ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

А. ДЖ. МАК-КОННЕЛ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. В. КОРЕНЕВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

APPLICATION
of
TENSOR ANALYSIS

by

A. J. Mc CONNELL

DOVER PUBLICATIONS, INC.
NEW YORK 1957

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ III

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

ДОПОЛНЕНИЕ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В большей части курсов тензорного исчисления оно излагается вместе с многомерной римановой геометрией, поэтому читателю приходится изучать сразу два предмета, из которых каждый сам по себе достаточно сложен. Для читателя, интересующегося тензорным исчислением с точки зрения его применения в других областях науки, это создает излишние трудности, часто даже непреодолимые.

Идея книги А. Дж. Мак-Коннела, предлагаемой ныне советскому читателю, состоит в том, чтобы изложить основы тензорной алгебры и тензорного анализа на материале, уже знакомом достаточно широкому кругу лиц (научным работникам, инженерам и студентам).

Отличительной чертой книги являются чрезвычайная ясность и достаточная простота изложения. Кроме того, почти в каждом параграфе и в каждой главе имеются упражнения для самостоятельного решения (всего 685), так что одновременно с учебником читателю предлагается и единственный в своем роде сборник задач.

Можно надеяться, что издание книги А. Дж. Мак-Коннела на русском языке будет способствовать более широкому распространению у нас тензорных методов, чем это имело место до сих пор.

Первое издание книги на английском языке вышло в 1931 г., и с тех пор она неоднократно и без изменений переиздавалась в Англии и Америке. Перевод сделан с последнего американского издания 1957 г. И. А. Вателем, Ф. И. Ерешко, А. И. Кирющенко, И. А. Крассом и Н. Т. Минаевым.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Тензорное исчисление зарекомендовало себя как инструмент, особенно удобный в области общей теории относительности; оно сделалось совершенно необходимым в многомерной дифференциальной геометрии. Появилось много работ, использующих тензорное исчисление в применении к этим сложным теориям, но очень мало таких, где оно применялось бы в более простых дисциплинах. Настоящая книга написана с целью создания учебника, который дал бы студентам возможность ознакомиться с тензорными методами на раннем этапе математического образования. Лучше всего студент сможет оценить силу тензорных методов путем применения их к хорошо знакомым предметам. Поэтому дисциплины, рассматриваемые в настоящей книге, не выходят за рамки обычного университетского курса. Разумеется, книга не имеет целью дать полное изложение этих дисциплин; автор пытался дать лишь краткий, но насыщенный обзор каждой из них.

Содержание разделено на четыре части. Первая часть предназначена для того, чтобы сделать книгу независимой от других трудов в этой области, и содержит элементарное описание основных идей и системы обозначений тензорной алгебры. Вторая часть содержит применение тензорной алгебры к аналитической геометрии и, в сущности, представляет собой геометрическое толкование тензорной алгебры. Таким образом, первая половина книги не имеет дела с дифференциальными свойствами тензоров, а только с алгебраическими и только с линейными преобразованиями.

В третьей части вводится собственно тензорный анализ, а именно, теория дифференцирования тензоров. В ней проблема ковариантного дифференцирования рассматривается с геометрической точки зрения и излагается элементарная дифференциальная геометрия. Автор надеется, что эта часть будет полезной для студентов как введение в современную дифференциальную геометрию. Способ изложения был избран именно из этих соображений.

Четвертая часть содержит применение тензорных методов в динамике, теории упругости, гидродинамике и теории электромагнитного поля. Немного места уделено геометризации общей динамики. В последней главе специальная теория относительности изложена в тензорных обозначениях; автор надеется, что эта глава будет хорошим введением в более трудную общую теорию относительности.

Дополнение посвящено применению ортогональных криволинейных координат в математической физике; в нем система обозначений, принятая в настоящей книге, связана с системой обозначений, принятой в тех учебниках, где не используются тензорные обозначения.

Серьезным недостатком большей части книг по тензорному исчислению, которые появились к настоящему времени, является отсутствие задач и упражнений. В настоящей работе содержится большое количество их; автор надеется, что они дадут читателю необходимую тренировку в применении тензорных методов. К большей части задач даны ответы и во многих случаях даны указания к решению.

Выражаю глубокую благодарность профессору Т. Леви-Чивита, профессору А. Палатини, профессору И. Л. Сингу и доктору Джону Дагеллу за ценные советы при подготовке этой рукописи к печати.

А. Дж. Мак-Коннел

Колледж Св. Троицы,
Дублин
Апрель 1931 г.

ЧАСТЬ I
ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА I
ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Индексные обозначения

Система индексных обозначений составляет столь значительную часть тензорного исчисления, что читатель, освоившись однажды с ее особенностями, сможет идти дальше самостоятельно. Поэтому мы посвятим настоящую главу только самой системе обозначений, изложив кратко ее применение лишь к теории определителей, и отложим до следующей главы собственно тензорную алгебру.

Если нам дана совокупность трех независимых переменных, то они могут быть обозначены тремя различными буквами, например x, y, z, но мы считаем более удобным обозначать переменные данной совокупности одной и той же буквой, различая их посредством индексов. Таким образом, мы можем записать три переменные в виде x_1, x_2, x_3, или в более компактной форме:

$$x_r \quad (r=1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

Здесь мы написали индекс r внизу, но в равной мере мы могли бы использовать вместо этого верхний значок, так что переменные были бы записаны в виде x^1, x^2, x^3, или

$$x^r \qquad (r=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Понятно, что x^r не означает возведения x в r-ю степень; индекс r используется просто для того, чтобы различить три переменные. Впоследствии мы будем использовать как верхние, так и нижние индексы; в следующей главе мы припишем положению индекса специальный смысл. В дальнейшем мы увидим, что для наших переменных удобна форма записи (2), а не (1).

Однородная линейная функция переменных обычно записывается в виде

$$\sum_{m=1}^{3} a_m x^m \equiv a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3 — константы. Таким образом, коэффициенты линейной формы могут быть записаны в виде

$$a_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3).$$

Объекты, которые, подобно x^r и a_r, зависят только от одного индекса, называются *объектами первого порядка*, а отдельные буквы с индексами x^1, x^2, x^3 и a_1, a_2, a_3 называются *элементами* или *составляющими* объекта. Объекты первого порядка, имеющие три составляющие, назовем трехмерными. Имеются два типа объектов первого порядка, а именно те, у которых индекс вверху, и те, у которых индекс внизу; следовательно, все объекты первого порядка принадлежат к одному из двух типов

$$a^r,\ a_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

С другой стороны, однородная квадратичная функция трех переменных имеет вид

$$\sum_{m,\,n=1}^{3} a_{mn} x^m x^n \equiv a_{11} (x^1)^2 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + a_{21} x^2 x^1 + \\ + a_{22} (x^2)^2 + a_{23} x^2 x^3 + a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33} (x^3)^2, \tag{5}$$

где a_{mn} — константы. Мы видим, что коэффициенты квадратичной формы зависят от *двух* индексов и записываются так:

$$a_{mn} \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ 3).$$

Объекты, которые зависят от двух индексов, называются *объектами второго порядка*. Из того, что индексы бывают верхние и нижние, следует, что объекты второго порядка могут быть трех типов:

$$a_{rs}, \qquad a^r_s, \qquad a^{rs} \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Легко видеть, что в этом случае каждый объект имеет 9 составляющих.

Аналогично можно получить *объекты третьего порядка*, которые будут зависеть от трех индексов и могут принадлежать к любому из четырех типов:

$$a_{rst}, \qquad a^r_{st}, \qquad a^{rs}_t, \qquad a^{rst} \qquad (r, s, t = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Здесь каждый объект содержит 3^3 или 27 составляющих. Мы можем продолжать это построение и получить объекты любого порядка.

Для законченности этой последовательности мы назовем объект a, не имеющий индексов, *объектом нулевого порядка*.

Мы взяли число измерений равным трем лишь для определенности. Все, что было сказано выше, применимо также к любому числу измерений, если условиться, что число значений, пробегаемых индексом, равно числу измерений. Например, если число измерений равно четырем, следует считать, что индексы могут пробегать значения от 1 до 4, а не от 1 до 3, как предполагалось выше.

Упражнения

1. Показать, что объект четвертого порядка может быть пяти различных типов.

2. Если число измерений равно четырем, то сколько составляющих имеют объекты второго и третьего порядков?

§ 2. Условие о суммировании

Мы введем теперь два важных условия относительно индексов. В тензорном исчислении мы часто имеем дело с суммами типа (3) и (5); нетрудно заметить, что в этих формулах индексы, по которым идет суммирование, появляются дважды. Наши формулы можно сделать компактнее, если избавиться от знака $\sum$. Это может быть осуществлено, если принять, что знак $\sum$ будет подразумеваться в любом случае, когда в одночленном выражении индекс *повторяется*. Тогда (3) можно записать так:

$$a_m x^m \equiv a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{8}$$

а (5) примет вид

$$a_{mn} x^m x^n \equiv a_{11}(x^1)^2 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + a_{21} x^2 x^1 + a_{22}(x^2)^2 + \\ + a_{23} x^2 x^3 + a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33}(x^3)^2. \tag{9}$$

Единственное неудобство в применении нашего условия возникает в том случае, когда мы желаем выписать один член какой-либо из сумм (8) или (9). Нам это потребуется очень редко, но мы запасемся для этого случая соглашением, что условие о суммировании применяется только, когда повторяющийся индекс записан *малой буквой*, а использование заглавных букв для повторяющихся индексов *не* означает суммирования. Таким образом, отдельные члены сумм (8) и (9) будут обозначаться

$$a_M x^M, \quad a_{MN} x^M x^N$$

соответственно.

Наше первое условие, следовательно, читается так:

Повторяющийся малый латинский индекс означает суммирование от 1 *до* 3.

Так как повторяющийся индекс означает суммирование от 1 до 3, то применение какой-нибудь специальной буквы для повторяющихся индексов не обязательно, и мы можем заменить ее любой буквой, которая нам удобна, без изменения значения рассматриваемого выражения. Таким образом,

$$a_m x^m \equiv a_r x^r \equiv a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

и

$$a_{mn} x^m x^n \equiv a_{rs} x^r x^s.$$

По этой причине повторяющийся индекс часто называют *немым*. Индекс, который в каком-нибудь одночленном выражении не повторяется, назовем *свободным*. Таким образом, все индексы в формулах (4), (6) и (7) — свободные индексы; следует отметить, что в этих формулах свободные индексы пробегают значения от 1 до 3. Мы имеем, следовательно, наше второе условие:

Свободные (*неповторяющиеся*) *малые латинские индексы пробегают значения от* 1 *до* 3.

Например, объект второго порядка будет теперь записываться в виде

$$a_{rs}$$

без какого-нибудь дополнительного упоминания о числе значений, пробегаемых r и s. Другими словами, a_{rs} означает любую из девяти составляющих

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}. \end{matrix}$$

Отметим, что почти всегда немой индекс будет появляться в одном верхнем и в одном нижнем положении. Поскольку это окажется возможным, в настоящей главе мы будем придерживаться такого расположения индексов.

Упражнения

1. Выписать полную систему линейных равенств, задаваемую выражением

$$a_{rs}x^s = b_r.$$

2. Сколько членов содержится в сумме

$$a_{mnp}x^m y^n z^p?$$

3. Показать, что a^{rs}_s есть объект первого порядка, и выписать полностью его составляющие.

§ 3. Сложение, умножение и свертывание объектов

В алгебре объектов со многими индексами имеются три главные операции, которые называются сложением, умножением и свертыванием.

а) *Сложение.* Эта операция применима только к объектам *одного и того же* порядка и типа. Если нам даны два объекта одного и того же порядка и типа и если мы складываем каждую составляющую первого объекта с соответствующей составляющей второго, то мы, очевидно, приходим к объекту того же порядка и типа, что и слагаемые. Этот процесс есть операция *сложения*, и результирующий объект называется *суммой* двух объектов. Таким образом, если a^r_{st} и b^r_{st} — два объекта третьего порядка, то объект c^r_{st}, определенный равенством

$$c^r_{st} = a^r_{st} + b^r_{st}, \tag{10}$$

есть сумма a^r_{st} и b^r_{st}. Мы подразумеваем здесь алгебраическую сумму; поэтому вычитание включено сюда как частный случай. Кроме того, эта операция может быть распространена непосредственно на случай любого количества объектов, если только они все одного и того же порядка и типа.

б) *Умножение.* Мы сейчас определим *произведение* двух объектов. Если мы берем два объекта любого типа и умножаем каждую составляющую первого объекта на каждую составляющую второго, мы получаем объект, порядок которого равен сумме порядков двух исходных объектов; этот результирующий объект называется *произведением* двух объектов. Например, если a^r_{st} — объект третьего порядка и b^{mn} — объект второго порядка, то мы видим, что объект c^{rmn}_{st}, составляющие которого определеделяются равенством

$$c^{rmn}_{st}=a^r_{st}b^{mn}, \tag{11}$$

есть объект пятого порядка и является произведением a^r_{st} и b^{mn}. Этот процесс, конечно, может быть распространен на любое количество объектов.

в) *Свертывание.* Процесс свертывания может быть пояснен на примере. Возьмем объект пятого порядка

$$a^{rp}_{stu},$$

который имеет как верхние, так и нижние индексы. Если мы теперь положим u равным p, мы получим объект a^{rp}_{stp}, и так как p является теперь повторяющимся индексом, то необходимо произвести суммирование от 1 до 3, в соответствии с нашим условием. Итак, полученный таким путем новый объект есть

$$a^{rp}_{stp}\equiv\sum_{p=1}^{3}a^{rp}_{stp}\equiv a^{r1}_{st1}+a^{r2}_{st2}+a^{r3}_{st3}. \tag{12}$$

Мы видим, что наш новый объект (12) — третьего порядка, т. е. его порядок на два ниже, чем порядок исходного объекта. Операция может быть, очевидно, повторена несколько раз, т. е. мы можем произвести свертывание относительно любой пары индексов, один из которых является нижним, а другой — верхним. В приведенном выше примере мы можем произвести свертывание еще раз по индексам r и t, получив объект первого порядка

$$a^{rp}_{srp}\equiv\sum_{r,\,p=1}^{3}a^{rp}_{srp}.$$

Имеется еще одна операция, называемая *внутренним умножением*, которая не является новой, так как в действительности она является комбинацией умножения и свертывания. Чтобы выполнить эту операцию над двумя объектами, мы сначала перемножаем их, а затем свертываем произведение по нижнему индексу одного объекта и верхнему индексу другого. Таким образом, внутреннее произведение двух объектов a^r_{st} и b^{mn} есть, например,

$$c^{rm}_s = a^r_{sp} b^{mp} = \sum_{p=1}^{3} a^r_{sp} b^{mp}.$$

§ 4. Симметричные и антисимметричные объекты

Если мы имеем объект a_{mn} с двумя нижними индексами, то может случиться, что каждая из составляющих не изменится по величине и знаку при перемене мест индексов, т. е.

$$a_{mn} = a_{nm}.$$

Такой объект называют *симметричным*. В более общем случае объект, имеющий любое число нижних индексов, называется симметричным относительно двух из них, если составляющие не изменяются при перемене мест этих двух индексов. Объект называется *абсолютно* симметричным относительно нижних индексов, если при перемене мест любых двух из них составляющие не изменяются. Абсолютно симметричный объект третьего порядка будет, следовательно, удовлетворять соотношениям

$$a_{mnp} = a_{mpn} = a_{nmp} = a_{npm} = a_{pmn} = a_{pnm}.$$

С другой стороны, объект a_{mn} называется *антисимметричным*, если перемена мест индексов изменяет знак составляющей, но не изменяет ее численного значения; в таком случае мы имеем

$$a_{mn} = -a_{nm}.$$

Эти равенства, выписанные полностью, выглядят так:

$$a_{11} = -a_{11}, \quad a_{22} = -a_{22}, \quad a_{33} = -a_{33},$$

$$a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}, \quad a_{31} = -a_{13},$$

откуда мы немедленно заключаем, что $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Как и выше, объект может быть антисимметричным либо относительно двух каких-нибудь нижних индексов, либо относительно всех пар индексов; в последнем случае объект называется абсолютно антисимметричным. Абсолютно антисимметричный объект третьего порядка должен удовлетворять соотношениям

$$a_{mnp} = -a_{mpn} = -a_{nmp} = a_{npm} = a_{pmn} = -a_{pnm}.$$

Все сказанное выше о симметрии и антисимметрии в равной степени применимо и к верхним индексам.

Упражнения

1. Сколько различных составляющих содержится в абсолютно симметричном объекте третьего порядка?

2. Показать, что антисимметричный объект третьего порядка имеет только шесть отличных от нуля составляющих, одинаковых по величине.

3. Доказать, что если a_{mn} антисимметричен, то $a_{mn}x^m x^n = 0$, и обратно, если это уравнение верно для всех значений переменных x^r, то a_{mn} антисимметричен.

4. Если a_{rs} есть объект второго порядка, удовлетворяющий уравнению $ba_{rs} + ca_{sr} = 0$, то показать, что либо $b = -c$ и a_{rs} симметричен, либо $b = c$ и a_{rs} антисимметричен.

(Индексы r и s могут принимать любое значение из 1, 2, 3, и, следовательно, записанное выше уравнение может быть переписано в эквивалентной форме $ba_{sr} + ca_{rs} = 0$. Сложив эти два уравнения, получим $(b + c)(a_{rs} + a_{sr}) = 0$. Следовательно, либо $b = -c$, либо $a_{rs} = -a_{sr}$.)

§ 5. Антисимметричный объект третьего порядка. Символы Кронекера

Пусть a_{rst} — абсолютно антисимметричный объект третьего порядка, т. е. его составляющие изменяются по знаку, но не по абсолютному значению, при перемене мест любых двух из индексов. Составляющие могут иметь только три следующих различных значения:

а) 0, когда любые два индекса равны;

б) $+a_{123}$, когда rst является *четной* перестановкой чисел 1, 2, 3;

в) $-a_{123}$, когда rst является *нечетной* перестановкой чисел 1, 2, 3.

Обозначим через e_{rst} антисимметричный объект, составляющие которого имеют значения 0, $+1$, -1, и будем называть его e-объектом. Пусть мы имеем $e_{123} = +1$; если a_{rst} — любой антисимметричный объект третьего порядка, то

$$a_{rst} = a_{123}e_{rst}. \tag{13}$$

Точно так же можно считать все индексы верхними; тогда получим соответствующий антисимметричный объект e^{rst}, составляющие которого имеют те же самые значения, что и у e_{rst}. Мы увидим, что оба эти объекта имеют большое значение в теории определителей.

Из двух объектов e_{rst} и e^{rst} мы сможем получить другие объекты, воспользовавшись операциями умножения и свертывания. После умножения мы получаем объект шестого порядка

$$\boxed{\delta^{rst}_{mnp} = e^{rst}e_{mnp}.} \tag{14}$$

Вспомнив значения, которые могут принимать составляющие e-объектов, мы видим, что составляющие нового объекта имеют следующие значения:

а) 0, когда два или больше нижних (или верхних) индексов одинаковы;

б) $+1$, когда rst и mnp отличаются на *четное* число перестановок;

в) -1, когда rst и mnp отличаются на *нечетное* число перестановок.

Теперь свернем объект δ^{rst}_{mnp} таким образом, чтобы получить объект четвертого порядка:

$$\boxed{\delta^{rs}_{mn} = \delta^{rsp}_{mnp} = \delta^{rs1}_{mn1} + \delta^{rs2}_{mn2} + \delta^{rs3}_{mn3}.} \tag{15}$$

Во-первых, мы видим, что это выражение равно нулю, если r равно s или если m равно n. Во-вторых, если мы придадим r и s определенные значения, например равные 1 и 2 соответственно, то из (15) увидим, что

$$\delta^{12}_{mn} = \delta^{123}_{mn3}$$

и, следовательно, δ^{12}_{mn} исчезает, если m, n не является перестановкой 1 и 2; оно равно $+1$ для четной перестановки и -1 для нечетной. Мы получим те же самые результаты, если придадим r и s какие-либо другие определенные значения. Следовательно, составляющие δ^{rs}_{mn} имеют значения:

а) 0, когда два верхних или нижних индекса одинаковы, или когда один из верхних индексов имеет значение, не равное одному из нижних;

б) $+1$, когда r, s и m, n представляют собой одни и те же перестановки одних и тех же двух чисел;

в) -1, когда r, s и m, n представляют собой противоположные перестановки одних и тех же двух чисел.

Если мы свернем δ^{rs}_{mn} и разделим результат пополам, то получим объект второго порядка

$$\boxed{\delta^r_m = \frac{1}{2}\,\delta^{rn}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta^{r1}_{m1} + \delta^{r2}_{m2} + \delta^{r3}_{m3}\right).} \tag{16}$$

Положив в δ^r_m $r = 1$, получим

$$\delta^1_m = \frac{1}{2}\left(\delta^{12}_{m2} + \delta^{13}_{m3}\right).$$

Мы видим, что δ^1_m исчезает, если $m \neq 1$, если $m = 1$, то $\delta^1_m = +1$. Аналогичный результат получится, если положить r равным 2 или 3. Следовательно, δ^r_m имеет значения:

а) 0, если r не равно m;

б) $+1$, если r равно m.

Все эти δ-объекты обычно называются *символами Кронекера*.

Упражнения

1. Доказать, что

$$\delta^r_r = 3, \quad \delta^{rst}_{mst} = 2\delta^r_m, \quad \delta^{rst}_{rst} = 3!$$

2. Доказать, что

$$\delta^{rst}_{tmn} = \delta^{rst}_{ntm} = \delta^{rs}_{mn}.$$

3. Доказать равенства:

$$\delta^r_s a^s = a^r, \qquad \delta^{rs}_{mn} a^{mn} = a^{rs} - a^{sr},$$

$$\delta^{rst}_{mnp} a^{mnp} = a^{rst} - a^{rts} + a^{srt} - a^{srt} + a^{trs} - a^{tsr}.$$

(Чтобы доказать второе равенство, придадим r, s определенные значения R, S. Мы знаем, что δ^{RS}_{mn} исчезает, за исключением случая, когда m, n принимают значения R, S, и мы имеем

$$\delta^{RS}_{RS} = -\delta^{RS}_{SR} = 1.$$

Следовательно, вспоминая наше условие в § 2 относительно индексов, обозначаемых заглавными буквами, имеем

$$\delta^{RS}_{mn} a^{mn} = \delta^{RS}_{RS} a^{RS} + \delta^{RS}_{SR} a^{SR} = a^{RS} - a^{SR},$$

что и является результатом, который нужно было доказать. Другие доказываются аналогично.)

§ 6. Определитель, образованный из составляющих объекта второго порядка a^r_s

Сейчас мы покажем, как наша система обозначений может быть использована в теории определителей. Определитель, элементами которого являются составляющие трехмерного объекта a^r_s, записывается так:

$$|a^r_s| \equiv \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Здесь верхний индекс означает строку, а нижний — столбец. Если определитель раскрыт по столбцам, то по определению он будет равен

$$\sum_{i,j,k}^{3} \pm a^i_1 a^j_2 a^k_3,$$

где i, j, k образуют перестановки чисел 1, 2, 3, а знак плюс или минус ставится в соответствии с четностью или нечетностью перестановки. Вспоминая свойства e-объектов, мы видим, что определитель равен

$$\sum e_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k,$$

или, используя условие о суммировании,

$$|a_s^r| = e_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k. \tag{18}$$

Если раскрыть определитель по строкам, легко видеть, что мы получим подобную же формулу

$$|a_s^r| = e^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3. \tag{19}$$

Рассмотрим объект

$$e_{ijk} a_r^i a_s^j a_t^k. \tag{20}$$

Докажем сначала, что он является абсолютно антисимметричным относительно r, s, t. Индексы i, j, k — немые; как мы видели, буква, обозначающая немой индекс, совершенно несущественна. Следовательно, мы не изменим величины суммы, если заменим k на индекс i, а i — на k. Таким образом,

$$e_{ijk} a_r^i a_s^j a_t^k = e_{kji} a_r^k a_s^j a_t^i = e_{kji} a_t^i a_s^j a_r^k = -e_{ijk} a_t^i a_s^j a_r^k,$$

так как перемена мест двух индексов в e_{ijk} изменяет знак. Следовательно, (20) изменяет знак, если r и t поменять местами. Мы получим тот же самый результат, если поменяем местами любые два индекса r, s, t, что и доказывает наше утверждение. Более того, (20) дает нам значение $|a_s^r|$, когда r, s, t принимают частные значения 1, 2, 3 соответственно, а из равенства (13) мы заключаем, что

$$\boxed{e_{ijk} a_r^i a_s^j a_t^k = |a_n^m| \, e_{rst}.} \tag{21}$$

Аналогично

$$\boxed{e^{ijk} a_i^r a_j^s a_k^t = |a_n^m| \, e^{rst}.} \tag{22}$$

Мы приняли, что верхние индексы обозначают строки, а нижние — столбцы. Равенства (21) и (22), следовательно, показывают, что перемена мест любых двух строк или столбцов изменяет знак определителя, но не изменяет его абсолютной величины. В частности, если две строки или два столбца одинаковы, определитель обращается в нуль.

Как пример силы этого метода обозначений мы докажем хорошо известную теорему об умножении двух определителей. Пусть элементы определителя будут a^r_s и b^r_s. Тогда

$$|a^r_s| \times |b^r_s| = |a^r_s|\, e_{ijk} b^i_1 b^j_2 b^k_3 = e_{mnp} a^m_i a^n_j a^p_k b^i_1 b^j_2 b^k_3 =$$
$$= e_{mnp} (a^m_i b^i_1)(a^n_j b^j_2)(a^p_k b^k_3).$$

Следовательно, если мы положим

$$c^r_s = a^r_m b^m_s = a^r_1 b^1_s + a^r_2 b^2_s + a^r_3 b^3_s,$$

то получим

$$|a^r_s| \times |b^r_s| = e_{mnp} c^m_1 c^n_2 c^p_3 = |c^r_s|,$$

что и доказывает формулу для произведения двух определителей

$$|a^r_s| \times |b^r_s| = |a^r_m b^m_s|. \tag{23}$$

Упражнения

1. Доказать, что $|\delta^r_s| = 1$.

2. Если $a^r_m b^m_s = \delta^r_s$, то $|a^r_s|$ есть величина, обратная $|b^r_s|$.

3. Если b^r_s обладает тем свойством, что $b^r_m b^m_s = \delta^r_s$, то показать, что $|b^r_s| = \pm 1$.

4. Показать, что

$$\delta^{rst}_{ijk} a^i_m a^j_n a^k_p = |a^r_s|\, \delta^{r\,s\,t}_{mnp},$$
$$\delta^{rst}_{ijk} a^i_r a^j_s a^k_t = 3!\; |a^r_s|.$$

5. Получить для определителя четвертого порядка результаты, аналогичные вышеуказанным, исследуя случай, когда индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4.

(Мы найдем, что в этом случае e-объекты являются объектами етвертого порядка и имеется четыре типа символов Кронекера).

§ 7. Алгебраическое дополнение элемента определителя

Если определитель (17) полностью раскрыт, то очевидно, что любой элемент a_i^r появляется по одному разу в некотором числе членов разложения. Коэффициент при a_i^r в этом разложении называется *алгебраическим дополнением элемента* a_i^r и обозначается через A_r^i. Наша цель состоит в том, чтобы найти явное выражение для алгебраического дополнения.

Рассмотрим элемент a_1^r. Из равенства (18) видно, что его алгебраическое дополнение есть $e_{rst}a_2^s a_3^t$; это может быть записано так:

$$e^{123}e_{rst}a_2^s a_3^t = \frac{1}{2!}\,e^{1jk}e_{rst}a_j^s a_k^t = \frac{1}{2!}\,\delta_{rst}^{1jk}a_j^s a_k^t,$$

или

$$A_r^1 = \frac{1}{2!}\,\delta_{rst}^{1jk}a_j^s a_k^t.$$

Подобный же результат получим для алгебраических дополнений A_r^2 и A_r^3. Итак, мы видим, что алгебраическое дополнение элемента a_i^r определяется формулой

$$\boxed{A_r^i = \frac{1}{2!}\,\delta_{rst}^{ijk}a_j^s a_k^t\,.} \tag{24}$$

Получив выражения для алгебраических дополнений A_r^i, мы можем теперь найти разложение определителя по элементам любой строки или столбца. Рассмотрим объект $a_r^m A_m^i$. Имеем

$$a_r^m A_m^i = \frac{1}{2!}\,\delta_{mst}^{ijk}a_r^m a_j^s a_k^t = \frac{1}{2!}\,e^{ijk}e_{mst}a_r^m a_j^s a_k^t =$$
$$= \frac{1}{2!}\,e^{ijk}e_{rjk}\,|a_q^p| = \frac{1}{2!}\,|a_q^p|\,\delta_{rjk}^{ijk}.$$

Следовательно, если обозначить определитель буквой A, то

$$\boxed{a_r^m A_m^i = A\delta_r^i.} \tag{25}$$

Эта формула дает разложение определителя по элементам r-го столбца. Читатель без труда докажет аналогичное соотношение

$$\boxed{a^i_m A^m_r = A\delta^i_r,} \tag{26}$$

которое является разложением определителя по элементам i-й строки.

Эти выражения могут быть написаны в несколько измененной форме, которая позднее окажется полезной. Если A не равно нулю, положим

$$\alpha^i_r = \frac{A^i_r}{A},$$

т. е. α^i_r есть алгебраическое дополнение элемента a^r_i в A, деленное на A*). Формулы (25) и (26) примут вид

$$\boxed{a^m_r \alpha^i_m = a^i_m \alpha^m_r = \delta^i_r.} \tag{27}$$

Упражнения

1. *Выразить алгебраические дополнения взаимного (или ассоциированного) определителя через элементы первоначального определителя.*

Взаимным с A назовем определитель, элементы которого равны A^i_r. Обозначим через $\bar{A}$ и $\bar{A}^r_i$ взаимный определитель и алгебраические дополнения его элементов. Мы хотим выразить эти элементы через A и его элементы. Имеем, по правилу умножения определителей

$$\bar{A}A = |A^i_m a^m_r| = |A\delta^i_r| = A^3 |\delta^i_r| = A^3.$$

Следовательно, если $A \neq 0$,

$$\bar{A} = A^2.$$

Применяя (25) к взаимному определителю, получим

$$\bar{A}^r_i A^i_s = \delta^r_s \bar{A}.$$

---

*) Мак-Коннел нигде не пользуется понятием обратной матрицы. Это сохранено и в переводе. (*Прим. ред.*)

Если мы умножим это равенство на a_j^s и просуммируем по s от 1 до 3, получим

$$\overline{A}_i^r \delta_j^i A = a_j^r \overline{A},$$

т. е.

$$\overline{A}_j^r A = a_j^r \overline{A} = a_j^r A^2.$$

Следовательно, если $A \neq 0$, то

$$\overline{A}_j^r = A a_j^r.$$

2. Доказать, что

$$e^{rst} A_r^i = e^{ijk} a_j^s a_k^t \quad \text{и} \quad e_{ijk} A_r^i = e_{rst} a_j^s a_k^t.$$

3. Доказать, что

$$\delta_{mn}^{i\ j} a_r^m a_s^n = a_r^i a_s^j - a_r^j a_s^i = \delta_{rst}^{ijk} A_k^t.$$

4. Показать, что

$$A = \frac{1}{3!} \delta_{rst}^{ijk} a_i^r a_j^s a_k^t, \qquad a_r^m A_m^r = 3A.$$

5. Доказать, что

$$\frac{\partial A}{\partial a_i^r} = A_r^i.$$

§ 8. Линейные уравнения

Система трех линейных уравнений может быть записана так:

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 &= b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 &= b^2, \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 &= b^3. \end{aligned}$$

Используя условие суммирования, получим

$$\boxed{a_m^r x^m = b^r.} \tag{28}$$

Найдем решение этой системы.

Предположим, что $A \neq 0$. Тогда, если умножить (28) на A_r^i и просуммировать по r от 1 до 3, то получим

$$A_r^i a_m^r x^m = A_r^i b^r$$

или

$$A\delta^i_m x^m = A^i_m b^m. \tag{29}$$

Но

$$\delta^i_m x^m = x^i;$$

следовательно, деля (29) на A, получаем

$$\boxed{x^i = \frac{A^i_m b^m}{A}.} \tag{30}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что (30) удовлетворяет заданным линейным уравнениям; мы видим также, что это решение единственное.

Если $A=0$, но все алгебраические дополнения элементов определителя не равны [illegible] то из (29) мы видим, что система уравнений несовместна, за исключением случая, когда $A^i_m b^m = 0$. Если это имеет место, то будет $A^i_r (a^r_s x^s - b^r) = 0$. Отсюда видно, что уравнения (28) линейно зависимы. Таким образом, мы должны удовлетворить только двум уравнениям, а третье удовлетворяется автоматически.

Особенно интересен случай, если в (28) $b^r = 0$. Тогда мы видим, что при $A \neq 0$ система уравнений имеет единственное решение $x_r = 0$. Если же $A = 0$, то уравнения не являются независимыми; тогда можно найти ненулевые значения x^r, которые удовлетворяют им. Таким образом, равенство $A = 0$ есть необходимое и достаточное условие того, что система уравнений $a^r_m x^m = 0$ имеет ненулевые решения.

Упражнения

1. Показать, что если все алгебраические дополнения A^i_r равны нулю, то $a^i_r a^j_s = a^j_r a^i_s$ и система уравнений (28) несовместна, за исключением случая, когда $b^i a^j_r = b^j a^i_r$.

2. Если условия задачи 1 выполнены, то показать, что эти три уравнения эквивалентны одному.

§ 9. Распространение предыдущих формул на объект a_{mn}

Мы развили теорию определителей, элементы которых имеют вид a^r_s. Очевидно, результаты будут те же самые, если элементы записаны в виде a_{rs}, т. е. когда оба индекса — нижние. Но если мы потребуем, чтобы немой индекс всегда появлялся один раз снизу и один раз сверху в каждом члене, то окажется необходимым несколько видоизменить наши формулы. Мы приведем здесь только результаты и предоставим получение их самому читателю.

Выписывая определитель полностью, имеем

$$A \equiv |a_{mn}| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{31}$$

так что первый индекс обозначает строку, а второй индекс — столбец.

Имеем

$$A = e^{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = e^{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{32}$$

и

$$\boxed{e^{ijk}a_{ir}a_{js}a_{kt} = e^{ijk}a_{ri}a_{sj}a_{tk} = Ae_{rst}.} \tag{33}$$

Для алгебраических дополнений элементов определителя получим

$$\boxed{A^{ir} = \frac{1}{2!}\, e^{ijk}e^{rst}a_{js}a_{kt},} \tag{34}$$

где A^{ir} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ir}.

Разложение определителя по элементам r-го столбца имеет вид

$$\boxed{a_{mr}A^{mi} = A\delta^i_r,} \tag{35}$$

а разложение по элементам r-й строки будет

$$\boxed{a_{rm}A^{im} = A\delta^i_r.} \tag{36}$$

Если A не равно нулю, то положим

$$\alpha^{ir} = \frac{A^{ir}}{A},$$

так что α^{ir} есть алгебраическое дополнение a_{ir} в A, деленное на величину A *). Тогда

$$\boxed{a_{mr}\alpha^{mi} = a_{rm}\alpha^{im} = \delta^i_r.} \tag{37}$$

---

*) См. примечание на стр. 27.

Если объект a_{mn} симметричен, то определитель называется *симметричным*; если же объект a_{mn} антисимметричен, то определитель называется антисимметричным.

Упражнения

1. Если a_{mn} симметричен, показать, что A^{mn} тоже симметричен.

2. Если a_{mn} — антисимметричный трехмерный объект, то показать, что A^{mn} также антисимметричен, а значение определителя A равно нулю.

3. Доказать, что

$$e_{rmn}A^{ir} = e^{ijk}a_{jm}a_{kn}, \quad e_{rmn}A^{ri} = e^{ijk}a_{mj}a_{nk}.$$

4. Решить систему уравнений $a_{rm}x^m = b_r$, учитывая сказанное в § 8.

5. Выписать формулы, относящиеся к определителю, образованному из составляющих объекта a^{mn}.

§ 10. Положительно определенная квадратичная форма. Характеристическое уравнение

Квадратичная форма $a_{mn}x^m x^n$ называется положительно определенной, если она равна нулю только при $x^r = 0$ и больше нуля при всех других вещественных значениях x^r.

Если нам даны две квадратичные формы $a_{mn}x^m x^n$ и $b_{mn}x^m x^n$, где a_{mn} и b_{mn} являются симметричными объектами, то часто встречается определитель

$$\begin{vmatrix} \theta a_{11} - b_{11} & \theta a_{12} - b_{12} & \theta a_{13} - b_{13} \\ \theta a_{21} - b_{21} & \theta a_{22} - b_{22} & \theta a_{23} - b_{23} \\ \theta a_{31} - b_{31} & \theta a_{32} - b_{32} & \theta a_{33} - b_{33} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель мы будем кратко обозначать через $|\theta a_{mn} - b_{mn}|$ и называть характеристическим. Докажем, что *если $a_{mn}x^m x^n$ есть положительно определенная квадратичная форма, то все корни характеристического уравнения*

$$\boxed{|\theta a_{mn} - b_{mn}| = 0} \tag{38}$$

действительны.

Предположим, что $\alpha+i\beta$ есть корень (38). Тогда (стр. 29) существуют такие не равные нулю числа $\lambda^r+i\mu^r$, что

$$[(\alpha+i\beta)\,a_{mn}-b_{mn}]\,(\lambda^n+i\mu^n)=0.$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части, имеем

$$\alpha a_{mn}\lambda^n-\beta a_{mn}\mu^n-b_{mn}\lambda^n=0, \tag{39}$$

$$\alpha a_{mn}\mu^n+\beta a_{mn}\lambda^n-b_{mn}\mu^n=0. \tag{40}$$

Если умножить равенство (39) на μ^m, а (40) на λ^m и просуммировать по m от 1 до 3, то после вычитания одного уравнения из другого получим

$$\beta\,(a_{mn}\lambda^m\lambda^n+a_{mn}\mu^m\mu^n)=(b_{mn}-b_{nm})\,\lambda^m\mu^n=0.$$

По условию, λ^r, μ^r не все равны нулю, а $a_{mn}x^m x^n$ положительно определена. Следовательно, формы $a_{mn}\lambda^m\lambda^n$ и $a_{mn}\mu^m\mu^n$ не могут обе равняться нулю, и мы получаем, что должно быть

$$\beta=0.$$

Это и доказывает действительность корней.

Если умножить (39) на λ^m, а (40) на μ^m и просуммировать по m от 1 до 3, то, складывая эти равенства, мы получим

$$\alpha\,(a_{mn}\lambda^m\lambda^n+a_{mn}\mu^m\mu^n)=b_{mn}\lambda^m\lambda^n+b_{mn}\mu^m\mu^n.$$

Если, кроме того, нам дано, что $b_{mn}x^m x^n$ — положительно определенная форма, то правая часть этого уравнения положительно определена, откуда следует, что α положительно. Итак, мы имеем следующий результат:

Если $a_{mn}x^m x^n$ и $b_{mn}x^m x^n$ — две положительно определенные квадратичные формы, то все корни характеристического уравнения (38) вещественны и положительны.

Упражнения

Доказать, что если $a_{mn}x^m x^n$ положительно определена, а b_{mn} — антисимметричный объект, то корни (38) либо равны нулю, либо чисто мнимые. Вывести отсюда, что определитель антисимметричного объекта нечетного числа измерений равен нулю.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Доказать, что если $a_{mn}x^m y^n=0$ для произвольных значений x^r и y^p, то $a_{mn}=0$.

2. Проверить численные соотношения

$$\delta^{i\,j\,k}_{mnp}\delta^{hlp}_{rs\,t}=\delta^{ijk}_{rst}\delta^{h\ l}_{mn},\qquad \delta^{i\,j\,k}_{mnp}\delta^{hnp}_{r\,s\,t}=2!\,\delta^{ijk}_{rst}\delta^{h}_{m},$$

$$\delta^{i\,j\,k}_{mnp}\delta^{mnp}_{r\,s\,t}=3!\,\delta^{ijk}_{rst}.$$

3. Проверить равенства

$$\delta^{r\ s}_{mn} = \begin{vmatrix} \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_m & \delta^s_n \end{vmatrix}, \quad \delta^{r\ s\ t}_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta^r_m & \delta^r_n & \delta^r_p \\ \delta^s_m & \delta^s_n & \delta^s_p \\ \delta^t_m & \delta^t_n & \delta^t_p \end{vmatrix}.$$

4. Доказать, что если a_{rs} и b_{rs} — два такие симметричные объекта, что

$$a_{rs}b_{tu} - a_{ru}b_{st} + a_{st}b_{ru} - a_{tu}b_{rs} = 0,$$

то

$$a_{rs} = kb_{rs}.$$

5. Доказать, что если $a_{mn}x^m x^n = b_{mn}x^m x^n$ для произвольных значений x^r, то

$$a_{mn} + a_{nm} = b_{mn} + b_{nm},$$

и, следовательно, если a_{mn} и b_{mn} симметричны, то

$$a_{mn} = b_{mn}.$$

6. Показать, что если a_{mn} есть либо симметричный, либо антисимметричный объект и $A = 0$, то x^r может быть выбрано так, чтобы $A^{mn} = kx^m x^n$. Как следствие вывести, что если A^{11}, A^{22}, A^{33} все равны нулю, то любое A^{mn} есть нуль. (Значения x^r таковы, что удовлетворяют системе уравнений $a_{mn}x^n = 0$.)

7. Показать, что если $A = 0$, то решения системы уравнений $a_{rm}x^m = 0$ удовлетворяют соотношениям

$$(x^1)^2 : (x^2)^2 : (x^3)^2 = A^{11} : A^{22} : A^{33}.$$

8. Показать, что если α^{rs} — объект, удовлетворяющий условию $a_{rm}\alpha^{sm} = \delta^s_r$, то α^{rs} являются алгебраическими дополнениями a_{rs} в определителе A, деленными на величину A *).

(Имеем $A^{rp}a_{rm}\alpha^{sm} = \delta^s_r A^{rp}$, т. е. $A\alpha^{sp} = A^{sp}$.)

9. *Производная определителя.* Показать, что если элементы a^r_s являются функциями переменной x^r, то

$$\frac{\partial A}{\partial x^r} = A^n_m \frac{\partial a^m_n}{\partial x^r},$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x^r} = e_{mnp} \frac{\partial a^m_1}{\partial x^r} a^n_2 a^p_3 + e_{mnp} a^m_1 \frac{\partial a^n_2}{\partial x^r} a^p_3 + e_{mnp} a^m_1 a^n_2 \frac{\partial a^p_3}{\partial x^r} = \right.$$
$$\left. = \frac{\partial a^m_1}{\partial x^r} A^1_m + \ldots \right].$$

---

*) См. примечание на стр. 27.

10. Пусть $h_{mn}=\theta a_{mn}-b_{mn}$, где a_{mn} и b_{mn} — два симметричных объекта, причем $a_{mn}x^m x^n$ положительно определена, и пусть H и H^{mn} будут определитель $|h_{mn}|$ и алгебраическое дополнение его элементов. Тогда:

а) доказать, что $a_{mn}H^{mr}H^{ns}=HH'^{rs}-H'H^{rs}$, где штрихи обозначают дифференцирование по θ;

б) вывести отсюда, что если θ есть двукратный корень уравнения $H=0$, то он есть также корень каждого из уравнений $H^{rs}=0$.

11. Проверить следующие формулы, связывающие A, a_{mn} и α^{mn}:

а) $$\frac{\partial a_{mn}}{\partial a_{rs}}=\delta^r_m\delta^s_n, \qquad \frac{\partial \alpha^{mn}}{\partial \alpha^{rs}}=\delta^m_r\delta^n_s;$$

б) $$\frac{\partial \alpha^{mn}}{\partial a_{rs}}=-\alpha^{ms}\alpha^{rn}, \qquad \frac{\partial a_{mn}}{\partial \alpha^{rs}}=-a_{ms}a_{rn};$$

в) $$\frac{\partial(\log A)}{\partial a_{rs}}=\alpha^{rs}, \qquad -\frac{\partial(\log A)}{\partial \alpha^{rs}}=a_{rs};$$

г) $$\frac{\partial^2 A}{\partial a_{mn}\,\partial a_{rs}}=A(\alpha^{mn}\alpha^{rs}-\alpha^{ms}\alpha^{rn}),$$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^{mn}\,\partial \alpha^{rs}}=A(a_{ms}a_{rn}-a_{mn}a_{rs}).$$

12. Показать, что если a^r_s удовлетворяет соотношениям $a^r_m a^m_s=\delta^r_s$, то *либо*

$$A=1 \text{ и } |a^r_s-\delta^r_s|=0, \text{ *либо* } A=-1 \text{ и } |a^r_s+\delta^r_s|=0.$$

$$[\,|a^r_s\pm\delta^r_s|\,A=|a^r_m a^m_s\pm\delta^r_m a^m_s|=|\delta^r_s\pm a^r_s|=\pm|a^r_s\pm\delta^r_s|\,].$$

13. *Якобиан*. Если y^1, y^2, y^3 — функции от x^1, x^2, x^3, то *якобиан* этих функций мы обозначим через

$$\frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)},$$

т. е.

$$\frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}=\left|\frac{\partial y^r}{\partial x^s}\right|.$$

Доказать, что если z^1, z^2, z^3 являются функциями y, то

$$\left|\frac{\partial z^r}{\partial x^s}\right|=\left|\frac{\partial z^r}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right|=\left|\frac{\partial z^r}{\partial y^s}\right|\left|\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right|.$$

14. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left\{\log\left|\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right|\right\}=\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^r\,\partial x^n}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial y^m}.$$

15. Доказать, что

$$\left|\frac{\partial (y^i, y^j, y^k)}{\partial (x^r, x^s, x^t)}\right| = \left|\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right| \delta^{ijk}_{rst}.$$

16. *Окаймленный определитель.* Определитель A называется окаймленным, если в него добавлены строка и столбец, например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{mn} & u_m \\ v_n & w \end{vmatrix}.$$

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{mn} & u_m \\ v_n & w \end{vmatrix} = Aw - A^{mn}u_m v_n.$$

17. Доказать, что если A^{mn} есть алгебраическое дополнение a_{mn} в определителе $|a_{mn}|$, то

$$e_{pmn}e_{qrs}A^{pq} = a_{mr}a_{ns} - a_{ms}a_{nr}.$$

18. Показать, что $|A^{mn}b_{mr}b_{ns}| = A^2B^2$ и что алгебраические дополнения элементов в $|A^{mn}b_{mr}b_{ns}|$ равны $Aa_{mn}B^{mr}B^{ns}$.

ГЛАВА II

ТЕНЗОРЫ

§ 1. Линейные преобразования

Пусть переменные x^1, x^2, x^3 преобразуются в новые $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ с помощью линейного преобразования

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= c^1_1 x^1 + c^1_2 x^2 + c^1_3 x^3,\\
\bar{x}^2 &= c^2_1 x^1 + c^2_2 x^2 + c^2_3 x^3,\\
\bar{x}^3 &= c^3_1 x^1 + c^3_2 x^2 + c^3_3 x^3,
\end{aligned}$$

где c^r_s — константы. Применяя условие о суммировании, можем записать эту систему уравнений в виде

$$\boxed{\bar{x}^r = c^r_s x^s.} \tag{1}$$

Мы предполагаем, что определитель преобразования $c = |c^r_s|$ не равен нулю. Пусть γ^s_r является алгебраическим дополнением элемента c^r_s в определителе c, деленным на величину c*). Тогда

$$c^r_m \gamma^m_s = \gamma^r_m c^m_s = \delta^r_s, \tag{2}$$

и мы можем разрешить систему уравнений (1) относительно x

$$\boxed{x^r = \gamma^r_m \bar{x}^m.} \tag{3}$$

Это показывает, что данное преобразование *обратимо*.

*) См примечание на стр. 27.

Кроме того, если $c^r_s = \delta^r_s$, мы имеем

$$\bar{x}^r = x^r,$$

т. е. *тождественное* преобразование.

Если перейти сначала от переменных x^r к $\bar{x}^r$ по (1), а затем от переменных $\bar{x}^r$ к $\bar{\bar{x}}^r$ при помощи преобразования

$$\bar{\bar{x}}^r = c'^r_s \bar{x}^s,$$

то мы видим, что переход от первоначальных переменных x^r к $\bar{\bar{x}}^r$ определяется формулой

$$\bar{\bar{x}}^r = c''^r_s x^s,$$

где

$$c''^r_s = c'^r_m c^m_s.$$

Это преобразование, следовательно, также линейное.

Говорят, что совокупность преобразований образует группу, когда она удовлетворяет следующим условиям: 1) если преобразования от x^r к $\bar{x}^r$ и от $\bar{x}^r$ к $\bar{\bar{x}}^r$ принадлежат данной совокупности, то преобразование от x^r к $\bar{\bar{x}}^r$ также принадлежат к ней; 2) совокупность преобразования содержит тождественное и обратное преобразования.

Таким образом, совокупность линейных преобразований образует группу.

Упражнения

1. Показать, что $\gamma = |\gamma^r_s| = \frac{1}{c}$.
2. Доказать, что $|c''^r_s| = |c'^r_s| \cdot |c^r_s|$.

§ 2. Инварианты, контравариантные и ковариантные векторы

Теперь мы поставим следующий вопрос. Пусть даны объекты различных порядков, о которых шла речь в предыдущей главе. Каким образом должны преобразовываться эти объекты, если к переменным применить линейное преобразование?

Этот вопрос приводит нас к определению тензора. *Тензор есть частный случай объекта, рассмотренного в предыдущей главе, составляющими которого являются числа или функции, при линейном преобразовании переменных* (1) *преобразующиеся по некоторому определенному закону.* Следовательно, существуют тензоры нулевого, первого, второго, третьего и т. д. порядков, так же как существуют всякие другие объекты этих же порядков.

Сначала рассмотрим объект *нулевого* порядка, т. е. просто число или функцию. Если этот объект имеет *одно и то же* значение и в новых переменных $\bar{x}^r$ и в старых переменных x^r, то он называется *скаляром*, или *инвариантом*, или *тензором нулевого порядка*. Следовательно, если a есть инвариант, то

$$\boxed{\bar{a} = a,} \tag{4}$$

где $\bar{a}$ есть значение данного объекта в новых переменных.

Теперь рассмотрим объкт *первого* порядка. Простейший тип такого объекта есть совокупность самих переменных, а именно x^r. Составляющие этого объекта преобразуются следующим образом:

$$\bar{x}^r = c^r_s x^s.$$

Следовательно, эта формула дает один из способов, с помощью которого может быть преобразован объект первого порядка. Любой объект, составляющие которого преобразуются по этому закону, называется *контравариантным тензором первого порядка*, или, иначе, *контравариантным вектором*. Таким образом, a^r есть контравариантный вектор, если при линейном преобразовании переменных (1) его преобразованные составляющие определяются формулами

$$\boxed{\bar{a}^r = c^r_s a^s.} \tag{5}$$

Имеется и другой способ преобразования элементов объекта первого порядка. Мы уже видели, что коэффициенты линейной формы переменных x также образуют объект первого порядка. Таким образом, коэффициенты линейной формы $a_m x^m$ являются составляющими объекта a_r. Предположим, что составляющие a_r преобразуются таким образом, что линейная форма $a_m x^m$ остается *инвариантной* относительно преобразования переменных (1). Если мы обозначим через $\bar{a}_r$ новые составляющие объекта a_r (после преобразования), то получим

$$\bar{a}_m \bar{x}^m = a_m x^m,$$

так как эта линейная форма есть инвариант. Тогда из (3) следует

$$\bar{a}_m \bar{x}^m = a_m \gamma_p^{\ m} \bar{x}^p.$$

Поскольку немой индекс может быть обозначен любой буквой, то эту систему уравнений можно записать в виде

$$(\bar{a}_p - a_m \gamma_p^m)\, \bar{x}^p = 0.$$

Если это соотношение справедливо для всех значений переменных $\bar{x}^r$, то должно выполняться равенство

$$\boxed{\bar{a}_r = \gamma_r^m a_m.} \tag{6}$$

Это преобразование, очевидно, отлично от преобразования, задаваемого формулой (5). Объект первого порядка, составляющие которого преобразуются по этому закону, называется *ковариантным тензором первого порядка* или *ковариантным вектором*.

Таким образом, у нас есть два типа тензоров первого порядка, и мы условимся различать их с помощью положения индекса. Если тензор контравариантен, мы используем верхний индекс, если же он ковариантен, то нижний. Другими словами, *верхний индекс обозначает контравариантность, а нижний индекс — ковариантность.*

Упражнения

1. Показать, что

$$a^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \bar{a}^s, \quad \bar{a}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} a_s.$$

$$\left[c_s^r = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}, \quad \gamma_s^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right].$$

2. Проверить формулы

$$a^r = \gamma^r_m \bar{a}^m, \quad a_r = c^m_r \bar{a}_m.$$

3. Показать, что если φ есть инвариантная функция переменных x^r, то объект $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$ является ковариантным вектором.

4. Показать, что дифференциалы переменных dx^r образуют контравариантный вектор.

§ 3. Тензоры любого порядка

Нашим следующим шагом являются исследование объектов порядка выше первого и рассмотрение вопроса о законе их преобразования.

Рассмотрим объект второго порядка. Простейшим видом такого объекта является произведение двух векторов или объектов первого порядка. Такое произведение может быть трех различных типов: 1) произведение двух контравариантных векторов, 2) произведение двух ковариантных векторов, 3) произведение контравариантного и ковариантного векторов.

1) Например, $(a^r b^s)$ есть объект второго порядка, который является произведением двух контравариантных векторов a^r, b^r. Составляющие этого объекта в новых переменных определяются формулами

$$(\bar{a}^r \bar{b}^s) = (c^r_m a^m)\ (c^s_n b^n) = c^r_m c^s_n (a^m b^n).$$

Следовательно, объект второго порядка a^{rs} может иметь закон преобразования

$$\boxed{\bar{a}^{rs} = c^r_m c^s_n a^{mn}.} \tag{7}$$

Объект, составляющие которого преобразуются по этому закону, называется *контравариантным тензором второго порядка*. Он обозначается при помощи двух верхних индексов.

2) Далее, $(a_r b_s)$ есть объект второго порядка, который является произведением двух ковариантных векторов a_r, b_r. Его составляющие в новых переменных будут

$$(\bar{a}_r \bar{b}_s) = (\gamma^m_r a_m)\ (\gamma^n_s b_n) = \gamma^m_r \gamma^n_s (a_m b_n).$$

Следовательно, объект второго порядка a_{rs} может преобразовываться по закону

$$\boxed{\bar{a}_{rs} = \gamma_r^m \gamma_s^n a_{mn}.} \tag{8}$$

Объект, преобразующийся по этому закону, называется *ковариантным тензором второго порядка*. Он обозначается при помощи двух нижних индексов.

3) Наконец, $(a^r b_s)$ есть объект второго порядка, образованный умножением контравариантного вектора a^r и ковариантного вектора b_r. Преобразование этого объекта производится по формулам

$$(\bar{a}^r \bar{b}_s) = (c_m^r a^m)(\gamma_s^n b_n) = c_m^r \gamma_s^m (a^m b_n).$$

Следовательно, объект второго порядка a_s^r может преобразовываться по закону

$$\boxed{\bar{a}_s^r = c_m^r \gamma_s^n a_n^m.} \tag{9}$$

Такой объект называется *смешанным тензором второго порядка*. Он обозначается при помощи одного верхнего и одного нижнего индексов.

Для читателя не составит особой трудности обобщение этих определений на тензоры любого порядка. Рассмотрим, для примера, тензор третьего порядка. Очевидно, один из таких объектов можно получить, перемножив три вектора. Возьмем объект $(a^r b_s c_t)$, полученный перемножением контравариантного вектора a^r и двух ковариантных векторов b_r, c_r. Согласно правилу преобразования векторов получим

$$(\bar{a}^r \bar{b}_s \bar{c}_t) = (c_m^r a^m)(\gamma_s^n b_n)(\gamma_t^p c_p) = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^p (a^m b_n c_p).$$

Следовательно, объект a_{st}^r может быть преобразован по закону

$$\boxed{\bar{a}_{st}^r = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^p a_{np}^m.} \tag{10}$$

Любой объект a_{st}^r, составляющие которого преобразуются по этому закону, называется *смешанным тензором третьего порядка*, контравариантным по верхнему индексу и ковариантным по обоим нижним индексам.

В качестве мнемонического правила для запоминания закона преобразования тензоров можно предложить следующее.

а) Типичный контравариантный вектор есть x^r, и все контравариантные векторы преобразуются по тому же закону, что и x^r.

б) Типичным ковариантным вектором является $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$, где φ есть инвариантная функция переменных x^r, и все ковариантные векторы преобразуются по тому же закону.

в) Типичным тензором любого порядка является произведение векторов, образованное следующим образом: для каждого контравариантного (или верхнего) индекса мы берем контравариантный вектор в качестве сомножителя и для каждого ковариантного (или нижнего) индекса мы берем ковариантный вектор в качестве сомножителя.

Отметим, что каждая составляющая тензора в новых переменных является линейной комбинацией его составляющих в старых переменных. Следовательно, если *все* составляющие тензора в исходной системе переменных равны нулю, то все они равны нулю и в новой системе переменных. Это наиболее важное свойство тензоров.

Другим важным свойством, которое следует отметить, является *произвольность тензоров.* Мы можем взять в качестве составляющих тензора в одной системе переменных любой набор чисел в требуемом количестве и определить его компоненты в любых других переменных с помощью системы линейных уравнений, выражающей закон преобразования данного тензора. Таким образом, если мы хотим получить трехмерный тензор третьего порядка, контравариантный относительно одного индекса и ковариантный относительно двух других, мы можем взять любой набор 3^3 чисел a^r_{st} в качестве составляющих тензора в переменных x^r; тогда составляющие $\bar{a}^r_{st}$ в переменных $\bar{x}^r$ будут определяться системой равенств (10).

Упражнения

1. Написать законы преобразования для различных типов тензоров четвертого порядка.

2. Показать, что $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^r\,\partial x^s}$ есть ковариантный тензор второго порядка, если φ является инвариантной функцией от x^m.

3. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st}=b^r_s c_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, c_t в некоторой системе переменных,

то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

4. Показать, что δ^r_s, δ^{rs}_{mn}, δ^{rst}_{mnp} являются тензорами, т. е. что символы Кронекера являются тензорами. [Эти результаты следуют из уравнеиия (2), стр. 36.]

5. Показать, что если тензор в некоторой системе переменных является симметричным (или антисимметричным), то в любой другой системе переменных он также будет симметричным (или антисимметричным). Такой тензор называется *симметричным* (или *антисимметричным*).

§ 4. Сложение, умножение и свертывание тензоров

В предыдущей главе мы видели, что сложение соответствующих составляющих двух объектов *одного и того же порядка и типа* дает другой объект того же порядка и типа. Таким образом, если мы имеем два объекта третьего порядка a^r_{st} и b^r_{st}, то

$$c^r_{st} = a^r_{st} + b^r_{st} \tag{11}$$

определяет третий объект, называемый суммой двух исходных. Мы сейчас покажем, что если a^r_{st} и b^r_{st} являются тензорами третьего порядка, то и c^r_{st} также является тензором третьего порядка. Для составляющих в новой системе переменных имеем

$$\bar{c}^r_{st} = \bar{a}^r_{st} + \bar{b}^r_{st} = c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t a^m_{np} + c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t b^m_{np} =$$

$$= c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t (a^m_{np} + b^m_{np}) = c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t c^m_{np},$$

что и доказывает наше утверждение. Таким образом, операция *сложения*, примененная к двум тензорам, дает тензор того же самого порядка и типа. Все это справедливо, конечно, и для вычитания, как частного случая сложения. Из этих результатов непосредственно следует, что система равенств

$$a^r_s = b^r_s$$

образует так называемое *тензорное уравнение*. Под этим следует понимать, что если эти равенства справедливы в одних каких-нибудь переменных, то они справедливы и во всех других переменных. Чтобы доказать это, нужно просто заметить, что у тензора $(a_s^r - b_s^r)$ в одной из систем переменных все составляющие равны нулю и, следовательно, то же самое имеет место во всех других переменных.

Мы выше нашли, что при умножении каждой составляющей одного объекта на каждую составляющую другого в результате получается объект, порядок которого равен сумме порядков обоих исходных объектов. Таким образом, если a_{st}^r является объектом третьего порядка, а b_q^p — объектом второго порядка, то объект c_{qst}^{pr}, называемый произведением исходных объектов, определяется равенствами

$$c_{qst}^{pr} = b_q^p a_{st}^r \tag{12}$$

и является объектом пятого порядка. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения доказательство того, что если a_{st}^r и b_q^p являются тензорами указанного индексами типа, то c_{qst}^{pr} есть тензор пятого порядка с правильным расположением как нижних, так и верхних индексов. Следовательно, процесс *умножения*, примененный к тензорам, снова приводит к тензорам. Отметим, что в операциях сложения и умножения нижние индексы остаются нижними, а верхние — верхними.

Наконец, рассмотрим операцию *свертывания*; мы увидим, что, будучи применена к тензорам, она также снова приводит к тензорам. Возьмем смешанный тензор, для простоты, например, третьего порядка, и обозначим его a_{st}^r. Если мы сделаем индексы r и t одинаковыми, то придем к объекту a_{sr}^r. Если мы вспомним, что немой индекс означает суммирование от 1 до 3, то очевидно, что порядок объекта уменьшился на две единицы — за счет одного ковариантного и одного контравариантного индекса.

Покажем, что свернутый тензор также является тензором. Обозначив, как обычно, преобразованные составляющие буквами с чертой сверху, имеем

$$\bar{a}_{st}^r = c_m^r \gamma_s^n \gamma_t^p a_{np}^m.$$

Производя свертку по r и t, получаем выражение

$$\bar{a}^r_{sr} = c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_r a^m_{np} = \delta^p_m \gamma^n_s a^m_{np} = \gamma^n_s a^p_{np},$$

которое показывает, что $b_s = \bar{a}^r_{sr}$ есть ковариантный вектор.

Итак, мы видим, что три элементарные операции: сложение, умножение и свертывание — являются тензорными операциями, и любая комбинация этих операций, выполненная над заданными тензорами, приводит, очевидно, к новым тензорам. Следовательно, мы можем часто распознать тензорный характер какого-нибудь объекта, заметив, что он образован при помощи этих операций над известными тензорами. Например, если a_{mn} и b^{mn} — два тензора, то $a_{mn}b^{mn}$ есть инвариант, так как он образован умножением двух тензоров и их свертыванием по обеим парам индексов.

Упражнения

1. Показать, что $a^r_{st}b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

2. Показать, что равенства $(a^r_{st}+b^r_{st})x^t = k^r_s$ образуют систему тензорных уравнений.

§ 5. Обратный тензорный признак

Пусть нам дана система уравнений вида

$$A^r_{st}B^{st} = C^r,$$

связывающая объекты A^r_{st}, B^{st}, C^r.

Если известно, что A^r_{st} и B^{st} — тензоры типов, определенных расположением их индексов, то мы можем немедленно заключить, что C^r есть тензор, так как он получен умножением и последующим свертыванием двух других тензоров. Очень важно уметь распознавать тензоры, так сказать, обратным способом: именно, если мы знаем, что C^r и B^{st} — тензоры, можем ли мы заключить, что A^r_{st} есть также тензор?

Существует следующий признак, который мы установим в простейшей форме, но который может быть обобщен, очевидно, на объект любого порядка.

Если нам дано соотношение

$$A(r,\ s,\ t)\,B^{st} = C^r, \tag{13}$$

где известно, что C^r является некоторым определенным тензором, а B^{st} — произвольным тензором, то $A(r, s, t)$ также есть тензор, который может быть представлен как A^r_{st}.

Для доказательства этой теоремы сделаем линейное преобразование (1) (стр. 36) переменных x^r в $\bar{x}^r$, причем буквы с чертой сверху будут относиться к новым переменным. Имеем

$$A(r, s, t)\bar{B}^{st}=\bar{C}^r=c^r_m C^m=c^r_m A(m, n, p) B^{np}$$

и

$$B^{np}=\gamma^n_s\gamma^p_t\bar{B}^{st}.$$

Поэтому

$$[\bar{A}(r, s, t)-c^r_m\gamma^n_s\gamma^p_t A(m, n, p)]\bar{B}^{st}=0. \tag{14}$$

Но B^{st} есть совершенно произвольный тензор и, следовательно, $\bar{B}^{st}$ — тоже произвольный тензор. Поэтому все коэффициенты при $\bar{B}^{st}$ в (14) должны равняться нулю, или

$$\bar{A}(r, s, t)=c^r_m\gamma^n_s\gamma^p_t A(m, n, p).$$

Но это и показывает, что $A(r, s, t)$ является тензором третьего порядка и что его правильная запись есть A^r_{st}.

Важно отметить, что тензор B^{st} должен быть совершенно произвольным, причем степень произвола не должна быть ограничена существованием симметрии или антисимметрии.

Особенно существенным является то, что у произвольных тензоров мы можем давать произвольное значение какой-нибудь одной из составляющих и считать все остальные равными нулю.

Существует важный частный случай доказанной теоремы. Предположим, что x^r, y^r, z_r — три произвольных вектора, из которых два первых контравариантны и последний ковариантен. Если мы знаем, что $A^r_{st}x^s y^t z_r$ есть инвариант, то на основании нашей теоремы заключаем, что A^r_{st} есть тензор третьего порядка, т. е. *коэффициенты инвариантной полилинейной формы в переменных x^r, y^r, z_r образуют тензор*. Это свойство иногда принимают за *определение* тензора; из него легко вывести закон преобразования тензоров при линейном преобразовании переменных.

Упражнения

1. Доказать, что если в соотношении (13) B^{st} есть *симметричный*, а в остальном произвольный тензор, то $\{A(r, s, t)+A(r, t, s)\}$ есть тензор. Как следствие вывести, что если $A(r, s, t)$ есть объект, симметричный относительно индексов s, t, то $A(r, s, t)$ есть тензор.

2. Доказать, что если в соотношении (13) B^{st} есть *антисимметричный*, а в остальном произвольный тензор, то $\{A(r, s, t)-A(r, t, s)\}$ есть тензор, а если $A(r, s, t)$ есть объект, антисимметричный относительно s, t, то $A(r, s, t)$ есть тензор.

