kelly D., Margenau H., *Journ. Appl. Phys.*, **31**, 1617 (1960).
17. Allis W. P., Rose D. J., *Phys. Rev.*, **93**, 84 (1954).
18. Allis W. P., в книге *Handbuch der Physik*, Bd. 21, Berlin, 1956, S. 397.
19. Bradbury N. E., *Phys. Rev.*, **44**, 885 (1933).
20. Chanin L. M., Phelps A. V., Biondi M. A., *Phys. Rev.*, **128**, 219 (1962).
21. Burch D. S., Geballe R., *Phys. Rev.*, **106**, 183 (1957).
22. Schulz G. J., *Phys. Rev.*, **128**, 178 (1962).
23. Craggs J. D., Thorburn R., Tozer B. A., *Proc. Roy. Soc.*, **A240**, 473 (1957).
24. Бучельникова Н. Ф., *УФН*, **65**, 351 (1958).
25. Harrison M. A., Geballe R., *Phys. Rev.*, **91**, 1 (1953).
26. Crompton R. W., Huxley L. G. H., Sutton D. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A218**, 507 (1953).
27. Biondi M. A., Brown S. C., *Phys. Rev.*, **76**, 1697 (1949).
28. Biondi M. A., *Phys. Rev.*, **129**, 1181 (1963).
29. Rogers W. A., Biondi M. A., *Phys. Rev.*, **134**, A1215 (1964).

## Уравнение Больцмана для ионизованного газа

Описание процессов электронных столкновений, приведенное в гл. 2, основано на предположениях, что все электроны в газе движутся в одном направлении с одинаковой скоростью и что движение нейтральных атомов также происходит с одинаковой скоростью и изотропно по направлениям. Однако в природе такие условия никогда не осуществляются, да и в эксперименте даже приближенно реализуются очень редко. В реальном нейтральном газе атомы находятся в постоянном беспорядочном движении и скорость отдельного атома может изменяться в очень широких пределах. В каждый момент времени скорости распределены определенным образом, зависящим от физических условий в данной области газа, причем распределение скоростей может изменяться со временем. В ионизованном газе ситуация, естественно, является значительно более сложной из-за того, что здесь, кроме нейтральных атомов, имеются электроны и ионы. Движение заряженных частиц также характеризуется некоторым распределением скоростей по величине и направлению, которое к тому же может меняться от точки к точке. Всякое физическое измерение, проводимое с нейтральным или ионизованным газом, является усреднением того или иного рода. Если мы знаем, каким образом распределены скорости частиц, то можем, используя кинетическую теорию газов, рассчитать значение любой интересующей нас физически измеримой величины.

### ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей книге мы будем иметь дело в основном с распределением скоростей и энергий электронов. Хотя распределение энергий нейтральных атомов и ионов и влияет определенным образом на электрические свойства газов, мы будем прежде всего интересоваться явлениями, в которых нейтральные атомы не играют существенной роли.

Что касается ионов, то их масса гораздо больше массы электронов и поэтому в высокочастотных явлениях движение ионов несущественно по сравнению с движением электронов, так как ускорение последних обычно в тысячи раз больше ускорения ионов. Вследствие

этого почти все электрические свойства ионизованного газа на высоких частотах определяются электронами, и нас будет интересовать лишь распределение энергий и скоростей электронов. Найдя такое распределение, можно с большой степенью точности рассчитать электрические свойства газа.

Функция распределения электронов  $F(\mathbf{v}, \mathbf{s}, t)$ , согласно определению, дает для элемента объема  $d^3s = dx dy dz$  число электронов, имеющих скорости, заключенные между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Иначе говоря, значение функции  $F$  равно числу электронов, которые в момент времени  $t$  имеют скорости, близкие  $\mathbf{v}$ , и находятся в малом элементе объема, расположенном у конца вектора  $\mathbf{s}$ . Мы нормируем эту функцию следующим образом:

$$\iiint F(\mathbf{v}, \mathbf{s}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{s} = N, \quad (3.1)$$

где  $N$  — общее число электронов в момент времени  $t$ ; интегрирование следует проводить по шести переменным: трем пространственным и трем скоростным. Плотность частиц определяется следующим образом:

$$\int F(\mathbf{v}, \mathbf{s}, t) d\mathbf{v} = n(\mathbf{s}, t). \quad (3.2)$$

Если  $F$  не зависит от пространственных переменных, распределение является однородным, а если  $F$  зависит только от абсолютной величины скорости и не зависит от ее направления, то распределение является изотропным.

Плотность потока электронов  $\Gamma$  есть вектор, компонента которого, перпендикулярная некоторой поверхности, равна числу электронов, пересекающих единицу площади данной поверхности в единицу времени, т. е. равна плотности электронов, умноженной на среднюю величину вектора скорости. Плотность потока электронов выражается через функцию распределения следующим образом:

$$\Gamma = \int \mathbf{v} F d^3v. \quad (3.3)$$

В частности,  $x$ -компонента  $\Gamma$  равна

$$\Gamma_x = \int v_x F d^3v.$$

В общем случае среднее значение какой-либо величины  $\overline{Q(\mathbf{s}, t)}$  определяется следующим интегралом, содержащим функцию распределения:

$$n(\mathbf{s}, t) \overline{Q(\mathbf{s}, t)} = \int F(\mathbf{s}, \mathbf{v}, t) Q(\mathbf{s}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (3.4)$$



### Непрерывность и фазовое пространство

Функция распределения электронов определяется с помощью уравнения Больцмана и соответствующих граничных условий, вытекающих из физики задачи. Уравнение Больцмана, в сущности, является уравнением непрерывности для электронов в фазовом пространстве и записывается следующим образом:

$$C = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F + \mathbf{a} \cdot \nabla_v F; \quad (3.5)$$

здесь  $\partial F/\partial t$  — частная производная в точке  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v}$ ; далее,  $\nabla$  — градиент в конфигурационном пространстве,  $\nabla_v$  — градиент в пространстве скоростей,  $\mathbf{a}$  — ускорение,  $C$  — скорость изменения функции распределения из-за различных столкновений, как упругих, так и неупругих, причем имеются в виду изменения как в конфигурационном пространстве, так и в пространстве скоростей. Уравнение Больцмана было выведено рядом авторов [1, 2] на основе самых общих принципов. Как нетрудно понять, его можно записать в следующем виде:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v_x} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v_y} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v_z} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}; \quad (3.6)$$

здесь левая часть есть скорость полного изменения величины  $F$  из-за столкновений, а правая — выражение полной производной через частные производные. Чтобы получить решение уравнения (3.5), нужно задать член  $C$  в явном виде. Начиная с этого момента, мы сделаем некоторые упрощающие предположения. Будем предполагать, что имеет место молекулярный хаос, что все молекулы симметричны и создают симметричные поля, а также что давление очень низко, поэтому можно принимать во внимание лишь парные соударения. При таких условиях член, учитывающий столкновения, можно представить в виде интеграла, содержащего функцию распределения [2, 3]. По этой причине уравнение Больцмана часто называют интегродифференциальным уравнением. Для такого уравнения не существует общих методов решения. Чтобы решить его, необходимо сделать определенные предположения относительно столкновений, а также некоторые общие предположения относительно свойств функции распределения.

Для облегчения математических расчетов предположим, что столкновения являются мгновенным процессом. Так как столкновение происходит за время порядка  $10^{-14}$  сек, это приближение оправдано для диапазона частот, рассматриваемого в настоящей книге.

Следующее предположение, которое мы сделаем, состоит в том, что из-за очень большого числа столкновений не может возникнуть

какой-либо упорядоченности в направлении движения отдельных электронов. Следовательно, можно считать, что в любой точке пространства распределение в пространстве скоростей является почти сферически симметричным. Поэтому логично разложить функцию распределения в ряд по сферическим функциям и предположить, что первые два или три члена такого разложения достаточно точно аппроксимируют функцию  $F$  и позволяют получить удовлетворительное описание электрических явлений в газах. Позднее мы обсудим, в каких пределах допустимо изменять параметры разряда, чтобы эти предположения оставались верными.

**Сферические функции.** Разложение функции распределения в ряд по сферическим функциям имеет вид:

$$F = \sum_n \sum_m F_{n,m}(s, t) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.7)$$

где сферические функции определяются следующим образом:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \cos(m\varphi) P_n^m(\cos\theta), & m > 0, \\ \sin(m\varphi) P_n^m(\cos\theta), & m < 0, \end{cases}$$

а  $P_n^m$  — присоединенные полиномы Лежандра. Сферические функции порядка 0, 1 и 2, зависящие от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , имеют вид:

$$Y_0^0 = 1;$$

$$Y_1^0 = \cos\theta, \quad Y_1^1 = \cos\varphi \sin\theta, \quad Y_1^{-1} = \sin\varphi \sin\theta;$$

$$Y_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1);$$

$$Y_2^1 = 3\cos\varphi \cos\theta \sin\theta, \quad Y_2^2 = 3\cos 2\varphi \sin^2\theta;$$

$$Y_2^{-1} = 3\sin\varphi \cos\theta \sin\theta, \quad Y_2^{-2} = 3\sin 2\varphi \sin^2\theta.$$

Из фиг. 3.1, на которой показана связь между углами  $\theta$  и  $\varphi$  в пространстве скоростей, видно, что соотношение (3.7) фактически представляет собой разложение по декартовым компонентам скорости. Поэтому сферические функции можно выразить через компоненты скорости  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  и ее абсолютную величину  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . Приведем выражения нескольких первых сферических функций через компоненты скорости:

$$Y_0^0 = 1;$$

$$Y_1^0 = \frac{v_z}{v}, \quad Y_1^1 = \frac{v_x}{v}, \quad Y_1^{-1} = \frac{v_y}{v};$$

$$Y_2^0 = \frac{2v_z^2 - v_x^2 - v_y^2}{2v^2};$$

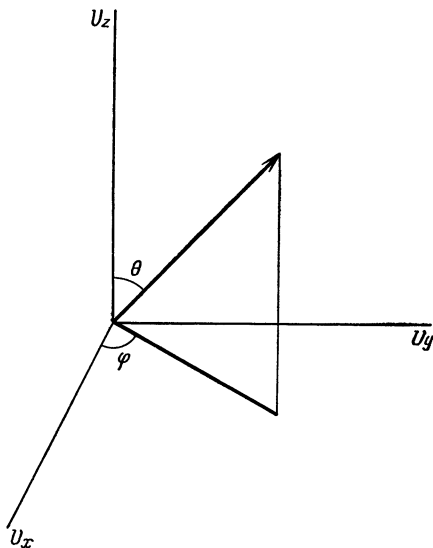
$$Y_2^1 = \frac{3v_x v_z}{v^2}, \quad Y_2^2 = 3 \frac{v_x^2 - v_y^2}{v^2};$$

$$Y_2^{-1} = \frac{3v_y v_z}{v^2}, \quad Y_2^{-2} = 6 \frac{v_x v_y}{v^2}. \quad (3.8)$$

Теперь соотношение (3.7) можно переписать следующим образом:

$$F = F_{0,0} + \frac{v_x}{v} F_{1,x} + \frac{v_y}{v} F_{1,y} + \frac{v_z}{v} F_{1,z} + \dots = F_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1}{v} + \dots \quad (3.9)$$

Если предположить, что членами второго и более высоких порядков можно пренебречь, то соотношение (3.9) даст искомое разложение.



Фиг. 3.1. Сферические координаты в пространстве скоростей.

Будем проводить дальнейший анализ, предполагая, что члены высоких порядков несущественны. Позднее в этой главе мы рассмотрим соображения относительно вида отброшенных членов, а также физические условия, при которых этими членами можно пренебречь.

Член  $F_0$  представляет сферически симметричную часть функции распределения, а член с  $F_1$  представляет отклонение первого порядка от симметрии. Поэтому член с  $F_1$  содержит множитель, зависящий от угла. Этот факт мы будем использовать при выделении различных компонент функции распределения. Подобно тому, как мы разложили функцию распределения, разложим столкновительный член

$$C = C_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_1}{v} + \dots$$

Детальный анализ столкновительного интеграла довольно сложен. Поэтому так же, как и в соотношении (3.9), мы отложим пока рас-

смотрение членов более высоких порядков. В то же время сейчас представляется уместным более подробно рассмотреть разложение функции распределения по сферическим функциям.

Анализ некоторых интегралов моментов, например (3.2) и (3.3), позволяет связать отдельные члены разложения с физически измеряемыми величинами, в частности с электрическими токами. Поэтому будет весьма полезно получить соотношения для некоторых членов разложения низкого порядка. Это можно сделать, приравнявая коэффициенты в подобных членах в уравнении Больцмана, разложенном по сферическим функциям. Такая процедура была бы очень простой, если бы не то обстоятельство, что за счет членов типа  $\mathbf{v} \cdot \nabla F$  в уравнении (3.5) в разложениях появятся члены типа  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ , которые, как мы уже знаем, выражаются через сферические функции. Когда эти члены умножаются на другие сферические функции, содержащиеся в выражениях типа  $\mathbf{v} \cdot \nabla (F_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1/v)$ , которые, очевидно, появляются при подстановке (3.9) в (3.5), возникают члены типа  $v_x v_y^2/v^3$ . Произведения такого рода необходимо выразить либо через отдельные сферические функции, либо через ряды сферических функций. Несколькими простейшими комбинаций содержится уже в системе (3.8). Другие полезные комбинации можно получить, положив

$$g(v_x, v_y, v_z) = g'(\theta, \varphi) = \sum_{n, m} c_n^m Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (3.10)$$

Коэффициенты  $c_n^m$  можно найти с помощью обычных методов теории ортогональных функций. Для этого обе части уравнения (3.10) следует умножить на  $Y_r^s(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$  и проинтегрировать по сфере. Используя ортогональность сферических функций, получаем при  $m \neq 0$

$$c_n^m = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g'(\theta, \varphi) Y_n^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.11)$$

Если  $m = 0$ , то выражение в правой части (3.11) умножается на  $1/2$ . В качестве примера рассмотрим величину  $v_x^2/v^2$ , для которой получаем

$$c_0^0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3},$$

$$c_1^0 = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 0 = c_1^1 = c_1^{-1}.$$

Это означает, что если произведено разложение уравнения Больцмана и найдены соотношения, связывающие члены различных

порядков, то выражение, умноженное на  $v_x^2/v^2$ , появится (с множителем  $1/3$ ) в уравнении нулевого порядка и не появится в уравнении для членов первого порядка.

Таблица 3.1

$g(v_x, v_y, v_z)$	$c_0^0$	$c_2^0$	$c_2^1$	$c_2^2$	$c_2^{-1}$	$c_2^{-2}$
$\frac{v_x^2}{v^2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		
$\frac{v_y^2}{v^2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$		
$\frac{v_z^2}{v^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$				
$\frac{v_x v_y}{v^2}$						$\frac{1}{6}$
$\frac{v_x v_z}{v^2}$			$\frac{1}{3}$			
$\frac{v_y v_z}{v^2}$					$\frac{1}{3}$	
$\frac{v_x^4}{v^4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{35}$		$\frac{1}{7}$		
$\frac{v_y^4}{v^4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{35}$		$\frac{1}{7}$		
$\frac{v_z^4}{v^4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{7}$				
$\frac{v_x^2 v_y^2}{v^4}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{21}$				

В табл. 3.1 и 3.2 приведены значения коэффициентов разложения по сферическим функциям для различных комбинаций компонент скорости, встречающихся при анализе уравнения Больцмана. В таблицы включены коэффициенты нулевого, первого и второго порядков. Табл. 3.1 содержит четные комбинации скоростей, в разложении которых отличными от нуля могут быть только члены нулевого или второго порядка. Табл. 3.2 содержит нечетные комбинации, в разложении которых отличны от нуля лишь члены первого порядка.

**Разложение по пространственным координатам.** Подстановка разложения (3.9) в первый член правой части уравнений (3.5) не вызывает затруднений. При этом возникает сферически симметрич-

Таблица 3.2

$g(v_x, v_y, v_z)$	$c_1^0$	$c_1^1$	$c_1^{-1}$
$\frac{v_x^2 v_y}{v^3}$			$\frac{1}{5}$
$\frac{v_x^2 v_z}{v^3}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{v_x v_y^2}{v^3}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{v_x v_z^2}{v^3}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{v_y v_z^2}{v^3}$			$\frac{1}{5}$
$\frac{v_z v_y^2}{v^3}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{v_x^3}{v^3}$		$\frac{3}{5}$	
$\frac{v_y^3}{v^3}$			$\frac{3}{5}$
$\frac{v_z^3}{v^3}$	$\frac{3}{5}$		

ный член  $\partial F_0/\partial t$  и зависящий от угла член  $(\mathbf{v}/v)$   $(\partial \mathbf{F}_1/\partial t)$ . Несколько более сложный вид имеет член с пространственным градиентом, который можно записать следующим образом:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( F_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1}{v} \right) = \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot (v \nabla F_0) + \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1. \quad (3.12)$$

Первый член в правой части соотношения (3.12) имеет ту же зависимость от углов, что и другие члены порядка  $\mathbf{v}/v$ , второй же член сферически симметричен.

Вычисление этого второго члена можно провести, выписав в скобках три члена скалярного произведения и взяв затем градиент; таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \left[ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_x F_{1x}}{v} + \frac{v_y F_{1y}}{v} + \frac{v_z F_{1z}}{v} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x F_{1x}}{v} + \frac{v_y F_{1y}}{v} + \frac{v_z F_{1z}}{v} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_x F_{1x}}{v} + \frac{v_y F_{1y}}{v} + \frac{v_z F_{1z}}{v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Производя снова скалярное умножение и принимая во внимание, что скорости не зависят от координат, приходим к выражению

$$\frac{v_x^2}{v} \frac{\partial F_{1x}}{\partial x} + \frac{v_x v_y}{v} \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} + \frac{v_x v_z}{v} \frac{\partial F_{1z}}{\partial x} + \frac{v_y v_x}{v} \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} + \frac{v_y^2}{v} \frac{\partial F_{1y}}{\partial y} + \dots$$

Из табл. 3.2 видно, что в разложении смешанных произведений по сферическим функциям отличны от нуля члены лишь выше третьего порядка. Из табл. 3.1 следует, что члены типа  $v_x^2/v$  равны  $v/3$ . Отсюда сразу же заключаем, что второй член в (3.12) равен  $(v/3) \nabla \cdot \mathbf{F}_1$ .

Более сложно вычисление третьего члена правой части уравнения (3.5). При наличии как электрического, так и магнитного полей ускорение равно  $(e/m) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Магнитное поле влияет на направление потока электронов и поэтому оказывает сильное воздействие на скорость ухода электронов из рассматриваемого объема. Учет магнитного поля не меняет в сущности метода анализа и мало добавляет к пониманию явлений, однако вносит значительные вычислительные трудности. Поэтому рассмотрим эффекты, связанных с магнитным полем, мы отложим до гл. 6, где обсуждается как теория, так и эксперимент. Не уменьшая общности, можно принять, что электрическое поле направлено вдоль какой-либо оси, например оси  $z$ . Тогда член, описывающий ускорение, можно записать следующим образом:

$$\frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v F = \frac{e}{m} E_z \frac{\partial}{\partial v_z} \left( F_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1}{v} \right). \quad (3.13)$$

Член с  $F_0$  получаем сразу, используя связь между  $v$  и  $v_z$ ; в результате имеем

$$\frac{\partial F_0}{\partial v_z} = \frac{v_z}{v} \frac{\partial F_0}{\partial v},$$

так что

$$E_z \frac{\partial F_0}{\partial v_z} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{v} \frac{\partial F_0}{\partial v}.$$

Вычисление второго члена правой части уравнения (3.13) можно выполнить, используя формальные правила дифференцирования функции от функции, если при этом рассматривать  $v$  как функцию  $v_z$ , а  $v_x$  и  $v_y$  считать константами, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \nabla_v \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1}{v} \right) &= E_z \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{v_x F_{1x} + v_y F_{1y} + v_z F_{1z}}{v} \right)_{v_x v_y v} + \\ &+ E_z \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_1}{v} \right)_{v_x v_y v_z} \left( \frac{\partial v}{\partial v_z} \right) = \\ &= \frac{E_z F_{1z}}{v} + E_z \frac{v_z}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v_x F_{1x} + v_y F_{1y} + v_z F_{1z}}{v} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1}{v} + \frac{E_z v_z}{v} \left( \frac{v_x}{v} \frac{\partial F_{1x}}{\partial v} + \frac{v_y}{v} \frac{\partial F_{1y}}{\partial v} + \frac{v_z}{v} \frac{\partial F_{1z}}{\partial v} \right) - \\ &- E_z \frac{v_z}{v} (v_x F_{1x} + v_y F_{1y} + v_z F_{1z}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Мы снова имеем члены типа  $v_z^2/v^2$ ,  $v_x v_y/v^2$  и т. д., которые можно разложить по сферическим функциям. Это даст величину  $1/3$  для членов типа  $v_z^2/v^2$  и нуль для смешанных членов. Таким образом, правая часть уравнения (3.14) принимает вид

$$\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1}{v} + \frac{1}{3} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial v} - \frac{1}{3v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial v} + \frac{2}{3v} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1.$$

Эти члены можно объединить в один:

$$\frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1).$$

В результате, собрав все члены, получаем следующее выражение для члена, учитывающего ускорение в уравнении Больцмана:

$$\frac{e}{m} \left[ \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{v} \frac{\partial F_0}{\partial v} + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1) \right].$$

Этим завершается разложение уравнения Больцмана по координатам с точностью до членов нулевого и первого порядков. Если собрать все полученные выражения, то уравнение (3.5) примет вид

$$C_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_1}{v} = \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1 + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1) + \frac{v}{v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} + v \nabla F_0 + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial F_0}{\partial v} \right). \quad (3.15)$$

Рассмотрим теперь влияние электрического поля. Будем представлять синусоидальные поля, используя комплексную экспоненциальную функцию

$$E = E_p e^{j\omega t},$$

где  $E_p$  — амплитуда напряженности поля с частотой  $\omega/2\pi$ . Явления, обусловленные взаимодействием переменного поля с заряженными частицами, имеют место при частотах  $n\omega/2\pi$ , где  $n$  может принимать значения 0, 1, 2, 3, . . . . Функция распределения должна описывать все эти явления, происходящие на различных гармониках. Следовательно, каждая компонента функции распределения и интеграла столкновений может иметь гармонически меняющиеся множители.

**Разложение в ряд Фурье по времени.** В связи со сказанным разложим по времени в ряд Фурье каждую пространственную компоненту полученных уравнений и обозначим верхними индексами коэффициенты при гармониках соответствующей кратности. Иначе говоря, представим  $n$ -ю компоненту функции распределения в виде

$$F_n = F_n^0 + F_n^1 e^{j\omega t} + F_n^2 e^{2j\omega t} + \dots \quad (3.16)$$



В интересующих нас уравнениях электрическое поле умножено на ту или иную компоненту функции распределения. При умножении синусоидально меняющихся электрических полей на компоненты функции распределения, представленные экспонентами, следует иметь в виду, что перемножать нужно лишь действительные части экспонент. Эту процедуру мы проиллюстрируем на частном примере, рассмотрев произведение электрического поля на зависящую от времени часть члена первого порядка функции распределения

$$E_p \cos \omega t F_n^1 \cos \omega t = E_p F_n^1 \cos^2 \omega t = E_p F_n^1 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}.$$

Полученный результат следует далее записывать как  $E_p F_n^1 (1 + e^{2j\omega t})/2$ . В общем виде первые несколько членов произведения электрического поля на  $n$ -ю компоненту функции распределения запишутся следующим образом:

$$2EF_n = 2E_p F_n^0 e^{j\omega t} + E_p F_n^1 (1 + e^{2j\omega t}) + E_p F_n^2 (e^{j\omega t} + e^{3j\omega t}) + \dots \quad (3.17)$$

При подстановке разложения (3.17) в уравнение (3.15) получается очень сложное уравнение, имеющее как сферически симметричную, так и зависящую от углов части, а также содержащее члены, различным образом зависящие от времени. Можно разделить скалярную и векторную части этого уравнения и затем приравнять члены, одинаковым образом зависящие от времени.

Если опустить члены, содержащие вторую и более высокие гармоники, то получится четыре уравнения:

$$C_0^0 = \frac{\partial F_0^0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1^0 + \frac{e}{mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.18)$$

$$C_0^1 = \frac{\partial F_0^1}{\partial t} + j\omega F_0^1 + \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1^1 + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.19)$$

$$C_1^0 = \frac{\partial F_1^0}{\partial t} + v \left( \nabla F_0^0 + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_p}{2} \frac{\partial F_0^1}{\partial v} \right), \quad (3.20)$$

$$C_1^1 = \frac{\partial F_1^1}{\partial t} + j\omega F_1^1 + v \nabla F_0^1 + \frac{e \mathbf{E}_p}{m} \frac{\partial F_0^0}{\partial v}. \quad (3.21)$$

Влияние более высоких гармоник, а также членов высших порядков в разложении по координатам будет рассмотрено в конце главы. Форму четырех полученных уравнений можно несколько упростить, если ввести новую переменную

$$u = \frac{mv^2}{2e}.$$

Эта переменная имеет размерность потенциала и ее использование будет весьма удобно в большей части последующего анализа.

Фактически мы будем в дальнейшем описывать газовый разряд в основном с помощью энергетических переменных, хотя иногда удобно оставить в уравнениях некоторые скорости. Уравнения (3.18) — (3.21) принимают вид

$$C_0^0 = \frac{\partial F_0^0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1^0 + \frac{v}{2u} \frac{\partial}{\partial u} (u \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.22)$$

$$C_0^1 = \frac{\partial F_0^1}{\partial t} + j\omega F_0^1 + \frac{v}{3} \left[ \nabla \cdot \mathbf{F}_1^1 + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0) \right], \quad (3.23)$$

$$C_1^0 = \frac{\partial F_1^0}{\partial t} + v \left( \nabla F_0^0 + \frac{1}{2} \mathbf{E}_p \frac{\partial F_0^0}{\partial u} \right), \quad (3.24)$$

$$C_1^1 = \frac{\partial F_1^1}{\partial t} + j\omega F_1^1 + v \left( \nabla F_0^1 + \mathbf{E}_p \frac{\partial F_0^0}{\partial u} \right). \quad (3.25)$$

Чтобы найти компоненты функции распределения, нужно теперь решить эту систему дифференциальных уравнений.

**Интегралы столкновений.** Прежде чем продолжать дальнейшее рассмотрение, необходимо связать интегралы столкновений  $C_0$  и  $C_1$  с компонентами функции распределения. Как было отмечено выше, необходимо учесть столкновения всех типов. Рассмотрим прежде всего упругие столкновения. Морзе, Аллис и Ламар [3] рассчитали  $C_0$  и  $C_1$ , т. е. соответствующие интегралы столкновений, для случая упругих столкновений. Мы не будем приводить здесь их анализ, который можно найти, например, в книге Месси и Бархопа [4]. Названные авторы провели расчет, определяя число частиц, входящих в элемент объема в пространстве скоростей, и число частиц, покидающих его. При этом предполагалось, что относительная величина энергии, теряемой электроном при столкновении, описывается соотношением (2.5). Это означает пренебрежение членами порядка  $(m/M)^2$ . Так как последнее отношение всегда меньше  $10^{-6}$ , такое ограничение не является сильным. Морзе, Аллис и Ламар провели также детальный анализ баланса энергии и импульса во всем диапазоне скоростей и предположили далее, что функцию распределения можно представить в виде быстро сходящегося ряда сферических функций. Это предположение используется и в нашем рассмотрении в настоящей главе.

Описанный анализ приводит к следующему выражению:

$$C_{0, \text{упр}} = \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} v_m F_0), \quad (3.26)$$

где  $m$  и  $M$  — соответственно массы электрона и молекулы, а  $v_m$  — транспортная частота столкновений, определенная в гл. 2. Вектор-

ная часть описывается более простым выражением

$$C_{1, \text{упр}} = -v_m F_1. \quad (3.27)$$

Столкновения других типов не зависят сколько-нибудь существенно от направления, поэтому влияние неупругих столкновений может быть описано членом

$$C_{0, \text{неупр}} = -h\nu_c F_0, \quad (3.28)$$

где  $h$  — сумма эффективностей для различных неупругих процессов

$$h = h_x + h_i + h_a + h_r. \quad (3.29)$$

Индексы в соотношении (3.29) обозначают соответственно возбуждение, ионизацию, прилипание и рекомбинацию. Выражение для интегралов столкновений основаны на тех же приближениях, что и у цитированных выше авторов; кроме того, наши выражения проще, так как мы пренебрегли тепловым движением атомов. При рассмотрении явлений пробоя пренебрежение тепловым движением атомов, вообще говоря, оправдано, так как электроны имеют гораздо более высокие энергии, чем атомы. Если же нужно учесть тепловое движение атомов, то следует использовать простую процедуру, описанную в последнем пункте настоящей главы.

**Дифференциальное уравнение для функции распределения.** Подставляя (3.26) — (3.28) в систему дифференциальных уравнений (3.22) — (3.25), приходим к системе дифференциальных уравнений, которую при некоторых условиях можно решить.

В эти уравнения входит довольно большое число компонент функции распределения. Однако можно значительно упростить уравнения, если исключить члены, не имеющие физического значения. Член  $F_0^1$  представляет собой первую гармонику сферически симметричной части функции распределения. В отсутствие постоянного поля в разряде не происходит физических процессов, которые описывались бы этим членом. Осцилляции при передаче энергии зависят от амплитуды поля, которое поэтому должно входить в члены, содержащие вторые гармоники, а токи зависят от компонент члена  $F_1$ . Если наряду с переменным полем присутствует и постоянное, то взаимодействие между ними может дать член, содержащий  $F_0^1$ ; но мы будем считать, что этот случай является частным и что сейчас для наших целей членом  $F_0^1$  можно пренебречь. Проблемы пробоя обычно могут быть решены с использованием стационарной функции распределения, так что мы можем положить члены с производными по времени равными нулю. После этих упрощений

уравнения (3.22) — (3.25) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} \nu_m F_0^0) - h\nu_c F_0^0 = \frac{v}{3} \nabla \cdot \mathbf{F}_1^0 + \frac{v}{2u} \frac{\partial}{\partial u} (u \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_1^1 = -\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.31)$$

$$-\nu_m \mathbf{F}_1^0 = v \nabla F_0^0, \quad (3.32)$$

$$-\nu_m \mathbf{F}_1^1 = j \omega \mathbf{F}_1^1 + v \mathbf{E}_p \frac{\partial F_0^0}{\partial u}. \quad (3.33)$$

С помощью ряда подстановок эти уравнения могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению для сферически симметричной компоненты функции распределения  $F_0^0$ . Прежде чем сделать это, рассмотрим физический смысл различных членов в приведенных уравнениях.

Уравнение (3.30) является уравнением баланса энергии, в котором второй член в правой части есть мера энергии, получаемой электронами от электрического поля. Следует отметить, что член  $\mathbf{F}_1^1$  входит в виде скалярного произведения на электрическое поле. Первый член в правой части является дивергенцией и не зависит от времени; он описывает поток электронов, представляющий собой диффузионный ток. Два члена в левой части уравнения описывают потери энергии: первый член — потери при упругих столкновениях, поскольку в него входит множитель  $2m/M$ , второй член — потери при неупругих столкновениях. Уравнение (3.33) является комплексным уравнением, из которого можно получить выражение для осциллирующей компоненты векторного члена  $\mathbf{F}_1^1$ . Перепишем уравнение (3.33) таким образом, чтобы действительная и мнимая части  $\mathbf{F}_1^1$  были представлены в явном виде

$$\mathbf{F}_1^1 = -v \mathbf{E}_p \frac{\partial F_0^0}{\partial u} \frac{\nu_m - j\omega}{\nu_m^2 + \omega^2}. \quad (3.34)$$

Подставим выражение (3.34) в уравнение (3.30). При этом следует рассматривать только ту компоненту, которая находится в фазе с электрическим полем, т. е. действительную часть выражения (3.34), так как компонента, не находящаяся в фазе с полем, не дает потока энергии. С помощью уравнения (3.32) можно исключить из уравнения (3.30) член  $\mathbf{F}_1^0$ . В результате всех этих подстановок получается следующее уравнение второго порядка в частных производных для симметричной части функции распределения  $F_0^0$ :

$$\frac{v}{3} \left[ \frac{E_p^2}{2u} \frac{\partial}{\partial u} \left( uv \frac{\nu_m}{\nu_m^2 + \omega^2} \frac{\partial F_0^0}{\partial u} \right) + \frac{v}{\nu_m} \nabla^2 F_0^0 \right] = h\nu_c F_0^0 - \frac{2m}{M} \frac{1}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} \nu_m F_0^0). \quad (3.35)$$

Хотя  $F_0^0$  является функцией как пространственных координат, так и скоростей и энергии, зависимость от координат существенна только во втором члене левой части уравнения (3.35), содержащем лапласиан. Поэтому можно разделить переменные, представив функцию  $F_0^0(u, x, y, z)$  в виде произведения двух функций

$$F_0^0(u, x, y, z) = f(u) g(x, y, z).$$

При этом лапласиан можно заменить множителем  $1/\Lambda^2$ , где  $\Lambda$  определяется граничными условиями и является фактически характерной диффузионной длиной, введенной в гл. 2. Квадрат амплитудного значения электрического поля равен удвоенному квадрату среднеквадратичного (эффективного) значения поля, так что  $E_p^2/2$  можно заменить на  $E^2$  и в дальнейшем подразумевать под  $E$  эффективное значение поля. С учетом всех этих изменений получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $f$ , представляющей собой зависящую от энергии компоненту сферически симметричного члена функции распределения:

$$\begin{aligned} \frac{2e}{3m} \frac{E}{u^{1/2}} \frac{d}{du} \left( \frac{u^{3/2} v_m}{v_m^2 + \omega^2} \frac{df}{du} \right) + \frac{2m}{Mu^{1/2}} \frac{d}{du} (u^{3/2} v_m f) = \\ = \left( h\nu_c + \frac{2eu}{3mv_m \Lambda^2} \right) f. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Если в уравнении (3.36) зависимость частоты столкновений от энергии известна, то можно найти, по крайней мере в принципе, функцию  $f$ . Затем, используя уравнения (3.31) — (3.33), можно найти и другие компоненты функции распределения. Функция  $f$  показывает, в какой мере зависит от энергии изотропное движение электронов, т. е. такое движение, при котором концы векторов, представляющих все возможные скорости электронов, образуют сферу. Члены  $F_1^0$  и  $F_1^1$  являются мерой отклонения от сферической симметрии: первый представляет стационарное отклонение, а второй — отклонение, изменяющееся с частотой приложенного поля. Член  $F_1^1$  можно получить просто дифференцированием  $F_0^0$  в соответствии с уравнением (3.33), а член  $F_1^0$  можно определить с помощью уравнения (3.32), зная градиент функции  $F_0^0$ . Строго говоря, нам следовало бы для функции  $f$  в уравнении (3.36) использовать обозначение  $f_0^0$ , но всюду, где это не может привести к недоразумениям, мы будем для простоты опускать как верхний, так и нижний индексы.

Уравнение (3.36) можно рассматривать как уравнение баланса частиц, где первый член представляет число электронов, энергия которых за счет электрического поля возросла за 1 сек до значения, лежащего в определенном интервале. Другие три члена представляют число электронов, ушедших за 1 сек из этого интервала вследствие упругих столкновений, неупругих столкновений и диффузии.

Как уже было отмечено ранее, найдя функцию распределения, можно рассчитать все электрические свойства газа. Однако за исключением отдельных частных случаев этот расчет довольно труден, так как зависимость частоты столкновений от энергии, вообще говоря, очень сложна и дифференциальное уравнение решить нелегко. В последующих главах найден вид функции распределения для тех газов, для которых можно сделать разумную аппроксимацию функциональной зависимости частоты столкновений от энергии, что позволяет упростить некоторые члены уравнения (3.36).

### РАСЧЕТ В СЛЕДУЮЩЕМ ПОРЯДКЕ

Приведенный выше анализ уравнения Больцмана основан на предположении, что первый порядок разложения функции распределения (3.9) вместе с первыми гармониками ряда Фурье (3.17) достаточен для точного описания явления пробоя. В принципе можно было бы провести весь анализ и при наличии следующих членов разложения, однако за нитью рассуждений легче проследить при минимальном количестве членов. Именно по этой причине ранее мы опустили члены высших порядков. Теперь необходимо ввести эти добавочные члены и найти пределы применимости (в терминах экспериментальных условий) решения первого приближения. Это даст нам возможность судить о пределах применимости диффузионной теории пробоя.

**Сферические функции второго порядка.** Имеется пять сферических функций второго порядка. Поскольку мы уже не можем более использовать простые векторные обозначения, выпишем подробно разложение функции распределения:

$$F = F_{00} + Y_1^0 F_{10} + Y_1^{11} F_{11} + Y_1^{-1} F_{1-1} + Y_2^0 F_{20} + Y_2^1 F_{21} + Y_2^2 F_{22} + Y_2^{-1} F_{2-1} + Y_2^{-2} F_{2-2} + \dots \quad (3.37)$$

Разложение столкновительного члена производится аналогичным образом.

**Градиент в координатном пространстве.** Первый член в правой части уравнения (3.5) не вызывает затруднений; он получается при частном дифференцировании по времени всех девяти компонент функции распределения.

Второй член в правой части уравнения (3.5) содержит скалярные произведения скорости на градиенты от всех компонент функции распределения. Добавление членов второго порядка сильно услож-

няет вид этого выражения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla F = & v_x \frac{\partial F_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial F_0}{\partial y} + v_z \frac{\partial F_0}{\partial z} + \\
 & + v_x \left( Y_1^0 \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + Y_1^1 \frac{\partial F_{11}}{\partial x} + Y_1^{-1} \frac{\partial F_{1-1}}{\partial x} \right) + \\
 & + v_y \left( Y_1^0 \frac{\partial F_{10}}{\partial y} + Y_1^1 \frac{\partial F_{11}}{\partial y} + Y_1^{-1} \frac{\partial F_{1-1}}{\partial y} \right) + \\
 & + v_z \left( Y_1^0 \frac{\partial F_{10}}{\partial z} + Y_1^1 \frac{\partial F_{11}}{\partial z} + Y_1^{-1} \frac{\partial F_{1-1}}{\partial z} \right) + \\
 & + v_x \left( Y_2^0 \frac{\partial F_{20}}{\partial x} + Y_2^1 \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + Y_2^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + Y_2^{-1} \frac{\partial F_{2-1}}{\partial x} + Y_2^{-2} \frac{\partial F_{2-2}}{\partial x} \right) + \dots + \text{Подобные члены второго} \\
 & \text{порядка по } v_y \text{ и } v_z. \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

Компоненты скорости перемножаются здесь с различными сферическими функциями; в результате получаются новые комбинации компонент скоростей, которые в свою очередь могут быть представлены через другие сферические функции. Например, член  $v_x Y_2^0$ , как это видно из соотношений (3.8), равен  $v_x [(2v_z^2 - v_x^2 - v_y^2)/v^2]$ . Используя соответствующие коэффициенты, приведенные в табл. 3.2, находим для этого произведения:

$$\frac{v_z^2 v_x}{v^2} = \frac{v}{5} Y_1^0, \quad \frac{v_x^3}{2v^2} = \frac{3v}{10} Y_1^1, \quad \frac{v_y^2 v_x}{2v^2} = \frac{v}{10} Y_1^1.$$

Кроме того, можно показать, что члены первого порядка в  $F$  дают как члены нулевого, так и второго порядков в разложении по сферическим функциям, потому что, например,  $v_x Y_1^1 = v_x^2/v$ , и из табл. 3.1 следует, что это выражение равно

$$\frac{v}{3} - \frac{v}{3} Y_2^0 + \frac{v}{6} Y_2^2.$$

Подобным же образом можно показать, что некоторые члены исчезают. Действительно, комбинации типа  $v_x Y_2^{-1}$  равны  $3v_x v_y v_z/v^2$ , а в разложении этого выражения по сферическим функциям все члены ниже третьего порядка равны нулю, следовательно, член  $c \partial F_{2-1}/\partial x$  в (3.38) исчезает.

Если рассмотреть все эти многочисленные комбинации в уравнении (3.38), то градиентный член можно представить следующим

образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla F = & Y_1^1 \frac{\partial F_0}{\partial x} + Y_1^{-1} \frac{\partial F_0}{\partial y} + Y_1^0 \frac{\partial F_0}{\partial z} + \frac{v}{3} \left( \frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{1-1}}{\partial y} + \frac{\partial F_{10}}{\partial z} \right) + \\
 & + Y_1^1 \left( \frac{3v}{5} \frac{\partial F_{21}}{\partial z} - \frac{v}{5} \frac{\partial F_{20}}{\partial x} + \frac{6v}{5} \frac{\partial F_{22}}{\partial x} + \frac{6v}{5} \frac{\partial F_{2-2}}{\partial y} \right) + \\
 & + Y_1^{-1} \left( \frac{3v}{5} \frac{\partial F_{2-1}}{\partial z} - \frac{v}{5} \frac{\partial F_{20}}{\partial y} - \frac{6v}{5} \frac{\partial F_{22}}{\partial y} + \frac{6v}{5} \frac{\partial F_{2-2}}{\partial x} \right) + \\
 & + Y_1^0 \left( \frac{3v}{5} \frac{\partial F_{2-1}}{\partial y} + \frac{3v}{5} \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{2v}{5} \frac{\partial F_{20}}{\partial y} \right) + \\
 & + Y_2^0 \left( \frac{2v}{3} \frac{\partial F_{10}}{\partial z} - \frac{v}{3} \frac{\partial F_{11}}{\partial x} - \frac{v}{3} \frac{\partial F_{1-1}}{\partial y} \right) + \\
 & + Y_2^1 \left[ \frac{v}{3} \left( \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + \frac{\partial F_{11}}{\partial z} \right) \right] + Y_2^{-1} \left[ \frac{v}{3} \left( \frac{\partial F_{10}}{\partial y} + \frac{\partial F_{1-1}}{\partial z} \right) \right] + \\
 & + Y_2^1 \left[ \frac{v}{6} \left( \frac{\partial F_{11}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1-1}}{\partial y} \right) \right] + Y_2^{-2} \left[ \frac{v}{6} \left( \frac{\partial F_{11}}{\partial y} + \frac{\partial F_{1-1}}{\partial x} \right) \right] + \dots \dots
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Следует отметить, что первая строка в (3.39) эквивалентна выражению (3.12).

**Градиент в пространстве скоростей.** Электрическое и магнитное поля входят в уравнении Больцмана в член, учитывающий ускорение, которое скалярно умножается на оператор градиента в пространстве скоростей. Ускорение электронов равно  $(e/m)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Удобно рассмотреть электрическое поле и магнитное поле по отдельности. Как и ранее, мы можем принять, что электрическое поле направлено вдоль оси  $z$ ; будем также, как всюду в этом разделе, вместо  $E_z$  писать  $E$ . Применяя формальные тождества для частных производных, снова получаем

$$\mathbf{E} \cdot \nabla_v F = E \left( \frac{\partial F}{\partial v_z} \right)_{v_x v_y} = E \left( \frac{\partial F}{\partial v_z} \right)_{v_x v_y v} + E \frac{v_z}{v} \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v_x v_y v}. \tag{3.40}$$

Подставим теперь (3.37) в (3.40) и выразим произведения компонент скорости на сферические функции через комбинацию компонент скоростей таким же образом, как мы это делали при анализе градиента в координатном пространстве. Опять, используя табл. 3.1 и 3.2, представим комбинации компонент скоростей через сферические функции. Группируя члены, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot \nabla_v F = & \frac{E}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 F_{10}) + Y_1^1 \frac{3E}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 F_{21}) + Y_1^{-1} \frac{3E}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 F_{2-1}) + \\
 & + Y_1^0 \left[ E \frac{\partial F_0}{\partial v} + \frac{2E}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 F_{20}) \right] + Y_2^0 \frac{2vE}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{10}}{v} \right) + \\
 & + Y_2^1 \frac{vE}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{11}}{v} \right) + Y_2^{-1} \frac{vE}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{1-1}}{v} \right) + \dots \dots
 \end{aligned} \tag{3.41}$$



В теории, учитывающей лишь члены первого порядка, фигурируют только первый член в правой части и первый член в квадратных скобках. Следует отметить еще один интересный и полезный факт, а именно исчезновение в (3.41) сферических функций  $Y_2^2$  и  $Y_2^{-2}$ . Это означает, что электрическое поле передает энергию электронам таким способом, который не влияет на значения  $F_{22}$  и  $F_{2-2}$ . Следовательно, мы можем пока опустить эти члены. Это сразу приводит к значительному упрощению уравнения (3.39). Кроме того, пренебрегая указанными членами, мы выигрываем и гораздо больше, ибо число членов второго порядка сокращается до трех, что позволяет нам ввести вектор с компонентами  $F_{21}$ ,  $F_{2-1}$  и  $F_{20}$ . При анализе членов первого порядка мы видели, что использование векторного преобразования тройки ( $F_{11}$ ,  $F_{1-1}$ ,  $F_{10}$ ) упростило рассмотрение. Аналогично и в теории второго порядка можно использовать преимущества того факта, что компоненты функции распределения преобразуются как векторы.

Член, содержащий магнитное поле, имеет вид  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v F$ . Наличие смешанного векторного произведения значительно упрощает анализ. Начав с формального дифференцирования, как в (3.40), мы получим несколько иное выражение из-за того, что на направление магнитного поля пока не наложено никаких ограничений. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v F = & (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x \left( \frac{\partial F}{\partial v_x} \right)_{v_y v_z v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y \left( \frac{\partial F}{\partial v_y} \right)_{v_x v_z v} + \\ & + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z \left( \frac{\partial F}{\partial v_z} \right)_{v_x v_y v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x \frac{v_x}{v} \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v_x v_y v_z} + \\ & + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y \frac{v_y}{v} \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v_x v_y v_z} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z \frac{v_z}{v} \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{v_x v_y v_z}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Но вектор  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  перпендикулярен  $\mathbf{v}$ , так что произведение  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$  равно нулю. Поэтому последние три члена в (3.42) исчезают. Первый из трех других членов равен

$$(v_y B_z - v_z B_y) \left( \frac{F_{11}}{v} - \frac{v_x}{v^2} F_{20} + \frac{3v_z}{v^2} F_{21} \right).$$

Второй и третий члены имеют аналогичный вид. Выражая, как и ранее, различные комбинации компонент скоростей через комбинации сферических функций, в результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v F = & \frac{(\mathbf{B} \times \mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{v}}{v} + 3Y_2^0 (B_x F_{2-1} - B_y F_{21}) + \\ & + Y_2^1 (B_y F_{20} - B_z F_{2-1}) + Y_2^{-1} (B_z F_{21} - B_x F_{20}) + \\ & + \frac{1}{2} Y_2^2 (B_y F_{21} + B_x F_{2-1}) + \frac{1}{2} Y_2^{-1} (B_y F_{2-1} - B_x F_{21}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Все члены первого порядка собраны в одно векторное произведение, в котором, как легко понять, вектор  $\mathbf{F}_1$  имеет три компоненты  $F_{11}$ ,  $F_{1-1}$  и  $F_{10}$ , направленные соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**Столкновительный член.** Соотношения (3.26) и (3.27), описывающие влияние упругих столкновений на функцию распределения, не учитывают теплового движения атомов. Влияние упругих столкновений было учтено ранее с помощью выражения

$$C_{0, \text{упр}} = \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} v_m F_0). \quad (3.44)$$

Однако нетрудно заметить, что если взять  $C_{0, \text{упр}}$  в виде

$$C_{0, \text{упр}} = \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} \left[ u^{3/2} v_m \left( F_0 + \frac{kT}{e} \frac{\partial F_0}{\partial u} \right) \right], \quad (3.45)$$

то (3.45) обращается в нуль для максвелловского распределения, т. е. для  $F_0 = e^{-eu/kT}$ . Так как упругие столкновения не нарушают теплового равновесия, выражение (3.45) является хорошим приближением. Добавочные члены при изучении пробоя требуются редко, и мы обычно будем использовать (3.44). Другие компоненты столкновительного члена имеют более простой вид

$$C_{1, \text{упр}} = -v_m \mathbf{F}_1 \quad \text{и} \quad C_{2, \text{упр}} = -v_m \mathbf{F}_2. \quad (3.46)$$

Вклад неупругих столкновений в функцию распределения описывается соотношением (3.28).

**Уравнение Больцмана во втором приближении.** Соберем теперь вместе различные члены. Вид полученного таким образом уравнения несколько упрощается, если мы введем вектор  $\mathbf{F}_2$ , составленный из трех компонент второго порядка  $F_{21}$ ,  $F_{2-1}$  и  $F_{20}$  таким же образом, как вектор  $\mathbf{F}_1$  составлен из компонент  $F_{11}$ ,  $F_{1-1}$  и  $F_{10}$ . Если ввести эту сокращенную запись в уравнения (3.39), (3.41), (3.42) и (3.45) и затем приравнять величины, стоящие множителями при соответствующих членах разложения по сферическим функциям, то получится три компактных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} v_m F_0) - h v_c F_0 = \\ = \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{v}{3} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + \frac{e}{3m v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} -v_m \mathbf{F}_1 = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} + v \nabla \left( F_0 - \frac{F_{20}}{5} \right) + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial F_0}{\partial v} + \\ + \frac{3}{5} \frac{eE}{m v^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \mathbf{F}_2) + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_1) + \frac{3v}{5} \mathbf{R}_2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_2 = & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial t} + \frac{e}{m} \frac{E v}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathbf{F}_1}{v} \right) + \frac{e}{m} \frac{E v}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{10}}{v} \right) + \\
 & + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_2) + \frac{v}{3} \mathbf{R}_1. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Видимость упрощения достигнута частично из-за введения двух «остаточных» векторов  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ , в которые включены некоторые неудобные в обращении члены. Целесообразно сгруппировать их именно таким способом, ибо все члены, составляющие  $\mathbf{R}_1$ , являются производными по координатам от функции первого порядка, а члены, составляющие  $\mathbf{R}_2$ , являются производными по координатам от функции второго порядка. Вектор  $\mathbf{R}_1$  имеет компоненты:

$$\left( \frac{\partial F_{10}}{\partial x} + \frac{\partial F_{11}}{\partial z} \right), \quad \left( \frac{\partial F_{10}}{\partial y} + \frac{\partial F_{1-1}}{\partial z} \right), \quad \left( 2 \frac{\partial F_{10}}{\partial z} - \frac{\partial F_{11}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1-1}}{\partial z} \right).$$

Вектор  $\mathbf{R}_2$  включает в себя также производную от вектора  $\mathbf{F}_2$  и определяется следующим образом:!

$$\mathbf{R}_2 = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z} + \frac{v_z}{v} \left( \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{2-1}}{\partial y} \right). \quad (3.50)$$

Теперь каждый член трех уравнений (3.47)—(3.49) следует разложить в ряд Фурье по времени; при этом следует использовать соотношение (3.17) и поступать далее, как и при предыдущем рассмотрении. Если в разложении удержать первую и вторую гармоники, то для каждого  $F_n$  появятся три зависящих от времени компоненты, которые мы обозначим через  $F_n^0$ ,  $F_n^1$  и  $F_n^2$ , используя верхние индексы для указания номера гармоник. В результате получим следующие 9 уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} \nu_m F_0^0) - h \nu_c F_0^0 = \\
 = \frac{\partial F_0^0}{\partial t} + \frac{v}{3} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^0) + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1^0), \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} \nu_m F_0^1) - h \nu_c F_0^1 = \\
 = \frac{\partial F_0^1}{\partial t} + j \omega F_0^1 + \frac{v}{3} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^1) + \frac{e}{6mv^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 \mathbf{E} \cdot (2\mathbf{F}_1^0 + \mathbf{F}_1^1)], \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{M} \frac{2}{u^{1/2}} \frac{\partial}{\partial u} (u^{3/2} \nu_m F_0^2) - h \nu_c F_0^2 = \\
 = \frac{\partial F_0^2}{\partial t} + 2j \omega F_0^2 + \frac{v}{3} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^2) + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1^1), \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_1^0 = \frac{\partial \mathbf{F}_1^0}{\partial t} + v \nabla \left( F_0^0 - \frac{F_{20}^0}{5} \right) + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial F_0^0}{\partial v} + \\
 + \frac{3}{5} \frac{eE}{mv^3} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \mathbf{F}_1^1) + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_1^0) + \frac{3}{5} v \mathbf{R}_2^0, \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_1^1 = & \frac{\partial \mathbf{F}_1^1}{\partial t} + j\omega \mathbf{F}_1^1 + \nu \nabla \left( F_0^1 - \frac{F_{10}^1}{5} \right) + \\
 & + \frac{e}{2m} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} (2F_0^0 + F_0^2) + \frac{3}{5} \frac{e}{m} \frac{E}{v} \frac{\partial}{\partial v} (\nu^3 \mathbf{F}_2^0) + \\
 & + \frac{3}{5} \nu \mathbf{R}_2^1 + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_1^1), \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_1^2 = & \frac{\partial \mathbf{F}_1^2}{\partial t} + 2j\omega \mathbf{F}_1^2 + \nu \nabla F_0^2 + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial F_0^1}{\partial v} + \\
 & + \frac{3}{5} \frac{eE}{mv^3} \frac{\partial}{\partial v} (\nu^3 \mathbf{F}_2^1) + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_1^2) + \frac{3}{5} \nu \mathbf{R}_2^2, \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_2^0 = & \frac{\partial \mathbf{F}_2^0}{\partial t} + \frac{e}{m} \frac{Ev}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathbf{F}_1^1}{v} \right) + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{10}^1}{v} \right) + \\
 & + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_2^0) + \frac{v}{3} \mathbf{R}_1^0, \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_2^1 = & \frac{\partial \mathbf{F}_2^1}{\partial t} + j\omega \mathbf{F}_2^1 + \frac{e}{m} \frac{Ev}{6} \frac{\partial}{\partial v} \left( 2 \frac{\mathbf{F}_1^0 + \mathbf{F}_1^2}{v} \right) + \\
 & + \frac{ev}{6m} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} \left( 2 \frac{F_{10}^0 + F_{10}^2}{v} \right) + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_2^1) + \frac{v}{3} \mathbf{R}_1^1; \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu_m \mathbf{F}_2^2 = & \frac{\partial \mathbf{F}_2^2}{\partial t} + 2j\omega \mathbf{F}_2^2 + \frac{e}{m} \frac{Ev}{3} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathbf{F}_1^1}{v} \right) + \\
 & + \frac{ev}{6m} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F_{10}^1}{v} \right) + \frac{e}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{F}_2^2) + \frac{v}{3} \mathbf{R}_1^2. \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Эта система уравнений является слишком сложной для того, чтобы ее можно было решить в общем виде. Фактически она еще сложнее, чем это кажется с первого взгляда, ибо если учесть компоненты векторов, то эти 9 уравнений соответствуют 21 скалярному уравнению. Далее мы найдем условия, при которых члены второго порядка можно исключить и таким образом свести эту громоздкую систему уравнений к уравнениям (3.18) — (3.21), куда следует еще добавить член, учитывающий магнитное поле.

**Второй порядок в разложении по координатам.** Нам нужно найти условия, при которых члены, содержащие  $\mathbf{F}_2$ , гораздо меньше, чем  $F_0$ . Чтобы сделать это, нам понадобятся некоторые приближенные решения данных дифференциальных уравнений. Если нас удовлетворяет оценки по порядку величины, то найти условия, при которых члены второго порядка можно отбросить, не очень трудно. Члены второго порядка в разложении по координатам и по времени (вторые гармоники) удобнее рассматривать по отдельности. Поэтому обратимся к уравнению (3.49). Для наших целей мы можем предположить, что вектор  $\mathbf{F}_2$  зависит от времени как  $e^{jn\omega t + \nu t}$ , где  $n$  —

целое число, а  $\gamma$  — инкремент. Мы можем также ввести вместо вектора магнитной индукции угловой оператор  $\mathbf{\omega}_b = (e/m) \mathbf{B}$ . Кроме того, удобно использовать определенную в предыдущих главах энергетическую переменную  $u = mv^2/2e$ . Теперь уравнение (3.49) принимает вид

$$-(v_m + jn\omega + \gamma + \mathbf{\omega}_b \mathbf{x}) \mathbf{F}_2 \approx 2Evu^{1/2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\mathbf{F}_1}{u} \right) + \mathbf{R}_1 \frac{v}{3}. \quad (3.60)$$

Для оценки верхнего предела величины  $\mathbf{F}_2$  коэффициент при  $\mathbf{F}_2$  в уравнении (3.60) можно заменить на  $v_m$ , так как он никогда не может быть меньше этой величины. Производную по  $u$  аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \approx -\frac{F}{\langle u \rangle},$$

где  $\langle u \rangle$  — средняя энергия электрона. В случае максвелловского распределения это дает небольшую ошибку. Как мы увидим в дальнейшем, большинство функций распределения, встречающихся в эксперименте, довольно близко к максвелловской, так что по порядку величины наша оценка является правильной. Член  $\mathbf{R}$  состоит из нескольких векторных компонент вектора  $\mathbf{F}$ , продифференцированных по координатам. Здесь будет использована следующая аппроксимация:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx -\frac{F}{\Lambda}.$$

Эта аппроксимация очень хороша, если отсутствуют необычно большие градиенты плотности. С использованием проведенных аппроксимаций соотношение (3.60) принимает вид

$$\frac{v}{l} \mathbf{F}_2 \approx 2vE \frac{\mathbf{F}_1}{\langle u \rangle} + \frac{v}{\Lambda} \mathbf{F}_1, \quad (3.61)$$

где мы заменили  $v_m$  на  $v/l$ . Нам нужно найти условия, при которых  $F_2 \ll F_0$ , но так как  $F_1 < F_0$ , членом  $F_2$  можно пренебречь, если

$$\frac{2El}{\langle u \rangle} + \frac{l}{\Lambda} < 1.$$

Отсюда видно, что должны выполняться два условия. Первое состоит в том, что давление должно быть достаточно высоким для того, чтобы средняя длина свободного пробега была меньше размеров разрядного промежутка; второе состоит в том, что электрическое поле должно быть достаточно малым для того, чтобы энергия, приобретаемая электроном между двумя столкновениями, была меньше средней энергии электрона. Когда эти условия выполнены, членами второго порядка в разложении по сферическим функциям можно

пренебречь. В результате полностью исключаются три последних уравнения из девяти уравнений (3.51) — (3.59), а также некоторые члены в остающихся уравнениях.

**Вторые гармоники в разложении по времени.** Функция  $F_0^1$  является сферически симметричной и меняется со временем с той же частотой, что и электрическое поле. Как уже отмечалось ранее, в разряде отсутствует механизм, который мог бы приводить к изменениям плотности, определяемым членом  $F_0^1$ . Подобные изменения могут вызвать только либо постоянное поле, либо переменное поле, которое настолько велико, что могло бы сместить значительное число электронов за время, равное одному периоду поля. Рассмотрим теперь уравнение (3.56), опустив в нем все члены с  $F_2$  и  $F_1^1$ . В результате имеем

$$-(v_m + 2j\omega + \gamma + \omega_b x) F_1^2 = v \nabla F_0^2, \quad (3.62)$$

так что  $F_1^2 < (l/\Lambda) F_0^2$ . Член  $F_0^2$  является сферически симметричным и меняется с частотой, равной удвоенной частоте приложенного электрического поля; поэтому он представляет меняющуюся с такой частотой плотность электронов. Так как абсолютная величина электрического поля также изменяется с этой частотой, то естественно ожидать, что такой член входит в решение. Однако изменение плотности не будет успевать следовать за полем, если только частота не очень низка. Чтобы оценить условия, при которых  $F_0^2 \ll F_0^0$ , подставим (3.62) в (3.53) и исключим таким образом  $F_1^2$ . Это приводит к соотношению

$$\left( \frac{m}{M} v_m + 2j\omega + \frac{v^2}{3v\Lambda^2} + hv_c \right) F_0^2 \approx \frac{1}{3v} \frac{\partial}{\partial u} (v^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1^1), \quad (3.63)$$

но из уравнения (3.34) имеем

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_1^1 = \frac{v}{v^2 + \omega^2} v E^2 \frac{\partial F_0^0}{\partial u}. \quad (3.64)$$

Эти два уравнения позволяют нам выразить  $F_0^2$  через  $F_0^0$ . Делая обычные приближенные оценки производных и принимая во внимание, что коэффициент при  $F_0^2$  имеет величину, не меньшую, чем  $2\omega$ , получаем

$$2\omega F_0^2 \approx \frac{e}{m} \frac{v}{v^2 + \omega^2} \frac{E^2}{\langle u \rangle} F_0^0. \quad (3.65)$$

Поэтому

$$F_0^2 < \frac{e}{m} \frac{1}{2\omega v} \frac{E^2}{\langle u \rangle} F_0^0, \quad v > \omega,$$

$$F_0^2 < \frac{e}{m} \frac{v}{2\omega^3} \frac{E^2}{\langle u \rangle} F_0^0, \quad v < \omega.$$

Эти два соотношения можно записать с помощью собственных переменных, обсуждавшихся в гл. 1, так как  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , где  $c$  — скорость света в свободном пространстве,  $\lambda$  — длина волны поля, а величина  $\nu$  пропорциональна давлению  $p$ . Для типичного газа с энергией электронов в несколько электронвольт  $\nu \sim 10^9 p$ , если давление  $p$  выражено в торах. Подставляя эти величины в выписанные выше неравенства, получаем

$$F_0^2 < 1,4 \cdot 10^{-6} (E\lambda) \left(\frac{E}{p}\right) F_0^0, \quad \nu > \omega, \quad (3.66)$$

$$F_0^2 < 10^{-9} (E\lambda)^2 p\lambda F_0^0, \quad \nu < \omega. \quad (3.67)$$

В этих двух выражениях электрическое поле  $E$  выражено в вольтах на сантиметр, длина волны  $\lambda$  — в сантиметрах, давление  $p$  — в торах, а в качестве средней энергии электрона взята величина 3 эв. В конкретных газах числа могут быть несколько иными, но величины, входящие в (3.66) и (3.67), являются типичными. Соотношение (3.66) описывает предельный случай низких частот и высоких давлений. Типичное значение величины  $E/p$  равно примерно 10, так что для того, чтобы  $F_0^2$  было гораздо меньше, чем  $F_0^0$ , поле  $E$  должно быть меньше  $10^5$  в/см. Если электрическое поле не слишком велико или частота не очень низка, такое ограничение не является очень сильным. Соотношение (3.67) описывает предельный случай высоких частот и низких давлений. Здесь также ограничения не являются очень строгими, так как для высоких частот длина волны мала.

Маргенау и Хартман [5] рассмотрели вопрос о членах  $F_0^2$  и  $F_1^2$  для газов, в которых диффузия несущественна. Они пришли к несколько более простым, но и более сильным ограничениям, чем те, которые получены выше. (Следует отметить, что в работе Маргенау зависимость от времени обозначается нижними индексами, а зависимость от координат — верхними.)

Мы уже показали, что  $F_1^2 < (l/\Lambda) F_0^2$ , и так как отношение  $l/\Lambda$  должно быть меньше единицы, членом  $F_1^2$  можно пренебречь всегда, когда можно пренебречь  $F_0^2$ . Исключив  $F_0^2$  и  $F_1^2$  из той системы уравнений (3.49) — (3.57), мы пришли к четырем уравнениям (3.22) — (3.25). Кроме того, имеется еще одно соотношение для членов, содержащих магнитное поле; его мы рассмотрим отдельно. Это значит, что если имеют место рассмотренные в настоящем пункте условия, то для описания ионизационных явлений при пробое в газе достаточно членов нулевого и первого порядков разложения как по координатам, так и по времени. Более того, так как использование членов нулевого и первого порядков приводит к единственному дифференциальному уравнению (3.36) для сферически симметричной и не зависящей от времени части функции распределения и так как

все другие компоненты функции распределения могут быть непосредственно получены из этой симметричной части, то теоретическое описание условий пробоя при указанных выше условиях сводится к проблеме решения уравнения (3.36).

### ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФУЗИОННОЙ ТЕОРИИ

Прежде чем решать дифференциальное уравнение и находить функцию распределения электронов, рассмотрим пределы применимости теории. Выше мы выяснили, какие ограничения должны налагаться на условия эксперимента для того, чтобы можно было пренебречь членами второго порядка в разложении функции распределения по сферическим функциям и по времени. Полезно представить графически пределы применимости диффузионной теории, а также области, в которых осуществляется переход между различными типами явлений, используя при этом экспериментальные параметры. Из гл. 1 мы знаем, что для описания пробойных явлений в любом газе достаточно трех комплексов переменных, например  $r\lambda$ ,  $r\Lambda$  и  $E\Lambda$ . При использовании всех трех комплексов мы должны построить трехмерную поверхность, однако довольно большое количество информации можно получить и при использовании плоской поверхности, определяемой двумя переменными, а именно  $r\lambda$  и  $r\Lambda$ . Исследование этого вопроса было проведено Брауном и Мак-Доналдом [6]; мы будем в основном следовать работе названных авторов. Расчеты будут проведены для одного вида газа — чистого водорода, для которого имеется много данных по пробоям, однако метод применим к любому газу.

Границы области будут изображаться линиями на плоскости  $r\lambda - r\Lambda$ , однако следует понимать, что ни одна из границ не является резкой и что линии соответствуют просто областям, в которых имеет место переход от одного режима к другому.

**Ограничения на однородность поля.** При рассмотрении диффузии в гл. 2 и при анализе уравнения Больцмана в настоящей главе мы предполагали, что электрические поля однородны. Если электрическое поле в рассматриваемом объеме неоднородно, то скорость диффузии и приобретения энергии будет различной у электронов в разных областях. Если частога низка, то длина волны поля велика по сравнению с размерами экспериментальной аппаратуры и однородность поля обеспечить нетрудно. На СВЧ частотах длина волны сравнима с размерами экспериментальных камер и поэтому предположение об однородности поля допустимо лишь при определенных ограничениях, налагаемых на размеры. Верхний предел, при котором поле можно считать однородным, определяется рас-



стоянием между двумя соседними узлами в стоячей волне электрического поля. Для нахождения предельного расстояния между бесконечными параллельными пластинами принимают, что оно должно быть равно половине длины волны  $\lambda/2 = L$ . Вообще говоря, такие бесконечные параллельные пластины не соответствуют реальности, так что более разумно подставить вместо  $L$  величину  $\pi\Lambda$  и учесть таким образом все размеры. Это означает, что в принятых нами переменных рассматриваемый предел запишется следующим образом:

$$p\lambda = 2\pi (p\Lambda). \quad (3.68)$$

Линия, описываемая полученным соотношением, нанесена на фиг. 3.2 и обозначена для краткости как предел однородного поля.

Этот предел в действительности показывает, до каких значений переменных мы можем получить имеющую смысл характерную диффузионную длину.

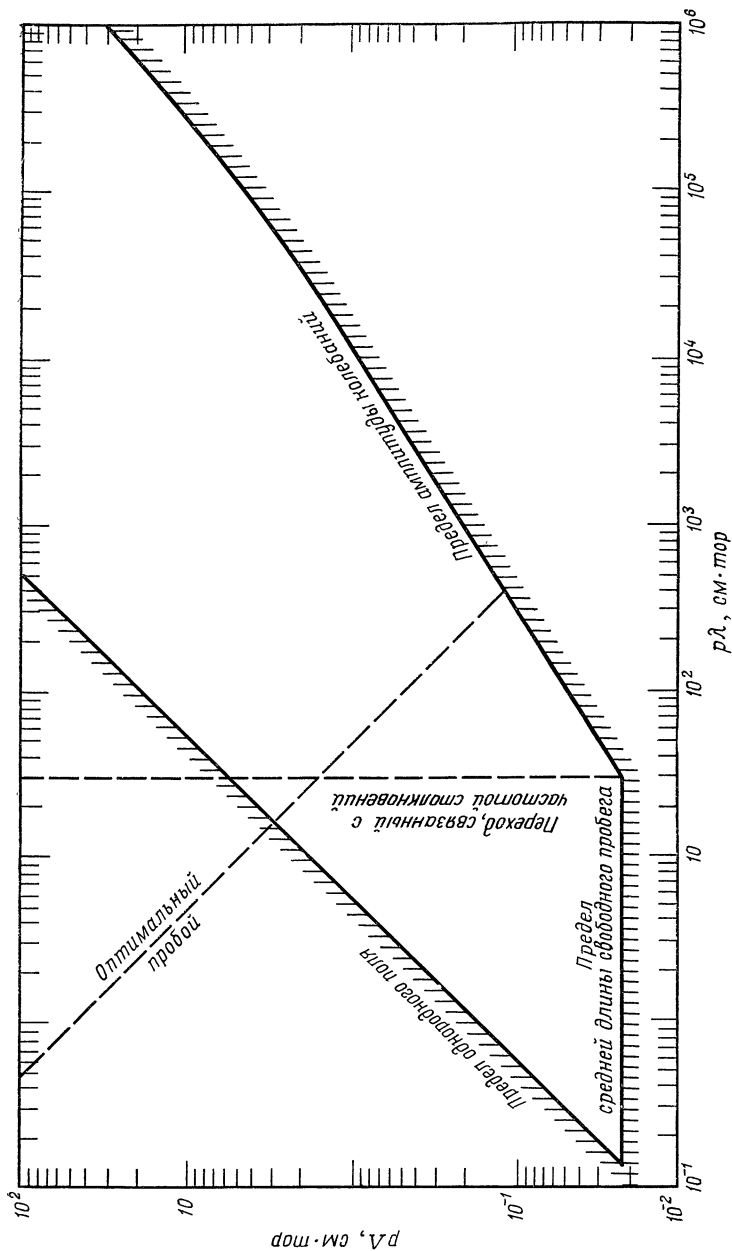
Не представляет никаких трудностей рассчитать геометрическое значение  $\Lambda$ , как это сделано в гл. 2. Рассмотрим, однако, случай, когда электрическое поле меняется в пределах камеры, так что пробой имеет место в малой части всего объема. При таких условиях диффузия электронов из области, в которой происходит пробой, оказывает на пробойные поля такое же влияние, как и диффузия к стенкам. Мы рассмотрим этот вопрос более подробно в гл. 6, где будут развиты некоторые методы расчета эффективной характерной диффузионной длины.

### Ограничение на постоянство средней длины свободного пробега.

Если электроны не испытывают столкновений, то представление о диффузии теряет смысл. Поэтому в том случае, когда средняя длина свободного пробега становится сравнимой с размерами разрядной трубки, характер явлений меняется. Следовательно, мы имеем еще одно ограничение, математическую формулировку которого можно получить, приравняв среднюю длину свободного пробега  $l$  характерной диффузионной длине  $\Lambda$ , или

$$p\Lambda = pl = \frac{1}{P_c}, \quad (3.69)$$

где  $P_c$  — вероятность столкновения, определенная в гл. 2. Величина  $P_c$  не является константой, а зависит от энергии электронов, причем различным образом для разных газов. Тем не менее мы можем получить хорошую оценку искомого ограничения, если рассмотрим некую среднюю энергию электронов. Например, в водороде мы можем рассматривать электронные энергии, соответствующие потенциалу, равному примерно  $1/3$  от ионизационного потенциала, т. е.



Ф и г. 3.2. Пределы применимости диффузионной теории пробоя.

5 в. Тогда, обращаясь к фиг. 2.2, получаем для  $P_c$  величину, примерно равную  $45 \text{ (см} \cdot \text{тор)}^{-1}$ . Подставляя это значение в (3.69), находим предельное значение, которому на фиг. 3.2 соответствует прямая линия, обозначенная как «предел средней длины свободного пробега».

**Изменение условий эксперимента, связанное с частотой столкновений.** Частота столкновений электронов с атомами очень высока. Однако использование СВЧ частот позволяет работать и при таких условиях, когда частота поля гораздо больше частоты столкновений. Большое значение имеет переход от случая, когда за один период колебаний поля происходит много столкновений, к случаю, когда в интервале между двумя последовательными столкновениями укладывается много периодов поля. Переход происходит при  $\nu_c = \omega$ . Из фиг. 2.5 видно, что для водорода величину  $\nu_c$  разумно принять равной  $5,9 \cdot 10^9 \text{ р}$ , так что, выражая  $\omega$  через  $\lambda$ , получаем

$$\rho\lambda = 32 \text{ см} \cdot \text{тор}. \quad (3.70)$$

Граница перехода, по обе стороны от которой применима диффузионная теория, на фиг. 3.2 показана пунктирной линией, называемой также линией предельной частоты столкновений. При очень низких давлениях скорость колебания электронов отстает от приложенного поля на  $90^\circ$ , так что передача энергии происходит очень неэффективно. По мере увеличения давления до и после границы перехода отставание по фазе постепенно уменьшается, так как столкновения прерывают максимально сдвинутые по фазе движения и таким образом могут только уменьшить сдвиг фаз. В результате у электронов появляются компоненты скорости в фазе с полем, что обеспечивает более эффективную передачу энергии от поля к электронам.

**Оптимальные условия пробоя.** По разные стороны от границы перехода, связанного с частотой столкновений, пробойное поле различным образом зависит от давления. После границы перехода пробойное поле увеличивается, а до границы уменьшается с возрастанием давления. Обе эти закономерности легко объяснить. При низких давлениях электроны колеблются с большим фазовым сдвигом по отношению к полю, и уменьшение частоты столкновений приводит к уменьшению эффективности передачи энергии электронам, чем и объясняется увеличение пробойных полей с понижением давления. После границы в области высоких давлений эффективность передачи энергии велика, но при возрастании давления число столк-

новений увеличивается до такой степени, что существенная часть энергии тратится на упругие столкновения. В результате пробойные поля возрастают с повышением давления.

Изучение пробойных кривых, например кривых для водорода на фиг. 1.4 или кривых, приведенных в следующей главе [7], показывает, что при высоких давлениях пробойное электрическое поле почти не зависит от частоты и характерной диффузионной длины и может быть представлено следующим образом:

$$E = 10p. \quad (3.71)$$

При низких давлениях ситуация гораздо более сложна, так как между двумя столкновениями происходит большое число колебаний электрического поля, и механизм, приводящий к возрастанию энергии электронов, не так прост.

Пробой произойдет в том случае, когда в среднем на каждый электрон, диффундирующий из камеры, будет приходиться новый электрон, возникший в результате ионизации. Поэтому, приравняв число столкновений, которые должен испытать средний электрон для того, чтобы набрать энергию, достаточную для ионизации, числу столкновений, которое совершает электрон, диффундируя из разрядной трубки, мы получим обоснованный критерий пробоя.

Нас интересуют здесь высокочастотные поля, т. е. случай, когда в интервале между двумя последовательными столкновениями укладывается много периодов электрического поля. Поэтому при рассмотрении передачи энергии удобно использовать представление об эффективном поле, передающем энергию электронам. Понятие эффективного поля может быть введено различными путями. Фактически впервые его в неявном виде использовал Маргенау [8] в своих исследованиях высокочастотной проводимости. Мы можем получить выражение для эффективного поля, исходя из уравнения (3.36). Мы видим, что в единственном содержащем частоту члене в этом дифференциальном уравнении для функции распределения электрическое поле входит в состав произведения

$$E^2 \frac{v^2}{v^2 + \omega^2}.$$

Иными словами, эффективность электрического поля в отношении передачи энергии электронам зависит от  $v^2/(v^2 + \omega^2)$ . Следует только иметь в виду, что  $v$ , вообще говоря, является функцией скорости и что это выражение входит в дифференциальное уравнение. Но в той мере, в какой можно считать величину  $v$  не зависящей от энергии, понятие эффективного поля является полезным. Мы определим эффективное поле  $E_e$  следующим образом:

$$E_e^2 = E^2 \frac{v^2}{v^2 + \omega^2}.$$

Возвращаясь к условиям пробоя, мы можем определить энергию, приобретенную электроном от поля между столкновениями, находя изменение средней величины квадрата скорости

$$\langle \Delta v^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{E_e e}{m} \right)^2 (\Delta t)^2 \right\rangle,$$

где  $\Delta t$  — время между столкновениями. Средняя величина  $(\Delta t)^2$  равна  $2/\nu_c^2$ , а выраженное в единицах потенциала изменение энергии между столкновениями описывается выражением

$$\Delta u = \left\langle \frac{m}{2e} (\Delta v^2) \right\rangle.$$

Следовательно, между столкновениями энергия электрона меняется на величину

$$\Delta u = \frac{E_e^2 e}{m \nu_c^2}.$$

Разделив на эту величину потенциал ионизации, получаем среднее число столкновений, необходимое для того, чтобы электрон приобрел энергию, достаточную для ионизации. Среднее число столкновений, необходимое для того, чтобы электрон диффундировал из камеры, определяется в задаче о случайных блужданиях, стандартном упражнении в курсе кинетической теории. Среднеквадратичное значение расстояния, проходимого электроном за время, в течение которого он испытывает  $N$  столкновений, определяется выражением [9]

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{2l^2 N}{3}.$$

Если отождествить это расстояние  $\xi$  с характерной диффузионной длиной  $\Lambda$ , то получим, что  $N = \frac{3}{2}(\Lambda^2/l^2)$ . Полагая, что число столкновений, необходимых для того, чтобы средний электрон приобрел энергию, достаточную для ионизации, равно числу столкновений, необходимому для того, чтобы средний электрон диффундировал из камеры, получаем

$$\frac{m i \nu_c^2}{E_e^2 e} = \frac{3}{2} \frac{\Lambda^2}{l^2}.$$

Подставляя соответствующие величины для водорода и полагая  $\omega^2 \gg \nu_c^2$ , находим для пробойного поля

$$E \approx \frac{550}{\rho \lambda \Lambda}. \quad (3.72)$$

При расчете входящих в последнее соотношение числовых коэффициентов мы использовали значение средней длины свободного пробега, которое соответствует энергии электронов, примерно рав-

ной энергии ионизации. Это сделано потому, что при низких давлениях средние энергии электронов гораздо выше, чем при высоких давлениях. При высоких давлениях электроны не могут приобрести большую энергию, так как этому препятствуют упругие столкновения.

Соотношения (3.71) и (3.72) являются приближенными. Они достаточно хорошо выполняются при давлениях, несколько отстоящих от границы перехода, связанного с частотой столкновений. Грубую оценку условий, при которых пробойное поле минимально, можно получить, если рассмотреть на графике  $E - p$  пересечение линий, описываемых этими двумя соотношениями. Комбинируя соотношения (3.71) и (3.72), можно исключить  $E$ ; в результате получаем

$$p\lambda = \frac{55}{p\Lambda}. \quad (3.73)$$

Линия, описываемая уравнением (3.73), нанесена на фиг. 3.2 и обозначена как «оптимальный пробой».

**Ограничения на амплитуду колебаний.** Если амплитуда электрического поля достаточно велика или частота достаточно низка, то электроны могут за один полупериод поля пройти всю разрядную трубку и столкнуться со стенками. Это явление, очевидно, зависит от давления, а также от поля и размеров трубки. Когда оно имеет место, в уравнении Больцмана уже нельзя пренебрегать членом  $F_0^1$ . Кроме того, ряды, в которые разлагалась функция распределения, уже не будут быстро сходящимися.

Электрическое поле можно записать следующим образом:

$$E = E_p \sin \omega t.$$

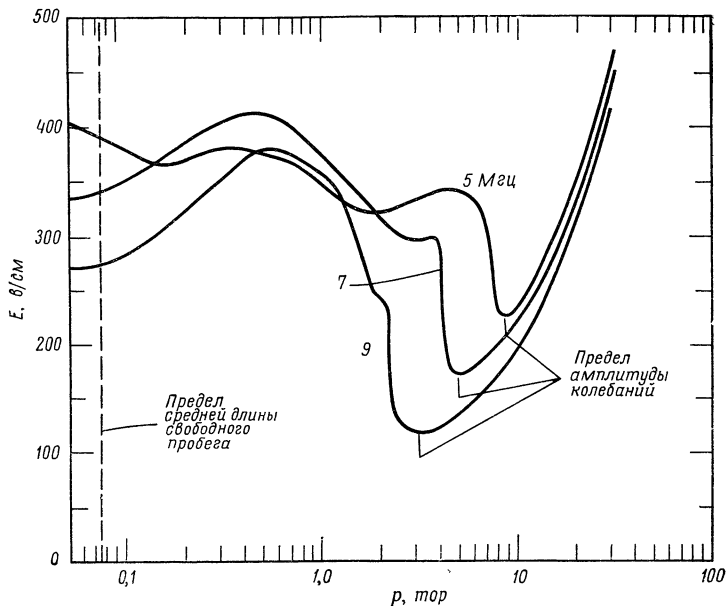
Между столкновениями ускорение электронов равно  $Ee/m$  и приобретаемая ими скорость составляет  $Eet/m = Ee/mv_c$ . Тогда скорость и смещение электрона можно представить следующим образом:

$$v = \frac{eE_p}{mv_c} \sin \omega t,$$

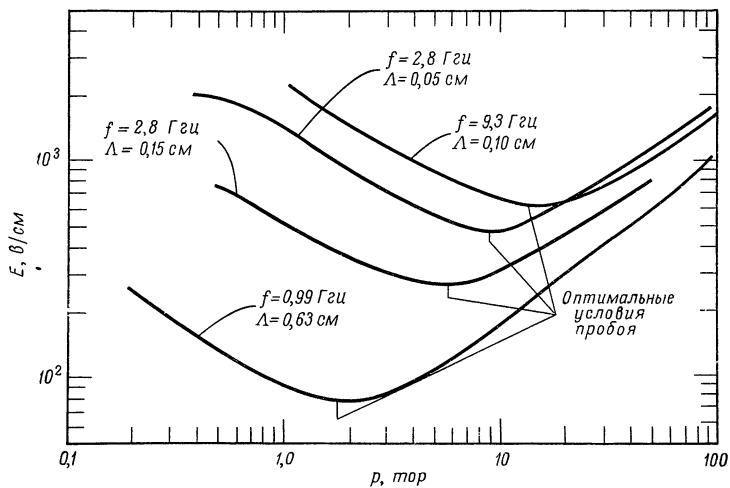
$$x = \frac{eE_p}{m\omega v_c} \cos \omega t.$$

В качестве предельного случая мы можем положить амплитуду колебаний равной  $\Lambda$ , так что

$$\frac{eE_p}{m\omega v_c} = \Lambda.$$



Ф и г. 3.3. Сопоставление теории с экспериментальными данными Джитенса по пробую на частотах 5, 7 и 9 Мгц.



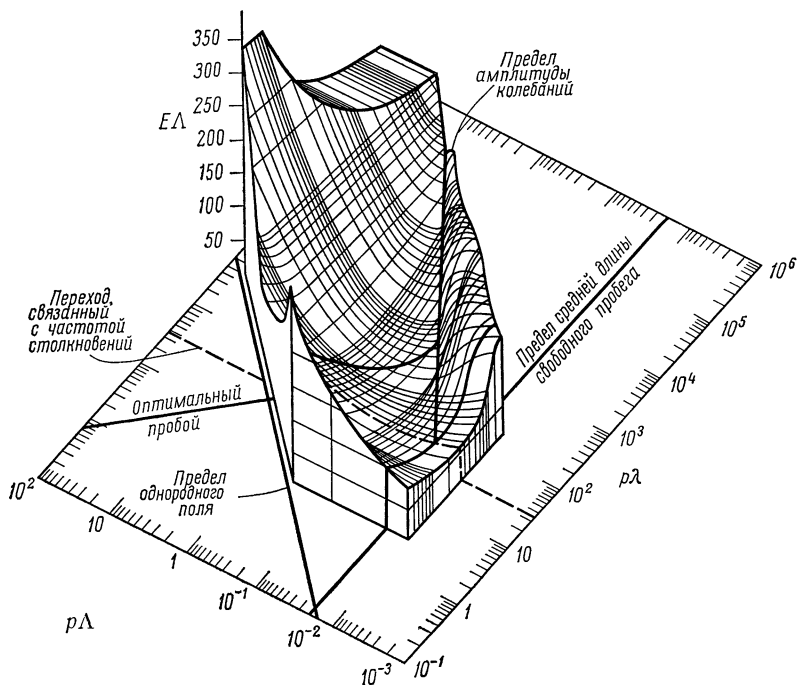
Ф и г. 3.4. Сопоставление рассчитанных оптимальных условий пробоя с экспериментальными данными по пробую на частотах 1, 2,8 и 9,3 Ггц.

Подставляя соответствующие значения констант, получаем

$$p\lambda = 2\pi \cdot 10^5 \frac{p\Lambda}{E/p}. \quad (3.74)$$

Это ограничение является более сложным, чем предыдущие, так как в него, кроме  $p\lambda$  и  $p\Lambda$ , входит и электрическое поле. Если для соответствующих значений  $p\lambda$  и  $p\Lambda$  известны величины пробойных полей, то можно определить совместимую с соотношением (3.74) кривую, связывающую  $p\lambda$  и  $p\Lambda$ . На фиг. 3.2 такая кривая построена на основании данных для водорода; она обозначена «предел амплитуды колебаний».

**Сравнение с экспериментом.** Интересно сравнить только что рассчитанные предельные значения с экспериментальными данными,



Ф и г. 3.5. Поверхность, описывающая данные по пробую.

которые для водорода получены в большом диапазоне частот и давлений. На фиг. 3.3 показаны пробойные поля, измеренные Джи-



тенсом [10] в диапазоне частот 5—10 Мгц и диапазоне давлений примерно от 0,1 до 30 тор. Показаны как предел амплитуды колебаний, так и предел средней длины свободного пробега. На фиг. 3.4 приведены некоторые данные по СВЧ пробую на частотах 3 Гц [7], 1 Гц и 10 Гц [11]. Здесь же показаны некоторые результаты расчетов оптимальных условий пробоя для резонаторов различных размеров.

На фиг. 3.5 изображена трехмерная поверхность, где по оси, перпендикулярной плоскости  $p\lambda - p\Lambda$ , отложена величина  $E\Lambda$ . Эта поверхность построена на основании всех имеющихся данных. Следует обратить внимание на замечательное согласие между различными данными, а также на очень резкие изменения явлений при значениях параметров, соответствующих только что описанным пределам и переходам [6]. Исползованные данные перекрывают диапазон длин волн от 10 до 17 000 см, диапазон  $\Lambda$  от 0,0275 до 1,4 см и диапазон давлений от менее чем 0,1 тор до более чем 50 тор.

Теперь мы можем продолжить расчеты функции распределения, имея некоторую уверенность, что эти расчеты являются достаточно точными, если значения параметров эксперимента не выходят за пределы, указанные на фиг. 3.2 и 3.5.

#### ЛИТЕРАТУРА

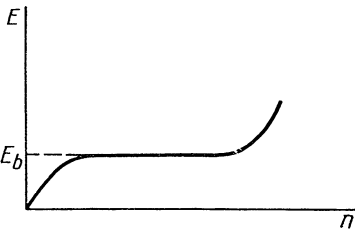
1. Boltzmann L., Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig, 1912. (Имеется перевод: Л. Больцман, Лекции по теории газов, М., 1953.)
2. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1960. (Имеется перевод 1-го изд.: С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.)
3. Morse P. M., Allis W. P., Lamer E. S., Phys. Rev., 48, 412 (1935).
4. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, London, 1952. (Имеется перевод: Г. Мессси, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1952.)
5. Margenau H., Hartman L. M., Phys. Rev., 73, 309 (1948).
6. Brown S. C., MacDonald A. D., Phys. Rev., 76, 1629 (1949).
7. MacDonald A. D., Brown S. C., Phys. Rev., 76, 1634 (1949).
8. Margenau H., Phys. Rev., 69, 508 (1946).
9. Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases, New York, 1938.
10. Githens S., Phys. Rev., 57, 822 (1940).
11. MacDonald A. D., Gaskell D. U., Gitterman H. Phys. Rev., 130, 1841 (1963).

## Теория пробоя (частота столкновений не зависит от энергии)

Большая часть работ по газовым разрядам посвящена пробую. Измерения электрических полей пробоя и напряжений пробоя производятся относительно хорошо и поэтому представляют собой удобный метод проверки выводов теории.

### КРИТЕРИИ ПРОБОЯ

Если поместить газ в электрическое поле, то свободные электроны будут двигаться в направлении приложенного поля, образуя ток. В любом газе имеется небольшое количество таких электронов, возникших за счет ионизации газа космическими лучами или за счет какого-либо другого явления, например фотоэлектрического эффекта. Если постепенно увеличивать электрическое поле от нулевого значения, то вначале газ подчиняется закону Ома. Такое поведение наблюдается до тех пор, пока поле не достигнет значения, при котором энергия части электронов становится достаточной для создания при столкновении вторичных электронов. Если электрическое поле и соответственно плотность вторич-



Ф и г. 4.1. Зависимость плотности электронов от электрического поля.

ных электронов достаточно велики, то наступает момент, когда газ становится хорошо проводящим. При незначительных изменениях напряжения или поля вблизи этого значения плотность электронов и ток изменяются на много порядков, и газ начинает светиться. Это явление иллюстрируется кривой на фиг. 4.1. Горизонтальная часть этой кривой как раз и отражает то обстоятельство, что плотность электронов при пробое может меняться в очень широких пределах (типичный диапазон изменения от  $10^3$  до  $10^8 \text{ см}^{-3}$ ), в то время как поле остается практически постоянным.

Много лет назад Таунсенд сформулировал критерий, который позволил ему количественно описать явление пробоя. Хотя теория

была развита для разрядов в постоянном поле, критерий Таунсенда оказался весьма полезным и при рассмотрении разрядов, вызываемых переменными электрическими полями любой частоты, включая и сверхвысокочастотные разряды. В газовом разряде электроны образуются в результате ионизации и исчезают за счет диффузии, рекомбинации и других процессов, которые нет необходимости сейчас рассматривать. Если скорость образования электронов равна скорости потерь, то устанавливается стационарное состояние. Однако если скорость образования электронов хотя бы незначительно превышает скорость потерь, плотность электронов быстро растет и наступает пробой. Поскольку для пробоя достаточно, чтобы скорость образования электронов превышала скорость потерь лишь на бесконечно малую величину, обычно критерий пробоя Таунсенда формулируют как условие равенства скорости ионизации и скорости потерь.

Херлин и Браун [1], исследовавшие основные процессы в высокочастотных газовых разрядах, показали, что критерий Таунсенда применим к сверхвысокочастотному пробую. Прежде чем рассматривать применение критерия Таунсенда, составим некоторое представление о порядках величин скоростей образования и потерь электронов. Из предыдущей главы мы знаем, что скорость диффузии в камере с характерной диффузионной длиной  $\Lambda$  есть  $D/\Lambda^2$ , где  $D$  — коэффициент диффузии. Рассмотрим случай, когда промежуток между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии 1 см, заполнен гелием. Коэффициент диффузии равен среднему значению величины  $lv/3$ , или  $v^2/3\nu$ . Подставив соответствующие значения для электронов с энергией 5 эв, находящихся в гелии, давление которого составляет 1 тор, получим  $D \approx 2 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup>/сек. Поскольку диффузионная длина  $\Lambda$  равна расстоянию между пластинами, деленному на  $\pi$ , следовательно,  $\Lambda^2$  имеет величину около 0,1 см<sup>2</sup>. Тогда скорость диффузии составляет  $2 \cdot 10^7$  сек<sup>-1</sup>.

Определим, каким образом скорость диффузии входит в уравнение, описывающее увеличение плотности электронов. Для этого приближенно запишем уравнение (2.8) в виде

$$\frac{dn}{dt} = \left( v_i - \frac{D}{\Lambda^2} \right) n. \quad (4.1)$$

Скорость изменения плотности пропорциональна плотности и разности между скоростью образования электронов путем ионизации и скоростью потерь за счет диффузии. Хотя  $v_i$  и  $D/\Lambda^2$  обычно не являются константами, мы для оценки порядка величин предположим, что они не зависят от наших переменных. Интегрируя уравнение (4.1), получаем

$$n = n_0 e^{(v_i - D/\Lambda^2) t}. \quad (4.2)$$

Каждый из входящих в показатель экспоненты членов настолько велик, что даже когда  $v_i$  незначительно превышает  $D/\Lambda^2$ , плотность электронов очень быстро растет; тем самым подтверждается критерий Таунсенда.

При использовании сверхвысоких частот электрическое поле очень быстро осциллирует, так что в течение периода действующей на электрон силы он не успевает уйти далеко от своего первоначального положения. Это значит, что электрон не выходит из разрядной области, как это обычно имеет место при работе с более низкими частотами. Электроны покидают область разряда лишь путем диффузии, а также могут теряться внутри самого разряда за счет рекомбинации и прилипания. Лишь относительно малое число электронов очень больших энергий сталкивается со стенками сосуда. Поэтому нет необходимости рассматривать образование вторичных электронов на стенках; все электроны образуются внутри разрядного промежутка за счет ионизации полем.

Рассмотрим указанный процесс более детально; для этого проследим за отдельным электроном, начальную энергию которого будем считать практически равной нулю. Электрическое поле ускоряет электрон в течение короткого промежутка времени, пока либо поле не изменит своего направления, либо электрон не столкнется с атомом. Столкновение, вообще говоря, приведет к изменению направления движения электрона, однако потери скорости будут незначительными. В среднем, как мы видели в гл. 2, атому передается лишь часть энергии, равная  $2m/M$ , где  $m$  и  $M$  — соответственно массы электрона и атома. После столкновения электрон вновь ускоряется электрическим полем в течение следующего короткого промежутка времени. Энергия электрона возрастает и уменьшается малыми порциями, прирост энергии зависит от величины приложенного электрического поля и, вообще говоря, превосходит уменьшение энергии.

Когда кинетическая энергия электрона достигает значения, превышающего нижний потенциал возбуждения атома, возникает конечная вероятность того, что следующее столкновение будет неупругим. В результате такого столкновения изменится внутренняя энергия атома, а электрон потеряет большую часть своей энергии. Если возбужденное таким образом состояние атома не является метастабильным, то атом практически мгновенно возвращается в основное состояние, испустив характеристическое излучение. Если электрическое поле достаточно велико, то некоторые электроны приобретут энергию, превышающую энергию ионизации, не испытав неупругого столкновения. В этом случае в результате столкновения может образоваться вторичный электрон и положительный ион. В достаточно большом электрическом поле такие столкновения происходят настолько часто, что скорость образования электронов

превышает скорость потерь и наступает пробой. Критерий Таунсенда представляет собой уравнение баланса частиц, однако из приведенного описания видно, что весьма существенное значение имеют увеличение и уменьшение энергии при ускорении и столкновениях, поэтому при изучении пробоя необходимо учитывать как баланс энергии, так и баланс частиц.

Чтобы использовать критерий Таунсенда для количественных расчетов пробойных полей, необходимо знать функцию распределения, рассматривавшуюся в гл. 3. Из уравнения (3.36) ясно, что при вычислении функции распределения очень важен характер изменения частоты столкновений с энергией и что при различных типах зависимости необходимо применять различные методы решения уравнения. Поэтому удобно рассматривать различные газы, основываясь именно на этом признаке. Этот же признак можно положить в основу разделения материала между этой и следующей главами.

### СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТЫ СТОЛКНОВЕНИЙ

Дифференциальное уравнение, с помощью которого мы должны вычислить функцию распределения, было получено в предыдущей главе. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{2e}{3m} \frac{E^2}{u^{1/2}} \frac{d}{du} \left( \frac{u^{3/2} v_m}{v_m^2 + \omega^2} \frac{df}{du} \right) + \frac{2m}{Mu^{1/2}} \frac{d}{du} (u^{3/2} v_m f) = f \left( h\nu_c + \frac{2e}{3m} \frac{u}{v_m \Lambda^2} \right). \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что в том случае, когда частоты столкновений  $v_m$  и  $\nu_c$  не зависят от энергии электрона, уравнение (4.3) можно существенно упростить. Предположение о том, что частота столкновений не зависит от энергии, в действительности является хорошим приближением для двух газов — гелия и водорода. На фиг. 2.6 приведены экспериментальные значения частот столкновений при некоторых давлениях в гелии и водороде. Они вычислены по измеренным сечениям столкновений, которые также приводятся в гл. 2. Легко видеть, что при энергиях выше 3—4 *e* в гелии и начиная приблизительно с тех же энергий в водороде частота столкновений почти постоянна. В дальнейшем мы будем использовать этот факт и положим, что частота  $\nu_c$  равна  $2,4 \cdot 10^9 p$  в гелии и  $5,9 \cdot 10^9 p$  в водороде. Эти приближения, показанные на фиг. 2.6, использовались для вычисления функции распределения и затем полей пробоя в водороде, гелии и смесях гелий — ртуть [2—4].

В уравнении (4.3) полезно преобразовать переменные так, чтобы независимые переменные оказались безразмерными. Эту операцию можно проделать несколькими способами. Наиболее простой способ состоит в том, чтобы разделить энергию электрона на энергию возбуждения или энергию ионизации. Однако более удобным ока-

зывается другое преобразование, которое имеет определенный физический смысл и которое может быть выполнено для целого ряда газов. Введем новую переменную с помощью следующего соотношения:

$$\omega = \int_0^u \frac{3m}{M} \frac{du}{u_c}, \quad (4.4)$$

где

$$u_c = \frac{e}{m} \frac{E^2}{v_m^2 + \omega^2} = \frac{e}{m} \frac{E_e^2}{v_m^2} \quad (4.5)$$

и в соответствии с определением (см. гл. 3)  $E_e^2 = E^2/(1 + \omega^2/v_m^2)$ . В соотношении (4.4) используется величина  $u_c$ , поскольку при определенных предположениях она представляет собой выраженную в единицах потенциала среднюю энергию, приобретаемую электроном между столкновениями [5]. Запись  $u_c$  через эффективное поле весьма удобна прежде всего при рассмотрении газов, обсуждаемых в этой главе, тогда как первая форма записи  $u_c$  применима для любого газа, у которого частота  $v_m$  может зависеть от энергии электрона. В рассматриваемом здесь частном случае, когда частота столкновений не зависит от энергии, выражение (4.4) не требует сложного интегрирования, и мы просто имеем

$$\omega = \frac{3m}{M} \frac{u}{u_c} = \beta u. \quad (4.6)$$

Поскольку за то время, в течение которого энергия электрона возрастает от тепловой до энергии возбуждения, обычно происходят тысячи столкновений, отношение  $u/u_c$ , как правило, имеет порядок нескольких тысяч. Разделив эту величину на отношение массы атома к массе электрона, получим число порядка 1—10. Подставляя (4.6) в дифференциальное уравнение (4.3), получаем

$$\frac{1}{\omega^{1/2}} \frac{d}{d\omega} \left[ \omega^{3/2} \left( \frac{df}{d\omega} + f \right) \right] = f (\mu\hbar + \eta^2\omega), \quad (4.7)$$

где

$$\mu = \frac{M}{2m} \frac{v_c}{v_m} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{e}{m} \frac{M}{3m} \frac{E_e \Lambda}{v_m^2 \Lambda^2}.$$

Теперь преобразуем функцию  $f$ , положив

$$f = g e^{-1/2(1+\delta)\omega},$$

где

$$\delta^2 = \frac{1}{1+4\eta^2};$$

в результате находим

$$\omega \frac{d^2g}{d\omega^2} + \frac{dg}{d\omega} \left( \frac{3}{2} - \frac{\omega}{\delta} \right) + g \left[ \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) - \mu\hbar \right] = 0.$$

Наконец, сделаем еще одно преобразование независимой переменной, при котором она останется безразмерной, а именно положим

$$\omega = y\delta;$$

тогда приходим к уравнению более простого вида

$$y \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{dg}{dy} \left( \frac{3}{2} - y \right) - g (\alpha + \mu h \delta) = 0, \quad (4.8)$$

где

$$\alpha = \frac{3}{4} (1 - \delta).$$

Обратим теперь внимание на содержащий  $h$  член в уравнении (4.8). Следует вспомнить, что в гл. 2 этот член характеризовал долю, или процент столкновений, приводящих к возбуждению, ионизации или другим неупругим процессам. Будем рассматривать газы, в которых прилипание несущественно, а плотность электронов настолько мала, что рекомбинацией можно пренебречь. В таком случае член с  $h$  будет равен нулю для всех энергий электронов, меньших энергии, соответствующей нижнему уровню возбуждения. Когда энергия электрона превышает эту величину, возникнет довольно большая вероятность того, что при следующем столкновении электрон передаст значительную часть своей энергии атому и возбудит его.

Таким образом член, содержащий  $h$ , соответствует процессам, при которых энергия электрона быстро изменяется до гораздо меньших значений. Следовательно, член с  $h$  есть мера той скорости, с которой разряд отбирает энергию у электронов и переводит их на ветвь функции распределения, отвечающую малым энергиям. Так как эффективности возбуждения и ионизации достаточно высоки, число электронов с энергиями выше нижнего уровня возбуждения сравнительно мало, тем не менее их поведение в основном определяет характер электрических явлений. Следовательно, функцию распределения для всех энергий вплоть до указанного значения можно вычислить, полагая член с  $h$  равным нулю, что приводит к существенному упрощению уравнения (4.8). Способ учета члена с  $h$  изменяется в зависимости от рода газа. Поэтому мы рассмотрим по отдельности три типа газов, в каждом из которых частота столкновений не зависит от энергии электронов.

**Гелий — ртуть (Нег-газ).** В большинстве работ по изучению электрических явлений в газах ртуть обуславливает нежелательное загрязнение исследуемого чистого вещества. Однако при преднамеренном добавлении небольшого количества ртути к гелию получается газ, свойства которого хорошо определены. Теоретическое рассмотрение пробоя в таком газе в сочетании с экспериментом дает замечательное подтверждение теоретических и экспериментальных

результатов, полученных в ранних работах по сверхвысокочастотным разрядам в конце 40-х годов.

Тот тип смеси гелия с ртутью, который обычно применяется в этих экспериментах и получил название Нег-газа, состоит главным образом из гелия с небольшой добавкой паров ртути. Поскольку практически весь газ представляет собой гелий, сечение столкновений почти не зависит от энергии. Ртуть добавляется к гелию в очень небольшом количестве и поэтому не влияет на упругие столкновения, но приводит к таким изменениям природы процессов возбуждения и ионизации, благодаря которым Нег-газ является наиболее простым для теоретического рассмотрения. Причину этого явления можно понять, рассмотрев структуру уровней гелия и ртути. В любом газе столкновения, вызывающие возбуждение, происходят при меньших энергиях, чем ионизирующие столкновения. Самый нижний возбужденный уровень в гелии, расположенный при 19,8 *e*, является метастабильным, тогда как энергия ионизации равна примерно 24,5 *e*. Метастабильные состояния существуют в течение времени порядка нескольких миллисекунд. За такой интервал при обычных давлениях происходят тысячи столкновений. Если на тысячу атомов гелия приходится один атом ртути, то за время жизни метастабильного состояния возбужденный атом гелия, вероятно, испытывает столкновения с несколькими атомами ртути. Процентное содержание ртути легко подобрать таким образом, чтобы такие столкновения происходили при любом давлении во всем рассматриваемом диапазоне.

Существует очень большая вероятность того, что при столкновении возбужденного атома гелия с атомом ртути часть внутренней энергии атома гелия будет передана атому ртути и вызовет его ионизацию. Поэтому каждое неупругое соударение, при котором электрон возбуждает атом гелия, очень быстро приводит к ионизации и соответствующему увеличению плотности электронов. Ионизацию атома неосновной компоненты смеси двух газов в результате разрушения метастабильного состояния атома основной компоненты иногда называют эффектом Пеннинга. Он наблюдается во всех инертных газах. Благодаря этому явлению эффективный потенциал ионизации Нег-газа приблизительно равен энергии метастабильного уровня в гелии.