3. Показать, что если $a_{mn}x^m x^n$ есть инвариант, а a_{mn} — симметричный объект, то a_{mn} есть тензор.

4. Вывести из результатов задачи 3 стр. 23, что символы Кронекера являются тензорами.

5. Показать, что если a_{mn} есть тензор, то α^{mn} — алгебраическое дополнение a_{mn} в $|a_{mn}|$, деленное на $|a_{mn}|$, также есть тензор.

(Пусть k^r — произвольный вектор, тогда $k_s = a_{sr}k^r$ есть также произвольный вектор. Далее, $\alpha^{st}k_s = k^t$, после чего применяем доказанный выше тензорный признак.)

§ 6. Псевдотензоры

Расширим теперь определение тензора, введя новое понятие *относительного* тензора, или *псевдотензора*, отличающееся от того понятия, которым мы пользовались до настоящего момента.

До сих пор объект a^r_{st} назывался тензором, если он преобразовывался по закону

$$\bar{a}^r_{st} = c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t a^m_{n\ p}. \tag{15}$$

Преобразование самих переменных x^r в переменные $\bar{x}^r$ имеет вид

$$x^r = \gamma^r_s \bar{x}^s, \tag{16}$$

причем детерминант этого преобразования

$$\gamma = |\gamma^i_j| \tag{17}$$

не равен нулю.

Мы распространяем название тензора на объект a^r_{st}, который преобразуется по закону

$$\bar{a}^r_{st} = (\gamma)^M c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t a^m_{n\ p}, \tag{18}$$

где под выражением $(\gamma)^M$ подразумевается определитель γ, возведенный в степень M. Закон преобразования (18) отличается от (15) только множителем $(\gamma)^M$ в правой части. Закон преобразования (15) есть только частный случай закона (18), соответствующий $M=0$, так что наше новое определение тензора включает в себя старое. Объект, который преобразуется по закону (18), назовем *псевдотензором*, а число M — его *весом*. Тензоры, о которых шла речь до сих пор, все имели вес, равный *нулю*; если хотят отличить их от псевдотензоров, то называют *абсолютными* или *истинными* тензорами.

Обычно мы будем под словом тензор понимать истинный тензор, если только противоположное не оговорено специально. Псевдотензоры первого и нулевого порядков называются соответственно *псевдовекторами* и *псевдоскалярами*. Мы будем заниматься главным образом истинными векторами и скалярами.

Важно отметить, что если нам известен какой-нибудь псевдоскаляр веса, равного единице, мы можем немедленно превратить любой псевдотензор в истинный тензор. Для этого предположим, что величина K есть псевдоскаляр веса 1 и что a^r_{st} есть псевдотензор веса M.

Закон преобразования величины $\overline{K}$ определяется формулой

$$\overline{K}=\gamma K$$

и, следовательно,

$$\overline{K}^M=(\gamma)^M K^M,$$

где обе части возведены в степень M. Другими словами, K^M есть псевдоскаляр веса M. Кроме того,

$$\overline{a}^r_{st}=(\gamma)^M c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t a^m_{np};$$

следовательно,

$$(\overline{K}^{-M}\overline{a}^r_{st})=c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t (K^{-M} a^m_{np}),$$

т. е. $(K^{-M}a^r_{st})$ есть истинный тензор. Впоследствии мы будем всюду, где это возможно, пользоваться таким способом для превращения псевдотензоров в истинные тензоры и, следовательно, мы будем почти всегда иметь дело с истинными тензорами.

Мы предоставляем читателю проверку следующих свойств псевдотензоров, напоминающих свойства истинных тензоров.

1. *Сложение.* Если мы складываем соответствующие составляющие двух псевдотензоров *одного и того же порядка и типа* и имеющих *один и тот же вес* M, мы получаем псевдотензор веса M, который называется *суммой* двух исходных псевдотензоров.

2. *Умножение.* Если мы умножаем каждую составляющую псевдотензора веса M и порядка m на каждую составляющую псевдотензора веса N и порядка n, мы получаем псевдотензор веса $M+N$ и порядка $m+n$, который называется *произведением* двух исходных псевдотензоров.

3. *Свертывание.* В результате операции свертывания по верхнему и нижнему индексам получается псевдотензор того же самого веса, что и первоначальный, но порядка уменьшенного на две единицы.

4. *Обратный тензорный признак.* Если нам дано соотношение

$$A(r,\ s,\ t)\,B^{st}=C^r,$$

где известно, что C^r есть псевдотензор веса M, а B^{st} есть произвольный псевдотензор веса N, то $A(r,\ s,\ t)$ есть псевдотензор веса $M-N$, который следует обозначать A^r_{st}. Доказательства этих предложений совершенно такие же, как и для истинных тензоров; единственное отличие состоит в необходимости введения в законы преобразования добавочных множителей.

Упражнения

1. *Проверить, что e_{rst} и e^{rst} — псевдотензоры веса -1 и 1 соответственно.*

Из формул (21) и (22) стр. 24 имеем

$$ce^{rst}=e^{mnp}c^r_m c^s_n c^t_p$$

и

$$\gamma e_{rst}=e_{mnp}\gamma^m_r\gamma^n_s\gamma^p_t.$$

Мы знаем, что $c=1/\gamma$ и, следовательно, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$e_{rst}=(\gamma)^{-1}\gamma^m_r\gamma^n_s\gamma^p_t e_{mnp},$$

$$e^{rst}=\gamma c^r_m c^s_n c^t_p e^{mnp}.$$

Таким образом, e-объекты имеют те же самые составляющие в любых переменных, именно 0, 1, -1 в соответствии с перестановкой индексов. Следовательно, e-объекты и в переменных $\bar{x}^r$ могут быть обозначены через e_{rst} и e^{rst}. Поэтому два последних равенства дают законы преобразования e-объектов, и мы непосредственно видим, что e_{rst} есть ковариантный псевдотензор третьего порядка веса -1, а e^{rst} есть контраварнантный псевдотензор третьго порядка веса 1.

2. Вывести из задачи 1, что символы Кронекера являются *истинными тензорами*.

3. Показать, что если все составляющие псевдотензора равны нулю в одной системе переменных, то они будут равны нулю и в любой другой системе.

4. Показать, что если все составляющие двух псевдотензоров одного и того же порядка и веса равны в одной системе переменных, то они равны и в любой другой системе.

(Два тензора, составляющие которых равны друг другу в любой системе переменных, называются *равными*.)

5. Показать, что если a^r_{st} есть псевдотензор, зависящий от параметра α, то производная этого псевдотензора по параметру есть псевдотензор того же порядка и веса.

(Этот результат получается путем дифференцирования уравнения, определяющего закон преобразования тензора, с учетом того факта, что c^m_n являются константами.)

6. Показать, что если a^r_{st} есть тензор, составляющие которого являются функциями переменных x^r, то частные производные $\dfrac{\partial a^r_{st}}{\partial x^u}$ являются составляющими тензора, ковариантность которого на единицу выше.

(Этот результат также следует из того факта, что c^m_n постоянны.)

7. Показать, что если a^r_{st} есть относительный тензор веса M, то

$$a^r_{st} = c^M \gamma^r_m c^n_s c^p_t \bar{a}^m_{np}.$$

§ 7. Общие преобразования

До настоящего момента мы рассматривали только *линейные* преобразования переменных и определили тензоры различных типов только относительно таких преобразований. Сейчас мы введем более общие преобразования переменных и посмотрим, можем ли мы распространить определение тензоров так, чтобы они охватывали и эти новые преобразования.

Предположим, что формулы преобразования имеют вид

$$\boxed{\bar{x}^r = f^r(x^1,\ x^2,\ x^3)}, \tag{19}$$

где f^1, f^2, f^3 — произвольные функции. Мы предполагаем, что функции, с которыми нам придется иметь дело, обладают производными любого порядка и что преобразование

(19) обратимо. Следовательно, мы можем написать обратное преобразование

$$\boxed{x^r = g^r(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3).} \tag{20}$$

Для того чтобы преобразование было обратимо, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$c = \left| \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \right| \tag{21}$$

не равнялся нулю. Этот определитель часто называют якобианом. Отметим, что линейное преобразование (1), стр. 36 есть только частный случай общего преобразования (19), когда функции в правой части (19) являются линейными однородными функциями.

Если мы возьмем дифференциалы от (19) и (20), то получим

$$d\bar{x}^r = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} dx^s, \tag{22}$$

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} d\bar{x}^s. \tag{23}$$

Если положить

$$c_s^r = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}, \qquad \gamma_s^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}, \tag{24}$$

то мы видим, что уравнения (22) и (23) принимают вид

$$d\bar{x}^r = c_s^r\, dx^s, \quad dx^r = \gamma_s^r\, d\bar{x}^s.$$

Другими словами, *преобразование дифференциалов является линейным*, аналогичным (1) и (3), стр. 36. Существенная разница состоит в том, что здесь коэффициенты c и γ не постоянны, а являются функциями x^r или $\bar{x}^r$.

Упражнения

1. Показать, что система преобразований (19) образует группу.
2. Доказать, что

$$\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s} = \delta_s^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}.$$

3. Показать, что

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|}.$$

4. Показать, что если мы положим $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}$ равными постоянным, то получим общее линейное преобразование переменных.

§ 8. Тензоры относительно общего преобразования

Определим теперь тензоры относительно общих преобразований (19).

Если нам дан набор функций, образующий объект некоторого порядка, мы говорим, что *этот объект есть тензор относительно преобразования* (19), *если он является тензором по отношению к линейному преобразованию дифференциалов* (22), (23).

Подобным же образом объект a^r_{st} является псевдотензором веса M относительно общего преобразования, если его составляющие $\bar{a}^r_{st}$ в новых переменных удовлетворяют соотношениям *)

$$\boxed{\bar{a}^r_{st} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|^M \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} a^m_{np}} \tag{25}$$

для всех значений переменных. Как и прежде, тензоры порядка один и нуль называются соответственно векторами и скалярами, а псевдотензоры веса нуль называются истинными тензорами.

Так как линейное преобразование есть только частный случай общего преобразования, то все объекты, которые являются тензорами относительно общих преобразований, являются также тензорами относительно линейных преобразований. Однако обратное не верно: существуют объекты, которые являются тензорами относительно линейных преобразований и не являются тензорами относительно общих преобразований.

---

*) Отметим следующее полезное мнемоническое правило: свободные индексы r, s, t в правой части (25) принадлежат буквам с чертой сверху.

Например, сами переменные являются векторами относительно линейных преобразований, но не являются векторами относительно преобразования (19).

Из строения формул (25), которые дают определение тензора, мы видим, что все чисто алгебраические по своему характеру операции применимы в равной мере как к тензорам относительно общего преобразования, так и к тензорам относительно линейного преобразования. Следовательно, все важные результаты относительно сложения, умножения и свертывания, а также относительно тензорных признаков могут быть применены без изменения к тензорам относительно преобразования (19).

Большую часть внимания мы будем уделять истинным тензорам, и под словом тензор мы будем понимать именно истинный тензор, если специально не оговорено противоположное. Правило преобразования истинного тензора a^r_{st} имеет вид

$$\bar{a}^r_{st} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} a^m_{np}. \tag{26}$$

Читатель сможет легко проверить следующее:

1. Типичным контравариантным вектором является dx^r.

2. Типичным ковариантным вектором является $\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$, где φ есть истинный скаляр.

3. Типичный тензор любого порядка образуется перемножением необходимого числа ковариантных и контравариантных векторов, как описано в § 3 этой главы.

Следует отметить, что если a^r_{st} есть тензор, составляющие которого являются функциями переменных, то объект, составленный из их производных по x^r, не образует тензора. Результат, который мы получили для тензоров относительно линейного преобразования, теперь не является справедливым, так как величины $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}$ теперь не константы, а некоторые функции переменных. В самом деле, продифференцировав (26), мы найдем

$$\frac{\partial \bar{a}^r_{st}}{\partial \bar{x}^u} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^u} \frac{\partial a^m_{np}}{\partial x^q} + \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^t \partial \bar{x}^u} a^m_{np} +$$
$$+ \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^n}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^u} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} a^m_{np} + \frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^m \partial x^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^u} a^m_{np};$$

это и показывает, что производные не удовлетворяют закону преобразования тензоров. Рассмотрение проблемы об образовании тензоров посредством дифференцирования мы отложим до III части (стр. 195).

Упражнения

1. Написать законы преобразования тензоров первого, второго, третьего порядков, беря для каждого порядка все различные типы.

2. Показать, что если φ есть истинный скаляр, то $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор.

3. Показать, что если a_{mn} — симметричный объект и $a_{mn}\,dx^m\,dx^n$ является инвариантом, то a_{mn} есть ковариантный тензор.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Показать, что если a^r_s есть истинный тензор, то $|a^r_s|$ есть истинный скаляр.

$$[|\bar{a}^r_s| = |c^r_m \gamma^n_s a^m_n| = |c^r_m| \cdot |\gamma^n_s a^m_n| = |c^r_m|\,|\gamma^n_s|\,|a^m_n| = |a^m_n|].$$

2. Показать, что если a_{mn} есть истинный ковариантный тензор, то $|a_{mn}|$ есть псевдоскаляр веса 2.

3. Показать, что если a^{mn} есть истинный контравариантный тензор, то $|a^{mn}|$ есть псевдоскаляр веса -2.

4. Показать, что если $\lambda^r_{(1)}$, $\lambda^r_{(2)}$, $\lambda^r_{(3)}$ — три истинных контравариантных вектора, то $|\lambda^r_{(i)}|$ есть псевдоскаляр веса -1.

(Когда мы имеем дело с несколькими тензорами, мы можем отличить один тензор от другого посредством индекса, заключенного в скобки для того, чтобы показать, что этот индекс не обозначает тензорных свойств.)

5. Показать, что если $\lambda^{(1)}_r$, $\lambda^{(2)}_r$, $\lambda^{(3)}_r$ — три истинных ковариантных вектора, то $|\lambda^{(i)}_r|$ есть псевдоскаляр веса 1.

6. Вывести из упражнений 4 и 5, что e_{rst} и e^{rst} являются псевдотензорами веса -1 и 1 соответственно (ср. стр. 49).

$$[\;|\lambda^r_{(i)}| = e_{rst}\lambda^r_{(1)}\lambda^s_{(2)}\lambda^t_{(3)}$$

$$|\lambda^{(i)}_r| = e^{rst}\lambda^{(1)}_r\lambda^{(2)}_s\lambda^{(3)}_t.]$$

7. Показать, что если a_{mn} есть истинный тензор, у которого $|a_{mn}|=A$ положителен и не равен нулю, то два объекта

$$\sqrt{A}e_{rst}, \qquad \frac{e^{rst}}{\sqrt{A}}$$

являются истинными тензорами.

8. Доказать, что алгебраические дополнения элементов определителя $|a_s^r|$ образуют истинный тензор, если a_s^r есть истинный тензор.

9. Доказать, что если α_s^r есть алгебраическое дополнение элементов определителя $|a_r^s|$, деленное на $|a_r^s|$, то α_s^r есть истинный тензор.

10. Показать, что алгебраические дополнения элементов определителя $|a_{mn}|$ образуют псевдотензор веса 2, если a_{mn} есть истинный ковариантный тензор.

11. Доказать, что если $A=|a_{mn}|$ и α^{mn} есть алгебраическое дополнение a_{mn} в A, деленное на A, то α^{mn} есть истинный контравариантный тензор.

12. Если $\lambda_r^{(i)}$ есть алгебраическое дополнение $\lambda_{(i)}^r$ в определителе задачи 4, деленное на определитель, доказать, что $\lambda_r^{(1)}$, $\lambda_r^{(2)}$, $\lambda_r^{(3)}$—три истинных ковариантных вектора.

13. Доказать, что если $|a_{mn}-\theta g_{mn}|$ обращается в нуль при $\theta=\theta_0$ в одной системе переменных, относительно которых a_{mn} и g_{mn} являются истинными тензорами, то $|\bar{a}_{mn}-\theta\bar{g}_{mn}|$ в новой системе переменных также обращается в нуль при $\theta=\theta_0$. Другими словами, корни уравнения $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$ являются инвариантами.

14. Если *все* алгебраические дополнения элементов определителя $|a_{mn}|$ равны нулю в одной системе переменяых, то они равны нулю и в любой другой системе.

15. Доказать, что если $\varphi=a_{mn}x^m x^n$, то $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^m \partial x^n}=a_{mn}+a_{nm}$. Как следствие вывести, что если φ—инвариант, то $(a_{mn}+a_{nm})$ есть ковариантный тензор относительно линейых преобразований.

ЧАСТЬ II
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ТЕНЗОРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

ГЛАВА III
АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Координаты и тензоры

Если нам заданы три взаимно ортогональные плоскости, пересекающиеся в точке O (рис. 1), то, как известно, положение любой точки P в пространстве однозначно определяется тремя числами, выражающими длину перпендикуляров, опущенных из точки P на заданные плоскости, причем каждому из этих чисел приписан соответствующий знак.

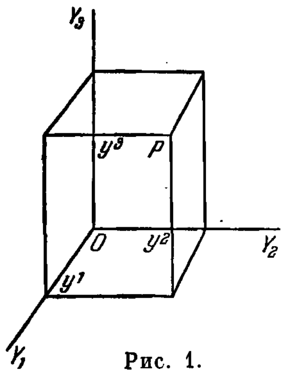

Рис. 1.

Обозначим через OY_2Y_3, OY_3Y_1 и OY_1Y_2 заданные плоскости, а через (y^1, y^2, y^3) числа, выражающие длины указанных только что трех перпендикуляров (с соответствующими знаками). Тогда эти три числа называются декартовыми ортогональными координатами точки P, заданные плоскости — координатными плоскостями, прямые линии OY_1, OY_2, OY_3 — координатными осями, точка O — началом координат.

Сделаем теперь линейное преобразование, приводящее нас от (y^1, y^2, y^3) к новым переменным (x^1, x^2, x^3):

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \alpha^1_1 y^1 + \alpha^1_2 y^2 + \alpha^1_3 y^3,\\
x^2 &= \alpha^2_1 y^1 + \alpha^2_2 y^2 + \alpha^2_3 y^3,\\
x^3 &= \alpha^3_1 y^1 + \alpha^3_2 y^2 + \alpha^3_3 y^3.
\end{aligned}
$$

Вспоминая условие о суммировании, эти уравнения можно записать короче:

$$x^r = a_s^r y^s. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что определитель $|a_s^r|$ не равен нулю и, следовательно, можно разрешить (1) относительно y

$$y^r = a_s'^r x^s. \tag{2}$$

Мы получаем отсюда, что каждой точке пространства однозначно соответствует набор чисел x^r и, обратно, каждому набору чисел x^r соответствует единственная точка пространства. Поэтому переменные x^r можно рассматривать как координаты точки пространства. Эти координаты, полученные линейным преобразованием ортогональных декартовых координат y^s, мы назовем аффинными точечными координатами или просто *аффинными координатами* *).

Известно, что уравнение плоскости, проходящей через начало координат, в прямоугольной декартовой системе координат есть линейное уравнение вида

$$a_m y^m = 0. \tag{3}$$

Поэтому из (1) видно, что $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$ являются уравнениями трех плоскостей, проходящих через точку O. Эти плоскости мы будем называть *координатными плоскостями системы* x^r.

Пересечения этих плоскостей попарно друг с другом суть три прямые линии, проходящие через точку O; эти линии мы будем называть *координатными осями*. Очевидно, координатные оси представляются тремя парами уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1 = 0, \\ &x^3 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \end{aligned}$$

Будем обозначать эти оси OX_1, OX_2, OX_3 соответственно. Наконец, началом координат назовем точку с координатами $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$; из (2) мы видим, что начало координат системы x^r совпадает с началом ортогональной декартовой системы. Другими словами, *положение начала координат не изменяется при преобразовании* (1).

Если у нас есть две системы аффинных координат x^r и $\bar{x}^r$, то из соотношений (1) и (2) очевидно, что эти две

*) В подлиннике rectilinear coordinates, ср. примечание к стр. 89. См. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, Гостехиздат, Москва, 1947, стр. 68. (*Прим. ред.*)

системы переменных связаны линейным соотношением

$$\overline{x}^r = c^r_s x^s, \tag{4}$$

где c^r_s — константы, и что это соотношение может быть разрешено относительно x^r:

$$x^r = \gamma^r_s \overline{x}^s. \tag{5}$$

Таким образом, переход от одной аффинной системы координат к другой эквивалентен линейному преобразованию переменных. Мы можем, следовательно, определять *тензоры, векторы и инварианты (скаляры) относительно преобразования аффинных координат*. Например, A^r_{st} есть тензор третьего порядка, если его составляющие в новой системе координат определяются уравнениями

$$\overline{A}^r_{st} = c^r_m \gamma^n_s \gamma^p_t A^m_{np}.$$

Упражнение

Показать, что основная ортогональная декартова система координат y^r принадлежит к совокупности аффинных систем координат.

§ 2. Контравариантные векторы и смещения

Мы видели, что по отношению к линейному преобразованию сами переменные x^r образуют контравариантный вектор. Другими словами, координаты любой точки являются составляющими контравариантного вектора. Теперь мы покажем, что обратное также справедливо, т. е. каждому контравариантному вектору соответствует точка, координаты которой в любой системе являются составляющими вектора в этой системе. Пусть a^r — данный контравариантный вектор, и пусть A является точкой, координаты которой в *некоторой определенной* системе координат равны a^1, a^2, a^3. Если координаты точки A обозначим через x^r, то

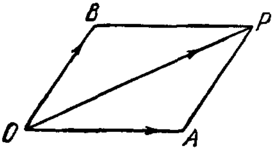

Рис. 2.

$$x^r = a^r$$

есть векторное уравнение, справедливое в одной определенной системе координат. Следовательно, оно справедливо и в любой системе координат; наше утверждение доказано. Вместо того чтобы заниматься точкой A, можно говорить о смещении OA (рис. 2). Это дает следующую геометрическую интерпретацию контравариантных векторов: *каждому контравариантному вектору соответствует смещение OA из начала координат.*

Дадим геометрическую интерпретацию сложения двух контравариантных векторов a^r и b^r. Мы имеем два смещения OA и OB, соответствующие нашим векторам. Построим параллелограмм, сторонами которого являются OA и OB, и проведем в нем диагональ OP. Если обозначить x^r координаты точки P, легко доказать с помощью проекций теорему о том, что в ортогональной декартовой системе координаты будут

$$x^r = a^r + b^r.$$

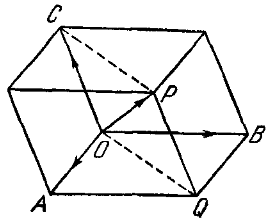

Рис. 3.

Но это — векторное уравнение, которое справедливо в ортогональной декартовой системе координат, введенной в § 1. Следовательно, оно справедливо в любой аффинной системе координат, и мы видим, что *точка с координатами $(a^r + b^r)$ получается путем сложения двух смещений OA и OB.*

Если нам даны три смещения OA, OB, OC (рис. 3), мы можем построить параллелепипед, ребрами которого являются эти смещения, и провести в нем диагональ OP. Если смещения определены тремя векторами a^r, b^r, c^r, то мы видим, что OQ является вектором $(a^r + b^r)$ и, следовательно, OP представляется суммой $(a^r + b^r + c^r)$. Обратно, если разложить OP на три смещения OA, OB и OC, мы увидим, что координатами точки P являются $(a^r + b^r + c^r)$.

Упражнения

1. Показать, что точка P с координатами ka^r, где k — постоянное, лежит на линии OA и что $k = OP/OA$ [k является инвариантом и в основной ортогональной системе координат имеет величину OP/OA].

2. Построим из точки x_0^r отрезок, равный и параллельный OA. Показать, что полученная точка имеет координаты $(x_0^r + a^r)$.

3. Показать, что *равные и параллельные смещения представляются при помощи одного и того же контравариантного вектора.*

4. Пусть A, B, C — три данные точки. Если мы возьмем три точки L, M, N на линиях OA, OB, OC, лежащие от точки O на

расстояниях $\alpha \cdot OA$, $\beta \cdot OB$, $\gamma \cdot OC$ соответственно, то показать, что точка, полученная путем векторного сложения смещений OL, OM, ON, имеет координаты $(\alpha a^r + \beta b^r + \gamma c^r)$.

5. Показать, что точка $\dfrac{\lambda x_1^r + \mu x_2^r}{\lambda + \mu}$ лежит на линии, соединяющей точки x_1^r и x_2^r, деля ее в отношении μ/λ.

§ 3. Базисные точки и геометрическая интерпретация аффинных координат

В аффинных системах x^r особенный интерес представляют три точки с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Мы будем их называть *базисными* *) *точками координатной системы* и обозначать через E_1, E_2, E_3 соответственно (рис. 4). Если мы обозначим координаты базисных точек через $e^r_{(i)}$, то в любой системе координат будет

$$\boxed{e^r_{(i)} = \delta^r_i,} \tag{6}$$

где δ^r_i равно нулю, если $r \neq i$, и равно единице, если $r = i$.

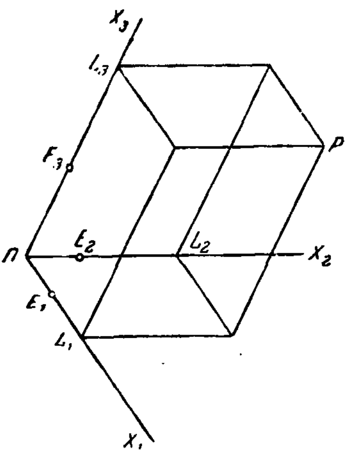

Рис. 4.

Здесь мы заключили индекс i в скобки, чтобы показать, что он не характеризует тензорных свойств, а просто указывает, что мы занимаемся отдельной базисной точкой. Базисные точки лежат по одной на каждой из координатных осей. Пользуясь (6), мы имеем:

$$x^r = x^i e^r_{(i)} = x^1 e^r_{(1)} + x^2 e^r_{(2)} + x^3 e^r_{(3)}. \tag{7}$$

Возьмем точку L_1 (рис. 4) с координатами $x^1 e^r_{(1)}$. Эта точка лежит на оси OX_1, так что расстояние $OL_1 = x^1 OE_1$. Аналогично, пусть L_2 и L_3 будут точки, лежащие на двух других координатных осях. Если построить параллелепипед с ребрами OL_1, OL_2, OL_3, то, как мы уже знаем, точка P, получившаяся при этом, имеет координаты $x^1 e^r_{(1)} + x^2 e^r_{(2)} + x^3 e^r_{(3)}$. Следовательно, из (7) мы видим, что координатами P являются x^r. Это дает нам геометрическую интерпретацию аффинных координат. Мы проводим через точку P плоскости, параллельные координатным плоскостям,

*) В подлиннике unit points. (*Прим. ред.*)

которые пересекают оси в точках L_1, L_2, L_3. Тогда три безразмерных числа OL_1/OE_1, OL_2/OE_2, OL_3/OE_3 являются аффинными координатами точки P. Другими словами, для того чтобы однозначно определить аффинную систему координат, нам необходимо знать три оси OX_1, OX_2, OX_3 и три базисные точки E_1, E_2, E_3 на этих осях.

Теперь мы докажем, что *в качестве базисных точек некоторой аффинной системы можно взять любые три различные точки, не компланарные с точкой O*. Вернемся к нашей основной ортогональной декартовой системе y^r, и пусть $y^r_{(i)}$ будут в этой системе координаты трех заданных точек, которые мы можем обозначить через E_1, E_2, E_3. Эти точки и точка O не должны лежать в одной и той же плоскости и, следовательно, числа $y^r_{(i)}$ не должны удовлетворять линейному уравнению вида (3) стр. 57. Необходимым и достаточным условием этого является отличие от нуля определителя $|y^r_{(i)}|$, т. е.

$$|y^r_{(i)}| \neq 0. \tag{8}$$

Сделаем линейное преобразование

$$y^r = y^r_{(i)} x^i \tag{9}$$

к новым переменным x^r. Так как согласно (8) определитель преобразования не равен нулю, то оно обратимо и однозначно определяет аффинные координаты x^r.

Мы должны еще доказать, что базисными точками системы x^r являются три заданные точки. Так как базисная точка имеет в x-системе координаты $e^r_{(j)}$, то по (9) ее ортогональными декартовыми координатами являются

$$y^r = y^r_{(i)} e^i_{(j)} = y^r_{(i)} \delta^i_j = y^r_{(j)}.$$

Следовательно, E_1, E_2, E_3 являются базисными точками аффинной системы x^r, что и доказывает нашу теорему.

Отметим, что система координат x^r является *декартовой* системой, если базисные точки находятся от начала координат на расстоянии, равном единице, т. е. если

$$OE_1 = OE_2 = OE_3 = 1.$$

Эти координаты являются *ортогональными*, если координатные плоскости перпендикулярны друг другу, в противном случае они являются косоугольными. *Отсюда мы видим, что все декартовы координатные системы с началом координат в точке O образуют подмножество множества всех аффинных координатных систем с тем же самым началом.* Действительно, всякая аффинная система является декартовой системой, модифицированной путем введения различных масштабов измерения вдоль каждой оси.

Упражнения

1. *Показать, что если система уравнений $a^r_s x^s = 0$ имеет два различных ненулевых решения, то все алгебраические дополнения определителя $|a^r_s|$ равны нулю.*

Пусть в координатной системе x^r величины a^r_s выбраны в качестве составляющих тензора. Тогда $a^r_s x^s = 0$ есть тензорное уравнение, которое справедливо во всех системах координат, если только оно справедливо в какой-то одной из них.

Пусть x^r_1 и x^r_2 — два различных решения; тогда возьмем новую координатную систему $\bar{x}^r$, в которой эти две точки являются базисными точками. Тогда имеем

$$\bar{a}^r_s \bar{x}^s_1 = \bar{a}^r_s \bar{e}^s_{(1)} = \bar{a}^r_s \delta^s_1 = \bar{a}^r_1 = 0,$$

$$\bar{a}^r_s \bar{x}^s_2 = \bar{a}^r_s \bar{e}^s_{(2)} = \bar{a}^r_s \delta^s_2 = \bar{a}^r_2 = 0.$$

Определитель $|\bar{a}^r_s|$ в новой системе имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}^1_3 & \bar{a}^2_3 & \bar{a}^3_3 \end{vmatrix},$$

и мы видим, что все алгебраические дополнения в новой системе координат являются нулями.

Но алгебраические дополнения образуют тензор и, следовательно, они должны равняться нулю в любой другой системе координат. Таким образом, все алгебраические дополнения $|a^r_s|$ равны нулю.

2. Показать, что если система уравнений $a^r_s x^s = b^r$ имеет два различных решения, то $|a^r_s|$ должен быть равен нулю, и что если имеются три независимых решения, то все алгебраические дополнения $|a^r_s|$ должны быть равны нулю.

(Три решения называются *независимыми*, если ни одно из них *не* является линейной комбинацией двух других.)

3. Доказать, что если обозначить через $\overrightarrow{OP}$ вектор смещения OP, то

$$\overrightarrow{OP} = x^r \overrightarrow{OE}_{(r)},$$

где x^r — координаты точки P, а $E_{(r)}$ — базисные точки координатной системы.

4. Показать, что если $\bar{E}_{(r)}$ являются базисными точками аффинной системы $\bar{x}^r$, то

$$\overrightarrow{O\bar{E}}_{(r)} = \gamma^s_r \overrightarrow{OE}_{(s)}.$$

(Заметим, что $\bar{x}^r\overrightarrow{O\bar{E}}_{(r)}=\overrightarrow{OP}=x^r\overrightarrow{OE}_{(r)}=\gamma_r^s\bar{x}^r\overrightarrow{O\bar{E}}_{(s)}$ и эти соотношения справедливы для всех значений $\bar{x}^r$. Таким образом, мы видим, что ковариантный вектор преобразуется по тем же формулам, что и расстояния базисных точек от начала координат (ковариантно), а контравариантный вектор преобразуется по формулам обратного преобразования (контравариантно).)

5. Показать, что мы можем всегда выбрать ортогональную декартову систему координат так, чтобы любой данный контравариантный вектор имел в этой системе две нулевые составляющие.

§ 4. Расстояние между двумя точками и метрический тензор. ε-объекты

Пусть P и Q — две точки, аффинные координаты которых равны x_1^r и x_2^r. Если y_1^r и y_2^r — их координаты относительно основной декартовой ортогональной системы, то общеизвестно, что расстояние δ между P и Q определяется формулой

$$\delta^2=(PQ)^2=(y_1^1-y_2^1)^2+(y_1^2-y_2^2)^2+(y_1^3-y_2^3)^2.$$

Но из (2) стр. 57

$$y_1^r=\alpha_m'^2x_1^m, \qquad y_2^r=\alpha_m'^rx_2^m.$$

Следовательно, имеем

$$\delta^2=g_{mn}(x_1^m-x_2^m)(x_1^n-x_2^n), \tag{10}$$

где введено обозначение

$$g_{mn}=\alpha_m'^1\alpha_n'^1+\alpha_m'^2\alpha_n'^2+\alpha_m'^3\alpha_n'^3=\alpha_m'^r\alpha_n'^r\ {}^{*)}. \tag{11}$$

Замечаем, что g_{mn} есть симметричный объект, т. е.

$$g_{mn}=g_{nm}.$$

В частности, расстояние от точки O до P, координаты которой равны x^r, определяется формулой

$$\boxed{\delta^2=g_{mn}x^mx^n.} \tag{12}$$

Здесь δ — скаляр, следовательно, $g_{mn}x^mx^n$ также скаляр. Так как g_{mn} симметричен и x^r является произвольным

---

*) Отметим, что здесь условие о суммировании распространяется на два верхних индекса. (*Прим. ред.*)

контравариантным вектором, то на основании обратного тензорного признака мы заключаем, что g_{mn} есть *ковариантный тензор*. Мы будем называть его *фундаментальным* или *метрическим тензором*. Заметим, между прочим, что квадратичная форма (12) положительно определена и равняется нулю только в том случае, если $x^r = 0$.

Обозначим через g определитель $|g_{mn}|$ и через G^{mn} алгебраическое дополнение g_{mn} в g. Тогда (см. стр. 49)

$$3!\, g = e^{rst} e^{mnp} g_{rm} g_{sn} g_{tp}, \qquad 2!\, G^{rs} = e^{rmn} e^{spq} g_{mp} g_{nq}.$$

Так как e^{rst} есть псевдотензор веса 1 (стр. 49), то g есть псевдоскаляр веса 2, а G^{rs} — псевдотензор веса 2. Кроме того, из (11) имеем

$$g = |\alpha'^r_m \alpha'^r_n| = |\alpha'^r_m|^2;$$

поэтому g положителен и отличен от нуля. Следовательно, если разделить G^{rs} на g и обозначить частное через g^{rs}, мы получим важный результат, который состоит в следующем: *объект g^{rs}, составляющие которого являются алгебраическим дополнением g_{rs}, деленным на g, есть истинный контравариантный тензор.* Кроме того, если мы положим

$$\boxed{\varepsilon_{rst} = \sqrt{g}\, e_{rst},} \qquad \boxed{\varepsilon^{rst} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{rst},} \tag{13}$$

то непосредственно очевидно, что эти объекты являются *истинными тензорами*, которые мы будем называть *ε-объектами* или *ε-тензорами*.

Если нам дан контравариантный вектор A^r, то мы можем связать с ним скаляр при помощи равенства

$$\boxed{A = (g_{mn} A^m A^n)^{1/2}.} \tag{14}$$

Назовем A *модулем* или *длиной вектора* A^r. Подобным же образом мы определим модуль или длину ковариантного вектора B_r при помощи равенства

$$\boxed{B = (g^{mn} B_m B_n)^{1/2}.} \tag{15}$$

Единичный вектор **есть вектор, длина которого равна единице, и, следовательно, если λ^r и μ_r — единичные векторы, то мы имеем**

$$g_{mn}\lambda^m\lambda^n = 1, \qquad g^{mn}\mu_m\mu_n = 1. \tag{16}$$

Единичный вектор иногда называют *ортом.*

Упражнения

1. Доказать, что

$$g_{sm}g^{mr} = g^{rm}g_{ms} = \delta^r_s.$$

2. Доказать, что расстояния базисных точек от начала координат определяются формулами:

$$OE_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad OE_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad OE_3 = \sqrt{g_{33}}.$$

3. *Показать, что равенства* $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ *являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система координат была декартовой.*

4. Показать, что единичный вектор λ^r определяет точку Λ, лежащую от начала координат на расстоянии, равном единице, и соответственно, что *каждый орт определяет единственное направление.*

5. *Показать, что для ортогональной декартовой системы координат*

$$g = 1, \quad e_{rst} = \varepsilon_{rst}, \quad e^{rst} = \varepsilon^{rst}, \quad g_{mn} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} = g^{mn}.$$

§ 5. Угол между двумя направлениями. Ортогональность

Пусть A и B (рис. 5) — две различные точки, находящиеся от начала координат на расстоянии, равном единице, и пусть λ^r и μ^r — два орта, задающих направления OA, OB; иначе, λ^r, μ^r являются координатами точек A и B. Мы хотим найти выражения для угла θ между OA и OB. Из треугольников OAB имеем

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cos\theta = 2(1-\cos\theta). \tag{1}$$

Далее,

$$AB^2 = g_{mn}(\lambda^m - \mu^m)(\lambda^n - \mu^n) =$$
$$= g_{mn}\lambda^m\lambda^n + g_{mn}\mu^m\mu^n - 2g_{mn}\lambda^m\mu^n = 2(1 - g_{mn}\lambda^m\mu^n).$$

так как λ^r и μ^r — единичные векторы. Из (17) следует, что

$$\boxed{\cos\theta = g_{mn}\lambda^m\mu^n.} \tag{18}$$

Если A^r есть контравариантный вектор, определяющий точку P, то единичный вектор A^r/A, где A есть длина вектора A^r, определяет точку на OP, находящуюся от начала координат на расстоянии, равном единице. Следовательно, A^r/A есть орт, задающий направление линии, соединяющей точку O с точкой A^r. Отсюда следует, что если A^r и B^r — два контравариантных вектора, модули которых равны A и B, то угол θ между направлениями A^r и B^r определяется формулой

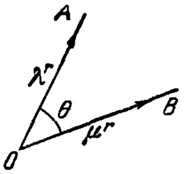

Рис. 5.

$$\cos\theta = \frac{g_{mn}A^mB^n}{AB}. \tag{19}$$

Теперь мы можем написать *условие ортогональности двух направлений*. Если направления λ^r, μ^r взаимно перпендикулярны, то $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{g_{mn}\lambda^m\mu^n = 0.} \tag{20}$$

Аналогично, линии, соединяющие O с точками A^r и B^r, ортогональны, если

$$g_{mn}A^mB^n = 0$$

Упражнения

1. Доказать, что косинусы углов между координатными осями определяются формулами

$$\cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}, \quad \cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

2. Показать, что если через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ обозначим углы, которые орт λ^r образует с координатными осями, то $\cos\alpha_1 = g_{1m}\lambda^m/\sqrt{g_{11}}$ и т. д.,

$$[\sqrt{g_{11}}\cos\alpha_1 = g_{mn}\lambda^m e^n_{(1)} = g_{mn}\lambda^m\delta^n_1 = g_{1m}\lambda^m].$$

3. Показать, что в ортогональных декартовых координатах косинусы углов, которые орт λ^r образует с координатными осями, равны λ^1, λ^2, λ^3. Их часто называют *направляющими косинусами.*

4. Доказать, что *в косоугольных декартовых системах координат g_{mn} определяется следующим образом:*

$$\begin{Bmatrix} 1, & \cos\theta_{12}, & \cos\theta_{13} \\ \cos\theta_{21}, & 1, & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31}, & \cos\theta_{32}, & 1 \end{Bmatrix}.$$

5. Показать, что если λ^r, μ^r—два единичных вектора, то угол θ между их направлениями определяется равенством

$$\sin^2\theta = (g_{mn}g_{rs} - g_{mr}g_{ns})\,\lambda^m\lambda^n\mu^r\mu^s.$$

6. Показать, что если γ_1, γ_2, γ_3—направляющие косинусы вектора λ^r, то в косоугольных декартовых координатах они удовлетворяют соотношению $g^{mn}\gamma_m\gamma_n = 1$.

§ 6. Ассоциированные тензоры

Теперь мы введем важные операции поднятия и опускания индексов в тензоре, приводящие нас к новым тензорам.

Пусть A^r есть данный контравариантный вектор. Если мы умножим его на тензор g_{mn} и свернем, мы получим *ковариантный* вектор $g_{rm}A^m$, который мы будем обозначать A_r. Таким образом,

$$A_r = g_{rm}A^m, \tag{21}$$

и мы видим, что верхний индекс изменился на нижний. Это и есть операция *опускания индекса*. Теперь возьмем ковариантный вектор A_r и поднимем индекс путем умножения этого вектора на тензор g^{mn} и свертывания. Имеем

$$g^{rm}A_m = g^{rm}g_{mn}A^n = \delta^r_n A^n = A^r. \tag{22}$$

Следовательно, если мы сначала опустим индекс, а затем поднимем его снова, пользуясь только что введенным правилом, то мы придем к первоначальному вектору. Таким образом, процессы поднятия и опускания индексов полностью обратимы. Два вектора A^r и A_r, связанные указанным образом, называются *ассоциированными векторами* и для их обозначения обычно используется одна и та же буква A. Они настолько тесно связаны между собой, что мы иногда говорим, что они представляют *один и тот же* вектор, причем A^r выражает контравариантные, а A_r — ковариантные составляющие этого вектора.

Рассмотрим теперь ковариантный тензор A_{rs}. У него имеются два индекса, которые можно поднять. Если мы хотим поднять первый индекс, нужно умножить его на g^{mn} и затем свернуть относительно первого индекса. Запишем эту операцию:

$$A^{r}_{\cdot}{}^{s} = g^{rm}A_{ms} \tag{23}$$

Для того чтобы можно было узнать, какой индекс был поднят, условимся ставить на его месте точку. Тогда ясно, что s есть второй индекс и что первый был поднят. Операция поднимания второго индекса запишется аналогично:

$$A_{r}{}^{s}_{\cdot} = y^{sm}A_{mn} \tag{24}$$

Наконец, мы можем поднять оба индекса по формуле

$$A^{rs} = g^{rm}g^{sn}A_{mn} \tag{25}$$

Если A_{rs} *симметричен*, то легко видеть, что $A^{r}_{\cdot s}$ и $A^{\cdot r}_{s}$ имеют одинаковые значения и могут быть записаны просто в виде A^r_s. Заменять смещенный индекс точкой нет необходимости.

Предоставляем читателю сформулировать правила опускания индексов в тензоре второго порядка и показать, что если опустить оба индекса в (23) — (25), то мы вернемся к первоначальному тензору.

Эти операции, очевидно, можно обобщить на тензоры любого порядка. Мы проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть A^{rst} есть контравариантный тензор. После опускания второго индекса имеем

$$A^{r\cdot t}_{\cdot s} = g_{sm}A^{rmt}. \tag{26}$$

Точки ставятся так, чтобы показать, что индекс был опущен по вертикали.

Все тензоры, полученные один из другого таким способом, называются *ассоциированными*.

В этой связи интересны два результата.

1. В любом одночлене, где появляется *немой* индекс, мы можем поднять этот индекс из его нижнего положения и в то же время опустить его из верхнего положения без изменения значения одночлена. Например, имеем

$$A^{r}_{.s}B_{r}=g^{rm}A_{ms}g_{rn}B^{n}=\delta^{m}_{n}A_{ms}B^{n}=A_{ms}B^{m}=A_{rs}B^{r}.$$

Мы видим, что немой индекс r поднимался и опускался указанным способом.

2. Если в каждом члене тензорного уравнения имеется *свободный* индекс, мы получим эквивалентное уравнение, подняв или опустив этот свободный индекс в каждом члене. Например, система уравнений

$$A_{rst}=B_{rs}C_{t}$$

эквивалентна системе

$$g^{rm}A_{mst}=g^{rm}B_{ms}C_{t}$$

или системе

$$A^{r}_{.st}=B^{r}_{.s}C_{t},$$

из которой мы видим, что индекс r был везде поднят.

Упражнения

1. Показать, что длина какого-нибудь вектора и его ассоциированного равны между собой.

2. Если A есть длина A^{r}, то $A^{2}=A^{r}A_{r}$.

3. Показать, что если два вектора A^{r} и B^{r} имеют длины A и B, то $A^{r}B_{r}=AB\cos\theta$, где θ есть угол между направлениями A^{r} и B^{r}.

4. Показать, что в ортогональных декартовых координатах ассоциированные векторы имеют одни и те же составляющие. (В обыкновенном векторном исчислении все рассматривается в ортогональной координатной системе и поэтому в нем не различаются ковариантные и контравариантные векторы.)

5. *Показать, что* g_{mn}, g^{mn} *и* δ^{m}_{n} *являются ассоциированными тензорами.*

6. *Показать, что* ε_{rst} *и* ε^{rst} *являются ассоциированными тензорами.*

(Имеем $ge_{rst}=e^{mnp}g_{rm}g_{sn}g_{tp}$, т. е. $\varepsilon_{rst}=\varepsilon^{mnp}g_{rm}g_{sn}g_{tp}$).

§ 7. Скалярное и векторное произведения векторов

Пусть OA и OB (рис. 6) — два смещения, задаваемых векторами A^r, B^r, длина которых равна A и B. Если θ есть угол между этими направлениями, то

$$\boxed{g_{mn}A^mB^n = AB\cos\theta.} \tag{27}$$

Инвариант $g_{mn}A^mB^n$ называется *скалярным произведением* A^r и B^r; как мы уже знаем, оно может быть записано в следующих эквивалентных формах:

$$g_{mn}A^mB^n = A_mB^m = A^mB_m = g^{mn}A_mB_n,$$

где A_r и B_r — ассоциированные векторы.

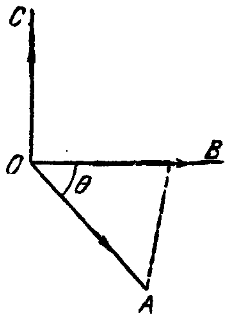

Рис. 6.

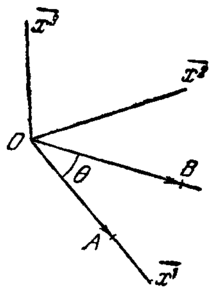

Рис. 7.

Если λ^r является единичным вектором направления B^r, то мы имеем

$$g_{mn}A^m\lambda^n = A_m\lambda^m = A\cos\theta. \tag{28}$$

Но $A\cos\theta$ есть проекция OA на линию OB. *Следовательно, проекция* A^r *на направление* λ^r *выражается в виде* $A_m\lambda^m$. Далее, рассмотрим вектор

$$C^r = \varepsilon^{rmn}A_mB_n. \tag{29}$$

Для того чтобы дать геометрическую интерпретацию этого вектора, выберем специальную систему координат следующим образом. Направим ось $\overline{x}^1$ вдоль OA (рис. 7), ось $\overline{x}^2$ — в плоскости векторов OA и OB перпендикулярно к OA, ось $\overline{x}^3$ — перпендикулярно OA и OB, так что наша специальная система является *ортогональной* и декартовой. В этой специальной системе координат мы имеем

$$\overline{A}^r \equiv (A,\ 0,\ 0),\quad \overline{B}^r \equiv (B\cos\theta,\ B\sin\theta,\ 0);$$

ассоциированные векторы имеют те же составляющие. Точно так же $\bar{\varepsilon}^{rmn} = e^{rmn}$. Следовательно, составляющими вектора $\overline{C}^r$ в новой системе будут

$$\overline{C}^r = \bar{\varepsilon}^{rmn}\overline{A}_m\overline{B}_n = e^{r1n}A\overline{B}_n = e^{r12}AB\sin\theta,$$

т. е.

$$\overline{C}^1 = \overline{C}^2 = 0,\quad \overline{C}^3 = AB\sin\theta.$$

Другими словами, вектор $\overline{C}^r$ расположен вдоль $O\bar{x}^3$, перпендикулярно к плоскости OA и OB, а его длина равна $AB\sin\theta$. Этот результат является чисто геометрическим и, следовательно, не зависит от особенностей координатной системы. Мы можем поэтому возвратиться к первоначальной координатной системе и сказать, что C^r *направлен вдоль перпендикуляра к плоскости OA и OB, а его длина есть* $AB\sin\theta$.

Мы доказали, что C^r расположен вдоль перпендикуляра к плоскости OAB, но необходимо еще решить, каково его направление. Умножая (29) на C_r и суммируя по r от 1 до 3, мы получаем $C^2 = \varepsilon^{rmn}C_rA_mB_n = \varepsilon_{mnp}A^mB^nC^p$ *), т. е. C^r направлен так, чтобы скаляр $\varepsilon_{mnp}A^mB^nC^p$ был *больше нуля*.

Итак, мы пришли к исследованию знака выражения

$$\varepsilon_{mnp}A^mB^nC^p, \tag{30}$$

где A^r, B^r, C^r — *какие-либо* векторы. Это — скаляр, и если мы воспользуемся той же специальной декартовой системой, что и раньше, мы увидим что он равен $\overline{C}^3AB\sin\theta$. Он будет, следовательно, обращаться в нуль только при $\overline{C}^3 = 0$, т. е. если C^r лежит в плоскости OAB. Следовательно, (30) обращается в нуль только в том случае, если вектор C^r становится компланарным с двумя другими. Если непрерывно деформировать триэдр (A^r, B^r, C^r) таким образом, чтобы он никогда не обратился в плоскость, то мы увидим, что скаляр (30) изменяется непрерывно и должен сохранять знак до тех пор, пока не обратится в нуль. Пусть деформация продолжается непрерывно до тех пор, пока A^r не совпадет с *положительным направлением* оси Ox^1, B^r — с *положительным направлением* оси Ox^2 и C^r — с осью Ox^3. Мы будем говорить, что первоначальный триэдр имеет *положительную или отрицательную ориентацию* в соответствии с тем, как направлен C^r после деформации: в положительную или отрицательную сторону оси Ox^3. Таким образом, для деформированного триэдра скаляр (30) превращается в $+ABC\sqrt{g}$ в первом случае и в $-ABC\sqrt{g}$ — во втором. *Отсюда мы видим, что триэдр (A^r, B^r, C^r) имеет положительную или отрицательную ориентацию в соответствии с тем, положителен или отрицателен скаляр* (30).

*) Здесь C^2 означает квадрат величины C. (*Прим. ред.*)

Вектор C^r, определенный равенством (29), имеет, следовательно. такое направление, чтобы ориентация триэдра (A^r, B^r, C^r) была положительной. Вектор (29) называется *векторным произведением* A^r и B^r. Если обозначить через ν^r орт, перпендикулярный к A^r и B^r и соответствующим образом направленный, то мы можем написать

$$\boxed{\varepsilon^{rmn} A_m B_n = AB \sin\theta \nu^2.} \tag{31}$$

Упражнения

1. *Доказать что если* α, β, *и* γ — *углы между парами направлений* OA, OB, OC, то

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\gamma \sin^2\varphi,$$

где φ — *угол, который* OC *образует с плоскостью* OAB

Пусть A^r, B^r, C^r — три вектора, направленных по OA, OB, OC, и пусть A, B, C — их длины. Если ν^r — единичный вектор, ортогональный к A^r, B^r, то угол между C^r и ν^r равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, т. е.

$$C \sin\varphi = C_r \nu^r.$$

Следовательно, из (31) мы видим, что

$$ABC \sin\gamma \sin\varphi = \varepsilon^{rmn} C_r A_m B_n = \varepsilon_{mnp} A^m B^n C^p!$$

Последнее выражение есть скаляр, и если мы возьмем такую декартову систему координат, что OA, OB, OC являются ее осями мы получим

$$\varepsilon_{mnp} A^m B^n C^p = \sqrt{g}\, e_{123} ABC = \sqrt{g}\, ABC.$$

Более того, в этой системе координат α, β, γ являются углами между осями, вследствие чего g_{mn} выражается так:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{Vmatrix}.$$

Комбинируя два предыдущих уравнения, мы получим требуемый результат.

2. Доказать, что $A_1/\sqrt{g_{11}}$, $A_2/\sqrt{g_{22}}$, $A_3/\sqrt{g_{33}}$ являются ортогональными проекциями вектора A^r на координатные оси. Следовательно, если система координат декартова, то эти проекции равны A_1, A_2, A_3.

3. Показать, что единичный вектор, перпендикулярный к плоскости OE_2E_3, имеет в качестве ковариантных составляющих

$$\frac{\sqrt{g}\, e_{r23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}\sin\theta_{23}}.$$

(Ковариантные составляющие определяются формулами

$$\left.\frac{\varepsilon_{rmn}e^m_{(2)}e^n_{(3)}}{OE_2\cdot OE_3\sin\theta_{23}}.\right)$$

4. Доказать, что если λ^r, μ^r, ν^r — три взаимно ортогональных единичных вектора, то $\varepsilon_{rst}\lambda^r\mu^s\nu^t = \pm 1$.

5. Если A^r, B^r — два вектора и θ — угол между ними, то

$$A^2B^2\sin^2\theta = \delta^{mn}_{r\ s}A^rB^sA_mB_n.$$

(Мы можем выбрать специальную декартову систему координат или использовать (31).)

6. Показать, что если мы положим $C^{rs} = A^rB^s - A^sB^r$, то объект C^{rs} антисимметричен и выражение $\frac{1}{2}\varepsilon_{rmn}C^{mn}$ определяет ковариантные составляющие векторного произведения A^r и B^r.

§ 8. Площади и объемы

Пусть P_1 и P_2 — две данные точки (рис. 8); мы хотим найти выражение для площади треугольника OP_1P_2. Пусть $x^r_{(1)}$ и $x^r_{(2)}$ — координаты точек P_1 и P_2. Мы знаем, что длина вектора $\varepsilon_{rmn}x^m_{(2)}x^n_{(2)}$ равна $OP_1\cdot OP_2\times\times\sin(P_1OP_2)$. Но это — удвоенная площадь треугольника OP_1P_2. Обозначая эту площадь через Δ, имеем

$$4\Delta^2 = g^{mn}\varepsilon_{mpq}x^p_{(1)}x^q_{(2)}\varepsilon_{nst}x^s_{(1)}x^t_{(2)}, \qquad (32)$$

что дает выражение для площади Δ. Кроме того, если ν^r — единичный вектор, ортогональный к плоскости треугольника и направленный так, что ориентация триэдра (OP_1, OP_2, ν^r) положительна, то равенство (31) стр. 72 дает

$$\boxed{\varepsilon_{rmn}x^m_{(1)}x^n_{(2)} = 2\Delta\nu_\mu.} \qquad (33)$$

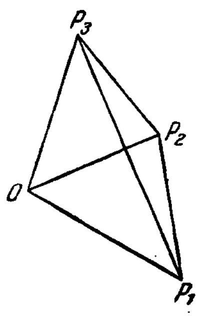

Рис. 8.

Пусть P_3 — третья точка, координаты которой обозначим через $x^r_{(3)}$. Как и в задаче 1 (стр. 72), скаляр $\varepsilon_{mnp}x^m_{(1)}x^n_{(2)}x^p_{(3)}$ имеет значение

$$\varepsilon_{mnp}x^m_{(1)}x^n_{(2)}x^p_{(3)} = OP_1\cdot OP_2\cdot OP_3\sin(P_1OP_2)\sin\varphi, \qquad (34)$$

где φ — угол, образованный OP_3 с плоскостью OP_1P_2. Здесь $OP_1 \cdot OP_2 \sin(P_1OP_2)$ — удвоенная площадь треугольника OP_1P_2, а $OP_3 \sin\varphi$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки P_3 на плоскость OP_1P_2. Значит, правая часть (34) есть шестикратный объем тетраэдра $OP_1P_2P_3$. Обозначая этот объем через V, имеем

$$6V = \varepsilon_{mnp} x^m_{(1)} x^n_{(2)} x^p_{(3)}. \tag{35}$$

Так как $\varepsilon_{mnp} = \sqrt{g}\, e_{mnp}$, это равенство может быть написано в виде

$$6V = \sqrt{g} \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^2_{(1)} & x^3_{(1)} \\ x^1_{(2)} & x^2_{(2)} & x^3_{(2)} \\ x^1_{(3)} & x^2_{(3)} & x^3_{(3)} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Упражнения

1. Доказать, что площадь треугольника OE_2E_3 равна

$$\frac{1}{2}(gg^{11})^{1/2}.$$

2. Доказать, что объем тетраэдра $OE_1E_2E_3$ равен $\frac{1}{6}\sqrt{g}$.

3. Показать, что если a, b, c — ребра OA, OB, OC тетраэдра, а α, β, γ — углы между этими ребрами, то

$$6V = abc \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{1/2}.$$

(Вычислить скаляр (35) в декартовой системе координат, имеющей OA, OB, OC своими осями.)

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Доказать, что если координатная система ортогональна, то

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}}.$$

2. Если $g_{mn}A^mA^n = 0$, то $A^r = 0$.
3. Показать, что если θ_{23} — угол между OX_2 и OX_2, то

$$\sin^2\theta_{23} = \frac{gg^{11}}{g_{22}g_{33}}.$$

4. Доказать, что если λ^r — единичный вектор, то косинусы углов, которые он образует с осями, равны

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \frac{\lambda_3}{\sqrt{g_{33}}}.$$

5. Показать, что

$$1-\cos^2\theta_{23}-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{12}+2\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{31}=\frac{g}{g_{11}g_{22}g_{33}}.$$

6. Если A^{rs} — антисимметричный контравариантный тензор, то $\sqrt{g}A^{23}$, $\sqrt{g}A^{31}$, $\sqrt{g}A^{12}$ являются компонентами ковариантного вектора.

$\left(\text{Этот вектор есть } \frac{1}{2}\varepsilon_{rmn}A^{mn}.\right)$

7. Если A_{rs} — антисимметричный ковариантный тензор, то $A_{23}/\sqrt{g}$, $A_{31}/\sqrt{g}$, $A_{12}/\sqrt{g}$ являются компонентами контравариантного вектора.

(Эти два результата доказывают, что мы всегда можем [illegible]ратить антисимметричный тензор второго порядка в вектор.)

8. Доказать, что если A_{rs} — антисимметричный тензор, а $C^l=\varepsilon^{rmn}A_{mn}$, то $2A_{rs}=\varepsilon_{rst}C^t$.

9. Доказать, что площадь треугольника OP_1P_2 определяется равенством

$$8\Delta^2=A^{rs}A_{rs}=g_{rm}g_{sn}A^{rs}A^{mn},$$

где $x^r_{(1)}$ и $x^r_{(2)}$ — координаты точек P_1 и P_2, а

$$A^{rs}=\begin{vmatrix} x^r_{(1)} & x^r_{(2)} \\ x^s_{(1)} & x^s_{(2)} \end{vmatrix}.$$

10. Показать, что если система координат является ортогональной и декартовой, то A^{23}, A^{31}, A^{12} в задаче 9 являются удвоенными площадями проекций треугольника на координатные плоскости. Вывести из задачи 9, что

$$4\Delta^2=(A^{23})^2+(A^{31})^2+(A^{12})^2.$$

11. Доказать, что если

$$A^{rst}=\begin{vmatrix} x^r_{(1)} & x^s_{(1)} & x^t_{(1)} \\ x^r_{(2)} & x^s_{(2)} & x^t_{(2)} \\ x^r_{(3)} & x^s_{(3)} & x^t_{(3)} \end{vmatrix},$$

где $x^r_{(i)}$ — координаты трех точек P_1, P_2, P_3, то

1) $A^{rst}=\sqrt{g}\,A^{123}\varepsilon^{rst}$;

2) $A^{rst}=6V\varepsilon^{rst}$,

причем V — объем $OP_1P_2P_3$.

12. Пусть будет

$$B^{rs}=\begin{vmatrix} x^r_{(1)} & x^r_{(2)} & x^r_{(3)} \\ x^s_{(1)} & x^s_{(2)} & x^s_{(3)} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Показать, что площадь треугольника $P_1P_2P_3$ определяется формулой

$$8\Delta^2=B^{rs}B_{rs}=g_{rm}g_{sn}B^{rs}B^{mn}.$$

13. Если

$$B^{rst}=\begin{vmatrix} x^r_{(1)} & x^r_{(2)} & x^r_{(3)} & x^r_{(4)} \\ x^s_{(1)} & x^s_{(2)} & x^s_{(3)} & x^s_{(4)} \\ x^t_{(1)} & x^t_{(2)} & x^t_{(3)} & x^t_{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $x^r_{(1)}$, $x^r_{(2)}$, $x^r_{(3)}$, $x^r_{(4)}$ — координаты четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4, и если V — объем тетраэдра P_1, P_2, P_3, P_4, то

$$B^{rst}=6V\varepsilon^{rst}.$$

[Доказать, что B^{rst} — абсолютно антисимметричен и что

$$\sqrt{g}\,B^{123}=6V.]$$

14. Показать, что если нам даны N точек $x^r_{(\alpha)}$ $(\alpha=1, 2, 3, \ldots, N)$ *с весами* $\lambda_{(\alpha)}$, *то центр тяжести системы (или средневзвешенная точка относительно весов* λ_{α}) *имеет координаты*

$$\xi^r=\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\lambda_{(\alpha)}x^r_{(\alpha)}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\lambda_{(\alpha)}}.$$

(Это — векторное уравнение, справедливость которого легко доказывается в ортогональных декартовых координатах.)

15. Показать, что четыре точки

$$\frac{x^r_1+\lambda_1x^r_2}{1+\lambda_1},\quad \frac{x^r_1+\lambda_2x^r_2}{1+\lambda_2},\quad \frac{x^r_1+\lambda_3x^r_2}{1+\lambda_3},\quad \frac{x^r_1+\lambda_4x^r_2}{1+\lambda_4}$$

лежат на прямой, соединяющей x^r_1 и x^r_2, и что их двойное (ангармоническое) отношение есть

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}\,{}^{*)}.$$

16. Если $x^r_{(i)}$, $x'^r_{(i)}$ — координаты шести точек P_i, P'_i и если V, V' — объемы тетраэдров $OP_1P_2P_3$ и $OP'_1P'_2P'_3$ соответственно, то

$$36VV'=\left\{\prod_{i=1}^{3}OP_i\cdot OP'_i\right\}\begin{vmatrix} \cos(11) & \cos(12) & \cos(13) \\ \cos(21) & \cos(22) & \cos(23) \\ \cos(31) & \cos(32) & \cos(33) \end{vmatrix},$$

---

*) О двойном отношении см., например, Лопшиц А. М., Аналитическая геометрия, 1948, стр. 208 или Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, 1947, стр. 332, а также Дарбу Г., Принципы аналитической геометрии, 1938. (*Прим. ред.*)

где (ij) — угол между OP_i и OP'_j;

$$[6V=\sqrt{g}\,|x^r_{(i)}|, \quad 6V'=\sqrt{g}\,|x'^r_{(j)}|.$$

Значит,

$$36VV'=|g_{mn}x^m_{(i)}x'^n_{(j)}|.]$$

17. Даны три вектора $\lambda^r_{(i)}$ с общим началом O. Доказать, что если $\lambda^{(i)}_r$ — алгебраическое дополнение элемента $\lambda^r_{(i)}$ в определителе $|\lambda^r_{(i)}|$, деленное на определитель, то каждый из векторов $g^{rs}\lambda^{(i)}_s$ ортогонален к двум из трех векторов $\lambda^r_{(i)}$.

(Этот результат следует из того, что $\lambda^r_{(i)}\lambda^{(j)}_r=\delta^j_i$. Например, вектор, ассоциированный с $\lambda^{(3)}_r$, перпендикулярен как к $\lambda^r_{(1)}$, так и к $\lambda^r_{(2)}$.)

18. Показать, что если система координат декартова и α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы орта λ^r, то

$$\sum \sin^2\theta_{23}\cdot\alpha_1^2-2\sum(\cos\theta_{23}-\cos\theta_{12}\cos\theta_{13})\,\alpha_2\alpha_3=$$
$$=1-\sum\cos^2\theta_{23}+2\cos\theta_{23}\cos\theta_{31}\cos\theta_{12}.$$

(Здесь $\alpha_r=\lambda_r$ и искомое равенство есть просто $g^{mn}\lambda_m\lambda_n=1$, выписанное полностью.)

ГЛАВА IV

ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Уравнение плоскости

Пусть P_1, P_2, P_3 — три точки, координаты которых обозначим через $x^r_{(1)}$, $x^r_{(2)}$, $x^r_{(3)}$. Если λ, μ, ν — веса точек P_1, P_2, P_3, а P — их центр тяжести, то из элементарных соображений мы знаем, что P лежит в плоскости трех данных точек и что можно получить каждую точку на плоскости P_1, P_2, P_3, изменяя λ, μ, ν. Уравнение

$$\boxed{x^r = \frac{\lambda x^r_{(1)} + \mu x^r_{(2)} + \nu x^r_{(3)}}{\lambda + \mu + \nu},} \tag{1}$$

где x^r — координаты точки P, является векторным уравнением, которое справедливо в любой ортогональной декартовой системе координат. Поэтому оно справедливо во всякой аффинной системе и определяет координаты любой точки на плоскости $P_1P_2P_3$. Следовательно, мы можем рассматривать (1) как одну из форм, в которой может быть записано уравнение плоскости.

Соотношению (1) может быть придан вид

$$\lambda (x^r - x^r_{(1)}) + \mu (x^r - x^r_{(2)}) + \nu (x^r - x^r_{(3)}) = 0.$$

Исключая λ, μ, ν, мы имеем

$$|x^r - x^r_{(i)}| = 0.$$

Раскрыв это выражение, мы получим линейное уравнение относительно x^r. Обратно, если x^r удовлетворяют некоторому линейному уравнению, мы можем точно такими же рассуждениями, только в обратном порядке, возвратиться к уравнениям (1). *Следовательно, всякое линейное уравнение относительно x^r есть уравнение плоскости.* Каждое линейное уравнение можно записать в виде

$$\boxed{a_r x^r = b,} \tag{2}$$

где a_r — ковариантный вектор, а b — скаляр, и, следовательно, уравнение плоскости может быть записано в форме (2). Заметим, что если $b = 0$, плоскость проходит через начало координат, если же $b \neq 0$, начало координат не лежит в плоскости.

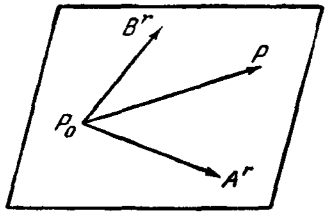

Рис. 9.

Мы имеем теперь две формы, в которых может быть записано уравнение плоскости, а именно (1) и (2). Имеется еще третья форма, которая на самом деле является лишь видоизменением (1). Пусть (рис. 9) P_0 — точка на плоскости с координатами x_0^r, и пусть A^r, B^r — два вектора, имеющих начало в P_0 и лежащих в плоскости. Тогда точки

$$x_0^r + (\lambda + \mu + \nu) A^r \quad \text{и} \quad x_0^r + (\lambda + \mu + \nu) B^r,$$

очевидно, лежат на плоскости. Если взять x_0^r и эти две точки в качестве точек P_1, P_2, P_3 в (1), то координаты любой точки плоскости могут быть выражены в форме

$$\boxed{x^r = x_0^r + \mu A^r + \nu B^r} \tag{3}$$

при надлежащем выборе μ и ν. Эта форма выражает координаты любой точки плоскости через координаты данной точки на плоскости и два направления на ней. В частности, координаты любой точки плоскости, проходящей через начало координат, могут быть выражены в виде

$$x^r = \mu A^r + \nu B^r. \tag{4}$$

Другими словами, все векторы, проходящие через начало координат и компланарные с двумя векторами A^r и B^r, имеют вид (4).

Упражнения

1. Отрезки, отсекаемые плоскостью (2) на осях координат, имеют длину

$$\frac{\sqrt{g_{11}}\cdot b}{a_1}, \quad \frac{\sqrt{g_{22}}\cdot b}{a_2}, \quad \frac{\sqrt{g_{33}}\cdot b}{a_3}.$$

2. Если A^r, B^r — единичные взаимно ортогональные векторы, лежащие в плоскости и имеющие начало в точке P_0, то координаты любой точки плоскости определяются равенствами

$$x^r = x_0^r + r\cos\theta A^r + r\sin\theta B^r,$$

где $r = PP_0$, а θ — угол между PP_0 и A^r.

3. Показать, что в (1)

$$\lambda : \mu : \nu = \Delta(PP_2P_3) : \Delta(PP_3P_1) : \Delta(PP_1P_2).$$

4. Пусть $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$ — две точки, не лежащие в плоскости (2). Найти отношение $\lambda : \mu$ так, чтобы точка $(\lambda x_{(1)}^r + \mu x_{(2)}^r)/(\lambda + \mu)$ лежала в плоскости. Вывести, что плоскость делит пространство на две части таким образом, что $a_r x^r - b$ положительно для точек, расположенных по одну сторону плоскости, и отрицательно для точек, расположенных по другую сторону от нее.

§ 2. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана уравнением

$$a_r x^r = b.$$

Если $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$ — две любые точки плоскости, то $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$ должны удовлетворять этому уравнению. Вычитая, имеем

$$a_r(x_{(2)}^r - x_{(1)}^r) = 0. \qquad (5)$$

Здесь $x_{(2)}^r - x_{(1)}^r$ — любой вектор, лежащий в плоскости. Следовательно, равенство (5) указывает нам, что вектор

$$a^r = g^{rs} a_s$$

перпендикулярен к любому вектору, лежащему в плоскости; поэтому он должен быть ортогонален и к самой плоскости. Если обозначить длину a_r через a, то

$$a = \sqrt{g^{mn} a_m a_n}, \tag{6}$$

и мы видим, *что единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, есть a^r/a.*

Пусть x_0^r — точка, не лежащая в плоскости. Мы хотим найти расстояние δ от точки x_0^r до плоскости. Если x^r — произвольная точка плоскости, то, очевидно, расстояние δ есть проекция вектора $(x^r - x_0^r)$ на перпендикуляр к плоскости. Следовательно,

$$\delta = \frac{a_s (x^s - x_0^s)}{a}.$$

Но x^r лежит на плоскости, т. е.

$$a_s x^s = b.$$

Поэтому

$$\delta = \frac{b - a_s x_0^s}{a} = \frac{b - a_s x_0^s}{\sqrt{g^{mn} a_m a_n}}. \tag{7}$$

В частности, длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, равна

$$\delta_0 = \frac{b}{\sqrt{g^{mn} a_m a_n}}. \tag{8}$$

Мы видели, что выражение $b - a_s x_0^s$ имеет различные знаки в зависимости от того, по какую сторону от плоскости лежит точка x_0^r Поэтому расстояние δ окажется положительным для точек, лежащих по одну сторону от плоскости, и отрицательным для точек, лежащих по другую сторону от нее.

Мы можем привести уравнение плоскости к одной специальной форме, которая называется *нормальной формой* уравнения. Разделим уравнение (2) на a, длину вектора a_r. Уравнение плоскости теперь имеет вид

$$\lambda_r x^r = p, \tag{9}$$

где λ_r — *единичный* вектор. Поэтому расстояние от точки x_0^r до плоскости будет

$$\delta = p - \lambda_r x_0^r, \tag{10}$$

где p — расстояние плоскости от начала координат. В этом случае единичный вектор, нормальный к плоскости, есть $\lambda^r = g^{rs} \lambda_s$.

Упражнения

1. *Доказать, что угол* θ *между плоскостями*

$$a_r x^r = b \quad \text{и} \quad a'_r x^r = b'$$

определяется формулой

$$\cos\theta = \frac{g^{mn} a_m a'_n}{aa'} .$$

Единичные векторы, нормальные к плоскостям, будут

$$\frac{a^r}{a} \quad \text{и} \quad \frac{a'^r}{a'} ,$$

где a, a' — длины векторов a_r и a'_r, а угол θ между плоскостями равен углу между нормальными векторами. Следовательно,

$$\cos\theta = \frac{g_{mn} a^m a'^n}{aa'} \text{*)} .$$

Но $a^r = g^{rm} a_m$ и $a'^r = g^{rm} a'_m$; поэтому $g_{mn} a^m a'^n = g^{rs} a_r a'_s$ и выражение для $\cos\theta$ принимает вид

$$\cos\theta = \frac{g^{mn} a_m a'_n}{aa'} .$$

2. Доказать, что расстояния от базисных точек E_1, E_2, E_3 до плоскости равны соответственно

$$\frac{b - a_1}{a}, \quad \frac{b - a_2}{a}, \quad \frac{b - a_3}{a} .$$

3. Доказать, что вектор, перпендикулярный к плоскости, образует с осями координат углы, косинусы которых равны

$$\frac{a_1}{a\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{a_2}{a\sqrt{g_{22}}}, \quad \frac{a_3}{a\sqrt{g_{33}}} .$$

4. Доказать, что две плоскости $a_r x^r = b$ и $a'_r x^r = b'$ ортогональны, если $g^{mn} a_m a'_n = 0$, и параллельны, если $a'_r = k a_r$.

5. Показать, что если P — произвольная точка на перпендикуляре, опущенном из P_0 на плоскость, то ее координаты x^r будут

$$x^r = x_0^r + \varrho \frac{a^r}{a} ,$$

где ϱ — расстояние PP_0. Вывести отсюда выражение для расстояния от P_0 до плоскости.

---

*) Дальше можно просто воспользоваться правилом поднимания и опускания немых индексов. (*Прим. ред.*)

§ 3. Пересечение двух плоскостей

Пусть

$$\begin{cases} a_r x^r = b, \\ a'_r x^r = b' \end{cases} \tag{11}$$

— уравнения двух заданных плоскостей. Мы будем пользоваться обозначениями

$$A_{rs} = \begin{vmatrix} a_r & a'_r \\ a_s & a'_s \end{vmatrix} = a_r a'_s - a_s a'_r, \tag{12}$$

причем очевидно, что A_{rs} — антисимметричный тензор.

Возможны два случая: либо плоскости параллельны, либо они не параллельны; случай совпадения является частным случаем параллельных плоскостей.

а) *Плоскости параллельны.* В этом случае должно быть

$$a'_r = k a_r,$$

где k — скалир. Другими словами,

$$A_{rs} = 0. \tag{13}$$

Если, кроме того, плоскости совпадают, то $k = b'/b$ и должно удовлетворяться соотношение

$$\frac{a'_r}{b'} = \frac{a_r}{b}. \tag{14}$$

Это последнее равенство может быть переписано в другой форме, а именно: два уравнения

$$a_r = \theta_r b, \qquad a'_r = \theta_r b'$$

должны удовлетворяться одновременно.

б) *Плоскости не параллельны.* В этом случае не все составляющие тензора A_{rs} равны нулю. Это мы можем записать кратко так:

$$A_{rs} \neq 0. \tag{15}$$

Это вовсе не означает требования, чтобы все A_{rs} были отличны от нуля. Просто A_{rs} не является нулевым тензором. Тогда плоскости пересекаются по определенной прямой. Эта прямая лежит, очевидно, в обеих плоскостях и перпендикулярна как к a^r, так и к a'^r. Следовательно, ее направление совпадает с направлением вектора $\varepsilon^{rmn} a_m a'_n$. Если $\underset{0}{x}^r$ — произвольная точка линии пересечения, то любая другая точка этой линии определяется соотношением

$$x^r = \underset{0}{x}^r + t\varepsilon^{rmn} a_m a'_n$$

при всевозможных значениях t.

Мы можем, следовательно, классифицировать полученные результаты следующим образом:

(А) $$A_{rs} \neq 0;$$

тогда существует линия пересечения

(Б) $$A_{rs} = 0.$$

1) $\frac{a'_r}{b'} \neq \frac{a_r}{b}$ плоскости параллельны и линия их пересечения расположена в бесконечности.

2) $\frac{a'_r}{b'} = \frac{a_r}{b}$, плоскости совпадают.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\boxed{\lambda\,(a_r x^r - b) + \mu\,(a'_r x^r - b') = 0.} \tag{16}$$

Если плоскости (11) параллельны или совпадают, то при различных значениях отношения λ/μ (16) является уравнением параллельной или совпадающей плоскости.

Если плоскости (11) не параллельны, то (16) определяет плоскость, проходящую через линию их пересечения Значит, если изменять отношение λ/μ, мы получим все плоскости, проходящие через линию пересечения плоскостей (11).

Мы сейчас истолкуем отношение λ/μ Пусть плоскость (16) образует углы α, α' с плоскостями (11). Тогда если δ, δ' — расстояния до плоскостей (11) от точки на плоскости (16), то нетрудно видеть, что

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$$

Но

$$\delta = \frac{b - a_r x^r}{a}, \qquad \delta' = \frac{b' - a'_r x^r}{a'}.$$

Поэтому из (16)

$$\lambda a\delta + \mu a'\delta' = 0$$

и

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{a'\delta'}{a\delta} = -\frac{a'\sin\alpha'}{a\sin\alpha} \tag{17}$$

Упражнения

1. Доказать, что

$$\varepsilon^{rmn} A_{mn} = 2\varepsilon^{rmn} a_m a'_n.$$

2. Показать, что единичный вектор, параллельный линии пересечения плоскостей (11), есть

$$\frac{\varepsilon^{rmn} a_m a'_n}{aa' \sin\theta},$$

где θ — угол между плоскостями.

3. Показать, что угол θ между плоскостями определяется соотношением

$$2a^2 a'^2 \sin^2\theta = A_{mn} A^{mn}.$$

4. Показать, что точка, в которой линия пересечения плоскостей пересекает координатную плоскость $x^3 = 0$, имеет координаты

$$\left(\frac{ba'_2 - b'a_2}{A_{12}},\ \frac{ba'_1 - b'a_1}{A_{21}},\ 0\right).$$

5. Сравнивая выражения длины двух равных векторов

$$\varepsilon^{rmn} a_m (\lambda a_n + \mu a'_n) = \mu \varepsilon^{rmn} a_m a'_n,$$

доказать, что

$$\mu a' \sin\theta = \sin\alpha\, (\lambda^2 a^2 + \mu^2 a'^2 + 2\lambda\mu a a' \cos\theta)^{1/2}.$$

§ 4. Пересечение трех плоскостей

Пусть заданы уравнения трех плоскостей

$$a_r^{(1)} x^r = b^{(1)},$$
$$a_r^{(2)} x^r = b^{(2)},$$
$$a_r^{(3)} x^r = b^{(3)},$$

или, короче,

$$a_r^{(i)} x^r = b^{(i)}; \tag{18}$$

мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$A_{rst} = \begin{vmatrix} a_r^{(1)} & a_s^{(1)} & a_t^{(1)} \\ a_r^{(2)} & a_s^{(2)} & a_t^{(2)} \\ a_r^{(3)} & a_s^{(3)} & a_t^{(3)} \end{vmatrix} = e_{ijk} a_r^{(i)} a_s^{(j)} a_t^{(k)}, \tag{19}$$

$$A_{rs}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_r^{(2)} & a_s^{(2)} \\ a_r^{(3)} & a_s^{(3)} \end{vmatrix}, \quad A_{rs}^{(2)} = \begin{vmatrix} a_r^{(3)} & a_s^{(3)} \\ a_r^{(1)} & a_s^{(1)} \end{vmatrix}, \quad A_{rs}^{(3)} = \begin{vmatrix} a_r^{(1)} & a_s^{(1)} \\ a_r^{(2)} & a_s^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Все эти объекты являются антисимметричными тензорами. Мы будем рассматривать следующие случаи взаимного расположения трех плоскостей.

1. *Все три плоскости параллельны между собой*; совпадение плоскостей будем рассматривать как частный случай параллельности. Из предыдущего параграфа следует, что в этом случае должно быть

$$A_{rs}^{(i)}=0,$$

откуда, разумеется, вытекает, что A_{rst} обращается в нуль. Мы разделим этот случай на три подслучая.

а) *Все три плоскости совпадают.* Условием этого являются равенства

$$\frac{a_r^{(1)}}{b^{(1)}}=\frac{a_r^{(2)}}{b^{(2)}}=\frac{a_r^{(3)}}{b^{(3)}}=\theta_r. \tag{21}$$

б) *Только две плоскости совпадают* Пусть это будут последние две плоскости. Мы должны иметь в этом случае

$$a_r^{(2)}=\theta_r b^{(2)},\qquad a_r^{(3)}=\theta_r b^{(3)},\qquad a_r^{(1)}\neq\theta_r b^{(1)}.$$

Линией пересечения является бесконечно удаленная прямая (несобственная прямая).

в) *Нет совпадающих плоскостей.* Тогда нет таких двух уравнений из (21), которые удовлетворялись бы одновременно. Пересечением является бесконечно удаленная прямая.

2. *Только две плоскости параллельны.* Пусть это будут последние две плоскости. Тогда мы должны иметь (стр. 83)

$$A_{rs}^{(1)}=0,\quad A_{rs}^{(2)}\neq 0,\quad A_{rs}^{(3)}\neq 0.$$

Вследствие обращения в нуль $A_{rs}^{(1)}$ должно быть $A_{rst}=0$.

а) *Две плоскости совпадают.* Вследствие этого мы должны иметь

$$\frac{a_r^{(2)}}{b^{(2)}}=\frac{a_r^{(3)}}{b^{(3)}}=\theta_r.$$

Как легко проверить, при этих условиях имеем также

$$\sum_{i=1}^{3} b^{(i)}A_{rs}^{(i)}=b^{(i)}A_{rs}^{(i)}=0.$$

Пересечением является собственная (не бесконечно удаленная) прямая, а именно, линия пересечения первой плоскости с двумя совпавшими плоскостями.

б) *Две параллельные плоскости не совпадают*, т. е.

$$\frac{a_r^{(2)}}{b^{(2)}}\neq\frac{a_r^{(3)}}{b^{(2)}}$$

Следовательно,

$$b^{(i)}A_{rs}^{(i)} \neq 0.$$

Пересечением является теперь общая точка двух параллельных прямых, т. е. бесконечно удаленная точка.

3. *Нет параллельных плоскостей.* Мы должны иметь

$$A_{rs}^{(1)} \neq 0, \quad A_{rs}^{(2)} \neq 0, \quad A_{rs}^{(3)} \neq 0.$$

Линия пересечения двух плоскостей может быть либо параллельной, либо не параллольной третьей плоскости. Плоскость

$$\lambda\,(a_r^{(2)}x^r - b^{(2)}) + \mu\,(a_r^{(3)}x^r - b^{(3)}) = 0$$

проходит через линию пересечения двух последних плоскостей. Значит, мы либо сможем, либо не сможем найти величины λ, μ так, что

$$a_r^{(1)} = \lambda a_r^{(2)} + \mu a_r^{(3)},$$

в зависимости от того, параллельна линия пересечения последних двух плоскостей первой плоскости или не параллельна.

а) *Если линия пересечения двух плоскостей не параллельна оставшейся плоскости*, должно быть

$$A_{rst} \neq 0$$

и плоскости пересекаются в единственной точке на конечном расстоянии.

б) *Если линия пересечения двух плоскостей параллельна третьей плоскости*, мы должны иметь

$$A_{rst} = 0.$$

Теперь имеются две возможности: либо эта линия пересечения лежит в оставшейся плоскости, либо она не лежит в ней. Первое имеет место, если

$$b^{(1)} = \lambda b^{(2)} + \mu b^{(3)},$$

а это влечет за собой

$$b^{(i)}A_{rs}^{(i)} = 0.$$

Следовательно, когда это соотношение справедливо, линией пересечения является собственная прямая. Во втором случае

$$b^{(1)} \neq \lambda b^{(2)} + \mu b^{(3)},$$

т. е.

$$b^{(i)}A_{rs}^{(i)} \neq 0,$$

и пересечение происходит в бесконечно удаленной (несобственной) точке.

Теперь все возможные случаи рассмотрены, и мы можем классифицировать полученные результаты следующим образом:

А. $A_{rst} \neq 0$. Имеется единственная общая точка.

Б. $$A_{rst}=0, \quad A_{rs}^{(i)} \neq 0$$

1) $b^{(i)}A_{rs}^{(i)} \neq 0$. Имеется единственная бесконечно удаленная (несобственная) общая точка.

2) $b^{(i)}A_{rs}^{(i)}=0$. Имеется общая прямая.

В. $$A_{rst}=0, \quad A_{rs}^{(i)}=0.$$

1) $a_r^{(i)}-{}_1\theta_r b^{(i)} \neq 0$. Имеется общая бесконечно удаленная (несобственная) прямая.

2) $a_r^{(i)}-{}_1\theta_r b^{(i)}=0$. Три плоскости совпадают.

(Следует отметить, что условие $A_{rs}^{(i)} \neq 0$ означает, что три тензора $A_{rs}^{(1)}$, $A_{rs}^{(2)}$, $A_{rs}^{(3)}$ — *не все нулевые* тензоры. Аналогично $a_r^{(i)}-\theta_r b^{(i)} \neq 0$ означает, что три вектора, которые получаются при $i=1, 2, 3$, — *не все нулевые* векторы.)

Упражнения

1. Доказать, что $A_{rst}=A_{123}e_{rst}$.

2. Пусть $A=\frac{1}{\sqrt{g}}A_{123}$. Показать, что $A_{rst}=A\varepsilon_{rst}$, и вывести отсюда, что A — скаляр.

3. Доказать, что

$$A_{rst}=a_r^{(i)}A_{st}^{(i)}=\sum_{i=1}^{3} a_r^{(i)}A_{st}^{(i)}.$$

4. Доказать, что

$$A_{rst}=a_r^{(1)}A_{st}^{(1)}+a_s^{(1)}A_{tr}^{(1)}+a_t^{(1)}A_{rs}^{(1)}=\frac{1}{2}\,\delta_{r\,s\,t}^{mnp}a_m^{(1)}A_{np}^{(1)}.$$

5. Показать, что если $A_{rst}=0$, то мы можем подобрать числа $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ так, чтобы было

$$\lambda_{(i)}a_r^{(i)}=0.$$

Если, кроме того, $b^{(i)}A_{rs}^{(i)}=0$, то числа $\lambda_{(i)}$ удовлетворяют также уравнению

$$\lambda_{(i)}b^{(i)}=0.$$

§ 5. Плоскостные координаты

Мы видели, что уравнение плоскости имеет вид

$$a_r x^r = b.$$

Предположим, что плоскость не проходит через начало координат, так что $b \neq 0$, и разделим обе части уравнения на b. Уравнение плоскости принимает вид

$$\frac{a_r x^r}{b} = 1.$$

Полагая $u_r = \frac{a_r}{b}$, получим окончательно

$$u_r x^r = 1. \qquad (22)$$

Если теперь нам даны три величины (u_1, u_2, u_3), то уравнение (22) единственным образом определяет плоскость, так же как (x^1, x^2, x^3) единственным образом определяют точку. Поэтому мы назовем u_s по аналогии с x^r *аффинными координатами плоскости*, или *плоскостными координатами* *); мы будем также называть u_r *плоскостными переменными* в отличие от x^r, которые в этом случае будем называть *точечными переменными*. Уравнение (22) показывает нам, что u_r образуют ковариантный вектор. В самом деле, если мы перейдем от одной системы аффинных точечных координат к другой, точечные переменные преобразуются по закону

$$\bar{x}^r = c^r_s x^s, \qquad (23)$$

в то время как закон преобразования плоскостных переменных таков:

$$\boxed{u_r = \gamma^s_r u_s,} \qquad (24)$$

---

*) См. Клейн Ф., Неевклидова геометрия, 1936, стр. 46. Эти координаты называются также плюккеровыми или тангенциальными, см. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, 1947, стр. 300. В подлиннике: rectilinear coordinates of the plane, ср. примечание к стр. 57. Поэтому, чтобы не нарушать стиль подлинника, введен термин «аффинные координаты плоскости» и «плоскостные координаты» (*Прим. ред.*)

где γ_r^s является алгебраическим дополнением элемента c_s^r в детерминанте $|c_s^r|$, разделенным на $|c_s^r|$. Таким образом, преобразование системы аффинных координат определяется линейным преобразованием либо точечных, либо плоскостных переменных.

Положим

$$u_r = \theta\lambda_r, \tag{25}$$

где λ_r — данный единичный вектор, а θ — переменный параметр. Исследуем, как при изменении θ изменяется плоскость, координаты которой определены по (25). Уравнение плоскости в точечных переменных, или, как его часто называют, *точечное уравнение* плоскости, по (22) будет

$$\lambda_r x^r = \frac{1}{\theta}.$$

Следовательно, при переменном θ мы имеем *семейство параллельных плоскостей*, нормальным вектором к которым является λ^r. Кроме того, $1/\theta$ есть длина перпендикуляра к плоскости, опущенного из начала координат; поэтому плоскость удаляется в бесконечность, когда $\theta \to 0$, и приближается к началу координат при $\theta \to \infty$. Мы видим, что плоскость с координатами (0, 0, 0) является *бесконечно удаленной* (*несобственной*) *плоскостью*, а плоскость, проходящая через начало координат, получается при стремлении u_1, u_2, u_3 к бесконечности с сохранением неизменных отношений между ними. Из (25) видно, что θ должно быть равно u, модулю вектора u_r, и, следовательно, u равно длине перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость.

Семейство плоскостей (0, 0, t) при переменном t имеет точечное уравнение

$$x^3 = \frac{1}{t}$$

Таким образом, это — семейство плоскостей, параллельных координатной плоскости $x^3 = 0$, а плоскость, получающаяся при $t = 1$, проходит через базисную точку E_3. Мы назовем эту плоскость *базисной плоскостью* *). Аналогичные результаты имеют место для плоскостей, параллельных двум другим координатным плоскостям. Таким образом, мы имеем *три базисные плоскости* с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Если мы запишем координаты базисных плоскостей в виде $e_r^{(i)}$, то

$$\boxed{e_r^{(i)} = \delta_r^i} \tag{26}$$

в любой координатной системе. Легко видеть (ср. стр. 61), что *мы всегда можем выбрать координатную систему таким образом, чтобы любые три плоскости, имеющие единственную собственную точку пересечения и не проходящие через начало координат, являлись базисными плоскостями в этой системе.* Действительно, проведем через начало координат плоскости, параллельные трем данным, в результате чего образуется параллелепипед, и пусть E_1, E_2, E_3 — его вершины, лежащие на ребрах, проходящих через O. Если мы возьмем координатную систему, в которой E_1, E_2, E_3 являются базисными точками, три данные плоскости будут плоскостями, проходящими через базисные точки параллельно координатным плоскостям, и будут поэтому являться базисными плоскостями координатной системы.

Упражнения

1. Показать, что аффинные точечные координаты пересечения базисных плоскостей будут (1, 1, 1).

2. Показать, что длина перпендикуляра, опущенного из начала на плоскость u_r, равна $\dfrac{1}{\sqrt{g^{mn}u_m u_n}}$; вывести отсюда, что длины перпендикуляров к базисным плоскостям будут

$$\frac{1}{\sqrt{g^{11}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{g^{22}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{g^{33}}}.$$

3. Показать, что точка u^r является полюсом плоскости u_r по отношению к единичной сфере с центром в начале.

4. Доказать, что угол φ между плоскостями u_r и v_r определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{g^{mn}u_m v_n}{uv}$$

---

*) В подлиннике unit plane, ср. прим. к стр. 60. (*Прим. ред.*)

5. Вывести из упражнения 4, что углы φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} между координатными плоскостями определяются формулами

$$\cos\varphi_{12}=\frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}g^{22}}},\quad \cos\varphi_{23}=\frac{g^{23}}{\sqrt{g^{22}g^{33}}},\quad \cos\varphi_{31}=\frac{g^{31}}{\sqrt{g^{33}g^{11}}}.$$

6. Показать, что каждому единичному ковариантному вектору соответствует плоскость, касающаяся единичной сферы с центром в начале.

7. Показать, что если $e^r_{(i)}$ — базисные точки, а $e^{(i)}_r$ — базисные плоскости, то $e^{(i)}_r$ является алгебраическим дополнением элемента $e^r_{(i)}$ в определителе $|e^r_{(i)}|$.

§ 6. Семейства плоскостей

Пусть нам даны две плоскости с координатами u_r и v_r. Исследуем плоскость с координатами

$$\boxed{\frac{\lambda u_r+\mu v_r}{\lambda+\mu}}. \tag{27}$$

Точечное уравнение этой плоскости есть

$$\left(\frac{\lambda u_r+\mu v_r}{\lambda+\mu}\right)x^r=1,$$

или

$$\lambda(u_rx^r-1)+\mu(v_rx^r-1)=0.$$

Согласно § 3 (стр. 84) мы видим, что это — плоскость, проходящая через линию пересечения плоскостей u_r и v_r. Кроме того, если она образует углы α, β с плоскостями u_r, v_r соответственно, то

$$\lambda u\sin\alpha+\mu v\sin\beta=0,$$

или

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{v\sin\beta}{u\sin\alpha}. \tag{28}$$

В частности, плоскость $\frac{u_r+kv_r}{1+k}$ делит угол между u_r и v_r на части α, β так, что

$$k=-\frac{u\sin\alpha}{v\sin\beta}.$$

Мы видим, что две плоскости

$$\frac{u_r+kv_r}{1+k}, \quad \frac{u_r+k'v_r}{1+k'} \tag{29}$$

находятся в гомографическом соответствии, если k и k' связаны соотношением

$$akk'+bk+ck'+d=0,$$

и в инволюции, если $b=c$ *).

Если нам даны три плоскости, мы можем обозначить их так:

$$u_r^{(i)} \equiv u_r^{(1)},\ u_r^{(2)},\ u_r^{(3)}. \tag{30}$$

Из § 4 (стр. 86) мы знаем, что необходимым и достаточным условием того, что эти плоскости пересекаются в единственной собственной точке, является

$$\left| u_r^{(i)} \right| \neq 0. \tag{31}$$

Любая другая плоскость, проходящая через эту точку, может быть представлена в виде

$$u_r = \frac{\lambda_{(1)}u_r^{(1)}+\lambda_{(2)}u_r^{(2)}+\lambda_{(3)}u_r^{(3)}}{\lambda_{(1)}+\lambda_{(2)}+\lambda_{(3)}} = \frac{\lambda_{(i)}u_r^{(i)}}{\sum \lambda_{(i)}}. \tag{32}$$

Упражнения

1. Доказать, что двойное отношение пучка, образованного плоскостями (29) и u_r, v_r, есть k/k'.

2. Доказать, что плоскости

$$u_r,\ v_r,\ \frac{u_r+kv_r}{1+k}, \quad \frac{u_r-kv_r}{1-k}$$

образуют гармонический пучок **).

3. Показать, что плоскость $\frac{vu_r \pm uv_r}{v \pm u}$ является биссектрисой угла между u_r, v_r.

---

*) См. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, 1947, стр. 329 и 350. (*Прим. ред.*)

**) См. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, 1947, стр. 339. (*Прим. ред.*)

4. Определив параллельные плоскости как плоскости, пересекающиеся по несобственной прямой, показать, что система плоскостей, параллельных u_r, есть θu_r при переменном θ.

§ 7. Уравнение точки

Мы видели, что линейное уравнение в точечных переменных является уравнением плоскости. Исследуем, какой образ представляет линейное уравнение в плоскостных переменных. Такое линейное уравнение имеет вид

$$\boxed{a^r u_r = b.} \tag{33}$$

По (22), стр. 89 это уравнение выражает условие того, что плоскость u_r проходит через точку $\frac{a^r}{b}$. *Следовательно, линейное уравнение относительно u_r определяет систему плоскостей, проходящих через фиксированную точку*; поэтому мы можем назвать его *плоскостным уравнением точки*. Если b стремится к нулю, то точка $\frac{a^r}{b}$ уходит в бесконечность вдоль линии, соединяющей начало с a^r; при этом уравнение (33) принимает вид

$$a^r u_r = 0. \tag{34}$$

Таким образом, *однородное* линейное уравнение (34) в плоскостных переменных представляет *несобственную точку в направлении a^r*.

Два линейных уравнения

$$\begin{aligned} a^r u_r &= b, \\ a'^r u_r &= b', \end{aligned} \tag{35}$$

определяют плоскости, которые проходят как через точку $\frac{a^r}{b}$, так и через точку $\frac{a'^r}{b'}$; поэтому (35) представляет семейство плоскостей, проходящих через прямую, соединяющую эти две точки. Таким образом, два линейных уравнения в плоскостных переменных представляют прямую, проходящую через две точки.

Введем обозначение

$$A^{rs} = \begin{vmatrix} a^r & a'^r \\ a^s & a'^s \end{vmatrix} \tag{36}$$

и рассмотрим следующие случаи:

А. Если $A^{rs} \neq 0$, то $a'^r \neq \theta a^r$ и эти две точки не лежат на прямой, проходящей через начало. Прямая, соединяющая эти точки, не проходит через начало координат.

Б. Если $A^{rs}=0$, то точки лежат на прямой, проходящей через начало координат, и мы имеем два подслучая:

1) $\frac{a'^r}{b'} \neq \frac{a^r}{b}$, точки не совпадают и прямая проходит через начало координат.

2) $\frac{a'^r}{b'} = \frac{a^r}{b}$, точки совпадают.

Читателю следует обратить внимание на аналогию между этими результатами и § 3 (стр. 83).

Если нам даны три линейных уравнения

$$a^r_{(i)}u_r = b_{(i)}, \tag{37}$$

то они представляют три данные точки; найдем их расположения. Воспользуемся обозначениями

$$A^{rst} = \begin{vmatrix} a^r_{(1)} & a^s_{(1)} & a^t_{(1)} \\ a^r_{(2)} & a^s_{(2)} & a^t_{(2)} \\ a^r_{(3)} & a^s_{(3)} & a^t_{(3)} \end{vmatrix}, \tag{38}$$

$$A^{rs}_{(1)} = \begin{vmatrix} a^r_{(2)} & a^s_{(2)} \\ a^r_{(3)} & a^s_{(3)} \end{vmatrix}, \quad A^{rs}_{(2)} = \begin{vmatrix} a^r_{(3)} & a^s_{(3)} \\ a^r_{(1)} & a^s_{(1)} \end{vmatrix}, \quad A^{rs}_{(3)} = \begin{vmatrix} a^r_{(1)} & a^s_{(1)} \\ a^r_{(2)} & a^s_{(2)} \end{vmatrix}.$$

Мы предоставляем читателю доказать, по аналогии с § 4 (стр. 85), следующие предложения:

А. $A^{rst} \neq 0$, точки лежат в одной и той же плоскости, не проходящей через начало координат.

Б. $A^{rst}=0$, $\quad A^{rs}_{(i)} \neq 0$.

1) $b_{(i)}A^{rs}_i \neq 0$, точки лежат в одной и той же плоскости, проходящей через начало координат.

2) $b_{(i)}A^{rs}_{(i)}=0$, точки лежат на прямой, не проходящей через начало координат.

В. $A^{rst}=0$, $A^{rs}_{(i)}=0$.

1) $a^r_{(i)}-\theta^r b_{(i)} \neq 0$, точки лежат на прямой, проходящей через начало координат.

2) $a^r_{(i)}-\theta^r b_{(i)}=0$, все точки совпадают.

Нетрудно заметить полную аналогию между системами точечных и плоскостных переменных. Точка в одной системе соответствует плоскости в другой, линия, соединяющая две точки, соответствует линии пересечения двух плоскостей, начало координат соответствует бесконечно удаленной плоскости и т. д. Принцип соответствия между системами этих переменных в геометрии известен как *принцип двойственности*.

Упражнения

1. Показать, что уравнение в плоскостных координатах, аналогичное (1) или (3) (стр. 78, 79), дает две формы плоскостного уравнения точки.

2. Доказать, что

$$\lambda(a^r u_r - b) + \mu(a'^r u_r - b') = 0$$

есть уравнение любой точки, лежащей на линии, соединяющей точки (35).

3. Показать, что точка из примера 2 делит отрезок (35) в отношении

$$\frac{\mu b'}{\lambda b}.$$

4. Доказать, что точка

$$\lambda^{(i)}(a^r_{(i)} u_r - b_{(i)}) = 0$$

есть центр тяжести трех точек (37) с весами $\lambda^{(1)} b_{(1)}$, $\lambda^{(2)} b_{(2)}$, $\lambda^{(3)} b_{(3)}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Показать, что если уравнение плоскости дано в форме (3) (стр. 79), то вектор $\varepsilon^{rmn} A_m B_n$ нормален к плоскости.

2. Показать, что если уравнение плоскости есть (1) (стр. 78), то вектор $g^{rs}\varepsilon_{smn}(x^m_{(1)} x^n_{(2)} + x^m_{(2)} x^n_{(3)} + x^m_{(3)} x^n_{(1)})$ нормален к плоскости.

3. Координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки x^r_0 на плоскость $a_r x^r = b$, равны

$$x^r_0 + (b - a_s x^s_0)\frac{a^r}{a^2}.$$

4. Плоскость, проходящая через пересечение плоскостей $a_r x^r - b = 0$ и $a'_r x^r - b' = 0$ и начало координат, есть

$$(b' a_r - b a'_r) x^r = 0.$$

5. Показать, что если плоскость составляет углы α и β с двумя другими плоскостями, которые образуют угол θ, и если линии пересечения плоскостей параллельны, то

$$\sin^2\theta = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\theta.$$

6. Доказать, что если $A \neq 0$, то единственная точка пересечения плоскостей в § 4 (стр. 85) есть

$$\frac{\varepsilon^{rmn} b^{(i)} A^{(i)}_{mn}}{2A}.$$

7. Используя обозначения § 4 (стр. 85), обозначим через M матрицу

$$\left|\begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & b^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & b^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & b^{(3)} \end{array}\right|.$$

Тогда

1) Доказать, что условия $A_{rst}=0$, $b^{(i)}A_{rs}^{(i)}=0$ означают равенство нулю всех миноров третьего порядка матрицы M.

2) Доказать, что условия $A_{rs}^{(i)}=0$,

$$\frac{a_r^{(1)}}{b^{(1)}}=\frac{a_r^{(2)}}{b^{(2)}}=\frac{a_r^{(3)}}{b^{(3)}}$$

означают равенство нулю всех миноров второго порядка матрицы M.

8. Показать, что если $u_r^{(i)}$ — три заданные плоскости, причем координаты этих плоскостей удовлетворяют условию $|u_r^{(i)}|\neq 0$ новые переменные $\bar{u}_r$, получаемые путем преобразования $u_r=u_r^{(i)}\bar{u}_i$ таковы, что заданные плоскости становятся базисными плоскостями новой системы. Пользуясь этим, показать, что любые *три ковариантных вектора* $u_r^{(i)}$, *удовлетворяющих условию* $|u_r^{(i)}|\neq 0$, *могут принимать значения* (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) *в соответственно выбранной системе координат.*

9. Доказать, что ортогональная декартова система может быть выбрана так, что любой ковариантный вектор будет иметь две нулевые составляющие.

10. Доказать, что вектор $\varepsilon^{rmn}u_m^{(1)}u_n^{(2)}$ параллелен линии пересечения плоскостей $u_m^{(1)}$, $u_n^{(2)}$.

11. Показать, что точка, уравнение которой есть

$$\varepsilon^{mnp}u_m^{(1)}u_n^{(2)}u_p=0,$$

— бесконечно удаленная точка на линии пересечения плоскостей $u_m^{(1)}$, $u_n^{(2)}$.

12. Пусть $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, $u_r^{(3)}$, $u_r^{(4)}$ — четыре плоскости, и пусть

$$A_{rst}=\left|\begin{array}{cccc} u_r^{(1)} & u_s^{(1)} & u_t^{(1)} & 1 \\ u_r^{(2)} & u_s^{(2)} & u_t^{(2)} & 1 \\ u_r^{(3)} & u_s^{(3)} & u_t^{(3)} & 1 \\ u_r^{(4)} & u_s^{(4)} & u_t^{(4)} & 1 \end{array}\right|.$$

Доказать, что $A_{rst}=\frac{A_{123}}{\sqrt{g}}\varepsilon_{rst}$, и вывести отсюда, что $A=\frac{A_{123}}{\sqrt{g}}$ есть инвариант.

13. Вывести из (32) (стр. 93), что при $A=0$ четыре плоскости примера 12 должны иметь одну общую точку.

14. Доказать, что если φ_{23} есть угол между координатными плоскостями $x^2=0$ и $x^3=0$, то

$$\sin^2\varphi_{23}=\frac{g_{11}}{g g^{22} g^{33}}\,.$$

15. Пусть даны три плоскости $u_r^{(i)}x^r=0$, проходящие через начало координат; обозначим через α, β, γ углы между их линиями пересечения. Путем вычисления инварианта

$$\frac{\varepsilon^{rst}u_r^{(1)}u_s^{(2)}u_t^{(3)}}{\left\{\prod\limits_{i=1}^{3} g^{mn}u_m^{(i)}u_n^{(i)}\right\}^{1/2}}$$

в той декартовой системе, в которой заданные плоскости являются координатными плоскостями, доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\prod_{i=1}^{3} g^{mn}u_m^{(i)}u_n^{(i)}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right\}.$$

16. Пусть плоскостные координаты четырех плоскостей будут

$$u_r^{(1)},\ u_r^{(2)},\ u_r^{(3)},\ u_r^{(4)},$$

и пусть

$$A^{(1)}=\varepsilon^{rst}u_r^{(4)}u_s^{(2)}u_t^{(3)},\qquad A^{(2)}=\varepsilon^{rst}u_r^{(1)}u_s^{(4)}u_t^{(3)},$$

$$A^{(3)}=\varepsilon^{rst}u_r^{(1)}u_s^{(2)}u_t^{(4)},\qquad A^{(4)}=-\varepsilon^{rst}u_r^{(1)}u_s^{(2)}u_t^{(3)}.$$

Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & 1 \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} & 1 \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} & 1 \\ u_1^{(4)} & u_2^{(4)} & u_3^{(4)} & 1 \end{vmatrix}=-\sum_{a}^{4}A^{(a)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \end{vmatrix}=-A^{(4)},\ \text{и т. д.}$$

17. Сохраняя обозначения предыдущей задачи, путем вычисления инварианта

$$\frac{\left\{\sum\limits_{a}^{4} A^{(a)}\right\}^{3}}{\left\{\prod\limits_{a}^{4} A^{(a)}\right\}}$$

в той системе координат, в которой $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, $u_r^{(3)}$ являются базисными плоскостями, показать, что этот инвариант равен $6V$, где V есть объем тетраэдра, образованного данными четырьмя плоскостями.

ГЛАВА V

ПРЯМАЯ

§ 1. Точечные уравнения прямой

Существуют три формы, в которых может быть записано уравнение прямой.

Во-первых, пусть нам даны две точки $x^r_{(1)}$ и $x^r_{(2)}$ на прямой. Если вес этих двух точек равен λ и μ, то точка

$$\boxed{x^r = \frac{\lambda x^r_{(1)} + \mu x^r_{(2)}}{\lambda + \mu}} \tag{1}$$

есть их центр тяжести. Другими словами, эта точка лежит на прямой и делит расстояние между данными точками в отношении μ/λ. При различных значениях λ и μ (1) изображает любую точку прямой.

Во-вторых, пусть x^r_0 есть данная точка на прямой, и пусть λ^r есть единичный вектор, определяющий ее направление. Тогда любая точка прямой может быть задана так:

$$\boxed{x^r = x^r_0 + \varrho\lambda^r,} \tag{2}$$

где ϱ есть расстояние между x^r_0 и x^r.

Наконец, прямая может быть задана пересечением двух плоскостей, уравнения которых суть

$$\begin{aligned} a^{(1)}_r x^r &= b^{(1)}, \\ a^{(2)}_r x^r &= b^{(2)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Это дает третью форму, в которой может быть записано уравнение прямой.

В зависимости от рассматриваемых проблем удобно применять ту или иную форму уравнения прямой. Если мы занимаемся системами точек на одной прямой, наиболее удобной является форма (1), если же мы рассматриваем несколько прямых, наиболее удобна будет форма (2). Форма (3) удобна только при исследовании семейства плоскостей, проходящих через прямую.

Упражнения

1. Показать, что если d есть расстояние между $x^r_{(1)}$ и $x^r_{(2)}$, то $\lambda^r=\frac{x^r_{(2)}-x^r_{(1)}}{d}$ и (1) принимает форму (2), если положить $\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\varrho}{d}$.

2. Написав (2) в форме $x^r=(1-\varrho)x^r_0+\varrho(x^r_0+\lambda^r)$, показать, что это сразу дает уравнение в форме (1).

3. Показать, что в (3) λ^r пропорционален $\varepsilon^{rmn}a^{(1)}_m a^{(2)}_n$.

4. Найти отношения $\frac{\lambda}{\mu}$, при которых точка (1) лежит: а) на плоскости $a_r x^r=b$, б) на координатных плоскостях.

§ 2. Взаимное расположение двух прямых

Здесь мы применим уравнения прямых в форме (2). Пусть эти уравнения будут

$$\begin{aligned} x^r &= x^r_0+\varrho\lambda^r, \\ x'^r &= x'^r_0+\varrho'\lambda'^r. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как два параллельных единичных вектора имеют одни и те же составляющие, то уравнения прямых, проходящих через начало координат параллельно прямым (4), будут $x^r=\varrho\lambda^r$, $x'^r=\varrho'\lambda'^r$. Угол между прямыми (4) равен углу между параллельными им прямыми, проходящими через начало. Следовательно, угол θ между прямыми определяется так:

$$\cos\theta=g_{mn}\lambda^m\lambda'^n=\lambda_m\lambda'^n. \tag{5}$$

Две прямые перпендикулярны, если $g_{mn}\lambda^m\lambda'^n=0$, и параллельны, если $\lambda'^r=\lambda^r$.

Найдем кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Пусть P_0A и $P_0'A'$ (рис. 10) будут данные прямые, и пусть через каждую из них проведены плоскости P_0AR и $P_0'A'R'$, параллельные между собой. Проведем плоскости $P_0R'AA'$ и $P_0'RAA'$, перпендикулярные к предыдущим плоскостям и пересекающие данные прямые в точках A и A'. Очевидно, что $A'A$ есть не только перпендикуляр к обеим прямым, но также к обеим плоскостям. Точно так же легко видеть, что $A'A$ есть кратчайшее расстояние между прямыми, так как расстояние между любыми двумя другими точками прямых больше, чем расстояние по перпендикуляру между двумя параллельными плоскостями.

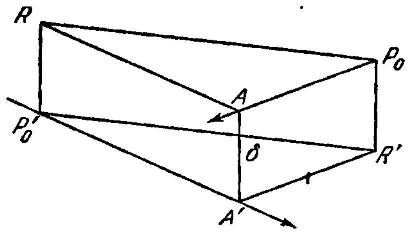

Рис. 10.

Пусть координаты точек P_0, P_0' будут x_0^r, $x_0'^r$ соответственно, и пусть δ есть искомое кратчайшее расстояние. Вектор

$$\frac{\varepsilon^{rmn}\lambda_m\lambda_n'}{\sin\theta} \tag{6}$$

есть единичный вектор, ортогональный к λ^r и λ'^r, т. е. к двум данным прямым. Кратчайшее расстояние между прямыми, следовательно, есть

$$\delta = \frac{\varepsilon_{rmn}(x_0^r - x_0'^r)\lambda^m\lambda'^n}{\sin\theta}. \tag{7}$$

Упражнения

1. Показать, что $\sin^2\theta = \delta_{rs}^{mn}\lambda^r\lambda'^s\lambda_m\lambda_n'$.
2. Показать, что координаты точек A и A' равны

$$x_0^r + \frac{\lambda^r}{\sin^2\theta}(\lambda_m\cos\theta - \lambda_m)(x_0^m - x_0'^m),$$

$$x_0'^r + \frac{\lambda'^r}{\sin^2\theta}(\lambda_m\cos\theta - \lambda_m')(x_0'^m - x_0^m).$$

3. Доказать, что уравнения двух параллельных плоскостей будут

$$\varepsilon_{mnp}\lambda^m\lambda'^n(x^p - x_0^p) = 0, \qquad \varepsilon_{mnp}\lambda^m\lambda'^n(x^p - x_0'^p) = 0.$$

4. Доказать, что уравнении двух взаимно перпендикулярных плоскостей будут

$$(\lambda_r\cos\theta - \lambda_r')(x^r - x_0^r) = 0,$$

$$(\lambda_r'\cos\theta - \lambda_r)(x^r - x_0'^r) = 0.$$

5. Доказать, что две прямые пересекаются, если

$$\varepsilon_{rmn} x_0^r \lambda^m \lambda'^n = \varepsilon_{rmn} x_0'^r \lambda^m \lambda'^n.$$

§ 3. Шесть координат прямой

Пусть P_0L (рис. 11) есть прямая, уравнение которой дано в форме

$$x^r = x_0^r + \varrho\lambda^r. \tag{8}$$

Образуем объект

$$\mu_r = \varepsilon_{rmn}\lambda^m x_0^n. \tag{9}$$

Этот объект есть ковариантный вектор; легко показать, что его составляющие зависят от выбора точки x_0^r на прямой. Два вектора λ^r и μ_r вполне определяют прямую; поэтому найдем уравнение прямой при помощи этих векторов. Если мы умножим (9) на $\varepsilon^{srp}\lambda_p$ и просуммируем по r от 1 до 3, то получим

$$\varepsilon^{srp}\lambda_p\mu_r = \varepsilon^{srp}\varepsilon_{rmn}\lambda^m x_0^n\lambda_p = -\delta_{mn}^{sp}\lambda^m x_0^n\lambda_p =$$
$$= -(\lambda^s x_0^p - \lambda^p x_0^s)\lambda_p = x_0^s - (\lambda_p x_0^p)\lambda^s.$$

Это показывает, что вектор $\varepsilon^{rst}\mu_s\lambda_t$ определяет точку на прямой. Поэтому уравнение прямой можно записать так:

$$x^r = \varepsilon^{rst}\mu_s\lambda_t + \varrho\lambda^r. \tag{10}$$

Составляющие двух векторов λ^r и μ_r называют *координатами прямой*; число этих координат равно шести. Они удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_m\lambda^m = 1, \qquad \lambda^m\mu_m = 0, \tag{11}$$

откуда следует, что λ^r есть единичный вектор, а μ^r перпендикулярен к нему.

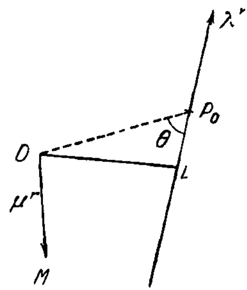

Рис. 11.

В геометрической интерпретации λ^r есть единичный вектор, задающий направление прямой. Вектор μ^r перпендикулярен как к λ^r так и к x_0^r и его направление таково, что триэдр (λ^r, x_0^r, μ^r) ориентирован положительно. Кроме того, его длина есть $OP_0 \sin\theta$, т. е. равна OL, где L есть основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую. Следовательно, если мы проведем OM перпендикулярно к плоскости OLP_0 так, чтобы LP_0, OP_0, OM образовывали положительно ориентированный триэдр, и возьмем OM равным OL, то точка M будет иметь координаты μ^r.

Упражнения

1. Доказать, что $\mu_r x^r = 0$ есть плоскость, проходящая через начало и заданную прямую.
2. Показать, что координаты точки L будут
$$\varepsilon^{rmn}\mu_m\lambda_n.$$
3. Показать, что если прямая проходит через начало координат, то $\mu_r = 0$.
4. Показать, что $g^{rs}\varepsilon_{smn}\mu^m x_0^n = x_0^r g_{mn} x_0^m \lambda^n - \lambda^r g_{mn} x_0^m x_0^n$.
5. Найти шесть координат каждой координатной оси.

§ 4. Плоскостное уравнение прямой

Уравнения прямой также можно написать в плоскостных координатах. Существуют две формы, в которых они могут быть записаны, и эти формы аналогичны формам (1) и (3), стр. 100.

Если $u_r^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$ — координаты двух любых плоскостей, проходящих через некоторую прямую, то

$$\boxed{u_r = \frac{\lambda u_r^{(1)} + \mu u_r^{(2)}}{\lambda + \mu},} \tag{12}$$

есть произвольная плоскость, проходящая через ту же прямую. Эта форма уравнений удобна при рассмотрении системы плоскостей, проходящих через прямую.

Прямая может быть задана как совокупность двух точек, определяемых плоскостными уравнениями

$$\begin{aligned} a^r_{(1)} u_r &= b_{(1)}, \\ a^r_{(2)} u_r &= b_{(2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Это — вторая форма уравнений; она может быть использована, когда желательно иметь дело с системой точек прямой в плоскостных координатах.

Упражнения

1. Показать, что когда $\mu/\lambda \to -1$, плоскость (12) стремится к плоскости, проходящей через начало и данную прямую.

2. Вывести из задачи 1, что точечное уравнение плоскости, проходящей через начало и прямую, есть

$$(u_r^{(1)}-u_r^{(2)})\, x^r=0.$$

3. Показать, что вектор $\varepsilon^{rmn} u_m^{(1)} u_u^{(2)}$ параллелен прямой и что его величина есть $u^{(1)} u^{(2)} \sin\theta$, где θ — угол между $u_r^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Пусть a и b — противолежащие ребра тетраэдра, d — кратчайшее расстояние между ними и θ — угол между ними. Доказать, что объем тетраэдра равен

$$V=\frac{1}{6}\, abd \sin\theta.$$

(Пусть x_0^r, $x_0'^r$, $x_0^r+a\lambda^r$, $x_0'^r+b\lambda'^r$ — вершины тетраэдра. Тогда $6V=\varepsilon_{rst}(x_0^r-x_0'^r)(x_0^s-x_0'^s+a\lambda^s)\, b\lambda'^t=\varepsilon_{rst}(x_0^r-x_0'^r)\lambda^s\lambda'^t ab.$)

2. Показать, что расстояние между двумя параллельными прямыми $x^r=x_0^r+\varrho\lambda^r$ и $x^r=x_0'^r+\varrho'\lambda^r$ равно δ, где $\delta^2=(g_{mn}-\lambda_m\lambda_n)(x_0^m-x_0'^m)(x_0^n-x_0'^n)$.

3. Показать, что если прямая задана двумя точками $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$, то ее шесть координат определяются формулами

$$\lambda^r=\frac{x_{(2)}^r-x_{(1)}^r}{d}, \qquad \mu_r=\frac{\varepsilon_{rmn} x_{(2)}^m x_{(1)}^n}{d},$$

где d — расстояние между точками $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$.

4. Показать, что если прямая определена двумя плоскостями $u_r^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$, то ее шесть координат определяются формулами

$$\lambda^r=\frac{\varepsilon^{rmn} u_m^{(1)} u_n^{(2)}}{k}, \qquad \mu_r=-\frac{u_r^{(1)}-u_r^{(2)}}{k},$$

где $k=u^{(1)} u^{(2)} \sin\theta$, причем $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — модули векторов $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, а θ — угол между ними.

(Использовать результаты задач 2 и 3 из § 4.)

5. Показать, что если координаты двух прямых суть λ^r, μ_r и λ'^r, μ_r', то кратчайшее расстояние между прямыми равно

$$\delta=\frac{\lambda^m\mu_m'+\lambda'^m\mu_m}{\sin\theta},$$

где θ — угол между прямыми.

6. Доказать, что условием пересечения двух прямых является $\lambda^m\mu'_m+\lambda'^m\mu_m=0$.

7. Показать, что плоскости

$$\varepsilon_{rmn}\lambda^m x^n=\mu_r, \qquad \mu_r x^r=0$$

проходят через прямую (λ^r, μ_r).

8. Показать, что, изменяя k в формуле

$$u_r=\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_{rst}\mu^s\lambda^t=k\mu_r,$$

мы получим все плоскости, проходящие через прямую (λ^r, μ_r). Показать, что $k=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{\mu^2}$, где α — угол между u_r и μ_r Для $k=0$ мы получаем плоскость, проходящую через прямую и перпендикуляр к OL.

9. Шесть координат прямой можно также рассматривать как *контравариантный вектор* λ^r и отличные от нуля компоненты *антисимметричного тензора второго порядка* $\mu^{rs}=\lambda^r x_0^s-\lambda^s x_0^r$, связанные соотношениями $\lambda_m\lambda^m=1$, $\varepsilon_{rst}\lambda^r\mu^{st}=0$. Показать, что уравнением прямой является

$$x^r=\mu^{sr}\lambda_s+\varrho\lambda^r.$$

10. Используя обозначения упражнения 9, показать, что кратчайшее расстояние между двумя прямыми равно

$$\delta=\frac{\varepsilon_{rst}(\lambda^r\mu'^{st}+\lambda'^r\mu^{st})}{2\sin\theta}.$$

11. Пусть имеются две прямые, проходящие через точку x_0^r,

$$x^r=x_0^r+\varrho\lambda^r, \qquad x^r=x_0^r+\varrho\mu^r.$$

Показать, что уравнения биссектрисы угла между ними будут

$$x^r=x_0^r+t(\lambda^r\pm\mu^r)$$

и что расстояния вдоль этих прямых определяются формулами $2t\cos\frac{\theta}{2}$ и $2t\sin\frac{\theta}{2}$, где θ — угол между λ^r и μ^r.

12. Пусть OA, OB, OC — три направления из начала, заданных единичными векторами λ^r, μ^r и ν^r, а OA', OB' и OC' — биссектрисы углов между этими направлениями. Показать, что плоскости AOA', BOB' и COC' проходят через прямую $x^r=t(\lambda^r+\mu^r+\nu^r)$.

13. Показать, что длина перпендикуляра, опущенного из точки x^r на прямую $x^r=x_0^r+\varrho\lambda^r$, равна δ, где

$$\delta^2=(g_{mn}g_{rs}-g_{mr}g_{ns})(x^m-x_0^m)(x^n-x_0^n)\lambda^r\lambda^s.$$

14. Показать, что уравнение плоскости, проходящей через прямую $x^r=x_0^r+\varrho\lambda^r$ и параллельной прямой $x^r=\varrho\mu^r$, есть $\varepsilon_{rmn}(x^r-x_0^r)\lambda^m\mu^n=0$.

15. Показать, что если две прямые заданы как пересечение двух пар плоскостей $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ и $u_r^{(3)}$, $u_r^{(4)}$, то

$$\delta \operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} & u_1^{(4)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} & u_2^{(4)} \\ u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} & u_3^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} [g_{rs} \varepsilon^{rmn} u_m^{(1)} u_n^{(2)} \varepsilon^{spq} u_p^{(3)} u_q^{(4)}]^{-1},$$

где δ — кратчайшее расстояние, а θ — угол между прямыми.

(Использовать упражнения 4 и 5.)

16. Доказать, что условие компланарности двух прямых из упражнения 15 есть

$$\begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} & u_1^{(4)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} & u_2^{(4)} \\ u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} & u_3^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

17. Показать, что точки

$$\frac{x_1^r + kx_2^r}{1+k}, \qquad \frac{x_1^r + k'x_2^r}{1+k'}$$

образуют на прямой, соединяющей точки x_1^r и x_2^r, пары точек, находящиеся в гомографическом соответствии, если k и k' связаны соотношением вида

$$akk' + bk + ck' + d = 0 \text{ *)}.$$

---

*) О гомографическом соответствии см., например, Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, М., 1947, стр. 327. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА VI

КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА И КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

§ 1. Уравнение конуса второго порядка

Конус второго порядка есть геометрическое место прямых, проходящих через точку x_0^r, единичные векторы λ^r которых удовлетворяют уравнению

$$a_{mn}\lambda^m\lambda^n = 0, \tag{1}$$

где a_{mn} — составляющие симметричного объекта второго порядка. Точка x_0^r называется *вершиной*, а каждая из прямых — *образующей конуса*.

Если x^r — какая-нибудь точка конуса, то прямая, соединяющая ее с вершиной, есть, очевидно, образующая; но так как уравнение этой прямой есть

$$x^r = x_0^r + \varrho\lambda^r,$$

то мы видим, что x^r удовлетворяет уравнению

$$a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) = 0. \tag{2}$$

Это и есть, следовательно, *уравнение конуса*. Мы видим, как и следовало ожидать, что если некоторая точка удовлетворяет уравнению (2), то каждая точка прямой, соединяющей ее с вершиной, также удовлетворяет (2). Переписав (2) в развернутом виде, мы имеем

$$a_{mn}x^m x^n - 2a_{mn}x^m x_0^n + a_{mn}x_0^m x_0^n = 0. \tag{3}$$

Так как в этой главе мы будем заниматься только конусами, имеющими общую вершину, то можно предположить, что вершина совпадает с началом координат.

В этом случае уравнение (3) принимает более простой вид

$$\boxed{a_{mn}x^m x^n = 0.} \tag{4}$$

Если мы перейдем к новой системе координат $\overline{x}^r$, то уравнение конуса по форме не изменится и будет

$$\overline{a}_{mn}\overline{x}^m\overline{x}^n = 0.$$

Следовательно, должно быть

$$\overline{a}_{mn}\overline{x}^m\overline{x}^n = \lambda a_{mn}x^m x^n,$$

где λ есть некоторый множитель. Мы можем всегда предположить, что объект $\overline{a}_{mn}$ уже умножен на такой коэффициент, что $\lambda = 1$, поэтому $a_{mn}x^m x^n$ есть истинный инвариант, а так как a_{mn} — *симметричный объект, то он является симметричным ковариантным тензором второго порядка, определенным с точностью до возможного множителя* λ. Другими словами, каждый конус второго порядка определяет ковариантный тензор второго порядка.

Упражнения

1. *Показать, что*

$$a_{mn}x^m x^n + 2b_n x^n + c \equiv a_{mn}(x^m + \alpha^{ms}b_s)(x^n + \alpha^{nt}b_t) + \frac{\Delta}{A},$$

где α^{mn} *есть алгебраическое дополнение* a_{mn} *в* $|a_{mn}|$, *разделенное на* $|a_{mn}|$, *и*

$$A = |a_{mn}|, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{mn} & b_m \\ b_n & c \end{vmatrix}.$$

Обозначим через A^{mn} дополнение a_{mn} в A, так что

$$\alpha^{mn} = \frac{A^{mn}}{A}.$$

Мы имеем

$$a_{rm}\alpha^{ms} = \delta^s_r, \quad \Delta = cA - A^{mn}b_m b_n.$$

Следовательно,

$$a_{mn}(x^m + \alpha^{ms}b_s)(x^n + \alpha^{nt}b_t) =$$
$$= a_{mn}x^m x^n + \delta^s_n b_s x^n + \delta^t_m b_t x^m + \delta^s_n \alpha^{nt} b_s b_t =$$
$$= a_{mn}x^m x^n + 2b_m x^m + \alpha^{mn}b_m b_n.$$

Далее,

$$\frac{\Delta}{A}=c-\frac{A^{mn}}{A}b_m b_n=c-\alpha^{mn}b_m b_n,$$

откуда и получаем немедленно желаемый результат. Число Δ обычно называют *дискриминантом* выражения $a_{mn}x^m x^n+2b_m x^m+c$.

2. Доказать, что если $\Delta=0$, то $a_{mn}x^m x^n+2b_m x^m+c=0$ есть уравнение конуса.

3. Показать, что если $\Delta=0$, то координаты вершины конуса равны $-\alpha^{rs}b_s$, а $c=\alpha^{mn}b_m b_n$.

4. Показать, что если положить $F(x)=a_{mn}x^m x^n+2b_m x^m+c$, то уравнение $\frac{\partial F}{\partial x^r}=0$ определяет вершину конуса.

5. Показать, что любая прямая, не проходящая через вершину, пересекает конус в двух и только двух точках.

§ 2. Уравнение конического сечения

Исследуем теперь уравнение, соответствующее (2) в плоскостных переменных. Это будет

$$a^{mn}(u_m-u_m^0)(u_n-u_n^0)=0, \tag{5}$$

где u_r^0 есть заданная плоскость. Мы видим, что a^{mn} есть симметричный *контравариантный* тензор второго порядка, определенный с точностью до несущественного множителя.

Плоскости, координаты которых удовлетворяют (5), образуют семейство плоскостей, удовлетворяющих некоторым геометрическим соотношениям. Пусть u_r будет любая плоскость, удовлетворяющая (5) и отличная от u_r^0. Тогда плоскость

$$\frac{u_r+\lambda u_r^0}{1+\lambda} \tag{6}$$

также удовлетворяет (5), независимо от выбора λ. Каково бы ни было λ, плоскость (6) всегда проходит через линию пересечения плоскостей u_r и u_r^0; иначе говоря, каждая плоскость, проходящая через эту линию пересечения, удовлетворяет (5) (рис. 12). Если мы возьмем семейство плоскостей u_r, удовлетворяющих (5), то их линии пересечения с плоскостью u_r^0 образуют на ней *семейство прямых, которое огибает некоторую кривую, лежащую в плоскости* u_r^0 (рис. 12). Более того, эта кривая обладает тем свойством, что все плоскости, проходящие через любую касательную к ней в плоскости u_r^0, удовлетворяют (5). Следовательно, уравнение (5) выражает условие того, что плоскости u_r касаются некоторой кривой, лежащей в плоскости u_r^0. Можно сказать, что (5) есть *тангенциальное уравнение* кривой или уравнение кривой в *плоскостных переменных*.

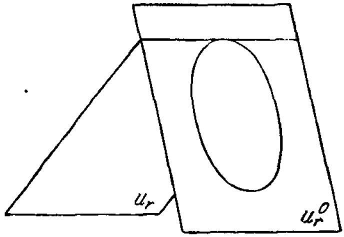

Рис. 12.

Если мы возьмем две плоскости $u_r^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$, линия пересечения которых не лежит в плоскости u_r^0, то $\frac{u_r^{(1)}+ku_r^{(2)}}{1+k}$ есть любая плоскость, проходящая через линию пересечения. Эта плоскость будет касаться кривой, если ее координаты удовлетворяют (5), т. е. если

$$a^{mn}(u_m^{(1)}-u_m^{(0)})(u_n^{(1)}-u_n^0)+2ka^{mn}(u_m^{(1)}-u_m^{(0)})(u_n^{(2)}-u^{(0)})+$$
$$+k^2a^{mn}(u_m^{(2)}-u_m^{(0)})(u_n^{(2)}-u_n^{(0)})=0.$$

Следовательно, через любую прямую в пространстве могут быть проведены две и только две плоскости, так чтобы они касались кривой. Отсюда мы видим, что это — кривая второго класса или *коническое сечение*.

Таким образом (5) есть тангенциальное или плоскостное уравнение конического сечения, лежащего в плоскости u_r^0. Другими словами, любой контравариантный тензор второго порядка определяет коническое сечение. Мы видим, что теоремам, относящимся к конусам с вершиной в данной точке, соответствуют двойственные теоремы, относящиеся к коническим сечениям, лежащим в данной плоскости. В дальнейшем мы будем излагать теорию конических сечений в точечных переменных, оставив читателю доказательство двойственных теорем в плоскостных переменных, так как алгебраические выкладки совершенно одинаковы в обоих случаях.

Рассмотрим уравнение

$$\boxed{a^{mn}u_m u_n=0}\,. \tag{7}$$

Оно определяет коническое сечение в плоскости с координатами (0, 0, 0). Следовательно, (7) есть уравнение *конического сечения в бесконечно удаленной плоскости.* Таким образом, конусам с вершиной в начале координат соответствуют конические сечения, лежащие в бесконечно удаленной плоскости.

Упражнения

1. Показать, что если

$$A = |a^{mn}|, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^{mn} & b^m \\ b^n & c \end{vmatrix},$$

то

$$a^{mn}u_m u_n + 2b^m u_m + c \equiv a^{mn}(u_m + \alpha_{ms}b^s)(u_n + \alpha_{nt}b^t) + \frac{\Delta}{A},$$

где α_{rs} есть дополнение a^{rs} в A, деленной на A.

2. Показать, что если $\Delta = 0$, то

$$a^{mn}u_m u_n + 2b^m u_m + c = 0$$

есть уравнение конического сечения.

3. Показать, что если $\Delta = 0$, то плоскость конического сечения есть $-\alpha_{rs}b^s$ и $c = \alpha_{mn}b^m b^n$.

4. Показать, что если мы введем обозначение

$$\Phi(u) = a^{mn}u_m u_n + 2b^m u_m + c,$$

то уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial u^r} = 0$ определяют плоскость конического сечения.