Между этими двумя величинами существует небольшая разница, обусловленная тем, что наиболее вероятная энергия возбуждения, несколько выше энергии возбуждения. Это обстоятельство, приводящее к увеличению эффективной энергии ионизации, необходимо учитывать при вычислениях. Таким образом, при электрическом разряде в Нег-газе электроны практически не теряют энергию на возбуждение, а число электронов с энергиями, превышающими эффективный потенциал ионизации, очень мало.



Благодаря отсутствию потерь энергии на возбуждение можно использовать для вычисления функции распределения уравнение (4.8), положив в нем член с  $\hbar$  равным нулю. Хотя для вычисления функции распределения мы и полагаем  $\hbar$  равным нулю, в действительности мы имеем в виду, что эффективность возбуждения очень высока и что любой электрон, энергия которого даже немного превосходит энергию метастабильного уровня, создает возбужденные атомы гелия и таким образом вызывает ионизацию. Следовательно, функция распределения при этой энергии стремится к нулю. Фактически мы вводим особенность в члене с  $\hbar$  в дифференциальном уравнении. Это обстоятельство нужно учитывать при использовании его интегралов. Уравнение (4.8) с  $\hbar = 0$  легко решается через конфлюэнтные гипергеометрические функции. Обычно два независимых решения записываются в следующем виде:

$$M(\alpha; \gamma; y) \quad \text{и} \quad W(\alpha; \gamma; y).$$

Первое из этих решений  $M(\alpha; \gamma; y)$  представляет собой просто ряд <sup>1)</sup>, ограниченный в начале координат, а второе решение  $W(\alpha; \gamma; y)$  имеет особенность в начале координат. Если  $\gamma$  не является целым числом, второе решение легко получается из первого; функция, соответствующая  $W(\alpha; \gamma; y)$ , есть

$$y^{1-\gamma} M(\alpha + 1 - \gamma; 2 - \gamma; y).$$

Однако если  $\gamma$  является целым числом, эта простая формула уже не справедлива, и второе решение будет довольно сложным. Таблицы значений как первого, так и второго решений для всех представляющих для нас интерес значений параметров можно найти в работах [7, 8]. Учитывая все сказанное выше, можно записать функцию распределения в виде

$$f = e^{(3/2\alpha - 1)y} \left[ M\left(\alpha; \frac{3}{2}; y\right) + CW\left(\alpha; \frac{3}{2}; y\right) \right], \quad (4.9)$$

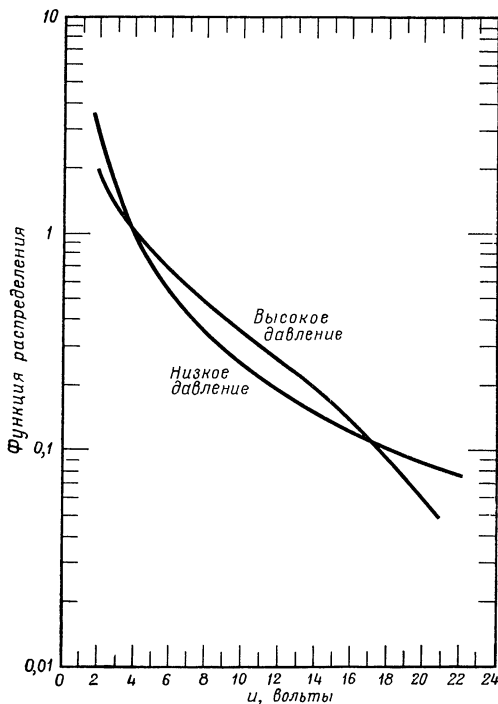
где константа  $C$  определяется из граничного условия, согласно которому функция распределения должна обращаться в нуль при  $u = u_i$  или  $y = y_i$ . Это означает, что

$$C = -\frac{M(\alpha; 3/2; y_i)}{W(\alpha; 3/2; y_i)}. \quad (4.10)$$

Соотношения (4.9) и (4.10) полностью определяют функцию распределения, и теперь мы в состоянии рассчитать любые свойства разряда.

<sup>1)</sup> Определение и графики функции  $M$  можно найти, например, в книге: Е. Я н к е, Ф. Э м д е, Таблицы функций, М., 1948, стр. 373.— *Прим. ред.*

Функция распределения (4.9) изображена на фиг. 4.2, причем переменная  $u$  отложена в линейном масштабе, а  $f$  — в логарифмическом. Функция распределения зависит от электрического поля, давления, частоты и характерной диффузионной длины, так что мы



Ф и г. 4.2. Функция распределения для Нег-газа при 2,8 Гц.  
Масштаб для обеих кривых произволен.

можем привести здесь лишь типичные примеры. На фиг. 4.2 изображено два случая, оба они относятся к частоте 2800 Мгц и характерной диффузионной длине  $\Lambda = 0,101$  см. Одна из кривых соответствует давлению 100 тор и полю 220 в/см, другая — давлению 3 тор и полю 440 в/см. Таким образом, для одной кривой давление лежит выше, а для другой — ниже значения, соответствующего минимуму пробойного поля.

Рассчитаем пробойные поля, для чего вычислим сначала скорость ионизации, а затем коэффициент диффузии. Объединив эти две величины, мы сможем приближенно записать условие пробоя. Число неупругих столкновений  $\nu_i$ , приходящееся на один электрон в секунду, можно вычислить, используя обычные формулы

кинетической теории [типа формулы (3.4)], что дает

$$nv_i = \int_0^{\infty} h_i v_c f 4\pi v^2 dv = 4\pi \frac{e}{m} \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \int_{u_i}^{\infty} h_i v_c u^{1/2} f du; \quad (4.11)$$

здесь  $h_i$  — эффективность ионизации, так что произведение  $h_i v_c$  представляет собой частоту столкновений, умноженную на долю столкновений, приводящих к ионизации. Во второй форме записи этого интеграла, где мы перешли к переменной  $u$ , интегрирование производится от  $u_i$  до бесконечности, потому что при энергии, меньшей  $u_i$ , эффективность ионизации  $h_i$  равна нулю. На первый взгляд кажется, что этот интеграл не имеет смысла, так как в рассматриваемом частном случае функция распределения обращается в нуль при  $u = u_i$  и не существует выше этого значения. Если выполнять интегрирование в пределах от  $(u_i - \varepsilon)$  до бесконечности и предположить, что функция распределения обрывается при значении  $u_i + \varepsilon$ , то можно применить уже использовавшееся ранее для нахождения  $f$  уравнение (4.3) и превратить интеграл (4.11) в дифференциальное выражение. Такая процедура вполне законна, если после всех преобразований устремить  $\varepsilon$  к нулю. Подставим выражение для  $h_i v_c f$  из уравнения (4.3) в (4.11), а затем проинтегрируем каждый член уравнения, используя граничные условия, состоящие, в частности, в том, что как функция распределения, так и ее первая производная обращаются в нуль на бесконечности<sup>1)</sup>. В результате мы приходим к следующему выражению для скорости ионизации:

$$nv_i = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{2e}{m}\right)^{5/2} \frac{E_e^2}{v_m^2} \left(u^{3/2} \frac{df}{du}\right)_{u_i}. \quad (4.12)$$

Подобным же образом можно вывести выражение для коэффициента диффузии, который равен  $1/3$  среднего значения произведения средней длины свободного пробега на скорость, либо  $1/3$  среднего значения квадрата скорости, деленного на частоту столкновений. Используя правило для нахождения средних величин (3.4) и переходя к энергетическим переменным, получаем

$$nD = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{2e}{m}\right)^{5/2} \int_0^{u_i} f \frac{u^{3/2}}{v_c} du; \quad (4.13)$$

здесь в качестве верхнего предела интегрирования вместо бесконечности взята величина  $u_i$ , поскольку функция распределения равна нулю для всех энергий, превышающих  $u_i$ . С помощью выражений (4.12) и (4.13) можно произвести некоторые вычисления.

<sup>1)</sup> В соответствии с предположением, высказанным выше, в данном случае  $f$  и  $df/du$  обращаются в нуль при  $u = u_i + \varepsilon$ . — Прим. ред.

Прежде всего получим выражение для коэффициента высокочастотной ионизации  $\zeta$ , который равен  $\nu_i/DE^2$ . Этот коэффициент аналогичен коэффициенту ионизации в постоянном поле  $\eta$ , который обычно записывается как  $\nu_i/\mu E^2$ , где  $\mu$  — подвижность электрона. Если пробой в постоянном поле определяется подвижностью, то высокочастотный пробой определяется диффузией, чем и объясняется появление коэффициентов диффузии и подвижности в этих двух выражениях. Мы можем также применить полученные выражения для  $\nu_i$  и  $D$  и выписать условие пробоя, используя формулу (4.2), из которой следует, что критерий Таунсенда приводит к выражению

$$\frac{D}{\nu_i} = \Lambda^2.$$

Из выражений (4.12) и (4.13) сразу видно, что при делении  $D$  на  $\nu_i$  часть членов сокращается. Если помимо этого деления выполнить соответствующие подстановки, чтобы ввести безразмерную переменную  $y$ , то сокращение будет весьма существенным, отношение  $D/\nu_i$  упростится и примет следующий вид:

$$\frac{D}{\nu_i} = \left(\frac{M}{3m}\right)^2 \frac{u_0^2 \delta^2}{E_0^2} \frac{\int_0^{y_i} f y^{3/2} dy}{(y^{3/2} df/dy)_{y=y_i}}. \quad (4.14)$$

Знаменатель выражения (4.14) нетрудно вычислить путем дифференцирования выражения (4.9), что дает

$$\left(y^{3/2} \frac{df}{dy}\right)_{y=y_i} = y_i^{3/2} e^{(2/3\alpha-1)y_i} \left[ M' \left(\alpha; \frac{3}{2}; y_i\right) + CW' \left(\alpha; \frac{3}{2}; y_i\right) \right].$$

Однако в числитель входят интегралы от произведений конфлюентных гипергеометрических функций на степенные и экспоненциальные. Эти интегралы были вычислены [7]; один из них можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int z^{3/2} e^{-z(1-2/3\alpha)} M \left(\alpha; \frac{3}{2}; z\right) dz = \\ = \frac{3}{2\alpha} \frac{z^{3/2}}{(1-2/3\alpha)} e^{-z(1-2/3\alpha)} \left[ \frac{d}{dz} M \left(\alpha; \frac{3}{2}; z\right) - \frac{2}{3} \alpha M \left(\alpha; \frac{3}{2}; z\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Такой же вид имеет интеграл для функции  $W$ . При подстановке верхнего предела определенного интеграла члены  $M + CW$  исчезают в силу соответствующего определения  $C$ . Чтобы получить правильный результат при подстановке нижнего предела, необходимо соблюдать осторожность. Сокращаются все члены, кроме одного,

содержащего выражение

$$y^{3/2} e^{(2/3\alpha-1)y} W' \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right).$$

Поскольку вблизи нуля функция  $W$  изменяется как  $y^{-1/2}$ , производная  $W'$  будет меняться как  $y^{-3/2}$ . Мы получаем предел выражения при  $y \rightarrow 0$ , полагая

$$W \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right) = y^{-1/2} M \left( \alpha - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; y \right).$$

Производная данной функции равна

$$-\frac{1}{2} y^{-3/2} M \left( \alpha - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; y \right) + y^{-1/2} \frac{\alpha - 1/2}{1/2} M \left( \alpha + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; y \right).$$

Умножим это выражение на  $y^{3/2}$ ; тогда станет очевидным, что его предел равен  $-1/2$ . Поэтому та часть выражения (4.14), в которую входит отношение интеграла к производной, становится равной

$$\frac{3}{2\alpha(1-2/3\alpha)} \frac{y_i^{3/2} (M' + CW') e^{y_i(2/3\alpha-1)} - C/2}{y_i^{3/2} (M + CW) e^{y_i(2/3\alpha-1)}}, \quad (4.16)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $y$ . В этом выражении мы положили  $y = y_i$ , хотя это и не указано в выражениях для конфлюэнтных гипергеометрических функций, другими параметрами которых являются  $\alpha$  и  $3/2$ . Вспомним теперь, что константа  $C$  равна  $-(M/W)$ ; тогда (4.16) можно записать в виде

$$\frac{3}{2\alpha(1-2/3\alpha)} \frac{(M'W - MW') e^{y_i(2/3\alpha-1)} y_i^{3/2} + M/2}{y_i^{3/2} (M'W - MW') e^{y_i(2/3\alpha-1)}}. \quad (4.17)$$

Выражение  $M'W - MW'$  представляет собой вронскиан дифференциального уравнения для конфлюэнтной гипергеометрической функции, равный  $(1-\gamma) e^{x\gamma}$ , что для рассматриваемого частного случая составляет

$$-\frac{1}{2} e^{y_i} y_i^{-3/2}.$$

При использовании значения вронскиана выражение (4.17) существенно упрощается, а именно выражение в скобках в (4.17) становится равным  $M \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_i \right) e^{-2/3\alpha y_i} - 1$ . Другие члены можно упростить, если заметить, что поскольку  $\alpha = \frac{3}{4}(1-\delta)$ , то

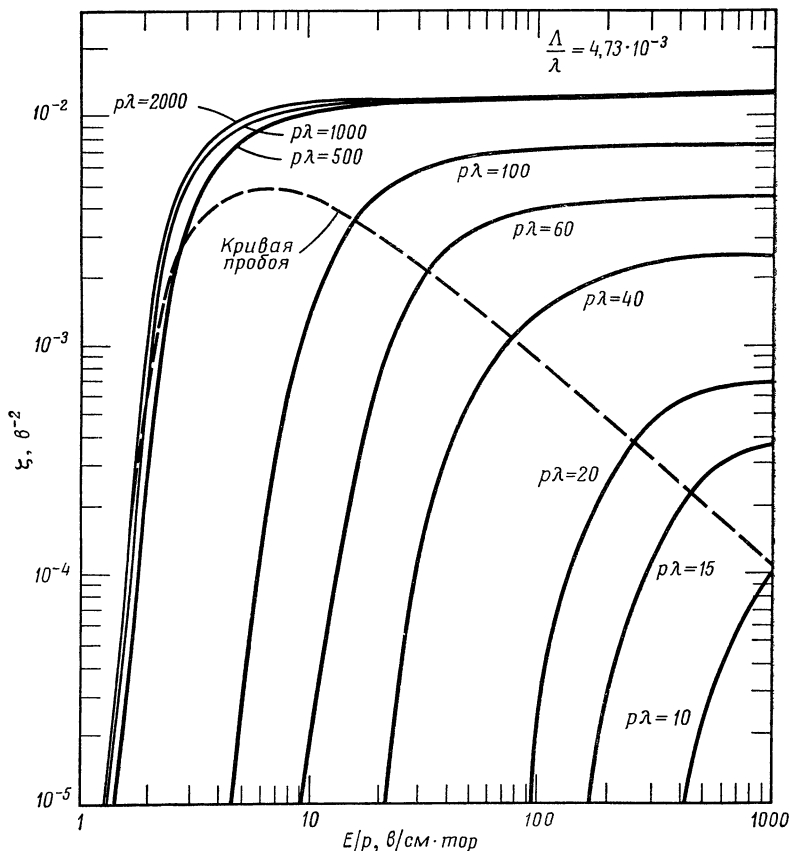
$$\frac{2}{3} \alpha \left( 1 - \frac{2}{3} \alpha \right) = \frac{(1+\delta)(1-\delta)}{4} = \frac{1-\delta^2}{4}.$$

Но величина  $\delta^2$ , согласно определению, равна  $1/(1+4\eta^2)$ , поэтому член  $4\delta^2/(1-\delta^2)$  становится равным  $1/\eta^2$ . Возвращаясь теперь

к определению  $\eta$  через экспериментальные переменные и умножая это выражение на другие члены, опущенные в (4.17), находим, что коэффициент в (4.14) равен  $\Lambda^2$  и поэтому

$$\frac{D}{v_i} = \Lambda^2 \left[ M \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_i \right) e^{-2/3\alpha y_i} - 1 \right]. \quad (4.18)$$

Таблицы конфлюентных гипергеометрических функций, входящих в это выражение, имеются в работе [7] <sup>1)</sup>. Кроме того, имеются таб-



Ф и г. 4.3. Коэффициент высокочастотной ионизации  $\zeta$  при различных значениях  $p\lambda$  для Нег-газа при 2,8 Гц.

лицы комбинированной функции, состоящей из экспоненты и конфлюентной гипергеометрической функции [8]. Эти таблицы доста-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 89.— Прим. ред.

точно подробны для большинства расчетов в теории газового разряда.

Интересно привести численные значения переменных и параметров, входящих в формулу (4.18):

$$\alpha = 0,75(1 - \delta), \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\delta} = \left[ 1 + \frac{2,24(E_e/p)^2}{(p\Lambda)^2} \right]^{1/2}, \quad (4.20)$$

$$y_i = \frac{1,34u_i}{\delta(E_e/p)^2}; \quad (4.21)$$

здесь  $E_e^2 = E^2/[1 + (78,6/p\lambda)^2]$ ,  $\lambda$  — длина волны (в сантиметрах) электрического поля в свободном пространстве,  $E$  — эффективное значение электрического поля (в вольтах на сантиметр),  $p$  — давление (в торах), а  $\Lambda$  — характерная диффузионная длина (в сантиметрах). Экспериментальные переменные сгруппированы таким образом, чтобы получились обычные их сочетания. Умножив выражение (4.18) на  $E^2$ , получим величину, обратную коэффициенту ионизации  $\zeta$ . Этот коэффициент приведен для Нег-газа на фиг. 4.3. Значения экспериментальных параметров, соответствующих пробую, можно определить из этих графиков, однако проще найти пробойные поля непосредственно из выражения (4.18), заметив, что условие пробоя выполняется, если справедливо равенство

$$M\left(\alpha; \frac{3}{2}; y_i\right) e^{-2/3\alpha y_i} = 2. \quad (4.22)$$

Поэтому можно вычислить пробойные поля, просто определив величину  $\Lambda$  по размерам используемого сосуда, а значение  $\lambda$  — по частоте приложенного поля, и затем попытаться найти такие комбинации  $E$  и  $p$ , которые удовлетворяют условию (4.22).

### **Предположение о постоянстве средней длины свободного пробега.**

Прежде чем сравнивать результаты описанных выше вычислений с экспериментом, рассмотрим некоторые поправки, которые нужно ввести для компенсации двух из сделанных выше упрощающих предположений. Поправки вычисляются только для Нег-газа, так как лишь для него такие вычисления практически возможны. Одно из сделанных предположений заключалось в том, что мы считали частоту столкновений не зависящей от энергии во всем интервале изменения последней. Из фиг. 2.6 ясно, что для энергий, несколько меньших 4 эв, такое приближение неправильно. К счастью, электроны, обладающие такими низкими энергиями, не оказывают существенного влияния на характеристики пробоя; тем не менее можно приближенно учесть их вклад следующим образом.

Когда энергия электрона меньше примерно 4 эв, средняя длина свободного пробега приблизительно постоянна; это означает, что частота столкновений пропорциональна  $u^{1/2}$ . В результате уравнение для функции распределения изменяется, о чем мы будем еще говорить более подробно, ибо приближение постоянной длины свободного пробега оказывается весьма хорошим в широком диапазоне изменения энергии в неоне. Для наших целей важно отметить, что электроны малой энергии сильнее всего влияют на величину поля пробоя в том случае, когда отношение электрического поля к давлению мало и когда число столкновений в единицу времени гораздо больше частоты поля. При этих условиях относительное число электронов малой энергии велико, и членом с  $\omega^2$  в уравнении для функции распределения можно пренебречь. Сделав такое упрощение, приходим к следующему выражению для функции распределения электронов с энергиями ниже 4 эв:

$$f = A [M(a; 1; z) + BW(a; 1; z)] e^{-z}, \quad (4.23)$$

где

$$a = \frac{1,54}{(p\Lambda)^2}$$

и

$$z = 71,2 \left(\frac{p}{E}\right)^2 \left(\frac{u}{u_i}\right)^2.$$

Функции, входящие в выражение (4.23), табулированы [7, 8]. Удобно использовать упрощенное обозначение  $M_\gamma$  для конфлюэнтной гипергеометрической функции  $M(\alpha; \gamma; z)$  в тех случаях, когда это не может привести к путанице. Теперь нужно использовать функцию распределения (4.23) для электронов малой энергии и найденную раньше функцию распределения для электронов с энергиями между 4 эв и потенциалом ионизации. Между этими функциями должен быть осуществлен плавный переход при значении  $u$ , равном 4 эв. Приравнивая значения функций распределения и их производных в этой точке, которую мы будем отмечать индексом  $c$ , находим константы  $A$  и  $B$ :

$$B = \frac{RM_1(z_c) - M'_1(z_c)}{W'_1(z_c) - RW_1(z_c)},$$

где

$$R = \frac{M'_{3/2}(y_c) + CW'_{3/2}(y_c) + 2/3 [M_{3/2}(y_c) + CW_{3/2}(y_c)]}{M_{3/2}(y_c) + CW_{3/2}(y_c)},$$

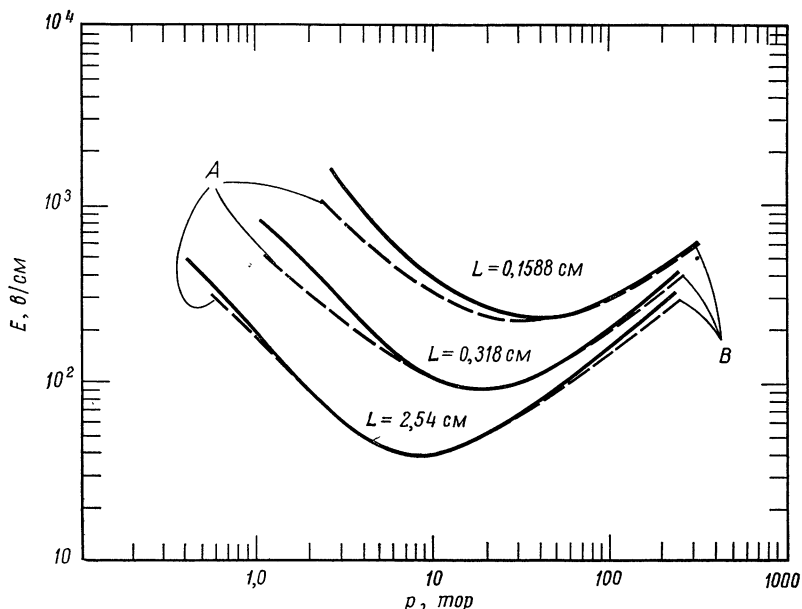
и

$$A = \frac{[M_{3/2}(y_c) + CW_{3/2}(y_c)] e^{-y_c(1-2/3\alpha)}}{[M_1(z_c) + BW_1(z_c)] e^{-z_c}}.$$

При использовании этой функции распределения изменяется значение интегралов, определяющих величину  $nD$ , а также значение



отношения  $D/v_i$  [см. (4.18)]. Вклад этой поправки был вычислен; результаты представлены на фиг. 4.4, где приведены также кривые, полученные без предположения о постоянстве средней длины свободного пробега. Из фиг. 4.4 видно, что рассматриваемая поправка



Ф и г. 4.4. Поправки на среднюю длину свободного пробега и на избыточную энергию.

Кривые *A* построены без учета поправок на избыточную энергию, кривые *B* — без предположения о постоянстве средней длины свободного пробега;  $L$  — высота резонатора.

существенна лишь при больших давлениях и во всех случаях составляет не более нескольких процентов. Экспериментальные условия, для которых вычислялась эта поправка, указаны на фигуре.

**Поправка на избыточную энергию.** Более существенной при некоторых условиях является так называемая поправка на избыточную энергию. При энергии электрона, равной первому потенциалу возбуждения, вероятность возбуждения не равна единице, так что некоторые электроны до столкновения с атомами гелия приобретают энергию, превышающую это значение. Конечно, за счет электрического поля энергия одних электронов возрастает больше, других — меньше. Поэтому за время между двумя последовательными

столкновениями энергия некоторых электронов будет иногда изменяться от значений чуть ниже потенциала возбуждения до значений, превышающих потенциал возбуждения на доли электронвольта или даже на несколько электронвольт. Этот избыток энергии наиболее заметен при низких давлениях, когда приобретаемая между столкновениями энергия велика.

Чтобы определить значение электронной энергии, при которой функция распределения практически обращается в нуль, мы использовали найденные экспериментально значения эффективности возбуждения и подставляли соответствующую зависимость от энергии в член с  $\hbar$  в дифференциальном уравнении. При энергиях, близких к потенциалу возбуждения, эффективность возбуждения линейно растет с энергией. Легко видеть из фиг. 2.8, что экспериментальные данные удовлетворительно аппроксимируются зависимостью:

$$h_x = \frac{P_x}{P_c} = h_1 (u - u_x) = \frac{u - 19,8}{140}. \quad (4.24)$$

Если оставить член с  $\hbar$  в уравнении (4.3), то решить его довольно трудно. Однако поскольку здесь мы имеем дело лишь с малым поправочным множителем, достаточно получить приближенное решение. Если подставить приближение (4.24) в уравнение (4.3), то получим дифференциальное уравнение, которое будет детально решаться ниже для водорода и чистого гелия. Для наших целей мы получим вполне удовлетворительные результаты, преобразовав уравнение (4.3) и включив в него выражение для  $\hbar$  следующим образом. Пусть

$$f = u^{-3/4} g(u) e^{-\beta u/2}, \quad (4.25)$$

где  $\beta$  определяется соотношением (4.6). Тогда

$$\frac{d^2 g}{du^2} - I(u) g = 0, \quad (4.26)$$

где

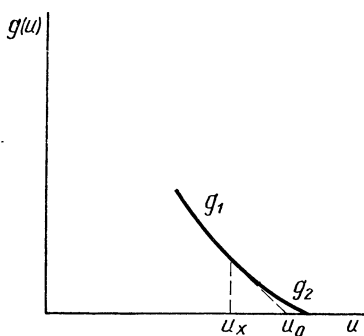
$$I(u) = \frac{M \beta}{m 2u} h_1 (u - 19,8) + \frac{1 + \omega^2/v_m^2}{(E\Lambda)^2} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{3\beta}{4u} - \frac{3}{16u^2}.$$

Исследование функции  $I(u)$  показывает, что для энергий, немного превышающих 19,8 в, первый член быстро становится доминирующим для всех представляющих интерес значений экспериментальных параметров и что этот член изменяется не сильно. Это означает, что приближенное решение уравнения (4.26) можно записать в следующем виде:

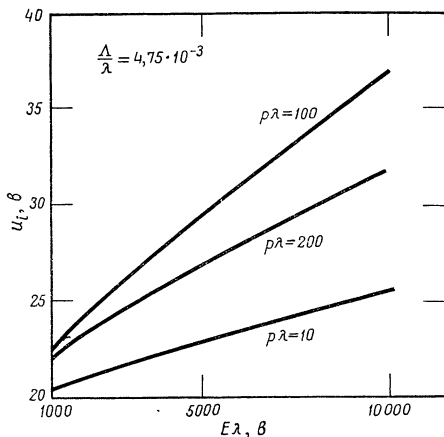
$$g = e^{-I^{1/2}u}, \quad (4.27)$$

который получается из (4.26), если взять некоторое значение  $I(u)$  и считать его константой.

Подставляя решение (4.27) в (4.25), получаем значение функции распределения для энергий, превышающих потенциал возбуждения. Значения определенной таким образом функции распределения и ее производной должны быть хорошо сшиты со значениями функции распределения (4.9) и ее производной. Для энергий, близких к потенциалу возбуждения, функция распределения очень мала, так как при столкновениях, приводящих к возбуждению атомов, электроны теряют значительную часть своей энергии. Чтобы определить энергию, при которой функция распределения практически обращается в нуль, экстраполи-



Ф и г. 4.5. Экстраполяция распределения для определения поправки на избыточную энергию.



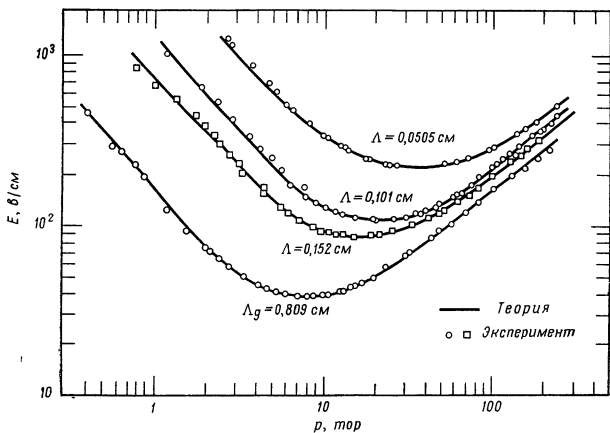
Ф и г. 4.6. Эффективные потенциалы ионизации для Нег-газа.

руем функцию (4.25) прямой линией и в качестве эффективного потенциала ионизации выберем то напряжение, при котором эта прямая пересекает ось. Фактически прямой мы экстраполируем функцию  $g$ . Действительно, из уравнения (4.26) ясно, что при малых значениях  $g$  функция распределения изменяется линейно, поэтому разумно положить

$$u_0 - u_x = -\frac{g}{g'} = I^{-1/2}. \quad (4.28)$$

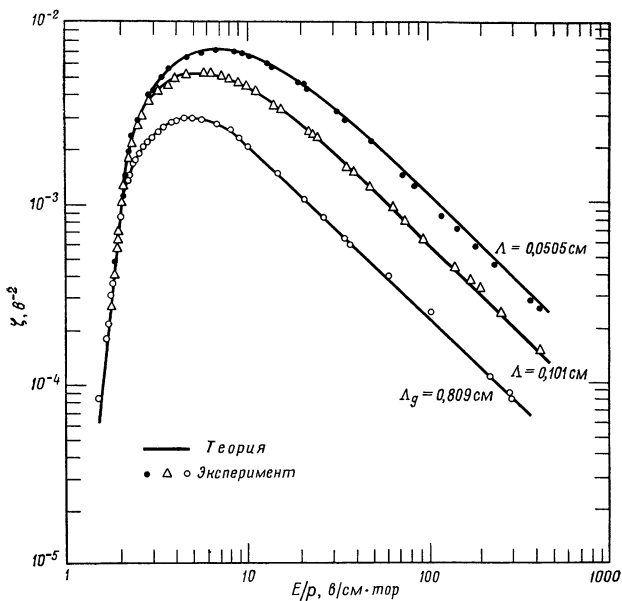
Последнее соотношение можно получить просто из геометрических соображений, как это видно из фиг. 4.5. На фиг. 4.6 для Нег-газа приведены значения эффективного потенциала ионизации в зависимости от  $E\lambda$  для нескольких значений  $\rho\lambda$  и для одного значения отношения  $\Lambda/\lambda$ . При использовании других резонаторов подобные же кривые следует построить для других значений  $\Lambda/\lambda$ .

Как будет видно в дальнейшем, можно получить более строгое решение дифференциального уравнения с учетом возбуждения,



Ф и г. 4.7. Пробойные электрические поля в сравнении с теорией для Нег-газа при 2,8 ГГц.

Величина  $\Lambda_g$  означает геометрическую, а не эффективную диффузионную длину.



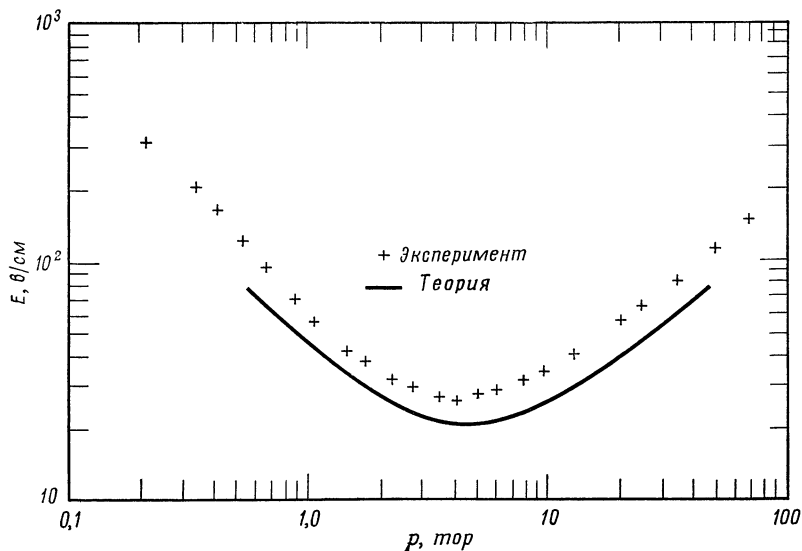
Ф и г. 4.8. Коэффициент высокочастотной ионизации  $\zeta$  в сравнении с теорией для Нег-газа при 2,8 ГГц.

однако это не приводит к существенному изменению значения эффективного потенциала ионизации. Фиг. 4.4 иллюстрирует влияние поправки на избыточную энергию на значения пробойных полей для трех различных резонаторов. Следует отметить, что эта поправка не очень велика, хотя при больших полях и низких давлениях она играет более важную роль, чем поправка на среднюю длину свободного пробега при высоких давлениях.

Теоретические кривые на фиг. 4.3 были получены для различных экспериментальных условий, а именно для широкого диапазона изменения давлений и размеров резонатора, и для одного значения частоты (2800 Мгц). При вычислении полей использовалось соотношение (4.20) с учетом поправки на то обстоятельство, что  $\nu$  не является константой; кроме того, использовались вычисленные значения эффективного потенциала ионизации. Хотя детальное описание экспериментов проводится в гл. 7, интересно сравнить здесь теорию с экспериментом. На фиг. 4.7 значения пробойных полей в Нег-газе в четырех различных резонаторах сравниваются с предсказаниями теории. Следует отметить, что при теоретическом рассмотрении не использовалось никаких подгоночных параметров, тем не менее теория согласуется с экспериментом в пределах экспериментальных ошибок. Это поразительное согласие подтверждает правильность основных идей, предложенных для объяснения процессов в сверхвысокочастотном газовом разряде. На фиг. 4.8 показаны вычисленные теоретически и полученные экспериментально значения коэффициентов ионизации.

**Гелий и аргон.** Соответствующее количество ртути, вводимой в Нег-газ, служит для снятия возбуждения метастабильного уровня гелия. Ртуть оказывается весьма эффективной в этом отношении. Интересно рассмотреть действие другого газа, аргона, который используется для выполнения тех же функций. Хотя на первый взгляд кажется, что аргон должен быть лучше для этих целей, поскольку его уровень ионизации гораздо ближе к возбужденному уровню в гелии, чем уровень ионизации ртути, фактически дело обстоит не так. На фиг. 4.9 представлены экспериментальные результаты [9], полученные на частоте 994 Мгц в гелии с добавлением 1% аргона, в резонаторе с характерной диффузионной длиной 0,631 см. Кривая, расположенная ниже всех экспериментальных точек, вычислялась с помощью изложенной выше теории с использованием соотношения (4.22). Поскольку переход от возбуждения к ионизации здесь менее эффективен, чем в случае ртути, часть энергии теряется на процессы возбуждения, поэтому пробой происходит в больших электрических полях.

Этот вывод согласуется с результатом измерений сечений, выполненных Бионди [10], а также Бентоном и др. [11], которые показали, что сечение разрушения метастабильного уровня, или эффекта Пеннинга, для ртути в гелии более чем в 10 раз превосходит сечение для аргона в гелии.



Ф и г. 4.9. Сравнение теории для Нег-газа с экспериментальными значениями пробойного поля для гелия с добавкой 1% аргона при частоте 994 Мгц и  $\Lambda = 0,631$  см.

**Поправка на неоднородность поля.** Развитая выше теория основана на предположении о том, что электрическое поле однородно во всем рассматриваемом объеме. В действительности электрическое поле в резонаторах типа использовавшихся в экспериментах, результаты которых изображены на фиг. 4.7 и 4.8, изменяется вдоль радиуса, как показано на фиг. 1.2. Если диффузия происходит главным образом в одном направлении, т. е. вдоль оси резонатора, то неоднородность поля не существенна, и мы имеем дело с линейной диффузионной задачей, в которой пробой определяется величиной поля в центре резонатора. Если же диффузия электронов в радиальном направлении составляет существенную часть полного диффузионного потока, то однородность электрического поля весьма существенна, а вычисления соответствующей характерной диффузионной длины становятся более трудными.

Высота одного из резонаторов (2,54 см), использовавшихся при получении данных, представленных на фиг. 4.7 и 4.8, была достаточна для того, чтобы происходила значительная диффузия в радиальном направлении. В результате уменьшалась эффективная диффузионная длина, и при сравнении теории с экспериментом для нахождения эффективной диффузионной длины  $\Lambda_e$  вводилась поправка. Детали этих вычислений обсуждаются при рассмотрении неоднородных полей в гл. 6.

**Водород и гелий.** Водород подобен гелию в том отношении, что частота столкновений в нем практически не зависит от энергии. Мы можем рассматривать водород и чистый гелий одинаковым образом, потому что ни в одном из этих газов нет обменного механизма, в результате которого возбуждение нижнего уровня могло бы привести к ионизации. Поэтому при расчете функции распределения необходимо учитывать потери энергии на возбуждение.

Чтобы вычислить функцию распределения, необходимо знать эффективности ионизации и возбуждения, а также кривую зависимости сечения столкновений от энергии. Для энергий электронов, меньших энергии возбуждения низшего уровня, уравнения имеют такой же вид, как и в случае Нег-газа, и можно использовать уравнение (4.8). Следовательно, мы можем записать

$$f = e^{(2/\alpha - 1)yg},$$

$$y \frac{d^2g}{dy^2} + \frac{dg}{dy} \left( \frac{3}{2} - y \right) - g (\alpha + \mu h \delta) = 0,$$

где все параметры обозначают те же комбинации переменных, что и для Нег-газа, однако численные значения соответствуют водороду.

Проведем теперь вычисления по отдельности для электронов с энергиями, меньшими, чем нижний потенциал возбуждения (в этом случае член с  $\hbar$  равен нулю), и для электронов с энергиями, превышающими потенциал возбуждения. В первом случае мы получаем такие же уравнения, как и для Нег-газа, и решения имеют вид суммы конфлюентных гипергеометрических функций

$$g = M \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right) + CW \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right), \quad y < y_x, \quad (4.29)$$

где  $y_x$  — значение  $y$ , соответствующее потенциалу возбуждения. Для энергий электронов, превышающих нижний потенциал возбуждения, нужно учитывать потери энергии, т. е. член с  $\hbar$ . При этом удовлетворительную аппроксимацию экспериментальных результатов Рамьена, изображенных на фиг. 2.8, можно получить, предположив, что эффективность возбуждения линейно зависит от энер-

гии. Так как переменная  $y$  пропорциональна энергии электрона, имеет смысл записать эффективность возбуждения через  $y$ , положив

$$\hbar x = \hbar_{1x} (u - u_x) = \hbar_{1x} \frac{\delta}{\beta} (y - y_x), \quad (4.30)$$

где  $\hbar_{1x}$  — константа, определяемая из экспериментальных данных и равная  $9,0 \cdot 10^{-3}$ . Мы пришли к дифференциальному уравнению такого типа, для которого обычно нельзя получить решения в замкнутом виде, поэтому преобразуем его к нормальному виду, положив

$$e^{y(1-2/3\alpha)} f = g = y^{-3/4} e^{y/2} q. \quad (4.31)$$

После подстановки в дифференциальное уравнение для  $g$  получаем

$$\frac{d^2 q}{dy^2} + \left( \frac{3}{16y^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4y} - \frac{\alpha}{y} - \frac{\mu \delta h}{y} \right) q = 0; \quad (4.32)$$

здесь параметры  $\alpha$ ,  $\mu$  и  $\delta$  имеют тот же смысл, что и раньше.

Решить уравнение (4.32) чрезвычайно трудно, однако можно получить решение в удобной форме, если пренебречь членом  $3/16 y^2$ . Исследование всего выражения в скобках показывает, что такое приближение разумно, если энергия электрона несколько выше уровня возбуждения ( $8,9\theta$ ). Когда энергия электронов становится больше потенциала возбуждения низшего уровня, потери энергии на возбуждение настолько превышают потери при упругих столкновениях, испытываемых электронами меньших энергий, что возбуждение становится основным процессом, приводящим к выводу электронов из области высоких энергий функции распределения. Чтобы показать, что действительно разумно опустить член  $3/16 y^2$ , на фиг. 4.10 приведена величина второго члена (обозначенного через  $I$ ) уравнения (4.32) для водорода для нескольких типичных случаев. В этом приближении уравнение для  $q$  принимает несколько более простой вид:

$$\frac{d^2 q}{dy^2} - \frac{A^2 y - B}{y} q = 0, \quad (4.33)$$

где

$$A^2 = \frac{1}{4} + \frac{\mu \delta^2 h}{\beta}$$

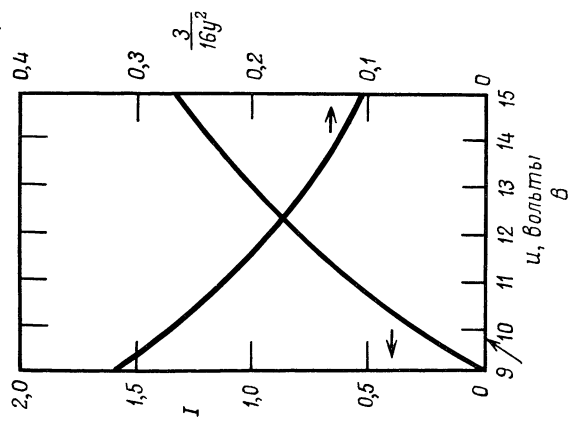
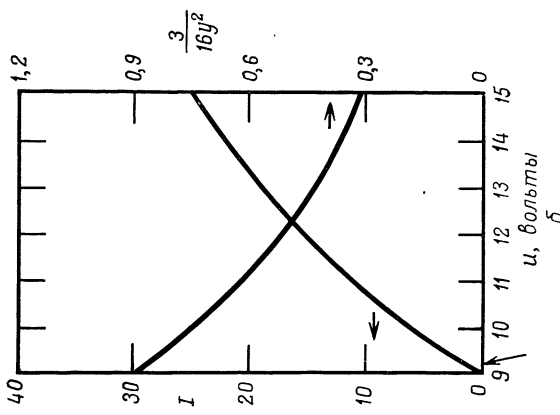
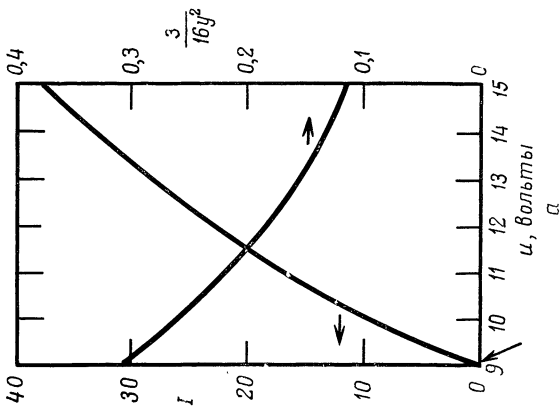
и

$$B = \left( \frac{3}{4} + \mu \hbar_{1x} u_x \right). \quad (4.34)$$

Хотя  $A$  и  $B$  не зависят от переменной  $y$ , они изменяются с изменением экспериментальных параметров. Решение уравнения (4.33) не может быть получено в замкнутом виде, но его можно записать в виде ряда

$$q = e^{-Ay} y^{B/2A} \left( 1 + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \dots \right); \quad (4.35)$$





Ф и г. 4.10. Сравнение значений функций  $I(u)$  и  $3/16 y^2$  для водорода в трех типичных случаях. а)  $E/p = 14$ ;  $p\lambda = 500$ ;  $p\Delta = 7,5$ ; б)  $E/p = 30$ ;  $p\lambda = 100$ ;  $p\Delta = 1,5$ ; в)  $E/p = 150$ ;  $p\lambda = 20$ ;  $p\Delta = 0,30$ . Следует обратить внимание на различие масштабов. Стрелка на оси абсцисс указывает точку, начиная с которой  $I$  превышает величину  $3/16y^2$ .

определяя коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  и т. д., можно получить последовательные приближения к решению. Если предположить, что три члена дают достаточно хорошее приближение, то  $a_1$  и  $a_2$  определяются следующим образом:

$$a_1 = \left(1 - \frac{B}{2A}\right) \frac{B}{4A^2},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{4A} \left[ \left(\frac{B}{2A} - 2\right) \left(\frac{B}{2A} - 1\right) \right].$$

Для рассматриваемых значений экспериментальных параметров член  $a_2$  очень мал, поэтому в дальнейшем мы будем считать, что первые два члена ряда достаточно точно аппроксимируют искомую функцию. Используя решение (4.35) и формулу перехода между  $f$  и  $g$ , мы приходим к выражению для функции распределения при энергиях, превышающих нижний потенциал возбуждения:

$$f = e^{-yS} y^{T-3/2} \left(1 + \frac{a_1}{y}\right), \quad y > y_x, \quad (4.36)$$

где

$$S = A + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \alpha$$

и

$$T = \frac{B}{2A} + \frac{3}{4}.$$

Это решение уравнения для функции распределения справедливо при энергиях электронов, превышающих потенциал возбуждения нижнего уровня на несколько десятых вольта. Экстраполировав решение (4.29) в область более высоких значений  $u$  на несколько десятых вольта, мы получим функцию распределения для всех энергий вплоть до 9,5 в. Тогда функцию распределения во всем диапазоне изменения энергии можно записать так:

$$f = \left[ M \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right) + CW \left( \alpha; \frac{3}{2}; y \right) \right] e^{(2/3\alpha-1)y}, \quad u < 9,5 \text{ в}, \quad (4.37)$$

$$f = Ry^{T-3/2} \left(1 + \frac{a_1}{y}\right) e^{-yS}, \quad u > 9,5 \text{ в};$$

здесь константы  $R$  и  $C$  определяются из граничных условий, заключающихся в требовании непрерывности функции распределения и ее производной при  $u = 9,5$  в. Эти условия можно записать в явном виде, хотя они и представляют собой сложные алгебраические выражения. Если положить

$$\frac{1}{\Phi} = \left[ \frac{T-3/2}{y} - \frac{a_1}{y^2(1+a/y)} - S \right]_{y=y_p}, \quad (4.38)$$

то

$$C = \left\{ \frac{M(\alpha; 1/2; y) - \Phi[M'(\alpha; 3/2; y) - (1 - 2/3\alpha)M(\alpha; 3/2; y)]}{\Phi[W'(\alpha; 3/2; y) - W(\alpha; 3/2; y)(1 - 2/3\alpha)] - W(\alpha; 3/2; y)} \right\}_{y=y_p} \quad (4.39)$$

и

$$R = \left\{ \frac{e^{-y(1-2/3\alpha)} [M(\alpha; 3/2; y) + CW(\alpha; 3/2; y)]}{e^{-yS_y T^{-3/2}} (1 + a_1/y)} \right\}_{y=y_p}, \quad (4.40)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $y$ , а  $y_p$  есть значение  $y$ , соответствующее  $u = 9,5$  в.

Чтобы найти коэффициенты высокочастотной ионизации или вычислить пробойные поля, мы должны рассчитать скорость ионизации и коэффициент диффузии так же, как это делалось для Нег-газа.

Используя результаты Тейта и Смита, приведенные на фиг. 2.9, снова аппроксимируем эффективность ионизации линейной функцией:

$$h_i = \dot{h}_{i1} (u - u_x) = 9,4 \cdot 10^{-3} (u - 16,2), \quad u > 16,2 \text{ в.}$$

Скорость ионизации записывается аналогично (4.11)

$$\begin{aligned} nv_i &= 4\pi \left( \frac{2e}{m} \right)^{3/2} \int_{u_i}^{\infty} h_i v_c u^{1/2} f du = \\ &= 2\pi \left( \frac{2e}{m} \right)^{3/2} \left( \frac{\delta}{\beta} \right)^{5/2} \int_{y_i}^{\infty} h_{i1} v_c (y - y_i) y^{1/2} f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Легко видеть, что в приведенное выражение входит интеграл от экспоненциальных и степенных функций от  $y$ , взятый в полубесконечной области. Разделим его на два интеграла, один от нуля до бесконечности и другой от нуля до  $y_i$ . Эти интегралы можно привести к неполным  $\Gamma$ -функциям вида

$$\Gamma_x(p+1) = \int_0^x e^{-t} t^p dt.$$

Однако более удобно использовать функцию, определяемую как отношение неполной  $\Gamma$ -функции к полной:

$$I(x, p) = \frac{\Gamma_x(p+1)}{\Gamma(p+1)}.$$

Эта функция подобна функции  $I(u, p)$ , предложенной Пирсоном [12], который опубликовал обширные таблицы, где в качестве аргумента для облегчения вычислений взята величина  $u = x/\sqrt{p+1}$ .

Поэтому при использовании этих таблиц необходимо проявлять внимательность и учитывать разницу в определениях.