§ 3. Плоскость, касательная к конусу

Пусть x_0^r будет точка на конусе

$$a_{mn}x^m x^n = 0, \tag{8}$$

и пусть x^r — любая другая точка. Тогда $\frac{x_0^r + kx^r}{1+k}$ есть любая точка, лежащая на прямой, соединяющей эти точки; она будет лежать на конусе, если

$$2ka_{mn}x^m x_0^n + k^2 a_{mn}x^m x^n = 0. \tag{9}$$

Это — квадратное уравнение относительно k, корни которого определяют точки пересечения конуса с прямой, соединяющей x_0^r и x^r. Один из корней, как и следовало ожидать, есть нуль, так как x_0^r лежит на конусе. Прямая, соединяющая точки x_0^r, x^r, будет касаться конуса, если и второй корень равен нулю, т. е. если

$$\boxed{a_{mn}x^m x_0^n = 0.} \tag{10}$$

Это — уравнение плоскости, обладающей тем свойством, что каждая прямая, лежащая в ней и проходящая через точку x_0^r, касается конуса. Следовательно, это — уравнение *плоскости, касательной к конусу в точке* x_0^r. Заметим, что плоскость, касающаяся конуса в точке x_0^r, содержит все точки его образующей

$$x^r = \theta x_0^r.$$

Более того, касательные плоскости в любой точке образующей совпадают, или, другими словами, плоскость (10) *имеет линию касания* с конусом; этой линией является его образующая.

Мы можем использовать полученный результат, чтобы найти в плоскостных координатах уравнение той кривой, которая образуется пересечением конуса с бесконечно удаленной плоскостью. Если x_0^r есть точка на конусе, то (10) есть уравнение плоскости, касательной к нему в этой точке, а

$$a_{mn}x^m x_0^n = 1 \tag{11}$$

есть уравнение параллельной плоскости. Линия пересечения касательной и бесконечно удаленной плоскостей есть касательная к коническому сечению; поэтому плоскость (11), которая имеет ту же самую линию пересечения с бесконечно удаленной плоскостью, также касается сечения. Если положить $a_{rm}x_0^m = u_r$, то координаты плоскости (11) будут u_r. Решая последние уравнения относительно x_0^r, мы получим

$$x_0^r = \alpha^{rs} u_s,$$

где α^{rs} есть дополнение a_{mn} в $|a_{mn}|$, деленное на $|a_{mn}|$. Но x_0^r есть любая точка на конусе, и поэтому она удовлетворяет уравнению

$$a_{mn}x_0^m x_0^n = 0.$$

Отсюда можно вывести, что

$$\alpha^{mn}u_m u_n = 0.$$

Это, как известно, есть тангенциальное уравнение некоторого конического сечения в бесконечно удаленной плоскости; с другой стороны, это должно быть сечением конуса (8) бесконечно удаленной плоскостью, так как каждая плоскость, касательная к конусу, касается и этого сечения.

Упражнения

1. Доказать, что шесть координат любой образующей конуса могут быть заданы так: $\mu_r = 0$, λ^r, причем $a_{mn}\lambda^m\lambda^n = 0$.

2. Доказать, что если провести из точки x_0^r плоскости, касающиеся конуса, то плоскость, содержащая линии касания, имеет уравнение

$$a_{mn}x^m x_0^n = 0.$$

3. Показать, что точка касания плоскости u_r^0 с коническим сечением $\alpha^{mn}u_m u_n = 0$ определяется уравнением

$$\alpha^{rs}u_r u_s^0 = 0.$$

Показать, что образующей конуса, заданной в точечных координатах, согласно принципу двойственности соответствует касательная к коническому сечению.

4. Вывести из примера 3, что конус, образованный прямыми, соединяющими начало координат с точками конического сечения $\alpha^{mn}u_m u_n = 0$, в точечных переменных имеет уравнение $a_{mn}x^m x^n = 0$, где a_{mn} есть алгебраическое дополнение α^{mn} в $|\alpha^{mn}|$, деленное на $|\alpha^{mn}|$.

5. Сформулировать и доказать двойственную теорему к упражнению 2.

§ 4. Полюсы и полярные плоскости относительно конуса

Пусть P и Q будут любые две точки с координатами $x_{(1)}^r$ и $x_{(2)}^r$. Тогда точка $\dfrac{x_{(1)}^r + kx_{(2)}^r}{1+k}$, которая делит PQ в отношении k, лежит на конусе, если

$$a_{mn}x_{(1)}^m x_{(1)}^n + 2ka_{mn}x_{(1)}^m x_{(2)}^n + k^2 a_{mn}x_{(2)}^m x_{(2)}^n = 0. \tag{12}$$

Значения k, удовлетворяющие этому уравнению, определяют отношения, в которых точки пересечения прямой PQ с конусом делят отрезок PQ.

Если отношение гармоническое*), то корни равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому

$$a_{mn}x_{(1)}^m x_{(2)}^n = 0,$$

---

*) О гармоническом разделении см. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, М., 1947, стр. 336. (*Прим. ред.*)

и мы видим, что $x^r_{(2)}$ лежит в плоскости:

$$\boxed{a_{mn}x^m x^n_{(1)}=0.} \tag{13}$$

Эта плоскость, следовательно, есть геометрическое место точек, гармонически сопряженных с точкой P; мы назовем ее *полярной плоскостью точки P относительно конуса.* Если точки P и Q таковы, что полярная плоскость одной точки проходит через другую, то говорят, что точки *сопряжены относительно конуса.* Условие этого есть

$$a_{mn}x^m_{(1)}x^n_{(2)}=0. \tag{14}$$

Заметим, что полярные плоскости всех точек, лежащих на прямой, проходящей через начало, совпадают; мы назовем эту плоскость *сопряженной с данной прямой.* Если P и Q — сопряженные точки относительно конуса, то все точки на прямой OP сопряжены с каждой точкой на прямой OQ. Две такие прямые называются *сопряженными диаметрами.* Условие того, что два направления $\lambda^r_{(1)}$ и $\lambda^r_{(2)}$ принадлежат сопряженным диаметрам, есть

$$a_{mn}\lambda^m_{(1)}\lambda^n_{(2)}=0.$$

Упражнения

1. Найти условие равенства корней уравнения (12) и показать, что уравнение пары плоскостей, касательных к конусу и проведенных из точки $x^r_{(1)}$, есть

$$(a_{mn}x^m x^n_{(1)})^2=(a_{mn}x^m_{(1)}x^n_{(1)})\,(a_{rs}x^r x^s).$$

2. Найти геометрическое место таких точек Q, что $(PRQS)$ есть заданное двойное отношение, равное λ, причем P — фиксированная точка x^r_0, а R и S — точки пересечения прямой PQ с конусом.

(Отношение корней уравнения (12) равно λ.)

3. Показать, что уравнение полюса плоскости u^0_r относительно конического сечения $a^{mn}u_m u_n=0$ есть $a^{rs}u_r u^0_s=0$.

4. Показать, что полюсы всех параллельных плоскостей относительно конического сечения $a^{mn}u_m u_n=0$ совпадают. Показать, что если p и q — две сопряженные плоскости относительно конического сечения, то каждая плоскость, параллельная p, сопряжена с каждой плоскостью, параллельной q.

§ 5. Каноническое уравнение конуса

Пусть P — любая точка, не лежащая на конусе $a_{mn}x^m x^n = 0$. Если координаты точки P обозначить через x_1^r, то ее полярная плоскость будет

$$a_{mn}x^m x_1^n = 0$$

и точка P не лежит на этой плоскости, так как $a_{mn}x_1^m x_1^n \neq 0$. Следовательно, если мы возьмем любые две точки x_2^r и x_3^r, лежащие на полярной плоскости, но не лежащие на одной прямой с началом O, то точки x_1^r, x_2^r, x_3^r не лежат на одной прямой и могут быть взяты в качестве базисных точек новой координатной системы. Но

$$a_{mn}x_1^m x_2^n = a_{mn}x_1^m x_3^n = 0,$$

причем эти уравнения инвариантны. Следовательно, если выполнить преобразование к новым осям и обозначить новые координаты штрихами, мы получим

$$x_1'^r = \delta_1^r, \quad x_2'^r = \delta_2^r, \quad x_3'^r = \delta_3^r$$

и

$$a'_{12} = a'_{13} = 0.$$

Уравнение конуса примет вид

$$a'_{11}(x'^1)^2 + a'_{22}(x'^2)^2 + 2a'_{23}x'^2x'^3 + a'_{33}(x'^3)^2 = 0. \qquad (15)$$

Ели $a'_{22} = a'_{23} = a'_{33} = 0$, то уравнение конуса сводится к $a'_{11}(x'^1)^2 = 0$, определяющему две совпавшие плоскости $x'^1 = 0$, и на этом исследование заканчивается.

Если эти условия не удовлетворяются, то в сечении конуса плоскостью $x'^1 = 0$ получаются линии

$$a'_{22}(x'^2)^2 + 2a'_{23}x'^2x'^3 + a'_{33}(x'^3)^2 = 0. \qquad (16)$$

В этой плоскости мы можем, очевидно, выбрать точку Q, не лежащую на этих линиях, затем взять точку R на плоскости, сопряженную Q относительно (16). Три точки P, Q, R не лежат в одной плоскости и могут быть взяты в качестве базисных точек некоторой новой системы координат $\bar{x}^r$. Тогда в новой системе мы будем иметь

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{23} = \bar{a}_{31} = 0,$$

и уравнение конуса примет вид

$$\boxed{\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2=0,} \tag{17}$$

где коэффициенты могут быть равны нулю. Эта форма уравнения конуса называется *канонической*. Число координатных систем, в которых уравнение конуса имеет вид (17), бесконечно, так как x_1^r и x_2^r — произвольные точки. Отметим, что в качестве базисных мы можем взять любые точки на прямых OP, OQ, OR; при этом уравнение конуса остается каноническим. В частности, мы можем выбрать базисные точки так, что отличные от нуля коэффициенты (17) будут равны плюс или минус единице. Таким образом, уравнение конуса может быть записано в особой канонической форме:

$$\varepsilon_1(\bar{x}^1)^2+\varepsilon_2(\bar{x}^2)^2+\varepsilon_3(\bar{x}^3)^2=0, \tag{18}$$

где ε_1 — или 0, или ± 1 и имеет тот же самый знак, что и $\bar{a}_{11}$. Если первоначальная форма $a_{mn}x^m x^n$ — положительно определенная, то она должна остаться такой же и после преобразования к виду (18), т. е. все коэффициенты должны быть равны плюс единице.

Этот результат показывает, что *можно выбрать бесконечным числом способов такую координатную систему, в которой любой симметричный ковариантный тензор a_{mn} будет иметь $a_{mn}=0$ $(m \neq n)$.*

Упражнения

1. *Показать, что если нам задана положительно определенная квадратичная форма $g_{mn}x^m x^n$, то существует бесконечное число координатных систем, в которых она определяет расстояние от x^r до начала координат.*

Если взять любую координатную систему x^r и положить

$$\varphi=g_{mn}x^m x^n, \tag{α}$$

то, как мы знаем, можно выбрать координатную систему $\bar{x}^r$ так, чтобы было

$$\bar{\varphi}=(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2, \tag{β}$$

так как форма положительно определена. Таким образом, при помощи линейного преобразования переменных, которое мы обозначим через T, можно преобразовать (α) в (β), следовательно, обратное преобразование T^{-1} преобразует (β) в (α). Пусть $\bar{x}^r$ есть любая прямоугольная декартова система координат, и пусть мы сделали преобразование T^{-1} к новым переменным x^r, так что (β) перешло в (α). Но $\bar{\varphi}$ измеряет расстояние от $\bar{x}^r$ до O. Следовательно, в новой координатной системе φ также измеряет расстояние от O до x^r, и мы видим, что число таких систем бесконечно.

2. Показать, что мы можем бесчисленным количеством способов выбрать *декартову* систему координат, в которой уравнение конуса принимало бы канонический вид (17).

3. Показать, что мы можем привести уравнение конуса к форме (17) и в то же время взять любую плоскость, которая не касается конуса, но проходит через начало координат, в качестве координатной плоскости $\bar{x}^3=0$.

4. Показать, что уравнение конического сечения $\alpha^{mn}u_m u_n=0$ может быть преобразовано различными способами к канонической форме

$$\bar{\alpha}^{11}(\bar{u}_1)^2+\bar{\alpha}^{22}(\bar{u}_2)^2+\bar{\alpha}^{33}(\bar{u}_3)^2=0.$$

5. Показать, что уравнение сечения конуса

$$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2=0$$

бесконечно удаленной плоскостью есть

$$\frac{1}{a_{11}}(u_1)^2+\frac{1}{a_{22}}(u_2)^2+\frac{1}{a_{33}}(u_3)^2=0.$$

§ 6. Главные оси конуса

Уравнение плоскости, сопряженной относительно конуса с направлением λ^r, есть

$$a_{mn}x^m\lambda^n=0.$$

Эта плоскость будет перпендикулярна к λ^r при условии, что

$$a_{rm}\lambda^m=\theta\lambda_r=\theta g_{rm}\lambda^m. \tag{19}$$

Уравнение (19) удовлетворяется, если θ есть корень характеристического уравнения

$$\boxed{|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0.} \tag{20}$$

Обратно если найден корень θ этого уравнения, то можно найти направление λ^r, которое будет удовлетворять (19). Такое направление называется *главным направлением* или *главной осью конуса*.

Покажем, что *существуют три главных взаимно ортогональных направления*, и найдем уравнение конуса в том случае, если эти направления приняты за оси координат.

Сначала заметим, что уравнение (20) имеет три корня, и так как $g_{mn}x^m x^n$ положительно определена, то, как мы знаем (стр. 31), эти корни все действительны. Обозначим их $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Два или более из этих корней, конечно, могут быть равными. Корню θ_1 соответствует направление $\lambda^r_{(1)}$, удовлетворяющее (19):

$$a_{rm}\lambda^m_{(1)} = \theta_1 g_{rm}\lambda^m_{(1)}. \tag{21}$$

Выберем прямоугольную координатную систему x'^r так, что $\lambda^r_{(1)}$ есть ось x'^1; в этой системе мы имеем

$$\lambda'^r_{(1)} = \delta^r_1, \quad g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = 1, \quad g'_{12} = g'_{23} = g'_{31} = 0.$$

Из векторного равенства (21) мы получаем, что

$$a'_{r1} = \theta_1 g'_{r1}$$

или

$$a'_{11} = \theta_1, \quad a'_{12} = a'_{13} = 0.$$

Уравнение конуса примет вид

$$\theta_1 (x'^1)^2 + a'_{22}(x'^2)^2 + 2a'_{23}x'^2x'^3 + a'_{33}(x'^3)^2 = 0.$$

Если $a'_{22} = a'_{23} = a'_{33} = 0$, мы на этом и закончим, но если эти соотношения не имеют места, возьмем сечение конуса плоскостью $x'^1 = 0$. Это будет

$$a'_{22}(x'^2)^2 + 2a'_{23}x'^2x'^3 + a'_{33}(x'^3)^2 = 0. \tag{22}$$

Это есть уравнение двух прямых линий, и мы можем взять в качестве координатных осей биссектрисы образованных ими углов; получившаяся координатная система по-прежнему будет прямоугольная декартова. После перехода к этой системе координат, которую обозначим через $\bar{x}^r$, уравнение линии (22) примет вид

$$\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2 + \bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2 = 0.$$

Другими словами, все составляющие тензора $\bar{a}_{mn}$ равны нулю за исключением $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$. Левая часть (20), как известно, есть псевдоскаляр веса 2; следовательно, если он равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой. Таким образом, в системе $\bar{x}^r$ мы имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11}-\theta & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22}-\theta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33}-\theta \end{vmatrix}=0,$$

которое имеет те же корни, что и (20). Но корнями этого уравнения являются $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$, т. е.

$$\bar{a}_{11}=\theta_1, \quad \bar{a}_{22}=\theta_2, \quad \bar{a}_{33}=\theta_3,$$

и уравнение конуса будет

$$\boxed{\theta_1(\bar{x}^1)^2+\theta_2(\bar{x}^2)^2+\theta_3(\bar{x}^3)^2=0,} \tag{23}$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — корни уравнения (20), а координатная система — прямоугольная декартова. Мы видим также, что векторное равенство (19) удовлетворяется в новой системе направлениями координатных осей, которые поэтому являются главными осями конуса. Конечно, может случиться, что некоторые из θ исчезают.

Мы доказали, что *всегда можно выбрать прямоугольную декартову систему так, что любой симметричный ковариантный тензор второго порядка в ней будет обладать тем свойством, что*

$$a_{mn}=0 \quad (m \neq n).$$

Упражнения

1. Доказать, что если $\theta_2=\theta_3$, т. е. два из корней уравнения (20) равны между собой, то каждое направление, перпендикулярное к $\lambda^r_{(1)}$, есть главное направление конуса, который в этом случае называется конусом *вращения*. Направление $\lambda^r_{(1)}$ есть ось вращения.

2. Доказать, что если все три корня уравнения (20) равны между собой, то каждое направление есть главное. В этом случае

конус называется *изотропным*; его уравнение может быть записано в виде $g_{mn}x^m x^n=0$.

3. Сформулировать и доказать теорему, двойственную доказанной в § 6. (Двойственная теорема состоит в том, что уравнение конического сечения $\alpha^{mn}u_m u_n=0$ может быть приведено к канонической форме, причем в качестве системы координат выбирается прямоугольная декартова).

§ 7. Классификация конусов

Мы видели, что уравнение конуса может быть записано в виде

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2=0,$$

причем одновременно в качестве системы координат может быть выбрана прямоугольная декартова. Дадим теперь классификацию конусов. Будем использовать обычные обозначения

$$A=|a_{mn}|,\quad g=|g_{mn}|$$

и обозначим через A^{mn} дополнение a_{mn} в A. Так как A и g — псевдоскаляры веса 2, а A^{mn} — псевдотензор веса 2, то $\frac{A}{g}$ есть истинный скаляр, а $\frac{A^{mn}}{g}$ — истинный тензор. В новой координатной системе $\bar{x}^r$ мы имеем $\bar{g}=1$ и

$$\bar{A}=\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33},\quad \bar{A}^{11}=\bar{a}_{22}\bar{a}_{33},\quad \bar{A}^{23}=0 \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда

$$\frac{A}{g}=\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33},\qquad \frac{g_{mn}A^{mn}}{g}=\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}+\bar{a}_{33}\bar{a}_{11}+\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}.$$

Точно так же $g^{mn}a_{mn}$ есть скаляр, именно

$$g^{mn}a_{mn}=\bar{g}^{mn}\bar{a}_{mn}=\bar{a}_{11}+\bar{a}_{22}+\bar{a}_{33}.$$

Следовательно, $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ являются корнями кубического уравнения

$$\theta^3-\theta^2 g^{mn}a_{mn}+\theta\frac{g_{mn}A^{mn}}{g}-\frac{A}{g}=0 \tag{24}$$

или

$$g\theta^3-\theta^2 G^{mn}a_{mn}+\theta g_{mn}A^{mn}-A=0, \tag{25}$$

где $G^{mn}=gg^{mn}$ есть дополнение g_{mn} в g. Уравнение (25) есть просто развернутая форма характеристического уравнения

$$|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0. \tag{26}$$

Корни этого уравнения равны $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ — результат, который мы получили другим способом в предыдущем параграфе. Рассмотрим три случая.

1. $A \neq 0$, тогда ни один из корней не равен нулю и конус не вырожденный. Если все три корня положительны или отрицательны, то конус мнимый, в других случаях — действительный.

2. $A = 0$, *но его миноры не все равны нулю*. Следовательно, не все составляющие псевдотензора A^{mn} равны нулю; поэтому они не могут быть все нулями и в любой другой системе координат. Так как $A = 0$, то по крайней мере один корень уравнения (25) равен нулю, например $\bar{a}_{33}$. Тогда единственная составляющая $\bar{A}_{mn}$, которая отлична от нуля, есть $\bar{A}^{33} = \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}$. Следовательно, ни $\bar{a}_{11}$, ни $\bar{a}_{22}$ не могут исчезнуть, и в этом случае существует только один нулевой корень. Уравнение конуса примет вид

$$\bar{a}_{11} (\bar{x}^1)^2 + \bar{a}_{22} (\bar{x}^2)^2 = 0.$$

Это — уравнение *двух различных плоскостей*, проходящих через ось $\bar{x}^3$. Плоскости будут мнимые, если $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ имеют одинаковый знак, в противном случае они действительны.

3. *A вместе со всеми своими минорами обращается в нуль.* Тогда $A^{mn} = 0$ и уравнение (25) имеет два нулевых корня, например $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$. Уравнение конуса будет

$$\bar{a}_{33} (\bar{x}^3)^2 = 0.$$

Это уравнение двух *совпавших плоскостей* $\bar{x}^3 = 0$.

Следует заметить, что условия, установленные для каждого случая — *инвариантные*, т. е. если они верны в одной какой-нибудь координатной системе, то они верны и во всех других системах.

Упражнения

Показать, что мы имеем следующую классификацию конических сечений $\alpha^{mn} u_m u_n = 0$:

а) $|\alpha^{mn}| \neq 0$, коническое сечение не вырождено.

б) $|\alpha^{mn}| = 0$, но не все миноры равны нулю, коническое сечение вырождается в две различные бесконечно удаленные точки.

в) $|\alpha^{mn}|$ и все его миноры обращаются в нуль, коническое сечение вырождается в две совпадающие бесконечно удаленные точки.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. Показать, что конус $(a_{mn} - \theta g_{mn}) x^m x^n = 0$ вырождается в две различные или совпадающие плоскости в тех случаях, когда θ есть простой или двойной корень уравнения

$$|a_{mn} - \theta g_{mn}| = 0.$$

2. Показать, что если уравнение $a_{mn}x^m x^n=0$ представляет конус вращения, то мы можем найти такое θ, что

$$A^{rs}-\theta g \varepsilon^{rmn}\varepsilon^{spq}a_{mp}a_{nq}+\theta^2 g g^{rs}=0.$$

[Конус $(a_{mn}-\theta g_{mn})x^m x^n=0$ вырождается в две совпадающие плоскости, когда θ есть двойной корень уравнения $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$ Следовательно, при этом все миноры этого определителя обращаются в нуль.]

3. Показать, что в прямоугольной декартовой системе координат условия предыдущей задачи принимают вид

$$a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}=\theta a_{23} \text{ и т. д.}$$

4. Показать, что если заданная плоскость пересекает конус $a_{mn}x^m x^n=0$ по двум различным образующим, то мы можем выбрать координатную систему, в которой уравнение заданной плоскости будет $\bar{x}^3=0$, а уравнение конуса примет вид

$$\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2+2\bar{a}_{12}\bar{x}^1\bar{x}^2=0.$$

5. Доказать, что угол α между линиями, по которым плоскость $u_r x^r=0$ пересекает конус $a_{mn}x^m x^n=0$, определяется формулой

$$\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{A\{g_{mn}(\alpha^{mn}\alpha^{rs}-\alpha^{mr}\alpha^{ns})u_r u_s\}^2}{4gg^{mn}u_m u_n \alpha^{rs}u_r u_s}.$$

(Вычислить инвариант в специальной координатной системе упражнения 4.)

6. *Изотропный конус.* Конус $g_{mn}x^m x^n=0$ называется изотропным конусом. Показать, что если два направления из начала координат сопряжены относительно изотропного конуса, то они ортогональны, и наоборот.

7. *Бесконечно удаленная окружность.* Коническое сечение $g^{mn}u_m u_n=0$ называется бесконечно удаленной окружностью. Показать, что изотропный конус получается соединением начала координат с точками бесконечно удаленной окружности и что две плоскости ортогональны, если они сопряжены относительно бесконечно удаленной окружности.

8. *Взаимные конусы.* Показать, что прямые, проходящие через начало перпендикулярно к плоскости, касательной к поверхности $a_{mn}x^m x^n=0$, лежат на конусе

$$g_{mr}g_{ns}\alpha^{rs}x^m x^n=0.$$

Показать, что перпендикуляры к касательным плоскостям последнего конуса лежат на первоначальном конусе. Такие два конуса называются взаимными.

9. Показать, что если уравнение поверхности

$$a_{mn}x^m x^n=0$$

преобразовать к каноническому виду в ортогональной декартовой системе координат, то уравнение взаимного конуса будет

$$\frac{(\bar{x}^1)^2}{\bar{a}_{11}}+\frac{(\bar{x}^2)^2}{\bar{a}_{22}}+\frac{(\bar{x}^3)^2}{\bar{a}_{33}}=0.$$

10. Обращение в нуль инварианта $g^{mn}a_{mn}$ означает, что существует бесконечное количество троек взаимно ортогональных образующих поверхности

$$a_{mn}x^m x^n=0.$$

11. Обращение в нуль инварианта $g_{mn}\alpha^{mn}$ означает, что существует бесконечное количество троек взаимно ортогональных касательных плоскостей к поверхности

$$a_{mn}x^m x^n=0.$$

12. Показать, что если $|a_{mn}|=0$, то уравнение $a_{mn}x^m x^n=0$ определяет две плоскости, линия пересечения которых имеет направление λ^r, удовлетворяющее уравнению $a_{rs}\lambda^s=0$.

13. Показать, что уравнение

$$(a_{mn}a_{rs}-a_{mr}a_{ns})\,x_0^r x_0^s x^m x^n=0$$

определяет две плоскости, которые проходят через прямую $x^r=\theta x_0^r$ и общую точку поверхностей $a_{mn}x^m x^n=0$ и $a_{mn}x^m x_0^n=0$. Следовательно, заданное уравнение определяет пару плоскостей, касательных к конусу и проходящих через точку x_0^r.

14. Показать, что если $|a_{mn}|=0$ и $g^{mn}a_{mn}=0$, то плоскости $a_{mn}x^m x^n=0$ ортогональны.

15. Показать, что если касательные плоскости к конусу, проведенные из точки x^r, ортогональны, то точка x^r лежит на *конусе* *), уравнение которого есть

$$(g^{mn}a_{mn})(a_{rs}x^r x^s)-g^{mn}a_{mr}a_{ns}x^r x^s=0.$$

16. *Показать, что если заданы две квадратичные формы, $g_{mn}x^m x^n$ и $a_{mn}x^m x^n$, одна из которых положительно определена, то они могут быть одновременно приведены к виду*

$$(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2,\qquad \bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2.$$

(Мы можем всегда выбрать координатную систему, для которой g_{mn} есть метрический тензор; тогда желаемый результат вытекает из § 6 (стр. 118).)

17. Показать, что если θ_0 есть корень уравнения

$$|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$$

кратности α ($\alpha\leqslant 3$), то все миноры второго порядка имеют θ_0 корнем кратности $\alpha-1$, а все миноры первого порядка (элементы детерминанта) — корнем кратности порядка $\alpha-2$.

---

*) В подлиннике orthoptic cone. (*Прим. ред.*)

(Это — инвариантное свойство, и следовательно, достаточно доказать его в том случае, когда тензоры заданы в своей простейшей форме.)

18. Доказать, что условием соприкосновения плоскости $u_r x^r = 0$ и конуса $a_{mn} x^m x^n = 0$ является

$$a^{mn} u_m u_n = 0.$$

19. Показать, что если уравнение конуса написано в канонической форме, то координатными осями являются взаимно сопряженные диаметры конуса, и наоборот.

20. Условие того, что конус $a_{mn} x^m x^n = 0$ касается координатных плоскостей, есть

$$A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0.$$

21. Показать, что если мы имеем три взаимно ортогональных направления λ_1^r, λ_2^r, λ_3^r, удовлетворяющих соотношению

$$(a_{rs} - \theta g_{rs}) \lambda^s = 0,$$

где a_{rs} есть *любой* тензор второго порядка, а g_{rs} — метрический тензор, то a_{rs} должен быть симметричным. (Это — предложение, обратное теореме § 6 (стр. 118). Она доказывается при помощи выбора заданных ортогональных направлений в качестве координатных осей.)

ГЛАВА VII

СЕМЕЙСТВА КОНУСОВ И КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 1. Уравнение семейства конусов с общей вершиной

Если нам заданы два конуса:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{А}) & a_{mn}x^m x^n = 0, \\ (\text{Б}) & b_{mn}x^m x^n = 0 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

общая вершина которых находится в начале координат, то уравнение любого конуса с той же самой вершиной и проходящего через точки, общие обоим конусам (1), имеет вид

$$\boxed{(a_{mn} - \theta b_{mn})\, x^m x^n = 0.} \tag{2}$$

Следовательно, при переменном 0 мы получаем семейство конусов, которые содержат общие точки первоначальных конусов.

Членами семейства будут не только конусы в собственном смысле, но и пары плоскостей, получающиеся в том случае, когда θ есть корень уравнения

$$\boxed{|\, a_{mn} - \theta b_{mn} \,| = 0.} \tag{3}$$

Это — кубичное уравнение, имеющее три корня, следовательно, в семейство (2) входят три пары плоскостей. Их мы часто будем называть *вырожденными членами семейства* (2).

Если мы перейдем к новой координатной системе, уравнение семейства примет вид

$$(\bar{a}_{mn}-\theta\bar{b}_{mn})\,\bar{x}^m\bar{x}^n=0, \tag{4}$$

причем параметр θ определяет в новых переменных те же самые члены семейства, какие он определял и в старых. Характеристическое уравнение (3) примет вид

$$|\bar{a}_{mn}-\theta\bar{b}_{mn}|=0. \tag{5}$$

Определитель, как известно, есть псевдоскаляр веса 2. Следовательно, если он обращается в нуль при некотором значении θ в какой-то системе координат, он будет нулем при том же значении θ и в любой другой системе координат. Другими словами, корни уравнения (5) совпадают с корнями уравнения (3), т. е. корни уравнения (3) *инварианты.*

Наша цель — исследовать различные относительные положения, которые могут занимать конусы (1), путем рассмотрения различных форм семейства (2).

Упражнения

Показать, что семейству конических сечений $(\alpha^{mn}-\theta\beta^{mn})\times \times u_m u_n=0$ принадлежат вырожденные элементы, соответствующие корням $|\alpha^{mn}-\theta\beta^{mn}|=0$, и что эти вырожденные элементы являются парами бесконечно удаленных точек.

§ 2. Общие полярные направления семейства конусов

Плоскости, сопряженные с направлением λ^r относительно двух конусов (1), соответственно будут

$$a_{mn}x^m\lambda^n=0,$$
$$b_{mn}x^m\lambda^n=0.$$

Эти плоскости будут совпадать при условии, что

$$a_{mn}\lambda^n=\theta b_{mn}\lambda^n. \tag{6}$$

Мы видим, что если это условие удовлетворено, то плоскости, сопряженные с λ^r относительно всех конусов семейства, совпадают. Такое направление мы будем называть *общим полярным направлением семейства.* Если (6) удовлетворяется, то θ должно быть корнем уравнения (3), и обратно, если θ есть корень уравнения (3), мы всегда можем найти соответствующее направление λ^r, удовлетворяющее (6). Следовательно, всегда существует по крайней мере одно общее полярное направление семейства.

Если λ_0^r есть общее полярное направление семейства, нетрудно видеть, что существует такое число θ_0, что

$$(a_{mn} - \theta_0 b_{mn}) \lambda_0^n = 0,$$

т. е. θ_0 есть корень уравнения (3). Следовательно, конус

$$(a_{mn} - \theta_0 b_{mn}) x^m x^n = 0$$

вырождается в пару плоскостей, линия пересечения которых имеет направление λ_0^r. Далее, если λ_0^r есть образующая конуса $b_{mn} x^m x^n = 0$, то

$$a_{mn} \lambda_0^m \lambda_0^n = \theta_0 b_{mn} \lambda_0^m \lambda_0^n = 0.$$

Отсюда следует, что λ_0^r есть образующая каждого из членов семейства. Но плоскость, сопряженная с образующей λ_0^r, есть плоскость, касающаяся конуса вдоль этой образующей.

Таким образом, все конусы семейства имеют общую касательную плоскость, откуда следует, что если общее полярное направление семейства совпадает с образующей одного из невырожденных членов семейства, то все они соприкасаются вдоль этой образующей.

Если существуют *два* независимых общих полярных направления λ_0^r и λ_1^r, то мы имеем

$$a_{mn} \lambda_0^n = \theta_0 b_{mn} \lambda_0^n, \qquad a_{mn} \lambda_1^n = \theta_1 b_{mn} \lambda_1^n.$$

Здесь θ_0 может быть равным или не равным θ_1; мы рассмотрим два случая:

а) $\theta_0 \neq \theta_1$. Тогда

$$a_{mn} \lambda_1^m \lambda_0^n = \theta_0 b_{mn} \lambda_1^m \lambda_0^n = \theta_1 b_{mn} \lambda_1^m \lambda_0^n$$

и, следовательно,

$$a_{mn} \lambda_1^m \lambda_0^n = b_{mn} \lambda_1^m \lambda_0^n = 0.$$

Поэтому направления λ_0^r и λ_1^r сопряжены относительно всех членов семейства.

б) $\theta_0 = \theta_1$. Тогда

$$a_{mn} (\alpha \lambda_0^n + \beta \lambda_1^n) = \theta_0 b_{mn} (\alpha \lambda_0^n + \beta \lambda_1^n)$$

и каждое направление в плоскости, содержащей λ_0^r и λ_1^r, есть общее полярное направление семейства. Выберем в этой плоскости два вектора, сопряженных относительно конуса $b_{mn}x^m x^n = 0$. Тогда эти векторы сопряжены относительно любого члена семейства. *Следовательно, если мы имеем два независимых общих полярных направления семейства, то всегда можно выбрать два таких направления, которые будут сопряжены относительно каждого члена семейства.*

Если мы имеем три некомпланарных общих полярных направления семейства λ_0^r, λ_1^r, λ_2^r, то

$$a_{mn}\lambda_0^n = \theta_0 b_{mn}\lambda_0^n, \quad a_{mn}\lambda_1^n = \theta_1 b_{mn}\lambda_1^n, \quad a_{mn}\lambda_2^n = \theta_2 b_{mn}\lambda_2^n.$$

Возможны следующие случаи:

а) Никакие два из θ_0, θ_1, θ_2 не равны друг другу. Как мы только что имели выше, в п. а), в этом случае направления λ_0^r, λ_1^r, λ_2^r попарно сопряжены относительно каждого члена семейства.

б) Два из θ_0, θ_1, θ_2 равны между собой. Например, пусть $\theta_0 = \theta_1$. Тогда каждое направление в плоскости, содержащей λ_0^r и λ_1^r, есть общее полярное направление семейства, и в этой плоскости можно выбрать два из них так, что они будут также сопряжены относительно каждого члена семейства. Далее, λ_2^r сопряжено с каждым направлением в плоскости, определяемой векторами λ_0^r и λ_1^r.

в) $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2$. В этом случае каждое направление есть общее полярное направление семейства и нам остается только выбрать три направления, которые будут попарно сопряжены относительно конуса $b_{mn}x^m x^n = 0$; тогда они будут также попарно сопряжены относительно каждого члена системы.

Итак, если мы имеем три некомпланарных общих полярных направления семейства, то всегда можно выбрать три таких направления, которые будут попарно сопряжены относительно каждого члена семейства.

Упражнения

1. Показать, что если $b_{mn} = g_{mn}$, то всегда существуют три общих полярных направления семейства, попарно ортогональных друг другу.

2. Показать, что если уравнение (3) имеет два различных корня, то должны существовать два независимых общих полярных направления семейства.

(Если λ_0^r и λ_1^r — два направления, соответствующих неравным корням θ_0, θ_1, то $\lambda_1^r \neq k\lambda_0^r$.)

3. Показать, что если уравнение (3) имеет три различных корня, то должно существовать три некомпланарных полярных направления семейства.

4. Исследовать двойственные теоремы, относящиеся к семейству конических сечений $(\alpha^{mn} - \theta\beta^{mn}) u_m u_n = 0$, показав, что общему полярному направлению семейства конусов здесь соответствует бесконечно удаленная общая полярная прямая семейства кривых, т. е. такая бесконечно удаленная прямая, которая имеет один и тот же полюс относительно всех конических сечений семейства.

§ 3. Каноническая форма уравнения семейства конусов

Исследуем простейшие формы, к которым можно привести уравнение (2) (стр. 126) семейства конусов, и при этом рассмотрим различные относительные положения двух конусов (1).

Назовем конусы

$$a_{mn}x^m x^n = 0, \qquad b_{mn}x^m x^n = 0$$

базисными конусами. Исключив из рассмотрения особый случай, когда все конусы семейства — вырожденные, мы всегда можем выбрать базисные конусы так, чтобы они были невырожденными. Другими словами, мы выберем базисные конусы так, чтобы $|a_{mn}|$ и $|b_{mn}|$ были отличны от нуля.

Рассмотрим различные случаи соответственно числу существующих независимых полярных направлений семейства конусов.

I. *Три независимых (некомпланарных) общих полярных направления семейства*. Как мы видели, эти три направления могут быть выбраны так, чтобы быть взаимно сопряженными относительно обоих базисных конусов и, следовательно, относительно каждого конуса семейства. Возьмем эти направления в качестве новых координатных осей. Так как оси сопряжены относительно обоих конусов, в новой координатной системе мы будем иметь

$$\bar{a}_{23} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{12} = \bar{b}_{23} = \bar{b}_{31} = \bar{b}_{12} = 0$$

и уравнения конусов примут вид

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2=0,$$
$$\bar{b}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{b}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{b}_{33}(\bar{x}^3)^2=0.$$

Определитель $|a_{mn}-\theta b_{mn}|$ будет

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11}-\theta\bar{b}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22}-\theta\bar{b}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=(\bar{a}_{11}-\theta\bar{b}_{11})(\bar{a}_{22}-\theta\bar{b}_{22})(\bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33}).$$

Следовательно, корни характеристического уравнения (3) (стр. 126) будут

$$\frac{\bar{a}_{11}}{\bar{b}_{11}},\qquad \frac{\bar{a}_{22}}{\bar{b}_{22}},\qquad \frac{\bar{a}_{33}}{\bar{b}_{33}}.$$

Обозначив эти корни через θ_1, θ_2 и θ_3 соответственно, мы получим уравнение семейства в виде

$$\boxed{\bar{b}_{11}(\theta_1-\theta)(\bar{x}^1)^2+\bar{b}_{22}(\theta_2-\theta)(\bar{x}^2)^2+\bar{b}_{33}(\theta_3-\theta)(\bar{x}^3)^2=0} \tag{7}$$

и определитель $|a_{mn}-\theta b_{mn}|$ примет вид

$$\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}\bar{b}_{33}\begin{vmatrix} \theta_1-\theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2-\theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3-\theta \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Здесь существуют три подслучая.

А. *Три неравных корня* θ_1, θ_2, θ_2. Базисные конусы пересекаются по *четырем различным образующим*. Вырожденными членами семейства являются три пары плоскостей, соответствующие $\theta=\theta_1$, θ_2, θ_3. Чтобы проиллюстрировать эти случаи, на рис. 13 показано сечение семейства конусов плоскостью, не проходящей через начало O. Общие образующие — OA, OB, OC, OD. Вырожденные члены семейства — пары плоскостей OAB, OCD; OBC, ODA; OBD, OCA и три общих полярных направления семейства — их линии пересечения OP, OQ, OR. Если уравнение одного из членов семейства есть $S=0$ и если $P=0$, $Q=0$ — уравнения какой-либо из вышеуказанных пар плоскостей, то уравнение семейства конусов можно написать в виде $S+\lambda PQ=0$.

Б. *Два равных корня* ($\theta_1=\theta_2\neq\theta_3$). Конусы имеют *соприкосновение вдоль двух* различных образующих, которые получаются как пересечение плоскости $x^3=0$ с с конусами, т. е. вдоль образующих OA и OB (рис. 14).

Вырожденный член семейства — пара совпадающих плоскостей OAB, получающаяся при $\theta=\theta_1=\theta_2$, и пара касательных плоскостей OPA, OPB. Общими полярными направлениями семейства являются OP, OQ, OR, где Q и R — любые две точки, лежащие на AB и сопряженные относительно конусов. Если мы запишем уравнение плоскости OAB в виде $P=0$, уравнение семейства может быть представлено в виде

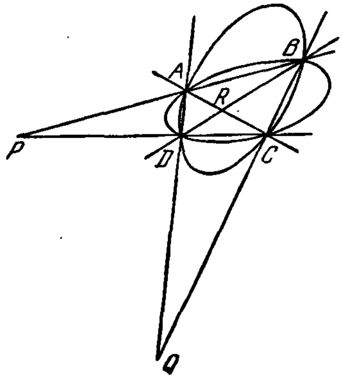

Рис. 13.

$$S+\lambda P^2=0.$$

В. *Три равных корня* ($\theta_1=\theta_2=\theta_3$). В этом случае все конусы семейства совпадают, так как оба базисных конуса совпадают. Уравнение семейства есть просто $S=0$.

II. *Два независимых общих полярных направления.* Пусть эти два направления будут OP и OQ. Каждое из направлений OP и OQ имеет одни и те же полярные плоскости относительно каждого члена семейства конусов, причем они могут быть выбраны так, чтобы быть сопряженными относительно каждого конуса. Полярные плоскости, как OP, так и OQ, должны совпадать с плоскостью OPQ, так как в противном случае две полярные плоскости пересекались бы по направлению OR, которое было бы общим полярным направлением семейства, некомпланарным с OP и OQ. Пусть OP будет то направление, чья полярная плоскость есть OPQ. Следовательно, OP есть образующая каждого члена семейства, а OPQ есть плоскость, касающаяся каждого конуса семейства вдоль OP. Кроме того, полярная плоскость направле-

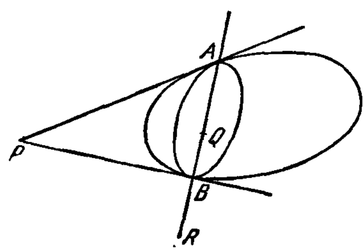

Рис. 14.

ния OQ не может совпадать с OPQ. Пусть она пересекает конус B по OP и OR. Возьмем OP в качестве оси $\bar{x}^1$, OR в качестве оси $\bar{x}^2$ и OQ в качестве оси $\bar{x}^3$. Так как OP есть образующая и OP, OQ сопряжены относительно обоих базисных конусов, то

$$\bar{a}_{11}=\bar{b}_{11}=\bar{a}_{13}=\bar{b}_{13}=0.$$

Далее, поскольку OR есть образующая конуса B, а OQ и OR сопряжены относительно конусов A и B, то

$$\bar{b}_{22}=\bar{b}_{23}=\bar{a}_{23}=0.$$

Следовательно, характеристический определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{a}_{12}-\theta\bar{b}_{12} & 0 \\ \bar{a}_{21}-\theta\bar{b}_{21} & \bar{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33} \end{vmatrix} = \\ = -(\bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33})(\bar{a}_{12}-\theta\bar{b}_{12})^2.$$

Мы видим, что характеристическое уравнение имеет два равных корня. Пусть корни будут θ_1, θ_1, θ_3. Тогда уравнение семейства будет

$$2\bar{b}_{12}(\theta_1-\theta)\bar{x}^1\bar{x}^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{b}_{33}(\theta_3-\theta)(\bar{x}^3)^2=0 \qquad (9)$$

и характеристический определитель может быть записан в виде

$$\bar{b}_{12}^2\bar{b}_{33}\begin{vmatrix} 0 & \theta_1-\theta & 0 \\ \theta_1-\theta & \bar{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3-\theta \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Мы рассмотрим два подслучая.

А) $\theta_1 \neq \theta_3$. Характеристическое уравнение имеет два равных корня. Конусы имеют *соприкосновение* вдоль *одной* образующей OP (рис. 15) и пересекаются вдоль двух других различных образующих OA, OB. Вырожденными членами семейства являются плоскости OPQ и OQA, соответствующие $\theta=\theta_3$, и плоскости OPA, OPB, соответствующие $\theta=\theta_1$. Общими полярными направлениями семейства являются OP и OQ. Если мы запишем уравнение плоскости OPQ в виде $P=0$, а уравнение плоскости OAB в виде $Q=0$, то уравнение семейства конусов может быть написано в виде

$$S+\lambda PQ=0,$$

причем $P=0$ есть плоскость, касательная ко всем конусам семейства.

Б) $\theta_1=\theta_3$; характеристическое уравнение имеет три равных корня. Конусы *соприкасаются* вдоль OP (рис. 16); других общих образующих нет. Единственный вырожденный член семейства есть плоскость OPQ, взятая дважды, которая получается при $\theta=\theta_1$. Полярными направлениями семейства являются OP и OQ, причем Q есть любая точка на линии PQ. Если мы запишем уравнение плоскости OPQ в виде $P=0$, то уравнение семейства конусов будет

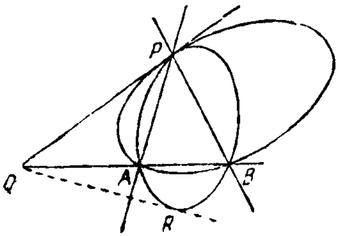

Рис. 15.

$$S+\lambda P^2=0,$$

причем $P=0$ есть плоскость, касательная ко всем конусам.

III. *Одно общее полярное направление семейства*. Пусть OP будет этим направлением. Его полярная плоскость должна проходить через OP, в противном случае она пересекала бы базисные конусы по двум парам различных линий и мы могли бы найти по крайней мере еще одно общее полярное направление семейства. Следовательно, OP есть образующая и ее общая полярная плоскость касается вдоль OP всех конусов; это означает что конусы соприкасаются между собой вдоль OP.

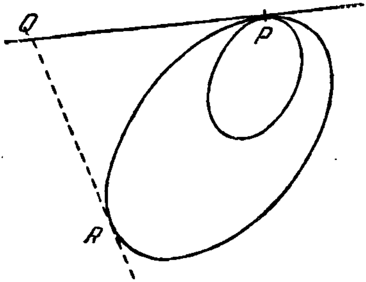

Рис. 16.

Пусть OQ будет любое направление в плоскости, полярной OP, и пусть OR будет линия пересечения плоскости, полярной OQ относительно конуса B, с самим конусом B. Возьмем OP в качестве оси $\bar{x}^1$, OR в качестве оси $\bar{x}^2$ и OQ в качестве оси $\bar{x}^3$. Так как OP есть образующая обоих конусов, а OP и OQ сопряжены относительно обоих конусов, то

$$\bar{a}_{11}=\bar{b}_{11}=\bar{a}_{13}=\bar{b}_{13}=0.$$

Так как OR есть образующая конуса B, а OQ, OR сопряжены относительно конуса B, то

$$\bar{b}_{22}=\bar{b}_{23}=0.$$

Следовательно, характеристический определитель будет

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{a}_{12}-\theta\bar{b}_{12} & 0 \\ \bar{a}_{21}-\theta\bar{b}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ 0 & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33} \end{vmatrix} = -(\bar{a}_{33}-\theta\bar{b}_{33})(\bar{a}_{12}-\theta\bar{b}_{12})^2.$$

Здесь может существовать только один корень характеристического уравнения, так как существует только одно общее полярное направление семейства. Поэтому если обозначить этот корень через θ_1, то мы должны иметь

$$\bar{a}_{12}=\theta_1\bar{b}_{12}, \qquad \bar{a}_{33}=\theta_1\bar{b}_{33}.$$

Следовательно, уравнение семейства конусов будет

$$2\bar{b}_{12}(\theta_1-\theta)\bar{x}^1\bar{x}^2+2\bar{a}_{23}\bar{x}^2\bar{x}^3+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{b}_{33}(\theta_1-\theta)(\bar{x}^3)^2=0$$

и уравнения вырожденного члена семейства получаются при $\theta=\theta_1$

$$\bar{x}^2=0, \qquad 2\bar{a}_{23}\bar{x}^3+\bar{a}_{22}\bar{x}^2=0.$$

Вторая плоскость пересекает конусы по OP и некоторой другой образующей, отличной от OP; таким образом, в этом случае существует другая общая образующая, отличная от OP. Мы можем упростить наши результаты, взяв эту образующую в качестве OR, т. е. оси $\bar{x}^2$; в этом случае

$$\bar{a}_{22}=0.$$

Уравнение семейства конусов поэтому может быть написано в виде

$$\boxed{2\bar{b}_{12}(\theta_1-\theta)\bar{x}^1\bar{x}^2+2\bar{a}_{23}\bar{x}^2\bar{x}^3+\bar{b}_{33}(\theta_1-\theta)(\bar{x}^3)^2=0} \tag{11}$$

и характеристический определитель будет

$$\bar{b}_{33}\bar{b}_{12}^2\begin{vmatrix} 0 & \theta_1-\theta & 0 \\ \theta_1-\theta & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & \bar{a}_{32} & \theta_1-\theta \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Конусы соприкасаются вдоль OP (рис. 17) и существует другая общая образующая OR. Единственный вырожденный член семейства есть пара плоскостей OPQ, OPR, получающаяся при $\theta=\theta_1$. Единственное общее полярное направление семейства есть OP. Если мы напишем уравнение плоскостей OPQ, OPR в виде $P=0$, $Q=0$ соответственно, то уравнение семейства конусов будет

$$S+\lambda PQ=0,$$

где $P=0$ есть плоскость, касательная ко всем конусам семейства, а плоскость $Q=0$ проходит через общую образующую.

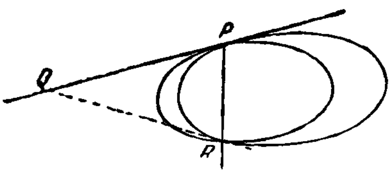

Рис. 17.

Мы исчерпали все возможные типы относительного расположения конусов. Ниже мы займемся соответствующими аналитическими признаками.

Упражнения

1. Показать, что в уравнении (9) $\bar{a}_{22}$ не может обратиться в нуль.

(Обращение его в нуль сделало бы OR общим полярным направлением семейства.)

2. Показать, что в уравнении (11) $\bar{a}_{23}$ не может обратиться в нуль.

3. Доказать следующие двойственные предложения для семейства конических сечений

$$(\alpha^{mn}-\theta\beta^{mn})u_m u_n=0,$$

причем алгебраические выкладки в точности аналогичны выкладкам настоящего параграфа.

I. (А) Все конические сечения касаются четырех различных бесконечно удаленных прямых.

(Б) Конические сечения касаются двух различных бесконечно удаленных прямых в двух данных точках.

(В) Все конические сечения совпадают.

II. (А) Конические сечения касаются некоторой прямой в заданной точке и касаются двух других различных прямых линий.

(Б) Все конические сечения касаются некоторой прямой линии в заданной точке и не имеют других общих касательных.

III. Конические сечения касаются данной прямой в данной точке и имеют еще одну общую касательную. (Канонические формы уравнений в этих случаях совершенно похожи на полученные выше и мы просто интерпретируем прежние результаты при помощи принципа двойственности.)

§ 4. Теория элементарных делителей

Для того чтобы мы могли дать аналитические признаки различных случаев в § 3 (стр. 130), нам необходимо сделать небольшое отступление в область теории элементарных делителей детерминанта *).

Пусть a_{mn} и b_{mn} — два тензора, ковариантных относительно линейных преобразований, и пусть

$$h_{mn} \equiv a_{mn} - \theta b_{mn}. \tag{13}$$

Мы хотим рассмотреть детерминант

$$|h_{mn}| \equiv |a_{mn} - \theta b_{mn}|. \tag{14}$$

Известно, что $|h_{mn}|$ есть псевдоскаляр веса 2 и что его алгебраические дополнения H^{mn} образуют псевдотензор веса 2. Поэтому если преобразовать переменные по закону

$$\bar{x}^r = c^r_s x^s, \quad x^r = \gamma^r_s \bar{x}^s, \quad c = |c^r_s|, \quad \gamma = |\gamma^r_s|,$$

то мы получим следующие формулы:

$$\begin{gathered} |\bar{h}_{mn}| = \gamma^2 |h_{mn}|, \\ \bar{H}^{mn} = \gamma^2 c^m_p c^n_q H^{pq}, \qquad H^{mn} = c^2 \gamma^m_p \gamma^n_q \bar{H}^{pq}, \\ \bar{h}_{mn} = \gamma^p_m \gamma^q_n h_{pq}, \qquad h_{mn} = c^p_m c^q_n \bar{h}_{pq}. \end{gathered} \tag{15}$$

Мы будем предполагать, что $|b_{mn}|$ не равен нулю.

Возьмем *общий наибольший делитель всех* элементов h_{mn} и обозначим его $D_1(\theta)$. Очевидно, что относительно θ он не может иметь степень выше первой. Выберем его так, чтобы коэффициент при θ всегда был единицей. Таким образом, $D_1(\theta)$ всегда будет или 1, или $(\theta - \alpha)$. Подобным же образом возьмем *общий наибольший делитель всех* детерминантов второго порядка, образованных из (14), или, что то же самое, общий наибольший делитель всех алгебраических дополнений H^{mn}. Обозначим его $D_2(\theta)$ и возьмем в качестве коэффициента при высшей

*) В этом параграфе из чисто стилистических соображений мы будем пользоваться термином «детерминант» вместо «определитель». (*Прим. ред.*)

степени θ единицу; таким образом, $D_2(\theta)$ может иметь одну из трех форм: 1, $(\theta-\alpha)$, $(\theta-\alpha)(\theta-\beta)$. Наконец, возьмем сам детерминант, разделим его на $-|b_{mn}|$ и обозначим результат через $D_3(\theta)$, так что $D_3(\theta)$ есть кубический полином относительно θ, у которого коэффициент при θ^3 равен единице.

Из (15) видно, что так как все c_s^r постоянны, то общий наибольший делитель *всех* h_{mn} есть также общий наибольший делитель *всех* $\bar{h}_{mn}$, и наоборот. Следовательно, $D_1(\theta)$ *есть инвариант* относительно линейных преобразований, аналогично этому $D_2(\theta)$ *и* $D_3(\theta)$ *также инварианты*. Далее, детерминант есть линейная функция своих алгебраических дополнений. Следовательно, $D_3(\theta)$ должен содержать $D_2(\theta)$ как множитель; таким же образом $D_2(\theta)$ должен иметь множителем $D_1(\theta)$. Поэтому можно написать

$$E_3(\theta)=\frac{D_3(\theta)}{D_2(\theta)}, \quad E_2(\theta)=\frac{D_2(\theta)}{D_1(\theta)}, \quad E_1(\theta)=\frac{D_1(\theta)}{1}, \tag{16}$$

где E_1, E_2, E_3 — полиномы относительно θ; очевидно, что *все они инвариантны* относительно линейных преобразований. Полиномы E_1, E_2, E_3 часто называют *инвариантными многочленами детерминанта* (14).

Разложим на множители каждый из инвариантных многочленов. Пусть $(\theta-\alpha)$ будет линейным множителем любого из них, и пусть этот множитель повторяется e_1 раз в E_1, e_2 раз в E_2 и e_3 раз в E_3. *Тогда те из выражений*

$$(\theta-\alpha)^{e_1}, \quad (\theta-\alpha)^{e_2}, \quad (\theta-\alpha)^{e_3}, \tag{17}$$

которые не являются просто постоянными, называются элементарными делителями детерминанта (14), *соответствующими линейному множителю* $(\theta-\alpha)$. Отсюда мы видим, что существуют элементарные делители, соответствующие каждому из линейных множителей инвариантных многочленов E_i. Далее, из того, что все E_i инвариантны, мы заключаем, что *элементарные делители тоже инвариантны* и, в частности, числа e_1, e_2, e_3 инвариантны.

Эти числа играют большую роль; мы будем часто выражать тот факт, что (17) являются элементарными делителями, соответствующими линейному множителю $(\theta-\alpha)$, при помощи символа

$$(e_3e_2e_1). \tag{18}$$

Числа, заключенные в круглых скобках, принадлежат какому-либо линейному множителю $\theta-\alpha$; поэтому символ (18) называется *характеристикой множителя* $(\theta-\alpha)$. Кроме того, из (16) мы видим, что

$$D_3(\theta)=E_1(\theta)\,E_2(\theta)\,E_3(\theta). \tag{19}$$

Это показывает, что любой инвариантный многочлен E_i есть также делитель полинома D_3 и, следовательно, есть делитель детерминанта (14). Поэтому, когда мы исследуем (14) относительно элементарных делителей, можно рассматривать только линейные множители детерминанта.

В качестве простого примера рассмотрим детерминант

$$\begin{vmatrix} \theta-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \theta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \theta-\beta \end{vmatrix}=(\theta-\alpha)^2(\theta-\beta).$$

Здесь

$$D_3=(\theta-\alpha)^2(\theta-\beta),\quad D_2=(\theta-\alpha),\quad D_1=1$$

и поэтому

$$E_3=(\theta-\alpha)\,(\theta-\beta),\quad E_2=(\theta-\alpha),\quad E_1=1.$$

Символ, соответствующий множителю $(\theta-\alpha)$, есть (1 1 0); на практике мы отбрасываем нули и читаем этот символ как (11). Символ, соответствующий множителю $(\theta-\beta)$ есть (1 0 0) или, опуская нули, запишем его в виде 1, так как теперь скобок уже не требуется. Полная информация относительно элементарных делителей содержится в характеристике [(11) 1], где индексы внутри круглых скобок относятся только к одному линейному множителю.

Ниже мы увидим, что различные случаи § 3 (стр. 130) можно классифицировать посредством элементарных делителей детерминанта (14).

Упражнения

1. Показать, что D_1^2 есть делитель D_2, а D_1^3 есть делитель D_3, и вывести отсюда, что E_2 содержит E_1 в качестве множителя.

2. Показать, что D_3D_1 содержит D_2^2 в качестве множителя, и вывести отсюда, что E_2 является делителем E_3.

(Если K_{mn} есть дополнение H^{mn} во взаимном определителе, то $K_{mn}=|\,h_{rs}\,|\,h_{mn}$. Но K_{mn} делится на D_2^2 и D_1D_3 есть общий наибольший делитель $|\,h_{rs}\,|\,h_{mn}$, и т. д.)

3. Вывести из примеров 1 и 2, что в (18)

$$e_3\geqslant e_2\geqslant e_1.$$

§ 5. Аналитические признаки

Изучим различные случаи § 3 (стр. 130), рассматривая элементарные делители детерминанта (14) в каждом отдельном случае. Так как элементарные делители инвариантны, достаточно найти их в какой-либо одной системе координат.

I (A). Определитель для этого особого случая в его простейшем виде есть (8) стр. 131, где θ_1, θ_2, θ_3 все различны. Мы имеем

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)(\theta-\theta_3),\quad D_2(\theta)=1,\quad D_1(\theta)=1,$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)(\theta-\theta_3),\quad E_2(\theta)=1,\quad E_1(\theta)=1.$$

Тут существуют три различных корня и характеристика этого случая есть

$$[111]. \tag{20}$$

(Б). Определитель есть (8) (стр. 131), где $\theta_1=\theta_2$. Следовательно,

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^2(\theta-\theta_3),\quad D_2(\theta)=(\theta-\theta_1)\quad D_1(\theta)=1,$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_3),\quad E_2(\theta)=(\theta-\theta_1),\quad E_1(\theta)=1.$$

Здесь существуют два различных корня и характеристика есть

$$[(11)\,1]. \tag{21}$$

(В). Определитель есть (8) (стр. 131), где $\theta_1=\theta_2=\theta_3$. Следовательно,

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^3,\quad D_2(\theta)=(\theta-\theta_1)^2,\quad D_1(\theta)=(\theta-\theta_1),$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1),\quad E_2(\theta)=(\theta-\theta_1),\quad E_1(\theta)=(\theta-\theta_1).$$

Здесь имеется только один корень и характеристика есть

$$[(111)]. \tag{22}$$

II (A). Определитель есть (10) (стр. 133), где $\theta_1 \neq \theta_3$ и $\bar{a}_{22}$ не нуль.

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^2(\theta-\theta_3),\quad D_2(\theta)=1,\quad D_1(\theta)=1,$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^2(\theta-\theta_3),\quad E_2(\theta)=1,\quad E_1(\theta)=1.$$

Число различных корней равно двум, и мы находим, что характеристика есть

$$[21]. \tag{23}$$

(Б). Определитель есть по-прежнему (10) (стр. 133), но теперь $\theta_1=\theta_3$ и поэтому

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^3,\quad D_2(\theta)=(\theta-\theta_1),\quad D_1(\theta)=1,$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^2,\quad E_2(\theta)=(\theta-\theta_1),\quad E_1(\theta)=1.$$

Здесь есть только один корень и мы имеем характеристику

$$[(21)]. \tag{24}$$

III. В этом случае определитель есть (12) (стр. 135), в котором $\bar{a}_{23}$ не нуль. Таким образом,

$$D_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^3, \quad D_2(\theta)=1, \quad D_1(\theta)=1,$$
$$E_3(\theta)=(\theta-\theta_1)^3, \quad E_2(\theta)=1, \quad E_1(\theta)=1.$$

Здесь есть только один корень и характеристика имеет вид

$$[3]. \tag{25}$$

Мы видим, что характеристика в каждом случае различна и, следовательно, может служить признаком того, чтобы отличить один случай от другого. Таким образом, если мы знаем элементарные делители детерминанта

$$|a_{mn}-\theta b_{mn}|, \tag{26}$$

то мы знаем канонический вид, к которому приводятся квадратичные формы

$$a_{mn}x^m x^n, \quad b_{mn}x^m x^n.$$

Это будет тот из упоминавшихся выше частных случаев, который имеет ту же самую характеристику, что и (26).

Точно так же, если две пары квадратичных форм

$$a_{mn}x^m x^n, \quad b_{mn}x^m x^n \text{ и } a'_{mn}x'^m x'^n, \quad b'_{mn}x'^m x'^n$$

имеют *одни и те же элементарные делители*, первая пара может быть переведена во вторую пару линейным преобразованием и наоборот, так как если семейство

$$(a_{mn}-\theta b_{mn})\,x^m x^n$$

может быть приведено к канонической форме преобразованием T, то семейство

$$(a'_{mn}-\theta b'_{mn})\,x'^m x'^n$$

может быть приведено к *той же самой* форме преобразованием T'. Следовательно, обозначая обратные преобразования через T^{-1} и T'^{-1}, мы видим, что преобразование $T\cdot T'^{-1}$ будет переводить первую пару во вторую, а $T'\cdot T^{-1}$ — вторую в первую.

Необходимо отметить, что мы исключили из рассмотрения особый случай, когда обе квадратичные формы вырождены; в этом случае характеристическое уравнение удовлетворяется тождественно при любом θ.

Упражнения

1. *Показать, что коэффициенты кубического полинома* $|a_{mn}-\theta b_{mn}|$ *являются псевдоскалярами веса* 2. Обозначим через A и B определители $|a_{mn}|$ и $|b_{mn}|$ соответственно, через A^{mn} — алгебраическое дополнение a_{mn} в A, а через B^{mn} — алгебраическое дополнение b_{mn} в B. Раскрыв определитель, мы найдем

$$|a_{mn}-\theta b_{mn}|=A-A^{mn}b_{mn}\theta+a_{mn}B^{mn}\theta^2-B\theta^3,$$

A и B — псевдоскаляры веса 2, A^{mn} и B^{mn} — псевдотензоры того же веса. Отсюда высказанная нами теорема следует немедленно. Эти коэффициенты обычно обозначают через Δ, Θ, Θ', Δ'. Так как они инварианты, мы можем ожидать, что обращение их в нуль означает некоторое геометрическое соотношение между конусами семейства. Так, $A=0$ означает, что первый конус вырожденный, а $B=0$ — что второй конус вырожденный. Можно показать, что обращение в нуль двух других коэффициентов также может быть истолковано геометрически.

2. Показать, что если $A^{mn}b_{mn}=0$, то существует бесконечное число троек образующих конуса B, которые попарно сопряжены относительно конуса A. Аналогично для $a_{mn}B^{mn}=0$.

(Привести A к канонической форме и в то же самое время взять две образующие конуса B в качестве координатных осей, потом вычислить инвариант в этой системе.)

3. Показать, что если $A^{mn}b_{mn}=0$, то существует бесконечное число троек касательных плоскостей к конусу A, попарно сопряженных относительно конуса B. Аналогично для

$$a_{mn}B^{mn}=0.$$

(Выбрать координатную систему так, чтобы уравнение конуса B было приведено к канонической форме и две координатные плоскости касались конуса A, затем вычислить инвариант в этой системе.)

4. Пусть даны два конических сечения $\alpha^{mn}u_mu_n=0$ и $\beta^{mn}u_mu_n=0$; исследовать элементарные делители детерминанта $|\alpha^{mn}-\theta\beta^{mn}|$ в каждом случае задачи 3 (стр. 136) и таким образом дать соответствующие аналитические признаки.

5. Показать, что коэффициенты кубического полинома $|\alpha^{mn}-\theta\beta^{mn}|$ являются псевдоскалярами веса -2, и выяснить, что означает геометрически обращение их в нуль.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Доказать, что если корень уравнения $|a_{mn}-\theta b_{mn}|=0$ есть также корень некоторой кратности всех миноров второго порядка, то он должен быть кратным корнем определителя.

2. Показать, что необходимое и достаточное условие того, что конусы A и B имеют соприкосновение по двум образующим, состоит в том, что уравнение (3) должно иметь двойной корень, являющийся также корнем всех его миноров второго порядка.

3. Показать, что конусы A и B имеют соприкосновение вдоль одной образующей, если уравнение (3) (стр. 126) имеет двойной корень, который не является корнем всех его миноров второго порядка.

4. Конусы A и B имеют соприкосновение второго порядка, если уравнение (3) (стр. 126) имеет тройной корень, который не является корнем всех его миноров второго порядка.

5. Доказать, что если B есть изотропный конус, то семейство $(a_{mn}-\theta g_{mn})\, x^m x^n=0$ имеет следующие свойства:

а) Каноническая форма уравнения согласно п. 1 (стр. 130) должна быть (в прямоугольных декартовых координатах)

$$(\theta_1-\theta)(\bar{x}^1)^2+(\theta_2-\theta)(\bar{x}^2)^2+(\theta_3-\theta)(\bar{x}^3)^2=0$$

(Это приведение было уже сделано на стр. 118.)

б) Общие полярные направления семейства совпадают с главными направлениями конуса A.

в) Вырожденными членами семейства являются пары плоскостей, пересечения которых совпадают с главными осями.

г) Конус A есть конус вращения, если он соприкасается с изотропным конусом вдоль двух образующих.

6. Показать, что если мы рассмотрим семейство конических сечений $(\alpha^{mn}-\theta g^{mn})\, u_m u_n=0$, полученное из конических сечений $\alpha^{mn}u_m u_n=0$ и бесконечно удаленной окружности, то оно обладает следующими свойствами:

а) Каноническая форма есть

$$(\theta_1-\theta)(\bar{u}_1)^2+(\theta_2-0)(\bar{u}_2)^2+(\theta_3-\theta)(\bar{u}_3)^2=0.$$

(Это приведение было уже указано в задаче 3 (стр. 121).)