С помощью  $\Gamma$ - и  $I$ -функций интеграл в формуле (4.41) можно представить в виде

$$\int_{y_i}^{\infty} e^{-yS} [y^T + (a_1 - y_i) y^{T-1} - a_1 y_i y^{T-2}] dy = \\ = \frac{\Gamma(T+1)}{S^{T+1}} \left\{ 1 - I(T, Sy_i) + \frac{S}{T} (a_1 - y_i) [1 - I(T-1, Sy_i)] - \right. \\ \left. - \frac{S^2}{T(T-1)} y_i [1 - I(T-2, Sy_i)] \right\}. \quad (4.42)$$

При вычислении коэффициента диффузии интегрирование производится по всей области от нуля до бесконечности и, следовательно, необходимо взять интегралы от обеих частей функции распределения. Мы можем написать

$$nD = \frac{2\pi}{3v_c} \left( \frac{2e}{m} \right)^{5/2} \left( \frac{\delta}{\beta} \right)^{5/2} \int_0^{\infty} y^{3/2} f(y) dy.$$

Интеграл, содержащий конфлюентные гипергеометрические функции, подобен интегралу, использованному при рассмотрении Нег-газа, а интеграл, включающий экспоненты, вновь приводит к выражениям, содержащим  $I$ -функцию. Таким образом, интеграл, входящий в уравнение для коэффициента диффузии, может быть записан в виде

$$\int_0^{y_p} y^{3/2} e^{(2/3\alpha - 1)y} \left[ M\left(\alpha; \frac{3}{2}; y\right) + CW\left(\alpha; \frac{3}{2}; y\right) \right] dy + \\ + \int_{y_p}^{\infty} R e^{-yS} y^T \left( 1 + \frac{a_1}{y} \right) dy = \\ = \frac{3}{2\alpha} \frac{y^{3/2}}{(1 - 2/3\alpha)} e^{(2/3\alpha - 1)y} \left\{ M'(y) - \frac{2}{3} \alpha M(y) + \right. \\ \left. + C \left[ W'(y) - \frac{2}{3} \alpha W(y) + \frac{1}{2y^{3/2}} \right] \right\} + \\ + \frac{R\Gamma(T+1)}{S^{T+1}} \left\{ 1 - I(T, Sy) + \frac{Sa_1}{T} [1 - I(T-1, Sy)] \right\}_{y=y_p}. \quad (4.43)$$

Выражения для коэффициента высокочастотной ионизации  $\zeta$ , а следовательно, и выражение, с помощью которого вычисляются пробойные поля, для водорода гораздо сложнее, чем для Нег-газа. Однако если выражение для  $nv_i$  разделить на  $nD$ , то, используя соотношения (4.42) и (4.43) и собирая вместе возникающие коэффи-

циенты, получаем

$$\zeta = \frac{v_i}{DE^2} = \frac{1}{\Lambda^2 E^2} \left[ \frac{279 (p\Lambda)^2 J}{K + HG} \right];$$

здесь

$$J = 1 - I(T, Sy_i) + \frac{Sa_1}{T} \left[ 1 - I(T-1, Sy_i) \right] - \frac{Sy_i}{T} \left\{ 1 - I(T-1, Sy_i) + \frac{Sa_1}{T-1} [1 - I(T-2, Sy_i)] \right\},$$

$$K = 1 - I(T, Sy_p) + \frac{Sa_1}{T} [1 - I(T-1, Sy_p)],$$

$$H = \frac{3S^{T+1} e^{(2/3\alpha-1)y_p}}{2\alpha R (1-2/3\alpha) \Gamma(T+1)},$$

$$G = y_p^{3/2} \left[ M' \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_p \right) - \frac{2}{3} \alpha M \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_p \right) \right] + Cy_p^{3/2} \left[ W' \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_p \right) - \frac{2}{3} \alpha W \left( \alpha; \frac{3}{2}; y_p \right) \right] + \frac{C}{2} e^{-(2/3\alpha-1)y_p}.$$

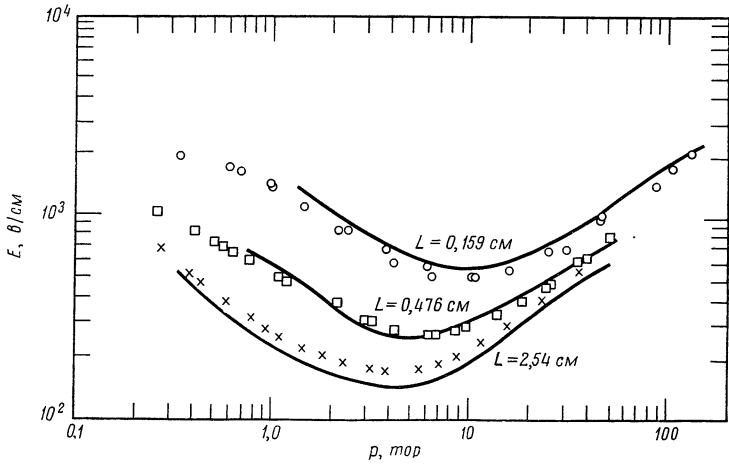
Ниже вновь приводятся различные другие константы, специально вычисленные для случая водорода:

$$\begin{aligned} y &= 16,1 \frac{u}{\delta (E_e/p)^2}, \\ E_e^2 &= \frac{E^2}{1 + (31,9/p\lambda)^2}, \\ \frac{1}{\delta} &= \left[ 1 + \frac{1,55 \cdot 10^{-2} (E_e/p)^2}{(p\Lambda)^2} \right]^{1/2}, \\ \alpha &= 0,75(1 - \delta), \\ A^2 &= \frac{1}{4} + 1,03 \left( \frac{E_e}{p} \right)^2 \delta^2, \\ B &= 148,8\delta, \\ S &= A + \frac{\delta}{2}, \\ T &= 74,4 \frac{\delta}{A} + \frac{3}{4}, \\ a_1 &= \frac{B}{4A^2} \left( 1 - \frac{B}{2A} \right); \end{aligned}$$

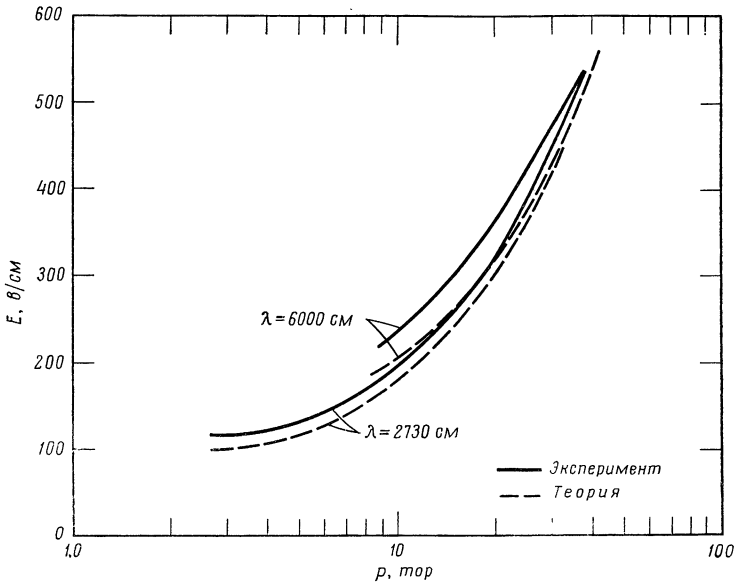
$\Phi$ ,  $C$  и  $R$  определяются соотношениями (4.38)—(4.40).

При пробое коэффициент высокочастотной ионизации  $\zeta$  равен  $1/\Lambda^2 E^2$ . Это означает, что с помощью соотношения (4.42) условие пробоя можно записать в виде

$$279 (p\Lambda)^2 J = K + HG. \quad (4.44)$$



Ф и г. 4.11. Сравнение теории с экспериментом для пробоя в водороде при  $2,8 \text{ Гц}$ .



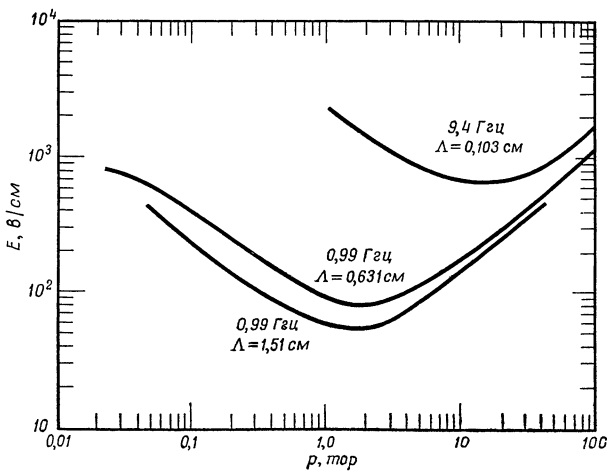
Ф и г. 4.12. Экспериментальные результаты Джитенса для пробоя в водороде при  $5$  и  $11 \text{ МГц}$  в сравнении с теорией.

Это уравнение является трансцендентным и не поддается простому решению; практически необходимо использовать численные методы расчета с применением метода последовательных приближений.

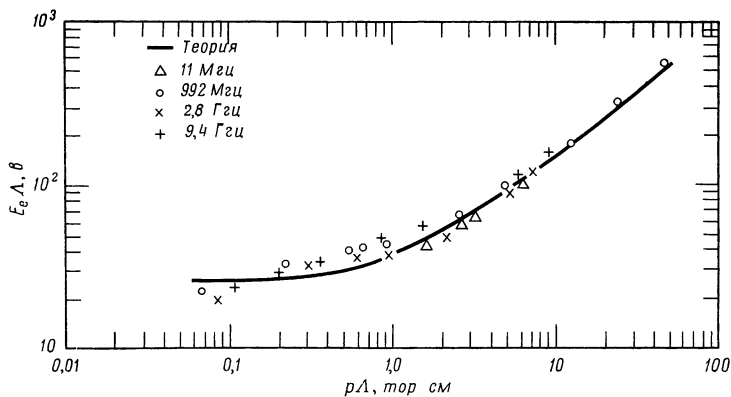
На фиг. 4.11 экспериментальные результаты сравниваются с теоретическими кривыми, полученными с помощью уравнения (4.44). Эксперименты [3] проводились при частоте 2,8 Гц в трех резонаторах. Для самого большого из них необходимо было вводить поправки на неоднородность поля, так же, как это делалось в рассмотренном ранее случае Нег-газа. Согласие теории и эксперимента хуже, чем для Нег-газа. Частично это объясняется тем, что здесь использовалось больше аппроксимаций, особенно при решении дифференциального уравнения для энергий электрона, превышающих низший потенциал возбуждения. Кроме того, коэффициенты в выражениях, описывающих зависимость энергетических потерь от эффективности возбуждения и ионизации, могут быть не очень точными, поскольку эксперименты проводились много лет назад с использованием техники, которую теперь можно считать не отвечающей необходимым требованиям. Тем не менее в широком интервале давлений и размеров резонаторов вычисленные поля относительно близки к измеренным.

Сообщения об измерениях высокочастотного пробоя, выполненных перед второй мировой войной, в большинстве случаев не настолько подробны, чтобы мы могли вычислить электрические поля. Однако Джитенс [13] и Томпсон [14] опубликовали результаты измерений пробоя в водороде, на основании которых можно вычислить характерную диффузионную длину и электрическое поле. На фиг. 4.12 приведены значения поля для частоты 5 и 11 МГц, вычисленные на основе опубликованных Джитенсом данных по напряжениям и геометрии эксперимента. Экспериментальные кривые сравниваются с теоретическими, рассчитанными с помощью соотношения (4.44). И в этом случае согласие является достаточно хорошим. Аналогичный характер носят не показанные здесь результаты Томпсона.

На фиг. 4.13 представлены более поздние результаты, полученные на сверхвысоких частотах, а именно 994 МГц и 9,4 ГГц [9, 15]. Интересно сравнить эти данные с теорией и с другими результатами, используя представление об эффективном поле. Это представление, введенное в гл. 3 и применявшееся в настоящей главе, пригодно, строго говоря, только в том случае, когда частота столкновений не зависит от энергии электронов. Поскольку это выполняется для водорода и гелия, желательно использовать представление об эффективном поле при рассмотрении пробоя в водороде, так как для него имеется обширный экспериментальный материал, перекрывающий значительный диапазон частот, давлений и размеров резонаторов.



Ф и г. 4.13. Экспериментальные результаты по пробоям в водороде при 0,99 и 9,4 ГГц.



Ф и г. 4.14. Сравнение теории с экспериментом для пробоя в водороде.



На фиг. 4.14 изображена зависимость  $E_e\Lambda$  от  $p\Lambda$ , построенная по результатам Джитенса, Мак-Доналда и Брауна, а также Мак-Доналда, Гаскелла и Гиттермана для диапазона частот от 5  $M\mu$  до 10  $G\mu$ , характерных диффузионных длин от 0,05 до 1,51  $cm$  и для давлений, изменяющихся от менее чем 0,1  $tor$  до более чем 100  $tor$ . Точки изображают результаты эксперимента, а сплошная кривая вычислена на основании развитой здесь теории, причем между теорией и экспериментом наблюдается прекрасное согласие.

**Чистый гелий.** Редер и Браун [4] изучали функцию распределения электронов в чистом гелии и затем сравнивали расчетные пробойные поля с экспериментом. Они использовали методы, в основном подобные описанным в настоящей главе, но несколько отличающиеся в деталях. В частности, они лучше учитывали зависимость эффективности возбуждения от энергии. Сравним их результаты с результатами теории, развитой для водорода. Условие пробоя (4.44) в случае гелия запишется так:

$$14,4 (p\Lambda)^2 J = K + HG. \quad (4.45)$$

Величины  $J$ ,  $K$ ,  $H$  и  $G$  определяются так же, как и раньше, за исключением тех изменений, которые нужно ввести из-за иных атомных характеристик гелия. В частности, на основании кривых, приведенных в гл. 2, эффективности возбуждения и ионизации можно аппроксимировать следующим образом:

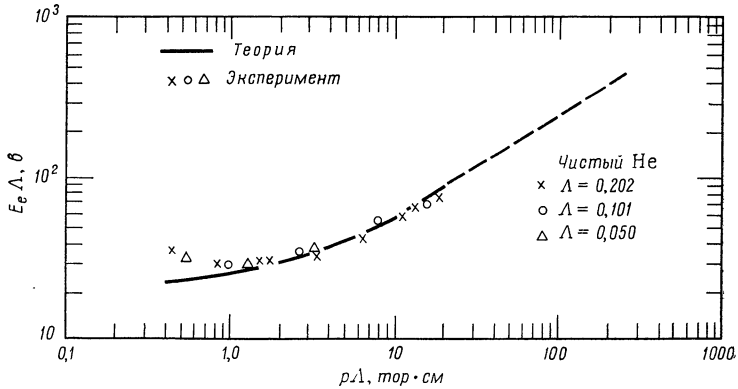
$$\begin{aligned} h_x &= h_{1x} (u - u_x) = 7,2 \cdot 10^{-3} (u - 19,8), \\ h_i &= h_{1i} (u - u_i) = 6,5 \cdot 10^{-3} (u - 24,5). \end{aligned}$$

Другие величины, необходимые при решении уравнения (4.45), выписаны ниже:

$$\begin{aligned} y_i &= 1,34 \frac{u_i}{\delta (E_e/p)^2}, & A^2 &= 19,8 \left( \frac{E_e}{p} \right)^2 \delta^2 + \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{\delta} &= \left[ 1 + \frac{2,24 (E_e/p)^2}{(p\Lambda)^2} \right]^{1/2}, & B &= 524\delta, \\ E_e^2 &= \frac{E^2}{1 + (78,6/p\lambda)^2}, & T &= 262 \frac{\delta}{A} + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Соотношения между другими переменными остаются теми же, что и в случае водорода. Решение уравнения (4.45) дает соотношение между  $E_e\Lambda$  и  $p\Lambda$ , которому соответствует кривая на фиг. 4.15. Точки, нанесенные на тот же график, представляют результаты, полученные Редером и Брауном в чистом гелии при частоте 2800  $M\mu$  в резонаторах с характерными диффузионными длинами 0,050;

0,101 и 0,202 см. Хотя эти данные были получены несколько лет назад в вакуумной системе без использования новейшего высоковакуумного оборудования, чистота гелия обеспечивалась за счет



Ф и г. 4.15. Сравнение теории и эксперимента для пробоя в чистом гелии. Пунктиром показана экстраполяция теоретической кривой. Эксперименты проводились на частоте 2,8 Гц в резонаторах с  $\Delta = 0,202$ ; 0,101 и 0,050 см.

применения ловушки с жидким гелием, расположенной вблизи резонатора, в котором производились измерения. Эта ловушка вымораживала все газы, кроме гелия. Согласие теории с экспериментом вполне удовлетворительное.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Herlin M. A., Brown S. C., Phys. Rev., **74**, 291 (1948).
2. MacDonald A. D., Brown S. C., Phys. Rev., **75**, 411 (1949).
3. MacDonald A. D., Brown S. C., Phys. Rev., **76**, 1634 (1949).
4. Reder F. H., Brown S. C., Phys. Rev., **95**, 885 (1954).
5. Brown S. C., Basic Data of Plasma Physics, Cambridge, Mass., 1959, Ch. 5.
6. Brown S. C., Proc. IRE, **39**, 1493 (1951).
7. MacDonald A. D., Journ. Math. Phys., **28**, 183 (1949).
8. MacDonald A. D., Canad. Journ. Res., **A28**, 175 (1950).
9. MacDonald A. D., Bandel H. W., Gaskell D. U., Gitterman H. N., Palo Alto Laboratories G. T. and E., Report RADC-TDR-62-286, May 1962.
10. Biondi M. A., Phys. Rev., **88**, 660 (1953).
11. Benton E. E., Ferguson E. E., Matsen F. A., Robertson W. W., Phys. Rev., **128**, 206 (1962).
12. Pearson K., Tables of the Incomplete  $\Gamma$ -Function, Cambridge, 1946.
13. Githens S., Phys. Rev., **57**, 822 (1940).
14. Thompson J., Phil. Mag., **23**, 1 (1937).
15. MacDonald A. D., Gaskell D. U., Gitterman H. N., Phys. Rev., **130**, 1841 (1963).

## Теория пробоя (частота столкновений зависит от энергии)

Выше мы показали, что решение кинетического уравнения Больцмана, из которого получается функция распределения электронов, применяемая затем для вычисления напряженностей полей пробоя, приводит к хорошему согласию с экспериментом для Нег-газа, гелия и водорода. При этом весьма существенную роль играло использование предположения о том, что частота столкновений электронов почти не зависит от энергии в широком интервале изменений последней. Исследование условий пробоя в неоне и смесях неона с аргоном позволяет проанализировать и тот случай, когда это упрощающее предположение уже не справедливо.

### НЕОН

Как видно из фиг. 2.3, вероятность столкновений в неоне слабо зависит от энергии в диапазоне от 2—3 до 50—60 в. Это значит, что средняя длина свободного пробега электронов постоянна и, следовательно, частота столкновений пропорциональна  $u^{1/2}$ . Из фиг. 2.7 видно, что это приближение не столь корректно, как для гелия и водорода, тем не менее оно может служить достаточно хорошей основой для теоретического анализа и последующего сравнения теории с экспериментом.

Для неона в уравнении (4.3) для функции распределения величину  $v_m$  нужно заменить либо на  $v/l_m$ , где  $l_m$  — средняя длина свободного пробега, либо на  $ku^{1/2}$ , где  $k = (1/l_m)(2e/m)$ . Поскольку величина  $l_m$ , выраженная в сантиметрах, составляет приблизительно  $1/10p$  (где  $p$  — давление в торах), то параметр  $k$  равен  $5,93 \cdot 10^8 p$  в<sup>-1/2</sup>·сек<sup>-1</sup>.

Это значение частоты столкновений следует подставить в уравнение (4.3), которое теперь запишется следующим образом:

$$\frac{2e}{3m} E^2 \frac{d}{du} \left( \frac{ku^2}{k^2u + \omega^2} \frac{df}{du} \right) + \frac{2m}{M} \frac{d}{du} (u^2kf) = f \left( khu + \frac{2e}{3mk} \frac{u}{\Lambda^2} \right). \quad (5.1)$$

Аналогично этому соотношению (4.4), вводящее безразмерную переменную, также изменяется

$$\omega = \frac{3m}{M} \frac{m}{eE^2} \left( \frac{k^2u^2}{2} + \omega^2u \right). \quad (5.2)$$

Очевидно, что уравнение (5.1) является чрезвычайно сложным и его решение нельзя записать в простом аналитическом виде. Наибольшие трудности создает член  $ku^2/(k^2u + \omega^2)$ . Величина  $k$  пропорциональна давлению, и если давление таково, что одним из слагаемых в знаменателе можно пренебречь по сравнению с другим, то уравнение упрощается. Такая ситуация возможна, либо когда давление достаточно мало, так что время между столкновениями много больше периода электромагнитного поля, либо когда в течение одного периода происходит много столкновений. Эти два случая соответствуют двум различным механизмам передачи энергии поля электрону. Промежуточный диапазон давлений, в котором частота поля имеет порядок частоты столкновений, расположен в области минимума кривой зависимости пробойного электрического поля от давления.

**Низкие давления ( $v_e^2 \ll \omega^2$ ).** Рассмотрим сначала случай низких давлений, когда давление настолько мало, что время между столкновениями много больше периода поля. Поскольку мы можем пренебречь  $v_e^2$  по сравнению с  $\omega^2$ , соотношение (5.2) упрощается и принимает вид

$$\omega = \frac{3m}{M} \frac{m}{e} \frac{\omega^2}{E^2} u = \sigma u. \quad (5.3)$$

При введении этой новой независимой переменной уравнение (5.1) для функции распределения упрощается и записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dw} \left[ \omega^2 \left( \frac{df}{dw} + f \right) \right] = \omega f \frac{M}{2m} \left( h + \frac{l^2}{3\Lambda^2} \right). \quad (5.4)$$

Здесь последний член в правой части выражен через отношение  $l^2/3\Lambda^2$  средней длины свободного пробега к диффузионной длине вместо эквивалентной записи  $2e/3mk^2\Lambda^2$ . Теперь рассмотрим по отдельности случаи, когда энергия электронов больше или меньше самого низкого потенциала возбуждения  $u_x$ . Для  $u < u_x$  решение уравнения (5.4) легко получается в виде суммы конфлюэнтных гипергеометрических функций [1]

$$f = e^{-w} [M(\alpha; 2; w) + CW(\alpha; 2; w)], \quad (5.5)$$

где  $\alpha = Ml^2/6m\Lambda^2$ .

В принципе, пользуясь этой функцией распределения, нетрудно провести весь необходимый анализ, однако эта работа связана с чрезвычайно громоздкими вычислениями. Последующее интегрирование становится менее сложным, если до решения упростить

уравнение (5.4). Его можно записать следующим образом:

$$\omega \frac{d^2 f}{d\omega^2} + (\omega + 2) \frac{df}{d\omega} + f \left( 2 - \frac{M}{6m} \frac{l^2}{\Lambda^2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Для значений переменных, обычно встречающихся в эксперименте, безразмерная величина  $\omega$  очень мала, и если пренебречь ею в коэффициенте при  $df/d\omega$ , то этот член изменится не более, чем на 1%. Обозначив через  $\mu$  выражение  $4 [(M/6m) (l^2/\Lambda^2) - 2]$ , перепишем уравнение

$$\frac{d}{d\omega} \left( \omega^2 \frac{df}{d\omega} \right) - \frac{\mu}{4} \omega f = 0. \quad (5.7)$$

Легко узнать в (5.7) одну из форм уравнения Бесселя, решение которого после подстановки  $\mu\omega = x$  запишется в виде

$$f = \frac{1}{\sqrt{x}} [K_1(\sqrt{x}) + CI_1(\sqrt{x})], \quad u < u_x, \quad (5.8)$$

где  $K_1$  и  $I_1$  — функции Бесселя первого порядка от мнимого аргумента, согласно обозначениям Ватсона [2].

Если  $u > u_x$ , то необходимо учитывать и неупругие столкновения и рассмотреть член с  $h$  в уравнении (5.4). В соответствии с результатами измерений Майера Лейбница, представленными на фиг. 2.8, частоту неупругих столкновений в неоне можно аппроксимировать выражением

$$h_x = h_{1x} (u - u_x),$$

где  $h_{1x} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ в}^{-1}$  и  $u_x = 16,0 \text{ в}$ . Подставляя это выражение в (5.4), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \omega \frac{d^2 f}{d\omega^2} + 2 \frac{df}{d\omega} - \frac{\mu}{4} f &= \frac{M}{2m} f [h_{1x} (u - u_x)] = \\ &= \frac{M}{2m} f \left( h_{1x} \frac{\omega}{\sigma} - h_{1x} u_x \right), \quad (5.9) \end{aligned}$$

где мы, как и при выводе уравнения (5.7), пренебрегли членом  $\omega df/d\omega$ : Уравнение (5.9) можно решить точно с помощью конфлюэнтной гипергеометрической функции, однако интегралы, получающиеся в этом случае при вычислении скоростей ионизации и коэффициентов диффузии, чрезвычайно сложны. Ниже проводится приближенное решение, которое дает величины электрических полей пробоя, очень близкие к полям, предсказываемым более сложной теорией.

Прежде всего преобразуем независимую переменную таким образом, чтобы все экспериментальные параметры вошли в один коэффициент. Положим

$$y = \frac{M}{m} \frac{E}{\omega} \sqrt{\frac{h_{1x} e}{6m}} \omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{m}{e} h_{1x} u};$$

тогда уравнение запишется в виде

$$y \frac{d^2 f}{dy^2} + 2 \frac{df}{dy} + f(\beta - y) = 0, \quad (5.10)$$

где

$$\beta = \frac{\omega}{E} u_x \sqrt{\frac{3h_{1x}m}{2e}} \left(1 - \frac{m}{2Mh_{1x}u_x}\right).$$

Два решения вида  $e^{\pm y}/y$  являются почти точными. Растущую с энергией экспоненту следует отбросить, поскольку при больших энергиях электронов функция распределения должна стремиться к нулю. К остающемуся выражению добавляется член, пропорциональный  $y^{-2}e^{-y}$ , причем коэффициент подбирается так, чтобы решение было точным в некоторой точке внутри рассматриваемой области, например в точке, соответствующей потенциалу ионизации. Тогда решение можно записать в виде

$$f = Ae^{-y} \left( \frac{1}{y} + \frac{b}{y^2} \right), \quad u > u_x, \quad (5.11)$$

$$b = -\frac{! \beta y^2}{(\beta + 2) y_i + 2},$$

где  $y_i$  — значение  $y$  при  $u = u_i$ , а коэффициент  $A$  должен быть определен из граничных условий. Полученное решение является точным при энергии, соответствующей потенциалу ионизации, и дает достаточно хорошее приближение во всей представляющей интерес области. Член  $b/y^2$  обычно мал по сравнению с  $1/y$ .

Выражения (5.8) и (5.11) представляют собой функцию распределения электронов во всем диапазоне изменения энергии, причем константы  $A$  и  $C$  можно определить, сшивая два решения и их первые производные в точке  $u = u_x$ . В результате приходим к следующим выражениям:

$$C = \frac{K_2(\sqrt{x}) - \Phi K_1(\sqrt{x})}{I_2(\sqrt{x}) + \Phi I_1(\sqrt{x})}, \quad (5.12)$$

$$A = \frac{K_1(\sqrt{x}) + C I_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x} e^{-y} (1/y + b/y^2)},$$

где

$$\Phi = \frac{2r \sqrt{x} [y^2 + (1+b)y + 2b]}{s(by + y^2)};$$

здесь  $y = ru$ ,  $x = su$ , а  $x$  и  $y$  вычисляются в точке  $u = u_x$ .

Теперь, используя соответствующие формулы для функции распределения, можно вычислить скорость ионизации и коэффициент диффузии. Скорость ионизации записывается аналогично выражению (4.11) с учетом того обстоятельства, что частота столк-

новений зависит теперь от энергии:

$$nv_i = 8\pi \frac{e^2}{m^2} \int_{u_i}^{\infty} \frac{u}{t} h_i f du, \quad (5.13)$$

где  $h_i$  — эффективность ионизации.

Обращаясь к фиг. 2.9, видим, что можно принять следующее приближение:

$$h_i = h_{1i} (u - u_i) = 4,48 \cdot 10^{-3} (u - 21,5).$$

Переходя к переменной  $y$ , имеем

$$nv_i = 8\pi \frac{e^2}{m^2 r^3} h_{1i} A \int_{y_i}^{\infty} e^{-y} \left(1 + \frac{b}{y}\right) (y - y_i) dy.$$

Сюда входят легко вычисляемые интегралы от экспонент, а также интегральная показательная функция  $\int_y^{\infty} (e^{-t}/t) dt$ , которую мы обозначим  $E_1(y)$ . Имеются таблицы этой функции [3, 4], которая в книге Янке и Эмде обозначена через  $-Ei(-y)$ . В результате находим

$$nv_i = 8\pi \frac{e^2 h_{1i}}{m^2 r^3 l} [e^{-y_i} (1 + b) - b y_i E_1(y_i)]. \quad (5.14)$$

Выражение (4.13) для коэффициента диффузии теперь запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} nD &= \frac{8\pi l e^2}{3m^2} \int_0^{\infty} u f du = \\ &= \frac{8\pi l e^2}{3m^2 s^2} \left\{ \int_0^{x_x} \sqrt{x} [K_1(\sqrt{x}) + CI_1(\sqrt{x})] dx + A \frac{s^2}{r^2} \int_{y_x}^{\infty} e^{-y} \left(1 + \frac{b}{y}\right) dy \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование можно провести до конца; оно дает

$$\begin{aligned} nD &= \frac{8\pi l e^2}{3s^2 m^2} \left\{ 2x_x [CI_0(\sqrt{x_x}) - K_0(\sqrt{x_x})] - \right. \\ &\left. - 4\sqrt{x_x} [K_1(\sqrt{x_x}) + CI_1(\sqrt{x_x})] + 4 + \frac{s^2}{r^2} A [e^{-y_x} + bE_1(y_x)] \right\}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Теперь с помощью соотношений (5.14) и (5.15) можно записать выражение для высокочастотного коэффициента ионизации  $\zeta$  или вывести условие пробоя, положив  $v/D = 1/\Lambda^2$ . Разделив  $nv_i$  на  $nD$

и умножив на  $\Lambda^2$ , запишем условие пробоя следующим образом:

$$1,34 (\rho\Lambda)^2 A [e^{-y_i} (1+b) - by_i E_1(y_i)] = \\ = \left(\frac{r}{s}\right)^2 \{2x_x [CI_0(\sqrt{x_x}) - K_0(\sqrt{x_x})] - 4\sqrt{x_x} [K_1(\sqrt{x_x}) + \\ + CI_1(\sqrt{x_x})] + 4\} + A [e^{-y_x} + bE_1(y_x)]. \quad (5.16)$$

Ниже приведены значения всех переменных в уравнении (5.16), выраженные через экспериментальные параметры:

$$x = us = u \left[ 1 - \frac{(\rho\Lambda)^2}{30,8} \right] \left( \frac{636}{E\Lambda\rho\Lambda} \right)^2, \\ y = ur = u \frac{412}{E\Lambda}, \\ b = -\frac{y^2}{(2+\beta)y_i+2}, \\ \beta = \frac{412}{E\Lambda} \left[ 16,0 - \frac{0,595}{(\rho\Lambda)^2} \right],$$

коэффициенты  $A$  и  $C$  по-прежнему определяются соотношениями (5.12).

**Высокие давления ( $v_c^2 \gg \omega^2$ ).** Теперь вычислим функцию распределения, описывающую движение электронов в том случае, когда число столкновений за один период электрического поля велико, т. е.  $v_c^2 \gg \omega^2$ . Если только  $v_c$  не является константой, использование этого неравенства требует разъяснения некоторых принципиальных трудностей. В том случае, когда средняя длина свободного пробега постоянна, а частота столкновений зависит от энергии, указанное неравенство не будет выполняться при очень малых энергиях электронов, так как частота столкновений стремится к нулю. Для малых энергий (ниже  $1 \text{ эВ}$ ) зависимость сечений столкновений от энергии пока неизвестна, но можно предположить, что в указанном диапазоне энергии средняя длина свободного пробега не остается постоянной и частота столкновений имеет нижний предел. Кроме того, электроны малой энергии не играют существенной роли в явлениях пробоя, так что наш критерий представляется разумным.

Если можно пренебречь  $\omega^2$  по сравнению с  $v_c^2$ , то дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{2e}{3m} E^2 \frac{d}{du} \left( \frac{u}{k} \frac{df}{du} \right) + \frac{|2m}{M} \frac{d}{du} (u^2 kf) = \\ = f \left( khu + \frac{2e}{3mk} \frac{u}{\Lambda^2} \right), \quad (5.17)$$



а соотношение (4.4), определяющее новую зависящую от энергии переменную, запишется следующим образом:

$$\omega = \frac{3m}{M} \frac{m}{eE^2} \frac{k^2 u^2}{2} = \frac{3m}{M} \frac{u^2}{E^2 l^2} = \rho u^2. \quad (5.18)$$

В результате дифференциальное уравнение для энергий, меньших  $u_x$ , упрощается:

$$\omega \frac{d^2 f}{d\omega^2} + \frac{df}{d\omega} (1 + \omega) + (1 - \delta) f = 0, \quad (5.19)$$

где

$$\delta = \frac{M}{12m} \frac{l^2}{\Lambda^2}.$$

Это уравнение можно решить с помощью конфлюентной гипергеометрической функции; при этом получаем

$$f = e^{-\omega} [M(\delta; 1; \omega) + C_2 W(\delta; 1; \omega)]. \quad (5.20)$$

Если  $u > u_x$ , то дифференциальное уравнение, как и в предыдущем случае, изменится, поскольку в него войдет член, учитывающий неупругие столкновения. Эффективность неупругих столкновений имеет в данном случае ту же величину, что и при низких давлениях, однако ее удобнее записать в другой аналитической форме. Это допустимо, поскольку экспериментальные значения эффективности неупругих столкновений известны не очень хорошо, и для относительно небольшого диапазона энергий оказывается возможным аппроксимировать ее в пределах точности эксперимента несколькими различными функциями. Поэтому, не вступая в противоречие с экспериментальными данными, можно положить

$$h_x = h_{2x} (u^2 - u_x^2) = 1,40 \cdot 10^{-4} (u^2 - 16,0^2).$$

Подставив это соотношение в уравнение (5.17) и произведя замену переменных (5.18), получим уравнение, совпадающее по форме с уравнением (5.19), с той лишь разницей, что теперь добавляется один дополнительный член

$$\omega \frac{d^2 f}{d\omega^2} + (1 + \omega) \frac{df}{d\omega} + (\sigma - \xi \omega) f = 0, \quad (5.21)$$

где

$$\sigma = \frac{M}{4m} \left( h_{2x} u_x^2 - \frac{l^2}{3\Lambda^2} \right) + 1 = 330 - 3060 \frac{l^2}{\Lambda^2}$$

и

$$\xi = 1,57 \cdot 10^4 E^2 l^2.$$

Решение этого уравнения упрощается, если произвести замену  $f = e^{-\sigma \omega} g$ , которая приводит к новому уравнению для  $g$ :

$$\omega \frac{d^2 g}{d\omega^2} + (1 + \omega - 2\sigma \omega) \frac{dg}{d\omega} + \omega (\sigma^2 - \sigma - \xi) g = 0. \quad (5.22)$$

Мы перешли к новой функции для того, чтобы легче можно было убедиться непосредственной проверкой, что в коэффициенте при  $dg/dw$  величина  $2\sigma\omega$  всегда много больше единицы, поэтому второй член можно записать в виде  $\omega(1 - 2\sigma) dg/dw$ . Если осуществить это упрощение, то мы получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решениями которого являются экспоненциальные функции. Экспоненциально нарастающее решение не используется, поскольку из физических условий следует, что функция распределения должна стремиться к нулю при больших энергиях. Используя решение уравнения (5.22) с учетом формулы, связывающей  $f$  и  $g$ , получаем простое выражение для функции распределения

$$f = Be^{-aw}, \quad u > u_x,$$

где  $a = 1/2(1 + \sqrt{1 + 4\xi})$ . Итак, в полном виде функция распределения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= e^{-w} [M(\delta; 1; w) + C_2 W(\delta; 1; w)], \quad u < u_x, \\ f &= Be^{-1/2(1 + \sqrt{1 + 4\xi})w}, \quad u > u_x. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Как и в предыдущем случае, значения двух констант  $C_2$  и  $B$  можно определить, сшивая значения функции распределения и ее первой производной в точке  $u = u_x$ . Это дает

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{(\delta + 1)M(\delta + 1; 2; w_x) + (a - 1)M(\delta; 1; w_x)}{(\delta + 1)W(\delta + 1; 2; w_x) + (a - 1)W(\delta; 1; w_x)}, \\ B &= e^{(a-1)w_x} [M(\delta; 1; w_x) + C_2 W(\delta; 1; w_x)]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

При использовании функции распределения (5.23) скорость ионизации вычисляется относительно легко, если эффективность ионизации аппроксимировать следующим образом:

$$h_i = h_{2i}(u^2 - u_x^2).$$

После перехода к переменной  $w$  и подстановки этого выражения в обычное уравнение для скорости ионизации получаем

$$nv_i = 4\pi \frac{e^2 h_{2i} B}{m^2 I \rho^2} \int_{w_i}^{\infty} (w - w_i) e^{-aw} dw = 4\pi \frac{e^2 h_{2i} B}{m^2 I \rho^2 a^2} e^{-aw_i}. \quad (5.25)$$

Подобным же образом записывается коэффициент диффузии

$$\begin{aligned} nD &= \frac{4\pi l e^2}{3m^2 \rho} \int_0^{\infty} f dw = \\ &= \frac{4\pi l e^2}{3m^2 \rho} \left\{ \int_0^{w_x} e^{-w} [M(\delta; 1; w) + C_2 W(\delta; 1; w)] dw + B \int_{w_x}^{\infty} e^{-aw} dw \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Вычисление первого члена в (5.26) выполняется с помощью неопределенного интеграла

$$\int e^{-x} M(\alpha; \gamma; x) dx = \frac{e^{-x}}{\alpha - \gamma + 1} \left[ x \frac{\alpha}{\gamma} M(\alpha + 1; \gamma + 1; x) + (\gamma - 1) M(\alpha; \gamma; x) \right].$$

Воспользовавшись этим интегралом, а также интегралом от экспоненты, и подставив пределы интегрирования, имеем

$$nD = \frac{4\pi e^{2l}}{3m^2 \rho} \left\{ \omega_x e^{-\omega_x} [M(\delta + 1; 2; \omega_x) + C_2 W(\delta + 1; 2; \omega_x)] - \frac{C_2}{\delta} + \frac{B}{a} e^{-a\omega_x} \right\}. \quad (5.27)$$

Используя результаты (5.25) и (5.27) в сочетании с условием пробоя  $v_i/D = 1/\Lambda^2$ , получаем

$$3,30 (E\Lambda)^2 B e^{-a\omega_i} = \quad (5.27a)$$

$$= a^2 \left\{ \omega_x e^{-\omega_x} [M(\delta + 1; 2; \omega_x) + C_2 W(\delta + 1; 2; \omega_x)] - \frac{C_2}{\delta} + \left(\frac{B}{a}\right) e^{-a\omega_x} \right\}.$$

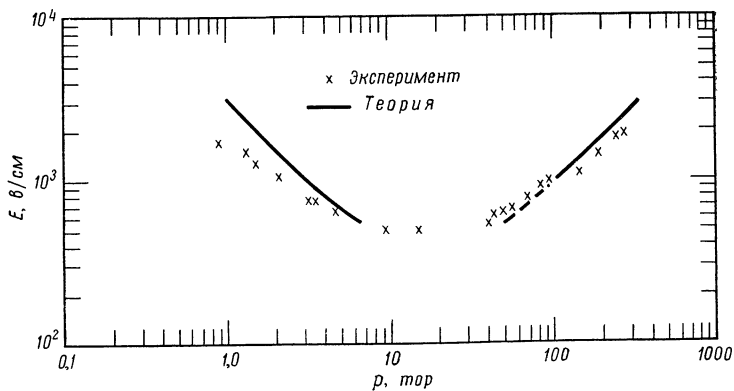
Уравнение (5.27a) в неявном виде связывает экспериментальные переменные. Для определения связи между электрическими полями и давлениями, удовлетворяющими условию пробоя, его следует решать методом последовательных приближений. Для удобства вычисления ниже приводятся выражения некоторых величин, входящих в уравнение (5.27a), через экспериментальные параметры:

$$\omega = \left(\frac{p}{E}\right)^2 \frac{u^2}{123,4}, \quad \delta = \frac{30,6}{(p\Lambda)^2},$$

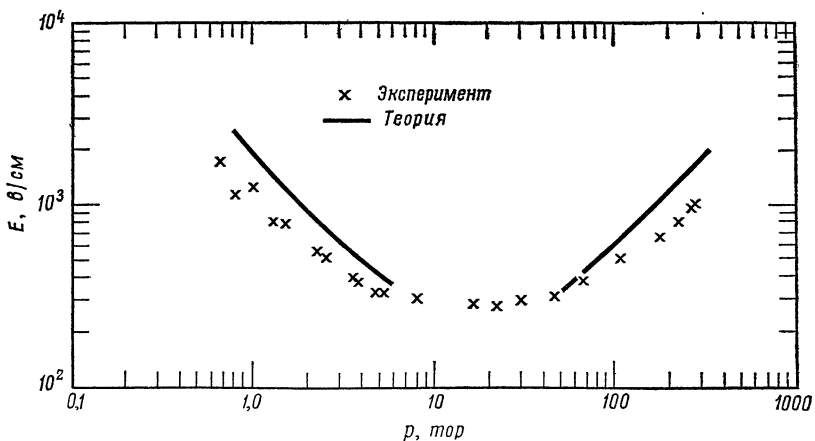
$$a = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(25,1 \frac{E}{p}\right)^2} \right].$$

Теперь можно решить уравнения (5.26) и (5.27a) и определить электрические поля пробоя в соответствующих областях давлений при заданных экспериментальных условиях.

На фиг. 5.1 и 5.2 найденные таким образом поля сравниваются с экспериментальными результатами [5]. Эксперименты проводились на частоте 2800 Мгц в резонаторах с характерными диффузионными длинами 0,101 и 0,202 см. Давления изменялись от 1 до 300 тор. Нужно отметить, что согласие между теорией и экспериментом не столь хорошее, как в случае Нег-газа. Этого следовало ожидать, если вспомнить, что при теоретическом рассмотрении использовались приближения, более далекие от реальных условий, чем в случае других газов. Однако эксперимент интересен тем, что он обна-



Ф и г. 5.1. Сравнение теории и эксперимента для пробоя в неоне при 2,8 ГГц и  $\Lambda = 0,101 \text{ см}$ .



Ф и г. 5.2. Сравнение теории и эксперимента для пробоя в неоне при 2,8 ГГц и  $\Lambda = 0,202 \text{ см}$ .

руживает удовлетворительное согласие с теорией при высоких и низких давлениях. Следует отметить, что основным членом функции распределения в области высоких давлений является экспонента, в показателе которой стоит квадрат энергии электрона. В результате теоретического анализа Маргенау и др. [6,16] получили функцию распределения именно такого типа. Рассмотрение Маргенау отличается от нашего тем, что он считал рекомбинацию основным механизмом потерь электронов из разряда. Однако этот механизм не играет существенной роли в тех экспериментах, с которыми сравнивается настоящая теория.

### СМЕСИ НЕОНА С АРГОНОМ

Особый интерес представляют смеси неона с аргоном, поскольку пробой в неоне с малыми добавками аргона происходит при гораздо меньших значениях электрических полей, чем в чистом неоне. Вообще напряженности полей пробоя в смесях при любом соотношении между компонентами почти всегда меньше, чем в каждом из чистых газов. Если правильно подобрать состав смеси, то теоретическое рассмотрение упрощается благодаря эффекту Пеннинга для метастабильного уровня по той же причине, по которой наличие ртути упрощает теорию Нег-газа. Кроме того, были проведены обширные измерения в постоянных полях, и Кратхоф и Пеннинг опубликовали значения коэффициента ионизации в постоянном поле  $\eta$  как функции от  $E/p$  [7, 8]. Эти данные полезно сравнить со значениями высокочастотных коэффициентов ионизации  $\zeta$  для подобных смесей, также полученных как функции от  $E/p$  [9].

Рассмотрим прежде всего смесь газов, содержащую в основном неон, но с такой добавкой аргона, чтобы эффект Пеннинга был максимальным. При этом пробойные поля вычисляются относительно просто, так как не нужно учитывать возбуждение газа. Поэтому решение уравнения Больцмана упрощается в обоих рассматривавшихся выше случаях разной зависимости частоты столкновений от энергии. Сравнение результатов вычислений, выполненных в предположении о постоянстве средней длины свободного пробега или постоянстве частоты столкновений, представляет большой интерес, так как позволяет выяснить, как вид зависимости частоты столкновений от энергии электронов влияет на функцию распределения и пробойные поля.

Содержание аргона, необходимое для получения максимального эффекта Пеннинга в конкретных экспериментальных условиях, несколько различно при разных давлениях, но обычно близко к 0,1%. Если предположить, что средняя длина свободного пробега не зависит от энергии, можно найти функцию распределения электронов по энергии, используя для этого теоретические выражения,

полученные для чистого неона, а именно (5.5) [или (5.8)] и (5.20). Поскольку каждый акт возбуждения приводит к ионизации, нет необходимости использовать те части функции распределения, которые вычислялись для энергий, превышающих наименьший потенциал возбуждения; функцию распределения, по-видимому, следует считать равной нулю уже при энергиях, незначительно превышающих  $u_x$ .

Когда давление достаточно мало, так что  $v^2 \ll \omega^2$ , используется функция распределения в виде (5.5):

$$f = e^{-w} [M(\alpha; 2; w) + CW(\alpha; 2; w)], \quad (5.28)$$

где

$$\alpha = \frac{61,5}{(p\Lambda)^2} \quad \text{и} \quad w = \frac{1630}{E^2\lambda^2} u.$$

В гл. 4 путем некоторого преобразования дифференциального уравнения для функции распределения мы смогли выразить интеграл, входящий в выражение для скорости ионизации, через производную функции распределения. В рассматриваемом случае подобное преобразование дает

$$nv_i = 16\pi \frac{e^3}{3m^3} \frac{E^2}{\omega^2 l} \frac{1}{1 + I^2/3\Lambda^2} \left( u^2 \frac{df}{du} \right)_{u=u_i}. \quad (5.29)$$

Коэффициент диффузии определяется обычным интегральным выражением

$$nD = \frac{8\pi}{3} l \frac{e^2}{m^2} \int_0^{u_i} u f du. \quad (5.30)$$

Здесь под знаком интеграла стоит конфлюэнтная гипергеометрическая функция. Интегралы такого типа встречаются в литературе [1]. Разделив выражение (5.29) на (5.30), умножив его на квадрат характерной диффузионной длины и приравняв полученное выражение единице, получим условие пробоа. Если использовать выражение (5.28) для функции распределения, то условие пробоа довольно просто записать с помощью конфлюэнтных гипергеометрических функций. Как и в случае Нег-газа, рассмотренного в гл. 4, полученное равенство упрощается при использовании вронскиана дифференциального уравнения; условие пробоа тогда принимает вид

$$M(\alpha; 2; w_i) = 2, \quad (5.31)$$

где  $\alpha$  определяется, как и выше, а  $w_i$  есть значение  $w$  при энергии электронов, соответствующей эффективному потенциалу ионизации.

При достаточно высоком давлении, когда можно считать, что  $v^2$  много больше, чем  $\omega^2$ , функция распределения описывается выра-

жением (5.20), в котором теперь

$$\delta = \frac{30,8}{(\rho\Lambda)^2} \quad (5.32)$$

и

$$\omega = \frac{u^2 p^2}{123,4 E^2}.$$

Скорость ионизации вычисляется почти тем же способом, каким было получено выражение (5.29). Поскольку в данном диапазоне давлений используется другое приближение, оно имеет несколько иной вид

$$n v_i = \frac{8\pi e^2}{3m^2} \frac{I E^2}{1 + I^2/3\Lambda^2} \left( u \frac{df}{du} \right)_{u=u_i}. \quad (5.33)$$

Коэффициент диффузии вычисляется по той же формуле (5.30), что и прежде. Как и в предыдущем случае, интегрирование и дифференцирование можно выполнить в явном виде. Производя упрощения, аналогичные сделанным выше, условие пробоя можно записать

$$M(\delta; 1; \omega_i) = 2, \quad (5.34)$$

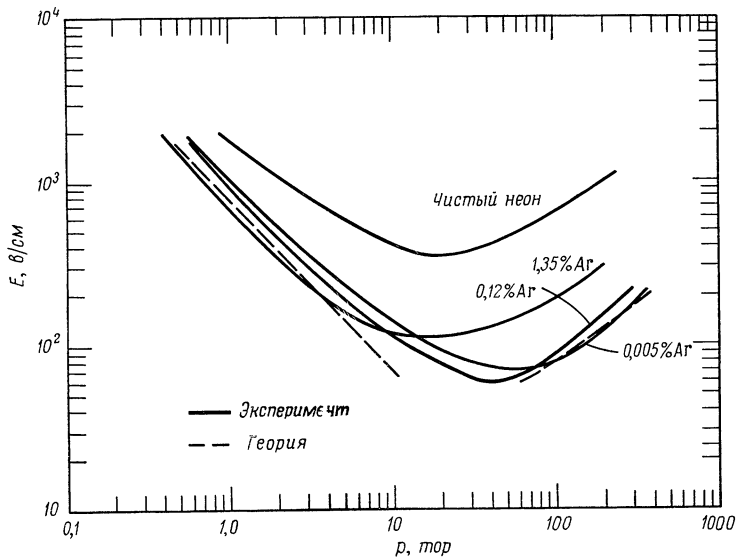
где

$$\delta = \frac{30,8}{(\rho\Lambda)^2} \quad \text{и} \quad \omega_i = 2,07 \left( \frac{p}{E} \right)^2.$$

На фиг. 5.3 теоретические результаты, полученные с помощью уравнений (5.31) и (5.34), сравниваются с экспериментальными данными для смеси неона с 0,12% аргона. Измерения производились в резонаторе с характерной диффузионной длиной 0,151 см при частоте 2800 Мгц. Здесь же представлены данные по пробоям для чистого неона, а также для смесей с еще двумя концентрациями аргона. Результаты измерений для смесей с другими концентрациями аргона здесь не приведены, чтобы не слишком усложнять картину. На фиг. 5.4 представлены аналогичные теоретические и экспериментальные результаты для неона с примесью 1% аргона для частоты электрического поля 994 Мгц и характерной диффузионной длины 0,631 см.

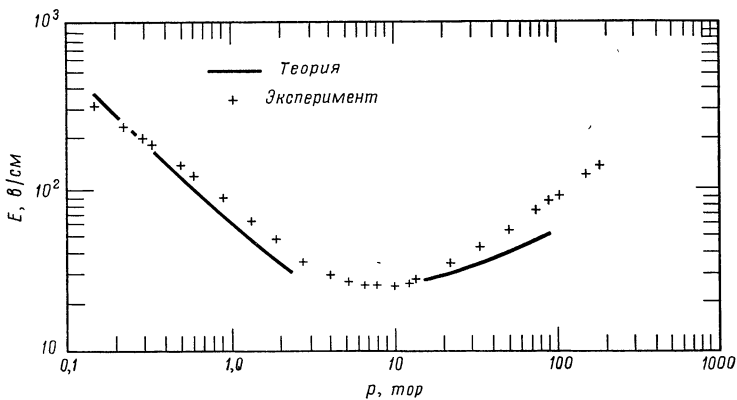
Интересно также сопоставить результаты теории, основанной на предположении о независимости средней длины свободного пробега электрона от его энергии, с результатами, которые получаются, если считать частоту столкновений не зависящей от энергии. В последнем случае можно просто воспользоваться теорией, развитой для Нег-газа, и применить условие пробоя в форме (4.18), а именно

$$M\left(\alpha; \frac{3}{2}; y_i\right) e^{-2y_i\alpha/3} = 2, \quad (5.35)$$



Ф и г. 5.3. Пробойные поля для чистого неона и некоторых смесей неона с аргонном.

Концентрация указана в объемных процентах, т. е. равна объему аргона, приходящему на 100 объемов смеси неона с аргонном. Пунктирная линия дает результаты расчета, основанного на представлении о постоянстве средней длины свободного пробега.



Ф и г. 5.4. Сравнение теории с экспериментом для смеси неона с 1% аргона при  $994 \text{ Мгц}$  и  $\Lambda = 0,631 \text{ см}$ .



где

$$\alpha = 0,75 (1 - \delta)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} &= 1 + \frac{47,5 (E_e/p)^2}{(p\Lambda)^2} \\ y_i &= \frac{0,290u}{(E_e/p)^2 \delta} \end{aligned} \right\} \nu = 2,5 \cdot 10^9 p,$$

или

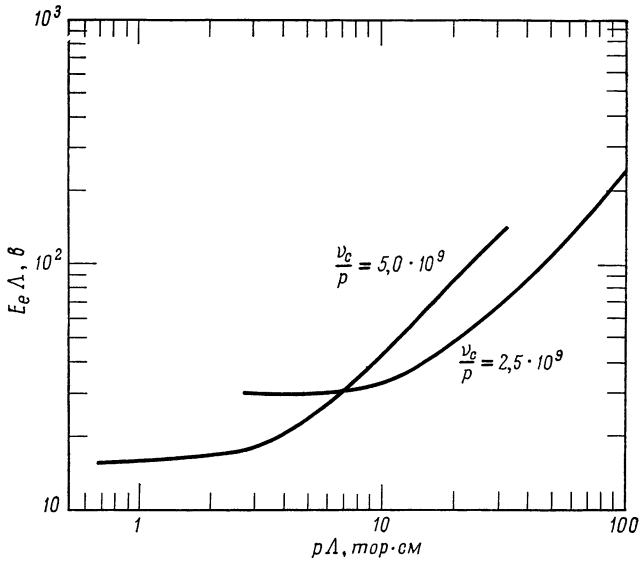
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} &= 1 + \frac{2,97 (E_e/p)^2}{(p\Lambda)^2} \\ y_i &= \frac{1,16u}{(E_e/p)^2 \delta} \end{aligned} \right\} \nu = 5,0 \cdot 10^9 p.$$

Численные коэффициенты, входящие в выражения для  $\delta$  и  $y_i$ , зависят от выбранного значения частоты столкновений. Поскольку частота столкновений в неоне совсем не является постоянной, вычисления проводились для двух различных значений  $\nu_c$ , указанных выше.

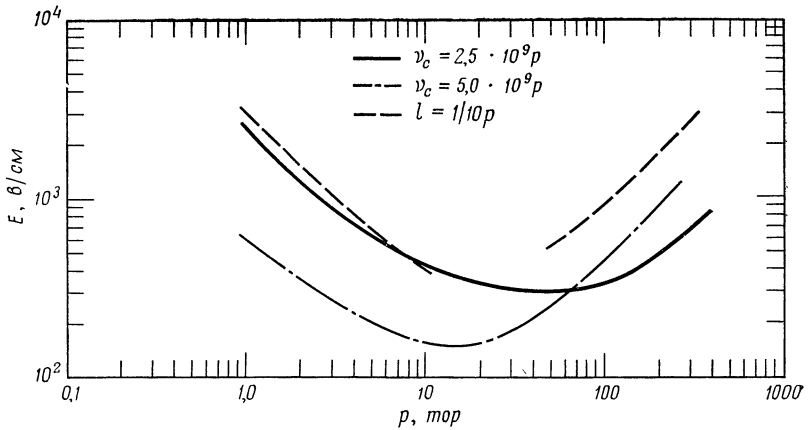
Значения пробойного поля, полученные с помощью (5.35) для этих двух независимых частот столкновений, графически представлены на фиг. 5.5. На фиг. 5.6 результаты этих вычислений (для определенной частоты поля и характерной диффузионной длины) сравниваются с данными теории, основанной на предположении о постоянстве средней длины свободного пробега. Необходимо отметить, что характер подставляемой в дифференциальное уравнение зависимости частоты столкновений от энергии оказывает существенное влияние на величину вычисленных пробойных полей и функцию распределения.

Измерения пробоя в смесях неона с аргоном интересны еще и тем, что позволяют сравнить коэффициенты ионизации в постоянном поле с высокочастотными коэффициентами ионизации. На фиг. 5.7 приведены результаты Кратхофа и Пеннинга [7], полученные несколько лет назад для целого ряда смесей неона с аргоном. На фиг. 5.8 приведены подобные результаты, полученные на сверхвысоких частотах, а именно при 2800 Мгц [9].

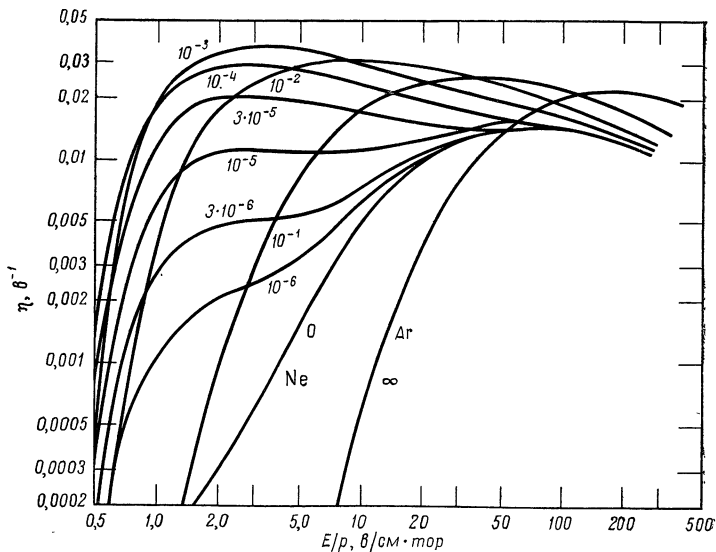
Интересно отметить, что кривые очень близки по общему характеру. Это и не удивительно, так как обе рассматриваемые величины определяются одинаково. Коэффициент ионизации в постоянном поле  $\eta$  равен  $\alpha/E$ , т. е. коэффициенту Таунсенда, деленному на величину электрического поля, но так как коэффициент Таунсенда есть число ионов, создаваемых электроном на 1 см пути,  $\eta$  есть отнесенное к  $\nu$  число образующихся электронов. Поскольку коэффициент  $\eta$  зависит от  $E/p$ , он, вероятно, является более важной величиной, чем  $\alpha$ . Так как  $\alpha$  можно записать в виде  $\nu_i/\mu E$ , то  $\eta$



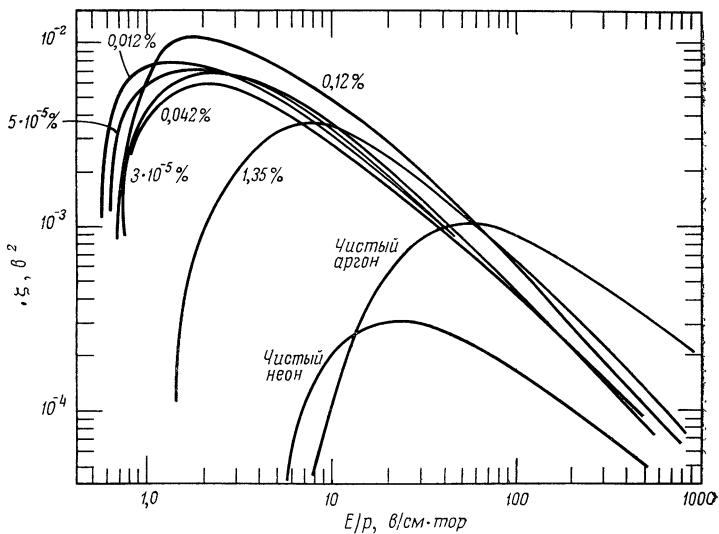
Ф и г. 5.5. Теоретически вычисленные значения пробойного поля для постоянной частоты столкновений в неоне.



Ф и г. 5.6. Сравнение результатов, полученных с помощью различных теорий, для неона при 2,8 Гц и  $\Lambda = 0,101$  см.



Ф и г. 5.7. Коэффициент ионизации  $\eta$  (выраженный в числе пар ионов на 1  $e$ ) как функция  $E/r$  для смесей неона с аргоном.



Ф и г. 5.8. Высоочастотный коэффициент ионизации  $\zeta$  как функция  $E/r$  для смесей неона с аргоном.

записывается как  $\nu_i/\mu E^2$ . В большинстве рассмотренных высокочастотных разрядов основным механизмом потерь является диффузия, поэтому естественно, что в определении высокочастотного коэффициента ионизации следует заменить подвижность  $\mu$  коэффициентом диффузии  $D$ . Таким образом, высокочастотный коэффициент ионизации равен  $\nu_i/DE^2$ . Следовательно, отношение  $\eta$  к  $\xi$  равно отношению коэффициента диффузии к подвижности, а эта величина в свою очередь равна  $2/3$  от средней энергии электронов, так как  $D$  есть среднее значение величины  $lv/3$ , а  $\mu$  — среднее значение величины  $el/mv$ . Поэтому кривые на фиг. 5.7 и 5.8 можно использовать для вычисления средней энергии электронов при различных значениях  $E/p$ . Эти средние энергии очень просто вычислить для любых смесей неона с аргоном, но, к сожалению, пока не существует экспериментальных данных, которые можно было бы использовать для проверки таких вычислений.

Разумеется, утверждение о том, что отношение двух коэффициентов ионизации равно  $2/3$  от средней энергии электрона, не совсем точно, поскольку среднее значение величины  $D/\mu$  не совпадает со средним значением  $D$ , деленным на среднее значение  $\mu$ . Численный коэффициент в этих двух случаях будет зависеть от функций распределения. Ванейн и Браун [11] выполнили более прямые измерения отношения  $D$  к  $\mu$  в водороде, комбинируя сверхвысокочастотные и постоянные поля. По измеренной таким образом средней энергии они рассчитали значение коэффициента ионизации в постоянном поле и обнаружили очень хорошее согласие с экспериментами в постоянном поле.

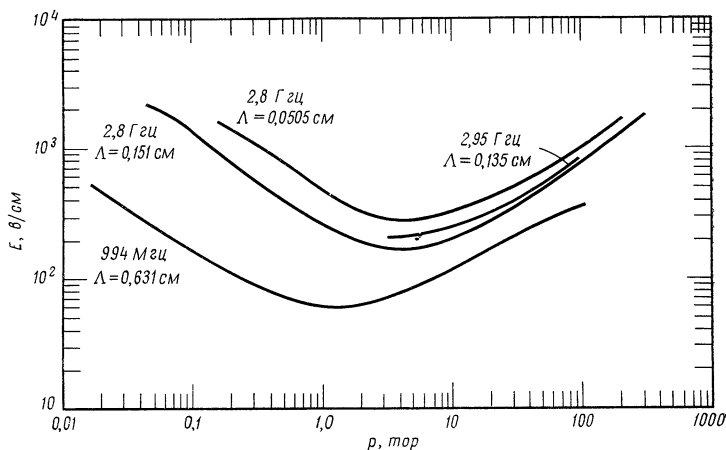
### АРГОН, КРИПТОН И КСЕНОН

Чтобы у читателя сложилось достаточно полное представление об экспериментальных исследованиях в инертных газах, приведем здесь результаты исследования высокочастотного пробоя в аргоне, криптоне и ксеноне. Из фиг. 2.7 ясно, что функции зависимости частоты столкновений от энергии для этих трех газов нельзя аппроксимировать простыми аналитическими выражениями, хотя эти функции и обладают сходными между собой свойствами.

Экспериментальные данные по пробую в аргоне в резонаторах различных размеров представлены на фиг. 5.9. Результаты для 2800 Мгц получены Мак-Доналдом и Мэтьюзом [12], для 2950 Мгц — Крейсиком, Алпертом и Мак-Коубри [13], для 992 Мгц — Мак-Доналдом, Гаскеллом и Гиттерманом [14]. На фиг. 5.10 и 5.11 изображены пробойные поля, измеренные на частоте 2800 Мгц в криптоне и ксеноне [15]. Сплошной линией во всех случаях изображены значения пробойных полей для чистых газов, вводимых в сверхвысоковакуумные устройства. Пунктирной линией пред-

ставлены результаты, полученные с чистым газом в вакуумных системах, в которых применялись охлаждаемые ловушки. Более подробно различные видоизменения обычной вакуумной техники, необходимые для этих экспериментов, описаны в гл. 7. Там же приведены результаты масс-спектрометрического анализа образцов газа, взятых из резонатора во время проведения измерений.

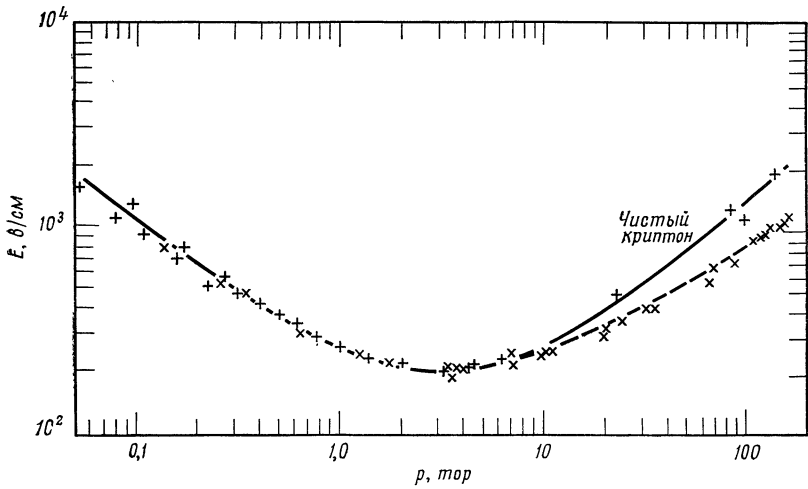
Эффективность возбуждения известна для аргона, но неизвестна для ксенона и криптона. В теориях пробоя, развитых для других



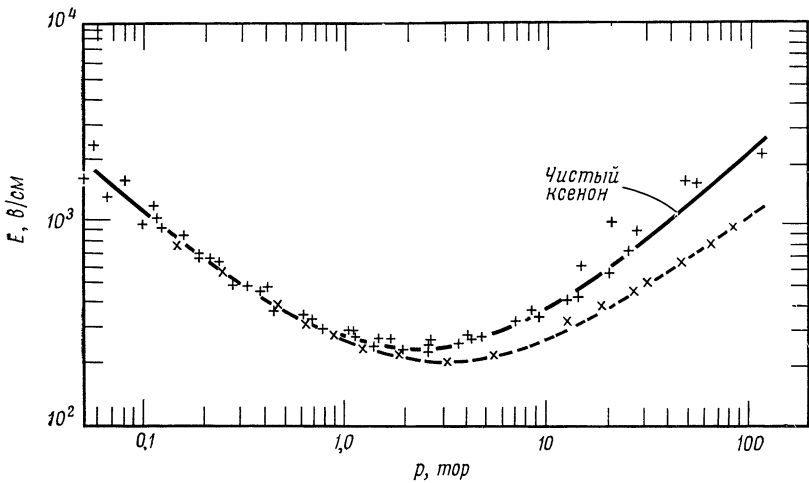
Ф и г. 5.9. Пробойные электрические поля в аргоне.

газов, эффективность возбуждения была существенной характеристикой процесса; с ее помощью в результате решения уравнения Больцмана определялись функция распределения для электронов и пробойные поля. Хорошее согласие между этими расчетами и результатами экспериментов подтверждает правильность такого подхода.

Отсюда следует, что возможно, по крайней мере в принципе, использовать экспериментально найденные значения пробойных полей, и, применяя уравнение Больцмана, определить эффективности возбуждения. Конечно, характер функциональной зависимости частоты столкновений от энергии настолько сложен, что было бы неразумно пытаться сделать это аналитически, однако с помощью современных вычислительных машин можно провести достаточно подробный численный анализ.



Ф и г. 5.10. Пробойные поля в криптоне при 2,8 Гц и  $\Lambda = 0,101$  см.



Ф и г. 5.11. Пробойные поля в ксеноне при 2,8 Гц и  $\Lambda = 0,101$  см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mac Donald A. D., Journ. Math. Phys., **28**, 183 (1949).
2. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, London, 1922. (Имеется перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949.)
3. Jahnke E., Emde F., Tables of Functions, New York, 1945. (Имеется перевод немецкого издания: Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, М., 1959.)
4. Handbook of Mathematical Functions, Washington, 1964.
5. Mac Donald A. D., Betts D. D., Canad. Journ. Phys., **30**, 565 (1952).
6. Margenau H., Phys. Rev., **73**, 303 (1948).
7. Kruithof A. A., Penning F. M., Physica, **4**, 430 (1937).
8. Druyvesteyn M. J., Penning F. M., Rev. Mod. Phys., **12**, 87 (1940).
9. Mac Donald A. D., Matthews J. H., Phys. Rev., **98**, 1070 (1955).
10. Brown S. C., Basic Data of Plasma Physics, Cambridge, Mass., 1959, p. 81.
11. Varnerin L. J., Brown S. C., Phys. Rev., **79**, 946 (1950).
12. Mac Donald A. D., Matthews J. H., Canad. Journ. Phys., **34**, 395 (1956).
13. Krasik S., Alpert D., McCoubrey A. O., Phys. Rev., **76**, 722 (1949).
14. Mac Donald A. D., Gaskell D. U., Gitterman H., Phys. Rev., **130**, 1841 (1963).
15. Bradford H. M., Fraser D. M., Langstroth G. F. O., Mac Donald A. D., Canad. Journ. Phys., **37**, 1166 (1959).
16. Hartman L. M., Phys. Rev., **73**, 316 (1948).

## **Пробой в неоднородных электрических полях и в магнитном поле**

В настоящей главе мы рассмотрим две интересные модификации расчета, проведенного выше для однородного электрического поля. Расчет с однородным полем можно применять, если на газ действует только электрическое поле и если это поле существенно не меняется от точки к точке в пределах исследуемого объема. При этом ионизованный газ заполняет весь объем, так что электроны диффундируют ко всем поверхностям, и решение задачи на собственные значения позволяет определить характерную диффузионную длину. В действительности в большинстве экспериментов на сверхвысоких частотах указанные условия не реализуются. Однако если две противоположные стенки резонатора расположены достаточно близко друг к другу, так что практически вся диффузия электронов происходит к этим стенкам, то диффузионные потери не будут зависеть от других размеров. Так, например, в прямом круглом цилиндре не очень большой высоты диффузионные потери практически не зависят от радиуса. Хотя электрическое поле может медленно изменяться с ростом радиуса, пробой происходит так, как если бы электрическое поле было однородным. Если же высота цилиндра достаточно велика или если велики соответствующие размеры в других типах резонаторов, то эти упрощающие предположения уже не справедливы. В настоящей главе мы обсудим, как проводятся необходимые вычисления в таких случаях. Мы рассмотрим также теоретические и экспериментальные данные о комбинации постоянных магнитных полей со сверхвысокочастотными электрическими полями, что приводит к ряду интересных эффектов. При наличии указанных отклонений от однородности расчет можно вести, определяя соответствующую данным условиям эффективную характерную диффузионную длину, хотя при наличии магнитного поля необходимо, кроме того, ввести некоторые изменения в определение эффективного электрического поля.

### **НЕОДНОРОДНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ**

Херлин и Браун [1] разработали метод, позволяющий учитывать диффузию в цилиндрическом резонаторе произвольной высоты. Задача фактически заключается в вычислении формы той области,



в которой ионизация нарастает до плазменных концентраций. Электрическое поле заметно уменьшается по мере удаления от центра резонатора, поэтому электроны, уходящие из центральной области, ускоряются менее эффективно, чем в области сильного поля. Таким образом, эти электроны будут потеряны для того объема, в котором происходит пробой, и полный эффективный объем резонатора будет меньше его геометрического объема. Следовательно, и эффективная характерная диффузионная длина должна быть меньше вычисленной по обычной формуле

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R}\right)^2.$$

Поэтому задача состоит в корректном расчете диффузии. В первой части этой главы мы будем следовать анализу Херлина и Брауна [1].

### Диффузионная теория

Как уже говорилось в гл. 2, плотность электронного тока  $\Gamma$  связана с плотностью электронов  $n$  и коэффициентом диффузии  $D$  соотношением  $\Gamma = -\nabla(Dn)$ . Следовательно,  $Dn$  можно рассматривать как потенциал, который мы обозначим  $\psi$ . Поскольку коэффициент высокочастотной ионизации  $\zeta$  равен  $v_i/DE^2$ , уравнение (2.8) для стационарного состояния можно записать в виде

$$\nabla^2\psi + \zeta E^2\psi = 0. \quad (6.1)$$

Согласно граничным условиям, плотность электронов должна быть равна нулю на стенках металлического резонатора, в котором происходит пробой.

В любом резонаторе  $\zeta$  является функцией  $E/\rho$  и  $\rho\lambda$ . Величина  $E/\rho$  изменяется от точки к точке, а  $\rho\lambda$  представляет собой константу для всего резонатора. Пусть максимальное значение поля в центре резонатора равно  $E_0$ , тогда мы можем приближенно записать  $\zeta$  через  $E$  и  $E_0$ :

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\beta-2} = \left(\frac{k}{E_0}\right)^2 \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\beta-2}; \quad (6.2)$$

здесь  $\zeta_0$  — значение высокочастотного коэффициента ионизации в той точке, где поле максимально. Для удобства вводится величина  $k$ , и так как  $\zeta$  имеет размерность (вольт)<sup>-2</sup>, то размерность  $k$  есть (длина)<sup>-1</sup>. Величину  $\beta - 2$  необходимо определить по экспериментальным кривым зависимости  $\zeta$  от  $E/\rho$ . Хотя коэффициент  $\zeta$  нельзя представить точно в виде возведенной в некоторую степень величины  $E/\rho$  для всех значений  $E/\rho$ , такое представление при высокой степени ионизации является очень хорошим. Окончательные результаты получаются очень точными, так как те области, где

ионизация мала и принятое представление непригодно, дают пренебрежимо малый вклад в величину пробойных полей.

Электрическое поле при колебаниях типа  $TM_{010}$  в цилиндрическом резонаторе, как указывалось выше, дается следующим выражением:

$$E = E_0 J_0 \left( \frac{2,405r}{R} \right), \quad (6.3)$$

где  $R$  — радиус резонатора, а  $r$  — радиальная координата. Поле не зависит от двух других цилиндрических координат  $\theta$  и  $z$ . При этом переменные в уравнении (6.1) легко разделяются, и решение записывается в виде

$$\psi = A \sin \frac{\pi z}{L} \varphi(r),$$

где  $\varphi$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \left( \zeta E^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \varphi = 0, \quad (6.4)$$

а  $L$  — высота резонатора.

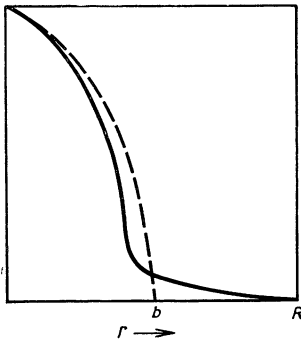
Подставляя выражения (6.2) и (6.3) в уравнение (6.4), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \left[ k^2 J_0^2 \left( \frac{2,405r}{R} \right) - \frac{\pi^2}{L^2} \right] \varphi = 0. \quad (6.5)$$

Обычно это уравнение не решают аналитически, а член, содержащий функцию Бесселя, заменяют первыми членами разложения в ряд. Разложение функции Бесселя в ряд является очень точным для малых значений  $r$ , где степень ионизации высока и поэтому изменение  $\varphi$  существенно. Достаточно сохранить два члена разложения; тогда уравнение (6.5) записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \left\{ k^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{b} \right)^2 \right] - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right\} \varphi = 0, \quad (6.6)$$

Фиг. 6.1. Сравнение действительной ионизационной функции (сплошная линия) и использованной аппроксимации (пунктирная линия).



где

$$b = \frac{0,831R}{\beta^{1/2}}.$$

Следовательно, при такой аппроксимации предполагается, что степень ионизации стремится к нулю при  $r = b$ . Это не совсем точно, однако, как ясно из фиг. 6.1, такая аппроксимация достаточно

разумна и является достаточно точной вблизи центра резонатора. Так как степень ионизации не может стать отрицательной при  $r > b$ , мы должны положить  $\zeta = 0$  для значений  $r$ , лежащих между  $b$  и  $R$ . Поэтому для указанной области изменения  $r$  уравнение для  $\varphi$  имеет более простой вид, чем (6.6), а именно

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{\pi^2}{L^2} \varphi = 0. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.6) можно решить, предварительно преобразовав независимую переменную и функцию. Введем величины  $y = kr^2/b$  и

$$\varepsilon = \frac{kb(k^2L^2 - \pi^2)}{4k^2L^2};$$

тогда (6.6) примет вид

$$y \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi}{dy} + \left( \varepsilon - \frac{y}{4} \right) \varphi = 0.$$

Полагая теперь  $\varphi = e^{-y/2}g$ , получаем уравнение

$$yg'' + g'(1-y) - \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) g = 0,$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение для конфлюэнтной гипергеометрической функции с параметрами  $1/2 - \varepsilon$  и 1. Следовательно,

$$\varphi = e^{-y/2} M \left( \frac{1}{2} - \varepsilon; 1; y \right), \quad r < b. \quad (6.8)$$

Второе решение имеет особенность в начале координат и поэтому отбрасывается.

Уравнение (6.7) представляет собой стандартную форму уравнения Бесселя от мнимого аргумента и, таким образом, мы получаем

$$\varphi = K_0 \left( \frac{\pi r}{L} \right) + BI_0 \left( \frac{\pi r}{L} \right), \quad r > b. \quad (6.9)$$

Здесь мы использовали обозначения, принятые в книге Ватсона [2], где имеются также таблицы этих функций. С ростом аргумента первая функция,  $K_0$ , уменьшается примерно как экспонента, а вторая,  $I_0$ , быстро растет. Так как функция  $\varphi$  на стенках резонатора должна обращаться в нуль, легко вычислить константу  $B$ , которая оказывается равной

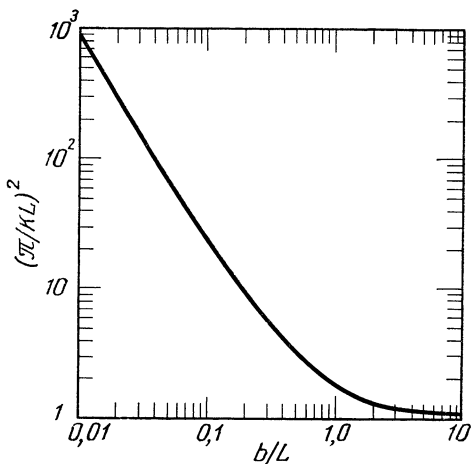
$$B = - \frac{K_0(\pi R/L)}{I_0(\pi R/L)}. \quad (6.10)$$

В решения (6.8) и (6.9) должны входить еще и другие постоянные интегрирования, но так как эти постоянные обращаются в нуль в силу условий сшивания решений при  $r = b$ , они с самого начала исключены. При  $r = b$  должны совпадать сами решения и их первые производные. Разделив одно на другое два получающихся уравнения, можно записать трансцендентное уравнение для про-

бойного поля

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{M(3/2 - \varepsilon; 2; y_b)}{M(1/2 - \varepsilon; 1; y_b)} - \frac{1}{2} = - \frac{K_1(\pi b/L) + BI_1(\pi b/L)}{K_0(\pi b/L) + BI_0(\pi b/L)}, \quad (6.11)$$

где  $y_b$  есть значение  $y$  при  $r = b$ , т. е.  $kb$ . Теперь можно решить уравнение (6.11) и найти  $kb$  как функцию  $kL$ . Результаты удобно представить в виде кривой в системе координат  $(\pi/kL)^2$  и  $b/L$ . Такая кривая приведена на фиг. 6.2.

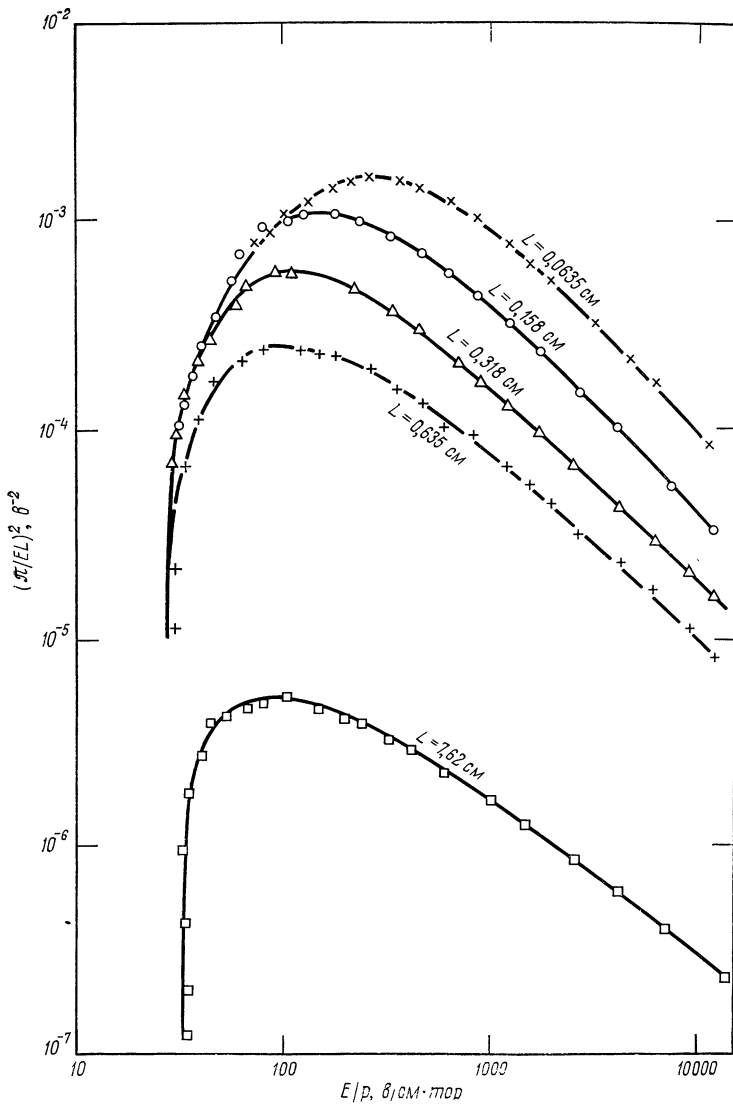


Фиг. 6.2. Кривая зависимости  $(\pi/kL)^2$  от  $b/L$ .

Когда отношение  $b/L$  велико, кривая на фиг. 6.2 приближается к единице. Следовательно,  $k$  стремится к  $\pi/L$ , как и должно вести себя решение для резонатора, длина которого достаточно мала, чтобы его можно было приближенно рассматривать как две параллельные пластины. Для меньших значений  $b/L$  величина  $k$  больше; соответственно возрастает и пробойное поле, что объясняется увеличением потерь за счет диффузии в радиальном направлении. Фиг. 6.2 можно также интерпретировать несколько другим образом. Рассмотрим реальный резонатор с относительно малым отношением  $b/L$  и соответствующим значением пробойного поля. Тогда по этой кривой мы можем определить расстояние, на котором должны располагаться плоскопараллельные пластины, эквивалентные рассматриваемому резонатору. При такой интерпретации можно считать, что по оси ординат откладывается величина  $\Lambda^2/\Lambda_e^2$ , где  $\Lambda_e$  — эффективная характерная диффузионная длина.

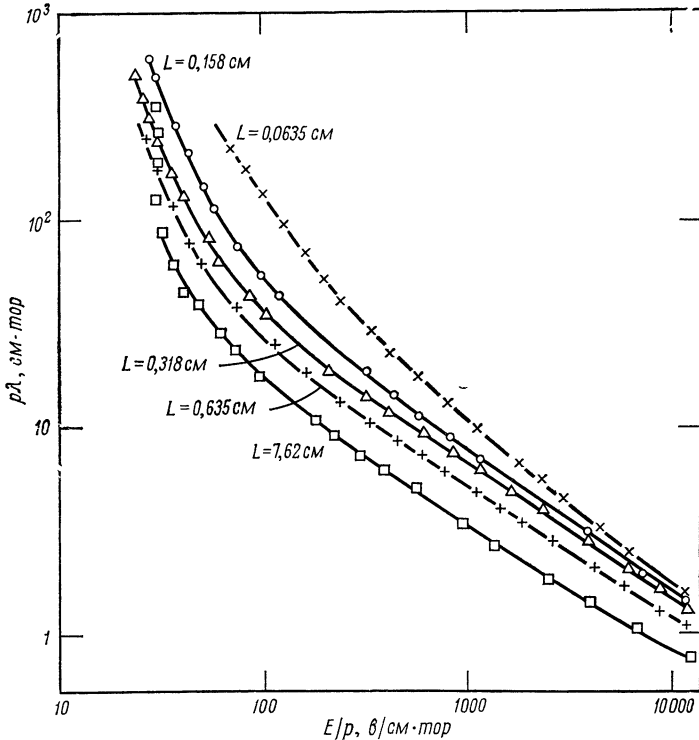
### Применение к случаю пробоя в воздухе

Херлин и Браун применили изложенный выше метод для изучения пробоя в воздухе, а также для расширения диапазона полу-



Ф и г. 6.3. Значения  $\zeta$  для различных резонаторов при использовании геометрического значения  $\Lambda$ .

ченных ими значений высокочастотных коэффициентов ионизации. Они исследовали чистый сухой воздух, которым наполняли ряд резонаторов, работающих на длине волны 9,6 см (частота 3130 Мгц). Резонатор сначала наполнялся до самого высокого давления, использовавшегося в данной серии экспериментов; между измерениями



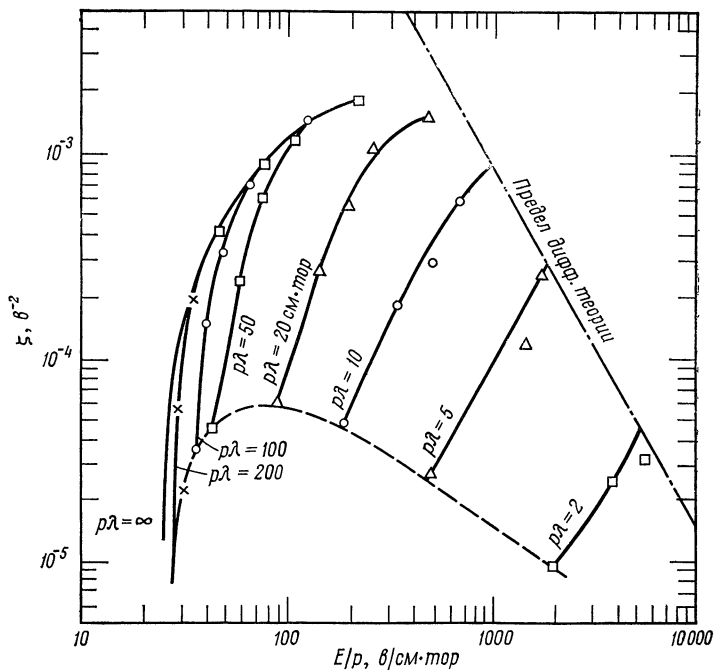
Ф и г. 6.4. Зависимость величины  $r\lambda$  от  $E/p$  для воздуха.

часть воздуха откачивалась. Поэтому загрязнения, вызванные пробоем, оставались в резонаторе и оказывали влияние на результаты эксперимента. Роуз и Браун [3] исследовали различие между результатами, полученными этим методом, и результатами, наблюдавшимися в том случае, когда каждая точка снималась с использованием чистого воздуха. Различие заметно, но невелико, поэтому фиг. 6.3—6.5 построены по данным первоначальных экспериментов.

На фиг. 6.3 приведены значения высокочастотного коэффициента ионизации

$$\zeta = \frac{v_i}{DE^2} = \frac{1}{\Lambda^2 E^2}.$$

Эти результаты получены в предположении, что поле однородно. Однако для самого большого резонатора, у которого высота больше радиуса, поле не является однородным. Поэтому для нахождения правильного эквивалентного значения  $\Lambda$  нижнюю кривую на



Ф и г 6.5. Высоочастотный коэффициент ионизации  $\zeta$  как функция  $E/p$  для фиксированных значений  $r\lambda$ .

фиг. 6.3 нужно исправить, воспользовавшись данными фиг. 6.2. Для этого Херлин и Браун построили зависимость  $r\lambda$  от  $E/p$  для каждого резонатора (фиг. 6.4). Чтобы найти производную от  $\zeta$  по  $(E/p)$  при постоянном  $r\lambda$ , на фиг. 6.3 строят соответствующие кривые, используя фиг. 6.4, и получают значение искомой производной в первом приближении. Применяя это значение для определения  $b$ , можно с помощью фиг. 6.2 ввести поправку на фиг. 6.3, а затем получить значение производной во втором приближении. Процесс повторяется до тех пор, пока не отпадет необходимость в дальнейших поправках. На фиг. 6.5 изображены кривые, полученные путем применения описанной процедуры к данным фиг. 6.3. Пунктирная кривая дает исправленные значения  $\zeta$  для большого резонатора. Другие линии дают значения коэффициента ионизации для

фиксированных значений  $r\lambda$ , благодаря чему существенно расширяется диапазон значений  $\zeta$  по сравнению с тем, который можно получить в строго однородных полях.

### Диффузия в сферическом резонаторе

Было предпринято теоретическое и экспериментальное изучение ситуации, при которой электрическое поле изменяется во всех направлениях, как это имеет место при пробое в сферическом резонаторе [4]. Исследовался водород, для которого имеется много экспериментальных данных; кроме того, в этом случае для анализа результатов можно воспользоваться теорией, изложенной в гл. 4.

**Теория.** Дифференциальное уравнение для диффузионного потенциала  $\psi$  было приведено выше [см. (6.1)], причем высокочастотный коэффициент ионизации мы опять аппроксимируем выражением (6.2).

Электрическое поле низшей электрической моды колебаний сферического резонатора описывается следующими выражениями:

$$E_r = E_0 \left( \frac{a}{2,75r} \right) \cos \theta j_1 \left( \frac{2,75r}{a} \right), \quad (6.12)$$

$$E_\theta = E_0 \left( \frac{a}{2,75r} \right) \sin \theta \frac{d}{dr} \left[ \frac{2,75r}{a} j_1 \left( \frac{2,75r}{a} \right) \right], \quad (6.13)$$

$$E_\varphi = 0,$$

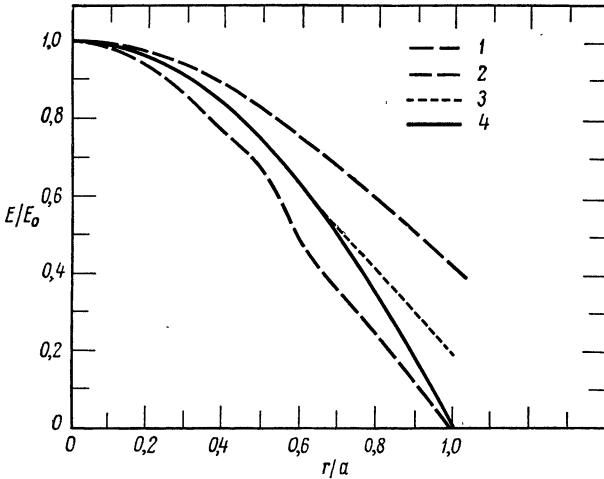
где  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты,  $a$  — радиус сферы, а  $j_1$  — сферическая функция Бесселя первого порядка [5].

Электрическое поле зависит от обеих координат,  $r$  и  $\theta$ , поэтому при его подстановке в (6.1) переменные в этом уравнении не разделяются. Поле велико в центральной области резонатора. Так как для пробоя необходимо, чтобы энергия поля передавалась электронам, нас в первую очередь будет интересовать величина электрического поля. Около центра резонатора величина поля и, следовательно, степень ионизации являются почти точно сферически симметричными. Это иллюстрируется фиг. 6.6, которая показывает пределы изменения поля при изменении  $\theta$ , а также радиальную зависимость среднего значения поля. Среднее значение поля очень хорошо аппроксимируется выражением

$$E = E_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]. \quad (6.14)$$



Соответствующая кривая также приведена на фиг. 6.6. Мы видим, что эта аппроксимация является очень хорошей вблизи центра резонатора, где поле велико и его значение играет существенную роль.



Ф и г. 6.6. Радиальная зависимость электрического поля в сферическом резонаторе.

Показано максимальное изменение поля с углом  $\theta$  [ср.  $E_R$  ( $\theta = 0$ ), кривая 1 и  $E_\theta$  ( $\theta = \pi/2$ ), кривая 2] и аналитическая аппроксимация (кривая 4) усредненного по  $\theta$  значения поля (кривая 3).

Объединяя уравнение (6.1) с выражением (6.2) и учитывая, что зависимость от  $\theta$  и  $\varphi$  исключается, получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2 \left( \frac{E}{E_0} \right)^\beta \psi = 0. \tag{6.15}$$

При подстановке в это уравнение приближенного выражения (6.14) имеем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^\beta \psi = 0.$$

Полученное уравнение решить трудно. Однако если член с  $r/a$  разложить в ряд и пренебречь членами порядка  $(r/a)^4$ , уравнение упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + k^2 \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \psi = 0. \tag{6.16}$$

В этом приближении степень ионизации обращается в нуль при радиусе, равном  $a/\beta^{1/2}$ ; это значение  $r$  мы обозначим через  $b$ . При  $r > b$  степень ионизации должна быть отрицательной. Поскольку это невозможно, мы полагаем  $\zeta = 0$  для  $r > b$ .

Независимую переменную удобно привести к безразмерному виду, положив  $x = kr^2/b$ ; тогда вместо (6.16) будем иметь

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{3}{2x} \frac{d\psi}{dx} + \left( \frac{kb}{4x} - \frac{1}{4} \right) \psi = 0, \quad x < kb. \quad (6.17)$$

Если функцию также преобразовать с помощью замены

$$\psi = e^{-x/2} g,$$

то уравнение еще больше упростится:

$$\frac{d^2g}{dx^2} + \frac{dg}{dx} \left( \frac{3}{2x} - 1 \right) - \frac{\alpha}{x} g = 0, \quad (6.18)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4} (3 - kb).$$

Решением этого уравнения является конфлюэнтная гипергеометрическая функция с параметрами  $\alpha$  и  $3/2$ . Поскольку второе решение уравнения исключается, как не соответствующее граничным условиям, мы можем написать

$$\psi_1 = e^{-x/2} M \left( \alpha; \frac{3}{2}; x \right), \quad (6.19)$$

где  $\psi = \psi_1$  при  $r < b$ , или  $x < kb$ .

При  $\zeta = 0$  уравнение (6.15) значительно упрощается и записывается (через переменную  $x$ ) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left( x^{3/2} \frac{d\psi}{dx} \right) = 0. \quad (6.20)$$

Решение его имеет вид

$$\psi_2 = C \left[ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{1/2} \right]; \quad (6.21)$$

здесь  $x_0$  определяется из граничного условия, согласно которому  $\psi_2$  стремится к нулю на поверхности сосуда, т. е. при  $r = a$ , и, следовательно,  $x_0 = ka^2/b$ . Через  $C$  обозначена произвольная постоянная. Из условия сшивания решений в точке  $r = b$  или  $x = kb$  следует, что функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , а также их производные должны быть равны по величине. Таким образом, мы имеем

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{1}{\psi_2} \frac{d\psi_2}{dx}, \quad x = x_1 = kb. \quad (6.22)$$

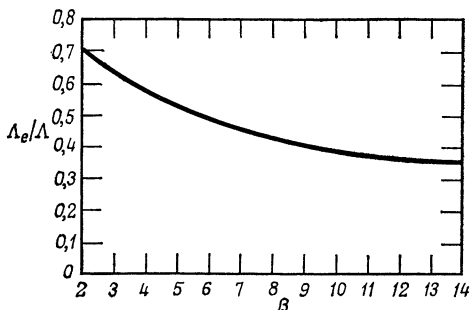
Непосредственные вычисления дают

$$\frac{2\alpha M(\alpha + 1; 5/2; kb)}{3M(\alpha; 3/2; kb)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2kb[(b/a) - 1]}. \quad (6.23)$$

Поскольку величина  $\alpha$  по определению равна  $1/4 (3 - kb)$ , соотношение (6.23) легко записать в таком виде, чтобы левая часть была функцией только  $kb$ , а правая часть — функцией только  $a/b = \beta^{1/2}$ :

$$kb \left\{ \frac{(1 - kb/3) M [(7 - kb)/4; 5/2; kb]}{M [(3 - kb)/4; 3/2; kb]} - \frac{1}{2} \right\} = \frac{\beta^{1/2}}{1 - \beta^{1/2}}. \quad (6.24)$$

Нетрудно найти ряд значений  $kb$  как функцию  $\beta$ , и поскольку  $kb = ka/\beta^{1/2}$ , величину  $ka$  также легко связать с  $\beta$ .



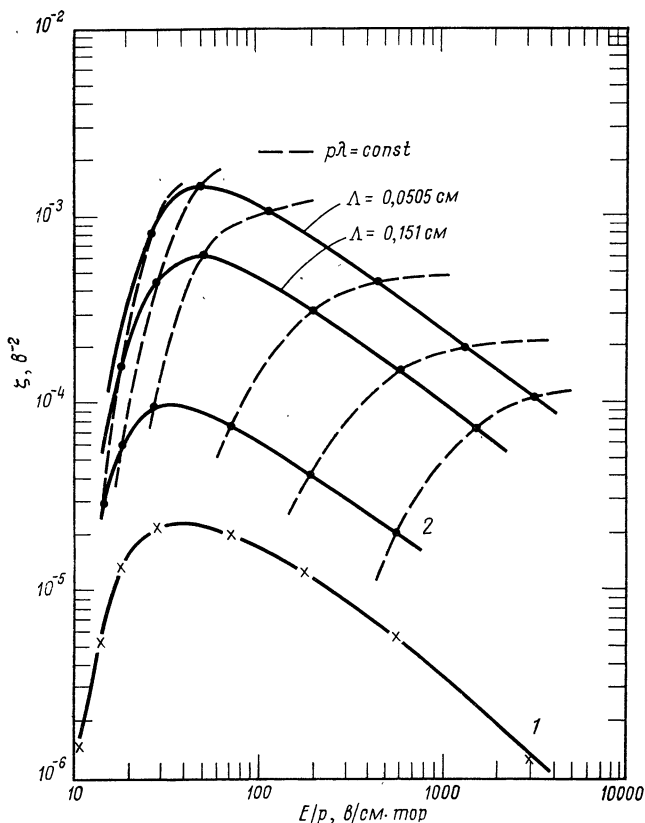
Ф и г. 6.7. Отношение эффективной диффузионной длины к характерной диффузионной длине, определенной из геометрии резонатора.

Характерная диффузионная длина сферической полости радиусом  $a$  равна  $a/\pi$ . В случае однородного поля коэффициент высокочастотной ионизации  $\nu_i/DE^2 = 1/\Lambda^2 E^2$ , и из соотношения (6.2) следует, что  $k = \pi/a$ . Следовательно, когда поле не является однородным, величина  $k$  будет другой и ее можно рассматривать как меру эффективного радиуса ионизованного объема. Это означает, что  $ka/\pi = \Lambda/\Lambda_e$ , где  $\Lambda$  — характерная диффузионная длина, определяемая геометрией объема, а  $\Lambda_e$  — эффективная характерная диффузионная длина. Кривая, полученная путем численного решения уравнения (6.24), показана на фиг. 6.7.

**Эксперимент.** Сферический резонатор был сконструирован так, чтобы резонансная частота составляла  $2800 \text{ Мгц}$ . Измерения пробоя проводились в чистом водороде по методике, близкой к той, с помощью которой были получены обсуждавшиеся в гл. 4 результаты для водорода. Метод обработки результатов и расчета эффективных пробойных полей может быть проиллюстрирован на примере фиг. 6.8.

На фиг. 6.8 приведена зависимость коэффициента высокочастотной ионизации  $\zeta$  от  $E/r$  для водорода в трех различных резонаторах.

Две верхние кривые относятся к резонаторам, высота которых достаточно мала, так что электрическое поле можно считать однородным. Кривая 1 дает результаты для сферического резонатора, для которого величина  $\Lambda$  предполагалась равной  $a/\pi$ .

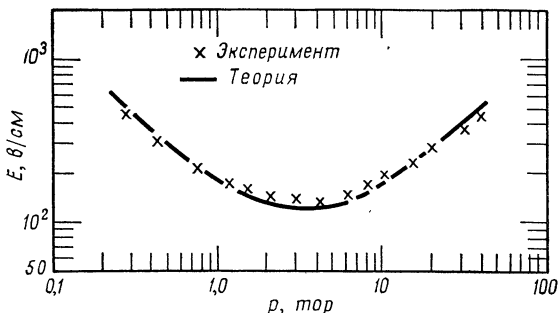


Ф и г. 6.8. Кривые, иллюстрирующие вычисление  $\Lambda_e$  для сферического резонатора, полученные без поправки (1) и с учетом поправки (2).

При нахождении величины эффективного поля мы в качестве первого приближения начнем с этой кривой. Если бы характерная диффузионная длина  $\Lambda$  была равна геометрической, то отношение  $\Lambda/\Lambda_e$  на фиг. 6.7 было бы равно единице. Но это, вообще говоря, неверно, и мы определим величину  $\beta$  по наклону кривых  $p\lambda = \text{const}$ , которые показаны пунктиром на фиг. 6.8, для соответствующего давления и длины волны. С помощью найденной таким образом величины  $\beta$  в свою очередь определим, обращаясь к фиг. 6.7, новое

значение  $\Lambda_e$  и, используя последнее, вычислим новую величину  $\zeta$ . Эта процедура дает сходящиеся результаты; вычисления прекращаются, когда значения, полученные при двух последовательных приближениях, совпадают. Исправленные значения  $\zeta$  показаны на фиг. 6.8. Величина  $\Lambda_e$ , определенная описанным способом, зависит от  $E/p$  и изменяется от 0,43 см в случае малых  $E/p$  до 0,61 см для больших  $E/p$ . Эти значения следует сопоставить с величиной  $\Lambda = 1,49$ , рассчитанной для сферы радиусом 4,69 см.

На фиг. 6.9 реальные пробойные поля при разных давлениях в сферическом резонаторе сравниваются со значениями, вычисленными с помощью теории, изложенной в гл. 4, при использовании



Ф и г. 6.9. Сравнение измеренных и вычисленных пробойных полей для сферического резонатора.

величины  $\Lambda_e$  вместо  $\Lambda$ . Поскольку теория уже получила экспериментальное подтверждение в случае однородных полей, такое сравнение служит хорошей проверкой правильности методов, кратко описанных в настоящей главе.

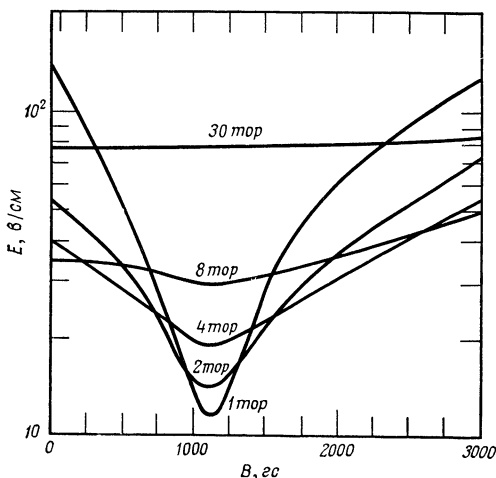
В тех случаях, когда это было необходимо, подобные расчеты эффективной характерной диффузионной длины производились при сравнении теории и эксперимента в гл. 4 и 5.

## МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Если к газу, помимо высокочастотного электрического поля, приложено магнитное поле, то движение электронов изменяется, так как они приобретают дополнительное ускорение  $(e/m)(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Это приводит к тому, что выражения, описывающие возрастание энергии электрона в высокочастотном поле, приобретают резонансный характер (известное явление циклотронного резонанса). В комбинированных полях электроны движутся по спирали, что изменяет характер диффузии. В частности, скорость диффузии меняется по-разному в различных направлениях; это необходимо принимать

во внимание при анализе пробоя. Рассматриваемые эффекты зависят от давления газа и могут быть незначительными, когда число столкновений, испытываемых электроном при его вращении, велико. Наоборот, при низких давлениях, когда число столкновений мало, эти эффекты могут стать существенными.

Влияние постоянного магнитного поля на высокочастотный пробой качественно или полуколичественно изучали Таунсенд и Гилл



Ф и г. 6.10. Пробойные электрические поля в гелии как функция величины поперечного магнитного поля для различных давлений при частоте 3,1 ГГц и  $\Lambda = 1,51$  см.

[6] и Браун [7]. Лэкс, Аллис и Браун [8] провели тщательные подкрепленные экспериментом исследования влияния постоянного магнитного поля на СВЧ пробой в Нег-газе.

Фиг. 6.10 иллюстрирует характерные черты этого явления. Здесь представлена зависимость поля пробоя от величины постоянного поперечного магнитного поля при различных давлениях. Можно заметить, что при давлении 1 тор минимальное электрическое поле пробоя составляет меньше  $1/10$  его значения в отсутствие магнитного поля.

Лэкс, Аллис и Браун проанализировали проблему двумя способами: во-первых, на основе дрейфовой теории и, во-вторых, на основе уравнения Больцмана. Мы рассмотрим второй подход и используем анализ уравнения Больцмана, проведенный в гл. 3.

Рассмотрим сначала изменения в процессе передачи энергии от поля к электронам. Несколько более подробный по сравнению с нашим расчет провел Аллис [9]. Электрическое поле входит

в выведенные в гл. 3 уравнения в виде члена, содержащего скалярное произведение поля на функцию  $F_1^1$ , которая в свою очередь связана с  $F_0^0$ . В присутствии магнитного поля  $F_1^1$  связана с  $F_0^0$  уравнением (3.55). Если пренебречь членами второго порядка, то это уравнение примет вид

$$(\nu + j\omega \mp \omega_b \times) F_1^1 = -\nu \frac{\partial F_0^0}{\partial u} E, \quad (6.25)$$

где величина  $\nu$  без индекса обозначает  $\nu_m$ , частоту столкновений для передачи импульса. В дальнейшем до конца главы мы будем пользоваться этим обозначением.