б) Полярные прямые семейства сопряжены относительно бесконечно удаленного круга.

в) Вырожденными членами семейства являются три пары точек, по одной на каждой общей полярной прямой семейства.

7. Софокусные конусы. Рассмотрим конусы, полученные путем соединения точек конических сечений предыдущей задачи прямыми линиями с началом координат. Это — семейство *софокусных* конусов; показать, что оно имеет следующие свойства:

а) Каноническая форма уравнения есть

$$\frac{(\bar{x}^1)^2}{\theta_1-\theta}+\frac{(\bar{x}^2)^2}{\theta_2-\theta}+\frac{(\bar{x}^3)^2}{\theta_3-\theta}=0.$$

б) Все конусы семейства имеют одни и те же главные плоскости, именно, получившиеся путем соединения прямыми точек общей полярной прямой семейства конических сечений с началом координат.

в) Вырожденными членами семейства являются пары прямых, проходящих через начало, по паре в каждой главной плоскости. Они называются *фокальными прямыми семейства.*

8. Показать, что если $A^{mn}b_{mn}=0$, то плоскости $b_{mn}x^m x^n=0$ сопряжены относительно конуса $a_{mn}x^m x^n=0$.

9. Получить из упражнения 8, что условие ортогональности плоскостей $b_{mn}x^m x^n = 0$ есть $g^{mn}b_{mn} = 0$.

10. Какие теоремы двойственны к высказанным в задачах 8 и 9?

11. Показать, что если касательные плоскости, проведенные из точки P к конусу B, сопряжены относительно конуса A, то P лежит на конусе, уравнение которого есть

$$A^{mn}(b_{mn}b_{rs} - b_{mr}b_{ns})\,x^r x^s = 0.$$

Показать также, что уравнение этого конуса может быть записано в эквивалентной форме:

$$\varepsilon_{rmp}\varepsilon_{snq}A^{mn}B^{pq}x^r x^s = 0.$$

12. Найти геометрическое место таких точек P, что касательные плоскости, проведенные из них к конусу B, ортогональны.

(Это — частный случай задачи 11, когда $a_{mn} = g_{mn}$.)

13. Найти геометрическое место таких точек P, что пары касательных плоскостей, проведенные из нее к конусам A и B, образуют гармонический пучок.

(Это — та же проблема, что и в задаче 11.)

14. Показать, что если полярные плоскости точки P относительно конусов A и B ортогональны, то P лежит на конусе

$$g^{mn}a_{mr}b_{ns}x^r x^s = 0.$$

15. Показать, что если полярная плоскость точки P относительно конуса B касается конуса A, то геометрическое место точек P есть конус

$$A^{mn}b_{mr}b_{ns}x^r x^s = 0.$$

ГЛАВА VIII

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Точечное уравнение центральной поверхности второго порядка

Центральная поверхность второго порядка есть поверхность, уравнение которой имеет вид

$$a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) = 1. \tag{1}$$

Точка x_0^r называется *центром поверхности*. Эта точка без потери общности может быть взята в качестве начала координат; в этом случае уравнение поверхности примет вид

$$\boxed{a_{mn}x^m x^n = 1.} \tag{2}$$

Отсюда мы сразу видим, что если объект a_{mn} взят симметричным, что всегда можно сделать, то он является ковариантным тензором второго порядка.

Если x_0^r есть любая точка, через которую проведена прямая в направлении λ^r, то уравнение этой прямой есть

$$x^r = x_0^r + \varrho\lambda^r,$$

где ϱ — расстояние между точками x_0^r и x^r; эта прямая пересекает поверхность второго порядка в точках, определяемых уравнением

$$\varrho^2 a_{mn}\lambda^m\lambda^n + 2\varrho a_{mn}\lambda^m x_0^n + a_{mn}x_0^m x_0^n = 1. \tag{3}$$

Корни этого уравнения определяют расстояния от x_0^r до точек пересечения прямой с поверхностью второго порядка; последнюю мы в дальнейшем будем обозначать для краткости через Q.

Из этого уравнения мы можем сделать следующие выводы:

а) Определяя *полярную плоскость точки* x_0^r *относительно* Q как место всех таких точек x^r, что точки x_0^r, x^r образуют гармонический ряд с точками пересечения, мы найдем, что уравнение полярной плоскости точки x_0^r относительно Q есть

$$\boxed{a_{mn}x^m x_0^n = 1.} \tag{4}$$

б) Если x_0^r лежит на поверхности второго порядка, то полярная плоскость точки x_0^r совпадает с *касательной плоскостью в точке* x_0^r; уравнение касательной плоскости в точке x_0^r есть (4), где точка x_0^r теперь принадлежит поверхности второго порядка.

в) Если x_0^r есть центр поверхности Q, то $x_0^r = 0$ и уравнение (3) примет вид

$$a_{mn}\lambda^m\lambda^n\varrho^2 = 1, \tag{5}$$

откуда следует, что все хорды поверхности Q, проходящие через центр, делятся центром пополам.

г) Прямая, проходящая через x_0^r, касается Q, если

$$(a_{mn}\lambda^m x_0^n)^2 = (a_{mn}\lambda^m\lambda^n)(a_{rs}x_0^r x_0^s - 1).$$

Следовательно, уравнение конуса с вершиной в точке x_0^r, касательного к поверхности Q, есть

$$[a_{mn}(x^m - x_0^m)x_0^n]^2 = a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n)(a_{rs}x_0^r x_0^s - 1),$$

или

$$(a_{mn}x^m x_0^n - 1)^2 = (a_{mn}x^m x^n - 1)(a_{rs}x_0^r x_0^s - 1). \tag{6}$$

Упражнения

1. Расстояние от центра до поверхности второго порядка в направлении λ^r называется *полудиаметром* в этом направлении. Показать, что это расстояние равно

$$\frac{1}{\sqrt{a_{mn}\lambda^m\lambda^n}}.$$

2. Показать, что полудиаметры в направлениях координатных осей равны $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}$ при условии, что система координат декартова.

3. Показать, что если λ^r есть образующая конуса $a_{mn}x^m x^n = 0$, то оба корня уравнения (5) равны бесконечности. Этот конус называется *асимптотическим.*

§ 2. Тангенциальное уравнение поверхности второго порядка

Найдем теперь условие того, что плоскость

$$u_r x^r = 1 \tag{7}$$

касается поверхности второго порядка Q. Если x_0^r есть точка касания, то уравнение касательной плоскости к Q есть

$$a_{mn}x^m x_0^n = 1,$$

и эта плоскость должна совпадать с (7). Следовательно,

$$u_r = a_{rm}x_0^m. \tag{8}$$

Умножая это равенство на A^{rs} (алгебраическое дополнение a_{rs} в A), мы получим

$$A^{rs}u_r = Ax_0^s.$$

Если $A \neq 0$ и если положить $\alpha^{rs} = \frac{A^{rs}}{A}$, мы получим

$$x_0^r = \alpha^{rs}u_s. \tag{9}$$

Но

$$u_r x_0^r = 1;$$

следовательно,

$$\boxed{\alpha^{mn}u_m u_n = 1} \tag{10}$$

есть то условие, которому должна удовлетворять плоскость u_r, если она касается поверхности Q. Поэтому (10) называется *плоскостным, или тангенциальным, уравнением поверхности второго порядка.*

Обратно, покажем, что если плоскость u_r удовлетворяет соотношению (10), то она касается поверхности второго порядка. Пусть u_r^0 будет частное значение, удовлетворяющее (10); рассмотрим точку

$$\alpha^{rs}u_r u_s^0 = 1. \tag{11}$$

Если обозначить эту точку через x_0^r, то

$$x_0^r = \alpha^{rs} u_s^0.$$

Если $|\alpha^{rs}| \neq 0$, то

$$u_r^0 = a_{rs} x_0^s,$$

где a_{rs} есть алгебраическое дополнение α^{rs} в $|\alpha^{rs}|$, деленное на $|\alpha^{rs}|$. Но u_r^0 удовлетворяет (10). Следовательно,

$$a_{rs} x_0^r x_0^s = 1, \tag{12}$$

и плоскость u_r^0 имеет в качестве точечного уравнения

$$a_{rs} x^r x_0^s = 1.$$

Другими словами, плоскость u_r^0 — касательная плоскость к поверхности

$$a_{mn} x^m x^n = 1$$

и *точка касания* есть

$$\boxed{a^{rs} u_r u_s^0 = 1.}$$

Мы рассмотрели случаи, когда $|a_{mn}|$ и $|\alpha^{mn}|$ не нули. Другие случаи мы пока рассматривать не будем.

Упражнения

1. Показать, что полюс плоскости u_r^0 относительно $\alpha^{mn} u_m u_n = 1$ есть $\alpha^{rs} u_r u_s^0 = 1$.

2. Показать, что центр есть полюс бесконечно удаленной поверхности.

3. Показать, что уравнение кривой, по которой плоскость u_r^0 рассекает поверхность второго порядка, есть

$$(\alpha^{mn} u_m u_n^0 - 1)^2 = (\alpha^{mn} u_m u_n - 1)(\alpha^{rs} u_r^0 u_s^0 - 1).$$

§ 3. Каноническая форма уравнения поверхности второго порядка. Главные оси

Мы видели, что квадратичная форма $a_{mn} x^m x^n$ может быть приведена бесконечным числом способов к виду

$$\bar{a}_{11} (\bar{x}^1)^2 + \bar{a}_{22} (\bar{x}^2)^2 + \bar{a}_{33} (\bar{x}^3)^2.$$

В этом случае уравнение поверхности второго порядка примет вид

$$\boxed{\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2=1.} \tag{13}$$

Назовем эту форму уравнения *канонической*. Более того, известно, что мы всегда можем привести уравнение к этой форме и в то же самое время выбрать систему координат так, чтобы она была прямоугольной декартовой. В этом случае координатные оси называются *главными осями*, а координатные плоскости — *главными плоскостями поверхности второго порядка*. Числа

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{11}}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{22}}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{33}}},$$

которые определяют длину полудиаметров в направлении главных осей, называются длинами *главных полуосей*.

Аналогично этому мы видели, что квадратичную форму $a^{mn}u_m u_n$ можно привести к виду

$$\bar{a}^{11}(\bar{u}_1)^2+\bar{a}^{22}(\bar{u}_2)^2+\bar{a}^{33}(\bar{u}_3)^2.$$

Следовательно, плоскостное уравнение поверхности второго порядка может быть бесконечным числом способов приведено к канонической форме

$$\boxed{\bar{a}^{11}(\bar{u}_1)^2+\bar{a}^{22}(\bar{u}_2)^2+\bar{a}^{33}(\bar{u}_3)^2=1.} \tag{14}$$

Более того, мы можем, по крайней мере одним способом, привести уравнение к виду (14) и в то же самое время выбрать систему координат так, чтобы она была декартовой и прямоугольной.

Упражнения

1. Показать, что длины главных полуосей поверхности второго порядка (2) равны $\frac{1}{\sqrt{\theta_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\theta_2}}$, $\frac{1}{\sqrt{\theta_3}}$, где θ_1, θ_2, θ_3 — корни уравнения $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$.

2. Показать, что координаты плоскости, касательной к поверхности второго порядка (13), удовлетворяют уравнению

$$\frac{(\bar{u}_1)^2}{\bar{a}_{11}}+\frac{(\bar{u}_2)^2}{\bar{a}_{22}}+\frac{(\bar{u}_3)^2}{\bar{a}_{33}}=1.$$

3. Показать, что плоскость, координаты которой удовлетворяют (14), касается поверхности второго порядка

$$\frac{(\bar{x}^1)^2}{\bar{a}_{11}}+\frac{(\bar{x}^2)^2}{\bar{a}_{22}}+\frac{(\bar{x}^3)^2}{\bar{a}_{33}}=1.$$

4. Две точки называются *сопряженными* относительно поверхности второго порядка, если одна лежит на полярной плоскости другой. Показать, что условие сопряженности точек x_1^r и x_2^r относительно $a_{mn}x^m x^n=1$ есть $a_{mn}x_1^m x_2^n=1$.

5. Две плоскости называются *сопряженными*, если полюс одной лежит на другой. Показать, что $\overset{1}{u_r}$ и $\overset{2}{u_r}$ сопряжены относительно $\alpha^{mn}u_m u_n=1$, если $\alpha^{mn}\overset{1}{u}_m\overset{2}{u}_n=1$.

§ 4. Классификация центральных поверхностей второго порядка

Взяв главные оси поверхности второго порядка за оси координат и, таким образом, приведя уравнение поверхности к канонической форме, мы можем классифицировать различные возможные типы центральных поверхностей второго порядка. Возьмем определитель 169

$$A\equiv|a_{mn}|. \tag{15}$$

Когда уравнение приведено к канонической форме, мы имеем

$$\bar{A}\equiv\begin{vmatrix}\bar{a}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \bar{a}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{a}_{33}\end{vmatrix}\equiv\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}. \tag{16}$$

Рассмотрим следующие случаи:

I. $A\neq 0$. Отсюда следует, что $\bar{A}$ не нуль, т. е. что ни один из $\bar{a}$ не исчезает. Уравнение поверхности второго порядка будет

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2=1. \tag{17}$$

Существуют четыре подслучая в соответствии со знаками коэффициентов.

а) Если все три коэффициента положительны, поверхность — *эллипсоид*.

б) Если два коэффициента положительны, а один отрицателен, поверхность — *однополостный гиперболоид*.

в) Если один коэффициент положителен, а два отрицательны, поверхность — *двуполостный гиперболоид*.

г) Если все коэффициенты отрицательны, поверхность *мнимая*.

II. $A=0$, но *не все миноры второго порядка нули*. В этом случае $\bar{A}=0$, но не все его миноры второго порядка нули. Тогда только один из коэффициентов может быть нулем, например $\bar{a}_{33}$.

Уравнение поверхности будет

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2=1. \tag{18}$$

Поверхность второго порядка—*цилиндр*, ось которого есть ось $\bar{x}^3$, а поперечное сечение—коническое сечение, представляемое уравнением (18) вместе с $\bar{x}^3=0$.

а) Если $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ оба положительны—цилиндр *эллиптический*.

б) Если один коэффициент положителен и один отрицателен—цилиндр *гиперболический*.

в) Если оба коэффициента отрицательны—цилиндр *мнимый*.

III. $A=0$, $A^{mn}=0$. В этом случае $\bar{A}=0$ и $\bar{A}^{mn}=0$; следовательно, два из коэффициентов равны нулю, например $\bar{a}_{22}$ и $\bar{a}_{33}$. Уравнение поверхности второго порядка принимает вид

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2=1, \tag{19}$$

и поверхность есть *пара параллельных плоскостей*.

а) Если $\bar{a}_{11}$ положительно—плоскости *действительны*.

б) Если $\bar{a}_{11}$ отрицательно—плоскости *мнимы*.

Упражнения

1. *Исследовать, что представляет собой плоскостное уравнение* $\alpha^{11}(u_1)^2+\alpha^{22}(u_2)^2=1$.

Пусть $\overset{0}{u}_r$ есть плоскость, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\alpha^{11}(u_1)^2+\alpha^{22}(u_2)^2=1. \tag{a}$$

Рассмотрим точку

$$\alpha^{11}u_1u_1^0+\alpha^{22}u_2u_2^0=1.$$

Если обозначим ее координаты через x_0^r, то мы имеем

$$x_0^1=\alpha^{11}u_1^0,\quad x_0^2=\alpha^{22}u_2^0,\quad x_0^3=0,$$

или

$$u_1^0=\frac{x_0^1}{\alpha^{11}},\quad u_2^0=\frac{x_0^2}{\alpha^{22}},\quad x_0^3=0;$$

но u_1^0 и u_2^0 удовлетворяют (α) и, следовательно мы имеем

$$\frac{(x_0^1)^2}{\alpha^{11}}+\frac{(x_0^2)^2}{\alpha^{22}}=1,\qquad x_0^3=0.$$

Таким образом, точка x_0^r лежит на *коническом сечении*

$$\frac{(x^1)^2}{\alpha^{11}}+\frac{(x^2)^2}{\alpha^{22}}=1,\qquad x^3=0.$$

Далее, плоскость $\overset{0}{u}_r$ имеет уравнение $\overset{0}{u}_r x^r=1$ или $\dfrac{x^1x_0^1}{\alpha^{11}}+\dfrac{x^2x_0^2}{\alpha^{22}}+$ $+u_3^0x^3=1$, и мы видим, что эта плоскость при любом u_3^0 касается конического сечения в точке x_0^r. Следовательно, (α) выражает условие того, что плоскость u_r касается конического сечения или, другими словами, (α) *есть плоскостное (тангенциальное) уравнение конического сечения*, которое лежит в плоскости $x^3=0$ и имеет начало координат в качестве центра.

2. Показать, что $\alpha^{11}(u_1)^2=1$ изображает две точки на оси x^1, причем начало координат делит пополам расстояние между ними.

3. Классифицировать различные типы поверхностей, описываемых уравнением $\alpha^{mn}u_m u_n=1$, показав, что имеются следующие частные случаи:

а) $|\alpha^{mn}|\neq 0$; поверхность второго порядка с центром в начале координат.

б) $|\alpha^{mn}|=0$, но не все миноры второго порядка равны нулю; коническое сечение с центром в начале.

в) $|\alpha^{mn}|=0$ и все миноры второго порядка равны нулю; пара точек, каждая из которых есть отражение другой относительно начала.

4. Показать, что если $A=0$, то ось цилиндра $a_{mn}x^m x^n=1$ определится таким вектором λ^r, что $a_{rm}\lambda^m=0$.

5. Показать, что если все миноры второго порядка определителя $|a_{mn}|$ равны нулю, то $a_{mn}x^m x^n$ есть точный квадрат.

§ 5. Софокусные поверхности второго порядка

Пусть

$$\alpha^{mn}u_m u_n=1 \tag{20}$$

есть тангенциальное уравнение центральной поверхности второго порядка. Возьмем бесконечно удаленную окружность

$$g^{mn}u_m u_n=0. \tag{21}$$

Каждая плоскость u_r, которая касается как (20), так и (21), будет также соприкасаться со всеми членами семейства

$$\boxed{(\alpha^{mn}-\theta g^{mn})\,u_m u_n=1,} \tag{22}$$

которое назовем семейством *софокусных поверхностей второго порядка*; очевидно также, что это семейство концентрических поверхностей, у которого начало координат является общим центром.

Семейство имеет четыре вырожденных члена. Один из них — бесконечно удаленная окружность, получающаяся, когда параметр θ равен бесконечности; три других получаются при значениях θ, удовлетворяющих уравнению

$$|\alpha^{mn}-\theta g^{mn}|=0. \tag{23}$$

Эти вырожденные члены семейства, как известно, являются коническими сечениями с центром в начале координат; они называются *фокальными коническими сечениями семейства.*

Найдем каноническую форму уравнения семейства софокусных поверхностей. Мы всегда можем привести две квадратичные формы $\alpha^{mn}u_m u_n$ и $g^{mn}u_m u_n$, из которых вторая — положительно определенная, одновременно к виду

$$\bar{\alpha}^{11}(\bar{u}_1)^2+\bar{\alpha}^{22}(\bar{u}_2)^2+\bar{\alpha}^{33}(\bar{u}_3)^2 \text{ и } (\bar{u}_1)^2+(\bar{u}_2)^2+(\bar{u}_3)^2.$$

Следовательно, уравнение семейства примет вид

$$(\bar{\alpha}^{11}-\theta)(\bar{u}_1)^2+(\bar{\alpha}^{22}-\theta)(\bar{u}_2)^2+(\bar{\alpha}^{33}-\theta)(\bar{u}_3)^2=1.$$

Кроме того, коэффициенты $\bar{\alpha}^{11}$, $\bar{\alpha}^{22}$, $\bar{\alpha}^{33}$ являются корнями уравнения (23); если обозначать эти корни через θ_1, θ_2, θ_3, то уравнение семейства будет

$$(\theta_1-\theta)(\bar{u}_1)^2+(\theta_2-\theta)(\bar{u}_2)^2+(\theta_3-\theta)(\bar{u}_3)^2=1. \tag{24}$$

Далее, так как g^{mn} — метрический тензор, то новая координатная система — прямоугольная декартова. Точечное уравнение, соответствующее (24), есть

$$\frac{(\bar{x}^1)^2}{\theta_1-\theta}+\frac{(\bar{x}^2)^2}{\theta_1-\theta}+\frac{(\bar{x}^3)^2}{\theta_3-\theta}=1, \tag{25}$$

откуда сразу видно, что все члены семейства имеют одни и те же главные оси и плоскости. Фокальные конические сечения получим, положив в (24) $\theta=\theta_1$, θ_2, θ_3. Например, положив $\theta=\theta_3$, мы получим коническое сечение

$$(\theta_1-\theta_3)(\bar{u}_1)^2+(\theta_2-\theta_3)(\bar{u}_2)^2=1,$$

а соответствующие точечные уравнения будут

$$\frac{(\bar{x}^1)^2}{\theta_1-\theta_3}+\frac{(\bar{x}^2)^2}{\theta_2-\theta_3}=1, \quad \bar{x}^3=0.$$

Это коническое сечение, очевидно, лежит в главной плоскости $\overline{x}^3=0$. Аналогично и другие два конических сечения лежат в главных плоскостях. *Таким образом, фокальные конические сечения лежат в главных плоскостях семейства.*

Упражнения

1. Показать, что только один член софокусного семейства может быть построен так, чтобы он коснулся данной плоскости.

2. Показать, что геометрическое место полюса данной плоскости относительно софокусных поверхностей есть прямая.

3. Показать, что плоскости, касательные к двум софокусным поверхностям в любой точке их пересечения, взаимно ортогональны.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Показать, что прямая $x^r=x_0^r+\varrho\lambda^r$ лежит полностью на поверхности второго порядка, если

$$a_{mn}x_0^m x_0^n=1, \quad a_{mn}x_0^m\lambda^n=0, \quad a_{mn}\lambda^m\lambda^n=0.$$

Такая прямая называется *образующей*; мы видим, что образующие поверхностей второго порядка параллельны образующим асимптотического конуса.

2. Два диаметра или прямые, проходящие через центр, называются *сопряженными*, если их направления удовлетворяют соотношению $a_{mn}\lambda_1^m\lambda_2^n=0$. Показать, что геометрическое место всех диаметров, сопряженных с λ^r, есть плоскость $a_{mn}\lambda^m x^n=0$, которая называется *плоскостью, сопряженной с* λ^r.

3. Если оси сопряжены относительно поверхности второго порядка, то $a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$. Следовательно, когда уравнение поверхности приведено к канонической форме, координатные оси сопряжены относительно этой поверхности.

4. Посредством исследования инварианта $g_{mn}a^{mn}$ в декартовых координатах, у которых оси сопряжены относительно поверхности второго порядка, показать, что сумма квадратов трех сопряженных полудиаметров постоянна.

$$\left(\text{Инвариант в этой системе есть } \frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a_{22}}+\frac{1}{a_{33}}\,.\right)$$

5. Посредством исследования инварианта $g\,|\,a^{mn}\,|$ в той же системе координат показать, что тетраэдр, вершина которого расположена в концах трех сопряженных полудиаметров и в начале координат, имеет постоянный объем.

6. Исследовать инвариант $g^{mn}a_{mn}$ в прямоугольных декартовых координатах и вывести, что сумма квадратов обратных полудиаметров, которые взаимно ортогональны, постоянна.

7. Показать, что тангенциальное уравнение единичной сферы $g_{mn}x^m x^n = 1$ есть $g^{mn}u_m u_n = 1$ и что ее сечение бесконечно удаленной плоскостью есть бесконечно удаленная окружность.

8. Показать, что главные оси поверхности второго порядка определяются из системы $a_{rm}\lambda^m = \theta\lambda_r$, где θ есть корень уравнения $|a_{mn} - \theta g_{mn}| = 0$.

(Это — векторное уравнение, и, рассматривая случай, когда координатными осями являются главные оси (стр. 118), мы видим, что ему удовлетворяют только главные направления.)

9. Показать, что направление перпендикуляра к полярной плоскости точки $\underset{0}{x^r}$ относительно поверхности второго порядка определяется вектором $a^r_{.s}\underset{0}{x^s}$.

10. Доказать, что уравнение $a_{mn}x^m x^n = 1$ представляет поверхность вращения, если существует величина θ, которая обращает в нуль все миноры второго порядка определителя $|a_{mn} - \theta g_{mn}|$. В случае декартовой ортогональной системы координат выразить это условие в явном виде.

11. Показать, что если $a_{mn}x^m x^n = 1$ есть уравнение прямого кругового цилиндра, то условие предыдущей задачи удовлетворяется вместе с $A = 0$.

12. Исследовать поверхность

$$(a_{mn}a_{rs} - a_{mr}a_{ns})\lambda^m\lambda^n x^r x^s = a_{mn}\lambda^m\lambda^n,$$

когда система координат выбрана так, что λ^r определяет ось $\overline{x}^3$ и в то же самое время поверхность $a_{mn}x^m x^n = 1$ приведена к канонической форме. Вывести отсюда, что это — уравнение цилиндра, который охватывает поверхность второго порядка и ось которого направлена по λ^r.

13. Чтобы исследовать *сечение центральной поверхности второго порядка плоскостью*, примем, что λ^r есть направление, сопряженное с данной плоскостью, и выберем систему координат так, чтобы ось $\overline{x}^3$ была направлена по λ^r, а уравнение поверхности приводилось к канонической форме. Доказать, что данная плоскость оказывается параллельной $\overline{x}^3 = 0$ и что все параллельные сечения подобны.

14. Показать, что если $\xi_r x^r = 1$ есть плоскость, секущая поверхность второго порядка, то уравнение цилиндра, проведенного через это сечение так, чтобы направление его оси было сопряжено с плоскостью, есть

$$\alpha^{rs}\xi_r\xi_s\{a_{mn}x^m x^n - 1\} = (\xi_r x^r)^2 - 1.$$

15. Показать, что главные полуоси сечения поверхности второго порядка плоскостью $\xi_r x^r = 0$ будут $\frac{1}{\sqrt{\theta_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\theta_2}}$, где θ_1, θ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{mn} - \theta g_{mn} & \xi_m \\ \xi_n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

а главные направления λ^r сечения определяются из уравнений

$$(a_{rm}-\theta g_{rm})\lambda^m = k\xi_r,$$
$$\xi_m\lambda^m = 0.$$

(Это — векторные уравнения. Исследовать их в системе координат, предложенной в задаче 13).

16. *Круговые сечения.* Показать, что если мы выберем θ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$, то сечения поверхности $a_{mn}x^m x^n=1$ плоскостями $(a_{mn}-\theta g_{mn})x^m x^n=0$ будут окружностями, и что эти плоскости попарно пересекаются вдоль главных осей поверхности. (Привести уравнение поверхности к ее канонической форме, чтобы оси координат стали ее главными осями.)

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка есть

$$\boxed{a_{mn}x^m x^n + 2b_m x^m + c = 0,} \tag{1}$$

где a_{mn} — симметричный тензор второго порядка, b_m — вектор, а c — скаляр, причем все коэффициенты постоянны.

Если координаты любой точки P будут x_0^r и мы проведем через P прямую в направлении λ^r, пересекающую поверхность в точках R, S, то длина отрезков PR и PS определяется корнями уравнения

$$\varrho^2 a_{mn}\lambda^m\lambda^n + 2\varrho\,(a_{mn}x_0^m\lambda^n + b_m\lambda^m) + a_{mn}x_0^m x_0^n + 2b_m x_0^m + c = 0. \tag{2}$$

Из этого уравнения мы получаем следующие результаты:

а) Геометрическое место таких точек Q, что $(PRQS)$ образует гармонический ряд, есть плоскость

$$a_{mn}x_0^m(x^n - x_0^n) + b_m(x^m - x_0^m) = -[a_{mn}x_0^m x_0^n + 2b_m x_0^m + c]$$

или

$$\boxed{a_{mn}x^m x_0^n + b_m(x^m + x_0^m) + c = 0.} \tag{3}$$

Это — *полярная плоскость точки P относительно поверхности*. Мы назывем точки P и Q *сопряженными* относительно поверхности, если полярная плоскость одной из них проходит через другую. Мы видим, что условием сопряженности точек x_1^r и x_2^r относительно (1) является равенство

$$a_{mn}x_1^m x_2^n + b_m(x_1^m + x_2^m) + c = 0. \tag{4}$$

б) Если P лежит на поверхности, один корень уравнения (2) есть нуль; второй корень обращается в нуль, если Q (любая точка плоскости PRS) лежит на плоскости

$$a_{mn}x_0^m(x^n - x_0^n) + b_m(x^m - x_0^m) = 0,$$

или, что то же самое, на плоскости

$$a_{mn}x^m x_0^n + b_m(x^m + x_0^m) + c = 0. \tag{5}$$

Следовательно, это *уравнение плоскости, касательной к поверхности* в точке P; оно является также уравнением полярной плоскости точки P.

в) Если точка P не лежит на поверхности, а Q лежит на конусе, касающемся поверхности и имеющем точку P вершиной, то уравнение (2) имеет равные корни. Чтобы корни могли быть равны, Q должна лежать на конусе

$$[a_{mn}x_0^m(x^n - x_0^n) + b_m(x^m - x_0^m)]^2 = \\ = a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n)(a_{mn}x_0^m x_0^n + 2b_m x_0^m + c)$$

или, что то же самое, на конусе

$$[a_{mn}x^m x_0^n + b_m(x^m + x_0^m) + c]^2 = \\ = (a_{mn}x^m x^n + 2b_m x^m + c)(a_{mn}x_0^m x_0^n + 2b_m x_0^m + c). \tag{6}$$

Это, как мы видим, и есть уравнение конуса с вершиной в P, касающегося поверхности.

Упражнения

1. Если через точку P провести прямую параллельно образующей конуса

$$a_{mn}x^m x^n = 0,$$

то она пересечется с (1) в бесконечно удаленной точке.

2. Прямая $x^r = x_0^r + \varrho\lambda^r$ будет полностью лежать на поверхности, если

$$a_{mn}x_0^m x_0^n + 2b_m x_0^m + c = 0, \quad a_{mn}\lambda^m x_0^n + b_m\lambda^m = 0,$$

$$a_{mn}\lambda^m\lambda^n = 0.$$

Эта прямая называется *образующей поверхности второго порядка.*

3. Показать, что середины всех хорд, проходящих в данном направлении λ^r, лежат в плоскости

$$a_{mn}x^m\lambda^n + b_m\lambda^m = 0.$$

4. Показать, что все хорды, которые делятся пополам точкой x_0^r, лежат в плоскости $(a_{mn}x_0^m + b_n)(x^n - x_0^n) = 0$.

§ 2. Центр

Если мы можем выбрать точку P так, что ее координаты x_0^r удовлетворяют уравнению

$$a_{rm}x_0^m + b_r = 0, \tag{7}$$

то из (2) видно, что на каждой прямой, проходящей через эту точку, поверхность отсекает отрезок, который точка P делит пополам. Такую точку P называют *центром поверхности второго порядка.* Следовательно, существование центра зависит от существования решения системы (7).

Это — уравнения трех плоскостей; относительное положение трех плоскостей было рассмотрено выше, на стр. 85. На этом основании мы получаем следующие выводы относительно существования центра поверхности второго порядка (1).

I. $A \equiv |a_{mn}| \neq 0$. В этом случае существует единственная обыкновенная точка пересечения плоскостей и, следовательно, существует *единственный центр.*

II. $A = 0$, *но не все миноры второго порядка A равны нулю.* Тут существуют два подслучая:

а) $b_m A^{mr} \neq 0$, где A^{mn} — алгебраическое дополнение a_{mn} в A. В этом подслучае существует *единственный центр в бесконечно удаленной точке.*

б) $b_m A^{mr} = 0$. В этом подслучае существует *целая прямая, каждая точка которой есть центр,* так называемая *прямая центров.*

III. $A = 0$ и *все миноры второго порядка также нули.* Тут снова существуют два подслучая:

а) $a_{rs} \neq k b_r b_s$. В этом подслучае существует *бесконечно удаленная прямая, каждая точка которой есть центр.*

б) $a_{rs} = k b_r b_s$. В этом подслучае существует *плоскость, каждая точка которой есть центр,* так называемая *плоскость центров.*

Упражнения

1. Показать, что если $A \neq 0$, то единственный центр имеет координаты $x_0^r = -\alpha^{rs}b_s$, где α^{rs} есть алгебраическое дополнение a_{rs} в A, деленное на A.

2. Показать, что

$$A\,(c-\alpha^{mn}b_m b_n)=\begin{vmatrix} a_{mn} & b_m \\ b_n & c \end{vmatrix}=\Delta.$$

3. Показать, что если $A\neq 0$, то уравнение поверхности второго порядка можно написать в виде

$$a_{mn}\,(x^m-x_0^m)\,(x^n-x_0^n)+\frac{\Delta}{A}=0.$$

Это — уравнение центральной поверхности, где x_0^r — координаты центра.

4. Воспользовавшись уравнением из задачи 3, показать, что если $\Delta=0$, то поверхность есть конус с вершиной в точке x_0^r.

§ 3. Приведение уравнения поверхности второго порядка

Мы вернемся к проблеме приведения общего уравнения (1) к различным каноническим формам. Используем обозначение

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{mn} & b_m \\ b_n & c \end{vmatrix}, \tag{8}$$

причем, как и прежде, A будет обозначать $|a_{mn}|$, а A^{mn} — алгебраические дополнения его элементов.

Мы видели, что квадратичная форма $a_{mn}x^m x^n$ может быть приведена к виду $\bar{a}_{11}(\bar{x}^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3)^2$ бесконечным числом способов, причем по крайней мере в одном из них система координат будет декартовой и прямоугольной. Предположим, что это преобразование сделано, и рассмотрим следующие случаи:

I. $A\neq 0$. Тогда коэффициенты $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ не все нули, и уравнение поверхности второго порядка может быть написано в виде

$$\bar{a}_{11}\left(\bar{x}^1+\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}}\right)^2+\bar{a}_{22}\left(\bar{x}^2+\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}\right)^2+\bar{a}_{33}\left(\bar{x}^3+\frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{33}}\right)^2+ +c-\sum\frac{(\bar{b}_1)^2}{\bar{a}_{11}}=0.$$

Далее,

$$\bar{\Delta}=\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}\left(c-\sum\frac{(\bar{b}_1)^2}{\bar{a}_{11}}\right).$$

Следовательно, можно написать уравнение поверхности в виде

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1-\bar{x}_0^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2-\bar{x}_0^2)^2+\bar{a}_{33}(\bar{x}^3-\bar{x}_0^3)^2+\frac{\bar{\Delta}}{\bar{A}}=0. \qquad (9)$$

а) $\Delta\neq 0$. Тогда $\bar{\Delta}\neq 0$ и (9) есть уравнение *центральной поверхности второго порядка*, центр которой имеет координаты $\bar{x}_0^r$.

б) $\Delta=0$. Тогда $\bar{\Delta}=0$ и (9) есть уравнение *действительного конуса*, вершиной которого является точка $\bar{x}_0^r$.

II. $A=0$, но *не все миноры второго порядка равны нулю*. В этом случае один и только один из коэффициентов $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$ и $\bar{a}_{33}$ равен нулю. Пусть, например, $\bar{a}_{33}=0$. Уравнение поверхности примет вид

$$\bar{a}_{11}\left(\bar{x}^1+\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}}\right)^2+\bar{a}_{22}\left(\bar{x}^2+\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}\right)^2+2\bar{b}_3\bar{x}^3+c-\frac{\bar{b}_1^2}{\bar{a}_{11}}-\frac{\bar{b}_2^2}{\bar{a}_{22}}=0.$$

Кроме того,

$$\bar{A}^{11}=\bar{A}^{22}=0, \qquad \bar{A}^{33}=\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}, \qquad \bar{A}^{mn}=0 \qquad (m\neq n).$$

а) $b_m A^{mr}$ *не все равны нулю*. Тогда $\bar{b}_m\bar{A}^{mr}$ также не все равны нулю и, следовательно, $\bar{b}_3\neq 0$. Уравнение поверхности можно написать в виде

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1-\bar{x}_0^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2-\bar{x}_0^2)^2+2\bar{b}_3(\bar{x}^3-\bar{x}_0^3)=0. \qquad (10)$$

Поверхность есть *параболоид*. Далее, если система координат декартова и прямоугольная, точка $\bar{x}_0^r$ называется *вершиной*, а прямая, проходящая через нее параллельно оси $\bar{x}^3$, называется *осью параболоида*. Из предыдущего параграфа мы получаем, что в этом случае единственный центр есть бесконечно удаленная точка.

б) $b_m A^{mr}=0$. Тогда $\bar{b}_m\bar{A}^{mr}=0$ и, следовательно, $\bar{b}_3=0$. Уравнение поверхности примет вид

$$\bar{a}_{11}(\bar{x}^1-\bar{x}_0^1)^2+\bar{a}_{22}(\bar{x}^2-\bar{x}_0^2)^2+c-\frac{\bar{b}_1^2}{\bar{a}_{11}}-\frac{\bar{b}_2^2}{\bar{a}_{22}}=0. \qquad (11)$$

Это — уравнение *цилиндра*, ось которого проходит через точку $(\bar{x}_0^1, \bar{x}_0^2, 0)$ параллельно оси $\bar{x}^3$. Тут существует прямая центров, именно ось цилиндра. Если случится, что

$$c-\frac{\bar{b}_1^2}{\bar{a}_{11}}-\frac{\bar{b}_2^2}{\bar{a}_{22}}=0,$$

то цилиндр вырождается в *две пересекающиеся плоскости*, причем ось цилиндра переходит в линию их пересечения. В этом последнем случае легко проверить, что все миноры второго порядка определителя $\bar{\Delta}$ и, следовательно, определителя Δ равны нулю.

III. $A=0$ *и все миноры второго порядка обращаются в нуль*. В этом случае два из коэффициентов $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ обращаются в нуль, например, пусть $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}=0$. Уравнение поверхности приводится к виду

$$\bar{a}_{33}\left(\bar{x}^3+\frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{33}}\right)^2+2\bar{b}_1\bar{x}^1+2\bar{b}_2\bar{x}^2+c-\frac{\bar{b}_3^2}{\bar{a}_{33}}=0.$$

Наш выбор системы координат налагает ограничение только на плоскость $\bar{x}^3$, и мы можем выбрать оси $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$ в этой плоскости так, чтобы один из коэффициентов $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ стал нулем; пусть, например, $\bar{b}_1=0$.

а) $a_{mn}\neq kb_mb_n$. Тогда $\bar{a}_{mn}\neq k\bar{b}_m\bar{b}_n$, из чего мы заключаем, что $\bar{b}_2\neq 0$. Уравнение поверхности можно тогда написать в виде

$$\bar{a}_{33}(\bar{x}^3-\bar{x}_0^3)^2+2\bar{b}_2(\bar{x}^2-\bar{x}_0^2)=0. \tag{12}$$

Поверхность — *параболический цилиндр*, ось которого параллельна оси $\bar{x}^1$. В этом случае существует бесконечно удаленная прямая центров. Если система координат декартова и прямоугольная, назовем прямую, проходящую через точку $(0,\ \bar{x}_0^2,\ \bar{x}_0^3)$ параллельно оси $\bar{x}^1$, *линией вершин.*

б) $a_{mn}=kb_mb_n$. Теперь мы имеем $\bar{b}_2=0$, и уравнение поверхности будет

$$\bar{a}_{33}(\bar{x}^3-\bar{x}_0^3)^2+\left(c-\frac{\bar{b}_3^2}{\bar{a}_{33}}\right)=0. \tag{13}$$

Поверхность становится *парой параллельных плоскостей.* В этом случае существует плоскость центров. Если окажется, что

$$c-\frac{\bar{b}_3^2}{\bar{a}_{33}}=0,$$

то (13) есть уравнение *двух совпавших плоскостей.*

Это исчерпывает все возможные типы поверхностей второго порядка в точечных координатах.

Упражнения

1. Показать, что поверхности второго порядка могут быть классифицированы следующим образом:

I. $\Delta\neq 0$. а) $A\neq 0$ — центральная поверхность; б) $A=0$, $A^{mn}\neq 0$ — параболоид.

II. $\Delta=0$, но не все миноры третьего порядка равны нулю. а) $A\neq 0$ — действительный конус; б) $A=0$, $A^{mn}\neq 0$ — цилиндр (эллиптический или гиперболический); в) $A=A^{mn}=0$ — параболический цилиндр.

III. $\Delta=0$ и все его миноры третьего порядка обращаются в нуль, но не все миноры второго порядка. а) $A=0$, $A^{mn}\neq 0$ — пара пересекающихся плоскостей; б) $A=A^{mn}=0$ — пара параллельных плоскостей.

IV. $\Delta=0$ и все его миноры второго порядка равны нулю — пара совпавших плоскостей.

2. Классифицировать эти случаи согласно природе центра или центров.

3. Показать, что Δ и его дополнения являются псевдотензорами веса 2.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

1. Показать, что если x_0^r есть точка на общей поверхности второго порядка (1) (стр. 157), то

$$a_{mn}x^m x^n + 2b_m x^m + c = a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \\ + 2[a_{mn}x^m x_0^n + b_m(x^m + x_0^m) + c].$$

Вывести отсюда, что плоскость, касающаяся поверхности в точке x_0^r, и конус $a_{mn}(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) = 0$ пересекают поверхность по одним и тем же двум прямым.

2. Вывести из задачи 1, что плоскость, касательная к поверхности второго порядка, пересекает ее по двум образующим, которые пересекаются в точке касания и параллельны двум образующим конуса $a_{mn}x^m x^n = 0$.

3. Показать, что плоскостные координаты полярной плоскости точки x_0^r относительно поверхности второго порядка равны

$$-\frac{a_{rm}x_0^m + b_r}{c + b_m x_0^m}.$$

4. Линия пересечения полярных плоскостей двух точек x_0^r, x_1^r относительно поверхности второго порядка называется *полярной линией* для прямой, соединяющей эти две точки. Вывести из задачи 3, что шесть координат полярной линии для прямой (λ^r, μ_r) пропорциональны векторам

$$\varepsilon^{rmn}a_{mp}b_n\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^{rmn}\varepsilon^{tpq}a_{mp}a_{nq}\mu_t,$$

$$b_r b_m \lambda^m - \varepsilon^{pmn}\mu_p a_{rm} b_n - c a_{rm}\lambda^m.$$

5. Показать, что нормальный вектор поверхности второго порядка в точке x_0^r, лежащей на ней, пропорционален вектору

$$a^r_{.m}x_0^m + b^r.$$

6. Показать, что уравнение охватывающего цилиндра, ось которого имеет направление λ^r, есть

$$(a_{mn}x^m\lambda^n + b_m\lambda^m)^2 = a_{mn}\lambda^m\lambda^n(a_{mn}x^m x^n + 2b_m x^m + c).$$

7. Показать, что если $a_{mn} = g_{mn}$, то уравнение поверхности всегда может быть приведено к виду (9) (стр. 161). Это — общее уравнение *сферы*.

8. Показать, что геометрическое место середин всех хорд, проведенных в направлении λ^r, есть плоскость, проходящая через центр.

9. Если приведение в § 3 (стр. 160) выполнено в декартовой прямоугольной системе координат, мы для краткости будем говорить, что уравнение поверхности второго порядка приведено к его *основной канонической форме*. Показать, что $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ в основной канонической форме являются корнями уравнения $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$.

10. Если два из коэффициентов $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{33}$ в основной канонической форме равны между собой, мы имеем *поверхность вращения*. Показать, что в этом случае уравнение $|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0$ имеет двукратный корень, который является также корнем всех миноров второго порядка.

11. Показать, что если $\Delta\neq 0$, $A\neq 0$, то длины главных полуосей центральной поверхности второго порядка равны

$$\left|\frac{\Delta}{A\theta_1}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad \left|\frac{\Delta}{A\theta_2}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad \left|\frac{\Delta}{A\theta_3}\right|^{\frac{1}{2}},$$

где θ_1, θ_2, θ_3 — корни уравнения

$$|a_{mn}-\theta g_{mn}|=0.$$

12. Показать, что если поверхность второго порядка — параболоид, то направление λ^r его оси определяется уравнением $a_{rs}\lambda^s=0$; если λ^r есть единичный вектор, то координаты вершины параболоида удовлетворяют уравнениям

$$a_{rs}x^s+b_r=(b_m\lambda^m)\lambda_r, \quad (b_r+b_m\lambda^m\lambda_r)x^r+c=0.$$

(Это — тензорные уравнения, и согласно (10) (стр. 161) они справедливы, когда уравнение поверхности записано в его основной канонической форме.)

13. Показать, что если поверхность второго порядка есть цилиндр или пара пересекающихся плоскостей, то ось определяется пересечением плоскостей

$$a_{rm}x^m+b_r=0,$$

которые в этом случае имеют общую линию пересечения.

14. Показать, что если $ca_{mn}=b_mb_n$, то поверхность второго порядка вырождается в две совпавшие плоскости, уравнение которых есть $b_mx^m+c=0$.

15. Показать, что объекты

$$g^{mn}a_{mn}, \quad \frac{g_{mn}A^{mn}}{g}, \quad \frac{A}{g}, \quad \frac{\Delta}{g}$$

являются истинными скалярами. Вывести отсюда, что если мы переходим от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой, то

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}, \quad A^{11}+A^{22}+A^{33}, \quad A, \quad \Delta$$

остаются неизменными.

16. Условие того, что плоскость $u_r x^r = 1$ касается поверхности второго порядка, есть

$$\begin{vmatrix} a_{mn} & b_m & u_m \\ b_n & c & -1 \\ u_n & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

17. Классифицировать различные типы поверхностей, заключенные в плоскостном уравнении $\alpha^{mn}u_m u_n + 2\beta^m u_m + \gamma = 0$. Показать, что если ввести обозначение

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^{mn} & \beta^m \\ \beta^n & \gamma \end{vmatrix}, \quad A = |\alpha^{mn}|,$$

то возможна следующая классификация:

I. $\Delta \neq 0$. а) $A \neq 0$ — поверхность второго порядка, не проходящая через начало координат; б) $A = 0$, $A^{mn} \neq 0$ — поверхность проходит через начало.

II. $\Delta = 0$, но не все миноры третьего порядка обращаются в нуль. а) $A \neq 0$ — коническое сечение, плоскость которого не проходит через начало координат; б) $A = 0$, $A^{mn} \neq 0$ — коническое сечение в плоскости, проходящей через начало; в) $A = A^{mn} = 0$ — коническое сечение, проходящее через начало.

III. $\Delta = 0$, все миноры третьего порядка обращаются в нуль, но не все миноры второго порядка. а) $A = 0$, $A^{mn} \neq 0$ — пара точек, лежащих на прямой, которая не проходит через начало; б) $A = A^{mn} = 0$ — пара точек на прямой, проходящей через начало.

IV. $A = 0$ вместе со всеми минорами второго порядка — пара совпавших точек.

18. Показать, что $\alpha^{mn}u_m u_n + 2\beta^m u_m = 0$ есть тангенциальное (плоскостное) уравнение параболоида, если $\Delta \neq 0$, и параболы, если $\Delta = 0$.

ГЛАВА X
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Аффинные преобразования

Мы видели, что преобразование вида

$$\boxed{X^r = a^r_{\cdot s} x^s + b^r,} \tag{1}$$

где $a^r_{\cdot s}$ и b^r — константы, можно рассматривать как преобразование системы аффинных координат, т. е. считать, что x^r, X^r являются координатами *одной и той же* точки в *различных* координатных системах. Эти уравнения можно рассматривать и с другой точки зрения, именно как преобразование точки p, координаты которой равны x^r, в другую точку P, координаты которой равны X^r в *той же самой координатной системе*. Такое преобразование называется *аффинным*; мы видим, что оно переводит точки в точки, плоскости в плоскости и прямые линии в прямые линии; бесконечно удаленная плоскость переходит сама в себя. Преобразование (1) часто называется *аффинной деформацией*, особенно в теории упругости*).

Мы рассмотрим это преобразование как выполненное в два приема. Во-первых, возьмем преобразование

$$X_1^r = a^r_{\cdot s} x^s, \tag{2}$$

которое отличается от (1) только отсутствием свободных членов, и, во-вторых, преобразуем X_1^r в X^r:

$$X^r = X_1^r + b^r. \tag{3}$$

---

*) Более подробно о свойствах аффинных преобразований, важных для теории упругости, см. Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Москва, 1962, стр. 95. (*Прим. ред.*)

Вместе эти два преобразования дают преобразование (1), но второе из них, а именно (3), означает, что каждая точка пространства испытывает *одно и то же смещение*, определяемое вектором b^r. Такое преобразование называется *параллельным переносом*. В дальнейшем мы будем пренебрегать параллельными переносами и будем рассматривать только преобразования типа (1), где $b^r=0$. Такие преобразования называются *однородными*.

Так как $a^r_{\cdot s}x^s$ есть контравариантный вектор для произвольного x^r, то $a^r_{\cdot s}$ есть смешанный тензор второго порядка. Очевидно, что каждой точке p при таком преобразовании соответствует единственная точка P. Если определитель

$$|a^r_{\cdot s}|, \tag{4}$$

который является скаляром, не равен нулю, система (1) единственным образом разрешима относительно x^s и, следовательно, преобразование *обратимо*, т. е. каждая точка P получена в результате преобразования единственной точки p.

Заметим, что когда $b^r\equiv 0$, преобразование оставляет начало координат неподвижным.

Упражнения

1. Показать, что если $|a^r_{\cdot s}|\neq 0$, то обратное преобразование будет

$$x^r=\alpha^{\cdot r}_{s}(X^s-b^s),$$

где $\alpha^{\cdot r}_{s}$ есть алгебраическое дополнение $a^s_{\cdot r}$ в $|a^m_{\cdot n}|$, деленное на $|a^m_{\cdot n}|$.

2. Показать, что два последовательных аффинных преобразования эквивалентны одному аффинному преобразованию и что определитель этого последнего равен произведению определителей последовательных преобразований.

3. Показать, что если $|a^r_{\cdot s}|=0$, то преобразование необратимо.

(Мы можем найти такие величины x^r_0, отличные от нуля, что $a^r_{\cdot s}x^s_0=0$. Следовательно, и точка x^r_0, и начало координат преобразуются в одну и ту же точку b^r; это показывает, что соответствие не является взаимно однозначным.)

§ 2. Поверхность второго порядка, связанная с преобразованием

Мы ограничимся только однородным преобразованием

$$\boxed{X^r = a^r_{\cdot s} x^s,} \tag{5}$$

при котором начало координат не изменяется. Предположим, что g_{mn} есть метрический тензор нашей системы координат, т. е. что

$$\delta^2 = g_{mn} (x_1^m - x_2^m)(x_1^n - x_2^n)$$

есть квадрат расстояния между точками x_1^r и x_2^r.

Рассмотрим геометрическое место точек, которые после преобразования лежат на единичной сфере

$$g_{mn} X^m X^n = 1. \tag{6}$$

Первоначальные точки должны удовлетворять уравнению

$$\boxed{g_{mn} a^m_{\cdot r} a^n_{\cdot s} x^r x^s = 1.} \tag{7}$$

Это — уравнение центральной поверхности второго порядка, которую в дальнейшем мы будем называть поверхностью Q. Ее главные оси определяются из системы

$$(g_{mn} a^m_{\cdot r} a^n_{\cdot s} - \theta g_{rs}) \lambda^s = 0, \tag{8}$$

где θ — корни уравнения

$$| g_{mn} a^m_{\cdot r} a^n_{\cdot s} - \theta g_{rs} | = 0. \tag{9}$$

Пусть α_1, α_2, α_3 будут корнями этого уравнения и $\lambda^r_{(1)}$, $\lambda^r_{(2)}$, $\lambda^r_{(3)}$ — соответствующие главные направления. Нам известно из теории поверхностей второго порядка (см. стр. 119), что

$$g_{mn} a^m_{\cdot r} a^n_{\cdot s} \lambda^r_{(i)} \lambda^r_{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \alpha_i, & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{10}$$

Следовательно, мы видим, что векторы

$$a^r_{\cdot s} \lambda^s_{(i)},$$

которые являются преобразованными векторами первоначальной тройки $\lambda^r_{(i)}$, взаимно ортогональны и имеют длину $\sqrt{\alpha_i}$. Обозначим их направления при помощи единичных векторов $\Lambda^r_{(i)}$. Мы видим, что если

$$x^r = \sum_{i=1}^{3} \xi^{(i)}\lambda^r_{(i)}, \tag{11}$$

то

$$X^r = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\alpha_i}\, \xi^{(i)}\Lambda^r_{(i)}. \tag{12}$$

Отнесем точки x^r к направлениям $\lambda^r_{(i)}$, как к осям координат, а точки X^r — к $\Lambda^r_{(i)}$, как к другим осям координат. Тогда связь между координатами соответствующих точек будет

$$X'^1 = \sqrt{\alpha_1}\, x^1, \quad X'^2 = \sqrt{\alpha_2}\, x^2, \quad X'^3 = \sqrt{\alpha_3}\, x^3, \tag{13}$$

где штрихованные буквы относятся к одной системе координат, а нештрихованные — к другой, причем обе системы — прямоугольные декартовы.

Упражнения

1. Показать, что всегда существует ортогональная тройка направлений, которая остается ортогональной после аффинного преобразования.

2. Показать, что если $|a^r_{.s}| \neq 0$, то точки единичной сферы $g_{mn}x^m x^n = 1$ переходят в точки поверхности второго порядка

$$g_{mn}\alpha_r^{.m}\alpha_s^{.n}X^r X^s = 1.$$

Доказать, что $\Lambda^r_{(i)}$ являются главными направлениями этой поверхности, а длины главных полуосей равны $\sqrt{\alpha_i}$.

3. Показать, что длины главных полуосей поверхности Q равны $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha_i}}$.

4. Показать, что $g_{mn}a^m_{.r}\, a^n_{.s}$ и $g_{mn}\alpha_r^{.m}\alpha_s^{.n}$ — симметричные тензоры.

5. Показать, что если Op пересекает поверхность Q в точке q, то длина Op при преобразовании растягивается в отношении $\dfrac{1}{Oq}$.

§ 3. Чистая деформация

Рассмотрим теперь преобразование, при котором ортогональная тройка направлений $\lambda^r_{(i)}$ не только остается ортогональной, но и не меняет направления. В этом частном случае

$$\Lambda^r_{(i)}=\lambda^r_{(i)} \tag{14}$$

и

$$a^r_{.s}\lambda^s_{(i)}=\sqrt{\alpha_i}\,\lambda^r_{(i)} \tag{15}$$

(суммирования по i нет).

Выберем прямоугольную декартову систему координат, оси которой совпадают с $\lambda^r_{(i)}$. В этой координатной системе

$$a^r_{.s}=\sqrt{\alpha_s}\,\delta^r_s \tag{16}$$

(суммирования по s нет).

Следовательно, ковариантный тензор второго порядка $a_{rs}=$ $=g_{rp}a^p_{.s}$ имеет в этой системе следующие составляющие:

$$a_{rs}=\sqrt{\alpha_s}\,g_{rs} \tag{17}$$

(суммирования по s нет). Отсюда видно, что a_{rs} — *симметричный тензор*. Если мы обозначим через Q_1 поверхность второго порядка

$$\boxed{a_{mn}x^m x^n=1,} \tag{18}$$

то из (15) мы увидим, что главные оси поверхностей Q и Q_1 совпадают и что длины полуосей Q_1 будут

$$(\alpha_1)^{-\frac{1}{4}},\quad (\alpha_2)^{-\frac{1}{4}},\quad (\alpha_3)^{-\frac{1}{4}}.$$

Такое преобразование называется *чистой деформацией*, а общие главные оси поверхностей Q и Q_1 называются *осями чистой деформации*.

Если точка p преобразуется в P, то их координаты связаны уравнением (5). Но при чистой деформации вектор $a^r_{.s}x^s$ перпендикулярен к полярной плоскости точки p относительно Q_1. Следовательно, преобразованный вектор OP при чистой деформации направлен вдоль нормали к полярной плоскости точки p относительно поверхности Q_1.

Упражнения

1. Показать, что общее преобразование (5) состоит из чистой деформации и поворота одной системы ортогональных осей относительно другой.

2. Показать, что если существует такая ортогональная система координат, в которой составляющие смешанного тензора $a^r_{.s}$,

для которых $r \neq s$, равны нулю, то ассоциированный тензор a_{rs} — симметричный, и обратно.

3. Показать, что если a_{rs} — симметричный тензор, то преобразование (5) — чистая деформация.

4. Проверить следующее построение преобразований точки P по заданной p. Пусть П — основание перпендикуляра из начала на полярную плоскость точки p относительно Q_1, тогда P есть инверсия П относительно единичной сферы с центром в начале координат.

5. Показать, что для того, чтобы преобразование было однородным расширением от начала координат, необходимо и достаточно выполнение условий $a^r_{\cdot s} = k\delta^r_s$.

§ 4. Конечные перемещения твердого тела

Если преобразование (5) сохраняет расстояние между каждой парой точек, то оно представляет собой перемещение твердого тела. Так как начало координат — фиксированная точка, то расстояние от любой точки до начала при этом преобразовании не изменяется. Таким образом, мы должны иметь

$$g_{mn}X^mX^n = g_{mn}x^mx^n. \tag{19}$$

Далее, если это уравнение верно для каждой первоначальной точки и соответствующей преобразованной, то расстояние между каждой парой точек остается неизменным. Следовательно, уравнение (19), верное для всех значений x^r, дает необходимое и достаточное условие того, что преобразование представляет перемещение твердого тела. Это условие принимает вид

$$\boxed{g_{mn}a^m_{\cdot r}a^n_{\cdot s} = g_{rs}.} \tag{20}$$

То же самое можно усмотреть геометрически из того факта, что поверхность Q должна быть сферой.

Далее,

$$|g_{mn}a^m_{\cdot r}a^n_{\cdot s}| = |g_{mn}a^m_{\cdot r}| \cdot |a^n_{\cdot s}| = |g_{mn}| \cdot |a^r_{\cdot s}|^2.$$

Следовательно, уравнение (20) дает

$$|a^r_{\cdot s}|^2 = 1 \tag{21}$$

и $|a^r_{\cdot s}| = \pm 1$. Если мы предположим, что перемещение твердого тела непрерывно, то (21) выполняется всегда, причем в начальный момент было $a^r_{\cdot s} = \delta^r_s$. Таким образом, в начальный момент $|a^r_{\cdot s}|$ был равен $+1$, а так как он должен быть непрерывным, то и всегда будет

$$|a^r_{\cdot s}| = 1. \tag{22}$$

Теперь потребуем, чтобы некоторые точки при движении твердого тела оставались неподвижными. Координаты таких точек должны удовлетворять уравнению

$$(a^r_{\cdot s} - \delta^r_s)\, x^s = 0. \tag{23}$$

Чтобы это равенство могло быть верно при любых x^r, должно быть

$$|\, a^r_{\cdot s} - \delta^r_s \,| = 0.$$

Но мы имеем

$$g\,|\, a^m_{\cdot n} \,|\,|\, a^r_{\cdot s} - \delta^r_s \,| = |\, g_{mn} a^m_{\cdot r} (a^n_{\cdot s} - \delta^n_s) \,| =$$

$$= |\, g_{rs} - g_{ms} a^m_{\cdot r} \,| = g\,|\, \delta^r_s - a^r_{\cdot s} \,|.$$

Отсюда

$$|\, a^r_{\cdot s} - \delta^r_s \,| = |\, \delta^r_s - a^r_{\cdot s} \,|.$$

Так как это — определитель третьего порядка, то изменение знака всех его элементов изменяет знак определителя. Следовательно,

$$|\, a^r_{\cdot s} - \delta^r_s \,| = 0 \tag{24}$$

и (23) верно по крайней мере для некоторых из ненулевых значений x^r. Но если эти уравнения верны для некоторой заданной точки x^r_0, они также верны для всех точек, лежащих на прямой, соединяющей ее с началом координат. Следовательно, существует прямая, проходящая через начало, точки которой остаются неподвижными. Выберем систему координат $\bar{x}^r$ так, чтобы она была прямоугольной декартовой и чтобы неподвижная прямая была осью $\bar{x}^3$. Тогда (23) примет вид

$$\bar{a}^r_{\cdot 3} = \delta^r_3.$$

Уравнение (20) при $s = 3$ даст

$$\bar{a}^3_{\cdot r} = \delta^3_r.$$

Следовательно, преобразование будет

$$\bar{X}^1 = \bar{a}^1_{\cdot 1}\bar{x}^1 + \bar{a}^1_{\cdot 2}\bar{x}^2, \quad \bar{X}^2 = \bar{a}^2_{\cdot 1}x^1 + \bar{a}^2_{\cdot 2}\bar{x}^2, \quad \bar{X}^3 = \bar{x}^3.$$

Кроме того, оставшиеся уравнения (20) дают

$$(\bar{a}^1_{\cdot 1})^2 + (\bar{a}^2_{\cdot 1})^2 = 1,$$

$$\bar{a}^1_{\cdot 1}\bar{a}^1_{\cdot 2} + \bar{a}^2_{\cdot 1}\bar{a}^2_{\cdot 2} = 0,$$

$$(\bar{a}^1_{\cdot 2})^2 + (\bar{a}^2_{\cdot 2})^2 = 1,$$

и если мы положим $\bar{a}^1_{\cdot 1} = \cos\alpha$, $\bar{a}^2_{\cdot 1} = \sin\alpha$, то при помощи (22) получим.

$$\bar{a}^1_{\cdot 2} = -\sin\alpha, \quad \bar{a}^2_{\cdot 2} = \cos\alpha.$$

Таким образом, преобразование есть

$$\overline{X}^1 = \overline{x}^1 \cos\alpha - \overline{x}^2 \sin\alpha, \quad \overline{X}^2 = \overline{x}^1 \sin\alpha + \overline{x}^2 \cos\alpha, \quad \overline{X}^3 = \overline{x}^3.$$

Это — поворот тела на угол α относительно оси $\overline{x}^3$. Кроме того, скаляр $a^r_{.r}$ равен $(\overline{a}^1_{.1} + \overline{a}^2_{.2} + \overline{a}^3_{.3})$ или

$$a^r_{.r} = 1 + 2\cos\alpha. \tag{25}$$

Таким образом, мы видим, что преобразование (5) (стр. 168), где коэффициенты удовлетворяют соотношению (20), есть поворот на угол α вокруг направления λ^r, где

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{1}{2}(a^r_{.r} - 1),} \tag{26}$$

а λ^r есть решение системы уравнений

$$\boxed{(a^r_{.s} - \delta^r_s)\,\lambda^s = 0.} \tag{27}$$

Эта система не может иметь больше чем одно решение, за исключением случая $\alpha = 0$ или, что то же самое, $a^r_{.s} = \delta^r_s$; но тогда преобразование есть тождественное: $X^r = x^r$.

Упражнения

1. Показать, что при движении твердого тела корни уравнения $|a^r_{.s} - \theta\delta^r_s| = 0$ равны $(1, e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$.

2. Показать, что если поворот на угол α происходит вокруг прямой, проходящей через начало в направлении λ^r, то коэффициенты преобразования будут иметь вид

$$a^r_{.s} = \cos\alpha\,\delta^r_s + (1 - \cos\alpha)\,\lambda^r\lambda_s - \varepsilon^{rmn} g_{ms}\lambda_n \sin\alpha.$$

3. Определив полуоборот как последовательные повороты на два прямых угла, показать, что полуоборот определяется равенствами

$$a^r_{.s} = 2\lambda^r\lambda_s - \delta^r_s.$$

4. Показать, что два последовательных поворота вокруг точки эквивалентны одному повороту.

§ 5. Бесконечно малые деформации

Рассмотрим *малую* однородную деформацию, когда точка X^r находится вблизи первоначальной точки x^r, так что если мы положим

$$a^r_{.s} = \delta^r_s + b^r_{.s}, \tag{28}$$

то значения $b^r_{.s}$ можно считать бесконечно малыми первого порядка. В дальнейшем мы будем пренебрегать всеми величинами второго или высшего порядка малости. Полагая $b_{rs}=g_{rp}b^p_{.s}$, введем обозначения

$$\varepsilon_{rs}=\frac{1}{2}(b_{rs}+b_{sr}),\quad \omega_{rs}=\frac{1}{2}(b_{rs}-b_{sr}), \tag{29}$$

так что ε_{rs} — *симметричный, а* ω_{rs} — *антисимметричный тензоры второго порядка.* Кроме того,

$$b_{rs}=\varepsilon_{rs}+\omega_{rs},$$

и, следовательно, преобразование будет

$$X^r=x^r+(\varepsilon^r_{.s}+\omega^r_{.s})x^s,$$

откуда, введя обозначения $X^r-x^r=\delta x^r$, получим

$$\boxed{\delta x^r=(\varepsilon^r_{.s}+\omega^r_{.s})x^s.} \tag{30}$$

Если взять две бесконечно малые деформации

$$\begin{aligned} X^r_1&=x^r+\varepsilon^r_{.s}x^s,\\ X^r_2&=x^r+\omega^r_{.s}x^s \end{aligned} \tag{31}$$

и выполнить их последовательно, то с точностью до малых второго порядка мы найдем

$$X^r=X^r_2+\varepsilon^r_{.s}X^r_2=x^r+\varepsilon^r_{.s}x^s+\omega^r_{.s}x^s.$$

Таким образом, последовательные преобразования (31) дают (30), причем преобразования можно делать в любом порядке. Поэтому мы будем изучать отдельно два преобразования

$$\boxed{\begin{aligned} \delta x^r&=\varepsilon^r_{.s}x^s, &(32)\\ \delta x^r&=\omega^r_{.s}x^s, &(33)\end{aligned}}$$

где ε_{rs} — симметричный, а ω_{rs} — антисимметричный тензор.

Рассмотрим сначала (32). Мы видим из § 3 (стр. 170), что это — *чистая деформация.* Уравнение поверхности Q

принимает вид

$$(g_{mn}+2\varepsilon_{mn})\,x^m x^n = 1,$$

а поверхности Q_1 — вид

$$(g_{mn}+\varepsilon_{mn})\,x^m x^n = 1.$$

Нетрудно видеть, что поверхности Q и Q_1 обе связаны с поверхностью второго порядка S, уравнение которой есть

$$\boxed{\varepsilon_{mn}x^m x^n = 1.} \tag{34}$$

Действительно, имеем $Q=2S+\Sigma$, $Q_1=S+\Sigma$, где $\Sigma=1$ есть уравнение единичной сферы. Поверхность второго порядка (34) называется *поверхностью деформации*, и мы видим, что перемещение δx^r точки x^r направлено вдоль перпендикуляра к полярной плоскости точки x^r относительно S, а величина перемещения равна обратной длине перпендикуляра, опущенного из начала на эту плоскость.