Уравнение (6.25) можно решить, умножив обе его части на оператор  $(\nu + j\omega - \omega_b \times)$ . В результате в левой части появится тройное векторное произведение  $\omega_b \times \omega_b \times F_1^1$ , которое равно  $\omega_b (\omega_b \cdot F_1^1) - F_1^1 (\omega_b \cdot \omega_b)$ . В результате такого упрощения получаем

$$[(\nu + j\omega)^2 + \omega_b^2] F_1^1 + \omega_b (\omega_b \cdot F_1^1) = -\nu \frac{\partial F_0^0}{\partial u} (\nu + j\omega - \omega_b \times) E. \quad (6.26)$$

Как из рассмотрения физики явления, так и из анализа уравнения (6.26) видно, что магнитное поле, параллельное электрическому полю, не влияет на передачу энергии, хотя и изменяет диффузию электронов и, следовательно, условие пробоя. Рассмотрим магнитное поле, перпендикулярное направлению электрического поля. Если в этом случае скалярно умножить обе части уравнения (6.26) на  $E$ , то сразу же пропадают два члена. Второй член в левой части равен нулю, поскольку поле  $E$  перпендикулярно  $\omega_b$ , а последний член в правой части равен нулю, так как вектор  $\omega_b \times E$  также перпендикулярен  $E$ . В результате уравнение принимает вид

$$E \cdot F_1^1 = -\nu \frac{\partial F_0^0}{\partial u} E^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\nu + j\omega}{(\nu + j\omega)^2 + \omega_b^2} \right]. \quad (6.27)$$

Здесь мы берем действительную часть комплексного выражения, так как электроны, скорость которых сдвинута на  $90^\circ$  по отношению к полю, не могут приобретать от него энергию. Действительную часть выражения в квадратных скобках нетрудно вычислить. Ее можно записать в виде

$$\frac{\nu}{2} \left[ \frac{1}{\nu^2 + (\omega - \omega_b)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (\omega + \omega_b)^2} \right].$$

Исключим  $F_1^1$  из дифференциального уравнения и заменим на  $F_0^0$ , как это делалось при выводе уравнения (3.36); тогда дифференциальное уравнение будет совпадать по форме с уравнением (3.36), если  $E_e$  заменить на  $E_{eb}$ , где  $E_{eb}$  определяется соотношением

$$E_{eb}^2 = \frac{E^2 \nu^2}{2} \left[ \frac{1}{\nu^2 + (\omega - \omega_b)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (\omega + \omega_b)^2} \right]. \quad (6.28)$$

Когда магнитное поле равно нулю, соотношение (6.28) сводится к обычному определению эффективного поля. Как легко видеть, циклотронный резонанс возникает из-за наличия членов, содержащих  $\omega - \omega_b$ . Если исходить из предположения, использованного при выводе соотношения (6.28) и состоящего в том, что  $v$  не зависит от энергии электрона, то для учета влияния магнитного поля на передачу энергии во всех выражениях  $E_e$  следует заменить на  $E_{eb}$ . Поскольку эксперименты Лэкса, Аллиса и Брауна проводились на Нег-газе, то следует ожидать, что соотношение (6.28) в этом случае должно выполняться.

Другой эффект, вызываемый наличием магнитного поля, состоит в изменении длины свободного пробега электрона и, следовательно, скоростей диффузии. Поэтому мы должны рассмотреть также диффузионный поток частиц. Плотность  $\Gamma$  диффузионного потока связана с произведением плотности электронов на частоту ионизации соотношением

$$nv_i = \nabla \cdot \Gamma. \quad (6.29)$$

Мы рассматриваем стационарный случай, поэтому (6.29) совпадает с уравнением, которое использовалось в гл. 2 при анализе процесса диффузии. С помощью уравнения (3.51) мы можем выразить вектор потока  $\Gamma$  через компоненты функции распределения. Это уравнение не содержит в явном виде пространственных координат и времени; кроме того, в него непосредственно не входит магнитное поле. Если мы проинтегрируем каждый член в (3.51) по всему пространству скоростей, т. е. умножим на  $4\pi v^2 dv$  и проинтегрируем по всем значениям  $v$  от нуля до бесконечности, то несколько членов обратятся в нуль. Первый член в левой части и последний член в правой части равенства исчезнут, поскольку  $v^3 F_0^0$  и  $v^2 F_1^1$  стремятся к нулю при обоих пределах интегрирования. Член  $\partial F_1^1 / \partial t$  предполагается равным нулю. Если обратиться к энергии ионизации, то, поскольку член  $\int_0^\infty h_i v F_0^0 4\pi v^2 dv$  по определению равен  $nv_i$ , уравнение можно записать в виде

$$nv_i = - \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^0) v^3 dv; \quad (6.30)$$

тогда для вектора потока  $\Gamma$  получаем

$$\Gamma = - \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} \mathbf{F}_1^0 v^3 dv. \quad (6.31)$$

Если мы принимаем во внимание магнитное поле, то  $\mathbf{F}_1^0$  можно связать с  $F_0^0$  с помощью уравнения (3.54). Пренебрегая членами



второго порядка, имеем

$$(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_b \times) \mathbf{F}_1^0 = -v \nabla F_1^0. \quad (6.32)$$

Окончательное решение уравнения (6.32) для  $\mathbf{F}_1^0$  проще всего получить, используя тензор второго порядка, т. е. оператор, который при действии на вектор образует вектор. Если мы подействуем тензором

$$\mathbf{v} + \frac{1}{v} \boldsymbol{\omega}_b \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times$$

на левую часть равенства (6.32), то получим шесть членов:

$$\begin{aligned} v^2 \mathbf{F}_1^0 + v \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{F}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_b (\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{F}_1^0) + \frac{1}{v} \boldsymbol{\omega}_b \boldsymbol{\omega}_b \cdot (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{F}_1^0) - \\ - v \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{F}_1^0 - \boldsymbol{\omega}_b \times \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{F}_1^0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Разложив, как обычно, тройное векторное произведение, получим  $-\boldsymbol{\omega}_b (\boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{F}_1^0) + \mathbf{F}_1^0 (\boldsymbol{\omega}_b \cdot \boldsymbol{\omega}_b)$ . Первый из этих членов сокращается с третьим в (6.33), а второй просто равен  $\boldsymbol{\omega}_b^2 \mathbf{F}_1^0$ . Второй и пятый члены в (6.33) сокращаются, а четвертый равен нулю, так как векторное произведение  $\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{F}_1^0$  перпендикулярно  $\boldsymbol{\omega}_b$ . В итоге выражение (6.33) принимает вид  $(v^2 + \boldsymbol{\omega}_b^2) \mathbf{F}_1^0$ , и мы сразу получаем решение уравнения (6.32)

$$\mathbf{F}_1^0 = -\frac{v}{v} \frac{(v^2 + \boldsymbol{\omega}_b \boldsymbol{\omega}_b \cdot - v \boldsymbol{\omega}_b \times)}{v^2 + \boldsymbol{\omega}_b^2} \nabla F_1^0 = -\frac{v}{v} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla F_1^0. \quad (6.34)$$

Подстановка (6.34) в (6.31) дает

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int_0^\infty \frac{v^2}{3v_c} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla F_1^0 4\pi v^2 dv. \quad (6.35)$$

В отсутствие магнитного поля тензорная величина  $\boldsymbol{\Omega}$  стремится к единице. Поскольку  $\boldsymbol{\Gamma} = -\nabla(Dn)$ , мы видим, что тензор  $\boldsymbol{\Omega}$  так изменяет поток частиц, что направления  $\boldsymbol{\Gamma}$  и градиента плотности уже больше не совпадают. Иногда это уравнение рассматривают как определение тензорного коэффициента диффузии, поскольку, согласно обычному определению, коэффициент диффузии равен  $\langle v^2/3v_c \rangle$ , и в том случае, когда  $\boldsymbol{\Omega}$  сводится к единице, соотношение (6.35) точно соответствует этому определению.

Следуя обозначениям Лэкса, Аллиса и Брауна, мы можем записать  $\boldsymbol{\Omega}$  в более простом виде, полагая  $\boldsymbol{\omega}_{bx}/v = b_x$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{by}/v = b_y$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{bz}/v = b_z$  и  $b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ . В результате получаем девять компонент тензора

$$(1 + b^2) \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 + b_x^2 & b_x b_y + b_z & b_x b_z - b_y \\ b_x b_y - b_z & 1 + b_y^2 & b_y b_z + b_x \\ b_x b_z + b_y & b_y b_z - b_x & 1 + b_z^2 \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Обычно нас интересует такая ситуация, когда магнитное поле однородно и приложено в каком-либо одном направлении, например вдоль оси  $z$ . В этом случае (6.36) сводится к

$$(1 + b^2) \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Соотношение (6.37) в сочетании с (6.35) определяет вектор потока для случая, когда магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Три компоненты  $\mathbf{\Gamma}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \frac{1}{1 + b^2} \int_0^\infty \frac{v^2}{3v} \left( \frac{\partial F_0^0}{\partial x} + b \frac{\partial F_0^0}{\partial y} \right) 4\pi v^2 dv, \\ \Gamma_y &= \frac{1}{1 + b^2} \int_0^\infty \frac{v^2}{3v} \left( -b \frac{\partial F_0^0}{\partial x} + \frac{\partial F_0^0}{\partial y} \right) 4\pi v^2 dv, \\ \Gamma_z &= \int_0^\infty \frac{v^2}{3v} \frac{\partial F_0^0}{\partial z} 4\pi v^2 dv. \end{aligned}$$

Если взять дивергенцию от  $\mathbf{\Gamma}$ , то перекрестные члены выпадут и мы получим

$$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \int_0^\infty \frac{v^2}{3v} \left( \frac{1}{1 + b^2} \frac{\partial^2 F_0^0}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + b^2} \frac{\partial^2 F_0^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_0^0}{\partial z^2} \right) 4\pi v^2 dv. \quad (6.38)$$

Из приведенного в гл. 2 определения коэффициента диффузии  $\nabla(Dn) = -\mathbf{\Gamma}$  вытекает уравнение  $\nabla^2(Dn) + nv_i = 0$ . Теперь, очевидно, ситуация не столь проста. Однако если мы определим три коэффициента диффузии  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$  и  $D_{zz}$  таким образом, что  $D_{xx}$  и  $D_{yy}$  равны обычному коэффициенту  $D$ , умноженному на  $1/(1 + b^2)$ , то из (6.38) получим

$$D_{xx} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + D_{zz} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + nv_i = 0; \quad (6.39)$$

здесь мы уже разделили зависимость  $F_0^0$  от координат и от скоростей. Однако если предположить, что длины в направлениях, перпендикулярных магнитному полю, увеличиваются в  $\sqrt{1 + b^2}$  раз, то уравнение (6.39) можно представить в обычном виде

$$D\nabla^2 n + nv_i = 0.$$

Это изменение длин эквивалентно такому смещению границ, в результате которого характерная диффузионная длина в декарто-

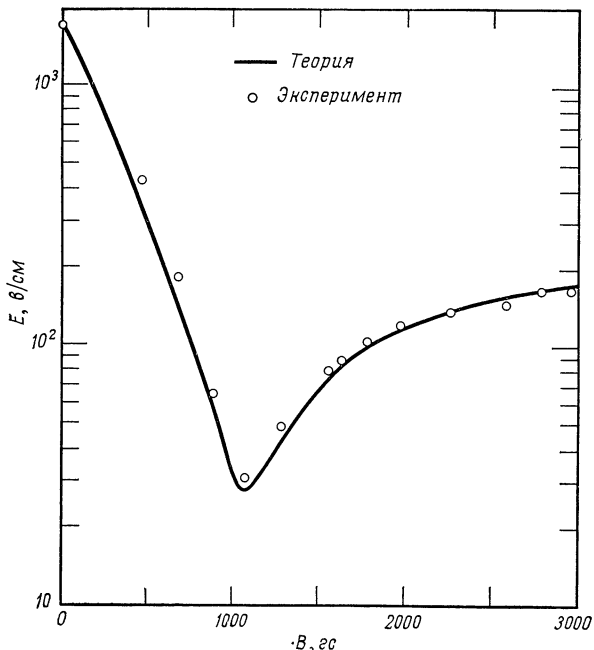
вой системе координат уже не определяется соотношением

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2,$$

а записывается в виде

$$\frac{1}{\Lambda_b^2} = \left(\frac{1}{\Lambda_x^2} + \frac{1}{\Lambda_y^2}\right) \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{\Lambda_z^2}, \quad (6.40)$$

где  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$  и  $\Lambda_z$  — обычные компоненты  $\Lambda$ , а именно  $X/\pi$ ,  $Y/\pi$  и  $Z/\pi$ .  
Переход к другим системам координат осуществляется обычным



Ф и г. 6.11. Пробойные электрические поля в гелии при давлении 1 тор как функция поперечного магнитного поля при частоте  $f = 3,1$  Гц,  $\Lambda = 0,101$  см.

образом. Например, при переходе к цилиндрическим координатам получаем, подставляя величину  $\omega_b/v$  вместо  $b$ ,

$$\frac{1}{\Lambda_b^2} = \frac{1}{\Lambda_r^2} \frac{v^2}{v^2 + \omega_b^2} + \frac{1}{\Lambda_z^2}, \quad (6.41)$$

причем мы считаем, что магнитное поле приложено вдоль оси цилиндра.

При таком определении эффективной диффузионной длины в случае наличия магнитного поля мы можем записать условие пробоя обычным образом:

$$\frac{v_i}{D} = \frac{1}{\Lambda_b^2}.$$

Это означает, что влияние магнитного поля эквивалентно увеличению размеров камеры в  $(v^2 + \omega_b^2)^{1/2}/v$  раз в направлениях, перпендикулярных магнитному полю.

Лэкс, Аллис и Браун [8] измерили этот эффект в параллельном и поперечном магнитных полях в СВЧ резонаторах на частоте 3000 *Мгц*. В этих экспериментах использовался Нег-газ. Результаты измерений приведены на фиг. 6.10. Поскольку влияние магнитного поля можно учесть путем введения эффективной характерной диффузионной длины и эффективного поля  $E_{\text{эф}}$ , названные авторы смогли сопоставить экспериментальные результаты с данными теории для Нег-газа, изложенной в гл. 4. На фиг. 6.11 теория сравнивается с экспериментальными данными для Нег-газа при давлении 1 *тор*. Очень хорошее согласие теории и эксперимента подтверждает справедливость концепции эффективной характерной диффузионной длины и эффективного поля для случая магнитных полей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Herlin M. A., Brown S. C., Phys. Rev., **74**, 1650 (1948).
2. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, 2d ed., Cambridge 1952. (Имеется перевод 1-го издания: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949.)
3. Rose D. J., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., **28**, 561 (1957).
4. MacDonald A. D., Brown S. C., Canad. Journ. Res., **A28**, 168 (1950).
5. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, New York, 1941. (Имеется перевод: Дж. Страттон, Теория электромагнетизма, ИЛ, 1948.)
6. Townsend J. S., Gill E. W. B., Phil. Mag., **26**, 290 (1938).
7. Brown A. E., Phil. Mag., **29**, 302 (1940).
8. Lax В., Allis W. P., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., **21**, 1297 (1950).
9. Allis W. P., в книге Handbuch der Physik, Bd. 21, Berlin, 1956.

## Экспериментальные методы

Эксперимент и теория в физике часто развиваются бок о бок, так что успехи в одной области зависят от успехов, достигнутых в другой. Из-за такой взаимной зависимости трудно провести строгое разделение теоретического и экспериментального материала, поэтому при рассмотрении явлений газового разряда эти два раздела неизбежно должны в какой-то мере переплетаться. В силу указанных причин мы, прежде чем приступить к изложению имеющихся сведений о пробое в атмосфере, опишем некоторые экспериментальные методы исследования пробоя на сверхвысоких частотах. Описание экспериментальных методов удобно разделить на две части и рассмотреть по отдельности СВЧ системы и вакуумные системы. За последние пятнадцать лет достигнуты существенные успехи как в СВЧ технике, так и в вакуумной технологии. Ряд данных, приведенных в этой книге, получен при использовании более старых методов, поэтому ниже будут иногда встречаться ссылки на эти методы, которые, как правило, менее эффективны и менее точны, но зато и требуют меньших затрат.

### СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ СИСТЕМЫ

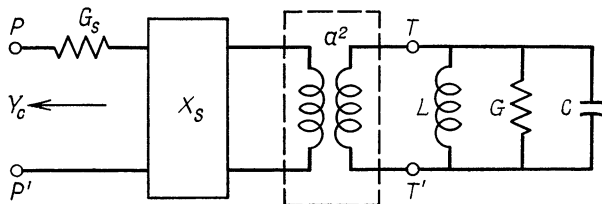
В настоящее время имеется много книг, в которых широко рассматриваются вопросы СВЧ измерений [1—3]. Мы ограничимся здесь описанием той аппаратуры, которая применяется при исследованиях пробоя.

Нам необходимо знать величину, направление и пространственное распределение электрического поля в объеме, в котором происходит разряд. Этот объем, как правило, представляет собой металлический резонатор, почти полностью закрытый, за исключением небольших возбуждающих щелей или отверстий для ввода петель связи. Мы должны поэтому определять свойства резонатора, делая измерения вне его. Поскольку длина волны одного порядка с размерами применяемых резонаторов и поперечными размерами волноводов, описание электромагнитных явлений с использованием сосредоточенных элементов цепи, а именно емкости, самоиндукции и сопротивления, может привести к ошибочным результатам. Тем

не менее очень удобно представлять свойства СВЧ передающей линии через параметры эквивалентной цепи. Законность такого представления, которое будет кратко охарактеризовано в этой главе, детально рассматривалось Слэтером [4]. Экспериментальные методы, основанные на применении этих представлений к измерению множества различных свойств ионизованных газов на сверхвысоких частотах, детально описаны Хилдом и Уортоном [1]. Более подробное описание методов, представляющих особый интерес при исследовании пробоя, можно найти в статьях Брауна и Роуза [5, 6].

### Эквивалентные схемы

Резонаторная система, применяемая для измерений, состоит из самого резонатора, а также из каких-либо линий ввода мощности, к которым резонатор присоединяется с помощью либо петель, либо



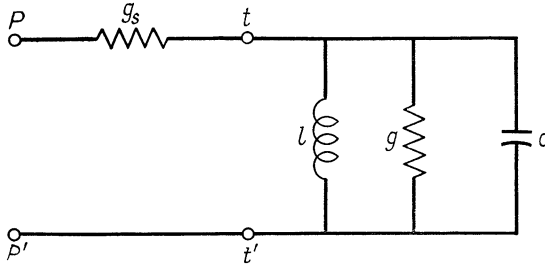
Ф и г. 7.1. Эквивалентная схема СВЧ резонатора и передающих линий.

щелей связи через вакуумно-плотное соединение. Такие соединения необходимы потому, что линии передачи обычно не являются частью вакуумной системы, а резонатор, где происходит разряд, должен быть частью высоковакуумной установки, в которую вводится газ. Эти соединения, которые делаются обычно из пирекса или каких-либо других керамических материалов, вызывают лишь небольшие потери мощности и очень мало изменяют собственную частоту системы. Указанные изменения можно учесть точно, но, как правило, возмущения, вносимые стеклянными вводами, малы, так что потери мощности на входе также малы. Поэтому мы можем использовать упрощенный эквивалентный контур, подобный приведенному на фиг. 7.1 для резонатора.

На фиг. 7.1 изображены передающая линия и резонатор с любыми потерями; измерения производятся в точках  $PP'$  передающей линии. Стенки волновода между точками  $PP'$  и резонатором не являются идеально проводящими, что приводит к потерям мощности. Это можно учесть, вводя последовательно сопротивление с проводимостью  $G_s$ . Связь между волноводом и резонатором можно представить с помощью трансформатора без потерь с отношением импе-

дансов  $1 : a^2$  или с отношением адмитансов  $a^2 : 1$ . Самому резонатору соответствует параллельный контур  $RLC$ , подсоединенный в точках  $TT'$ . Более простая схема, изображенная на фиг. 7.2, является достаточно точной для большинства задач. При последующем рассмотрении используется именно этот эквивалентный контур.

Адмитанс нормируется к единице путем деления на  $Y_c$  — адмитанс линии, идущей от  $PP'$  в направлении от резонатора к источнику мощности.



Ф и г. 7.2. Упрощенная эквивалентная схема резонатора и передающих линий.

Отсюда следует, что величина  $g_s$  равна  $G_s/Y_c$ ; тогда с учетом коэффициента трансформации получаем новые нормированные элементы параллельной цепи:

$$l = L \frac{Y_c}{a^2}, \quad c = C \frac{a^2}{Y_c} \quad \text{и} \quad g = G \frac{a^2}{Y_c}.$$

В обоих эквивалентных контурах считается, что резонатор замыкает цепь, но анализ не представляет серьезных трудностей, если к резонатору присоединены какие-либо дополнительные элементы.

При падении волны на резонатор часть энергии поглощается, а часть отражается. Можно определить свойства резонатора, измеряя в некоторой точке линии относительные уровни падающей и отраженной мощности и разности фаз между этими двумя волнами. Свойства резонатора можно связать с параметрами эквивалентных контуров фиг. 7.1 и 7.2 при условии, что мы рассматриваем только частоты, близкие к резонансной, и что рядом нет других резонансов. Обращаясь к более простому из двух эквивалентных контуров, в котором адмитанс линии нормирован к единице, мы отмечаем, что при резонансе реактивная проводимость параллельного контура  $lc$  равна нулю. Поэтому можно сложить сопротивления между точками  $P$  и  $P'$ . Если обозначить резонансную проводимость между этими точками  $g_0$ , то

$$g_0 = \frac{gg_s}{g + g_s}. \tag{7.1}$$

Теперь полезно определить другую величину  $\beta$ , которая связана с реактивными элементами в контурах на фиг. 7.1 и 7.2 следующим образом:

$$\beta = \left(\frac{c}{l}\right)^{1/2} = \frac{a^2}{Y_c} \left(\frac{C}{L}\right)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Нормированный импеданс линии, заканчивающейся в  $PP'$ , равен

$$z = \frac{1}{g_s} + \frac{1}{g + jb}, \quad (7.3)$$

где

$$b = \omega c - \frac{1}{\omega l}. \quad (7.4)$$

При резонансной частоте  $b = 0$  и, как легко убедиться, импеданс равен  $1/g_s + 1/g = 1/g_0$ . По определению резонансная система является сильно связанной, если  $g_0$  меньше единицы, и слабо связанной, если  $g_0$  больше единицы.

### Коэффициенты стоячей волны

При передаче сверхвысокочастотной мощности к резонатору вдоль волновода часть ее поглощается, а часть отражается. Поэтому в контуре устанавливается стоячая волна. Параметры стоячей волны легко определить экспериментально и связать с соответствующими параметрами контура, измерить которые непосредственно не представляется возможным. Более подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в работах [5—7]. Для наших целей достаточно определить коэффициент отражения  $\Gamma$  через отношение падающей и отраженной волн. Между ними может быть разность фаз, так что если положить

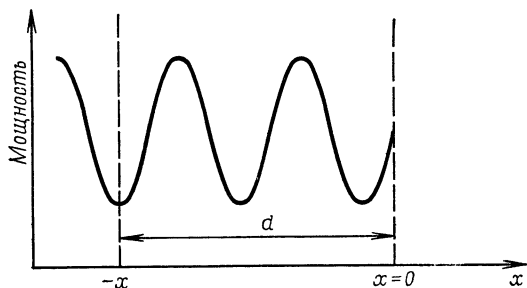
$$\Gamma = \rho e^{i\varphi}, \quad (7.5)$$

то  $\rho$  представляет собой абсолютное значение коэффициента отражения, которое всегда действительно и положительно, а  $\varphi$  — сдвиг фаз. Путем непосредственного вычисления можно получить следующее соотношение между  $\rho$  и отношением  $R_V$  величин в максимуме и минимуме волны:

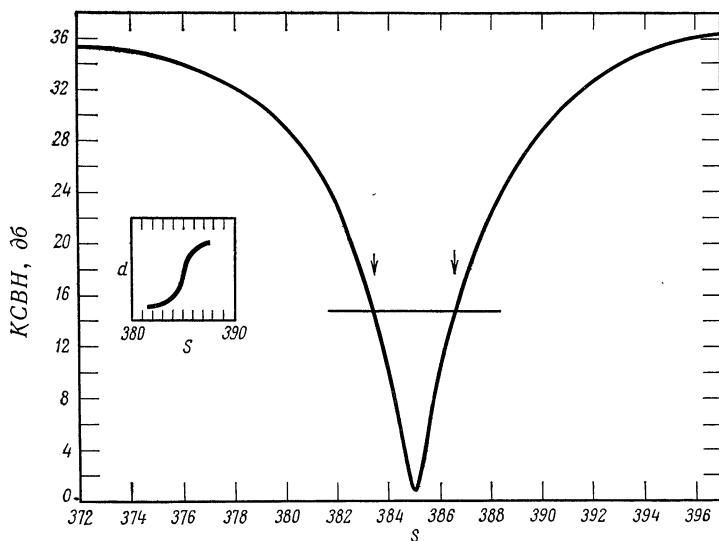
$$R_V = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (7.6)$$

Именно на величине  $R_V$ , представляющей собой коэффициент стоячей волны напряжения, в основном базируются все измерения. Из-за широкого диапазона изменений  $R_V$  часто бывает удобно задавать коэффициент стоячей волны в децибелах как выраженное в этих единицах число, характеризующее отношение мощности в максимуме и минимуме стоячих волн. Коэффициент стоячей





Ф и г. 7.3. Суперпозиция падающей и отраженной волн.



Ф и г. 7.4. Кривая добротности резонатора, использовавшегося в измерениях пробоя в Нег-газе.

На вставном рисунке показана фазовая кривая в области минимума кривой добротности.  
 $KCB_{\infty} = 36,6$ ;  $KCB_0 = 0,5$ ;  $KCB_h = 14,6$ ;  $\delta S = 0,313$ ;  $d\lambda/dS = 0,0275$ ;  $\delta\lambda = 0,00861$ ;  
 $Q_L = 10,615/0,00861 = 1233$ ;  $Q_u/Q_L = 2,02$ ;  $\beta/Q_L = 1,09$ .

волны в децибелах  $R$  задается следующим соотношением:

$$R = 20 \lg R_V = 10 \lg R_P, \quad (7.7)$$

где  $R_P$  — коэффициент стоячей волны для мощности.

Параметры волны обычно измеряются при помощи щелевой секции, т. е. участка волновода с узкой продольной щелью, в которой может передвигаться зонд. Зонд смонтирован на передвижной каретке, расстояние которой от фиксированной исходной точки может быть точно измерено. Зонд, вставляемый в волновод, должен иметь малые размеры, чтобы не исказить поле в волноводе. Величина сигнала измеряется приемным устройством, к которому подключен зонд. Фактически зонд измеряет уровень мощности, пропорциональный квадрату абсолютной величины суммы падающего и отраженного полей волны. Изменение этой величины с расстоянием  $x$  описывается функцией  $\sin^2 x$ , смещенной над осью  $x$ , как показано на фиг. 7.3.

Кроме коэффициента стоячей волны, измеряются также положения минимумов напряжения. Из этих данных можно найти значения  $\rho$  и  $\varphi$  и, следовательно, определить свойства резонатора. Типичные экспериментальные результаты показаны на фиг. 7.4, где приведены кривые фазового резонанса в функции длины волны или частоты. Эти кривые обычно строятся по точкам; на фиг. 7.4 приведены результаты измерений, выполненных для резонатора, использованного при получении некоторых данных гл. 4. Коэффициент отражения  $\Gamma$  в каждой точке легко связать с импедансом резонатора

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1},$$

где  $z$  — нормированный импеданс для тех же точек линии. Теперь из (7.3) и (7.5) и соотношения между  $\Gamma$  и импедансом можно получить выражение для коэффициента отражения и котангенса сдвига фаз

$$\rho = \frac{\{4b^2 + [g^2(1/g_0^2 - 1) + b^2(1/g_s^2 - 1)]^2\}^{1/2}}{g^2(1/g_0 + 1)^2 + b^2(1/g + 1)^2}, \quad (7.8)$$

$$-\operatorname{ctg} \varphi = \frac{g^2}{2b} \left( \frac{1}{g_0^2} - 1 \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{1}{g_s^2} - 1 \right). \quad (7.9)$$

### Добротность резонатора

Свойства резонатора часто описываются при помощи параметра  $Q$ , который является мерой отношения накопленной энергии к рассеянной. Если  $U$  — накопленная энергия, а  $P$  — рассеянная мощность, т. е. количество энергии, рассеиваемой в единицу времени,

то по определению

$$Q = \frac{\omega_0 U}{P}, \quad (7.10)$$

где  $\omega_0$  — угловая частота при резонансе. Существует целый ряд возможных определений добротности резонатора; следует отметить, что ни одно из них не имеет смысла, если не соблюдено условие  $Q \gg 1$ , поскольку в противном случае весь анализ неправилен. Мы должны рассматривать два значения добротности, а именно добротность нагруженного резонатора  $Q_L$  и добротность ненагруженного резонатора  $Q_u$ , так как величина  $Q_u$  необходима для расчета полей, а  $Q_L$  — величина, измеряемая при эксперименте. Мы будем пользоваться этими двумя добротностями, хотя для иных целей применяются другие определения.

Под  $Q_u$  подразумевается отношение накопленной резонатором энергии к энергии, рассеянной за счет активных потерь в стенках резонатора и в стенках входного контура. Соответствующие проводимости эквивалентного контура обозначим через  $g$  и  $g_s$ . Мы имеем

$$Q_u = \frac{(c/l)^{1/2}}{g(1+g/g_s)} = \frac{\beta(g_s - g_0)^2}{g_s^2 g_0}. \quad (7.11)$$

Это соотношение очень похоже на общепринятое определение  $Q$  в обычном параллельном контуре, для которого  $Q = RC\omega_0$  и  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Возвращаясь снова к эквивалентной схеме, определим  $Q_L$  как отношение энергии, накопленной в резонаторе, к энергии, рассеянной на параллельных проводимостях  $g$  и  $g_s/(g_s + 1)$ , если измерения проводить в точках  $tt'$ . Используя (7.1) и производя простые преобразования, можно написать

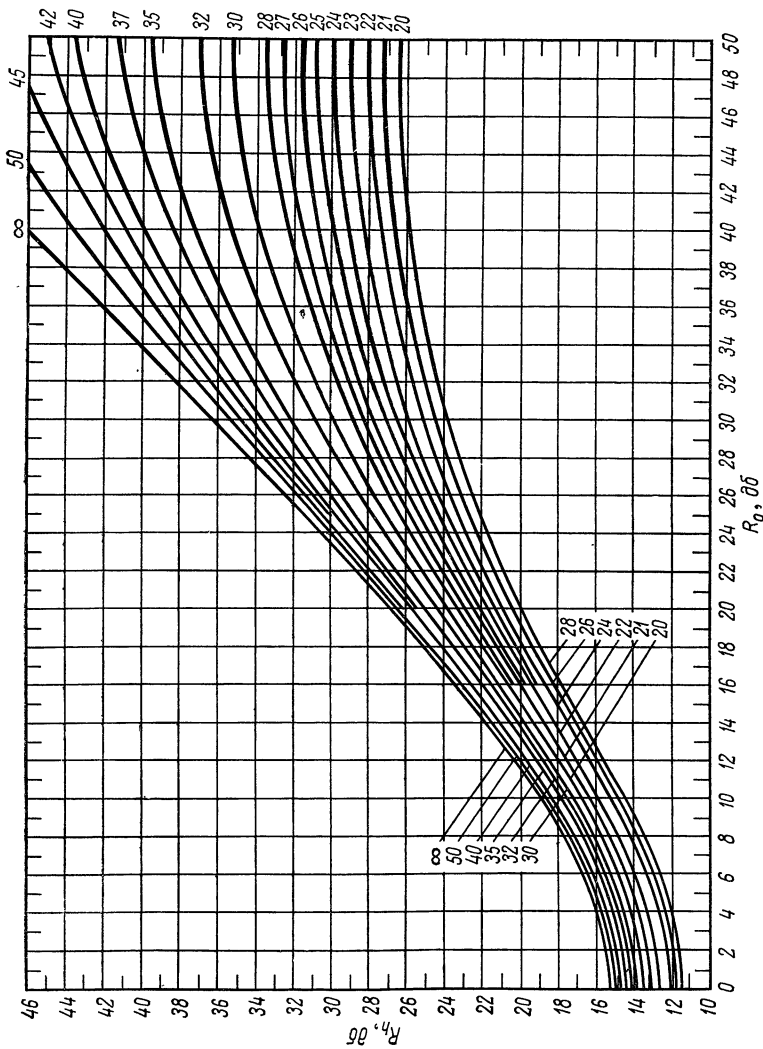
$$Q_L = \frac{\beta(g_s - g_0)(g_s + 1)}{g_s^2(g_0 + 1)}. \quad (7.12)$$

Записанную таким образом добротность проще всего связать с характерным провалом коэффициента стоячей волны напряжения при резонансе. Как показал Слэтер [4],

$$Q_L = \frac{\omega_0}{\delta\omega} = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda},$$

где  $\delta\omega$  — разность двух частот по обе стороны от резонанса, в которых мощность составляет половину ее значения при резонансе, а  $\delta\lambda$  — соответствующая разность длин волн. Мы можем связать  $\delta\lambda$  с коэффициентом стоячей волны, рассматривая реактивную проводимость цепи  $lc$ . Эта проводимость определяется соотношением

$$jb = j\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (7.13)$$



Ф и г. 7.5. Коэффициент стоячей волны в точках половинной мощности  $R_h$  как функция коэффициента стоячей волны при резонансе  $R_0$ .

При частотах, для которых мощность равна половине резонансной, т. е. на расстоянии  $\delta\lambda/2$  от  $\lambda_0$ , выражение  $(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$  равно  $\delta\lambda/\lambda_0$ , если величина  $\delta\lambda$  мала по сравнению с  $\lambda_0$ , что должно иметь место, поскольку добротность  $Q$  по определению велика.

Рассеянная мощность уменьшается вдвое, когда реактивная проводимость между точками  $tt'$  становится равной активной проводимости. Поэтому в точках половинной мощности, на расстояниях  $\pm \delta\lambda/2$  от  $\lambda_0$ , импеданс  $z_h$  между точками  $PP'$  равен

$$z_h = \frac{1}{g_s} + \frac{1}{g + j \left[ \frac{g_s^2 (g_0 + 1)}{(g_s - g_0)(g_s + 1)} \right]}. \quad (7.14)$$

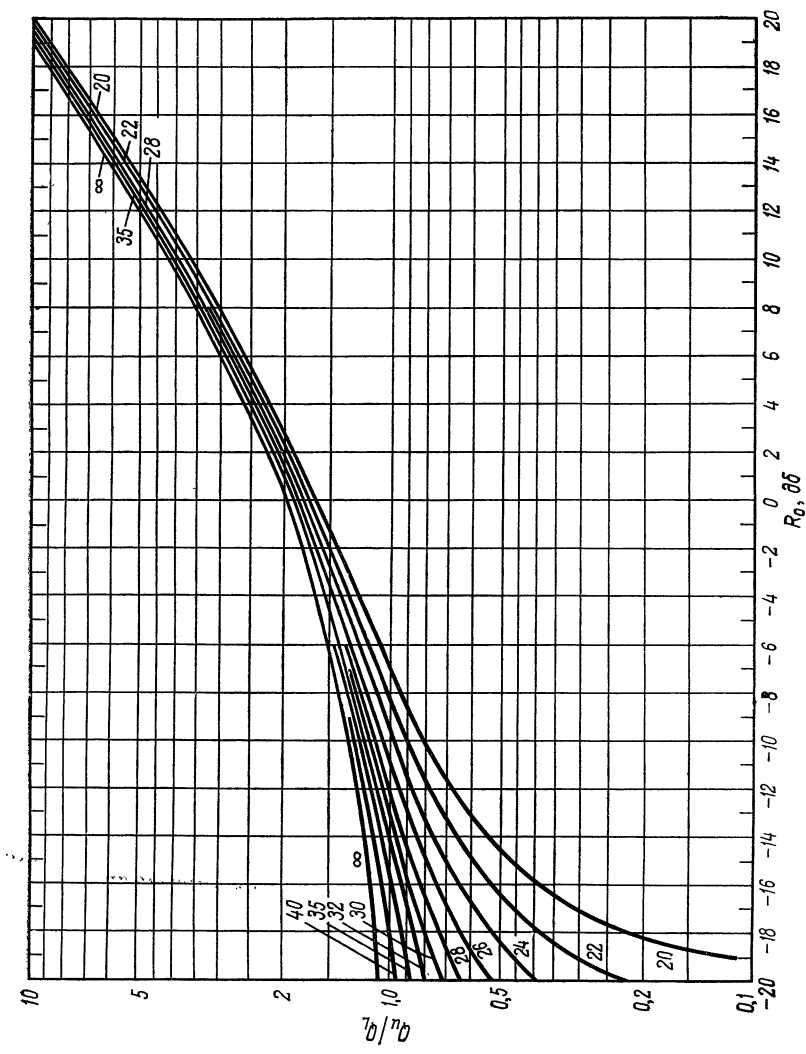
Коэффициент отражения в точках половинной мощности можно найти с помощью соотношения (7.8)

$$\rho_h = \frac{(g_0^2 g_s^2 + g_0^2 + g_s^2 - 4g_0 g_s + 1)^{1/2}}{(g_s + 1)(g_0 + 1)}. \quad (7.15)$$

Используя соотношения (7.6) и (7.7), можно связать этот результат с коэффициентом стоячей волны напряженностей поля (КСВН) в децибелах. Определив таким образом КСВН, мы можем, используя величину  $R_h$ , определить  $\delta\lambda$  по резонансной кривой, как показано на фиг. 7.4. Значение  $Q_L$  можно вычислить, используя  $\delta\lambda$  и  $\lambda_0$ .

Из-за сложного характера многих соотношений, например (7.8) и (7.15), положение точек половинной мощности более удобно определять графически. На фиг. 7.5 приведена система кривых, по которой можно найти величину  $R_h$  для различных значений  $R_0$ , коэффициента стоячей волны напряженности поля при резонансе. Эти кривые построены для различных значений коэффициента стоячей волны напряженности поля  $R_\infty$  для некоторого расстояния, смещенного относительно положения резонанса. На фиг. 7.6 представлена зависимость отношения добротностей ненагруженного и нагруженного резонатора от коэффициента стоячей волны при резонансе. При определении положительного и отрицательного коэффициентов стоячей волны при резонансе мы следовали условию Брауна и Роуза, которые считают коэффициент стоячей волны при резонансе отрицательным для слабо связанного резонатора и положительным для сильно связанного резонатора.

Поясним использование этих кривых на примере фиг. 7.4, где показано, как действительно производятся расчеты  $Q_u$  и  $Q_L$ . Вычислив  $R_\infty$ , мы определим, на какой из линий на фиг. 7.5 следует искать значение коэффициента стоячей волны при резонансе. Отсюда определяется коэффициент стоячей волны в точке половинной мощности, который затем изображается в виде линии, пересекающей кривую  $Q$  на фиг. 7.4. По этой линии находят  $\delta\lambda$  или  $\delta\omega$ ; отноше-



Ф и г. 7.6. Отношение добротностей ненагруженного и нагруженного резонаторов.

ние  $\lambda_0/\delta\lambda$  дает нагруженную добротность. Ненагруженная добротность определяется затем из фиг. 7.6. Чтобы определить знак коэффициента стоячей волны, используют приведенную на фиг. 7.4 кривую, характеризующую положение минимума коэффициента стоячей волны. В рассматриваемом случае резонатор сильно связан, так что  $g_0 < 1$  и  $R_0 > 0$ .

Определив  $Q_u$ , можно найти значение электрического поля в некоторой рассматриваемой точке резонатора, поскольку запасенная энергия пропорциональна квадрату электрического поля. Мы можем написать

$$U = \eta E_0^2, \quad (7.16)$$

где  $\eta$  — параметр, различающийся для разных типов колебаний и для различных конфигураций резонатора, а  $E_0$  — значение электрического поля в некоторой рассматриваемой точке. Используя определение  $Q_u$ , а также соотношение (7.16), можно написать для электрического поля:

$$E_0 = \sqrt{\frac{P_0 Q_u}{\eta \omega_0}}; \quad (7.17)$$

здесь  $P_0$  — мощность, поглощаемая при резонансной частоте; остальные величины были определены выше. Поскольку большая часть данных, приводимых в этой книге, была получена в цилиндрических резонаторах с модой колебания  $TM_{010}$ , мы рассчитали  $\eta$  для этого частного случая, хотя сам метод является общим и может быть применен к любой конфигурации.

Для наименьшей магнитной моды колебаний  $TM_{010}$  электрическое поле не зависит от радиуса и угловых переменных. Аксиальную компоненту поля можно записать в виде

$$E_z = \sqrt{2} E_0 J_0 \left( \frac{2,405r}{R} \right) e^{i\omega t},$$

где  $E_0$  — поле в центре резонатора, а  $R$  — радиус цилиндра. В тот момент, когда электрическое поле достигает максимума, магнитное поле равно нулю, поэтому запасенную энергию можно представить в виде следующего интеграла по всему объему резонатора:

$$U = 0,5\epsilon_0 \int_0^R E_0^2 J_0^2 \left( \frac{2,405r}{R} \right) 2\pi r h dr = 0,2695\epsilon_0 \pi R^2 h E_0^2,$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, а  $h$  — высота резонатора. Следовательно, член  $\eta$  равен  $0,2695\epsilon_0 V$ , где  $V$  — объем резонатора.

### Экспериментальные методы

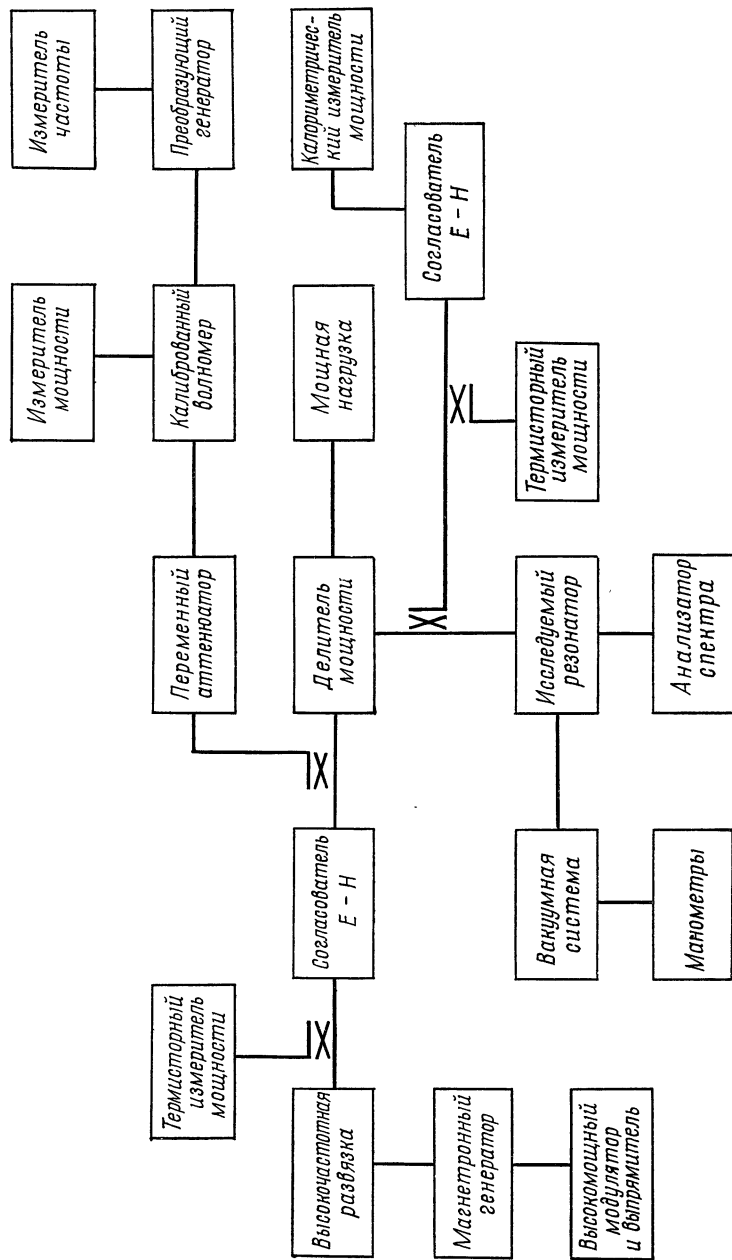
Из выведенных выше соотношений ясно, что первичными, экспериментальными величинами, используемыми при расчетах электрических полей, являются коэффициенты стоячей волны, уровни мощности и частоты. По коэффициентам стоячей волны и частотам мы вычисляем  $Q_u$ , а эта величина в совокупности с уровнями мощности, частотами и некоторыми геометрическими факторами предоставляет все данные, необходимые для вычисления  $E$  по формуле (7.17). Чтобы пояснить суть используемых методов, рассмотрим современное экспериментальное устройство, предназначенное для измерения пробоя в атмосферных газах при частоте 10 Гц. На фиг. 7.7 показана блок-схема такого устройства [8].

Сверхвысокочастотная мощность, стабилизированная по частоте и контролируемая по уровню мощности, поступает из магнетронного источника в резонатор через волновод. Ферритовый вентиль предотвращает влияние нагрузки на частоту магнетрона, ослабляя примерно на 10 дБ сигналы, идущие от нагрузки к источнику, без существенного уменьшения мощности, поступающей в резонатор. Небольшая часть мощности отводится к измеряющей частоту системе, которая содержит измеритель частоты, позволяющей осуществлять измерения с точностью до седьмого или восьмого знака. При помощи калиброванного направленного ответвителя известная часть мощности отводится также в калориметрический измеритель мощности. Спектроанализатор регистрирует мощность, проходящую через резонатор, и позволяет обнаружить наступление пробоя. Ряд блоков настройки  $E - H$  используется для обеспечения согласования в определенных точках линии передачи. Описание менее сложных экспериментальных установок можно найти в ранее опубликованных статьях [9, 10].

После того как нужное количество газа введено в резонатор, определяют пробойное поле при постепенном повышении уровня мощности; в то же время частоту источника поддерживают равной собственной частоте резонатора. Пробой обнаруживается по внезапному падению пропускаемой мощности, вызванному тем, что газ становится проводящим и поглощает большую часть мощности.

Поскольку пробой является результатом возрастания плотности электронов, в резонаторе еще до наложения поля должно быть некоторое количество электронов; обычно это обеспечивается воздействием слабого радиоактивного источника, помещенного вблизи резонатора. Воспроизводимые результаты получаются в том случае, когда радиоактивный источник создает достаточное количество электронов внутри резонатора, так что большую часть времени в нем имеется хотя бы один электрон.





Ф и г, 7.7. Схема СВЧ оборудования, использованного при исследовании пробы в воздухе.

Наиболее существенными из СВЧ элементов схемы являются, во-первых, аттенюатор, который используется для измерения  $Q$  и коэффициента стоячей волны при резонансе, и, во-вторых, измеритель мощности, который определяет мощность, поступающую в резонатор. В настоящее время существуют достаточно точные аттенюаторы почти для всех СВЧ диапазонов. Можно также провести прецизионную калибровку аттенюатора типа запредельного волновода на любой нужной частоте путем сравнения относительных амплитуд в различных точках волны напряжения в волноводе с короткозамкнутым или с разомкнутым концом с амплитудами при различных положениях аттенюатора. Этот метод описан в томе 11 справочника [3].

Точность измерения электрического поля меняется с частотой, однако для СВЧ диапазонов, обозначаемых обычно  $L$ ,  $S$  и  $X$ , т. е. для частот в области 1, 3 и 10  $Ггц$  соответственно, незатухающие поля могут быть измерены с общей точностью около 2%. Разброс результатов повторных измерений, проводящихся при одинаковых условиях, много меньше. Наибольшую погрешность вносит обычно неопределенность в калибровке аттенюатора. При более высоких частотах точность снижается и может составлять около 10% в  $K$ -диапазоне (25  $Ггц$ ) и еще хуже при более высоких частотах. При измерениях импульсных пробойных полей ошибки возрастают, поскольку на результат измерения влияют форма импульса, его длительность и частота повторения. В связи с этим точность в определении импульсных полей пробоя составляет, вероятно, около 10% почти для всех сверхвысоких частот.

### ВАКУУМНАЯ СИСТЕМА

Явления газового разряда вообще и сверхвысокочастотный пробой в частности нередко довольно заметно зависят от чистоты изучаемого газа. Добавление ничтожного количества некоторых газов может существенно изменить пробойные поля некоторых инертных газов, как мы уже видели при изучении гелия и аргона. Поэтому развитие вакуумной техники тесно связано с успехами в изучении пробоя. Мы опишем кратко современное состояние дел в этой области в той мере, в какой это касается изучения сверхвысокочастотного пробоя, не затрагивая многих важных вопросов современной вакуумной технологии, таких, как криогенные насосы и воспроизведение в больших камерах условий, существующих в космосе.

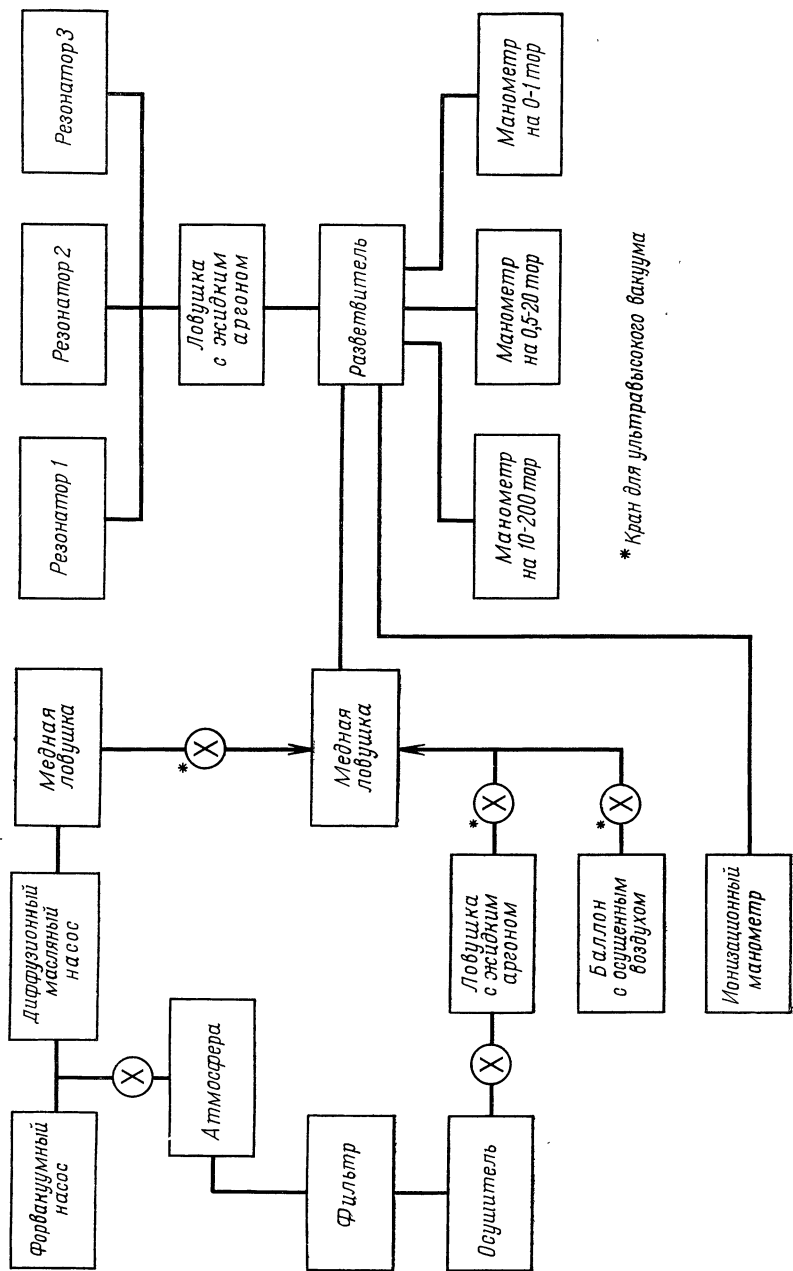
В настоящее время с помощью техники сверхвысокого вакуума в установках разумных размеров удается получить давления порядка  $10^{-10}$  *тор* за несколько часов. Это стало возможным благодаря усилиям многих исследователей, однако особый интерес представляет работа Алперта и др. [11]. Среди современных книг, посвящен-

ных технике высокого вакуума, можно назвать переработанное издание классического руководства по вакуумной технике Дэшмана [12] и новую книгу Робертса и Вандерслайса [13].

На фиг. 7.8 показана схема типовой сверхвысоковакуумной установки; одна из таких установок была, в частности, использована для измерений пробоя в кислороде [8]. Изготовленный из меди резонатор соединен с остальной вакуумной установкой путем сварки металла со стеклом. Подключение резонатора к остальной СВЧ системе выполнялось множеством разных способов; наилучшим оказался способ, в котором используются маленькие стеклянные или кварцевые вводы, вставляемые на небольшое расстояние внутрь резонатора и позволяющие, с одной стороны, поддерживать в нем вакуум, а с другой, — вводить в резонатор регулируемую петлю связи. Использование металлических вакуумных клапанов и замена обычных охлаждаемых ловушек ловушками из медной фольги дает возможность прогревать в печи всю высоковакуумную часть установки. Этот способ намного лучше прежнего метода, основанного на использовании пламени; он существенно уменьшает время обезгаживания, кроме того, дает возможность достичь более полного обезгаживания и получить более чистую вакуумную установку. В таких установках сравнительно просто достигаются давления порядка  $10^{-10}$  тор. Если отключать насосы и использовать откачивающее действие ионизационного манометра типа Байарда — Алперта, а также применить специальное стекло, уменьшающее диффузию гелия из атмосферного воздуха, то величину давления в камере удастся понизить на два-три порядка. Описание конструкции отдельных частей установки, подобной изображенной на фиг. 7.8, можно найти в цитированной литературе.

Ловушки из медной фольги имеют большие преимущества перед обычными ловушками, но их необходимо периодически обновлять путем отжига, который следует производить тем чаще, чем больше установка. Бионди [15] предлагает заменить медные ловушки ловушками из цеолита или других материалов с ситообразной молекулярной структурой. Такого рода материалы широко использовались для подобных целей; в настоящее время доступно множество различных их видов. Благодаря применению этих материалов удалось даже сконструировать вакуумные установки вообще без жидкостных насосов [16]. Форвакуум обеспечивался сорбционными, а высокий вакуум — ионизационными насосами. Этим способом легко достигаются давления  $10^{-10}$  тор.

При использовании высоковакуумных установок в исследованиях с аргоном, ксеноном или криптоном одна из основных трудностей состоит в измерении давления. Разумеется, измерение низких давлений порядка  $10^{-10}$  тор, до которых установка откачивается вначале, не представляет трудности, так как точное значение его



Ф и г. 7.8. Схема высоковакуумной системы,

не критично и манометры Байарда — Алперта работают хорошо. Точному измерению подлежат давления в исследуемом газе, а они обычно находятся в диапазоне от  $0,01 \text{ тор}$  до давления, близкого к атмосферному. Манометры Мак-Леода можно использовать в установках с ловушками, охлаждаемыми жидким азотом. В этом случае исследуемый газ практически не загрязняется парами ртути. Если ловушки с жидким азотом отсутствуют, то ртуть необходимо устранить из установки. В литературе описано большое число приборов для измерения давления, в которых не используется ртуть. Многие из них были испробованы. Оказалось, что наиболее практичны манометры с накаленной нитью. Манометр с накаленной нитью типа манометра Пирани очень неудобен из-за дрейфа нуля. При исследованиях пробы в ксеноне и криптоне оказалось необходимым отключать манометр перед началом измерений и после каждой серии измерений и калибровать его заново в другой вакуумной установке при помощи манометра Мак-Леода. Хотя этот способ очень неудобен и требует большого количества стеклодувных работ, результаты Брэдфорда и др. [14] показывают целесообразность подобных методов и позволяют оценить влияние загрязнения ртутью при недостаточной изоляции от манометра Мак-Леода.

Сложность установок, содержащих газ в вакуумной системе, зависит от того, какой именно газ исследуется. Поэтому, хотя жидкие ловушки оказались неудовлетворительными в экспериментах с ксеноном и криптоном, при исследованиях воздуха и атмосферных газов можно использовать жидкий аргон для изоляции ртутных манометров от измерительных установок. При этом исключается сколько-нибудь заметное влияние загрязнений при измерениях пробы. Было найдено, что при использовании сложной техники, при которой в системе полностью отсутствовала ртуть и начальное давление перед измерениями составляло  $10^{-10} \text{ тор}$ , результаты не отличались от полученных в установке с ртутными манометрами, которые изолировались от резонатора при помощи двух ловушек с жидким аргоном. Большое преимущество ловушек с жидким аргоном и манометров Мак-Леода состоит в том, что они позволяют значительно сэкономить время и усилия, которые приходится затрачивать на калибровку манометров с накаленной нитью.

Обычно газы вводятся в установку из однолитровых баллонов, где их давление составляет  $1 \text{ атм}$ , с помощью разбивающихся стеклянных наконечников. Чистота газов обычно указывается фирмами, их поставляющими. Большей частью использовались химически чистые газы, однако, к сожалению, при проведении более ранних исследований масс-спектрометрический анализ, как правило, не производился и процентное содержание примесей менялось от одного газа к другому. Ксенон и криптон, вероятно, труднее всего достать в очень чистом виде, и при проведении измерений в этих

газах примеси всегда контролировались масс-спектрометрически. При этих исследованиях проба газа бралась из резонатора и подвергалась анализу в процессе измерения. Таким образом контролируется содержание примесей — как тех, которые вносит вакуумная установка, так и тех, которые имелись в исходном газе. Кривые на фиг. 5.11 и 5.12 обозначены как «чистый ксенон» и «чистый криптон» с учетом этих данных. В результате нескольких опытов найдено, что наибольшее количество примесей в криптоне составляло:

$$\begin{aligned} \text{O}_2 &\text{ меньше } 5 \cdot 10^{-5}, \\ \text{H}_2\text{O} &\text{ меньше } 5 \cdot 10^{-4}, \\ \text{N}_2 &\text{ меньше } 5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Для ксенона наихудшие результаты в нескольких опытах были:

$$\begin{aligned} \text{N}_2 &\text{ меньше } 3 \cdot 10^{-4}, \\ \text{H}_2\text{O} &\text{ меньше } 5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Ни в одной пробе не было обнаружено никаких других примесей, кроме слабых следов аргона и криптона в отдельных образцах ксенона, причем количество этих примесей лежало ниже предела чувствительности масс-спектроскопического метода.

Хотя в отдельных случаях действительное количество примесей и неизвестно, по-видимому, можно считать, что все данные, приведенные в этой книге, получены при малом содержании примесей и что они не оказывали заметного влияния на результаты измерений пробоя, за исключением особо оговоренных случаев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Heald M. A., Wharton C. B., Plasma Diagnostics with Microwaves, New York, 1965. (Имеется перевод: М. Хилд, С. Уортон, Микроволновая диагностика плазмы, М., 1968.)
2. Harvey R. F., Microwave Engineering, London, New York, 1963.
3. The Radiation Laboratory Series (32 volumes), New York, 1947—1949.
4. Slater J. C., Microwave Electronics, Princeton, N. J., 1950.
5. Brown S. C., Rose D. J., Journ. Appl. Phys., **23**, 711 (1952).
6. Rose D. J., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., **23**, 719 (1952).
7. Slater J. C., Rev. Mod. Phys., **18**, 488 (1946).
8. MacDonald A. D., Gaskell D. U., Gitterman H. N., Phys. Rev., **130**, 1841 (1963).
9. Herlin M. A., Brown S. C., Phys. Rev., **74**, 291 (1948).
10. MacDonald A. D., Brown S. C., Phys. Rev., **76**, 411 (1949).
11. Alpert D., Journ. Appl. Phys., **24**, 7, 860 (1953).
12. Dushman S., Scientific Foundations of Vacuum Technique, 2nd ed., New York, 1962. (Имеется перевод: С. Дэшман, Научные основы вакуумной техники, изд-во «Мир», 1964.)
13. Roberts R. W., Vanderslice T. A., Ultrahigh Vacuum and Its Applications, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
14. Bradford H. M., Fraser D. M., Langstroth G. F. O., MacDonald A. D., Canad. Journ. Phys., **37**, 116 (1959).
15. Biondi M. A., Rev. Sci. Inst., **30**, 831 (1959).
16. Redhead P. A., Kornelson E. V., Hobson J. P., Canad. Journ. Phys., **40**, 1814 (1962).

## Пробой в атмосфере

Неудивительно, что в первых исследованиях пробоя в газах: использовался воздух. Это относится как к исследованиям пробоя в постоянных полях, проводившимся много лет назад, так и к первым надежным результатам по высокочастотному пробую, полученным Херлином и Брауном [1] в 1948 г. Воздух — очень неудобный материал при исследованиях пробоя в постоянных полях из-за коррозии электродов; кроме того, когда воздух ионизован, на металлических электродах происходят много сложных химических и физических процессов. Вследствие этого большинство полученных ранее надежных результатов по пробую на низких частотах относится в основном к инертным газам, а не к воздуху. После работы Херлина и Брауна исследования пробоя в СВЧ диапазоне также стали в основном производиться на инертных газах и водороде, но по причинам скорее теоретического, чем экспериментального характера.

Как было отмечено в предыдущих главах, характер зависимости частоты столкновений от энергии электронов в гелии и водороде таков, что теоретический анализ для этих газов проводится легче, чем для воздуха. Поэтому в течение длительного времени большинство данных по пробую было получено для инертных газов и водорода. Однако в последние годы вновь возник очень большой интерес к свойствам воздуха и входящих в его состав газов в поле СВЧ волн, так что сейчас существует весьма обширный экспериментальный материал, полученный в широком диапазоне экспериментальных условий.

Интерес к пробую в воздухе обусловлен главным образом проблемами связи с космическими кораблями. Настоящая глава должна дать возможность ответить на вопрос: при какой мощности или при какой величине поля произойдет пробой в воздухе на больших высотах? Ответ на этот вопрос должен быть дан для различных частот и разнообразных пространственных условий, в частности при изменении объема воздуха от весьма ограниченных до относительно больших значений.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

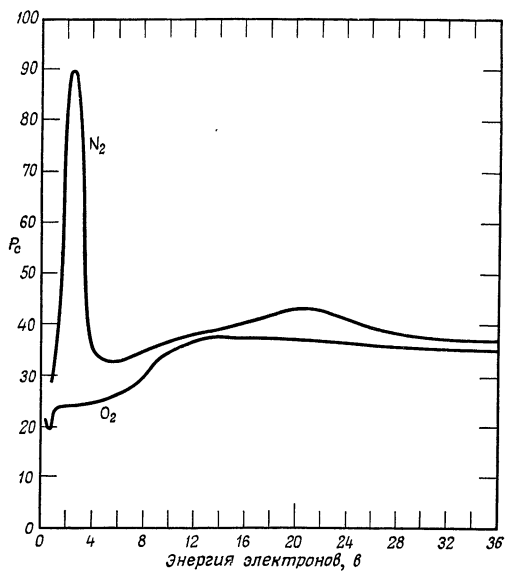
На фиг. 8.1 показаны кривые зависимости вероятности столкновений  $P_c$  электронов с молекулами азота и кислорода от энергии электронов. Данные взяты в основном из работы Брода [2], хотя кривая для азота модифицирована в соответствии с расчетами Фроста и Фелпса [3]. Если эти вероятности скомбинировать в отношении 4 : 1 соответственно для азота и кислорода, то полученная величина будет представлять собой вероятность столкновений для воздуха; используя эти результаты, можно рассчитать зависимость частоты столкновений  $\nu_c$  от энергии электронов для воздуха. Результаты этих расчетов показаны на фиг. 8.2. Величину  $\nu_c$ , очевидно, нельзя описать с помощью достаточно простой аналитической зависимости, которую можно было бы подставить в уравнение Больцмана, что позволило бы нам, решив дифференциальное уравнение для функции распределения, рассчитать пробойные поля.

Во многих опубликованных работах предполагается, что частота столкновений не зависит от энергии, однако, как видно из фиг. 8.2, это предположение следует применять с большой осторожностью. Однако при некоторых обстоятельствах использование предположения о постоянстве частоты столкновений или о постоянстве средней длины свободного пробега оказывается очень полезным. Мы не будем здесь пытаться дать анализ условий пробоя, основанный на уравнении Больцмана, а просто приведем экспериментальные данные, полученные в очень широком диапазоне экспериментальных параметров. В нашем изложении будет содержаться также феноменологическая теория, основанная на экспериментальных данных, а не на микроскопической теории.

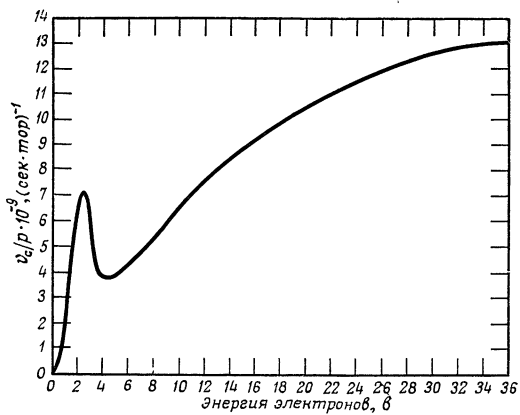
В настоящее время имеется большое количество данных, относящихся к воздуху, а также к кислороду и азоту. Если мы ограничимся рассмотрением таких работ, в которых диффузионная длина хорошо известна и электрическое поле существенно однородно, то в нашем распоряжении будет диапазон частот от 200 *Мгц* до 10 *Гц* для генераторов, работающих в непрерывном режиме, и от 1 до 24 *Гц* для импульсных генераторов, а также значительный диапазон диффузионных длин и давлений. Эти диапазоны частот, диффузионных длин, давлений и высот приведены в табл. 8.1, относящейся к пробую в воздухе в непрерывном режиме работы СВЧ генераторов.

Кроме того, имеются результаты Гулда и Робертса по импульсному пробую на частоте 2,8 *Гц* и результаты Мак-Доналда, Гаскелла и Гиттермана по импульсному пробую на частотах 0,99, 9,4 и 24 *Гц*. Длительность импульса и частота повторений менялись в этих работах достаточно широко. Данных для азота и кислорода имеется меньше, однако как Роуз и Браун, так и Мак-Доналд,





Ф и г. 8.1. Вероятность столкновения электронов в азоте и кислороде



Ф и г. 8.2. Частота столкновений электронов в воздухе.

Гаскелл и Гиттерман изучали пробой в этих газах при тех же значениях параметров эксперимента, которые приведены в табл. 8.1 для воздуха.

Таблица 8.1

**Пробой в воздухе в непрерывном режиме работы СВЧ генераторов**

Л, см	Частота, Гц	Давление, тор	Высота, км	Литература
0,02—0,1	3,13	0,1—60	20—60	[1]
0,21	2,85	0,2—80	18—55	[4]
0,21	2,8	7—100	15—32	[5]
0,02—0,03	0,20	50—1000	0—20	[6]
0,10—1,3	9,4	0,2—100	15—55	[7]
0,6—2,6	0,99	0,1—100	15—60	[7]

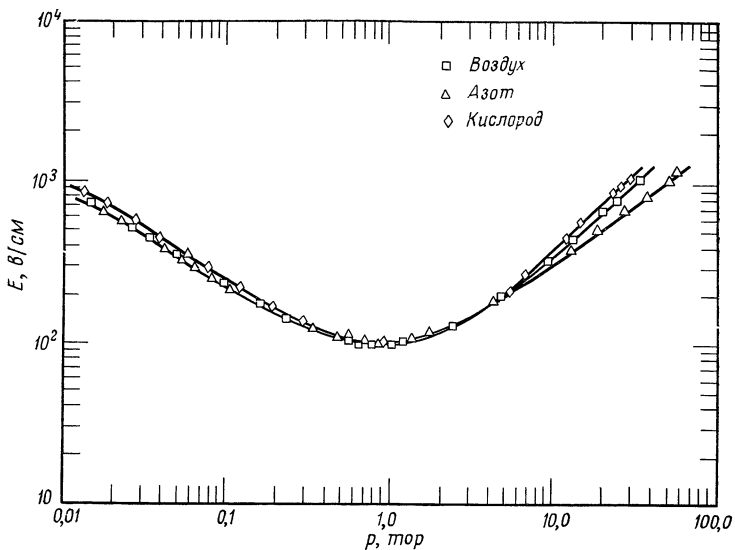
**Данные по пробую в непрерывном режиме**

В настоящее время имеются многочисленные данные по пробую в воздухе, кислороде и азоте в непрерывном режиме работы генераторов <sup>1)</sup>. Типичные результаты приведены на фиг. 8.3 и 8.4. Они относятся соответственно к частотам 992 Мгц и 9,4 Гц.

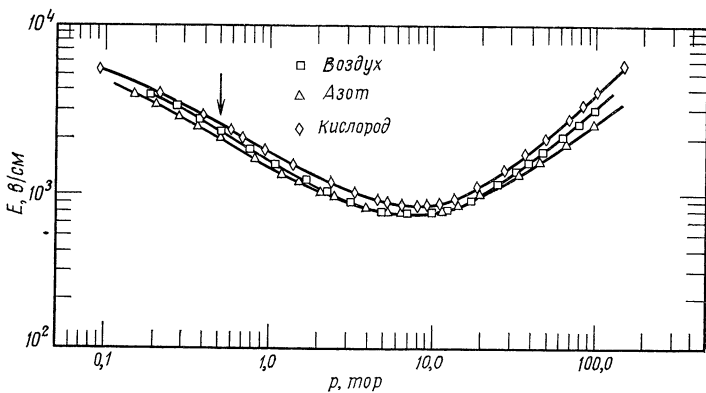
Эти результаты были получены в резонаторах, сделанных из покрытой родием обескислороженной высокопроводящей меди и с использованием современной вакуумной техники, описанной в гл. 7. Были проделаны многочисленные опыты, чтобы выяснить, нужна ли для изучения пробоя в воздухе сверхвысоковакуумная техника. Было обнаружено, что пробойные поля в воздухе менее чувствительны к загрязнению примесями, чем в некоторых других газах. Это позволило, не оказывая влияния на пробойные поля, применять для измерения давления ртутный манометр Мак-Леода, изолированный ловушкой с жидким аргонном. Поэтому оказалось возможным использовать данные, полученные ранее на частотах порядка 3 Гц в экспериментах, в которых требования к вакууму были менее строги. Оказалось, что после каждого пробоя необходимо менять воздух в системе. В противном случае, как показали Роуз и Браун [4], продукты ионизации, образовавшиеся при пробое, уменьшают значения пробойного поля при последующем пробое на 10%.

Точность измерений электрического поля в опытах, результаты которых приведены на фиг. 8.3 и 8.4, составляет около 1%, воспроизводимость результатов от одной серии опытов к другой лучше чем 0,5%. Давление измерялось с точностью 1%.

<sup>1)</sup> Подробнее см. приложение.

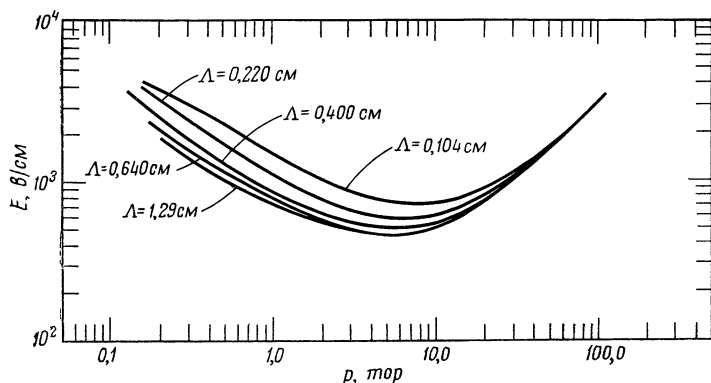


Ф и г. 8.3. Пробой в непрерывном режиме в воздухе, кислороде и азоте на частоте 992 Мгц при  $\Lambda = 0,631$  см.



Ф и г. 8.4. Пробой в непрерывном режиме в воздухе, азоте и кислороде на частоте 9,4 Ггц при  $\Lambda = 0,103$  см.

В воздухе было проделано больше измерений по пробой, чем в различных газах, входящих в его состав. Получено достаточное



Ф и г. 8.5. Пробой в непрерывном режиме в воздухе на частоте 9,4 Гц в резонаторах с различными характерными диффузионными длинами.

количество данных для того, чтобы сравнить пробойные поля в резонаторах пяти различных размеров, имеющих резонансную частоту 9,4 Гц. Эти данные приведены на фиг. 8.5.

### Результаты исследования пробоя в импульсном режиме работы СВЧ генераторов

Измерения пробойных полей в импульсном режиме требуют несколько иной техники, чем измерения в непрерывном режиме. Интерпретируются они также несколько иначе. Однако полезно обсудить здесь все экспериментальные результаты по пробой, включая результаты по импульсным полям.

Анализируя пробой в непрерывном режиме, мы предполагали, что ионизируемый газ находится в стационарном состоянии, и считали, что при проведении измерений скорость ионизации следует за квазистационарно возрастающей амплитудой электрического поля, которая постепенно увеличивается до тех пор, пока рождение новых электронов не начнет слегка превосходить их потери. Затем происходит быстрое увеличение плотности электронов и пробой. При импульсном характере СВЧ электрического поля пробой не происходит, если плотность электронов не достигает критической величины до окончания импульса. Поэтому следует ожидать, что при импульсном режиме работы генераторов СВЧ пробойные поля должны быть выше, чем при непрерывном, и что пробойное поле должно зависеть от длительности и частоты повторения импульсов.

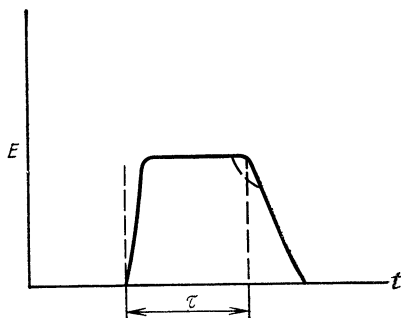
Очевидно также, что полный анализ пробоя в импульсном режиме несколько более сложен, чем в непрерывном режиме, так как следует принимать во внимание скорость роста ионизации. Однако и без полного анализа ясно, что для очень коротких импульсов пробойные поля должны быть чрезвычайно велики и что по мере увеличения длительности импульса величина пробойного поля будет приближаться к его значению в непрерывном режиме СВЧ генераторов.

Идеализированная форма импульса представлена на фиг. 8.6, где показано изменение во времени амплитуды поля в резонаторе; обычно задний фронт импульса длиннее, чем передний. Нетрудно понять, что при постепенном увеличении частоты повторения импульсов напряженность поля, необходимая для пробоя, уменьшается, пока наконец при очень больших частотах повторения она не станет почти равной полю пробоя в непрерывном режиме.

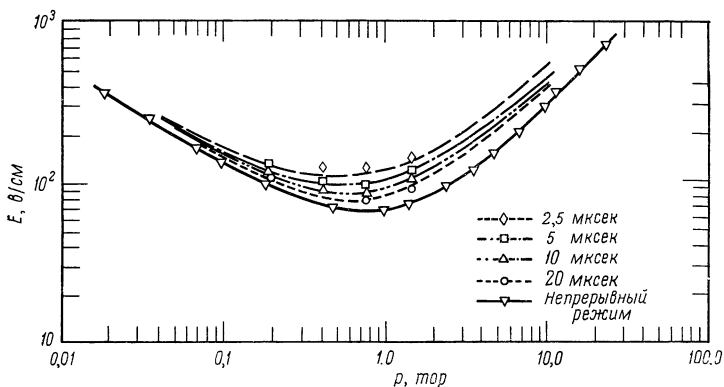
При импульсной работе генератора труднее найти точный критерий для определения начала пробоя. В большинстве рассматриваемых нами работ принимается, что пробой имеет место, если плотность электронов в резонаторе достигает такой величины, при которой за какое-то время (обычно 5% от длительности импульса) до окончания импульса в резонаторе образуется непрозрачная плазма. Свидетельством того, что в резонаторе образовалась непрозрачная плазма, является резкое уменьшение энергии, проходящей через резонатор. Если форму импульса наблюдать на осциллографе, то такое резкое уменьшение проходящей энергии проявляется как выемка на импульсе, что изображено пунктиром на фиг. 8.6.

На фиг. 8.7 показаны импульсные пробойные поля в воздухе на частоте 994 Мгц в резонаторе с характерной диффузионной длиной 1,51 см. Наряду с экспериментальными точками, полученными при различных давлениях, здесь приведены также результаты расчетов, основанных на теории, развитой ниже. Общий характер кривых типичен для импульсного пробоя на всех частотах СВЧ диапазона, хотя при более высоких частотах обычно используется меньшая длительность импульса. Данные для других частот и длительностей импульса приведены в приложении.

Для частот выше 10 Ггц данные по пробую в непрерывном режиме, по-видимому, отсутствуют, тогда как в импульсном режиме

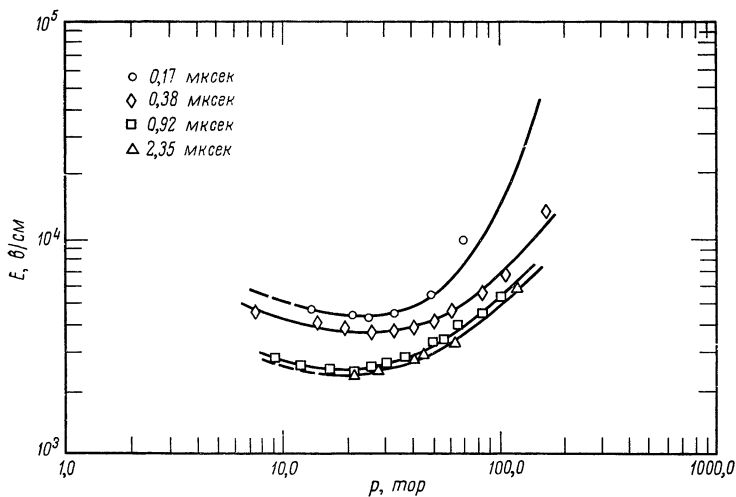


Ф и г. 8.6. Типичная форма импульса (пунктирная выемка в конце импульса указывает на пробой).

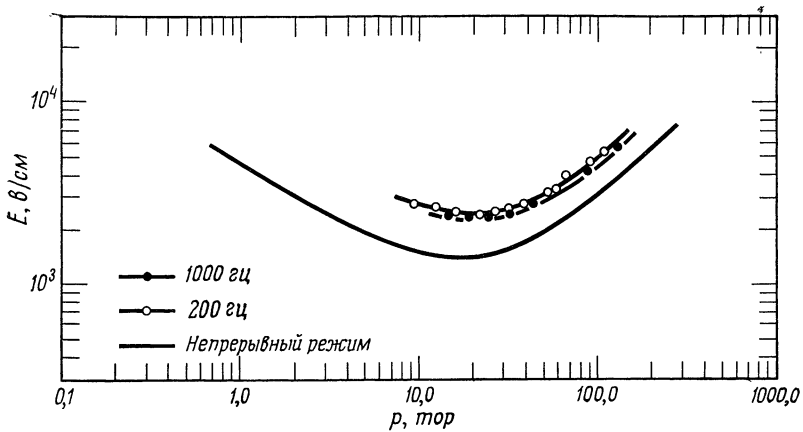


Ф и г. 8.7. Импульсный пробой в воздухе на частоте 994 Мгц при  $\Lambda = 1,51$  см и различных длительностях импульса.

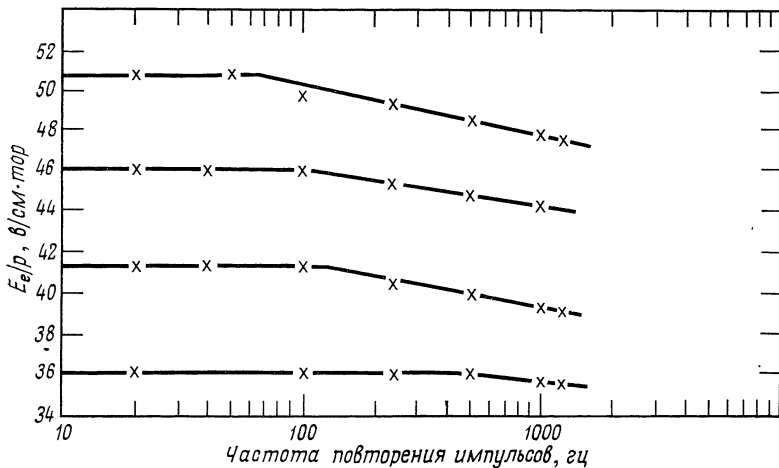
Частота повторения импульсов 1000 гц, пунктиром показаны теоретические кривые, точки — экспериментальные данные.



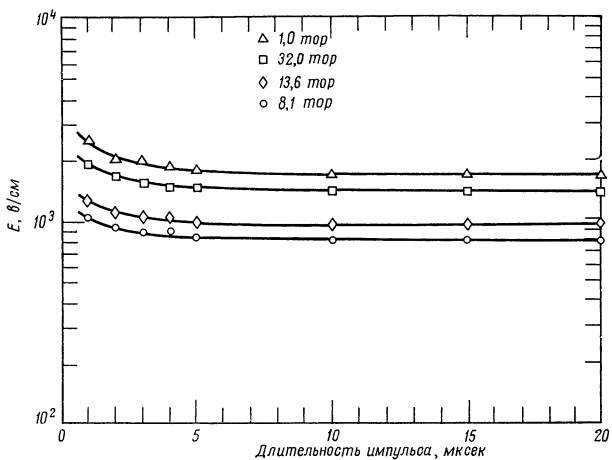
Ф и г. 8.8. Импульсный пробой в воздухе на частоте 24,1 Ггц при  $\Lambda = 0,09$  см, длительности импульса от 0,17 до 2,35 мксек и частоте повторения импульсов 200 гц.



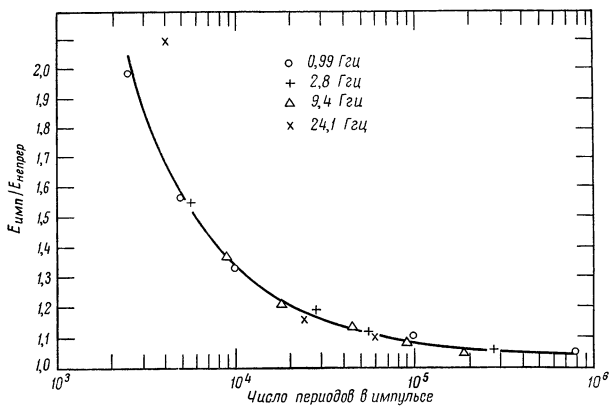
Ф и г. 8.9. Импульсный пробой в воздухе на частоте 24,1 Гц при  $\Lambda = 0,09$  см при двух частотах повторения импульсов длительностью 0,92 мксек. Приведены также пробойные поля для непрерывного режима, рассчитанные на основании теории.



Ф и г. 8.10. Влияние частоты повторения импульсов на пробой в воздухе при частоте 2,8 Гц, длительности импульса 0,8 мксек и  $\Lambda = 0,202$  см.



Ф и г. 8.11. Зависимость пробойного поля в воздухе от длительности импульса при различных давлениях, частоте 9,3 Гц,  $\Lambda = 0,10$  см и частоте повторения импульсов 1000 гц.



Ф и г. 8.12. Зависимость отношения пробойного поля в импульсном режиме к пробойному полю в непрерывном режиме от числа периодов в импульсе при давлениях, близких к минимуму пробойных кривых.

Частота изменялась от 0,99 до 24,1 Гц.



имеются измерения на частоте 24,1 Гц. Эти результаты показаны на фиг. 8.8 (характерная диффузионная длина равна 0,09 см, длительность импульса менялась от 0,17 до 2,35 мксек, а частота повторений составляла 200 гц).

Влияние на пробой частоты повторений показано на фиг. 8.9, где приведена также величина пробойного поля для непрерывного режима, полученная на основании теории, развитой ниже.

Влияние частоты повторений на пробой отмечено также в исследовании Гулда и Робертса, работавших на более низкой частоте 2,8 Гц; их результаты показаны на фиг. 8.10.

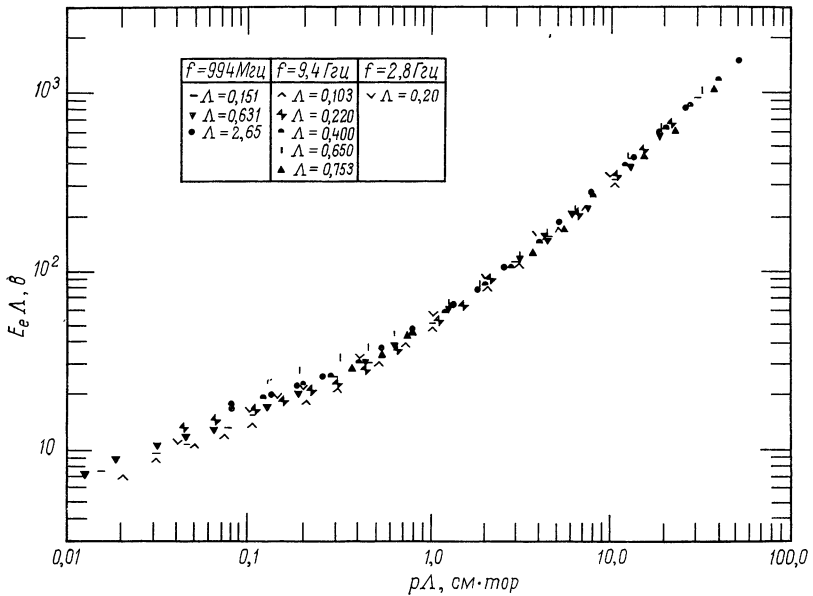
Если частота повторений фиксирована, пробойные поля при данной частоте зависят от длительности импульса. На фиг. 8.11 эта зависимость показана для частоты 9,3 Гц. Кривые для других частот выглядят аналогично, с той лишь разницей, что меняется масштаб по оси абсцисс. На всех частотах при достаточно больших длительностях импульсов пробойные поля приближаются к значениям для непрерывного режима. Рассмотрение результатов экспериментов показывает, что на более высоких частотах пробойные поля достигают значения, соответствующего непрерывному режиму, при гораздо меньшей длительности импульса, чем на более низких частотах. Фактически из этого рассмотрения следует, что определяющим фактором в развитии импульсного пробоя является число периодов поля, протекших с момента включения импульса. Это ясно видно из фиг. 8.12, где импульсное пробойное поле в воздухе представлено как функция числа периодов в импульсе при частотах, изменяющихся от 0,99 до 24,1 Гц.

### Обсуждение результатов экспериментов

Если частота столкновений электронов с атомами не зависит от энергии электронов, то можно очень экономно представить все данные с помощью понятия эффективного поля  $E_e^2 = E^2 / (1 + \omega^2 / \nu_c^2)$ . Вводя это понятие, мы фактически учитываем изменение частоты и таким образом сводим задачу с тремя независимыми переменными к задаче с двумя переменными, как это отмечено в гл. 1. Если явление может быть адекватно описано с помощью двух переменных, то все данные можно представить с помощью одной линии на двумерном графике, где по оси ординат откладывается, например, величина  $E_e \Delta$ , а по оси абсцисс — величина  $p \Delta$ .

На фиг. 8.13 именно таким способом представлены все данные по пробой в непрерывном режиме. При этом необходимо выбрать какое-либо определенное значение частоты столкновений; на фиг. 8.13 взята величина  $\nu_c = 5,3 \cdot 10^9$  р. При такой частоте столкновений разброс данных относительно некоторой одной кривой не больше, чем при других предлагавшихся значениях. Из фиг. 8.13

можно сделать вывод, что при очень больших значениях  $p\Lambda$  использование представления об эффективном поле дает достаточно хорошие результаты. Однако отсюда еще нельзя сделать окончательный вывод, ибо при очень больших  $p\Lambda$  давление обычно велико, откуда следует, что  $E_e$  совпадает с  $E$ . Если  $E_e$  и  $E$  одинаковы, основным механизмом потерь энергии являются упругие столкновения, которые практически почти не зависят от частоты. Для меньших значений  $p\Lambda$  разброс в значениях  $E_e\Lambda$  довольно заметен и в левой части



Ф и г. 8.13. Зависимость  $E_e\Lambda$  от  $p\Lambda$  для различных резонаторов. Значения  $\Lambda$  выражены в сантиметрах.

фиг. 8.13 может достигать 500%. Поэтому ясно, что в тех случаях, когда значение  $p\Lambda$  мало, такой простой подход к проблеме нельзя считать достаточно хорошим.

Важно отметить, что при изучении пробоя на больших высотах наибольший интерес представляет как раз левая часть графика, т. е. область малых значений  $p\Lambda$ . На первый взгляд может показаться, что, несмотря на очень низкие давления, значения  $\Lambda$  и даже  $p\Lambda$  могут быть велики за счет больших объемов. Однако это не так. Анализ, проведенный в гл. 6, показывает, что при высоких частотах

тах изменение электрического поля ведет к ионизационным явлениям, при которых эффективная характерная диффузионная длина гораздо меньше величины  $\Lambda$ , полученной из геометрических соображений. Детальный анализ показывает, что эффективная характерная диффузионная длина обычно не может превышать величину, примерно равную длине волны высокочастотного поля, или в крайнем случае имеет такой порядок величины. Таким образом, область малых значений  $\rho\Lambda$  на фиг. 8.13, где концепция эффективного поля приводит к неправильным результатам, имеет особый практический интерес.

В зависимости от значений  $\Lambda$  и  $\lambda$  представляющие интерес результаты в области больших значений  $\rho\Lambda$  могут с достаточной точностью описываться с помощью одной кривой. Если, например,  $\rho\Lambda > 10 \text{ см} \cdot \text{тор}$ , то значение  $E_e/\rho$  примерно равно  $30 \text{ в/см} \cdot \text{тор}$ . К тому же, если  $\rho\lambda$  больше  $100 \text{ см} \cdot \text{тор}$ , то  $E$  и  $E_e$  примерно одинаковы и изменения частоты уже не играют роли. Однако область применимости данного приближения является довольно узкой, так что теперь мы перейдем к рассмотрению двух других представлений, различие между которыми состоит в роли, отводимой концепции эффективного поля.

#### РАСЧЕТ ПРОБОЯ В СЛУЧАЕ, КОГДА ИЗВЕСТНА СКОРОСТЬ ПРИЛИПАНИЯ

Браун [8], Роуз и Браун [4], а также Гулд и Робертс [5] проанализировали условия высокочастотного пробоя в воздухе, принимая во внимание вероятность прилипания электронов и первый ионизационный коэффициент Таунсенда. Их расчет основан на уравнении непрерывности для электронов, которое записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nu_i n - \nu_a n + D \nabla^2 n + S; \quad (8.1)$$

здесь  $\nu_i$  — частота ионизации,  $\nu_a$  — частота прилипания,  $D$  — коэффициент диффузии, а  $S$  — число электронов, появившихся в единицу времени в  $1 \text{ см}^3$  от внешних источников; последней величиной при анализе обычно пренебрегают, однако с ее помощью можно учесть начальную плотность  $n_0$  в момент времени  $t_0$ . Как было показано в гл. 2, скорость диффузионных потерь равна  $D/\Lambda^2$ , так что уравнение (8.1) приобретает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left( \nu_i - \nu_a - \frac{D}{\Lambda^2} \right) n = \gamma n, \quad (8.2)$$

где через  $\gamma$  мы обозначили коэффициент, определяющий суммарный инкремент изменения числа электронов. В этом приближении, которое является достаточно хорошим, уравнение имеет следующее

простое решение:

$$n = n_0 e^{\gamma t}. \quad (8.3)$$

Если рассматривается пробой в непрерывном режиме работы СВЧ генератора, то следует искать стационарное решение, т. е. положить производную  $\partial n / \partial t$  равной нулю, что приводит к условию

$$v_i = v_a + \frac{D}{\Lambda^2}. \quad (8.4)$$

Далее Браун вводит первый коэффициент ионизации Таунсенда  $\alpha$ , полагая

$$v_i = \alpha v = \alpha \mu_{ac} E_e, \quad (8.5)$$

где  $E_e$  — эффективное электрическое поле. Если  $v_c^2$  гораздо больше  $\omega^2$ , то  $E_e$  просто равно среднеквадратичному значению поля. Браун определял частоту столкновений из подвижности в переменном поле, которую он принимал равной

$$\mu_{ac} = \frac{(e/m) v_c}{v_c^2 + \omega^2}. \quad (8.6)$$

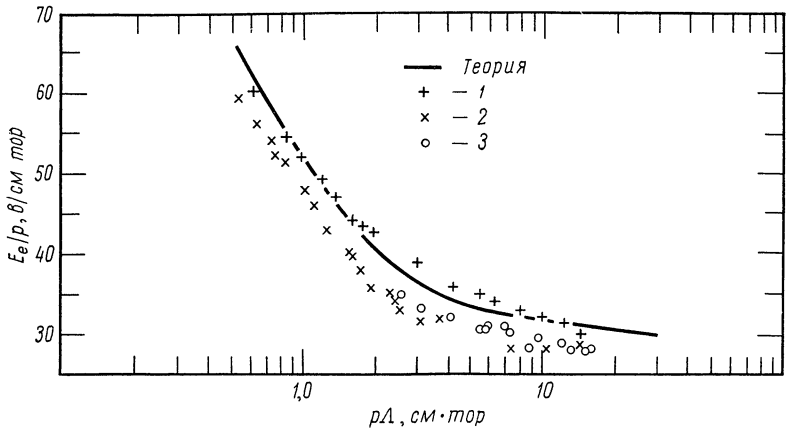
Если при этом использовать экспериментальные данные для подвижности, то частота столкновений оказывается равной  $4,3 \cdot 10^9 \rho$ . Частота прилипания  $v_a$  определяется из данных по количеству электронов, захваченных на пути в 1 см:  $\beta = v_a / \mu E_e$ . Коэффициент диффузии связан с подвижностью таким образом, что их отношение, усредненное по распределению скоростей, пропорционально средней энергии. Коэффициент пропорциональности имеет порядок единицы; например, в случае максвелловского распределения по скоростям он равен  $2/3$ . Отсюда следует, что соотношение (8.5) можно представить в виде

$$\alpha = \beta + \frac{2}{3} \frac{u_{cp}}{\Lambda^2 E_e}. \quad (8.7)$$

Иногда бывает удобно выразить это соотношение через другие переменные, разделив обе части на  $\rho$ :

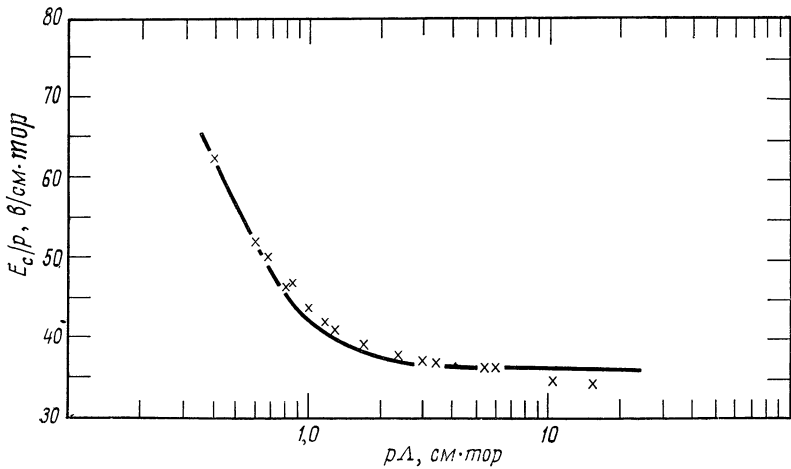
$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\beta}{\rho} + \frac{2}{3} \frac{u_{cp}}{(\rho \Lambda) (E_e \Lambda)}. \quad (8.8)$$

Используя данные опытов Гаррисона и Джебола [9] по определению зависимости  $\alpha/\rho$  и  $\beta/\rho$  от  $E/\rho$  и результаты выполненных Хили и Ридом (см. [8]) измерений средней энергии электронов, Роуз и Браун провели сравнение теоретических результатов, полученных с помощью формулы (8.8), с экспериментальными данными Херлина и Брауна, Пима и Роуза и Брауна. Эти результаты вместе с теоретической кривой показаны на фиг. 8.14. Данные Роуза и Брауна получены для «чистого» воздуха; т. е. соответствующие



Ф и г. 8.14. Сравнение теории пробоя, учитывающей прилипание, с результатами эксперимента для воздуха.

1 — данные Роуза и Брауна, 2,8 Гц; 2 — данные Херлина и Брауна, 3,1 Гц; 3 — данные Пима, 0,2 Гц; сплошная кривая — теоретическая. Данные Роуза и Брауна относятся к «чистому» воздуху.



Ф и г. 8.15. Сравнения теории пробоя, учитывающей прилипание, с результатами эксперимента для кислорода.

Сплошная кривая — теоретическая, крестики — данные Роуза и Брауна, 2,8 Гц.

эксперименты проводились так, что продукты реакции, образовавшиеся в предыдущем пробое, не влияли на последующий. На фиг. 8.15 кривая, полученная с помощью той же теории, сравнивается с результатами экспериментов на кислороде на частоте  $2,85 \text{ Гц}$ . Для величины  $v_c$  Браун использовал значение  $3,5 \cdot 10^9 \text{ р}$ . Как и для воздуха, эта величина была получена путем сравнения теоретического выражения для подвижности в переменном поле с экспериментальной величиной [11].

Значение  $v_c$ , используемое в излагаемой теории, заметно отличается, особенно для воздуха, от величин, применявшихся другими исследователями.

В диапазоне изменения переменных, показанном на фиг. 8.14 и 8.15, эксперимент хорошо согласуется с теорией. Следует, однако, отметить, что диапазон изменений  $E_e/p$  довольно мал и что эта величина отложена в линейном масштабе. Если кривую на фиг. 8.14 экстраполировать на порядок в сторону меньших значений  $p\Lambda$ , то для  $E_e/p$  получится значение 95. Однако если построить график в двойном логарифмическом масштабе и произвести ту же экстраполяцию, то для  $E_e/p$  получится вдвое большее значение. Из-за этой неопределенности теория имеет ограниченную ценность вне показанных на фигурах диапазонов изменения переменных.

### РАСЧЕТ ПРОБОЯ С УЧЕТОМ ПРИЛИПАНИЯ И ДИФФУЗИИ

Излагаемая ниже теория в известной степени использует понятие эффективного поля, однако она гораздо менее чувствительна к значению частоты столкновений, чем теория, рассмотренная выше. Эта теория удовлетворительно описывает все данные по пробоем в воздухе и позволяет довольно точно предсказывать пробойные поля как для непрерывного, так и для импульсного режима работы генераторов в широком диапазоне значений параметров эксперимента. Хотя соображения, развиваемые ниже, относятся главным образом к воздуху, где основными механизмами потерь электронов являются прилипание и диффузия, форма теории такова, что ее можно применять при любом механизме потерь. Однако следует отметить, что в отличие от теорий, изложенных в гл. 4 и 5, в ней не учитывается распределение электронов по скоростям.

**Коэффициент диффузии.** Электроны, образовавшиеся в воздухе при ионизации, исчезают из области ионизации в результате двух процессов — диффузии и прилипания. Рекомбинация сравнительно малосущественна, так как перед пробоем плотность электронов мала. Если обозначить, как и ранее, частоту прилипания через

$v_a$  и частоту ионизации через  $\nu_i$ , то можно написать следующее соотношение:

$$\nu_i = \nu_a + \frac{D}{\Lambda^2}, \quad (8.9)$$

где отношение коэффициента диффузии к квадрату характерной диффузионной длины есть скорость исчезновения электронов в результате диффузии к стенкам. Если нам известно значение коэффициента диффузии при всех условиях эксперимента, то суммарную частоту ионизации  $\nu_i - \nu_a$  можно определить непосредственно из экспериментальных данных по пробую. Однако мы не располагаем экспериментальными данными относительно величины коэффициента диффузии в воздухе при наличии сильного электрического поля. Величина коэффициента диффузии будет зависеть от электрического поля, давления и вида функции распределения электронов по скоростям. Так как коэффициент диффузии  $D$  равен  $\langle l(v/3) \rangle$ , или  $\langle v^2/3\nu_c \rangle$ , его всегда легко определить, если известна зависимость величины  $l$  или  $\nu_c$  от скорости, а также вид функции распределения электронов по скоростям. В этом случае коэффициент диффузии  $D$  определяется соотношением

$$D = \frac{\int_0^{\infty} f(v^2/3\nu_c) 4\pi v^2 dv}{\int_0^{\infty} f 4\pi v^2 dv}. \quad (8.10)$$

Если предположить, что распределение электронов по скоростям является максвелловским, то функция распределения  $f$  имеет вид  $f = e^{-3u/2u_0}$ , где  $u = mv^2/2e$ , а  $u_0$  есть средняя энергия электронов в вольтах. Если предположить далее, что частота столкновений  $\nu_c$  примерно постоянна, то интеграл в числителе выражения (8.10) можно представить в виде

$$\frac{4\pi}{3\nu_c} 2^{3/2} \left(\frac{e}{m}\right)^{5/2} \int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-3u/2u_0} du,$$

а интеграл в знаменателе — в виде

$$4\pi 2^{1/2} \left(\frac{e}{m}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-3u/2u_0} du.$$

Легко видеть, что эти интегралы берутся с помощью гамма-функций; в результате получается следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{2e}{3m} \frac{u_0}{\nu_c} = 2,2 \cdot 10^5 \frac{u_0}{p} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad (8.11)$$

здесь энергия  $u_0$  выражена в вольтах, а давление  $p$  — в торгах.

Если бы мы сделали предположение о постоянстве средней длины свободного пробега, т. е. считали бы, что  $v_c \sim u^{1/2}$ , то коэффициент диффузии  $D$  был бы пропорционален не  $u_0$ , а квадратному корню из  $u_0$ , и коэффициент пропорциональности также был бы другой. Из фиг. 8.2 следует, что это предположение является довольно разумным в диапазоне энергий, представляющем интерес с точки зрения пробоя, а именно 0—5 эв. С другой стороны, если считать, что средняя длина свободного пробега постоянна, то имеет смысл использовать функцию распределения Дрюйвестейна, которая отличается от максвелловской тем, что в показателе экспоненты стоит не  $u/u_0$ , а  $(u/u_0)^2$ , а также численным коэффициентом. При использовании функции распределения Дрюйвестейна расчеты проводятся довольно просто; при этом для коэффициента  $D$  получается несколько большее значение, чем при использовании распределения Максвелла, однако расхождение не превышает 10%. В тех случаях, когда имеются сомнения относительно вида функции распределения, часто используют среднее из этих двух значений.