Рассмотрим теперь (33). Легко видеть из § 4 (стр. 171), что (33) изображает бесконечно малый поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через начало. Мы можем это показать так. Нам известно, что ω_{rs} антисимметричен. Введем вектор

$$\boxed{\omega^r = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{rst}\omega_{st}} \tag{35}$$

и выберем прямоугольную декартову систему координат $\bar{x}^r$ так, чтобы этот вектор был направлен вдоль оси $\bar{x}^3$. В этой координатной системе все компоненты $\bar{\omega}_{rs}$ обращаются в нуль, исключая $\bar{\omega}_{12}$, $\bar{\omega}_{21}$, которые равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому будет

$$\delta\bar{x}^1 = -\delta\alpha\bar{x}^2,\quad \delta\bar{x}^2=\delta\alpha\bar{x}^1,\quad \delta\bar{x}^3=0, \tag{36}$$

где положено $\bar{\omega}_{12}=-\bar{\omega}_{21}=-\delta\alpha$. Это — бесконечно малый поворот вокруг оси $\bar{x}^3$ на угол $\delta\alpha$. Мы можем легко проверить, что модуль вектора ω^r есть $\delta\alpha$. Следовательно, вектор ω^r дает не только направление оси поворота, но его модуль определяет угол поворота. Бесконечно малый поворот, следовательно, вполне определяется вектором ω^r.

Отсюда мы видим, что наиболее общее бесконечно малое преобразование (30) можно получить при помощи двух последовательных бесконечно малых преобразований, одно из которых есть чистая деформация, а другое — бесконечно малый поворот.

Упражнения

1. Показать, что если $\delta^r_s + b^r_{.s}$ есть бесконечно малый поворот, то b_{rs} должен быть антисимметричен.

2. Показать, что два бесконечно малых поворота вокруг начала координат, определенные векторами ω^r_1 и ω^r_2, вместе эквивалентны одному повороту вокруг начала, определенному вектором $\omega^r = \omega^r_1 + \omega^r_2$, причем порядок поворота несуществен. Таким образом, совместный эффект двух бесконечно малых поворотов определяется суммой их векторов; поэтому бесконечно малые повороты можно рассматривать как векторы.

3. Две бесконечно малые деформации эквивалентны одной бесконечно малой деформации, тензор которой получается складыванием соответствующих тензоров двух первоначальных деформаций.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

1. Показать, что всегда существует по крайней мере одна прямая, проходящая через начало, которая при преобразовании (5) остается неподвижной, т. е. преобразуется сама в себя (стр. 168). Такое направление называется *инвариантным*.

[Если λ^r есть инвариантное направление, то должно быть $(a^r_{.s} - \theta\delta^r_s)\lambda^s = 0$, где θ есть корень уравнения $|a^r_{.s} - \theta\delta^r_s| = 0$.]

2. Показать, что если существуют два (три) различных корня уравнения $|a^r_{.s} - \theta\delta^r_s| = 0$, то существуют два (три) независимых инвариантных направления.

3. Показать, что не существует трех компланарных инвариантных направлений, за исключением случая двух равных корней уравнения из упражнения (2). В этом случае все направления в некоторой плоскости являются инвариантными.

4. Если существуют три различных некомпланарных инвариантных направления, найти явный вид преобразования, взяв эти направления за оси координат.

$$[X^1 = a^1_{.1}x^1, \quad X^2 = a^2_{.2}x^2, \quad X^3 = a^3_{.3}x^3.]$$

5. Классифицировать различные типы аффинных преобразований (5) (стр. 168) в соответствии с существованием одного, двух или трех независимых инвариантных направлений.

6. Показать, что если определитель $|a^r_{.s}|$ равен нулю, то существует такое направление, что каждая точка на прямой, проходящей через точку p в этом направлении, преобразуется в одну и ту же точку P. Показать, что если не все миноры второго порядка определителя $|a^r_{.s}|$ равны нулю, то существует только одно такое направление.

7. В обозначениях § 2 (стр. 168) показать, что: а) $|a^r_{.s}| = \sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$; б) любой объем v преобразуется в V, причем

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = |a^r_{.s}|.$$

8. *Сдвиг. Все точки некоторой плоскости фиксируются, а все точки любой параллельной плоскости перемещаются параллельно фиксированному направлению в фиксированной плоскости на расстояние, пропорциональное удалению от фиксированной плоскости.* Показать, что если μ^r перпендикулярен к фиксированной плоскости, а λ^r параллелен указанному фиксированному направлению, то при сдвиге

$$a^r_{.s} = \delta^r_s + k\lambda^r\mu_s.$$

9. *Простое растяжение. Все отрезки, параллельные данному направлению, вытягиваются в фиксированное число раз, а все отрезки, перпендикулярные к этому направлению, остаются неизменными по длине.* Показать, что если λ^r—данное направление, то

$$a^r_{.s} = \delta^r_s + k\lambda^r\lambda_s.$$

10. Показать, что если $a^r_{.s}$ изображает конечный поворот вокруг направления λ^r, то тензор

$$a_{mn} - \lambda_m\lambda_n - (g_{mn} - \lambda_m\lambda_n)\cos\alpha$$

антисимметричен.

(Вычислить его, когда λ^r есть ось x^3 и система координат прямоугольная.)

11. Показать, что если $a^r_{.s}$ есть поворот, а a_{mn} симметричен, то угол поворота равен четному числу прямых углов.

12. Если поворот не есть полуоборот, то ось вращения определяется единичным вектором $\varepsilon^{rmn}a_{mn}/(-2\sin\alpha)$.

13. Показать, что два полуоборота вокруг параллельных осей эквивалентны параллельному переносу в направлении, перпендикулярном к обеим осям, на отрезок, равный удвоенному расстоянию между ними.

(Использовать формулу задачи 3 (стр. 173).)

14. Показать, что два последовательных полуоборота вокруг пересекающихся осей эквивалентны одному повороту вокруг

перпендикуляра к их направлениям на угол, равный удвоенному углу между осями.

15. Показать, что если твердое тело вращается вокруг фиксированной точки O, то составляющие вектора ξ^r, фиксированного в теле, взятые относительно неподвижных осей, изменяются за время δt на величину

$$\delta\xi^r = \omega^r_{.s}\xi^s,$$

где ω_{rs} антисимметричен.

а) Показать, что *скорость* любой точки твердого тела с неподвижной точкой есть

$$\dot{x}^r = \Omega^r_{.s}x^s,$$

где
$$\Omega^r_{.s} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\omega^r_{.s}}{\delta t}.$$

$\left(\text{Вектор } \Omega^r = -\frac{1}{2}e^{rst}\Omega_{st}\right.$ называется *угловой скоростью.*$\left.\right)$

б) Показать, что любой вектор, неизменный в пространстве, но заданный своими составляющими по осям, связанным с телом, за время δt изменяется на величину

$$\delta\xi^r = -\omega^r_{.s}\xi^s.$$

16. Показать, что самое общее бесконечно малое перемещение твердого тела может быть представлено в виде

$$\delta x^r = \beta^r + \omega^r_{.s}(x^s - x^s_0)$$

и состоит из параллельного переноса β^r и вращения вокруг прямой, проходящей через точку x^r_0. Показать, что x^r_0 может быть выбрана так, что β^r будет параллелен вектору ω^r. В таком случае эта прямая называется *винтовой осью.*

ЧАСТЬ III
ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА XI
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Общие координатные системы

Положение точки в пространстве определяется ее координатами в ортогональной декартовой системе координат; мы будем обозначать такую систему координат следующим образом: (y^1, y^2, y^3). В части II мы применяли *линейное* преобразование и получали систему аффинных координат. Теперь возьмем более общее функциональное преобразование и рассмотрим, какого рода координаты мы получим.

Рассмотрим преобразование

$$x^r = f^r(y^1\ y^2\ y^3), \tag{1}$$

где f^1, f^2, f^3 — произвольные функции от y, которые мы будем предполагать дифференцируемыми столько раз, сколько потребуется.

Хорошо известно, что если определитель

$$\left|\frac{\partial x^r}{\partial y^s}\right| \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \tag{2}$$

отличен от нуля, то преобразование (1) обратимо, т. е. можно разрешить (1) относительно y:

$$y^r = g^r(x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{3}$$

Из формул (1) и (3) видно, что любой совокупности y^r соответствует только одна совокупность x^r, и наоборот. Следовательно, переменные x^r определяют точку в пространстве единственным образом; поэтому назовем их *криволинейными координатами точки*. Основание для введения такого термина мы скоро приведем.

Выясним, какой геометрический смысл имеют эти координаты. Рассмотрим уравнение

$$f^1(y^1, y^2, y^3) = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Это — уравнение поверхности, и если придавать постоянной различные значения, то мы получаем семейство поверхностей. Таким образом, уравнение $x^1 = \mathrm{const}$ дает семейство поверхностей, и, если мы говорим, что точка имеет координату x^1, это означает, что она лежит на определенной поверхности из семейства (4). Аналогично $x^2 = \mathrm{const}$ и $x^3 = \mathrm{const}$—уравнения двух других семейств поверхностей, и, если мы говорим, что точка имеет координаты x^2, x^3, это значит, что она лежит на определенных поверхностях этих двух семейств. Другими словами, если заданы три семейства поверхностей, то положение любой точки P (рис. 18) определяется заданием трех поверхностей из этих семейств таких, что точка P есть точка их пересечения.

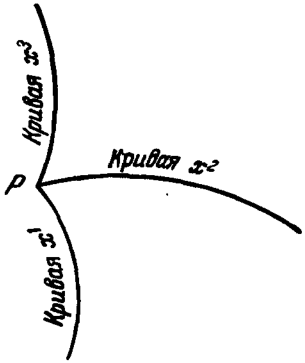

Рис. 18.

Кроме того, условие, что определитель (2) не обращается в нуль, выражает тот факт, что три поверхности, выбранные из разных семейств, пересекаются в одной и только одной точке и таким образом определяют положение точки однозначно.

Назовем поверхности $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const}$ и $x^3 = \mathrm{const}$ *координатными поверхностями* и будем называть их для краткости *x^1-поверхностью*, *x^2-поверхностью* и *x^3-поверхностью* соответственно. Пересечения этих поверхностей образуют три кривые, проходящие через точку P, причем на каждой из данных поверхностей лежат две из них. Эти кривые мы назовем *координатными кривыми*. Вдоль кривой, которая является пересечением x^2-поверхности с x^3-поверхностью, изменяется лишь x^1, а другие координаты остаются постоянными; мы будем называть эту кривую *кривой* x^1. Аналогично будем называть остальные две координатные кривые кривой x^2 и кривой x^3 соответственно. Легко видеть, что координатные линии будут именно кривыми линиями и название «криволинейные координаты» полностью оправдывается.

Если мы возьмем любую другую систему криволинейных координат $\bar{x}^r$, то они окажутся связанными с y^r формулами вида (1) и (3). Следовательно, x^r и $\bar{x}^r$ должны быть связаны формулами

$$\begin{aligned} \bar{x}^r &= \bar{x}^r(x^1,\ x^2,\ x^3), \\ x^r &= x^r(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. преобразование системы криволинейных координат есть функциональное преобразование. Кроме того, определитель

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\right| = \left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial y^m}\right| \cdot \left|\frac{\partial y^m}{\partial x^s}\right|$$

отличен от нуля. Очевидно, что аффинные координаты суть частный случай криволинейных координат, когда функции f^r в (1) — линейные функции.

Упражнения

Проверить, что следующие криволинейные системы обладают указанными ниже свойствами:

1. *Сферические координаты*. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ y^2 &= x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ y^3 &= x^1 \cos x^2. \end{aligned}$$

Здесь x^1-поверхности — сферы с центром в начале координат, x^2-поверхности — круговые конусы, x^3-поверхности — плоскости, проходящие через ось y^3.

Найти для данной системы формулы типа (1).

2. *Цилиндрические координаты*

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \cos x^2, \\ y^2 &= x^1 \sin x^2, \\ y^3 &= x^3. \end{aligned}$$

Здесь x^1-поверхности — цилиндры, имеющие общую ось, совпадающую с y^3-осью, x^2-поверхности — плоскости, проходящие через ось y^3, а x^3-поверхности совпадают с y^3-поверхностями.

3. *Эллиптические координаты*

$$y^1=\left\{\frac{(x^1-a)(x^2-a)(x^3-a)}{(b-a)(c-a)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$y^2=\left\{\frac{(x^1-b)(x^2-b)(x^3-b)}{(c-b)(a-b)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$y^3=\left\{\frac{(x^1-c)(x^2-c)(x^2-c)}{(a-c)(b-c)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $a>b>c>0$. Координаты удовлетворяют неравенствам $x^1\geqslant a>x^2\geqslant b>x^3\geqslant c$.

Показать, что x^1-поверхности — эллипсоиды, x^2-поверхности есть однополостные гиперболоиды и x^3-поверхности — двухполостные гиперболоиды и что все координатные поверхности второго порядка принадлежат к софокусному семейству

$$\frac{(y^1)^2}{(x-a)}+\frac{(y^2)^2}{(x-b)}+\frac{(y^3)^2}{(x-c)}=1.$$

4. *Параболические координаты*

$$y^1=x^1x^2\cos x^3,$$

$$y^2=x^1x^2\sin x^3,$$

$$y^3=\frac{1}{2}\left[(x^1)^2-(x^2)^2\right].$$

Здесь x^1-поверхности и x^2-поверхности — параболоиды вращения, а x^3-поверхности — плоскости, проходящие через ось y^3.

§ 2. Тензорные поля

Мы уже рассматривали тензоры при общих функциональных преобразованиях (стр. 50—53). Например, объект a^r_{st} есть псевдотензор веса M, контравариантный по r и ковариантный по s и t по отношению к преобразованию (5), если его преобразованные составляющие $\overline{a}^r_{st}$ удовлетворяют равенству

$$\overline{a}^r_{st}=\left|\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^j}\right|^M\frac{\partial\overline{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial\overline{x}^s}\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^t}\,a^m_{np}. \qquad (6)$$

Нужно теперь упомянуть об одной особенности, которую мы не затрагивали в случае линейных преобразований. Коэффициенты $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}$ в (6) являются функциями от x^r, а значит, и от $\bar{x}^r$ также. Поэтому если a^r_{st} и $\bar{a}^r_{st}$ — две совокупности величин, удовлетворяющих (6) в одной какой-нибудь точке, то эти равенства будут, вообще говоря, неверны в других точках. Другими словами, a^r_{st} является тензором *в точке* x^r и, вообще говоря, не является тензором в какой-нибудь другой точке. Это означает, что *тензоры и тензорные свойства* теперь локализованы в точках.

Таким образом, все алгебраические операции, которые мы описали в главе II (стр. 36), относятся к тензорам в одной и той же точке и не применимы к тензорам в разных точках, т. е. для того, чтобы операция умножения двух тензоров давала третий тензор, оба тензора должны быть определены в одной и той же точке.

Предположим снова, что a^r_{st} есть функция от x^r, но что новые составляющие $\bar{a}^r_{st}$, которые тоже являются функциями от x^r, удовлетворяют равенству (6) *в каждой точке, где эти функции определены.*

Таким образом, в каждой точке некоторой области пространства нам задан тензор; такую совокупность тензоров назовем *тензорным полем.* В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с тензорными полями, но для краткости будем называть их просто тензорами в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям.

Следовательно, когда мы говорим, что тензор определен в некоторой области пространства, мы имеем в виду, что в этой области определено тензорное поле. Как и обыкновенные тензоры, тензорные поля могут быть различных порядков. Таким образом, могут существовать *инвариантные или скалярные поля и векторные поля.*

Наиболее важен для нас случай, когда в равенстве (6) $M=0$, т. е. когда тензоры есть *истинные* тензоры; все тензоры, с которыми мы ниже будем иметь дело, следует считать истинными, если прямо не оговорено противоположное.

Упражнения

1. Доказать, что

$$e_{rst} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|^{-1} e_{mnp} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^t},$$

$$e^{rst} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| e^{mnp} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^p},$$

т. е. что e_{rst} и e^{rst} — псевдотензоры веса -1 и $+1$ соответственно.

2. Доказать, что символы Кронекера — истинные тензоры.

3. Показать, что дифференциалы dx^r образуют контравариантный тензор первого порядка (вектор).

4. Показать, что если φ — инвариантная функция, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$ есть ковариантный вектор. Этот вектор называется *градиентом* φ.

$$\left[\bar{\varphi} = \varphi \text{ и отсюда } \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^r} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}. \right]$$

§ 3. Линейный элемент и метрический тензор. ε-объекты

Пусть P будет точка с координатами x^r, и пусть Q — соседняя точка с координатами $x^r + dx^r$. Обозначим бесконечно малое расстояние PQ через ds и назовем ds *элементом длины* или *линейным элементом*; найдем выражение для ds через дифференциалы dx^r.

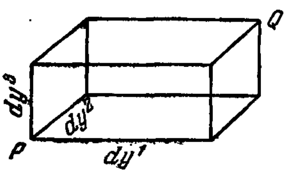

Рис. 19.

Если мы вернемся к декартовой системе координат, в которой координаты точек P и Q равны y^r и $y^r + dy^r$ соответственно (рис. 19), то из элементарного параллелепипеда с вершиной в точке P и ребрами dy^1 dy^2 dy^3 увидим, что

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = dy^i \, dy^i.$$

Так как $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^r} dx^r$, то

$$\boxed{ds^2 = g_{mn} \, dx^m \, dx^n,} \tag{7}$$

где мы ввели обозначение

$$g_{mn}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial y^i}{\partial x^n}=\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial y^i}{\partial x^n}. \tag{8}$$

Отметим, что здесь суммирование идет по двум верхним значкам.

Последние равенства показывают, что g_{mn} *симметричен*, а так как ds есть инвариант, то из (7) следует, что $g_{mn}\,dx^m\,dx^n$ также есть инвариант при произвольном контравариантном векторе dx^r. Отсюда следует, что g_{mn} есть *ковариантный тензор второго порядка*, который мы назовем *фундаментальным* или *метрическим тензором*.

Если мы обозначим через g определитель $|g_{mn}|$ и через G^{mn} алгебраическое дополнение g_{mn}, то увидим, что

$$\begin{aligned} 3!\,g &= e^{rst}\,e^{mnp}\,g_{rm}\,g_{sn}\,g_{tp}, \\ 2!\,G^{mn} &= e^{mpq}\,e^{nrs}\,g_{pr}\,g_{qs}. \end{aligned} \tag{9}$$

Но e^{rst} есть псевдотензор веса 1. Следовательно, g есть псевдоскаляр веса 2, а G^{mn} есть псевдотензор веса 2. Кроме того, из (8) мы видим, что

$$g=|g_{mn}|=\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\right|^2,$$

откуда следует, что g не обращается в нуль и положителен. Поэтому если положить

$$g^{mn}=\frac{G^{mn}}{g}, \tag{10}$$

т. е. g^{mn} есть алгебраическое дополнение g_{mn}, деленное на g, то очевидно, что g^{mn} есть *истинный контравариантный тензор*. Точно так же очевидно, что объекты

$$\varepsilon_{rst}=\sqrt{g}\,e_{rst},\quad \varepsilon^{rst}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,e^{rst} \tag{11}$$

являются *истинными тензорами*; мы назовем эти тензоры *ε-объектами*.

Пусть нам дан контравариантный вектор A^r. Мы можем построить скаляр A следующим образом:

$$\boxed{A=(g_{mn}A^mA^n)^{\frac{1}{2}}.} \tag{12}$$

Назовем A *длиной вектора* A^r; аналогично определим длину ковариантного вектора при помощи формулы

$$B = (g^{mn} B_m B_n)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Определим *единичный вектор* как вектор, длина которого равна единице. Если равенство (7) разделить на ds^2, то сразу видно, что

$$g_{mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 1, \tag{14}$$

и мы получаем, что $\frac{dx^r}{ds}$ *есть единичный вектор.*

Заметим, что все сказанное на стр. 67 относительно опускания и поднятия индексов посредством g_{mn} и g^{mn} для получения ассоциированых тензоров применимо без изменения и в настоящем случае.

Упражнения

1. Проверить выражение для ds^2 в каждой из следующих координатных систем.

I. *Ортогональная декартова*

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

II. *Сферическая*

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (x^1)^2 (\sin x^2)^2 (dx^3)^2.$$

III. *Цилиндрическая*

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

IV. *Эллиптическая*

$$4\,ds^2 = \frac{(x^3 - x^1)(x^2 - x^1)(dx^1)^2}{(x^1 - a)(x^1 - b)(x^1 - c)} + \frac{(x^1 - x^2)(x^3 - x^2)(dx^2)^2}{(x^2 - a)(x^2 - b)(x^2 - c)} + \frac{(x^1 - x^3)(x^2 - x^3)(dx^3)^2}{(x^3 - a)(x^3 - b)(x^3 - c)}.$$

V. *Параболическая*

$$ds^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2]\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + (x^1 x^2)^2 (dx^3)^2.$$

2. Доказать, что длина вектора A^r определяется формулой $A^2 = A^r A_r$, где A_r есть вектор, ассоциированный с A^r.

3. Показать, что квадратичная форма $g_{mn}\, dx^m dx^n$ положительно определена.

4. Показать, что вектор A^r/A есть единичный вектор.

5. Показать, что если координатная система — аффинная, то g_{mn} приводится к виду, указанному на стр. 63.

§ 4. Угол между двумя направлениями

Если P есть точка с координатами x^r и Q — соседняя точка с координатами $x^r + dx^r$, то очевидно, что Q определяется однозначно через дифференциалы dx^r. Но отрезок PQ, очевидно, определяет некоторое направление в пространстве и, следовательно, *дифференциалы* dx^r *определяют в точке* P *некоторое направление.*

Пусть X^r — контравариантный вектор, длина которого есть X. Всегда можно определить дифференциалы dx^r в *какой-нибудь* одной координатной системе так, что

$$dx^r = \varepsilon X^r, \tag{15}$$

где ε — бесконечно малый положительный множитель; это соотношение — векторное; оно будет справедливо в любой координатной системе.

Используя (7) и (12), получим

$$ds^2 = \varepsilon^2 g_{mn} X^m X^n = \varepsilon^2 X^2,$$

т. е.

$$\varepsilon = \frac{ds}{X}.$$

Поэтому (15) принимает вид

$$\frac{dx^r}{ds} = \frac{X^r}{X}. \tag{16}$$

Легко видеть, что X^r/X есть единичный вектор, который мы обозначим через λ^r, так что

$$X^r = X\lambda^r, \quad \frac{dx^r}{ds} = \lambda^r, \tag{17}$$

и мы получаем, что *каждый единичный вектор* λ^r *определяет некоторое направление в пространстве.*

Из первого равенства в (17) видно, что каждый контравариантный вектор определяется длиной и единичным вектором; таким образом, заданием вектора определяется некоторое направление, называемое направлением вектора.

Пусть в точке P даны два направления, определяемые единичными векторами λ^r и μ^r. Рассмотрим скаляр $g_{mn}\lambda^m\mu^n$. Если система координат — аффинная, то этот скаляр обратится в $\cos\theta$, где θ — угол между направлениями. Поэтому в любой системе координат *угол* θ *между* *двумя направлениями* определяется формулой

$$\boxed{\cos\theta = g_{mn}\lambda^m\mu^n.} \tag{18}$$

Отсюда мы видим, что если A^r, B^r — два вектора, имеющих длины A и B, то *скалярное произведение их есть*

$$g_{mn}A^mA^n = AB\cos\theta, \tag{19}$$

где θ — угол между направлениями A^r и B^r. В частности, условием того, что направления λ^r и μ^r *ортогональны*, является

$$g_{mn}\lambda^m\mu^n = 0. \tag{20}$$

Оставляем читателю доказательство (при помощи выбора специальной системы координат) того, что *векторное произведение* A^rB^r определяется уравнениями

$$\varepsilon^{rmn}A_mB_n = AB\sin\theta\nu^r,$$

где ν^r — единичный вектор, перпендикулярный к векторам A^r и B^r. Знак ν^r может быть определен аналогично тому, как это было сделано на стр. 70.

Упражнения

1. Пусть $\varepsilon^r_{(1)}$, $\varepsilon^r_{(2)}$, $\varepsilon^r_{(3)}$ — *единичные векторы касательной к координатным кривым, проходящим через точку* P. Показать, что их составляющие будут

$$\varepsilon^r_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta^r_1, \qquad \varepsilon^r_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta^r_2, \qquad \varepsilon^r_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta^r_3.$$

2. Показать, что

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}},$$

где θ_{12}, θ_{23}, θ_{31} — углы между координатными кривыми, проходящими через точку P.

3. Показать, что если координатные кривые взаимно ортогональны, то координатные поверхности также ортогональны. Такие координаты называют *ортогональными криволинейными координатами*. Доказать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке пространства выполнялись равенства

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.$$

4. Показать, что координаты из задачи 1, стр. 186, — ортогональные координаты.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

1. Получить из (8), стр. 185, равенство

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^m}=g_{mn}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}$$

$\left(\text{умножить (8) на } \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \text{ и использовать равенство } \frac{\partial y^i}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^j}=\delta^i_j\right)$.

2. Доказать, что $\frac{\partial x^r}{\partial y^i}=g^{rm}\frac{\partial y^i}{\partial x^m}$, и вывести отсюда, что $g^{mn}=\frac{\partial x^m}{\partial y^i}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}$.

3. Пусть λ^r, μ^r, ν^r — три единичных вектора. Показать, что $\varepsilon_{rst}\lambda^r\mu^s\nu^t=\sin\gamma\sin\theta$, где γ — угол между μ^r, ν^r, а θ — угол, который образует вектор λ^r с плоскостью векторов μ^r, ν^r. (Выбрать специальные оси для вычисления этого скаляра.)

4. Показать, что если $\varepsilon_{rst}\lambda^r\mu^s\nu^t=0$, то существуют такие числа α, β, что $\nu^r=\alpha\lambda^r+\beta\mu^r$, т. е. что эти три направления компланарны.

5. Доказать, что $\varepsilon_{rst}\lambda^r\mu^s\nu^t$ — положительный скаляр, если триэдр λ^r, μ^r, ν^r можно так деформировать, не сделав векторы компланарными, что они совпадут с положительными направлениями координатных кривых; тогда говорят, что тройка (λ^r, μ^r, ν^r) *имеет положительную ориентацию* (см. стр. 70).

6. Показать, что если θ — угол между μ^r, ν^r, то $\varepsilon_{rmn}\mu^m\nu^n/\sin\theta$ являются ковариантными составляющими единичного вектора, ортогонального к μ^r и ν^r.

7. Вывести из задачи 6, что ковариантные составляющие единичного вектора, ортогонального к x^3-поверхности, равны

$$\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}\sin\theta_{12}}\right).$$

8. Показать, что длины элементарных дуг координатных кривых равны

$$ds_1=\sqrt{g_{11}}\,dx^1,\qquad ds_2=\sqrt{g_{22}}\,dx^2,\qquad ds_3=\sqrt{g_{33}}\,dx^3.$$

9. *Элемент объема.* Показать, что элемент объема dV есть

$$dV=\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

(Воспользоваться тем, что если ds_1, ds_2, ds_3 — дифференциал длины дуги координатных кривых, то объем параллелепипеда, построенного на них, равен $dV=ds_1ds_2ds_3\varepsilon_{rst}\,\varepsilon^r_{(1)}\varepsilon^s_{(2)}\varepsilon^t_{(3)}=\sqrt{g}\,ds_1\,ds_2\,ds_3/\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$, и применить результат упражнения 8.)

10. Показать, что если криволинейные координаты *ортогональны*, то $g=g_{11}g_{22}g_{33}$, $g^{11}=\frac{1}{g_{11}}$, $g^{22}=\frac{1}{g_{22}}$, $g^{33}=\frac{1}{g_{33}}$, $g_{mn}=$ $=g^{mn}=0$ $(m\neq n)$.

11. Показать, что если λ^r—единичный вектор, то косинусы углов, которые он составляет с координатными кривыми, равны

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}},\quad \frac{\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}},\quad \frac{\lambda_3}{\sqrt{g_{33}}}.$$

12. Показать, что если $\varphi=\text{const}$ есть уравнение поверхности, то единичный вектор, нормальный к этой поверхности, определяется выражением

$$g^{rm}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\Big/\left(g^{mn}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Для каждого направления dx^r на поверхности мы имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}dx^r=0.$)

13. Показать, что угол между двумя поверхностями $\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$ определяется формулой

$$\cos\theta=\frac{g^{mn}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\frac{\partial\psi}{\partial x^n}}{(g^{mn}\varphi_m\varphi_n g^{pq}\psi_p\psi_q)^{\frac{1}{2}}}.$$

14. Вывести отсюда, что угол φ_{12} *между координатными поверхностями* $x^1=\text{const}$ и $x^2=\text{const}$ есть

$$\cos\varphi_{12}=\frac{g^{12}}{\sqrt{g^{11}g^{22}}}.$$

15. Показать, что условие ортогональности двух поверхностей $\varphi=\text{const}$, $\psi=\text{const}$ есть

$$g^{mn}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\frac{\partial\psi}{\partial x^n}=0.$$

16. Покаaать, что $\sqrt{g}A_s^r$, где A_s^r—истинный тензор, есть псевдотензор веса 1. Его иногда называют *тензорной плотностью*.

ГЛАВА XII

КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Параллельное векторное поле. Символы Кристоффеля

Кривая в пространстве определяется как геометрическое место точек, координаты которых зависят от одного параметра. Пусть AB (рис. 20) — данная кривая, и пусть координаты любой точки P на AB являются функциями параметра t. Если мы в данной точке кривой построим какой-либо вектор, а затем в каждой другой точке этой кривой построим вектор, равный и параллельный первому, то мы получим вектор X^r, определенный в каждой точке кривой; его составляющие будут функциями от t. Другими словами, мы получим *параллельное векторное поле векторов вдоль кривой* AB, и наша задача заключается в том, чтобы найти уравнение, которому должно удовлетворять такое векторное поле.

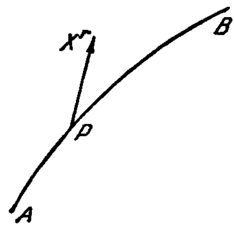

Рис. 20.

Вернемся в первоначальную ортогональную декартову систему координат y^r, и пусть Y^r — составляющие векторного поля в этой системе координат. Так как в ортогональной декартовой системе координат составляющие параллельных векторов одинаковы, то Y^r постоянны вдоль кривой и, следовательно, производная Y^r по t равна нулю.

Но

$$Y^i = X^m \frac{\partial y^i}{\partial x^m}.$$

Поэтому, дифференцируя по t, имеем

$$\frac{dX^m}{dt}\frac{\partial y^i}{\partial x^m}+X^m\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^m \partial x^n}\frac{dx^n}{dt}=\frac{dY^i}{dt}=0.$$

Умножив это уравнение на $g^{rp}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}$ и просуммировав по i от 1 до 3, получим, используя (8), стр. 185,

$$\frac{dX^r}{dt}+g^{rp}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^m \partial x^n}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}X^m\frac{dx^n}{dt}=0 \tag{1}$$

(суммирование по немому верхнему индексу).

Теперь рассмотрим выражение $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^m \partial x^n}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}$. Обращаясь снова к (8), стр. 185, и продифференцировав эти равенства по x^p, мы получим

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^m \partial x^p}\frac{\partial y^i}{\partial x^n}+\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^p \partial x^n}, \tag{2}$$

причем эти равенства справедливы, если m, n, p пробегают какие угодно значения из чисел 1, 2, 3.

Сделаем в (2) дважды круговую перестановку индексов m, n, p и вычтем равенство (2) из суммы полученных таким образом равенств; мы получим

$$\frac{\partial g_{np}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p}=2\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^m \partial x^n}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}. \tag{3}$$

Введем следующее обозначение *):

$$\boxed{\Gamma_{p,\,mn}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{np}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^n}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^p}\right).} \tag{4}$$

---

*) Обозначения трехиндексных символов Кристоффеля заменены принятыми в нашей литературе. Мак-Коннел использует английские обозначения

$$[mn,\ p]\equiv\Gamma_{p,\,mn};\quad \left\{ {p \atop mn} \right\}\equiv\Gamma^p_{mn}.$$

Пользуясь принятыми у нас обозначениями, читатель должен помнить, что символы Кристоффеля не являются тензорами. (*Прим. ред.*)

Подставим (3) в (1); используя (4), получим

$$\frac{dX^r}{dt}+g^{rp}\,\Gamma_{p,\,mn}X^m\,\frac{dx^n}{dt}=0.$$

Если ввести обозначение

$$\boxed{\Gamma^r_{mn}=g^{rp}\,\Gamma_{p,\,mn},} \tag{5}$$

то уравнение (1) примет окончательный вид

$$\frac{dX^r}{dt}+\Gamma^r_{mn}X^m\frac{dx^n}{dt}=0. \tag{6}$$

Параллельное векторное поле вдоль кривой AB должно удовлетворять этому дифференциальному уравнению.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если векторное поле X^r удовлетворяет (6) на кривой AB и имеет заданное значение в одной из ее точек, то оно полностью и единственным образом определено на всей кривой AB. Но мы видели, что поле, полученное построением векторов, параллельных данному, есть решение (6); следовательно, оно является единственным решением. Мы доказали обратную теорему, т. е. что любое векторное поле на кривой AB, удовлетворяющее (6), есть параллельное векторное поле.

Объекты $\Gamma_{p,\,mn}$ и Γ^r_{mn}, определенные формулами (4) и (5), играют очень важную роль. Они называются *символами Кристоффеля соответственно первого и второго рода*; их еще иногда называют *трехзначковыми символами*. Одно из их важных свойств состоит в том, что, как легко видеть, они симметричны относительно индексов m и n.

Если мы возьмем какой-либо вектор в данной точке и построим в каждой точке пространства параллельные ему векторы, то таким образом мы определим параллельное векторное поле X^r, составляющие которого являются функциями координат x^r. Далее, если взять произвольную кривую, проходящую через точку P, то векторы этого поля на кривой будут удовлетворять (6). Но теперь мы имеем $\dfrac{dX^r}{dt}=\dfrac{\partial X^r}{\partial x^n}\dfrac{dx^n}{dt}$, так как X^r есть функция от x^r, и (6) принимает вид

$$\left[\frac{\partial X^r}{\partial x^n}+\Gamma^r_{mn}X^m\right]\frac{dx^n}{dt}=0.$$

Это соотношение должно быть верным для всех кривых, выходящих из P, т. е. для всех значений вектора $\frac{dx^n}{dt}$ в точке P. Следовательно, параллельное векторное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial X^r}{\partial x^s}+\Gamma^r_{ms}X^m=0. \tag{7}$$

Обратное предложение тоже справедливо.

Упражнения

1. *Найти соотношение, связывающее символы Кристоффеля в двух различных системах криволинейных координат.*

Пусть x^r и $\bar{x}^r$ — две системы криволинейных координат. Мы будем, как обычно, отмечать чертой величины, принадлежащие новой координатной системе.

Пусть A^r — произвольное параллельное векторное поле, определенное во всем пространстве, а $\bar{A}^r$ — его составляющие в новой системе координат. Так как они оба являются составляющими параллельного векторного поля, то по (7) мы имеем

$$\frac{\partial A^r}{\partial x^s}+\Gamma^r_{ms}A^m=0, \qquad \frac{\partial \bar{A}^r}{\partial \bar{x}^s}+\bar{\Gamma}^r_{ms}\bar{A}^m=0. \tag{α}$$

Так как $\bar{A}^r=A^i\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}$, то

$$\frac{\partial \bar{A}^r}{\partial \bar{x}^s}=\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}+A^i\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}.$$

Из (α) получаем

$$-\bar{\Gamma}^r_{ms}\bar{A}^m=-\Gamma^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}A^k+A^i\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}. \tag{β}$$

Если положить $\bar{A}^m=A^k\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}$ и умножить равенство (β) на $\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l}$, то мы получим

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^k\partial x^l}+\bar{\Gamma}^r_{st}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^l}-\Gamma^i_{kl}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}\right]A^k=0.$$

Это уравнение справедливо для всех параллельных векторных полей A^r, и поэтому мы получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^r}{\partial x^k \partial x^l} = \Gamma^t_{kl} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^t} - \bar{\Gamma}^r_{sl} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^l} .$$

2. Доказать аналогичное равенство

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^s} = \bar{\Gamma}^t_{rs} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^t} - \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} .$$

3. Показать, что $\Gamma_{r,mn}$ и Γ^r_{mn} симметричны по m и n.

4. Исходя из задачи 1, установить, что *символ Кристоффеля не является тензором.*

5. Показать, что в аффинных координатах символ Кристоффеля равен тождественно нулю. [Все g — константы.]

§ 2. Абсолютная и ковариантная производная вектора

Теперь мы можем вернуться к проблеме, о которой мы упоминали на стр. 54, а именно, к вопросу об образовании нового тензора при помощи дифференцирования данного тензора. Сначала мы ограничимся рассмотрением скаляров и векторов; конечно, мы рассматриваем лишь истинные тензоры.

Случай *скаляров* особенно прост. Если φ — скалярная функция параметра t, то в новых переменных $\bar{\varphi}$ мы имеем $\bar{\varphi} = \varphi$. Но $\frac{d\varphi}{dt}$ — предел отношения $\frac{\varphi(t+\delta t) - \varphi(t)}{\delta t}$ при δt, стремящемся к 0, а $\frac{d\bar{\varphi}}{dt}$ — предел равного ему отношения. Следовательно,

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{8}$$

откуда видно, что $\frac{d\varphi}{dt}$ — *скаляр*. Далее, если φ — скалярная функция от x^r, то

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} , \tag{9}$$

что показывает, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$ — *ковариантный вектор*. Таким образом, обычные производные скаляра дают нам сразу скаляры и векторы без дополнительных модификаций.

Рассмотрим теперь случай *ковариантного вектора*. Рассмотрим ковариантный вектор X_r, определенный на кривой C. Следовательно, он является функцией параметра t. Возьмем произвольный контравариантный вектор A^r в данной точке кривой вместе с векторами, ему параллельными в каждой точке кривой. Другими словами, A^r есть параллельное векторное поле вдоль кривой C, которое удовлетворяет уравнению (6), стр. 193. В любой точке C объект $(X_r A^r)$ есть скаляр, и поэтому его производная по t есть также скаляр. Но

$$\frac{d}{dt}(X_r A^r) = \frac{dX_r}{dt} A^r + X_r \frac{d}{dt} A^r = \frac{dX_r}{dt} A^r - \Gamma^r_{mn} X_r A^m \frac{dx^n}{dt};$$

следовательно, мы получаем, что

$$\left[\frac{dX_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} X_m \frac{dx^n}{dt}\right] A^r$$

есть скаляр. Но A^r есть произвольное параллельное векторное поле, и поэтому из обратного тензорного признака мы получаем, что

$$\boxed{\frac{\delta X_r}{\delta t} \equiv \frac{dX_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} X_m \frac{dx^n}{dt}} \tag{10}$$

есть *ковариантный вектор*. Мы назовем его *абсолютной производной вектора* X_r *по* t. Чтобы отличить абсолютную производную от обычной производной, мы будем ее обозначать через $\frac{\delta X_r}{\delta t}$. Итак, чтобы получить новый вектор при помощи дифференцирования, надо к обычной производной вектора добавить некоторое число членов, содержащих символы Кристоффеля.

Рассмотрим векторное уравнение

$$\frac{\delta X_r}{\delta t} = \frac{dX_r}{dt} - \Gamma^m_{rn} X_m \frac{dx^n}{dt} = 0. \tag{11}$$

Если оно справедливо в какой-то одной координатной системе, то оно справедливо и в любой другой. Если система координат декартова, то g_{mn} — постоянные и символы Кристоффеля тождественно равны нулю. В этом случае (11) принимает вид

$$\frac{dX_r}{t} = 0,$$

откуда следует, что составляющие X_r образуют параллельное векторное поле вдоль C, а (11) есть уравнение, которому должно удовлетворять *ковариантное параллельное векторное поле* вдоль кривой C.

В случае контравариантного векторного поля X^r вдоль C мы предоставляем читателю доказать точно таким же образом, что

$$\boxed{\frac{\delta X^r}{\delta t} \equiv \frac{dX^r}{dt} + \Gamma^r_{mn} X^m \frac{dx^m}{dt}} \tag{12}$$

есть *контравариантный вектор*, который мы назовем *абсолютной производной* X^r *по* t. Для этого нужно взять произвольное ковариантное параллельное векторное поле A_r и поступать, как было указано выше.

Перейдем теперь к векторным полям, определенным во всем пространстве. Пусть X^r будет такое поле контравариантных векторов; возьмем *какую-либо произвольную кривую* (параметр t), выходящую из точки P. Мы знаем, что (12) есть контравариантный вектор. Так как

$$\frac{dX^r}{dt} = \frac{\partial X^r}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dt}, \quad \Gamma^r_{mn} X^m \frac{dx^n}{dt} = \Gamma^r_{ms} X^m \frac{dx^s}{dt},$$

то

$$\left[\frac{\partial X^r}{\partial x^s} + \Gamma^r_{ms} X^m\right]\frac{dx^s}{dt}$$

— контравариантный вектор.

Это справедливо для всех кривых, выходящих из P, т. е. для всех значений $\frac{dx^s}{dt}$ в точке P и, следовательно (согласно обратному тензорному признаку), выражение в квадратных скобках есть *тензор*, контравариантный по r и ковариантный по s. Этот тензор мы назовем *ковариантной производной* X^r и будем обозначать его так: $X^r{}_{,s}$, причем запятая перед индексом s указывает на то, что вектор продифференцирован по x^s. Таким образом,

$$\boxed{X^r{}_{,s} \equiv \frac{\partial X^r}{\partial x^s} + \Gamma^r_{ms} X^m.} \tag{13}$$

Совершенно таким же образом мы можем доказать, что если X_r — ковариантное векторное поле, определенное во всем пространстве, то

$$X_{r,s} \equiv \frac{\partial X_r}{\partial x^s} - \Gamma^m_{rs} X_m \qquad (14)$$

есть тензор, ковариантный по r и s, который мы назовем *ковариантной производной вектора* X_r.

Упражнения

1. Доказать равенство

$$\frac{d}{dt} g_{mn} X^m X^n = 2 g_{mn} X^m \frac{\delta X^n}{\delta t}.$$

2. Доказать равенство

$$\frac{d}{dt}(X^m Y_m) = \frac{\delta X^m}{\delta t} Y_m + X^m \frac{\delta Y_m}{\delta t}.$$

3. Показать, что $\frac{\delta X^r}{\delta t} = 0$, $X^r{}_{,s} = 0$ — уравнения параллельного векторного поля.

§ 3. Абсолютная и ковариантная производная тензора

Теперь распространим результаты предыдущего параграфа на дифференцирование тензора любого порядка. Например, пусть X^r_{st} — тензор третьего порядка, определенный вдоль некоторой кривой посредством параметра t. Мы уже знаем, что (стр. 53) $\frac{dX^r_{st}}{dt}$ *не* является тензором, и наша задача состоит в том, чтобы найти, как следует изменить эту производную, чтобы получить тензор. Возьмем *три произвольных параллельных векторных поля* A_r, B^r, C^r, определенных вдоль той же кривой. Тогда в каждой точке кривой $X^r_{st} A_r B^s C^t$ есть скаляр и, следовательно, его производная по t также будет скаляром. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}(X^r_{st} A_r B^s C^t) = \frac{dX^r_{st}}{dt} A_r B^s C^t + X^r_{st} \frac{dA_r}{dt} B^s C^t + $$
$$+ X^r_{st} A_r \frac{dB^s}{dt} C^t + X^r_{st} A_r B^s \frac{dC^t}{dt}.$$

Параллельные векторы удовлетворяют (6), стр. 193, и (11), стр. 196; если при помощи этих равенств мы исключим отсюда производные векторов A_r, B^r, C^r, то получим

$$\frac{d}{dt}(X^r_{st}A_rB^sC^t)=$$
$$=\left[\frac{dX^r_{st}}{dt}+\Gamma^r_{mn}X^m_{st}\frac{dx^n}{dt}-\Gamma^m_{sn}X^r_{mt}\frac{dx^n}{dt}-\Gamma^m_{nt}X^r_{sm}\frac{dx^n}{dt}\right]A_rB^sC^t.$$

Так как справа стоит скаляр, а A_r, B^r, C^r — произвольные векторы, то из обратного тензорного признака следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, есть *тензор того же самого типа, что и* X^r_{st}. Обозначим его $\frac{\delta X^r_{st}}{\delta t}$ и назовем *абсолютной производной* X^r_{st} *по* t. Таким образом, имеем

$$\boxed{\frac{\delta X^r_{st}}{\delta t}\equiv\frac{dX^r_{st}}{dt}+\Gamma^r_{mn}X^m_{st}\frac{dx^n}{dt}-\Gamma^m_{sn}X^r_{mt}\frac{dx^n}{dt}-\Gamma^m_{nt}X^r_{sm}\frac{dx^n}{dt}.}\qquad(15)$$

Предположим, как и выше, что X^r_{st} — тензорное поле, определенное во всем пространстве, и что составляющие этого тензора являются функциями от x^r. Если мы теперь возьмем какую-нибудь кривую, проходящую через точку P, то, как известно, выражение (15) вдоль этой кривой будет тензором. А так как $\frac{dX^r_{st}}{dt}=\frac{\partial X^r_{st}}{\partial x^u}\frac{dx^u}{dt}$, то правую часть (15) можно переписать в виде

$$\left[\frac{\partial X^r_{st}}{\partial x^u}+\Gamma^r_{mu}X^m_{st}-\Gamma^m_{su}X^r_{mt}-\Gamma^m_{tu}X^r_{sm}\right]\frac{dx^u}{dt}.$$

Это выражение тоже определяет тензор. Полученный результат справедлив для всех кривых, проходящих через P, т. е. для всех значений $\frac{dx^r}{dt}$ в точке P. Следовательно, выражение в квадратных скобках есть *тензор, имеющий на один ковариантный индекс больше, чем* X^r_{st}. Мы назовем его *ковариантной производной тензора* X^r_{st} и обозначим через $X^r_{st,u}$, причем запятая снова указывает на дифференцирование по x^u. Таким образом,

$$\boxed{X^r_{st,u} \equiv \frac{\partial X^r_{st}}{\partial x^u} + \Gamma^r_{mn} X^m_{st} - \Gamma^m_{su} X^r_{mt} - \Gamma^m_{tu} X^r_{sm}.} \tag{16}$$

Описанный сейчас метод является очень общим и может быть применен читателем для получения абсолютной и ковариантной производной тензора любого типа.

Упражнения

1. Показать что

$$\frac{\delta X^r_s}{\delta t} = \frac{dX^r_s}{dt} + \Gamma^r_{mn} X^m_s \frac{dx^n}{dt} - \Gamma^m_{sn} X^r_m \frac{dx^n}{dt}$$

$$X^r_{s,\,t} = \frac{\partial X^r_s}{\partial x^t} + \Gamma^r_{mt} X^m_s - \Gamma^m_{st} X^r_m.$$

2. Доказать равенство

$$X_{r,\,s} - X_{s,\,r} = \frac{\partial X_r}{\partial x^s} - \frac{\partial X_s}{\partial x^r}.$$

§ 4. Сохранение правил обычного дифференциального исчисления. Лемма Риччи

Из обычного дифференциального исчисления известны правила нахождения производной суммы и произведения функций. Покажем теперь, что *те же самые правила применимы и для нахождения абсолютной и ковариантной производных суммы и произведения тензоров.*

Прежде всего отметим, что если наша координатная система — аффинная, то все g_{mn} постоянны и символы Кристоффеля тождественно равны нулю. Поэтому, как следует из (15) и (16), в аффинной системе координат абсолютная производная тензора совпадает с обычной производной, а ковариантная — с частной производной. Поэтому если нам дано какое-то соотношение, связывающее обычные и частные производные тензоров в аффинных координатах, то, просто заменяя обычные производные на абсолютные и частные — на ковариантные, мы получим соответствующее тензорное равенство, которое справедливо в любой системе координат. Например, предположим, что три тензора A^r_s, B^r_s, C^r и их производные связаны уравнением

$$\frac{dA^r_s}{dt}=\frac{\partial B^r_s}{\partial x^t}C^t,$$

верным в аффинной системе координат. Отсюда мы видим, что равенство

$$\frac{\delta A^r_s}{\delta t}=B^r_{s,t}C^t,$$

которое является тензорным, справедливо в некоторой специальной аффинной системе координат и потому справедливо в любой криволинейной системе.

Рассмотрим сумму двух тензоров A^r_s, B^r_s

$$C^r_s=A^r_s+B^r_s.$$

Если эти тензоры являются функциями параметра t, то

$$\frac{dC^r_s}{dt}=\frac{dA^r_s}{dt}+\frac{dB^r_s}{dt}$$

и, в частности, это равенство справедливо в любой аффинной системе координат. Поэтому равенство

$$\frac{\delta C^r_s}{\delta t}=\frac{\delta A^r_s}{\delta t}+\frac{\delta B^r_s}{\delta t} \tag{17}$$

справедливо в любой системе координат. Таким же образом доказывается равенство

$$C^r_{s,t}=A^r_{s,t}+B^r_{s,t}. \tag{18}$$

Эти две формулы показывают, что обычные правила дифференцирования суммы остаются справедливыми и для абсолютного и ковариантного дифференцирования.

Рассмотрим произведение двух тензоров A^r_s, B^r_{st} и, для общности, предположим, что произведение свернуто по m:

$$C^r_{st}=A^r_mB^m_{st}.$$

Обычным дифференцированием получаем

$$\frac{dC^r_{st}}{dt}=\frac{dA^r_m}{dt}B^m_{st}+A^r_m\frac{dB^m_{st}}{dt}.$$

Это равенство, в частности, справедливо в любой аффинной системе координат. Отсюда сразу получаем тензорное равенство

$$\frac{\delta C^r_{st}}{\delta t}=\frac{\delta A^r_m}{\delta t}B^m_{st}+A^r_m\frac{\delta B^m_{st}}{\delta t}, \tag{19}$$

справедливое в любой системе координат. Аналогично

$$C^r_{st,u}=A^r_{m,u}B^m_{st}+A^r_m B^m_{st,u}. \tag{20}$$

Это показывает, что обычные правила дифференцирования справедливы и для произведения тензоров.

Пользуясь правилами абсолютного и ковариантного дифференцирования тензоров, мы приходим к некоторым важным теоремам, о которых в этой связи необходимо упомянуть. Возьмем метрический тензор g_{rs}; мы знаем, что его составляющие в аффинной системе координат постоянны; следовательно, в аффинных координатах

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t}=0.$$

Поэтому в любой координатной системе справедливо следующее тензорное равенство:

$$g_{rs,t}=0, \tag{21}$$

т. е. *ковариантная производная метрического тензора равна нулю тождественно*. Этот важный результат известен как лемма Риччи. Таким же образом доказывается, что *ковариантная производная ассоциированного тензора g^{rs} также равна нулю тождественно*.

ε-объекты и символ Кронекера постоянны в любой аффинной системе координат и, следовательно,

$$\varepsilon_{rst,u}=\varepsilon^{rst}_{\dots,u}=\delta^r_{s,u}=\delta^{rp}_{st,u}=0. \tag{22}$$

Другими словами, *ковариантные производные ε-объектов и символов Кронекера тождественно равны нулю*. Прямым следствием этих результатов является то, что *при нахождении абсолютной и ковариантной производных любой комбинации тензоров метрический тензор, ε-объекты и символы Кронекера можно рассматривать как постоянные*.

Для примера докажем, что тензор можно свертывать как до, так и после ковариантного дифференцирования, причем величина ковариантной производной при этом не изменяется. Сначала заметим, что операция свертки тензора по двум индексам эквивалентна умножению на δ^r_s и последующей свертке, т. е. $A^m_{rm} = \delta^p_q A^q_{rp}$. Так как с символом Кронекера при ковариантном дифференцировании можно обращаться как с постоянной, то

$$(\delta^p_q A^q_{rp})_{,s} = \delta^p_q (A^q_{rp})_{,s},$$

что и доказывает наше утверждение.

Упражнения

1. Доказать равенство

$$\frac{\delta}{\delta t}(g_{mn}X^m Y^n) = g_{mn}\frac{\delta X^m}{\delta t}Y^n + g_{mn}X^m\frac{\delta Y^n}{\delta t}.$$

2. Показать, что если $X_r = g_{rs}X^s$, то $X_{r,t} = g_{rs}X^s{}_{,t}$, и вывести, что если X^r — параллельное векторное поле, то X_r также параллельное векторное поле.

3. Показать, что поднимание и опускание индексов можно выполнять и до и после операции абсолютного и ковариантного дифференцирования.

4. Доказать равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^r}(g_{mn}X^m Y^n) = X_{m,r}Y^m + X^m Y_{m,r}.$$

5. Доказать, что если X — длина вектора X^r, то

$$X_{,r} = \frac{X_{m,r}X^m}{X}.$$

§ 5. Дивергенция и вихрь вектора. Лапласиан

Пусть дан вектор X^r; известно, что $X^r_{\cdot,s}$ — его ковариантная производная — есть смешанный тензор. Тогда мы можем образовать скаляр

$$\boxed{\Theta = X^r_{\cdot,r}.} \tag{23}$$

Теперь посмотрим, какое значение принимает Θ в декартовой системе координат. В декартовой системе ковариантная производная совпадает с обычной частной производной. Следовательно, в декартовой системе имеем равенство

$$\Theta = \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^2} + \frac{\partial X^3}{\partial x^3}.$$

Это выражение называется *дивергенцией вектора* X^r; в общей системе координат дивергенция определяется формулой (23). Если мы возьмем ассоциированный вектор X_r, то очевидно, что Θ может быть выражена эквивалентной формулой

$$\Theta = g^{mn} X_{m, n}, \tag{24}$$

которая определяет дивергенцию через ковариантные составляющие вектора.

Далее, если существует скалярная функция φ такая, что ковариантный вектор X_r определяется формулой

$$X_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} = \varphi_{, r},$$

то вектор X_r называется *градиентом* φ. В этом случае дивергенция X_r обозначается $\Delta\varphi$ и из (24) видно, что

$$\boxed{\Delta\varphi = g^{mn} \varphi_{, mn}.} \tag{25}$$

В ортогональной декартовой системе (25) переходит в

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^3)^2}.$$

Это выражение называется *лапласианом* φ. Следовательно, в произвольной системе координат лапласиан φ определяется формулой (25).

Наконец, возьмем ковариантную производную $X_{r, s}$ ковариантного вектора X_r и образуем вектор

$$\boxed{R^r = \varepsilon^{rts} X_{s, t}.} \tag{26}$$

Этот вектор называется *вихрем* или *ротором* X_r. Чтобы найти его выражение в ортогональной декартовой системе координат, заметим, что там $\varepsilon^{rst} = e^{rst}$, а ковариантные производные перейдут в частные производные. Поэтому составляющие вектора R^r выражаются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial X_3}{\partial x^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x^3}\right), \quad \left(\frac{\partial X_1}{\partial x^3} - \frac{\partial X_3}{\partial x^1}\right), \quad \left(\frac{\partial X_2}{\partial x^1} - \frac{\partial X_1}{\partial x^2}\right).$$

Следует заметить, что если X_r — градиент функции φ, то $X_{r, s} = X_{s, r}$ и мы получаем, что вихрь градиента тождественно равен нулю.

Упражнения

1. Показать, что $\Gamma_{s,\,rt}+\Gamma_{r,st}=\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t}$

2. Показать, что $\Gamma_{t,\,rs}=g_{mt}\Gamma^m_{rs}$.

§ 6. Тензор Римана — Кристоффеля. Тождества Ляме

Так как ковариантная производная тензора есть снова тензор, то можно взять его ковариантную производную. Тензор, получившийся в результате повторного дифференцирования, называется *второй ковариантной производной* тензора; очевидно, что мы можем брать ковариантные производные любого порядка.

Рассмотрим вторую ковариантную производную вектора X_r

$$X_{r,st}=\frac{\partial X_{r,\,s}}{\partial x^t}-\Gamma^m_{rt}X_{m,\,s}-\Gamma^m_{st}X_{r,\,m}=$$
$$=\frac{\partial^2 X_r}{\partial x^s\partial x^t}-\Gamma^m_{rs}\frac{\partial X_m}{\partial x^t}-\Gamma^m_{rt}\frac{\partial X_m}{\partial x^s}-\Gamma^m_{st}\frac{\partial X_r}{\partial x^m}-$$
$$-X_m\left[\frac{\partial}{\partial x^t}\Gamma^m_{rs}-\Gamma^m_{rp}\Gamma^p_{st}-\Gamma^m_{sp}\Gamma^p_{rt}\right].$$

Переставим в формуле s и t и вычтем одно выражение из другого. Пользуясь свойством симметрии символа Кристоффеля, получаем

$$X_{r,st}-X_{r,\,ts}=R^p_{\cdot rst}X_p, \tag{27}$$

где мы ввели обозначение

$$\boxed{R^p_{\cdot rst}=\frac{\partial}{\partial x^s}\Gamma^p_{rt}-\frac{\partial}{\partial x^t}\Gamma^p_{rs}+\Gamma^m_{rt}\Gamma^p_{ms}-\Gamma^m_{rs}\Gamma^p_{mt}.} \tag{28}$$

В равенстве (27) слева стоит, очевидно, тензор и поэтому справа должен быть тоже тензор. Но X_p — произвольный вектор; поэтому, пользуясь обратным тензорным признаком, получаем, что $R^p_{\cdot rst}$ — *также тензор*, который называется *тензором Римана — Кристоффеля*. Отметим, что этот тензор состоит только из g_{mn} и его производных до второго порядка включительно.

Опустим индекс p; получим ассоциированный тензор

$$R_{prst} = g_{pm} R^{m}_{\cdot rst}.$$

Найдем выражение для этого ассоциированного тензора. Мы имеем

$$g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma^m_{rt} = \frac{\partial}{\partial x^s} (g_{pm} \Gamma^m_{rt}) - \Gamma^m_{rt} \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^s} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{p,\,rt} - \Gamma^m_{rt} (\Gamma_{m,\,ps} + \Gamma_{p,\,ms}).$$

Но

$$R_{prst} = g_{pm} R^{m}_{\cdot rst} = g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma^m_{rt} - g_{pm} \frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma^m_{rs} +$$
$$+ \Gamma^m_{rt} \Gamma_{p,\,ms} - \Gamma^m_{rs} \Gamma_{p,\,mt}.$$

Используя предыдущее равенство, получаем

$$R_{prst} = \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{p,\,rt} - \frac{\partial}{\partial x^t} \Gamma_{p,\,rs} + \Gamma^m_{rs} \Gamma_{m,\,pt} - \Gamma^m_{rt} \Gamma_{m,\,ps}. \tag{29}$$

Если сюда подставить выражения для символов Кристоффеля (4), стр. 192, то (29) примет вид

$$R_{prst} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{pt}}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{\partial^2 g_{rs}}{\partial x^p \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{ps}}{\partial x^r \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{rt}}{\partial x^p \partial x^s} \right) +$$
$$+ g^{mn} (\Gamma_{m,\,rs} \Gamma_{n,\,pt} - \Gamma_{m,\,rt} \Gamma_{n,\,ps}). \tag{30}$$

Из (30) мы видим, что тензор R_{prst} удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} R_{prst} &= -R_{rpst}, \\ R_{prst} &= -R_{prts}, \\ R_{prst} &= R_{stpr}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Первые два равенства выражают тот факт, что R_{prst} *антисимметричен относительно индексов p, r, а также относительно s, t.*

Введем обозначение

$$\boxed{S^{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} R_{klmn}.} \tag{32}$$

Если умножить это равенство на $\varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jst}$ и просуммировать по i, j от 1 до 3, то вследствие свойств антисимметрии тензора R_{prst} получим

$$\varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jst}S^{ij}=\frac{1}{4}\,\delta^{kl}_{pr}\delta^{mn}_{st}\,R_{klmn}=\frac{1}{2}\,\delta^{mn}_{st}R_{prmn}=R_{prst}.$$

Таким образом,

$$R_{prst}=\varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jst}S^{ij}. \tag{33}$$

Используя последнее из равенств (31), получим

$$S^{ij}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}R_{klmn}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{jmn}R_{mnkl}=\frac{1}{4}\,\varepsilon^{jmn}\varepsilon^{ikl}R_{mnkl}=S^{ji},$$

откуда следует, что S^{ij} — *симметричный* тензор. Мы получили, что в трехмерном пространстве тензор Римана—Кристоффеля можно выразить через симметричный тензор второго порядка S^{ij}.

Вернемся к равенству (27) и посмотрим, какой вид примет это тензорное уравнение в декартовой координатной системе. Так как в этом случае ковариантная производная совпадает с частной производной, то легко видеть, что слева будет стоять выражение

$$\frac{\partial^2 X_r}{\partial x^s\,\partial x^t}-\frac{\partial^2 X_r}{\partial x^t\,\partial x^s}.$$

Но это есть тождественный нуль, так как частное дифференцирование перестановочно. Следовательно, справа тоже стоит тождественный нуль, а так как вектор X_r произволен, то

$$R^{p}_{\cdot rst}=0, \tag{34}$$

т. е. *тензор Римана—Кристоффеля есть тождественный* нуль *).

Поэтому из равенства (32) получаем, что

$$\boxed{S^{ij}=0,} \tag{35}$$

и наоборот, если S^{ij} есть тождественный нуль, то из (33) видно, что $R^{p}_{\cdot rst}$ тоже обращается в нуль.

---

*) Причиной обращения в нуль тензора Римана—Кристоффеля является то, что наше пространство—эвклидово и допускает существование декартовой координатной системы. В высшей дифференциальной геометрии мы имеем дело с более общим пространством, в котором тензор Римана—Кристоффеля в нуль не обращается.

Условий (35) — шесть, и метрический тензор g_{mn} должен им тождественно удовлетворять. Эти условия называются *тождествами Ляме*.

Упражнение

Показать, что $S^{11}=\frac{1}{g}R_{2323}$, $S^{23}=\frac{1}{g}R_{3112}$ и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XII

1. Написав в развернутом виде тензорное уравнение $g^{rs}_{\cdot\cdot,\,t}=0$, проверить, что

$$\frac{\partial g^{rs}}{\partial x^t}+g^{ms}\Gamma^r_{mt}+g^{mr}\Gamma^s_{mt}=0.$$

2. Написав в развернутом виде тензорное равенство $\varepsilon_{rst,\,p}=0$ и подставляя r, s, $t=1$, 2, 3, доказать, что

$$\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x^p}=\Gamma^m_{mp}.$$

3. Используя результаты задач 1 и 2, доказать равенство

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,g^{rs})}{\partial x^s}+\Gamma^r_{mn}g^{mn}=0.$$

4. Показать, что ковариантные составляющие вихря вектора X_r в общей системе координат равны

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_3}{\partial x^2}-\frac{\partial X_2}{\partial x^3}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x^3}-\frac{\partial X_3}{\partial x^1}\right),\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x^1}-\frac{\partial X_1}{\partial x^2}\right).$$

5. Показать, что *дивергенция* X^r есть

$$X^r_{\cdot,\,r}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}\,X^r).$$

[Эта формула очень удобна для вычислений.]

6. Показать, что *лапласиан* φ определяется формулой

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,g^{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right).$$

7. Показать, что если X^{rs} — контравариантный тензор, то

$$X^{rs}_{\cdot\cdot,\,s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^s}(\sqrt{g}\,X^{rs})+X^{mn}\Gamma^r_{mn},$$

и, кроме того, показать, что если X^{rs} антисимметричен, то второй член обращается в нуль.

8. Показать, что если R_{rs} — свернутый тензор $R^{p}_{\cdot rsp}$, то

$$R_{rs}=S_{rs}-Sg_{rs},$$

где S_{rs} — тензор, ассоциированный S^{rs}, а $S=g_{mn}S^{mn}$.
[Использовать соотношение $g^{mn}\varepsilon_{mpr}\varepsilon_{nst}=g_{ps}g_{rt}-g_{pt}g_{rs}$.]

9. *Ортогональные криволинейные координаты*

Показать, что в этом случае имеют место равенства:

а) $g_{mn}=g^{mn}=0\ (m\neq n),\quad g^{11}=\dfrac{1}{g_{11}},\quad g^{22}=\dfrac{1}{g_{22}},\quad g^{33}=\dfrac{1}{g_{33}}$.

б) Если положить $g_{11}=h_1^2$, $g_{22}=h_2^2$, $g_{33}=h_3^2$, то $ds^2=$ $=h_1^2(dx^1)^2+h_2^2(dx^2)^2+h_3^2(dx^3)^2$.

в) $\Gamma_{k,ij}=0,\quad \Gamma_{i,ij}=-\Gamma_{j,ii}=h_i\dfrac{\partial h_i}{\partial x^j},\quad \Gamma_{i,ii}=h_i\dfrac{\partial h_i}{\partial x^i}$.

г) $\Gamma^k_{ij}=0,\quad \Gamma^j_{ii}=-\dfrac{h_i}{h_j^2}\dfrac{\partial h_i}{\partial x^j},\quad \Gamma^i_{ij}=\dfrac{\partial \log h_i}{\partial x^j},\quad \Gamma^i_{ii}=\dfrac{\partial \log h_i}{\partial x^i}$.

д) $$\Delta\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right].$$

е) $$S^{ii}=-\frac{1}{h_i^2h_jh_k}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_k}{\partial x^j}\right)+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial x^k}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h_i^2}\frac{\partial h_j}{\partial x^i}\frac{\partial h_k}{\partial x^i}\right],$$

$$S^{ij}=\frac{1}{h_i^2h_j^2h_k}\left[\frac{\partial^2 h_k}{\partial x^i\,\partial x^j}-\frac{\partial h_k}{\partial x^i}\frac{\partial\log h_i}{\partial x^j}-\frac{\partial h_k}{\partial x^j}\frac{\partial\log h_j}{\partial x^i}\right].$$

Заметим, что на вышенаписанные формулы условие о суммировании не распространяется, а в формулах в), г) и е) i, j, k обязательно не равны друг другу.

10. Написать формулы упражнения 9 в *сферических координатах* [в этом случае $h_1=1$, $h_2=x^1$, $h_3=x^1\sin x^2$].

11. Написать формулы упражнения 9 *в цилиндрических координатах* [в этом случае $h_1=1$, $h_2=x^1$, $h_3=1$].

ГЛАВА XIII

КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Касательный вектор кривой

Пространственная кривая есть геометрическое место точек, координаты которых являются функциями одного параметра. Таким образом, координаты точки на кривой C определяются равенствами типа

$$x^r = x^r(t). \tag{1}$$

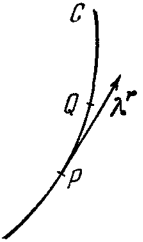

Рис. 21.

Из (7) (стр. 184) видно, что длина дуги s кривой удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}$$

и, следовательно, длина дуги s определяется интегралом

$$\boxed{s = \int\limits_{t_0}^{t}\left(g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}dt.} \tag{2}$$

Возьмем s в качестве параметра вдоль C; тогда получим

$$g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} = 1, \tag{3}$$

откуда видно, что $\frac{dx^r}{ds}$ есть единичный вектор.

Пусть P — точка на кривой C (рис. 21) и x^r — ее координаты, Q — соседняя точка, тоже лежащая на C и соответствующая возрастанию длины дуги на ds; тогда ее координаты равны x^r+dx^r. Вектор $\lim \frac{\overrightarrow{PQ}}{ds}$ называется *касательным вектором*; мы обозначим его через λ^r. Таким образом,

$$\boxed{\frac{dx^r}{ds}=\lambda^r,} \tag{4}$$

причем из (3) видно, что λ^r — *единичный вектор касательной к кривой* C.

§ 2. Нормальный вектор. Главная нормаль и бинормаль

Любой вектор, ортогональный к касательному вектору, называют нормальным вектором кривой. Следовательно, условием того, что μ^r есть нормаль к C, является

$$g_{mn}\lambda^m\mu^n=0. \tag{5}$$

Так как λ^r — единичный вектор, то

$$g_{mn}\lambda^m\lambda^n=1,$$

и если мы возьмем отсюда абсолютную производную, то получим

$$g_{mn}\lambda^m\frac{\delta\lambda^n}{\delta s}=0.$$

Это показывает, что вектор $\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}$ нормален к кривой. Обозначим *единичный* вектор направления $\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}$ через μ^r. Тогда

$$\boxed{\mu^r=\frac{1}{\varkappa}\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}\quad(\varkappa>0),} \tag{6}$$

где $\varkappa$ выбрано так, чтобы μ^r был единичным вектором. Этот нормальный вектор называется *главной нормалью кривой* C, а $\varkappa$ — ее *кривизной* в рассматриваемой точке.

Далее, так как μ^r есть единичный вектор, то совершенно таким же образом, как для λ^r, доказывается, что его абсолютная производная $\frac{\delta\mu^r}{\delta s}$ ортогональна к μ^r. Если мы возьмем от обеих частей равенства (5) абсолютные производные по s, то получим

$$g_{mn}\frac{\delta\lambda^m}{\delta s}\mu^n + g_{mn}\lambda^m\frac{\delta\mu^n}{\delta s} = 0$$

или

$$g_{mn}\lambda^m\frac{\delta\mu^n}{\delta s} = -g_{mn}\frac{\delta\lambda^m}{\delta s}\mu^n = -\varkappa g_{mn}\mu^m\mu^n = -\varkappa.$$

Это равенство можно переписать так:

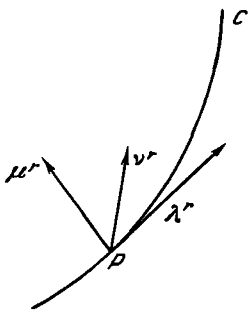

Рис. 22.

$$g_{mn}\lambda^m\left(\frac{\delta\mu^n}{\delta s} + \varkappa\lambda^n\right) = 0,$$

откуда видно, что вектор

$$\left(\frac{\delta\mu^r}{\delta s} + \varkappa\lambda^r\right)$$

ортогонален к λ^r. Но, кроме того, мы имеем равенство

$$g_{mn}\mu^m\left(\frac{\delta\mu^n}{\delta s} + \varkappa\lambda^n\right) = 0,$$

из которого следует, что $\frac{\delta\mu^n}{\delta s} + \varkappa\lambda^n$ ортогонален также к μ^r. Поэтому *единичный* вектор ν^r, определяемый равенством

$$\boxed{\nu^r = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\delta\mu^r}{\delta s} + \varkappa\lambda^r\right),} \tag{7}$$

ортогонален и к λ^r и к μ^r. Величина τ выбрана так, чтобы ν^r был единичным вектором. Таким образом, мы видим, что λ^r, μ^r, ν^r образуют взаимно ортогональную тройку векторов. Знак τ не всегда положителен и выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_{ijk}\lambda^i\mu^j\nu^k = 1. \tag{8}$$

Другими словами, векторы λ^r, μ^r, ν^r должны образовывать *положительно ориентированную или правую тройку* (см. стр. 171).

Вектор ν^r называется *бинормалью* кривой C в рассматриваемой точке, а τ — *кручением* кривой.

Упражнения

1. Доказать, что $\varkappa = \left(g_{mn} \frac{\delta\lambda^m}{\delta s} \frac{\delta\lambda^n}{\delta s} \right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Доказать, что $\tau = \varepsilon_{rst} \lambda^r \mu^s \frac{\delta\mu^t}{\delta s}$.

3. Показать, что $\nu^r = \varepsilon^{rmn} \lambda_m \mu_n$, где λ_r, μ_r — векторы, ассоциированные с λ^r и μ^r.

4. Показать, что $\mu_r = \frac{1}{\varkappa} \frac{\delta\lambda_r}{\delta s}$, $\nu_r = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\delta\mu_r}{\delta s} + \varkappa\lambda_r \right)$.

§ 3. Формулы Френе

Поскольку ν^r перпендикулярен к λ^r и μ^r и удовлетворяет условию (8), то легко показать, что

$$\nu^r = \varepsilon^{rmn} \lambda_m \mu_n;$$

следовательно,

$$\frac{\delta\nu^r}{\delta s} = \varepsilon^{rmn} \frac{\delta\lambda_m}{\delta s} \mu_n + \varepsilon^{rmn} \lambda_m \frac{\delta\mu_n}{\delta s}. \tag{9}$$

Если в (6) и (7) опустить индексы и разрешить эти уравнения относительно $\frac{\delta\lambda_r}{\delta s}$ и $\frac{\delta\mu_r}{\delta s}$, то будет

$$\frac{\delta\lambda_r}{\delta s} = \varkappa\mu_r, \qquad \frac{\delta\mu_r}{\delta s} = \tau\nu_r - \varkappa\lambda_r.$$

Подставляя эти величины в (9), получим

$$\frac{\delta\nu^r}{\delta s} = \varepsilon^{rmn} \varkappa\mu_m\mu_n + \varepsilon^{rmn} \lambda_m (\tau\nu_n - \varkappa\lambda_n) = \tau\varepsilon^{rmn} \lambda_m \nu_n = -\tau\mu^r.$$

Сопоставляя эти последние формулы с (6) и (7), мы получим следующие равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}&=\varkappa\mu^r,\\ \frac{\delta\mu^r}{\delta s}&=\tau\nu^r-\varkappa\lambda^r,\\ \frac{\delta\nu^r}{\delta s}&=-\tau\mu^r.\end{aligned}} \tag{10}$$

Это — *формулы Френе*; они связывают $\varkappa$, τ, λ^r, μ^r, ν^r.

Упражнения

1. *Используя цилиндрические координаты, доказать, что кривизна окружности* $x^1=a$, $x^2=t$, $x^3=0$ равна $1/a$.

В цилиндрических координатах $ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(dx^3)^2$ и можно показать, что отличны от нуля только следующие символы Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{22}=-x^1,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{x_1}.$$

Касательный вектор окружности $x^1=a$, $x^2=t$, $x^3=0$ есть

$$\lambda^r\equiv\frac{dx^r}{ds}=\left(0,\ \frac{dt}{ds},\ 0\right);$$

он должен удовлетворять равенству $g_{mn}\lambda^m\lambda^n=1$ во всех точках кривой, откуда $g_{mn}\lambda^m\lambda^n=(x^1)^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=a^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1$, $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{a}$. Первая из формул Френе дает нам

$$\varkappa\mu^1=\frac{\delta\lambda^1}{\delta s}=\frac{d\lambda^1}{ds}+\Gamma^1_{mn}\lambda^m\frac{dx^n}{ds}=\Gamma^1_{22}\lambda^2\frac{dx^2}{ds}=-\frac{1}{a},$$

$$\varkappa\mu^2=\frac{\delta\lambda^2}{\delta s}=\frac{d\lambda^2}{ds}+\Gamma^2_{mn}\lambda^m\frac{dx^n}{ds}=\Gamma^2_{21}\lambda^2\frac{dx^1}{ds}=0,$$

$$\varkappa\mu^3=\frac{\delta\lambda^3}{\delta s}=\frac{d\lambda^3}{ds}+\Gamma^3_{mn}\lambda^m\frac{dx^n}{ds}=0.$$

Так как μ^r — единичный вектор, то $\varkappa^2=g_{mn}(\varkappa\mu^m)(\varkappa\mu^n)=\frac{1}{a^2}$.

Итак, мы получили, что $\varkappa=\frac{1}{a}$ и $\mu^r\equiv(-1,\ 0,\ 0)$.

2. В задаче 1 показать, что $\tau=0$ и $\nu^r\equiv(0,\ 0,\ 1)$.

3. Показать, что $\varkappa\nu_r=\varepsilon_{rst}\lambda^s\frac{\delta\lambda^t}{\delta s}$.

§ 4. Уравнение прямой

Если вектор X^r определен вдоль кривой, то его составляющие должны быть заданными функциями от длины дуги кривой s. Мы видели, что если X^r — параллельное векторное поле, заданное вдоль кривой, то оно должно удовлетворять тензорному равенству

$$\frac{\delta X^r}{\delta s}=\frac{dX^r}{ds}+\Gamma^r_{mn}X^m\frac{dx^n}{ds}=0. \tag{11}$$

Его ковариантные составляющие X_r удовлетворяют аналогичному тензорному уравнению

$$\frac{\delta X_r}{\delta s}=\frac{dX_r}{ds}-\Gamma^m_{rn}X_m\frac{dx^n}{ds}=0. \tag{12}$$

Мы можем использовать этот результат для получения уравнения прямой линии в любой криволинейной системе координат.

Касательный вектор прямой всегда имеет одно и то же направление, т. е. он образует параллельное векторное поле и должен удовлетворять (11). Но единичный касательный вектор есть

$$\lambda^r\equiv\frac{dx^r}{ds}.$$

Следовательно, *уравнение прямой линии* будет

$$\boxed{\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}=\frac{d^2x_r}{ds^2}+\Gamma^r_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}=0.} \tag{13}$$

Мы можем получить это уравнение и другим способом, заметив, что (13) есть тензорное равенство и в декартовой системе координат переходит в $\frac{d^2x^r}{ds^2}=0$, что и является уравнением прямой линии в таких координатах.

Из формул Френе следует, что (13) просто выражает факт равенства кривизны нулю, т. е. что *прямая имеет нулевую кривизну*. Это является характерным свойством прямой.

Упражнения

1. *Положив* $\Phi = g_{mn}x'^m x'^n$, где $x'^r \equiv \dfrac{dx^r}{ds}$, *доказать, что уравнение прямой можно записать в виде*

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'^r}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial x^r} = 0. \qquad (\alpha)$$

Здесь штрихом обозначена производная по s. Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'^r} = \frac{\partial}{\partial x'^r}(g_{mn}x'^m x'^n) = 2g_{rm}x'^m.$$

Поэтому

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'^r}\right) = 2g_{rm}x''^m + 2\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n}x'^m x'^n$$

и

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^r} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}x'^m x'^n.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\Phi}{dx'^r}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial x^r} = 2g_{rp}x''^p + 2\Gamma_{r,\,mn}x'^m x'^n =$$
$$= 2g_{rp}(x''^p + \Gamma^p_{mn}x'^m x'^n).$$

Но уравнение прямой есть

$$x''^p + \Gamma^p_{mn}x'^m x'^n = 0.$$

Следовательно, наша теорема доказана.

Этот результат иногда бывает полезен при вычислении символов Γ^r_{mn}. Если развернуть уравнение (α) и разрешить его относительно x''^r, то мы увидим, что с правой стороны равенства получится $-\Gamma^r_{mn}x'^m x'^n$.

Другими словами, символы, которые мы хотим вычислить, являются коэффициентами квадратичной формы от x'^r.

2. Используя метод, разработанный в задаче 1, найти символы Кристоффеля для цилиндрической и сферической систем координат.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIII

1. Доказать, что $\dfrac{\delta^2\lambda^r}{\delta s^2} = \dfrac{d\varkappa}{ds}\mu^r + \varkappa(\tau\nu^r - \varkappa\lambda^r)$.

2. Доказать, что $\tau = \dfrac{1}{\varkappa^2}\varepsilon_{rst}\lambda^r\dfrac{\delta\lambda^s}{\delta s}\dfrac{\delta^2\lambda^t}{\delta s^2}$.

3. Вывести формулы

$$\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}=\frac{d\tau}{ds}\nu^r-(\varkappa^2+\tau^2)\mu^r-\frac{d\varkappa}{ds}\lambda^r, \qquad \frac{\delta^2\nu^r}{\delta s^2}=\tau(\varkappa\lambda^r-\tau\nu^r)-\frac{d\tau}{ds}\mu^r.$$

4. Доказать, что

$$\varepsilon_{rst}\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}\frac{\delta^2\lambda^s}{\delta s^2}\frac{\delta^3\lambda^t}{\delta s^3}=\varkappa^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right),$$

$$\varepsilon_{rst}\frac{\delta\nu^r}{\delta s}\frac{\delta^2\nu^s}{\delta s^2}\frac{\delta^3\nu^t}{\delta s^3}=\tau^5\frac{d}{ds}\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right).$$

5. Найти кривизну и кручение кривой $x^1=a$, $x^2=t$, $x^3=ct$, где $ds^2=(dx^1)^2+(x^1\,dx^2)^2+(dx^3)^2$. Это — *винтовая линия в цилиндрической системе координат*.

6. Доказать, что касательный вектор в упражнении 5 в каждой точке кривой составляет постоянный угол с вектором (0, 0, 1).

7. Доказать, что если $(a\lambda^r+b\mu^r+c\nu^r)$ образует параллельное векторное поле вдоль кривой C, то

$$\frac{da}{ds}-\varkappa b=0, \qquad \frac{db}{ds}+\varkappa a-\tau c=0, \qquad \frac{dc}{ds}+\tau b=0.$$

8. Если на кривой и касательной к ней в точке P взяты близкие к ним точки Q и R, находящиеся от P на малом расстоянии s, то

$$\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{s}\right)\to\varkappa\mu^r.$$

9. Доказать, что если две кривые C и C' имеют одну и ту же касательную в точке P и две точки Q и R на этих кривых взяты так, что соответствующие длины дуг равны s, то

$$\left(\frac{\overrightarrow{QR}}{s}\right)\to\varkappa\mu^r-\varkappa'\mu'^r, \qquad \left(\frac{QR}{s}\right)^2\to\varkappa^2+\varkappa'^2-2\varkappa\varkappa'\cos\theta,$$

где θ — угол между главными нормалями кривых.

10. Пусть кривая C проведена из точки P в точку Q, и пусть $\overline{C}$ — слегка измененная кривая, так что ее координаты в каждой точке отличаются от координат соответствующей точки кривой C на бесконечно малый вектор η^r. Доказать, что длины дуг кривых отличаются приблизительно на

$$\delta L=[\lambda_r\eta^r]_P^Q-\int_P^Q\varkappa\mu_r\eta^r\,ds.$$

11. Используя результаты задачи 10, вывести, что если C — кривая, длина дуги которой является стационарной для всех кривых, проходящих через P и Q, то $\varkappa=0$ и C — прямая.

ГЛАВА XIV

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Криволинейные координаты на поверхности

Пусть (y^1, y^2, y^3), как и прежде, — декартовы координаты точки. По определению, *поверхность* есть геометрическое место точек, координаты которых являются функциями двух независимых параметров. Таким образом, уравнения поверхности будут

$$y^r = y^r(u^1, u^2) \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где u^1, u^2 — параметры. Другими словами, любая точка на поверхности однозначно определяется двумя числами u^1, u^2; следовательно, мы можем назвать эти величины *координатами точки на поверхности*. При этом нужно помнить, что 1 и 2 — индексы, означающие различные координаты, а не показатели степени.

Рассмотрим геометрический смысл координат (u^1, u^2). Если зафиксировать u^2 и изменять только u^1, то точка (1), как зависящая лишь от одного параметра, опишет некоторую кривую (рис. 23). Кроме того, эта кривая целиком лежит на поверхности. Если мы будем придавать u^2 различные значения, то получим семейство кривых на поверхности. Эти кривые мы назовем *u^1-кривыми*, так как вдоль них меняется только один параметр u^1; уравнение этого семейства есть $u^2 = \text{const}$; следовательно, если мы говорим, что точка P имеет координату u_0^2, то это означает, что P лежит на определенной u^1-кривой, а именно $u^2 = u_0^2$.

Таким же образом получим другое семейство кривых $u^1 = \text{const}$, вдоль которых изменяется только u^2; эти кривые назовем *u^2-кривыми*. Легко видеть, что каждая точка поверхности определяется как пересечение двух кривых, принадлежащих разным семействам. С геометрической точки зрения координаты (u^1, u^2) определяют две кривые, по одной из каждого семейства, которые проходят через эту точку. В дальнейшем для краткости будем называть u^1- и u^2-кривые *координатными кривыми*, а u^1, u^2 — системой *криволинейных координат на поверхности*.

Все свойства поверхности, которые можно описать, не обращаясь к окружающему пространству, называются *внутренними свойствами поверхности*, а их описание составляет содержание *внутренней геометрии поверхности*. Этой геометрией мы и собираемся заниматься в настоящей главе; мы увидим, что для этой цели криволинейные координаты (u^1,u^2)—наиболее удобная система координат.

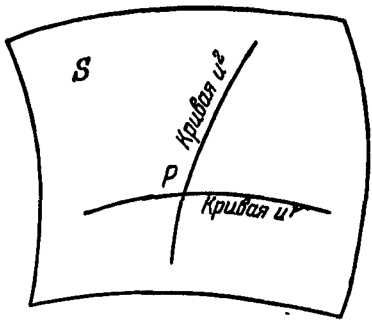

Рис. 23.

Очевидно, существует бесконечно много возможных координатных систем, посредством которых можно определить точки на поверхности. Действительно, мы можем взять в качестве координатных кривых любые два семейства, которые удовлетворяют следующему условию: каждая кривая из одного семейства пересекает каждую кривую другого семейства в одной и только одной точке. Если $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$—другая координатная система на поверхности, то $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$ являются функциями только u^1, u^2, и обратно, т. е. существует функциональное преобразование вида

$$\bar{u}^1 = f(u^1, u^2), \qquad \bar{u}^2 = f(u^1, u^2), \tag{2}$$

причем это преобразование обратимо:

$$u^1 = \varphi^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \qquad u^2 = \varphi^2(u^1, \bar{u}^2). \tag{3}$$

Упражнения

1. Показать, что поверхность $y^3 = f(y^1, y^2)$ можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$y^1 = u^1, \quad y^2 = u^2, \quad y^3 = f(u^1, u^2).$$

Каковы координатные кривые?

2. Показать, что

$$\frac{y^1}{a} = \frac{u^1 + u^2}{1 + u^1u^2}, \quad \frac{y^2}{b} = \frac{1 - u^1u^2}{1 + u^1u^2}, \quad \frac{y^3}{c} = \frac{u^1 - u^2}{1 + u^1u^2}$$

— уравнения однополостного гиперболоида и что его образующие являются координатными кривыми.

§ 2. Введение греческих индексов. Тензоры на поверхности

Мы видели, что криволинейных координат на поверхности две, и поэтому мы имели дело с двумя переменными (u^1, u^2). До настоящего времени для обозначения переменных, которых было три, мы использовали *латинские индексы*, причем у нас были два условия относительно этих индексов, а именно: свободный индекс пробегал значения от 1 до 3; немой индекс означал суммирование от 1 до 3. Оказывается удобным применять индексные обозначения и для новых переменных (u^1, u^2); чтобы не менять ничего в обозначениях с латинскими индексами, мы для этой цели будем применять *греческие индексы*. Тогда наши переменные можно записать так:

$$u^\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \tag{4}$$

Введем два условия, касающиеся *греческих индексов*.

Повторяющийся или немой греческий индекс означает суммирование от 1 до 2.

Неповторяющийся или свободный индекс пробегает значения от 1 до 2.

Нетрудно видеть, что все сказанное в главе I можно теперь повторить с небольшими изменениями применительно к греческим индексам. Например, объект второго порядка будет теперь обозначаться через $a_{\alpha\beta}$ и будет состоять из расположенных в некотором порядке чисел

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, \\ a_{21}, & a_{22}. \end{matrix}$$

Как и раньше, получим

$$a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \equiv a_{11}(u^1)^2 + a_{12}u^1u^2 + a_{21}u^2u^1 + a_{22}(u^2)^2.$$

Антисимметричные e-объекты в греческих индексах будут объектами второго порядка, именно $e_{\alpha\beta}$ и $e^{\alpha\beta}$, определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} &e_{11} = e_{22} = 0, \qquad e_{12} = -e_{21} = 1, \\ &e^{11} = e^{22} = 0, \qquad e^{12} = -e^{21} = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Существуют два символа Кронекера, определяемых так:

$$\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = e^{\alpha\beta}e_{\lambda\mu}, \qquad \delta^{\alpha}_{\lambda} = \delta^{\alpha\beta}_{\lambda\beta}. \tag{6}$$

Первый символ равен нулю, если комбинации α, β и λ, μ не являются перестановками чисел 1, 2; в остальных случаях он равен $+1$, если перестановки одинаковы, и -1, если перестановки разные. Второй символ имеет обычные свойства, т. е. равен нулю, если α и β не равны друг другу, и равен 1, если α и β одинаковы. Читатель может сам развить теорию определителей второго порядка аналогично тому, как это делалось в главе I.

Преобразования (2) и (3) можно для краткости переписать в виде

$$\bar{u}^\alpha = f^\alpha(u^1, u^2), \; u^\alpha = \varphi^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2). \tag{7}$$

Следовательно, мы можем построить теорию тензоров любого порядка относительно преобразований этих переменных. Она совершенно аналогична теории тензоров в переменных x^r. Например, объект третьего порядка $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ будет *псевдотензором веса M, контравариантным по* α *и ковариантным по* β и γ, если его составляющие в новых переменных $\bar{a}^{\varrho}_{\sigma\tau}$ удовлетворяют соотношению

$$\bar{a}^{\varrho}_{\sigma,\tau} = \left|\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\nu}\right|^M \frac{\partial \bar{u}^\varrho}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\sigma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\tau} a^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{8}$$

Теоремы тензорной алгебры, доказанные в главе II (стр. 36), конечно, справедливы и здесь; справедливо также приведенное выше замечание о тензорных полях (стр. 182). Если в (8) $M=0$, то тензор $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ называется, как и прежде, *истинным*; этот класс тензоров является для нас наиболее важным

Если мы захотим ввести для тензоров с *греческими* и *латинскими* индексами различные термины, то мы можем называть первые *тензорами на поверхности*, так как они являются тензорами относительно преобразования поверхностных координат, а вторые *пространственными тензорами*, так как они являются тензорами относительно преобразований пространственных координат.

Упражнения

1. Показать, что определитель $a \equiv |a_{\alpha\beta}|$ удовлетворяет равенству

$$e^{\gamma\delta}a_{\gamma\alpha}a_{\delta\beta} = e^{\gamma\delta}a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} = ae_{\alpha\beta}.$$

2. Используя результат задачи 1, получить формулу

$$2!\, a = e^{\alpha\gamma}e^{\beta\delta}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}.$$

3. Показать, что дополнение элементов $a_{\alpha\beta}$ в $|a_{\alpha\beta}|$ есть

$$A^{\alpha\beta} = e^{\alpha\gamma}e^{\beta\delta}a_{\gamma\delta}.$$

4. Доказать, что

$$e_{\alpha\beta} = \left|\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\nu}}\right|^{-1} \frac{\partial u^{\varrho}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\beta}} e_{\varrho\sigma},$$

$$e^{\alpha\beta} = \left|\frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\nu}}\right| \frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\varrho}} \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\sigma}} e^{\varrho\sigma}$$

и, следовательно, что $e_{\alpha\beta}$, $e^{\alpha\beta}$ — псевдотензоры веса -1 и $+1$ соответственно.

5. Используя результаты задач 2, 3, 4, показать, что если $a_{\alpha\beta}$ — истинный тензор, то a — псевдоскаляр, $A^{\alpha\beta}$ — псевдотензор, оба веса 2 и, следовательно, $A^{\alpha\beta}$, разделенное на a, — истинный тензор.

§ 3. Элемент длины и метрический тензор

Пусть P — точка на поверхности с координатами u^{α} и Q — соседняя с ней точка с координатами $u^{\alpha} + du^{\alpha}$. Обозначим через y^r и $y^r + dy^r$ декартовы координаты точек P и Q в пространстве. Тогда из уравнений (1) стр. 218 имеем

$$dy^r = \frac{\partial y^r}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha}. \tag{9}$$

Пусть ds — расстояние между P и Q; тогда

$$ds^2 = \sum_1^3 (dy^r)^2.$$

Используя (9), получаем

$$\boxed{ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,} \tag{10}$$

где введено обозначение

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^r}{\partial u^\alpha} \frac{\partial y^r}{\partial u^\beta} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial y^r}{\partial u^\alpha} \frac{\partial y^r}{\partial u^\beta}. \tag{11}$$

Отсюда видно, что $a_{\alpha\beta}$ есть функция координат u^α, *симметричная* относительно своих индексов. Так как ds — скаляр, то из (10) следует, что $a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$ — тоже скаляр, а du^α — произвольный контравариантный вектор. Поэтому из обратного тензорного признака следует, что $a_{\alpha\beta}$ — *ковариантный тензор второго порядка*, который мы называем *фундаментальным* или *метрическим тензором*, так как длина элемента дуги на поверхности определяется формулой (10).

Если мы обозначим через a определитель $|a_{\alpha\beta}|$ и через $a^{\alpha\beta}$ дополнение $a_{\alpha\beta}$ в a, деленное на a, то совершенно так же, как и на стр. 185, можно доказать, что $a_{\alpha\beta}$ есть *контравариантный тензор, причем*

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{12}$$

Если мы построим объекты

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\alpha\beta},} \tag{13}$$

то они тоже будут тензорами, которые мы назовем *ε-объектами*.

Длину или *модуль* A контравариантного вектора A^α мы определим равенством

$$\boxed{A = (a_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta)^{\frac{1}{2}}.} \tag{14}$$

Аналогично этому модуль ковариантного вектора B_α определим так:

$$B = (a^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице, и следовательно, λ^α есть единичный вектор, если он удовлетворяет равенству

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1. \tag{16}$$

Разделив (10) на ds^2, получим

$$a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = 1; \tag{17}$$

таким образом, $\frac{du^\alpha}{ds}$ *есть единичный вектор.*

С помощью тензоров $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$ можно, как и раньше, поднимать и опускать индексы; операции поднятия и опускания индексов подчинены тем же законам, что и в случае пространственных тензоров.

Упражнения

Показать, что для следующих поверхностей ds^2 имеет указанный ниже вид.

1. Поверхность $y^1 = u^1$, $y^2 = u^2$, $y^3 = f(u^1, u^2)$;

$$ds^2 = (1 + f_1^2)(du^1)^2 + 2f_1 f_2\, du^1\, du^2 + (1 + f_2^2)(du^2)^2,$$

где

$$f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

2. Сфера $y^1 = a\cos u^1 \cos u^2$, $y^2 = a\cos u^1 \sin u^2$, $y^3 = a\sin u^1$;

$$ds^2 = a^2 (du^1)^2 + a^2 (\cos u^1)^2 (du^2)^2.$$

3. *Круговой цилиндр* $y^1 = a\cos u^1$, $y^2 = a\sin u^1$, $y^3 = u^2$;

$$ds^2 = a^2 (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

4. Поверхность $y^1 = u^1 \cos u^2$, $y^2 = u^1 \sin u^2$, $y^3 = 0$;

$$ds^2 = (du^1)^2 + (u^1 du^2)^2.$$

Эта поверхность есть плоскость $y^3 = 0$, а координаты на ней — полярные координаты.]

§ 4. Направления на поверхности. Угол между двумя направлениями

Разделим (9) на ds; получим

$$\frac{dy^r}{ds} = \frac{\partial y^r}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds}. \tag{18}$$

Мы знаем, что направление PQ в декартовых координатах определяется вектором $\frac{dy^r}{ds}$, а из (18) видно, что $\frac{dy^r}{ds}$ задано, если $\frac{du^\alpha}{ds}$ задано. Следовательно, *направление PQ на поверхности вполне определяется единичным вектором* $\frac{du^\alpha}{ds}$. Но если дан какой-либо единичный контравариантный вектор λ^α, то мы всегда можем выбрать $\frac{du^\alpha}{ds}$ так, чтобы было

$$\frac{du^\alpha}{ds} = \lambda^\alpha. \tag{19}$$

Отсюда вытекает, что *каждый единичный вектор λ^α определяет на поверхности единственное направление*. Так как любой контравариантный вектор A^α определяется своей длиной — скаляром A и единичным вектором на поверхности A^α/A, то каждый контравариантный вектор на поверхности определяет направление на ней.

Далее, рассмотрим два направления на поверхности в точке P, определяемых векторами $\frac{du^\alpha}{ds}$, $\frac{\delta u^\alpha}{\delta s}$. Соответствующие пространственные векторы в декартовых координатах будут

$$\frac{dy^r}{ds} = \frac{\partial y^r}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds}, \quad \frac{\delta y^r}{\delta s} = \frac{\partial y^r}{\partial u^\beta} \frac{\delta u^\beta}{\delta s}. \tag{20}$$

Как мы знаем, угол θ между двумя направлениями определяется так:

$$\cos\theta = \frac{dy^r}{ds} \frac{\delta y^r}{\delta s} = \sum_{r=1}^{3} \frac{dy^r}{ds} \frac{\delta y^r}{\delta s}.$$

Следовательно, подставляя сюда значения для $\frac{dy^r}{ds}$ и $\frac{\delta y^r}{\delta s}$ и вспоминая определение тензора $a_{\alpha\beta}$, получаем

$$\cos\theta = a_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{\delta u^\beta}{\delta s}. \tag{21}$$

Если λ^α и μ^α (рис. 24) — два единичных вектора, то два направления, определяемых ими, будут

$$\frac{du^\alpha}{ds} = \lambda^\alpha, \quad \frac{\delta u^\alpha}{\delta s} = \mu^\alpha.$$

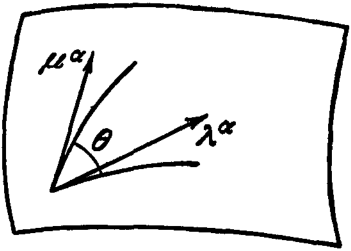

Рис. 24.

Поэтому мы получаем, что *угол θ между направлениями λ^α и μ^α определяется формулой*

$$\boxed{\cos\theta = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta.} \tag{22}$$

Эти направления будут ортогональны, если $\theta = \frac{\pi}{2}$, следовательно, *условие ортогональности направлений λ^α и μ^α есть*

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = 0. \tag{23}$$

Теперь возьмем направление ν^α, определяемое равенством

$$\nu^\alpha = \varepsilon^{\beta\alpha}\lambda_\beta, \tag{24}$$

где λ_α — вектор, ассоциированный с единичным вектором λ^α; тогда

$$a_{\alpha\gamma}\nu^\alpha\nu^\gamma = a_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\alpha}\varepsilon^{\delta\gamma}\lambda_\beta\lambda_\delta,$$

а так как

$$a_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\alpha}\varepsilon^{\delta\gamma} = \frac{1}{a}a_{\alpha\gamma}e^{\beta\alpha}e^{\delta\gamma} = a^{\beta\delta}$$

то

$$a_{\alpha\gamma}\nu^\alpha\nu^\gamma = a^{\beta\delta}\lambda_\beta\lambda_\delta = a_{\beta\delta}\lambda^\beta\lambda^\delta = 1,$$

откуда видно, что (24) — единичный вектор. Кроме того,

$$a_{\alpha\gamma}\nu^\alpha\lambda^\gamma = a_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\alpha}\lambda_\beta\lambda^\gamma = e^{\beta\alpha}\lambda_\beta\lambda_\alpha = 0$$

и, следовательно, ν^α *ортогонален* к λ^α. Если умножить (24) на ν_α и просуммировать от 1 до 2, то

$$1=\varepsilon^{\beta\alpha}\lambda_\beta\nu_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\nu^\beta,$$

откуда видно, что скаляр $\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\nu^\beta$ положителен. Но

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta=-\varepsilon_{\alpha\beta}\mu^\alpha\lambda^\beta, \tag{25}$$

где λ^α и μ^α — любые два единичных вектора. Поэтому условимся, что *поворот от* λ^α *к* μ^α *положителен, если скаляр* $\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta$ *положителен*. Следовательно, вектор (24) таков, что поворот от λ^α к ν^α положителен.

Упражнения

1. *Показать, что если взять единичные векторы* $\varepsilon^\alpha_{(1)}$ *и* $\varepsilon^\alpha_{(2)}$ *в направлении координатных кривых, то*

$$\varepsilon^\alpha_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\delta^\alpha_1,\quad \varepsilon^\alpha_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\delta^\alpha_2.$$

Вдоль координатной кривой $u^2=\text{const}$ $du^2=0$; поэтому элемент длины вдоль нее определяется выражением $ds^2=a_{11}(du^1)^2$. Следовательно, единичный вектор есть

$$\varepsilon^\alpha_{(1)}\equiv\left(\frac{du^1}{ds},\ \frac{du^2}{ds}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\ 0\right)=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\delta^\alpha_1,$$

и совершенно то же самое имеет место для $\varepsilon^\alpha_{(2)}$.

2. *Показать, что если* λ^α и μ^α — *два единичных вектора таких, что поворот от* λ^α *к* μ^α *положителен*, то

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta=\sin\theta.$$

3. Показать, что если ω — угол между координатными кривыми, то

$$\cos\omega=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}},$$

откуда следует, что *условие ортогональности координатных кривых есть* $a_{12}=0$; в этом случае координаты называются *ортогональными криволинейными координатами*.

4. Показать, что поворот от u^1-*кривой* к u^2-*кривой* положителен и что $\sin\omega=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}a_{12}}}$.

5. *Элемент площади.* Доказать, что элемент площади dS на поверхности определяется формулой $dS=\sqrt{a}\,du^1\,du^2$.

[Если взять малые расстояния ds_1 и ds_2 вдоль координатных кривых, то $dS = ds_1\, ds_2 \sin\omega$; далее, мы знаем, что $ds_1 = \sqrt{a_{11}}\, du^1$, $ds_2 = \sqrt{a_{22}}\, du^2$.]

§ 5. Геодезические кривые

Любая кривая на поверхности определяется заданием координат u^α в функции от одного параметра t. Поэтому уравнение кривой имеет вид

$$u^\alpha = f^\alpha(t). \tag{26}$$

Будем обозначать дифференцирование по t точкой. Тогда длина кривой между точками A и B есть

$$\boxed{L = \int\limits_A^B (a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta)^{1/2}\, dt.} \tag{27}$$

Рассмотрим кривые, проходящие через две фиксированные точки A и B. Среди всех этих кривых существует одна и только одна кривая наименьшей длины. Эта кривая называется *геодезической между точками A и B*. Если наша поверхность является плоскостью, то геодезическая линия есть прямая. Нашей задачей является отыскание уравнения геодезической линии, проходящей через точки A и B.

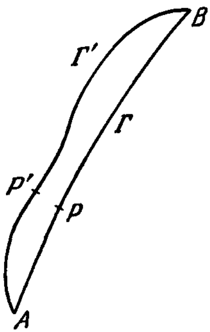

Рис. 25.

Обозначим буквой Γ геодезическую линию, проходящую через A и B, и возьмем соседнюю с ней кривую Γ′, тоже проходящую через A и B. Поставим в соответствие точкам Γ точки Γ′ таким образом, что если P с координатами u^α и P' с координатами u'^α будут соответственные точки, то PP' — малый вектор. Этот вектор можно записать в виде $\varepsilon\omega^\alpha$, где ε — бесконечно малый множитель, а ω^α — конечный контравариантный вектор; тогда

$$u'^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\omega^\alpha. \tag{28}$$

Очевидно, что ω^α — функция параметра t, которая обращается в нуль в точках A и B. Таким образом L', длина кривой Γ' между точками A и B, есть функция от ε и может быть представлена в виде ряда Тейлора по степеням ε. Замечая, что при $\varepsilon = 0$ кривая Γ' совпадает с Γ, имеем

$$L' = L + \varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \frac{1}{2!}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 L'}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 + \ldots, \tag{29}$$

где индекс 0 означает, что ε должно быть положено равным нулю после дифференцирования. Второй член в правой части (29) называется *первой вариацией длины* L и обычно обозначается δL. Так как Γ есть геодезическая линия, то ее длина меньше, чем длина любой другой кривой, проходящей через A и B. Другими словами, L' достигает минимума при $\varepsilon = 0$ и, следовательно, по обычным правилам дифференциального исчисления $\left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\right)_0$ должна равняться нулю, т. е. *первая вариация* δL *равна нулю, если* Γ — *геодезическая линия*. Найдем явное выражение для вариации δL; тогда из условия, что она исчезает для всех соседних кривых, мы придем к уравнению геодезической линии.

Пусть

$$\varphi(u, \dot{u}) = (a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \tag{30}$$

где u и $\dot{u}$ означают символически u^1, u^2 и $\dot{u}^1$, $\dot{u}^2$ соответственно. Тогда

$$\varphi' \equiv \varphi(u', \dot{u}') \equiv \varphi(u + \varepsilon\omega, u + \varepsilon\dot{\omega})$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\dot{\omega}^\alpha,$$

а так как

$$L' = \int_A^B \varphi'\, dt,$$

то

$$\delta L = \varepsilon \left(\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \varepsilon \int_A^B \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}\omega^\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\dot{\omega}^\alpha\right\} dt.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\dot{\omega}^\alpha\, dt = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\omega^\alpha\right]_A^B - \int_A^B \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\right)\omega^\alpha\, dt.$$

Так как ω^α в точках A и B обращается в нуль, то имеем

$$\delta L = \varepsilon \int_A^B \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\right)\right\}\omega^\alpha\, dt. \tag{31}$$

Это и есть выражение для первой вариации.

Если Γ — геодезическая линия, то δL должна быть равной нулю для всех соседних кривых, проходящих через A и B, т. е. правая часть в (31) должна исчезать при произвольных значениях вектора ω^α на кривой Γ. Поэтому должно выполняться равенство

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} = 0.} \tag{32}$$

Эти дифференциальные уравнения вместе с условиями, что кривая Γ проходит через данные точки A и B, вообще полностью определяют кривую Γ. Поэтому они и являются уравнениями Γ. Мы напишем их в более явном виде.

Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^\alpha} = \frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{2\varphi}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma,$$

и (32) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta}{\varphi}\right) - \frac{1}{2\varphi}\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\beta\dot{u}^\gamma = 0.$$

До сих пор наш параметр t вдоль Γ был совершенно произвольным. Мы сильно упростим дело, если возьмем в качестве параметра длину дуги s геодезической линии. В этом случае (30) перейдет в $\varphi=1$ вдоль Γ; уравнения Γ примут вид

$$\frac{d}{ds}\left(a_{\alpha\beta}\frac{du^\beta}{ds}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0,$$

или

$$a_{\alpha\beta}\frac{d^2u^\beta}{ds^2}+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0.$$

Если ввести обозначение

$$\boxed{\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right),} \tag{33}$$

то эти уравнения можно переписать так:

$$a_{\alpha\beta}\frac{d^2u^\beta}{ds^2}+\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0.$$

Поднимая индекс α, придем к окончательной форме

$$\boxed{\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0,} \tag{34}$$

где мы положили

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=a^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta,\,\beta\gamma}.} \tag{35}$$

Выражения (33) и (35) называются символами Кристоффеля на поверхности; сравнивая со стр. 192, видим, что они образуются из $a_{\alpha\beta}$ точно таким же образом, как символы Кристоффеля в пространстве образуются из g_{rs}. Более того, мы знаем, что линия наименьшей длины или геодезическая линия между двумя точками *пространства* есть прямая, и из (13) на стр. 215 видно, что уравнения геодезической линии на поверхности и в пространстве имеют один и тот же вид.

Упражнения

1. Показать, что если положить $\psi = a_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta}$, где $u'^{\alpha} = \frac{du^{\alpha}}{ds}$, то уравнения геодезической линии можно написать в виде

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u'^{\alpha}}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial u^{\alpha}} = 0.$$

[Эти уравнения часто оказываются полезными при вычислении символов Кристоффеля для любой координатной системы, так как после разрешения уравнений относительно вторых производных по s из (34) видно, что с правой стороны уравнения коэффициент при

$$\frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds} \text{ равен } -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}.]$$

2. Показать, что $\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}$ и $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ симметричны по α, β, а также что

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} = \Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}, \quad \Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} = a_{\gamma\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}.$$

3. Показать, что для поверхности из задачи 1, стр. 224, символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^1_{11} = kf_1f_{11}, \quad \Gamma^1_{12} = kf_1f_{12}, \quad \Gamma^1_{22} = kf_1f_{22},$$
$$\Gamma^2_{11} = kf_2f_{11}, \quad \Gamma^2_{12} = kf_2f_{12}, \quad \Gamma^2_{22} = kf_2f_{22},$$

где

$$f_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}}, \quad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}} \text{ и } k = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2}.$$

4. *Ортогональные криволинейные координаты.* Доказать, что если криволинейные координаты ортогональны, то

а) $$a_{12} = a^{12} = 0, \quad a^{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad a_{22} = \frac{1}{a_{22}},$$

б) $$\Gamma_{1,\,11} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{1,\,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} = -\Gamma_{2,11},$$

$$\Gamma_{1,22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} = -\Gamma_{2,\,12}, \quad \Gamma_{2,\,22} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^2};$$

в) $$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2a_{11}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2a_{22}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^2}.$$

5. Вычислить символы Кристоффеля для поверхностей из задач 2, 3, 4, стр. 224.

§ 6. Преобразование символов Кристоффеля. Геодезические координаты

Рассмотрим две координатные системы u^α и $\bar{u}^\alpha$ и найдем, каким образом связаны между собой символы Кристоффеля в этих двух системах.

Будем обозначать чертой сверху величины, относящиеся к координатам $\bar{u}^\alpha$.

Возьмем геодезическую линию Г, и пусть u^α и $\bar{u}^\alpha$ — координаты некоторой точки, лежащей на ней, заданной в двух различных системах координат. Эти координаты являются функциями дуги s кривой Г, причем, конечно, s есть скаляр. Тогда

$$\frac{d\bar{u}^\alpha}{ds} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho} \frac{du^\varrho}{ds}, \tag{36}$$

а после повторного дифференцирования

$$\frac{d^2\bar{u}^\alpha}{ds^2} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho} \frac{d^2u^\varrho}{ds^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho \partial u^\sigma} \frac{du^\varrho}{ds} \frac{du^\sigma}{ds}. \tag{37}$$

Но так как точка лежит на геодезической линии, то справедливы равенства

$$\frac{d^2\bar{u}^\alpha}{ds^2} = -\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\bar{u}^\beta}{ds} \frac{d\bar{u}^\gamma}{ds},$$

$$\frac{d^2u^\varrho}{ds^2} = -\Gamma^\varrho_{\sigma\tau} \frac{du^\sigma}{ds} \frac{du^\tau}{ds}.$$

После подстановки (37) примет вид

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\bar{u}^\beta}{ds} \frac{d\bar{u}^\gamma}{ds} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho} \Gamma^\varrho_{\sigma\tau} \frac{du^\sigma}{ds} \frac{du^\tau}{ds} - \frac{\partial^2 \bar{u}^\alpha}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} \frac{du^\sigma}{ds} \frac{du^\tau}{ds}.$$

Использовав (36), получим

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{u}^\alpha}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} - \Gamma^\varrho_{\sigma\tau} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\sigma} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\tau} \right) \frac{du^\sigma}{ds} \frac{du^\tau}{ds} = 0. \tag{38}$$

Геодезическая линия Г выбрана совершенно произвольно, и, значит, уравнение (38) справедливо для всех $\frac{du^\varrho}{ds}$, а поскольку коэффициент при $\frac{du^\sigma}{ds}\frac{du^\tau}{ds}$ в (38), очевидно, симметричен по σ и τ, то должно быть

$$\frac{\partial^2\bar{u}^\alpha}{\partial u^\sigma \partial u^\tau} - \Gamma^\varrho_{\sigma\tau}\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\varrho} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\sigma}\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\tau} = 0. \tag{39}$$

Это уравнение выражает связь между символами Кристоффеля, выраженными в двух системах координат. Так как в него входит вторая частная производная от $\bar{u}^\alpha$ по u^ϱ, то *символ Кристоффеля не является тензором.* Точно таким же образом, исходя из формулы $\frac{du^\alpha}{ds} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\varrho}\frac{d\bar{u}^\varrho}{ds}$, получим обратное соотношение

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\sigma \partial \bar{u}^\tau} - \bar{\Gamma}^\varrho_{\sigma\tau}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\varrho} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\sigma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\tau} = 0. \tag{40}$$

Мы уже видели, что в трехмерных аффинных координатах метрический тензор g_{rs} имеет постоянные составляющие и, следовательно, в такой координатной системе символы Кристоффеля всюду равны нулю. На поверхности, вообще, невозможно найти такие координаты *), но мы покажем, что *всегда можно выбрать координатную систему, в которой все символы Кристоффеля обращаются в нуль в заданной точке O.* Такого рода координаты называются *геодезическими координатами в точке O.*

Пусть u^α — данная система координат, и пусть u^α_0 — координаты заданной точки O в этой системе. Если существует такая система координат $\bar{u}^\alpha$, что все символы Кристоффеля, выраженные в ней, обращаются в нуль в точке O, то из уравнения (40) легко видеть, что тогда в этой точке должно быть

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\sigma \partial \bar{u}^\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\sigma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\tau} = 0, \tag{41}$$

*) За исключением поверхностей, развертывающихся на плоскость, см. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, т. I, М., 1947, стр. 432. (*Прим. ред.*)

и обратно, если эти уравнения выполняются, то все $\overline{\Gamma}^{\varrho}_{\sigma\tau}$ обращаются в точке O в нуль. Сделаем замену переменных

$$u^{\alpha}=u^{\alpha}_{0}+\overline{u}^{\alpha}-\frac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau})_{0}\overline{u}^{\sigma}\overline{u}^{\tau}. \tag{42}$$

Мы видим, что координаты точки O в новой координатной системе будут $\overline{u}^{\alpha}=0$ и что в точке O

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \overline{u}^{\varrho}}=\delta^{\alpha}_{\varrho}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial \overline{u}^{\sigma}\partial \overline{u}^{\tau}}=-(\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau})_0;$$

это показывает, что равенство (41) в данной точке выполняется. Следовательно, новые переменные — геодезические координаты в точке O. Важно отметить, что символы Кристоффеля в геодезических координатах вообще не всюду равны нулю, а только в заданной точке.

Упражнения

1. *Полугеодезические координаты. Найти линейный элемент, если координатными кривыми являются геодезические линии, проходящие через данную точку O, и их ортогональные траектории.*

Возьмем в качестве u^1-кривых геодезические линии, проходящие через данную точку O, а в качестве u^1 расстояние вдоль каждой геодезической линии, измеренное от точки O. В качестве u^2 можно взять угол, который геодезическая линия OP (рис. 26) составляет с данной геодезической линией OC. Эти координаты совершенно аналогичны полярным координатам на плоскости; поэтому их можно назвать *полярными координатами на поверхности*, однако чаще их называют *полугеодезическими координатами*.

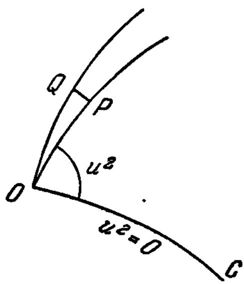

Рис. 26.

Вдоль геодезической линии $u^2=\text{const}$ имеем $du^2=0$, $ds=du^1$. Следовательно, $a_{11}=1$ и

$$\frac{du^1}{ds}=1,\quad \frac{du^2}{ds}=0.$$

Кроме того, эти кривые должны удовлетворять уравнениям (34), стр. 231, откуда следует

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=0,$$

а так как $\Gamma_{r,11}=a_{rs}\Gamma^s_{11}$, то будет

$$\Gamma_{2,11}=\frac{\partial a_{12}}{\partial u^1}=0,\ldots \qquad (\alpha)$$

Далее, в точке O $u^1=0$ и, следовательно, для всех небольших перемещений по поверхности от точки O $ds^2=(du^1)^2$ независимо от того, каким выбран du^2. Таким образом, при $u^1=0$ $a_{12}=a_{22}=0$. Но тогда из (α) следует, что a_{12} исчезает всюду и *координатные кривые ортогональны.* Поэтому линейный элемент будет иметь вид

$$ds^2=(du^1)^2+a_{22}(du^2)^2.$$

Кроме того, если мы возьмем малые расстояния OP, OQ, оба равные u^1 вдоль двух соседних геодезических линий, соответствующих u^2 и u^2+du^2, то $PQ=\sqrt{a_{22}}\,du^2$, а угол POQ равен du^2. Если поверхность в точке O аппроксимировать плоскостью, то приближенно будет

$$\frac{PQ}{u^1}=du^2.$$

Отсюда видно, что если $\sqrt{a_{11}}$ разложить по степеням u^1, то будет

$$\sqrt{a_{11}}=u^1+\ldots,$$

где остальные члены разложения более высокого порядка малости по u^1, чем первый.

2. Доказать, что

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}=a_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma}+a_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}.$$

3. Используя результат задачи 2, показать, что если все символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке O, то первые производные $a_{\alpha\beta}$ также равны нулю, и наоборот.

4. Показать, что полугеодезические координаты с началом в точке O являются, кроме того, геодезическими координатами в точке O.

§ 7. Параллельный перенос относительно поверхности

Пусть C — кривая на поверхности (рис. 27), и пусть в каждой точке кривой C определен вектор X^α. Координаты u^α каждой точки C и составляющие векторного поля X^α являются функциями параметра t.

Если мы возьмем другую координатную систему $\bar{u}^\alpha$, то составляющие $\bar{X}^\alpha$ векторного поля в новых координатах определяются уравнениями преобразования

$$\bar{X}^{\alpha}=\frac{\partial\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}X^{\sigma} \tag{43}$$

и, конечно, тоже являются функциями от t. Дифференцируя по t, имеем

$$\frac{d\bar{X}^{\alpha}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}\frac{dX^{\sigma}}{dt}+\frac{\partial^{2}\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\sigma}\partial u^{\tau}}X^{\sigma}\frac{du^{\tau}}{dt}.$$

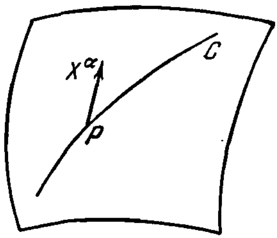

Рис. 27.

Если мы подставим сюда значение $\frac{\partial^{2}\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\sigma}\partial u^{\tau}}$ из (39), то получим

$$\frac{d\bar{X}^{\alpha}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}\frac{dX^{\sigma}}{dt}+\Gamma^{\varrho}_{\sigma\tau}\frac{\partial\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\varrho}}X^{\sigma}\frac{du^{\tau}}{dt}-$$
$$-\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial\bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\sigma}}\frac{\partial\bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\tau}}X^{\sigma}\frac{du^{\tau}}{dt}.$$

Воспользовавшись (43), можем переписать это уравнение так:

$$\frac{d\bar{X}^{\alpha}}{dt}+\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\bar{X}^{\beta}\frac{d\bar{u}^{\gamma}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\varrho}}\left[\frac{dX^{\varrho}}{dt}+\Gamma^{\varrho}_{\sigma\tau}X^{\sigma}\frac{du^{\tau}}{dt}\right]. \tag{44}$$

Оно показывает, что выражение

$$\boxed{\frac{\delta X^{\alpha}}{\delta t}=\frac{dX^{\alpha}}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}X^{\beta}\frac{du^{\gamma}}{dt}} \tag{45}$$

является контравариантным вектором, который мы назовем *абсолютной производной вектора* X^{α} *на поверхности.*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\delta X^{\alpha}}{\delta t}=\frac{dX^{\alpha}}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}X^{\beta}\frac{du^{\gamma}}{dt}=0. \tag{46}$$

Это — векторное уравнение, и следовательно, если оно справедливо в какой-либо одной координатной системе, то оно справедливо в любой другой. Так как (46) — дифференциальное уравнение первого порядка, то если вектор X^{α} задан в какой-либо точке кривой C, то (46) определяет единственный вектор X^{α} в каждой другой точке кривой. Следовательно, таким способом мы определяем единственное векторное поле вдоль C. Нетрудно заметить, что (46) имеет тот же самый вид, что и (6), стр. 193; последнее является уравнением, которому удовлетворяет параллельное векторное поле вдоль кривой. Поэтому мы будем говорить, что система векторов на поверхности, определяемая уравнением (46), есть *параллельное векторное поле относительно поверхности.* Сказанное является *определением* нового понятия — *параллельного векторного поля относительно поверхности, или параллельного переноса вектора относительно поверхности.*

Важно отметить, что параллельное векторное поле относительно поверхности определяется *вдоль кривой на этой поверхности.* Следовательно, если нам заданы две точки A и B поверхности и в точке A задан вектор X^α, то мы можем определить параллельный ему вектор в точке B только в том случае, если задана кривая, соединяющая A и B; вообще этот параллельный вектор в точке B будет зависеть от вида взятой кривой.

Другая формулировка этого свойства параллельного векторного поля относительно поверхности состоит в следующем.

Пусть на поверхности задан замкнутый контур и, начав с некоторой точки контура с заданным в ней вектором, будем строить вдоль контура параллельное векторное поле относительно поверхности. Тогда a priori нет никаких оснований ожидать, что мы придем в начальную точку с вектором, равным начальному. В действительности параллельный перенос вектора по замкнутому контуру относительно поверхности при возвращении в первоначальную точку, вообще говоря, приводит к новому вектору.

Упражнения

1. Показать, что если X^α — векторное поле, удовлетворяющее условию (46), то $a_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta$ остается постоянной вдоль кривой. Вывести отсюда, что *длины двух параллельных векторов одинаковы.*

$$\left[\text{Использовать равенство } \frac{da_{\alpha\beta}}{dt}=(\Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma}+\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma})\,\frac{du^\gamma}{dt}.\right]$$

2. Показать, что если X^α и Y^α — два параллельных векторных поля, то $a_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ остается постоянной. Вывести отсюда, что *углы между двумя векторами и параллельными им равны между собой.*

3. Показать, что если нашей поверхностью является плоскость и на ней взяты аффинные координаты, то уравнение поля параллельных векторов переходит в $\frac{dX^\alpha}{dt}=0$. Иными словами, определение параллельных векторов на плоскости при помощи уравнения (46) совпадает с обычным евклидовым определением параллельных прямых на плоскости.

4. Доказать, что единичный касательный вектор $\lambda^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{ds}$ геодезической линии G образует параллельное векторное поле вдоль геодезической линии.

[Используя (34), можно написать уравнение кривой G в виде $\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}=0.$]

5. Показать, что если X^α — параллельное векторное поле вдоль G, то X^α составляет постоянный угол с G.

[Из этих примеров видно, что параллельность относительно поверхности в нашем определении обладает многими свойствами, принадлежащими обычным параллельным векторам в евклидовом пространстве.]

6. Показать, что если X^α — параллельное векторное поле на кривой C, вдоль которой выбран параметр t, то ковариантные составляющие поля удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\delta X_\alpha}{\delta t}=\frac{dX_\alpha}{dt}-\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}X_\gamma\frac{du^\beta}{dt}=0.$$

§ 8. Абсолютное и ковариантное дифференцирование тензоров на поверхности

Будем рассматривать задачу, аналогичную уже решенной в главе XII для пространственных тензоров, а именно задачу построения новых тензоров при помощи операции дифференцирования заданных на поверхности тензорных полей. Метод решения будет тот же самый, что и в главе XII. Определив параллельное векторное поле вдоль кривой относительно поверхности, читатель должен просто перечитать §§ 2, 3, стр. 195—200, заменяя слова «пространственные тензоры», «пространственные координаты» словами «тензоры на поверхности», «координаты на поверхности». Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой результатов для тензоров на поверхности.

Если $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор на поверхности, определенный вдоль кривой C, то его составляющие являются функциями одного параметра t; тогда величины

$$\boxed{\frac{\delta X^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\delta t} \equiv \frac{dX^{\alpha}_{\beta\gamma}}{dt} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau} X^{\sigma}_{\beta\gamma} \frac{du^{\tau}}{dt} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\tau} X^{\alpha}_{\sigma\gamma} \frac{du^{\tau}}{dt} - \Gamma^{\sigma}_{\tau\gamma} X^{\alpha}_{\beta\sigma} \frac{du^{\tau}}{dt}} \tag{47}$$

образуют тензор того же самого порядка и типа, что и $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$; этот тензор называется *абсолютной производной* $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *по* t.

Если $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензорное поле, определенное на всей поверхности, то его составляющие являются функциями u^{α}; тогда величины

$$\boxed{X^{\alpha}_{\beta\gamma,\,\delta} \equiv \frac{\partial X^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial u^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta} X^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} X^{\alpha}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta} X^{\alpha}_{\beta\delta}} \tag{48}$$

образуют тензор, имеющий на один ковариантный индекс больше, чем $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Этот тензор называется *ковариантной производной тензора* $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Операция ковариантного дифференцирования отмечается запятой, совершенно так же как и в случае пространственных тензоров.

Рассмотрим геодезические координаты в данной точке O поверхности. В таких координатах символы Кристоффеля в точке O исчезают; тогда из (47) и (48) сразу следует, что в точке O абсолютная и ковариантная производные тензора совпадают с обычными производными. Поэтому, следуя рассуждениям § 4, стр. 200, мы получаем, что правила обычного дифференциального исчисления для производной суммы и произведения функций справедливы и для абсолютной и ковариантной производных суммы и произведения тензоров. Предоставляем читателю самому сформулировать эти правила в том же виде, как и в § 4 *).

Далее, когда мы используем геодезические координаты в точке O, обычные производные тензоров $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$ и их определителя a равны нулю. Следовательно, *ковариантные производные метрических тензоров* $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$, *ε-объектов и символов Кронекера равны нулю*, — результат, аналогичный найденному для пространства. Следовательно, при отыскании абсолютных и ковариантных производных от любой комбинации тензоров на поверхности с ними можно обращаться, как с постоянными.

Упражнения

1. Показать, что $\frac{d}{dt}(X^\alpha Y_\alpha) = \frac{\delta X^\alpha}{\delta t} Y_\alpha + X^\alpha \frac{\delta Y_\alpha}{\delta t}$.

2. Доказать, что $X_{\alpha,\,\beta} - X_{\beta,\,\alpha} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial u^\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial u^\alpha}$.

3. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(a_{\beta\gamma} X^\beta Y^\gamma) = X_{\beta,\,\alpha} Y^\beta + X^\beta Y_{\beta,\,\alpha}$.

4. Показать, что операцию поднятия или опускания индекса можно производить и до и после применения операции абсолютного и ковариантного дифференцирования.

5. Доказать, что свертку по двум индексам можно выполнять как до, так и после применения операции абсолютного и ковариантного дифференцирования.

6. Показать, что если X есть длина вектора X^α, то $\frac{\partial X}{\partial u^\alpha} = X_{\beta,\alpha} \frac{X^\beta}{X}$.

7. Написав в явном виде тензорное уравнение $\varepsilon_{\alpha\beta,\,\gamma} = 0$ и придавая α, β значения 1, 2, доказать, что

$$\frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial u^\gamma} = \Gamma^\beta_{\beta\gamma}.$$

---

*) Аналогия не совсем полна. В § 4 мы использовали аффинные пространственные координаты, в которых символы Кристоффеля *всюду* равны нулю; здесь же поверхностные символы Кристоффеля обращаются в нуль лишь *в одной данной точке*.

§ 9. Тензор Римана — Кристоффеля. Гауссова кривизна поверхности

Пусть X_α — ковариантное векторное поле, определенное на всей поверхности; его ковариантная производная есть

$$X_{\alpha,\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial u^\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} X_\sigma.$$

Так как $X_{\alpha,\beta}$ есть тензор, то мы можем снова найти его ковариантную производную. Полученный таким образом новый тензор называется *второй ковариантной производной* X_α. Обозначим ее через $X_{\alpha,\beta\gamma}$. В дальнейшем мы увидим, что она, вообще говоря, не симметрична относительно β и γ. Предоставим читателю получить тем же способом, что и выше, на стр. 205, следующие результаты:

$$X_{\alpha,\beta\gamma} - X_{\alpha,\gamma\beta} = R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma} X_\delta, \tag{49}$$

где

$$\boxed{R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\beta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\Gamma^\delta_{\alpha\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\Gamma^\delta_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\gamma\sigma}.} \tag{50}$$

Уравнение (49) показывает, что $R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$ является тензором, а из (50) видно, что он зависит только от метрического тензора и его производных. Он называется *тензором Римана — Кристоффеля поверхности*. Если опустить индекс δ, то получится ассоциированный тензор

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = a_{\delta\sigma} R^{\sigma}_{\cdot\alpha\beta\gamma}.$$

Он обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta},$$
$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma},$$

т. е. $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ антисимметричен относительно δ, α и β, γ.

Рассмотрим скаляр

$$\boxed{K = \frac{1}{4}\varepsilon^{\delta\alpha}\varepsilon^{\beta\gamma} R_{\delta\alpha\beta\gamma}.} \tag{51}$$

Этот скаляр есть *инвариант относительно преобразования криволинейных координат на поверхности.* Если мы умножим это уравнение на $\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\sigma\tau}$, то получим

$$K\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\sigma\tau}=\frac{1}{4}\,\delta^{\delta\alpha}_{\lambda\mu}\delta^{\beta\gamma}_{\sigma\tau}R_{\delta\alpha\beta\gamma}.$$

В силу антисимметрии тензора $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ будет

$$\delta^{\delta\alpha}_{\lambda\mu}\delta^{\beta\gamma}_{\sigma\tau}R_{\delta\alpha\beta\gamma}=4R_{\lambda\mu\sigma\tau}$$

и, следовательно,

$$R_{\lambda\mu\sigma\tau}=K\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\sigma\tau}. \tag{52}$$

Это показывает, что тензор Римана — Кристоффеля можно выразить через скаляр K и ε-объекты. Скаляр K *называется полной или гауссовой кривизной поверхности.* Он, конечно, определяется внутренними свойствами поверхности и зависит только от метрического тензора и его производных.

Упражнения

1. Показать, используя (52), что $K=\dfrac{R_{1212}}{a}$. Эта формула позволяет нам вычислять K в любом частном случае.

2. Доказать, что

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial}{\partial u^\beta}\,\Gamma_{\delta,\,\alpha\gamma}-\frac{\partial}{\partial u^\gamma}\,\Gamma_{\delta,\,\alpha\beta}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma,\,\delta\gamma}-\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\sigma,\,\delta\beta}.$$

3. Если система координат ортогональна, т. е. если $a_{12}=0$, то

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}\right)\right].$$

[Это следует сразу из вычислений в задачах 1 и 2.]

4. Если линейный элемент имеет вид $ds^2=(du^1)^2+a_{22}(du^2)^2$, то

$$K=-\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial^2\sqrt{a_{22}}}{(\partial u^1)^2}.$$

§ 10. Геодезическая кривизна кривой на поверхности

Пусть C — заданная кривая на поверхности, и пусть в качестве параметра выбрана длина дуги s кривой, измеряемая от какой-либо фиксированной точки на кривой. Тогда кривая определяется уравнениями

$$u^\alpha = u^\alpha(s) \tag{53}$$

и мы имеем соотношение

$$a_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 1, \tag{54}$$

которое удовлетворяется в каждой точке кривой.

Если P — точка на кривой с координатами u^α (рис. 28), а Q — соседняя с ней точка на кривой C, соответствующая возрастанию параметра на ds, то бесконечно малый вектор $\overrightarrow{PQ}$ имеет своими составляющими du^α.

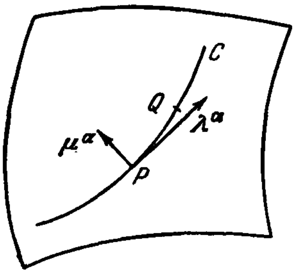

Рис. 28.

Таким образом, касательный вектор к C, который является предельным положением вектора $\overrightarrow{PQ}$ при Q, стремящемся к P, определяется выражением $\frac{du^\alpha}{ds}$. Более того, это — единичный вектор, что сразу следует из (54). Следовательно, *единичный вектор касательной к кривой* λ^α определяется так:

$$\boxed{\lambda^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{ds}.} \tag{55}$$

Поскольку λ^α — единичный вектор в каждой точке кривой C, то

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1.$$

Беря абсолютную производную от обеих частей этого уравнения по s, получаем

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha \frac{\delta\lambda^\beta}{\delta s} = 0,$$

откуда видно, что вектор $\frac{\delta\lambda^\beta}{\delta s}$ ортогонален λ^α. Следовательно, если мы обозначим через μ^σ *единичный* вектор, ортогональный λ^α, то

$$\boxed{\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \sigma\mu^\alpha,} \tag{56}$$

где σ — некоторый скаляр.