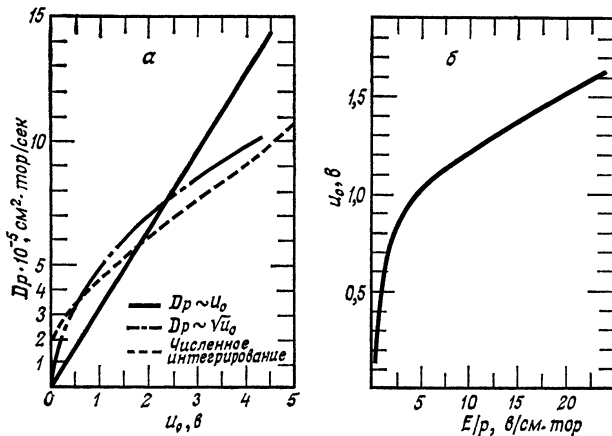
Величина  $D\rho$ , рассчитанная на основании максвелловского распределения скоростей в предположении о постоянстве средней длины свободного пробега, равна  $4,9 \cdot 10^5 u_0^{1/2}$ . Предыдущие исследователи [7, 12] пытались учесть другие возможности и использовали выражение

$$D\rho = 3,2 \cdot 10^5 u_0 \text{ см}^2 \cdot \text{тор/сек.} \quad (8.12)$$

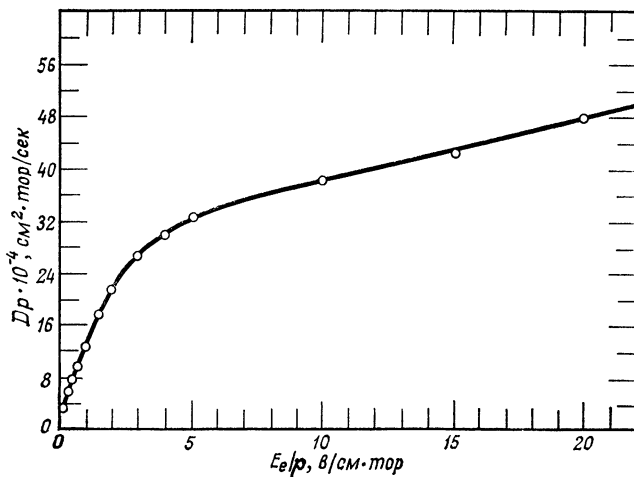
С помощью численного интегрирования выражения (8.12) можно учесть действительный вид функции  $v_c$ , однако при этом нужно сделать предположения относительно вида функции распределения. Результаты расчетов, основанных на предположении о максвелловском распределении скоростей, представлены на фиг. 8.16, где приводятся как кривые, полученные с помощью выражения (8.12), так и кривые, полученные с помощью предположения о постоянстве средней длины свободного пробега.

К счастью, использование различных приближений мало влияет на результат расчетов пробойных полей. Это видно из фиг. 8.16, б, где приведена взятая из работы Кромптона, Хаксли и Саттона [13] зависимость средней энергии электрона от величины  $E/\rho$ . Из графика видно, что при значениях  $E/\rho$ , превышающих несколько десятых  $\text{в/см} \cdot \text{тор}$ , средняя энергия очень слабо зависит от  $E/\rho$ . Отсюда следует, что использование трех различных видов зависимости  $D\rho$  от  $u_0$ , приведенных на фиг. 8.16, а, дает очень близкие результаты. Эти результаты мало отличаются и от результатов Мак-Доналда, Гаскелла и Гиттермана [7], основанных на аппрокси-





Ф и г. 8.16. Зависимость коэффициента диффузии от средней энергии электронов (а) и зависимость энергии электронов от  $E/p$  (б).



Ф и г. 8.17. Зависимость  $D_p$  от  $E_e/p$ , полученная на основании предположения о линейной зависимости  $D_p$  от  $u_0$  при использовании экспериментальной зависимости  $u_0$  от  $E/p$ .

мации следующего вида:

$$D\rho = \left(29 + \frac{0,9E_e}{p}\right) \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{тор/сек.} \quad (8.13)$$

Указанная зависимость представлена на фиг. 8.17, где величина  $E_e/p$  выражена в  $\text{в/см} \cdot \text{тор}$ . В (8.13) вместо  $E/p$  входит  $E_e/p$ ; это единственный случай в данном анализе, когда применяется понятие эффективного поля. Здесь разумно это сделать, поскольку именно эффективное поле определяет передачу энергии от поля к частицам, тогда как средняя энергия электронов определяет диффузионные потоки.

Средняя энергия  $u_0$  была измерена при значениях  $E/p$  вплоть до  $22 \text{ в/см} \cdot \text{тор}$ . В дальнейшем мы экстраполируем выражение (8.13) к несколько более высоким значениям  $E/p$ . Однако следует отметить, что величина  $D\rho$  слабо зависит от  $E_e/p$  в соответствии с относительной величиной членов 29 и  $0,9 (E_e/p)$ . По этой причине введение аппроксимации вида (8.13) не так сильно влияет на результаты, как может показаться вначале.

**Пробой в непрерывном режиме работы СВЧ генератора.** При пробое соблюдается условие  $\nu_i - \nu_a = D/\Lambda^2$ . Используя величину  $D$ , определяемую соотношением (8.13), мы можем рассчитать серию кривых зависимости суммарной ионизации  $\nu_i - \nu_a$  от  $\rho\lambda$  для различных значений  $E\lambda$ .

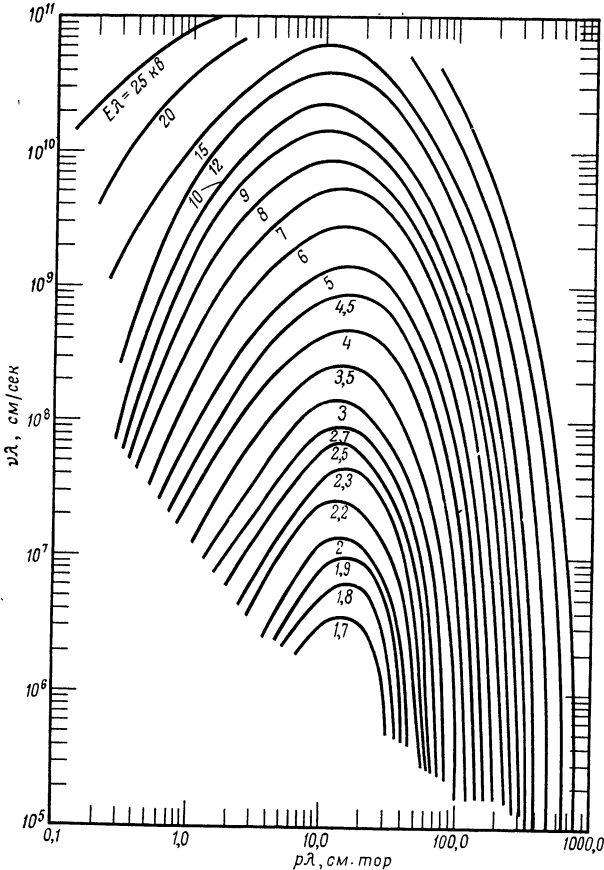
Мы проделаем эти расчеты, используя данные по пробую следующим образом. Для каждого значения пробойного электрического поля  $E$ , определенного при данном значении давления  $p$ , рассчитаем по кривой зависимости  $E$  от  $p$  при пробое высокочастотный коэффициент ионизации  $\zeta$ . Этот коэффициент равен  $1/\Lambda^2 E^2$ , но одновременно он равен  $\nu/DE^2$ , так как мы рассматриваем условия при пробое. Умножая  $\nu/DE^2$  на  $E^2/p^2$ ,  $\rho\lambda$  и  $D\rho$ , получаем в результате  $\nu\lambda$ . Таким образом, из экспериментальных данных по пробую можно найти величину  $\nu\lambda$  как функцию  $\rho\lambda$  при разных значениях параметра  $E\lambda$ . Эта функциональная зависимость представлена на фиг. 8.18. При пробое выполняется условие  $\nu_i = D/\Lambda^2$ , поэтому для того, чтобы получить единственное условие пробоя, нужно иметь еще одно уравнение для  $D$ . В качестве такого уравнения мы используем соотношение (8.13) для  $D\rho$ . При этом эффективное поле  $E_e$  будем рассматривать как функцию  $\rho\lambda$ , перейдя от переменной  $\nu_e/\omega$  к переменной  $\rho\lambda$ . Умножив  $D\rho$  на  $(\lambda/\Lambda)^2$  и разделив на  $\rho\lambda$ , получим соотношение

$$\frac{D\lambda}{\Lambda^2} = 10^4 \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2 S, \quad (8.14)$$

где  $S$  можно найти, подставляя (8.13) в (8.14) и учитывая зависимость  $E_e$  от  $\rho\lambda$ :

$$S = \frac{1}{\rho\lambda} \left\{ 29 + 0,9 \frac{E\lambda}{[(\rho\lambda)^2 + (35,6)^2]^{1/2}} \right\}. \quad (8.15)$$

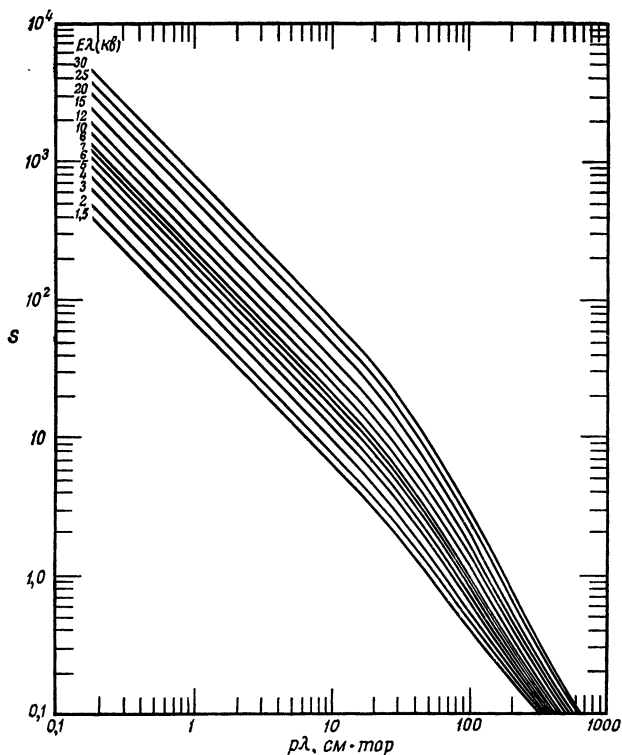
На фиг. 8.19 величина  $S$  представлена как функция  $\rho\lambda$  для различных значений параметра  $E\lambda$ .



Ф и г. 8.18. Кривые зависимости произведения  $v\lambda$  от  $\rho\lambda$  при фиксированных значениях  $E\lambda$  для воздуха.

Итак, мы имеем теперь серию кривых, показывающих поведение суммарной скорости ионизации, умноженной на длину волны, в очень широком диапазоне экспериментальных условий. Кроме того, мы имеем другую серию кривых, показывающих поведение

функции  $\lambda D/\Lambda^2$ , деленной на множитель  $10^4 (\lambda/\Lambda)^2$ . При пробое эти величины равны. Для удобства вторую серию кривых можно нанести на прозрачную бумагу, которую затем следует наложить на первую серию кривых таким образом, чтобы точка на оси ординат, где  $S = 1$ , совпала с точкой на оси абсцисс, где  $\nu\lambda = 10^4 (\lambda/\Lambda)^2$ . При этом точки пересечения кривых с одинаковыми

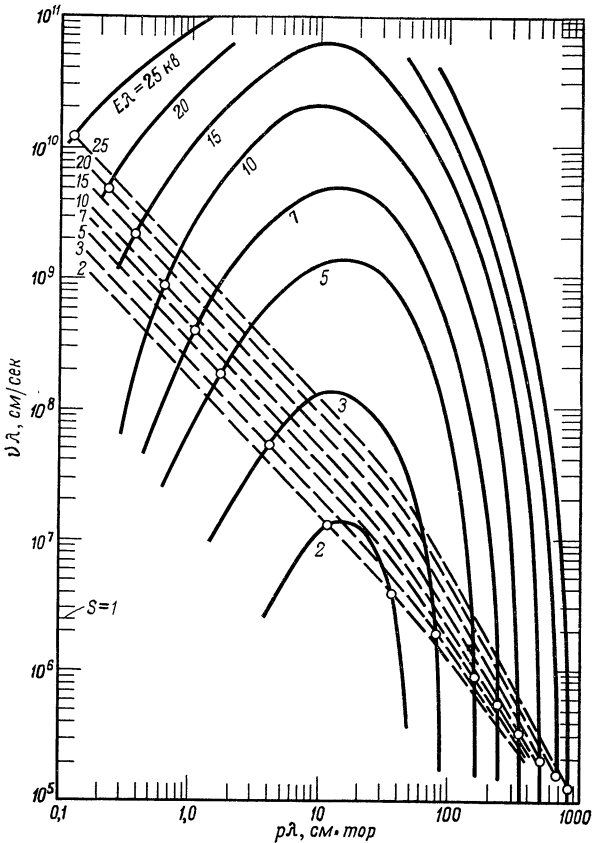


Ф и г. 8.19. Кривые зависимости величины  $S$  от  $r\lambda$  при фиксированных значениях  $E\lambda$  для воздуха.

Величина  $S$  определяется соотношением (8.15), связь между  $D$  и  $S$  — соотношением (8.14).

значениями параметра  $E\lambda$  дают условие пробоя. Пример такого наложения двух серий кривых показан на фиг. 8.20. Очевидно, что с помощью фиг. 8.20 мы можем получить целый ряд значений  $E\lambda$  и  $r\lambda$  для заданных условий эксперимента. Так как длина волны и диффузионная длина с самого начала предполагаются известными, отсюда легко можно получить график зависимости пробойного электрического поля от давления. При построении кривых на фиг. 8.18

и 8.19 использовались все известные автору данные по СВЧ пробой в воздухе (в основном это данные Мак-Доналда, Гаскелла и Гиттермана).



Ф и г. 8.20. Пример использования фиг. 8.18 и 8.19 для расчета пробойных полей.

$\Lambda = 0,22$  см,  $\lambda = 3,19$  см, так что значению  $S = 1$  соответствует  $10^4 (\lambda/\Lambda)^2 = 2,1 \cdot 10^6$ . Величина  $S$  определяется соотношением (8.15). Точки соответствуют пробойю.

**Импульсный пробой.** Изложенная выше теория пробоя в воздухе имеет существенное преимущество перед другими теориями, состоящее в том, что фиг. 8.18 может быть использована для расчетов импульсного пробоя. Чтобы понять, как это делается, рассмотрим более внимательно процессы, происходящие в газе, когда к нему приложено высокочастотное поле, состоящее из регулярно повторяю-

щихся импульсов. При этом электроны возникают за счет ионизации и теряются за счет диффузии и прилипания. Чтобы электронная плотность достигла стационарного значения, необходим некоторый небольшой промежуток времени. Этот промежуток времени, несущественный при рассмотрении пробоя в непрерывном режиме, является, однако, весьма существенным в импульсном режиме. С достаточной степенью точности можно считать, что электронная плотность меняется в это время по закону

$$n = n_0 e^{v t}, \quad (8.16)$$

где  $v$  означает суммарную скорость ионизации. Иначе говоря, для воздуха величина  $v$  равна

$$v_i - v_a - \frac{D}{\Lambda^2}.$$

Поэтому  $v$  есть мера превышения скорости рождения электронов над скоростью их потерь. Чтобы в импульсном режиме произошел пробой, плотность электронов должна до окончания импульса достичь такой величины, при которой образуется непрозрачная плазма. При теоретическом анализе мы будем использовать тот же критерий, который применяли при обсуждении экспериментальных данных: критическая плотность плазмы должна быть достигнута до окончания импульса за время, составляющее не менее 5% его общей длительности.

В дальнейших расчетах будем предполагать, что интервал между импульсами достаточно велик. Поэтому количество электронов, оставшихся от предыдущего импульса, достаточно мало и они не влияют на последующий. При этих условиях можно записать следующий критерий пробоя:

$$n_p = n_0 e^{v \tau}, \quad (8.17)$$

где  $n_p$  — критическая плотность плазмы, примерно равная  $10^{13}/\lambda^2$ , если величина  $\lambda$  выражена в сантиметрах,  $n$  — количество частиц в  $1 \text{ см}^3$ , а  $\tau$  — длительность импульса в секундах. Начальная плотность электронов обычно точно не известна. В условиях пробоя в атмосфере она сильно меняется с высотой. Однако из-за экспоненциального характера роста плотности получаемый результат мало меняется при изменении начальной плотности от 1 до  $10^3 \text{ см}^{-3}$ .

В экспериментах, описанных в этой главе, вблизи резонатора помещался радиоактивный источник  $\text{Co}^{60}$  интенсивностью 5 *мкюри*. Ионизация, создаваемая этим источником, была достаточна для того, чтобы перед началом каждого импульса в резонаторе находился по крайней мере один электрон. Грубый расчет показывает, что в большинстве использованных резонаторов электронная плотность, создаваемая указанным радиоактивным источником, составляла около  $100 \text{ см}^{-3}$ . В отсутствие начальных электронов, созданных каким-либо вспомогательным источником, измеряемые про-

бойные поля очень велики, так как в этом случае начальные электроны должны возникнуть за счет автоэлектронной эмиссии или других поверхностных эффектов. Поэтому при использовании результатов, полученных в этой главе, для предсказания пробоя в атмосфере следует считать, что они дают лишь нижний предел величины пробойного поля.

Для расчета величины импульсного пробойного поля фиг. 8.18 можно использовать следующим образом. Определив из заданных размеров резонатора диффузионную длину  $\Lambda$ , мы прежде всего рассчитываем величину  $D/\Lambda^2$ , что может быть сделано с помощью соотношения (8.13) и оценочной величины пробойного поля. Затем с помощью соотношения (8.17) находим величину  $v\tau$ , необходимую для получения непрозрачной плазмы при данной длине волны. Далее, зная длительность импульса, можно рассчитать  $v$ . Величина  $v$  на фиг. 8.18 равна  $v_i - v_a$ , но, зная суммарное значение  $v$  и  $D/\Lambda^2$ , мы можем вычислить  $v$  и  $v\lambda$ . Далее, зная  $\rho\lambda$ , непосредственно из графика находим произведение  $E\lambda$ . На фиг. 8.7 показаны результаты расчетов импульсного пробоя, выполненных описанным способом. Рассматривался резонатор с собственной частотой  $1 \text{ Гц}$ , возбуждаемый импульсами разной длительности с частотой повторения  $1000 \text{ гц}$ . Пунктирными линиями показаны теоретические кривые, а точками — результаты экспериментальных измерений. Мы видим, что для всех импульсов, за исключением очень коротких, для которых трудно определить истинную длительность, между расчетными и измеренными величинами имеется замечательное согласие. Подобное согласие существует и на других частотах.

При расчетах пробойных полей как в импульсном, так и в непрерывном режиме, выполненных описанным способом с использованием фиг. 8.18 и 8.19 для широкого диапазона давлений, длин волн и размеров резонаторов, было получено замечательное согласие с результатами измерений. Сейчас можно с достаточной уверенностью утверждать, что с помощью указанных кривых мы можем с разумной точностью предсказывать пробойные свойства воздуха для непрерывного и импульсного режимов в диапазоне частот от  $100 \text{ Мгц}$  до  $100 \text{ Гц}$ , в диапазоне давлений, соответствующих изменению высоты от уровня моря до  $100 \text{ км}$  над уровнем моря, и в очень широком диапазоне размеров области пробоя. Метод, применявшийся для получения кривых на фиг. 8.18 и 8.19, вообще говоря, пригоден и для любых газов, для которых нельзя провести теоретические расчеты на основе уравнений Больцмана из-за отсутствия достаточно простого выражения для зависимости частоты столкновений от энергии электронов. В частности, подобные кривые можно получить для входящих в состав атмосферы азота и кислорода, несмотря на то что в настоящее время азота количество экспериментальных данных для этих газов невелико.

## ПРОБОЙ ОКОЛО ВОЗВРАЩАЮЩИХСЯ КОСМИЧЕСКИХ КОРАБЛЕЙ

В настоящее время представляет большой интерес передача СВЧ энергии от космических кораблей, движущихся с большой скоростью через атмосферу. При достаточно большой высокочастотной мощности вблизи антенны может произойти пробой воздуха и передача прекратится. Если некоторое тело движется в воздухе с высокой скоростью, создавая ударную волну, то наблюдаются два эффекта, которые следует учитывать, прежде чем применять изложенную выше теорию. В ударной волне плотность частиц увеличивается по сравнению с ее значением в окружающем воздухе, причем это увеличение зависит от скорости. Кроме того, летящий корабль окружен заметной оболочкой ионизованного газа.

Влияние изменения плотности газа учесть нетрудно. Тем не менее нужно различать увеличение давления и увеличение плотности газа. Как показывает рассмотрение столкновений, проведенное в гл. 2, определяющим фактором для явления газового разряда является плотность газа. С другой стороны, все приводимые в этой книге данные выражены через давление. При этом, как это обычно принято, имеется в виду давление при температуре  $273^\circ \text{K}$ , так что давлению в 1 *тор* соответствует плотность частиц, равная  $3,54 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Обычно проблем здесь не возникает, но нужно иметь в виду, что отношение давления в ударной волне к давлению в окружающей среде может достигать сотен или даже тысяч, тогда как отношение плотностей не превышает шести. Если отношение плотностей газа определено, то влияние ударной волны на пробойное поле можно непосредственно оценить с помощью кривых типа показанных на фиг. 8.3 или 8.4. В результате вся кривая смещается влево, так что пробойные поля, соответствующие более низким окружающим давлениям, уменьшаются, а поля, соответствующие более высоким давлениям, увеличиваются. Кроме того, следует проявлять осторожность при интерпретации результатов, так как увеличение пробойного поля в ударной волне не сопровождается его увеличением вне волны и поэтому будет наблюдаться только уменьшение пробойного поля.

Труднее учесть второй эффект — повышенную ионизацию вокруг корабля <sup>1)</sup>. Необходимо принимать во внимание скорость тепловой ионизации, однако доминирующим эффектом является влияние высокой начальной плотности электронов на скорость их диффузии. Следует также проявлять осторожность в отношении определе-

---

<sup>1)</sup> Многие вопросы о взаимодействии спутников с плазмой рассмотрены в книге: Я. Л. Альперт, В. А. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, М., 1964.— *Прим. ред.*

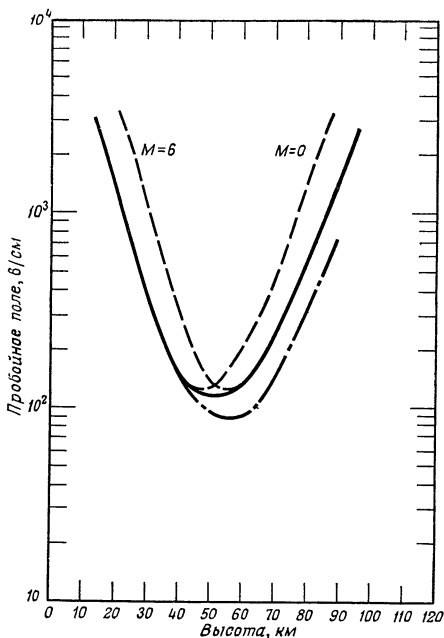


ний. Можно считать, что пробой произошел, если электронная плотность достигла или превысила критическую плотность плазмы  $n_p$ . Однако критическая плотность плазмы есть функция частоты. Поэтому вокруг сверхзвукового корабля может существовать область, где для определенных частот существует пробойная плотность электронов еще до приложения электрического поля. Если это произойдет, то через оболочку ионизованного воздуха, окружающую корабль, электромагнитная энергия проходить почти не будет.

Будем предполагать, что мы имеем дело с частотами, для которых электронная плотность не достигает значения, соответствующего пробойю, до наложения электрического поля. Электроны диффундируют свободно, когда их плотность мала. При увеличении плотности электронов и ионов силы притяжения между частицами двух родов изменяют их движение. Окончательный результат состоит в том, что электроны и ионы диффундируют вместе с примерно одинаковой скоростью, которая гораздо ниже скорости диффузии свободных электронов, но несколько выше скорости диффузии свободных ионов. В результате такой амбиполярной диффузии скорость потерь электронов уменьшается и пробойные поля понижаются. Переход от свободной диффузии к амбиполярной не соответствует какой-то определенной плотности электронов, а осуществляется постепенно в диапазоне плотностей, отличающихся на два-три порядка.

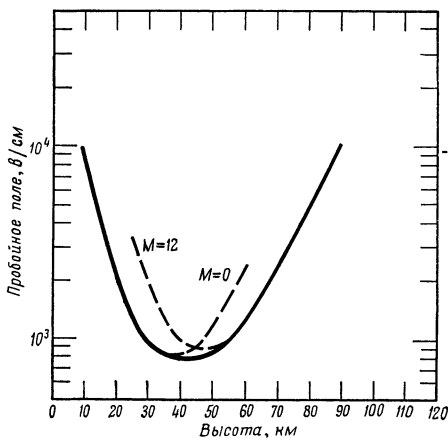
Этот переход был детально рассмотрен Аллисом и Роузом [14]. Названные авторы получили значения коэффициента диффузии лишь для одного газа — водорода. Однако их исследования показывают, что независимо от рода газа эффект становится существенным при плотностях порядка  $10^{-4}n_p$  или выше. Для воздуха коэффициент амбиполярной диффузии не измерялся, но анализ, проведенный Уитмером и Мак-Доналдом [15], показывает, что он должен быть равен  $1/40$  от величины коэффициента диффузии свободных электронов. Используя эту величину и развитую выше теорию, получаем результаты, показанные на фиг. 8.21. Здесь приведены пробойные поля при частоте  $3 \text{ Гц}$  для корабля, скорость которого характеризуется числом Маха  $M = 6$ , а угол носового конуса равен  $12^\circ$ . В расчете учитывалось влияние амбиполярной диффузии и повышение давления в ударной волне. Значения электронной плотности и плотности газа в ударной волне взяты из работы Липмана и Рожко [16].

Исследуя импульсный пробой, мы рассматривали скорость возрастания электронной плотности от некоторой начальной величины до критической. Поэтому проведенный выше анализ можно непосредственно применить к рассмотрению условий, существующих около сверхзвукового корабля, если учесть давление газа и начальную электронную плотность в ударной волне. Фиг. 8.22 иллюстрирует это для частного случая корабля, движущегося со скоростью,



Ф и г. 8.21. Зависимость пробойного поля от высоты в непрерывном режиме для частоты 3 Гцц вблизи космического корабля, движущегося со скоростью, определяемой числом Маха  $M = 6$ .

Угол носового конуса равен  $12^\circ$ . Штрих-пунктирная кривая получена с учетом поправки на амбиполярную диффузию.



Ф и г. 8.22. Зависимость импульсного пробойного поля от высоты для частоты 10 Гцц при длительности импульса 1 мксек вблизи космического корабля, для которого число Маха  $M = 12$ .

Угол носового конуса корабля  $12^\circ$ , начальная концентрация электронов  $10^6 \text{ см}^{-3}$ .

характеризуемой числом Маха  $M = 12$  (частота равна  $10$  Гц, длительность импульса  $1$  мксек; кроме того, предполагается, что начальная плотность электронов у антенны составляет  $10^6$  см<sup>-3</sup>).

Келли и Маргенау [17] рассмотрели пробой около сверхзвукового корабля, исходя из основных уравнений кинетической теории, и рассчитали функцию распределения скоростей электронов. Чтобы решить задачу, они сделали ряд допущений, в частности предположили, что средняя длина свободного пробега не зависит от энергии электрона. Для отношения коэффициента амбиполярной и свободной диффузии они использовали ту же величину, что и Уитмер и Мак-Доналд. Однако они учли диффузию электронов от плоской поверхности антенны, для чего решали соответствующее диффузионное уравнение. В результате было получено следующее соотношение:

$$n(x, t) \sim (Dt)^{-1/2} e^{-x^2/4Dt},$$

где  $x$  — расстояние от антенны, а  $t$  — время, в течение которого происходит диффузия.

При таком рассмотрении условия пробоя несколько отличаются от условий, полученных в предположении, что верхний предел диффузионной длины равен  $\lambda/2$ . Доводы в пользу такого предположения подробно обсуждаются в работе [12]. Коротко говоря, они основаны на предположении о том, что поле вблизи антенны должно быть неоднородным, по крайней мере в одном направлении, с характерным размером неоднородности  $\lambda/2$ . Для большинства высот обе теории дают весьма близкие результаты.

Келли и Маргенау [17] рассмотрели роль различных факторов, влияющих на диффузию и приводящих к расхождению между теориями в предсказаниях относительно пробоя на больших высотах. В обеих теориях не учитываются дополнительные потери электронов из области разряда, вызванные обдуванием потоком газа. Учет этого фактора, который производится очень легко, для большинства скоростей потока мало влияет на результаты.

### ЛАЗЕРНЫЙ ПРОБОЙ <sup>1)</sup>

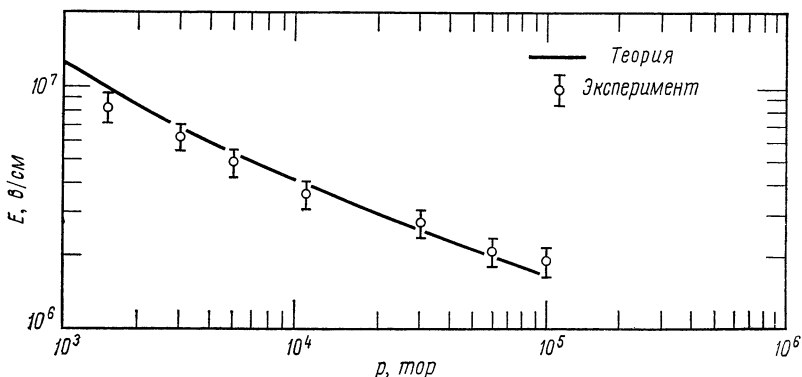
В последнее время большой интерес вызывает пробой газов под действием излучения импульсного рубинового лазера. Лазер может давать очень сильные электрические поля на частоте порядка

---

<sup>1)</sup> Автор здесь касается лазерного пробоя только для того, чтобы указать на связь между теориями высокочастотного и лазерного пробоя. Несмотря на много общих черт, между этими явлениями существует большая разница. Более подробно этот вопрос рассмотрен в известной статье Ю. П. Райзера [УФН, 87, вып. 1 (1965)].— *Прим. ред.*

$10^{15}$  *гц*. Когерентный луч лазера может быть сфокусирован в очень маленьком объеме, где в силу этого плотность энергии очень велика.

О пробое воздуха при атмосферном давлении в фокусе линзы, на которую падает лазерный луч, сообщало много авторов, в том числе Мейеранд и От [18]. Указанные авторы наблюдали [19] также пробой в гелии и аргоне при давлениях в диапазоне от 760 до  $10^5$  *тор*. Механизм ионизации лазерным лучом интенсивно дискутировался, в частности обсуждались вопросы, связанные с механизмом передачи энергии и с малой длительностью импульса. Достаточно обстоятельно эти проблемы рассмотрены в работе Фелпса [20], в которой имеется подробная библиография.



Ф и г. 8.23. Сравнение лазерных пробойных полей, измеренных в чистом гелии Мейерандом и Оттом, с величинами, рассчитанными с помощью теории (см. фиг. 4.15).

Интересно рассмотреть данные по лазерному пробую в свете теорий, изложенных в настоящей главе и в гл. 4. Длительность импульса, использованного Оттом и Мейерандом, составляла примерно 30 *нсек*, или  $3 \cdot 10^{-8}$  *сек*. Это достаточно малая величина, поэтому большинство исследователей рассматривало лазерный пробой как импульсный. Однако частота лазерного поля соответствует длине волны 6934  $\text{\AA}$ , так что  $\omega = 3 \cdot 10^{15}$  *гц*. Это значит, что импульс длится примерно  $3 \cdot 10^7$  циклов. Обратившись к фиг. 8.12, мы видим, что это фактически очень длинный импульс, следовательно, лазерный пробой необходимо рассматривать как высокочастотный пробой в непрерывном режиме.

Хотя период лазерного поля чрезвычайно мал, вследствие чего, по-видимому, уже нельзя пренебрегать временем, затрачиваемым электроном на столкновение (что может в некоторой степени изменить теорию), тем не менее интересно сравнить экспериментальные данные Мейеранда и Ота с результатами теории, изложенной

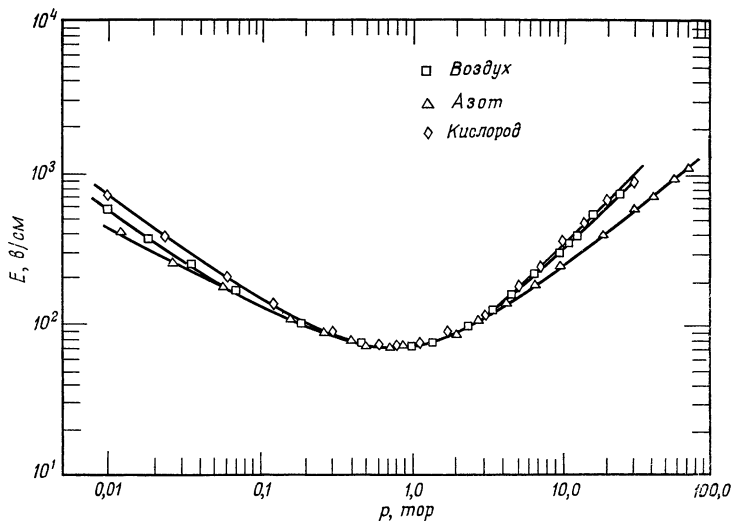
в гл. 4. Так как величина давления в этих экспериментах соответствует области, расположенной слева от характерной точки  $v_c = \omega$ , следует ожидать, что понятие эффективного поля может быть использовано только для гелия и водорода. Наименее точная часть расчетов связана с определением  $\Lambda$ , однако Мейеранд и От нашли, что радиус разряда равен  $10^{-2}$  см, следовательно,  $\Lambda$  имеет величину  $10^{-2}/\pi$  см. Пробойные поля, измеренные Мейерандом и Оттом в гелии, приведены на фиг. 8.23, где показана также точность измерения поля. Кроме того, на фиг. 8.23 показан результат расчета пробойного поля для данной частоты и характерной диффузионной длины. Расчет производился на основании теоретической кривой зависимости  $E_c\Lambda$  от  $\rho\Lambda$ , приведенной на фиг. 4.15. Согласие оказывается поразительно хорошим; это заставляет предположить, что СВЧ теория пробоя может быть применима и к оптическим частотам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Herlin M. A., Brown S. C., Phys. Rev., **74**, 291 (1948).
2. Brode R. B., Rev. Mod. Phys., **5**, 257 (1933).
3. Frost L. S., Phelps A. V., Phys. Rev., **127**, 1621 (1962).
4. Rose D. J., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., **28**, 561 (1957).
5. Gould L. J., Roberts L. W., Journ. Appl. Phys., **27**, 1162 (1956).
6. Pim J. A., Proc. Inst. Elec. Engrs., **96**, 117 (1949).
7. MacDonald A. D., Gaskell D. U., Gitterman H. N., Phys. Rev., **130**, 1841 (1963).
8. Brown S. C., Basic Data of Plasma Physics, Cambridge, Mass., 1959.
9. Harrison M. A., Geballe R., Phys. Rev., **91**, 1 (1953).
10. Neilson R. A., Phys. Rev., **50**, 950 (1936).
11. Neilson R. A., Bradbury N. E., Phys. Rev., **51**, 69 (1937).
12. MacDonald A. D., Proc. IRE, **48**, 436 (1959).
13. Crompton R. W., Huxley L. G. H., Sutton D. J., Proc. Roy. Soc., **A218**, 507 (1952).
14. Allis W. P., Rose D. J., Phys. Rev., **93**, 84 (1954).
15. Whitmer R. F., MacDonald A. D., Electromagnetic Effects of Reentry, ed. W. Rotman, G. Meltz, London, 1961, p. 149.
16. Liepmann H. W., Roshko A., Elements of Gasdynamics, New York, 1957.
17. Kelly D., Margenau H., Journ. Appl. Phys., **31**, 1617 (1960).
18. Meyerand R. G., Haught A. F., Proc. 6th Internat. Symposium on Ionization Phenomena in Gases (Paris, June 1963), Amsterdam, 1964.
19. Meyerand R. G., Haught A. F., Phys. Rev. Lett., **11**, 401 (1963).
20. Phelps A. V., Proc. Conf. Phys. Quantum Electron., San Juan, Puerto Rico, June 1965.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

Здесь на фиг. А.1 — А.11 собраны основные данные, с помощью которых получены комбинированные кривые, приведенные в гл. 8. Кроме того, сопоставляются данные относительно пробойных полей

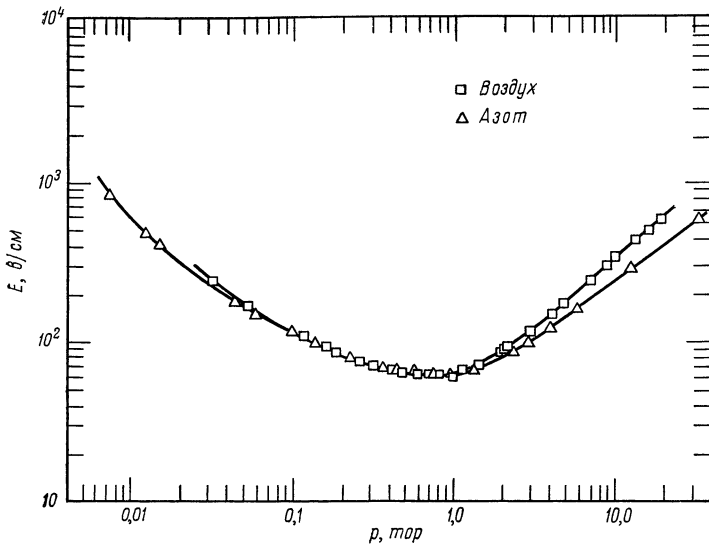


Ф и г. А.1. Пробой в непрерывном режиме в воздухе, кислороде и азоте на частоте 994 Мгц при  $\Lambda = 1,51$  см.

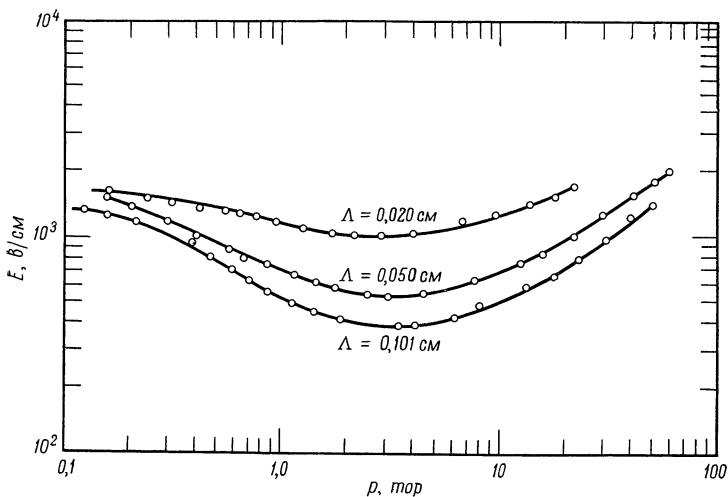
в разных газах. Данные на фиг. А.3 взяты из работы Херлина и Брауна [1], а на фиг. А.4 — из работы Роуза и Брауна [2]. Остальные данные получены Мак-Доналдом, Гаскеллом и Гиттерманом [3].

## ЛИТЕРАТУРА

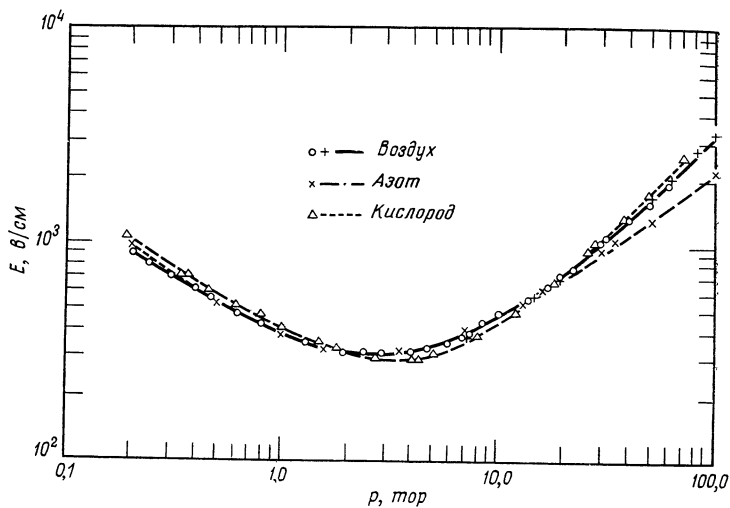
1. Herlin M. A., Brown S. C., Phys. Rev., 74, 291 (1948).
2. Rose D. J., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., 28, 561 (1957).
3. MacDonal d A. D., Gaskell D. U., Gitterman H. N., Phys. Rev., 130, 1841 (1963).



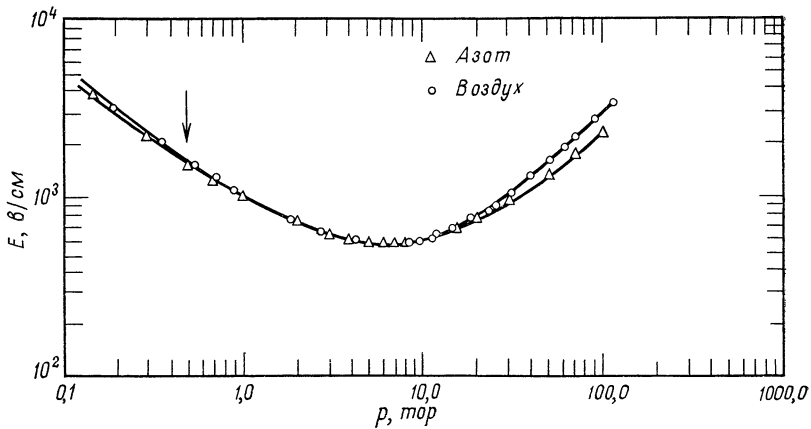
Ф и г. А.2. Пробой в непрерывном режиме в воздухе и азоте на частоте 994 Мгц при  $\Lambda = 2,65$  см.



Ф и г. А.3. Пробойные поля при непрерывном режиме в воздухе на частоте 3,13 Ггц.

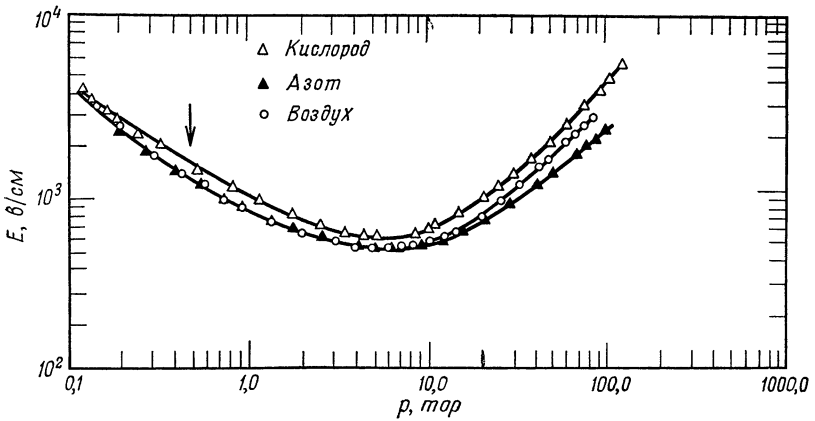


Ф и г. А.4. Пробойные поля при непрерывном режиме в чистом воздухе, кислороде и азоте на частоте 2,8 Гц при  $\Lambda = 0,202 \text{ см}$ .

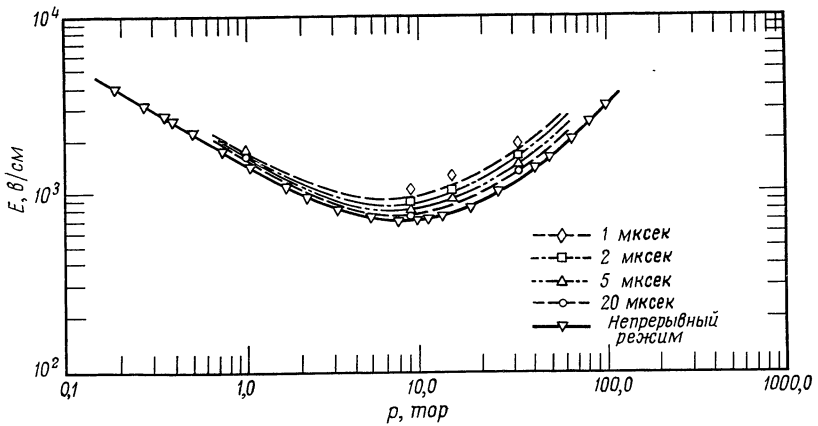


Ф и г. А.5. Пробой в непрерывном режиме в воздухе и азоте на частоте 9,4 Гц при  $\Lambda = 0,22 \text{ см}$ .

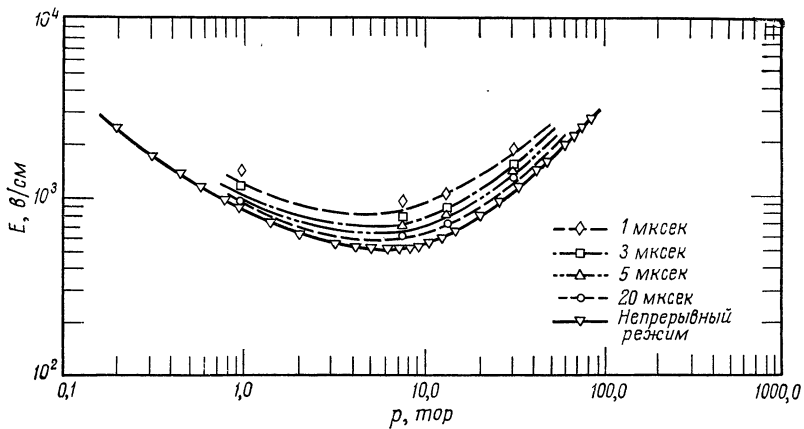




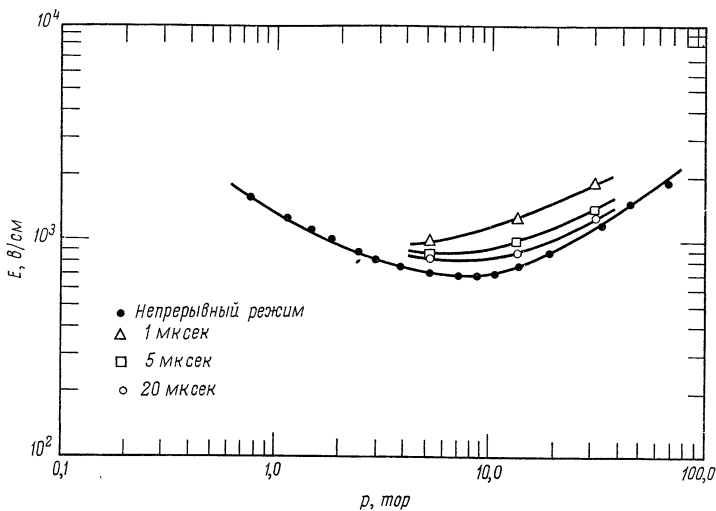
Ф и г. А.6. Пробой в непрерывном режиме в воздухе, кислороде и азоте на частоте 9,4 Гц при  $\Lambda = 0,40$  см.



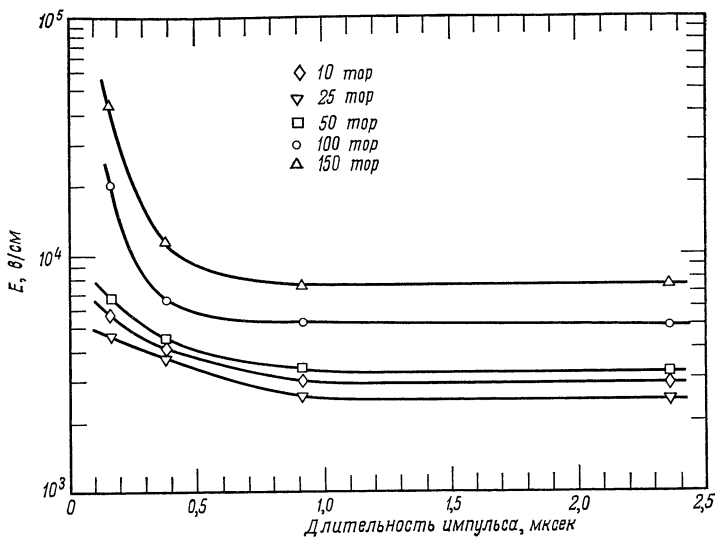
Ф и г. А.7. Импульсный пробой в воздухе на частоте 9,3 Гц при  $\Lambda = 0,10$  см. Частота повторения импульсов 1000 гц. Пунктиром показаны расчетные кривые, точки — результаты эксперимента.



Ф и г. А.8. Импульсный пробой в воздухе на частоте  $9,4 \text{ Гц}$ . Пунктиром показаны расчетные кривые; точки — результаты эксперимента при  $\Lambda = 0,40 \text{ см}$ ; частота повторения импульсов  $1000 \text{ гц}$ .

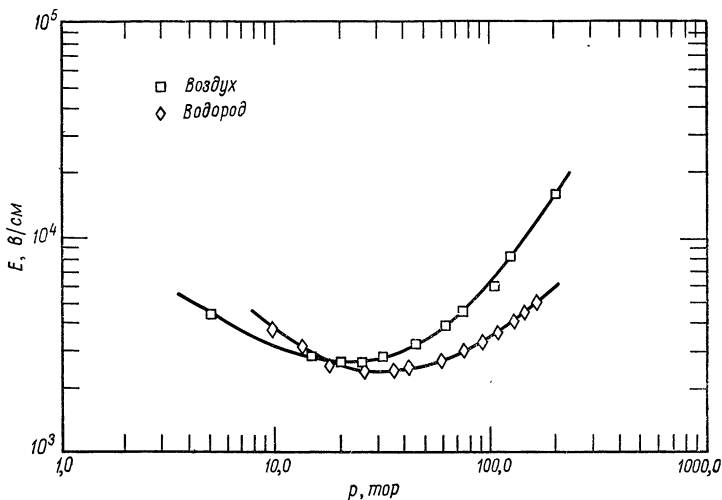


Ф и г. А.9. Импульсный пробой в азоте на частоте  $9,3 \text{ Гц}$  при  $\Lambda = 0,10 \text{ см}$ . Частота повторения импульсов  $1000 \text{ гц}$ .



Ф и г. А.10. Пробойные поля в воздухе как функции длительности импульса при разных давлениях.

Частота 24,1 Гц,  $\Lambda = 0,09$  см; частота повторения импульсов 200 гц.



Ф и г. А.11. Импульсный пробой в воздухе и водороде на частоте 24,1 Гц при  $\Lambda = 0,09$  см.

Длительность импульса 0,38 мксек, частота повторения 1000 гц.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	9
Глава 1. Введение . . . . .	11
Исследования в СВЧ диапазоне . . . . .	12
Анализ размерностей . . . . .	18
Литература . . . . .	24
Глава 2. Электронные столкновения . . . . .	25
Упругие столкновения . . . . .	26
Неупругие столкновения . . . . .	36
Процессы потери электронов . . . . .	37
Литература . . . . .	45
Глава 3. Уравнение Больцмана для ионизованного газа . . . . .	47
Функции распределения . . . . .	47
Расчет в следующем порядке . . . . .	62
Пределы применимости диффузионной теории . . . . .	72
Литература] . . . . .	81
Глава 4. Теория пробоя (частота столкновений не зависит от энергии) . . . . .	82
Критерии пробоя . . . . .	82
Случай постоянной частоты столкновений . . . . .	85
Литература . . . . .	114
Глава 5. Теория пробоя (частота столкновений зависит от энергии) . . . . .	115
Неон . . . . .	115
Смеси неона с аргоном . . . . .	125
Аргон, криптон и ксенон . . . . .	132
Литература . . . . .	135
Глава 6. Пробой в неоднородных электрических полях и в магнитном поле . . . . .	136
Неоднородные электрические поля . . . . .	136
Магнитные поля . . . . .	149
Литература . . . . .	156
Глава 7. Экспериментальные методы . . . . .	157
Сверхвысокочастотные системы . . . . .	157
Вакуумная система . . . . .	170
Литература . . . . .	174
Глава 8. Пробой в атмосфере . . . . .	175
Экспериментальные данные . . . . .	176
Расчет пробоя в случае, когда известна скорость прилипания . . . . .	187
Расчет пробоя с учетом прилипания и диффузии . . . . .	190
Пробой около возвращающихся космических кораблей . . . . .	200
Лазерный пробой . . . . .	203
Литература . . . . .	205
Приложение . . . . .	206
Литература . . . . .	206

А.Мак-Доналд  
Сверхвысокочастотный  
пробой  
в газах