Выберем направление μ^α таким, чтобы *поворот* $(\lambda^\alpha, \mu^\alpha)$ *был положительным*; тогда согласно сказанному на стр. 226 μ^α есть тот самый вектор, который удовлетворяет условию

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = +1. \tag{57}$$

Когда направление μ^α таким образом установлено, уравнение (56) определяет σ единственным образом не только по величине, но и по знаку. *Вектор μ^α называется единичным нормальным вектором к кривой C, а скаляр σ называется геодезической кривизной кривой на поверхности.*

В соответствии с выбором μ^α мы имеем

$$\mu^\alpha = \varepsilon^{\beta\alpha}\lambda_\beta, \quad \lambda^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\mu_\beta. \tag{58}$$

Найдем абсолютную производную по s от обеих частей первого равенства; получим

$$\frac{\delta\mu^\alpha}{\delta s} = \varepsilon^{\beta\alpha}\frac{\delta\lambda_\beta}{\delta s} = \varepsilon^{\beta\alpha}\sigma\mu_\beta = -\sigma\varepsilon^{\alpha\beta}\mu_\beta = -\sigma\lambda^\alpha.$$

Таким образом, мы имеем две формулы

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} &= \sigma\mu^\alpha, \\ \frac{\delta\mu^\alpha}{\delta s} &= -\sigma\lambda^\alpha. \end{aligned}} \tag{59}$$

Читатель заметит, что имеется некоторое сходство между ними и формулами (10), стр. 214, относящимися к кривизне и кручению кривой в пространстве. Поэтому мы можем для краткости называть (59) *формулами Френе кривой C относительно поверхности.*

Упражнения

1. *Доказать, что если G есть геодезическая линия, касающаяся кривой C в точке P (рис. 29), и если длина дуг PQ и PR равна s, то при s, стремящемся к нулю, вектор $\overrightarrow{QR}$ стремится к нормальному вектору, а $(QR/s^2) \to \sigma/2$.*

Пусть координаты точки P будут u^α. Если мы разложим координаты точки R в ряд Тейлора по степеням s, то получим

$$R \equiv u^\alpha + \left(\frac{du^\alpha}{ds}\right) s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}\right) s^2 + \ldots$$

Остальные члены имеют порядок малости выше чем s^2. А так как $\frac{du^\alpha}{ds} = \lambda^\alpha$, $\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} = \frac{d\lambda^\alpha}{ds}$, то разложение примет вид

$$R \equiv u^\alpha + \lambda^\alpha s + \frac{1}{2}\frac{d\lambda^\alpha}{ds} s^2 + \ldots \qquad (\alpha)$$

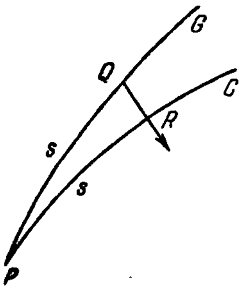

Рис. 29.

Совершенно так же, разлагая координаты точки Q в ряд по степеням s и обозначая чертой величины, относящиеся к геодезической линии G, имеем

$$Q \equiv (u^\alpha) + \overline{\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)} s + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}\right)} s^2 + \ldots$$

Так как кривые касаются в точке P, то $\overline{\frac{du^\alpha}{ds}} = \lambda^\alpha$ и из уравнения геодезической линии имеем в точке P

$$\overline{\left(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}\right)} = -\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\overline{\left(\frac{du^\beta}{ds}\right)}\,\overline{\left(\frac{du^\gamma}{ds}\right)} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\lambda^\beta\frac{du^\gamma}{ds}.$$

Следовательно,

$$Q \equiv u^\alpha + \lambda^\alpha s - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\lambda^\beta\frac{du^\gamma}{ds} s^2 + \ldots \qquad (\beta)$$

Вычитая (β) из (α), получаем выражение для $\overrightarrow{QR}$, если s мало:

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\lambda^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\lambda^\beta\frac{du^\gamma}{ds}\right) s^2 + \ldots$$

Поэтому

$$\lim_{s\to 0}\frac{\overrightarrow{QR}}{s^2} = \frac{1}{2}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \frac{1}{2}\sigma\mu^\alpha,$$

откуда и следует наше утверждение.

2. Доказать, что $\sigma^2 = a_{\alpha\beta}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\frac{\delta\lambda^\beta}{\delta s}$.

3. Доказать, что $\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\frac{\delta\lambda^\beta}{\delta s} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\lambda^\beta$.

4. Показать, что если C — геодезическая линия, то $\sigma = 0$, и обратно, если $\sigma = 0$, то кривая — геодезическая. Таким образом,

геодезические линии являются кривыми нулевой геодезической кривизны.

[Уравнение геодезической линии может быть написано в виде $\frac{\delta\lambda^{\alpha}}{\delta s}=0.$]

5. Доказать, что $\frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds}=-\sigma\varepsilon^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}\frac{du^{\gamma}}{ds}$.

6. Использовав результат задачи 5, вывести, что геодезическая кривизна σ_1 u^1-кривой определяется равенством

$$\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right)-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial u^2},$$

и найти подобную же формулу для геодезической кривизны u^2-кривой.

[Для u^1-кривой имеем $\frac{du^{\alpha}}{ds}\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},0\right)$.]

7. Доказать, что если координатные кривые ортогональны, то

$$\sigma_1=\frac{1}{2\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial(\log a_{11})}{\partial u^2},\quad \sigma_2=\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial(\log a_{22})}{\partial u^1}.$$

§ 11. Дифференциальные параметры Бельтрами

Если φ и ψ — две скалярные функции координат на поверхности и если мы обозначим через $\varphi_{,\alpha}$ и $\psi_{,\alpha}$ их производные по u^{α}, т. е.

$$\varphi_{,\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial u^{\alpha}},\quad \psi_{,\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial u^{\alpha}}, \tag{60}$$

то эти производные являются ковариантными векторами. Следовательно, величина

$$\boxed{\nabla(\varphi,\psi)=a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\psi_{,\beta}} \tag{61}$$

является скаляром и часто называется *бельтрамиевым дифференциальным параметром двух функций.*

Если положить $\varphi=\psi$, то из (61 получим скаляр

$$\boxed{\nabla\varphi=\nabla(\varphi,\varphi)=a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta},} \tag{62}$$

который называется *бельтрамиевым первым дифференциальным параметром функции* φ. Символ $\nabla\varphi$ читается «набла φ».

Если X^α — контравариантный вектор на поверхности, то мы можем взять его ковариантную производную и свернуть по двум индексам, получив $X^\alpha_{,\alpha}$. Это, очевидно, скаляр; выписывая его в явном виде, получим

$$X^\alpha_{,\alpha} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial u^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} X^\beta. \tag{63}$$

Этот скаляр по аналогии с (23), стр. 203, можно называть *дивергенцией вектора* X^α *на поверхности*. Используя приведенные на стр. 241 выражения

$$\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial u^\beta},$$

можно переписать дивергенцию вектора X^α в виде

$$X^\alpha_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\sqrt{a} X^\alpha). \tag{64}$$

Эта формула особенно удобна для вычислений.

В частном случае, когда под X^α мы подразумеваем вектор $a^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}$ а φ — инвариантная функция координат на поверхности, его дивергенция есть

$$X^\alpha_{,\alpha} = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta\alpha} = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha\beta}.$$

Этот скаляр называется *бельтрамиевым вторым дифференциальным параметром функции* φ; его часто обозначают $\Delta\varphi$ *).

Итак,

$$\boxed{\Delta\varphi = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha\beta}.} \tag{65}$$

*) Для первого и второго дифференциальных параметров Бельтрами здесь используются обозначения, применяемые Blaschke в его Vorlesungen über Differentialgeometrie. Эти параметры иногда обозначают также $\Delta_1\varphi$ и $\Delta_2\varphi$. Имеется русский перевод: Бляшке, Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1935. По поводу параметров Бельтрами см. стр. 185 перевода. (*Прим. ред.*)

Используя (64), это можно переписать так:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\left(\sqrt{a}\,a^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial u^{\beta}}\right). \tag{66}$$

Упражнения

1. Доказать, что

$$\nabla(u^1)=\frac{a_{22}}{a},\quad \nabla(u^2)=\frac{a_{11}}{a},\quad \nabla(u^1,\ u^2)=-\frac{a_{12}}{a}.$$

2. Доказать, что

$$\Delta(u^1)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}\right)-\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\right)\right],$$

$$\Delta(u^2)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{a_{11}}{\sqrt{a}}\right)-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\right)\right].$$

3. Доказать, что угол между кривыми $\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$ определяется выражением

$$\cos\theta=\frac{-\nabla(\varphi,\ \psi)}{\sqrt{\nabla\varphi\cdot\nabla\psi}}$$

и что, следовательно, две кривые ортогональны, если $\nabla(\varphi,\ \psi)=0$.

[Это можно доказать, взяв в качестве координатных кривых $u^1\equiv\varphi$, $u^2\equiv\varphi$ и используя результат задачи 1.]

4. *Формула Бельтрами для геодезической кривизны кривой.* Доказать, что если кривая определяется равенством $\varphi=\text{const}$, то ее геодезическая кривизна есть

$$\sigma=-\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}}-\nabla\left(\varphi,\ \frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right).$$

[Это — скалярное уравнение. Проделать вычисления в специальной ортогональной координатной системе, в которой $u^2\equiv\varphi$. Тогда заданные кривые представляют собой u^1-кривые координатной системы. Далее использовать результаты задач 1 и 2 из этого раздела и задачи 7 на стр. 247.]

§ 12. Теорема Грина на поверхности

Рассмотрим замкнутый контур C на поверхности (рис. 30). Определим сначала положительное направление обхода контура. Если мы возьмем простейший контур, определяемый кривыми $u^1=0$, $u^2=0$, $u^1=1$, $u^2=1$, то в качестве *положительного направления* мы примем направление, в котором обход этих кривых совершается в указанном порядке, а в качестве отрицательного — противоположное. Направление обхода любого другого контура будет положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает оно или нет с положительным направлением обхода простейшего контура.

Обозначим область, лежащую внутри C, через S. Из теоремы Грина известно, что если P и Q — функции координат, то

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial u^1}\,du^1\,du^2 &= \int\limits_C P\,\frac{du^2}{ds}\,ds,\\ \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial u^2}\,du^1\,du^2 &= -\int\limits_C Q\,\frac{du^1}{ds}\,ds. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

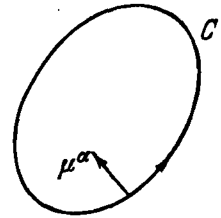

Рис. 30.

Направление обхода контура C при контурном интегрировании принимается положительным.

Теперь пусть X^α будет векторное поле, определенное на всей поверхности S, и пусть dS — элемент поверхности, т. е.

$$dS = \sqrt{a}\,du^1\,du^2;$$

тогда

$$\iint\limits_S X^\alpha{}_{,\alpha}\,dS = \iint\limits_S X^\alpha{}_{,\alpha}\sqrt{a}\,du^1\,du^2.$$

Из (64) имеем

$$X^\alpha{}_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\sqrt{a}\,X^\alpha).$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S X^\alpha{}_{,\alpha}\,dS = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\sqrt{a}\,X^\alpha)\,du^1\,du^2 =$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial u^1}(\sqrt{a}\,X^1) + \frac{\partial}{\partial u^2}(\sqrt{a}\,X^2)\right] du^1\,du^2 =$$

$$= \int\limits_C \sqrt{a}\left(X^1\frac{du^2}{ds} - X^2\frac{du^1}{ds}\right) ds = \int\limits_C \varepsilon_{\alpha\beta}\,X^\alpha\,\frac{du^\beta}{ds}\,ds.$$

Далее, если мы обозначим через μ^α *единичный вектор внутренней нормали к кривой* C, то его ковариантные составляющие будут определены (стр. 245) формулой

$$\mu_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{ds}.$$

Поэтому *формула Грина* примет вид

$$\boxed{\iint\limits_S X^\alpha{}_{,\alpha}\,dS = -\int\limits_C X_\alpha\,\mu^\alpha\,ds.} \qquad (68)$$

Положим в этой формуле $X^\alpha = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}\psi$, где φ, ψ — скалярные функции координат на поверхности. Тогда

$$X^\alpha{}_{,\alpha} = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}\psi_{,\alpha} + a^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta\alpha}\psi = \nabla(\varphi, \psi) + \psi\Delta\varphi$$

и (68) перейдет в

$$\boxed{\iint_S \nabla(\varphi, \psi)\, dS = -\int_C \psi(\varphi_{,\alpha}\mu^\alpha)\, ds - \iint_S \psi\Delta\varphi\, dS.} \qquad (69)$$

Упражнения

1. Доказать, что

$$\iint_S (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dS + \int_C (\varphi\psi_{,\alpha} - \psi\varphi_{,\alpha})\,\mu^\alpha\, ds = 0.$$

2. Доказать, что

$$\iint_S \nabla\varphi\, dS = -\int_C \varphi(\varphi_{,\alpha}\mu^\alpha)\, ds - \iint \varphi\Delta\varphi\, dS.$$

3. Вывести из (67), что если X_α — ковариантное векторное поле, то

$$\int_C X_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}\, ds = -\iint_S \varepsilon^{\alpha\beta} X_{\alpha,\beta}\, dS.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIV

1. Доказать, что если ω — угол между координатными кривыми, то $\operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{a}}{a_{12}}$.

2. Показать, что если два семейства кривых на поверхности определяются уравнением $b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0$, то угол между кривыми семейства есть

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2\sqrt{|b|}}{\sqrt{a}\, a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}.$$

Доказать, что семейства ортогональны, если $a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0$.

[Заметив, что $\operatorname{tg}\theta$ есть истинный скаляр, взять рассматриваемые семейства в качестве координатных кривых; тогда $b_{11} = b_{22} = 0$; затем использовать результаты упражнения 1.]

3. Возьмем кривую C на поверхности и семейство геодезических линий, пересекающих ее ортогонально. Если мы возьмем это семейство геодезических линий в качестве u^1-*кривых*, где u^1 измеряет расстояние вдоль каждой геодезической линии от кривой C, то линейный элемент будет

$$ds^2=(du^1)^2+a_{22}(du^2)^2.$$

4. *Гауссовы геодезические координаты.* Если в упражнении 3 мы возьмем в качестве C геодезическую линию, а в качестве u^2 расстояние, измеряемое вдоль кривой C, то $a_{22}(u^1, u^2)$ из упражнения 3 для всех значений u^2 удовлетворяет следующим условиям:

$$a_{22}(0, u^2)=1, \quad \left[\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\right]_{u^1=0}=0.$$

5. Показать, что если гауссова кривизна поверхности равна нулю и мы используем гауссовы геодезические координаты, то линейный элемент будет

$$ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2.$$

Он является таким же, как и линейный элемент на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат.

[Использовать задачу 4, стр. 243, вместе с условием из предыдущего примера.]

6. Показать, что если K не равно нулю и постоянно, то в гауссовых геодезических координатах будет

$$ds^2=(du^1)^2+\cos^2\left(\sqrt{K}\,u^1\right)(du^2)^2 \qquad (K>0),$$

$$ds^2=(du^1)^2+\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-K}\,u^1\right)(du^2)^2 \qquad (K<0).$$

7. Доказать, что если μ^α — единичный вектор нормали к семейству кривых, то геодезическая кривизна σ этого семейства будет

$$\sigma=-\mu^\alpha_{,\alpha}.$$

[Это можно доказать, взяв заданное семейство в качестве u^1-кривых и выбрав ортогональную координатную систему. В этом случае $\mu^\alpha=\left(0, \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\right)$.]

8. Доказать, что если координатные кривые ортогональны и вектор, касательный к кривой C, составляет угол θ с кривой $u^2=\text{const}$, то геодезическая кривизна кривой C есть

$$\sigma=\frac{d\theta}{ds}+\sigma_1\cos\theta+\sigma_2\sin\theta.$$

9. Показать, что если линейный элемент есть $ds^2=(du^1)^2+$ $+a_{22}(du^2)^2$ и C есть геодезическая линия, то формула из упражнения 8 превратится в

$$\frac{d\theta}{ds}=-\sigma_2\sin\theta.$$

Вывести отсюда, что

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial u^1}\frac{\sin\theta}{\sqrt{a_{22}}}.$$

10. *Формула Лагерра.* Если σ_1 и σ_2 — геодезические кривизны координатных кривых и ω — угол между ними, то

$$K=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{\partial}{\partial u^1}(\sigma_2\sqrt{a_{22}})+\frac{\partial}{\partial u^2}(\sigma_1\sqrt{a_{11}})\right\}.$$

11. Показать, что если две кривые пересекаются ортогонально в точке P, а ds_1 и ds_2 — линейные элементы длины вдоль этих кривых и σ_1, σ_2 — их геодезические кривизны, то

$$\Delta\varphi=\frac{d^2\varphi}{ds_1^2}+\frac{d^2\varphi}{ds_2^2}-\sigma_1\frac{d\varphi}{ds_2}+\sigma_2\frac{d\varphi}{ds_1}.$$

12. *Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру. Показать, что если мы из заданной точки начнем переносить параллельно заданный вектор вдоль замкнутого контура, то по возвращении в начальную точку он будет составлять с исходным вектором угол, равный* $\iint K\,dS$, *где интегрирование распространено на всю внутреннюю площадь, охватываемую контуром.*

[Выберем координатную систему с линейным элементом $ds^2=(du^1)^2+a_{22}(du^2)^2$, и пусть A^α — данное параллельное векторное поле, которое мы можем считать единичным векторным полем. Если A^α в любой точке составляет угол θ с u^1-*кривой*, проходящей через эту точку, то

$$A^1=\cos\theta,\quad A^2=\frac{\sin\theta}{\sqrt{a_{22}}}.$$

Так как A^α — параллельное векторное поле, то $\frac{\delta A^\alpha}{\delta s}=0$. Далее,

$$\frac{\delta A^1}{\delta s}=\frac{d}{ds}(\cos\theta)+\Gamma^1_{\mu\nu}A^\mu\frac{du^\nu}{ds}=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}+\Gamma^1_{22}A^2\frac{du^2}{ds}=$$

$$=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}\frac{\sin\theta}{\sqrt{a_{22}}}\frac{du^2}{ds}.$$

Приравнивая нулю, получим

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial u^1}\frac{du^2}{ds}$$

и, проинтегрировав это выражение по контуру C, получим для искомого угла α значение

$$\alpha=\int\limits_C \frac{d\theta}{ds}\,ds=-\int\limits_C \frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial u^1}\,\frac{du^2}{ds}\,ds=-\iint\limits_S \frac{\partial^2\sqrt{a_{22}}}{(\partial u^1)^2}\,du^1\,du^2=$$

$$=-\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial^2\sqrt{a_{22}}}{(\partial u^1)^2}\,dS.$$

Таким образом (стр. 243),

$$\alpha=\iint\limits_S K\,dS.]$$

13. *Теорема Гаусса*. Показать геометрически, что когда вектор переносят параллельно по сторонам геодезического треугольника ABC, то угол α из предыдущего упражнения равен $A+B+C-\pi$. Следовательно,

$$E=A+B+C-\pi=\iint\limits_S K\,dS.$$

E называется угловым избытком треугольника.

14. *Теорема Бонне*. Доказать, что если σ — геодезическая кривизна кривой C, образующей непрерывный замкнутый контур, то

$$\int\limits_C \sigma\,ds+\iint\limits_S K\,dS=2\pi.$$

[Вместо параллельного поля A^α в упражнении 12 возьмем единичный вектор, касательный к кривой C. Заметим, что теперь $\frac{\delta A^1}{\delta s}=-\sigma\sin\theta$, как это следует из формул Френе для кривой на поверхности, и в этом случае $\alpha=2\pi$.]

15. Показать, что если контур C имеет изломы, в которых внешние углы равны ω_1, ω_2, ω_3 и т. д., то формула из упражнения 14 изменяется следующим образом:

$$\sum\omega+\int\limits_C \sigma\,ds+\iint\limits_S K\,dS=2\pi.$$

16. Вывести из упражнения 15, что для треугольника ABC на поверхности будет

$$\int\limits_C \sigma\,ds+\iint\limits_S K\,dS=A+B+C-\pi.$$

[Это — обобщение результатов упражнения 13.]

17. Если $\Delta\varphi$ — угол между двумя соседними геодезическими касательными к кривой C в точках, отстоящих друг от друга на

Δs, то геодезическан кривизна кривой C есть

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

[Это немедленно следует из результатов упражнения 16, примененных к элементарному треугольнику, образованному двумя геодезическими касательными и кривой C.]

18. Пусть имеем бесконечно малый замкнутый контур ΔS, и пусть $\Delta \alpha$ — угол между начальным и конечным положениями вектора, который был параллельно перенесен вокруг этого контура. Доказать, что гауссова кривизна поверхности равна

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta S}.$$

ГЛАВА XV

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Система обозначений

В предыдущей главе мы изучили внутренние свойства поверхностей, т. е. те свойства, которые могут быть описаны безотносительно к окружающему пространству. Теперь мы приступаем к исследованию свойств поверхностей, которые рассматриваются как вложенные в окружающее пространство.

Таким образом, в этой главе нам придется иметь дело с двумя разными системами координат, а именно: криволинейные координаты для окружающего пространства, которые мы будем обозначать через x^r ($r = 1, 2, 3$), и криволинейные координаты на поверхности, которые мы будем обозначать через u^α ($\alpha = 1, 2$). Что касается индексов, то мы будем подразумевать, что в силе остаются следующие правила:

а) Повторяющиеся *латинские индексы* означают суммирование от 1 до 3, а если они свободны, то пробегают значения от 1 до 3.

б) Повторяющиеся *греческие индексы* означают суммирование от 1 до 2, а если они свободны, то пробегают значения от 1 до 2.

Нам будут встречаться пространственные тензоры вместе с тензорами на поверхности. Первые будут обозначаться латинскими индексами, а вторые — греческими. Кроме того, в этой главе и в следующих мы будем иметь дело с объектами, которые будут тензорами как пространственными, так и на поверхности; такие объекты будут иметь и греческие, и латинские индексы Так, объект, обозначенный через A^{rs}_{α}, будет представлять собой *контра-*

вариантный тензор второго порядка в x-координатах и ковариантный вектор в u-координатах. С другой стороны, B^r будет представлять контравариантный вектор в x-координатах и скаляр в u-координатах. Система обозначений будет становиться яснее по мере того, как мы будем ее использовать.

Очевидно, что для того, чтобы изучать тензорные свойства относительно x-координат, мы должны зафиксировать систему u-координат и изменять систему пространственных координат, а для того, чтобы изучать тензорные свойства относительно u-координат, мы должны просто зафиксировать систему x-координат и преобразовывать u-координаты к новым координатам на поверхности.

Упражнения

1. Показать, что если мы зафиксируем систему u-координат и перейдем от x^r к $\bar{x}^r$, то новые составляющие тензора $A^{rs}_{\alpha\beta}$ удовлетворяют равенству

$$\bar{A}^{rs}_{\alpha\beta}=A^{mn}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^n}.$$

2. Показать, что если мы зафиксируем систему x-координат и перейдем от u^α к $\bar{u}^\alpha$, то новые составляющие будут

$$\bar{A}^{rs}_{\alpha\beta}=A^{rs}_{\sigma\tau}\frac{\partial u^\sigma}{\partial\bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\tau}{\partial\bar{u}^\beta}.$$

3. Если мы одновременно перейдем от x^r и u^α к новым координатам $\bar{x}^r$ и $\bar{u}^\alpha$, то новые составляющие выражаются так:

$$\bar{A}^{rs}_{\alpha\beta}=A^{mn}_{\sigma\tau}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^n}\frac{\partial u^\sigma}{\partial\bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\tau}{\partial\bar{u}^\beta}.$$

§ 2. Векторы, касательные к поверхности

Уравнения поверхности могут быть записаны так:

$$x^r=x^r(u^1, u^2). \tag{1}$$

Если мы возьмем небольшое перемещение du^α на поверхности, то составляющие этого перемещения в пространстве выражаются следующим образом:

$$dx^r=\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}du^\alpha. \tag{2}$$

Теперь dx^r является пространственным вектором и скаляром на поверхности, т. е. его составляющие не изменятся, если преобразовать только u-координаты. Точно так же du^α есть вектор на поверхности и пространственный скаляр. Следовательно, если мы рассмотрим (2) сначала с точки зрения преобразования пространственных координат, а затем с точки зрения преобразования координат на поверхности, то увидим, что $\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}$ есть контравариантный пространственный вектор, а также ковариантный вектор на поверхности, поэтому он может быть обозначен так:

$$\boxed{x_\alpha^r \equiv \frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}\,.} \tag{3}$$

Каждое направление $\frac{du^\alpha}{ds}$ на поверхности, как видно из (2), в пространственных координатах записывается так:

$$\frac{dx^r}{ds} = x_\alpha^r \frac{du^\alpha}{ds}\,. \tag{4}$$

Кроме того, каждый вектор определяется направлением и величиной. Следовательно, каждый вектор на поверхности A^α имеет соответствующий ему пространственный вектор

$$\boxed{A^r = x_\alpha^r A^\alpha,} \tag{5}$$

и эти два вектора определяются одним и тем же направлением и одной и той же величиной. Вектор A^r, направление которого совпадает с направлением касательной к поверхности, называется *вектором касательным к поверхности*

§ 3. Первая основная квадратичная форма поверхности

Линейный элемент в пространственных координатах равен

$$ds^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n, \tag{6}$$

а в координатах на поверхности он же равен

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta\,. \tag{7}$$

Если мы возьмем одно и то же перемещение на поверхности и в пространстве, то два значения для ds^2 должны быть равны. Но зависимость между dx^r и du^α на том же самом участке определяется формулами (2); поэтому мы должны иметь для любого перемещения du^α на поверхности

$$g_{mn}\,dx^m\,dx^n = g_{mn}x^m_\alpha x^n_\beta\,du^\alpha\,du^\beta = a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta\,.$$

Поэтому

$$a_{\alpha\beta} = g_{mn}x^m_\alpha x^n_\beta\,, \tag{8}$$

поскольку $a_{\alpha\beta}$ и g_{mn} симметричны относительно своих индексов. Итак, если мы знаем g_{mn} и уравнения нашей поверхности, мы можем тотчас же вычислить $a_{\alpha\beta}$.

Дифференциальная квадратичная форма

$$\boxed{A \equiv a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta} \tag{9}$$

называется *первой основной квадратичной формой поверхности*; для краткости мы будем обозначать ее через A. Она, очевидно, определяет квадрат длины элементарного смещения du^α на поверхности.

Упражнения

1. Показать, что $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}x^r_1$ и $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}x^r_2$ являются единичными пространственными векторами, касательными соответственно к кривой u^1 и кривой u^2.

2. Показать, что $\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$ есть косинус угла между координатными кривыми на поверхности.

3. Показать, что длины векторов A^r и A^α, где $A^r = x^r_\alpha A^\alpha$, равны между собой; доказать, что эти векторы определяют одно и то же направление на поверхности.

4. Доказать, что $A_\alpha = x^r_\alpha A_r$.

§ 4. Вектор, нормальный к поверхности

Теперь мы найдем выражение для вектора, нормального к поверхности в любой ее точке.

Положим, что X^α и Y^α — два вектора на поверхности такие, что поворот от X^α и Y^α *положителен*, т. е.

17*

совпадает с поворотом от кривой u^1 к кривой u^2. Соответствующие пространственные составляющие этих векторов будут

$$X^r = x^r_\alpha X^\alpha, \qquad Y^r = x^r_\alpha Y^\alpha. \tag{10}$$

Единичный вектор, нормальный к поверхности, ортогонален как к X^r, так и к Y^r, которые являются касательными векторами. Отсюда, если мы обозначим *единичный нормальный вектор* через ξ^r, то его ковариантные составляющие будут

$$\xi_r (XY \sin\theta) = \varepsilon_{rst} X^s Y^t, \tag{11}$$

где X, Y — длины векторов X^r, Y^r, а θ — угол между ними. Направление ξ^r таково, что *ориентация триэдра* (X^r, Y^r, ξ^r) *в пространстве положительна.*

Из (11) мы получаем, что

$$\xi_r (XY \sin\theta) = \varepsilon_{rst} x^s_\alpha x^t_\beta X^\alpha Y^\beta,$$

но

$$XY \sin\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta,$$

так как поворот (X^α, Y^α) положителен. Отсюда

$$(\xi_r \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{rst} x^s_\alpha x^t_\beta) X^\alpha Y^\beta = 0,$$

и это верно для всех значений поверхностных векторов X^α, Y^α. Поэтому

$$\xi_r \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{rst} x^s_\alpha x^t_\beta. \tag{12}$$

Умножая это равенство на $\varepsilon^{\alpha\beta}$, мы получим, что

$$\boxed{\xi_r = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{rst} x^s_\alpha x^t_\beta,} \tag{13}$$

откуда ясно видно, что ξ_r есть ковариантный пространственный вектор и скаляр на поверхности.

Упражнения

1. Показать, что $\xi_r x^r_\alpha = 0$.

2. Показать, что векторы (x^r_1, x^r_2, ξ^r) имеют ту же ориентацию, что и касательные векторы к x-координатным кривым т. е. ориентация этой тройки положительна.

3. Доказать, что $\varepsilon^{\alpha\beta}x^r_\alpha x^s_\beta=\varepsilon^{mrs}\xi_m$.

4. *Специальная система координат.* Показать, что если мы выберем пространственные координаты ортогональными и такими, что $x^3=0$ есть уравнение заданной поверхности, а в качестве u-кривых выберем пересечение заданной поверхности с x^1- и x^2-поверхностями, то для всех точек поверхности будут иметь место следующие соотношения:

а) $x^r_1=\delta^r_1, \quad x^r_2=\delta^r_2$;

б) $a_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3}=0, \quad a^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3}=0, \quad g^{33}=\dfrac{1}{g_{33}}$;

в) $\xi^r=\left(0,\ 0\dfrac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right)$.

5. Приняв специальную систему координат из задачи 4, показать справедливость тензорного равенства

$$a^{\alpha\beta}x^r_\alpha x^s_\beta=g^{rs}-\xi^r\xi^s.$$

6. *Проекция вектора на поверхность.* Из задачи 5 получить, что проекция вектора X^r на поверхность есть вектор $a^{\alpha\beta}x^r_\alpha x^m_\beta X_m$. [Проекция X^r на поверхность есть $\{X^r-\xi^r(\xi^s X_s)\}$.]

§ 5. Тензорное дифференцирование тензоров

Следующей нашей задачей является образование новых тензоров путем дифференцирования заданных тензорных полей. Мы применим для этого уже использованные выше методы (см. стр. 198, 239).

Рассмотрим сначала лежащую на данной поверхности кривую C, причем вдоль нее изменяется параметр t. Если X^r — пространственный вектор, который определен на кривой C и который образует в *пространстве* параллельное векторное поле, то, как мы знаем (стр. 193), этот вектор должен удовлетворять уравнениям

$$\frac{\delta X^r}{\delta t}=\frac{dX^r}{dt}+(\Gamma^r_{mn})_g X^m\frac{dx^n}{dt}=0. \tag{14}$$

Здесь символ Кристоффеля относится к пространственным координатам и записывается с латинскими индексами. Для того чтобы избежать смешения с символом Кристоффеля на поверхности, мы ввели отметку «g» с целью показать, что он порождается тензором g_{mn}. Аналогичные уравнения, которым должны удовлетворять ковариантные составляющие X_r параллельного векторного поля, будут

$$\frac{\delta X_r}{\delta t}=\frac{dX_r}{dt}-(\Gamma^m_{rn})_g X_m\frac{dx^n}{dt}=0. \tag{15}$$

Далее, если X^α — вектор на поверхности, который определен на кривой C и который образует параллельное векторное поле *относительно поверхности*, то мы знаем (стр. 236), что X^α должен удовлетворять уравнениям

$$\frac{\delta X^\alpha}{\delta t}=\frac{dX^\alpha}{dt}+(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_a X^\beta\frac{du^\gamma}{dt}=0, \tag{16}$$

а его ковариантные составляющие X_α — уравнениям

$$\frac{\delta X_\alpha}{\delta t}=\frac{dX_\alpha}{dt}-(\Gamma^\beta_{\alpha\gamma})_a X_\beta\frac{du^\gamma}{dt}=0. \tag{17}$$

Символы Кристоффеля в этих формулах относятся к поверхности и записаны с греческими индексами. Отметка «a» показывает, что они порождены тензором $a_{\alpha\beta}$.

Возьмем теперь тензорное поле, определенное на C, например $X^r_{\alpha\beta}$; это — контравариантный пространственный вектор и ковариантный тензор второго порядка на поверхности. Мы возьмем A_r — ковариантное векторное поле на C, параллельное относительно пространства, и B^α, C^α — два контравариантных векторных поля, параллельных относительно поверхности. Тогда $X^r_{\alpha\beta}A_rB^\alpha C^\alpha$ есть скалярная функция от t. Ее производная по t является поэтому тоже скаляром как в пространстве, так и на поверхности. Поэтому, используя условие параллельности полей, мы получаем

$$\frac{d}{dt}(X^r_{\alpha\beta}A_rB^\alpha C^\beta)=\frac{dX^r_{\alpha\beta}}{dt}A_rB^\alpha C^\beta+X^r_{\alpha\beta}\frac{dA_r}{dt}B^\alpha C^\beta+$$

$$+X^r_{\alpha\beta}A_r\frac{dB^\alpha}{dt}C^\beta+X^r_{\alpha\beta}A_rB^\alpha\frac{dC^\beta}{dt}=$$

$$=\left\{\frac{dX^r_{\alpha\beta}}{dt}+(\Gamma^r_{mn})_g X^m_{\alpha\beta}\frac{dx^n}{dt}-(\Gamma^\sigma_{\alpha\tau})_a X^r_{\sigma\beta}\frac{du}{dt}-\right.$$

$$\left.-(\Gamma^\sigma_{\beta\tau})_a X^r_{\alpha\sigma}\frac{du^\tau}{dt}\right\}A_rB^\alpha C^\beta.$$

Это — скаляр при произвольных векторах A_r, B^α, C^α. Следовательно, на основании обратного тензорного признака выражение

$$\boxed{\frac{\delta X^r_{\alpha\beta}}{\delta t}=\frac{dX^r_{\alpha\beta}}{dt}+(\Gamma^r_{mn})_g\, X^m_{\alpha\beta}\frac{dx^n}{dt}-(\Gamma^\sigma_{\alpha\tau})_a\, X^r_{\sigma\beta}\frac{du^\tau}{dt}-(\Gamma^\sigma_{\beta\tau})_a\, X^r_{\alpha\sigma}\frac{du^\tau}{dt}} \tag{18}$$

является тензором того же типа, что и $X^r_{\alpha\beta}$. Мы назовем этот тензор *абсолютной производной* $X^r_{\alpha\beta}$ *по* t.

Если $X^r_{\alpha\beta}$ определен на всей поверхности, его составляющие являются функциями u^α и мы имеем тензорное поле на поверхности. Поэтому, если C есть *какая угодно* кривая на поверхности, мы снова получим

$$\frac{\delta X^r_{\alpha\beta}}{\delta t}=\left[\frac{\partial X^r_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+(\Gamma^r_{mn})_g\, X^m_{\alpha\beta}x^n_\gamma-(\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma})_a\, X^r_{\sigma\beta}-(\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})_a X^r_{\alpha\sigma}\right]\frac{du^\gamma}{dt}.$$

Так как $\frac{du^\gamma}{dt}$ вследствие произвольности кривой C — произвольный вектор на поверхности и так как правая часть последнего равенства есть тензор, то объект

$$\boxed{X^r_{\alpha\beta,\,\gamma}=\frac{\partial X^r_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+(\Gamma^r_{mn})_g\, X^m_{\alpha\beta}x^n_\gamma-(\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma})_a\, X^r_{\sigma\beta}-(\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})_a\, X^r_{\alpha\sigma}} \tag{19}$$

есть тензор, который один раз контравариантен в пространственных координатах и трижды ковариантен в поверхностных координатах. Мы назовем его *тензорной производной* $X^r_{\alpha\beta}$ *по* u^γ.

Подобным же образом можно рассмотреть тензоры любых других типов и получить соответствующие выражения для абсолютных и тензорных производных.

Далее, если так выбрать специальные системы пространственных и поверхностных координат, чтобы пространственные координаты были декартовыми и поверхностные координаты — геодезическими в любой заданной точке поверхности, то сразу будет видно, что абсолютная и тензорная производные сводятся в данной точке поверхности к обычным производным. Следовательно, к абсолютному и тензорному дифференцированию суммы и произведения применимы те же самые правила, что и для обычного дифференцирования. Следовательно, производные тензоров g_{rs}, $a_{\alpha\beta}$, ε_{rst}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и их ассоциированных тензоров все равны тождественно нулю, так как их обычные производные в упомянутой специальной системе координат обращаются в нуль. Эти тензоры в процессе тензорного дифференцирования могут рассматриваться как постоянные.

Упражнения

1. Написать формулы для абсолютной и тензорной производной тензора X^r_α.

2. Показать, что если тензор есть скаляр в одной из систем координат (безразлично, в пространстве или на поверхности), то производная этого тензора совпадает с абсолютной или ковариантной производной, определенной на стр. 199 и 240.

§ 6. Формулы Гаусса. Вторая основная квадратичная форма поверхности

Возьмем тензор x^r_α из § 2 (стр. 258). Его тензорная производная равна

$$x^r_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 x^r}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + (\Gamma^r_{mn})_g x^m_\alpha x^n_\beta - (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})_a x^r_\sigma \tag{20}$$

и симметрична относительно индексов α и β.

Мы имеем соотношение

$$g_{mn} x^m_\alpha x^n_\beta = a_{\alpha\beta},$$

и если взять тензорную производную этого равенства, получим

$$g_{mn} x^m_{\alpha,\gamma} x^n_\beta + g_{mn} x^m_\alpha x^n_{\beta,\gamma} = a_{\alpha\beta,\gamma} = 0.$$

Написав затем два равенства, получаемых из этого круговой перестановкой индексов α, β, γ, складывая затем два из этих равенств и вычитая третье, мы получим, что

$$g_{mn} x^m_{\alpha,\beta} x^n_\gamma = 0, \tag{21}$$

так как тензор $x^r_{\alpha,\beta}$ симметричен относительно α и β. Этот результат, будучи интерпретирован геометрически, означает, что $x^r_{\alpha,\beta}$ — пространственный вектор, ортогональный к поверхности. Поэтому он совпадает по направлению с единичным нормальным вектором ξ^r и должно существовать такое число $b_{\alpha\beta}$, что

$$\boxed{x^r_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta}\xi^r.} \tag{22}$$

Из этого равенства мы видим, что $b_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор второго порядка на поверхности и в то же время пространственный скаляр. Равенства (22) известны как *формулы Гаусса*.

Кроме того, дифференциальная квадратичная форма

$$\boxed{B = b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta} \tag{23}$$

носит название *второй основной квадратичной формы поверхности*; мы будем обозначать ее коротко через B.

Упражнения

1. Доказать, что $b_{\alpha\beta} = g_{mn}x^m_{\alpha,\beta}\,\xi^n = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\sigma\tau}\varepsilon_{mnp}x^m_{\alpha,\beta}x^n_\sigma x^p_\tau$.

2. Показать, что если x-координаты — декартовы, то

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\sigma\tau}\varepsilon_{mnp}\frac{\partial^2 x^m}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}\,x^n_\sigma x^p_\tau.$$

3. Пространственные координаты — прямоугольные декартовы и выбраны так, что касательная плоскость в начале координат, находящемся на поверхности, имеет уравнение $x^3 = 0$. Если x^1 и x^2 выбраны в качестве параметров u^1, u^2, то показать, что в начале координат будет:

а) $x^r_1 = \delta^r_1$, $x^r_2 = \delta^r_2$; б) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $a = 1$;

в) $(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})_a = 0 = (\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta})_a$; г) $\xi^r = (0,\ 0,\ 1)$;

д) $\dfrac{\partial^2 x^1}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = \dfrac{\partial^2 x^2}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = 0$, $\dfrac{\partial^2 x^3}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta} = b_{\alpha\beta}$.

Вывести формулы Гаусса из результатов г) и д).

§ 7. Формулы Вейнгартена. Третья основная квадратичная форма поверхности

Рассмотрим тензорную производную единичного нормального вектора ξ^r. Так как он является контравариантным пространственным вектором и скаляром на поверхности, то легко видеть, что его тензорная производная равна

$$\xi^r{}_{,\alpha} = \frac{\partial \xi^r}{\partial u^\alpha} + (\Gamma^r_{mn})_g \, \xi^m x^n_\alpha. \tag{24}$$

Поскольку ξ^r есть единичное векторное поле, то

$$g_{mn}\xi^m\xi^n = 1.$$

Взяв тензорную производную этого равенства, получим

$$g_{mn}\xi^m{}_{,\alpha}\xi^n + g_{mn}\xi^m\xi^n{}_{,\alpha} = 0$$

или

$$g_{mn}\xi^m\xi^n{}_{,\alpha} = 0.$$

Это равенство показывает, что пространственный вектор $\xi^r{}_{,\alpha}$ ортогонален к ξ^r и является поэтому вектором, касательным к поверхности. Отсюда $\xi^r{}_{,\alpha}$ может быть выражен линейно через касательный вектор x^r_α, т. е. существует такое число η^β_α, что

$$\xi^r{}_{,\alpha} = \eta^\beta_\alpha x^r_\beta. \tag{25}$$

Но так как ξ^r нормален к поверхности, то

$$g_{mn}x^m_\alpha \xi^n = 0.$$

Следовательно, взяв тензорную производную этого равенства, мы получаем

$$g_{mn}x^m_{\alpha,\beta}\xi^n + g_{mn}x^m_\alpha \xi^n{}_{,\beta} = 0.$$

Если воспользоваться формулами (22) и (25), то получим

$$b_{\alpha\beta} + g_{mn}x^m_\alpha x^n_\gamma \eta^\gamma_\beta = 0$$

или

$$b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\gamma}\eta^\gamma_\beta.$$

Находя отсюда η^γ_β, мы получаем

$$\eta^\gamma_\beta = -a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta}.$$

Следовательно, (25) принимает вид

$$\boxed{\xi^r{}_{,\alpha} = -a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}x^r_\gamma\,.} \tag{26}$$

Эти равенства известны как *формулы Вейнгартена.* Они дают выражения для производных единичного нормального вектора.

Получив выражения для производных ξ^r, можно образовать третью квадратичную дифференциальную форму. Если положить

$$c_{\alpha\beta} = g_{mn}\xi^m_{,\alpha}\xi^n_{,\beta}, \tag{27}$$

то очевидно, что $c_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор второго порядка на поверхности. Образовав квадратичную форму

$$\boxed{C \equiv c_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,} \tag{28}$$

назовем ее *третьей основной квадратичной формой* поверхности. Используя формулы Вейнгартена, мы находим из (27), что

$$c_{\alpha\beta} = g_{mn}a^{\sigma\mu}b_{\sigma\alpha}x^m_\mu a^{\tau\nu}b_{\tau\beta}x^n_\nu = a_{\mu\nu}a^{\sigma\mu}a^{\tau\nu}b_{\sigma\alpha}b_{\tau\beta},$$

или

$$c_{\alpha\beta} = a^{\sigma\tau}b_{\sigma\alpha}b_{\tau\beta}. \tag{29}$$

Упражнения

1. Доказать, что $g_{mn}\xi^m_{,\alpha}x^n_\beta = -b_{\alpha\beta}$.

2. Показать, что если $\beta^{\gamma\delta}$ является алгебраическим дополнением $b_{\gamma\delta}$ в $|b_{\gamma\delta}|$, деленным на $|b_{\gamma\delta}|$, то на основании (26) будет

$$x^r_\alpha = -a_{\alpha\delta}\beta^{\delta\gamma}\xi^r_{,\gamma}.$$

3. Доказать, что $a^{\alpha\beta}x^r_{\alpha,\beta} = 2H\xi^r$, где положено $H = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$; H называется *средней кривизной поверхности.*

§ 8. Уравнения Гаусса — Кодацци

Мы уже рассмотрели тензорную производную объекта x^r_α, а именно $x^r_{\alpha,\beta}$. Возьмем теперь ее тензорную производную, или, что то же самое, вторую тензорную производную объекта x^r_α. Это будет

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial x^r_{\alpha,\beta}}{\partial u^\gamma} + (\Gamma^r_{mn})_g\, x^m_{\alpha,\beta}x^n_\gamma - (\Gamma^\delta_{\alpha\gamma})_a\, x^r_{\delta,\beta} - (\Gamma^\delta_{\beta\gamma})_a x^r_{\alpha,\delta}. \tag{30}$$

Предположим на время, что x-координаты — декартовы и u-координаты — геодезические в данной точке P поверхности. Тогда пространственные символы Кристоффеля везде равны нулю вместе с их производными, в то время как все символы Кристоффеля на поверхности исчезают только в точке P. Из (20), стр. 264, и (30) заключаем, что в таких системах координат мы имеем в точке P

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{\partial^3 x^2}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta\, \partial u^\gamma} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})_a\, x^r_\sigma,$$

а все другие члены исчезают в этой точке. Если здесь переставить индексы α и β и вычесть эти две формулы одну из другой, мы получим

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} - x^r_{\alpha,\gamma\beta} = \left[\frac{\partial}{\partial u^\beta} (\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma})_a - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})_a\right] x^r_\alpha. \qquad (31)$$

Но в наших специальных системах (см. стр. 242)

$$R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma})_a - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})_a,$$

где $R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma}$ — тензор Римана — Кристоффеля поверхности. Отсюда (31) примет вид

$$\boxed{x^r_{\alpha,\beta\gamma} - x^r_{\alpha,\gamma\beta} = R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma} x^r_\sigma} \qquad (32)$$

Это — тензорное равенство, которое справедливо в специально выбранной системе координат и поэтому справедливо во всех вообще системах координат. Но (стр. 265)

$$x^r_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta}\xi^r.$$

Взяв тензорную производную от обеих частей, мы получаем при помощи (26)

$$x^r_{\alpha,\beta\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma}\,\xi^r + b_{\alpha\beta}\xi^r_{,\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma}\,\xi^r - b_{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}b_{\sigma\gamma}x^r_\tau,$$

где $b_{\alpha\beta,\gamma}$ — тензорная производная $b_{\alpha\beta}$, т. е.

$$b_{\alpha\beta,\,\gamma} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - (\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma})_a\, b_{\sigma\beta} - (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma})_a\, b_{\alpha\sigma}. \qquad (33)$$

Отсюда

$$x^r_{\alpha,\,\beta\gamma} - x^r_{\alpha,\,\gamma\beta} = (b_{\alpha\beta,\,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\,\beta})\,\xi^r - a^{\sigma\tau}(b_{\alpha\beta}b_{\sigma\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\sigma\beta})\,x^r_\tau.$$

Воспользовавшись (32), имеем

$$R^{\sigma}_{.\alpha\beta\gamma} x^r_\sigma = (b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta})\,\xi^r - a^{\sigma\tau}(b_{\alpha\beta} b_{\sigma\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\sigma\beta})\, x^r_\tau. \qquad (34)$$

Во-первых, умножим (34) на ξ_r и используем тот факт, что $x^r_\alpha \xi_r = 0$; мы получим

$$\boxed{b_{\alpha\beta,\gamma} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0.} \qquad (35)$$

Эти равенства носят название *уравнений Кодацци*.

Во-вторых, умножим (34) на $g_{rs} x^s_\varrho$; мы получим

$$\boxed{R_{\varrho\alpha\beta\gamma} = b_{\varrho\beta} b_{\alpha\gamma} - b_{\varrho\gamma} b_{\alpha\beta}\,.} \qquad (36)$$

Эти равенства называются *уравнениями Гаусса*. Если вспомнить, что греческие индексы пробегают значения 1 и 2, то мы увидим, что существует только два независимых уравнения Кодацци и только одно независимое уравнение Гаусса.

Если мы введем полную кривизну K поверхности посредством равенств (52) (стр. 243), то (36) примет вид

$$K \varepsilon_{\varrho\alpha} \varepsilon_{\beta\gamma} = b_{\varrho\beta} b_{\alpha\gamma} - b_{\varrho\gamma} b_{\alpha\beta}. \qquad (37)$$

Если умножить эти равенства на $a^{\varrho\gamma}$ и использовать соотношение

$$a_{\alpha\beta} = -a^{\varrho\gamma} \varepsilon_{\varrho\alpha} \varepsilon_{\beta\gamma},$$

то мы получим

$$-K a_{\alpha\beta} = a^{\varrho\gamma} b_{\varrho\beta} b_{\gamma\alpha} - a^{\varrho\gamma} b_{\varrho\gamma} b_{\alpha\beta},$$

но (стр. 267)

$$a^{\varrho\gamma} b_{\varrho\alpha} b_{\gamma\beta} = c_{\alpha\beta}.$$

Введем обозначение

$$\boxed{2H = a^{\varrho\gamma} b_{\varrho\gamma}} \qquad (38)$$

и назовем скаляр H *средней кривизной поверхности*. Следовательно,

$$-K a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - 2H b_{\alpha\beta}$$

или

$$c_{\alpha\beta} - 2H b_{\alpha\beta} + K a_{\alpha\beta} = 0. \qquad (39)$$

Из (39) мы получаем соотношение, связывающее три основные квадратичные формы поверхности,

$$\boxed{C-2HB+KA=0.} \tag{40}$$

Упражнения

1. Доказать, что $K=\dfrac{R_{1212}}{a}=\dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{a}=\dfrac{b}{a}$.

2. Доказать, что $a^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}=4H^2-2K$.

3. Показать, что если λ^α — единичный вектор на поверхности, то

$$K=2Hb_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta-c_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.$$

[По (40) $A=a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta=ds^2$, $B=Ab_{\alpha\beta}\dfrac{du^\alpha}{ds}\dfrac{du^\beta}{ds}$, $C=Ac_{\alpha\beta}\dfrac{du^\alpha}{ds}\dfrac{du^\beta}{ds}$, и нам остается только положить $\lambda^\alpha=\dfrac{du^\alpha}{ds}$.]

4. Доказать, что $g_{mn}\xi^m\xi^n_{,\alpha\beta}=-c_{\alpha\beta}$.

[Этот результат получается, если взять тензорную производную равенства $g_{mn}\xi^m\xi^n_{,\alpha}=0$.]

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XV

1. Доказать, что если X^r — единичный вектор, то

$$a^{\alpha\beta}x^m_\alpha x^n_\beta X_m X_n=\sin^2\theta,$$

где θ — угол между X^r и единичным нормальным вектором ξ^r.

2. Доказать, что

$$\xi^r_{,\alpha\beta}=-c_{\alpha\beta}\xi^r-a^{\sigma\tau}b_{\sigma\alpha,\beta}x^r_\tau.$$

3. Доказать, что

$$a^{\alpha\beta}\xi^r_{,\alpha\beta}=-(4H^2-2K)\xi^r-2a^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial u^\alpha}x^r_\beta.$$

[Здесь $\dfrac{\partial H}{\partial u^\alpha}=\dfrac{1}{2}a^{\sigma\tau}b_{\sigma\tau,\alpha}$, после чего использовать уравнения Кодацци.]

4. Показать, что если уравнения поверхности даны в форме $x^1 = u^1$, $x^2 = u^2$, $x^3 = f(u^1, u^2)$ и x-координаты — декартовы и ортогональны, то, введя обозначения

$$p = \frac{\partial x^3}{\partial x^1}, \quad q = \frac{\partial x^3}{\partial x^2}, \quad r = \frac{\partial^2 x^3}{(\partial x^1)^2}, \quad s = \frac{\partial^2 x^3}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 x^3}{(\partial x^2)^2},$$

мы получим следующие результаты:

а) $a_{11} = 1 + p^2$, $a_{22} = 1 + q^2$, $a_{12} = pq$, $a = 1 + p^2 + q^2$;

б) $a^{11} = \dfrac{1+q^2}{1+p^2+q^2}$, $a^{22} = \dfrac{1+p^2}{1+p^2+q^2}$, $a^{12} = -\dfrac{pq}{1+p^2+q^2}$;

в) $\xi^r = \left\{ -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ -\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\}$;

г) $b_{11} = \dfrac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $b_{12} = \dfrac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $b_{22} = \dfrac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$;

д) $c_{11} = \dfrac{r^2 + s^2 + (ps - qr)^2}{(1+p^2+q^2)^2}$,

$$c_{12} = \frac{st(1+p^2) + rs(1+q^2) - pq(rt+s^2)}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$c_{22} = \frac{s^2 + t^2 + (pt - qs)^2}{(1+p^2+q^2)^2};$$

е) $K = \dfrac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$,

$$2H = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

5. Показать, что если φ — функция координат на поверхности, то

$$\varphi^r = a^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha} x^r_\beta = \frac{1}{a} x^r_1 \left(a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{a} x^r_2 \left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right)$$

есть вектор, касательный к поверхности.

6. Показать, что $\nabla\varphi = g_{mn}\varphi^m\varphi^n$, где φ^r определены в упражнении 5.

7. Показать, что если $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ выбраны в качестве новых координатных кривых на поверхности (φ, ψ являются функциями u^α), то новый метрический тензор $\bar{a}_{\alpha\beta}$ определяется так:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}\nabla\varphi, \quad \bar{a}_{12} = -\bar{a}\nabla(\varphi, \psi), \quad \bar{a}_{22} = \bar{a}\nabla\psi.$$

8. *Поверхностная дивергенция пространственного вектора.* Показать, что если A^r — пространственный вектор, определенный

на поверхности, то $g_{mn}a^{\alpha\beta}A^m_{,\alpha}x^n_\beta$ есть скаляр. Его часто называют *поверхностной дивергенцией вектора* A^r.

9. *Доказать, что поверхностная дивергенция* ξ^r *равна* $-2H$.

10. Доказать, что если мы рассмотрим семейство поверхностей $\varphi(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$, то средняя кривизна любой поверхности семейства будет

$$2H = -g^{rs}\left(\frac{\varphi_{,r}}{\sqrt{g^{mn}\varphi_{,m}\varphi_{,n}}}\right)_{,s}.$$

[Использовать, что $\xi_r = \dfrac{\varphi_{,r}}{\sqrt{g^{mn}\varphi_{,m}\varphi_{,n}}}$, где $\varphi_{,r} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}$.]

11. Показать что если $A^r = C\xi^r + B^\alpha x^r_\alpha$, то $C = A^r\xi_r$, $B^\alpha = a^{\alpha\beta}g_{mn}A^m x^n_\beta$ и поверхностная дивергенция A^r будет

$$B^\alpha_{,\alpha} - 2CH = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\sqrt{a}B^\alpha) - 2CH.$$

12. Вывести из предыдущего упражнения, что если мы возьмем замкнутый контур C на поверхности и проинтегрируем поверхностную дивергенцию вектора A^r по внутренней площади S контура, то получим

$$\iint\limits_S g_{mn}a^{\alpha\beta}A^m_{,\alpha}x^n_\beta dS = \int\limits_C B_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}ds - 2\iint\limits_S CH dS.$$

13. *Поверхностный вихрь пространственного вектора.* Показать, что если A^r — пространственный вектор, определенный на поверхности, то $\varepsilon_{rmn}a^{\alpha\beta}A^m_{,\alpha}x^n_\beta$ — также пространственный вектор. Его иногда называют *поверхностным вихрем*.

14. Доказать, что поверхностный вихрь вектора ξ^r равен нулю.

15. Доказать, что если мы имеем замкнутый контур C на поверхности, то

$$\iint\limits_S a^{\alpha\beta}\varepsilon_{rmn}\xi^r A^m_{,\alpha}x^n_\beta dS = -\int\limits_C g_{mn}A^m x^n_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}ds$$

(см. задачу 3, стр. 251).

ГЛАВА XVI

КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Уравнение кривой на поверхности

Как и раньше, мы вводим в рассмотрение поверхностные координаты u^α и пространственные координаты x^r. Уравнения поверхности тогда имеют вид

$$x^r = x^r(u^1, u^2). \tag{1}$$

Если координаты u^α заданы как функции параметра, то, когда параметр изменяется, точка, представляемая этими координатами, описывает кривую на поверхности.

В дальнейшем мы примем в качестве параметра длину дуги s кривой; поэтому уравнения кривой на поверхности будут

$$u^\alpha = u^\alpha(s). \tag{2}$$

В соответствии с (1) пространственные координаты какой-нибудь точки кривой также являются функциями s, и уравнения кривой в пространстве будут

$$x^r = x^r(s). \tag{3}$$

Рассматривая кривую в пространстве, обозначим единичный вектор касательной через λ^r, единичный вектор главной нормали через μ^r и единичный вектор бинормали через ν^r. Тогда кривизна $\varkappa$ и кручение τ кривой связаны с этими векторами при помощи формул Френе (стр. 214)

$$\frac{\delta\lambda^r}{\delta s} = \varkappa\mu^r, \quad \frac{\delta\mu^r}{\delta s} = \tau\nu^r - \varkappa\lambda^r, \quad \frac{\delta\nu^r}{\delta s} = -\tau\mu^r. \tag{4}$$

Рассматривая кривую на поверхности, обозначим единичный вектор касательной к ней через λ^α и единичный вектор ее нормали, лежащей в плоскости, касательной к поверхности, через ϱ^α. Тогда ее геодезическая кривизна связана с этими векторами поверхностными формулами Френе (стр. 245)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}&=\sigma\varrho^\alpha,\\ \frac{\delta\varrho^\alpha}{\delta s}&=-\sigma\lambda^\alpha.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Упражнения

1. Доказать, что $\lambda^r=x^r_\alpha\lambda^\alpha$, где $x^r_\alpha=\dfrac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}$.

2. Доказать, что пространственный вектор, перпендикулярный к λ^r и касающийся поверхности, есть $\varrho^r=x^r_\alpha\varrho^\alpha$.

3. Доказать, что если θ — угол между μ^r и единичным вектором нормали к поверхности ξ^r, то

$$\sin\theta=g_{mn}\mu^m x^n_\alpha\varrho^\alpha.$$

§ 2. Теорема Менье

Мы знаем, что

$$\lambda^r=\frac{dx^r}{ds},\quad \lambda^\alpha=\frac{du^\alpha}{ds},\tag{6}$$

причем x^r и u^α связаны посредством уравнений (1). Отсюда

$$\lambda^r=\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds}=x^r_\alpha\lambda^\alpha.$$

Возьмем абсолютную производную этого равенства по s; получим

$$\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}=x^r_\alpha\frac{\delta a^r}{\delta s}+x^r_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha\frac{du^\beta}{ds}.$$

При помощи формул Френе (4) и (5) отсюда имеем

$$\varkappa\mu^r=\sigma x^r_\alpha\varrho^\alpha+x^r_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.$$

Обозначим ϱ^r пространственный вектор, определяющий на поверхности то же самое направление, что и ϱ^α; тогда $\varrho^r=x^r_\alpha\varrho^\alpha$. Используя (22), стр. 265, мы получим

$$\varkappa\mu^r=\sigma\varrho^r+b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\xi^r,\tag{7}$$

где ξ^r — единичный вектор нормали к поверхности.

Обозначим через θ угол между главной нормалью μ^r и нормалью к поверхности ξ^r (рис. 31). Тогда

$$\cos\theta = \xi_r \mu^r. \tag{8}$$

Если мы умножим (7) на ξ_r, то получим

$$\boxed{\varkappa \cos\theta = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.} \tag{9}$$

Выражение $b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$ одинаково для всех кривых на поверхности, которые имеют один и тот же касательный вектор λ^α; следовательно, $\varkappa\cos\theta$ для всех этих кривых также одинаково. Отсюда следует теорема Менье:

Для всех кривых на поверхности, имеющих общую касательную, величина $\varkappa\cos\theta$ имеет одно и то же значение.

Величина $\varkappa\cos\theta$ называется нормальной кривизной поверхности в направлении λ^α; обозначив ее через $\varkappa_{(n)}$, получим

$$\boxed{\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.} \tag{10}$$

Эта формула определяет нормальную кривизну в любом направлении.

В частности, возьмем сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к ней; в этом случае угол θ равен либо 0, либо π, и следовательно, $\varkappa\cos\theta$ равно либо $\varkappa$, либо $-\varkappa$. Другими словами, нормальная кривизна поверхности в любом направлении равна по величине кривизне нормального сечения поверхности в этом направлении. Именно по этой причине выражение $\varkappa\cos\theta$ названо нормальной кривизной.

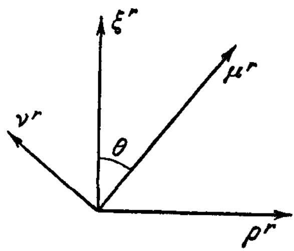

Рис. 31.

Вектор ϱ^r перпендикулярен к λ^r и поэтому лежит в плоскости, содержащей ξ^r и μ^r (рис. 31). Кроме того, он касается поверхности, вследствие чего угол между μ^r и ϱ^r равен $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Если умножить (7) на ϱ^r, то получим

$$\varkappa\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma$$

или

$$\boxed{\sigma = \varkappa \sin\theta.}$$

Эта формула связывает кривизну и геодезическую кривизну кривой на поверхности.

Упражнения

1. Доказать, что $\varkappa_{(n)} = \dfrac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}$.

2. Доказать, что нормальная кривизна в направлении координатных кривых равна $\dfrac{b_{11}}{a_{11}}$ и $\dfrac{b_{22}}{a_{22}}$.

3. Доказать, что если кривая на поверхности является геодезической, то она либо является прямой, либо ее главная нормаль ортогональна к поверхности в каждой точке, и обратно.

[Для геодезической линии $\sigma = 0$ и поэтому либо $\varkappa = 0$, либо $\theta = 0$ или π.]

§ 3. Главные кривизны. Теорема Гаусса

Нормальная кривизна поверхности в направлении λ^α есть

$$\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta,$$

где λ^α удовлетворяет соотношению

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 1.$$

Следовательно, направления, на которых нормальная кривизна равна $\varkappa_{(n)}$, определяются следующим уравнением второй степени:

$$(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(n)} a_{\alpha\beta})\, \lambda^\alpha\lambda^\beta = 0. \tag{11}$$

При помощи обычного метода нахождения экстремумов мы получаем, что направление, определяющее максимальное или минимальное значение $\varkappa_{(n)}$, удовлетворяет уравнению

$$(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(n)} a_{\alpha\beta})\, \lambda^\beta = 0, \tag{12}$$

и поэтому соответствующее значение $\varkappa_{(n)}$ должно быть корнем уравнения относительно θ

$$\boxed{|\, b_{\alpha\beta} - \theta a_{\alpha\beta} \,| = 0.} \tag{13}$$

Это уравнение имеет два корня, которые равны максимальному и минимальному значениям нормальной кривизны.

Уравнение (13) в явном виде будет

$$\theta^2 - a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\theta + \frac{b}{a} = 0$$

или, подставляя сюда значения H и K (стр. 269),

$$\theta^2 - 2H\theta + K = 0. \tag{14}$$

Корни этого уравнения называются *главными кривизнами поверхности*; мы обозначим их $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} \varkappa_1 + \varkappa_2 &= 2H, \\ \varkappa_1\varkappa_2 &= K. \end{aligned}} \tag{15}$$

Следовательно, $2H$ есть сумма главных кривизн поверхности, а K — гауссова кривизна поверхности — есть произведение главных кривизн.

Мы видели в главе о внутренней геометрии поверхности, что K есть скаляр на поверхности и зависит только от $a_{\alpha\beta}$. Отсюда вытекает *теорема Гаусса*:

Произведение главных кривизн поверхности есть скаляр на поверхности, именно ее полная или гауссова кривизна.

Упражнения

1. Найти уравнения для главных кривизн поверхности $x^1 = u^1$, $x^2 = u^2$, $x^3 = f(u^1, u^2)$, где x^i — прямоугольные декартовы координаты.

2. Доказать, что для поверхности $x^r = f^r(u^1) + u^2 \dfrac{df^r}{du^1}$ мы имеем $\varkappa_1\varkappa_2 = 0$.

[Это — поверхность, образованная касательными к пространственной кривой $x^r = f^r(u^1)$.]

§ 4. Линии кривизны

Теперь мы рассмотрим *направления*, которые определяют главные кривизны. Они называются *главными направлениями*, и, очевидно, в каждой точке их имеется два. Главные направления определяются подстановкой $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ вместо $\varkappa_{(n)}$ в (12). Поэтому, обозначив главные направления через $\lambda^{\alpha}_{(1)}$ и $\lambda^{\alpha}_{(2)}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} (b_{\alpha\beta} - \varkappa_1 a_{\alpha\beta})\,\lambda^{\beta}_{(1)} = 0, \\ (b_{\alpha\beta} - \varkappa_2 a_{\alpha\beta})\,\lambda^{\beta}_{(2)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если умножить первое из этих уравнений на $\lambda^{\alpha}_{(2)}$, второе — на $\lambda^{\alpha}_{(1)}$ и затем вычесть, мы получим

$$(\varkappa_2 - \varkappa_1)\, a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(1)}\lambda^{\beta}_{(2)} = 0.$$

Предположим, что $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$; тогда

$$a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(1)}\lambda^{\beta}_{(2)} = 0,$$

откуда видно, что *главные направления взаимно ортогональны*. Кроме того,

$$b_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(1)}\lambda^{\beta}_{(2)} = \varkappa_1 a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}_{(1)}\lambda^{\beta}_{(2)} = 0. \tag{17}$$

Если взять какую-нибудь одну из систем уравнений (16), например первую, то в развернутом виде это будет

$$b_{1\beta}\lambda^{\beta}_{(1)} = \varkappa_1 a_{1\alpha}\lambda^{\alpha}_{(1)},$$
$$b_{2\beta}\lambda^{\beta}_{(1)} = \varkappa_1 a_{2\alpha}\lambda^{\alpha}_{(1)}.$$

Исключая $\varkappa_1$ из этих двух уравнений, мы получаем

$$a_{1\alpha}\lambda^{\alpha}_{(1)} b_{2\beta}\lambda^{\beta}_{(1)} = a_{2\alpha}\lambda^{\alpha}_{(1)} b_{1\beta}\lambda^{\beta}_{(1)}.$$

Другими словами, направление $\lambda^{\alpha}_{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = 0. \tag{18}$$

Подобным же образом мы получим, что $\lambda^{\alpha}_{(2)}$ удовлетворяет тому же уравнению; следовательно, (18) есть общее уравнение главных направлений. Если ввести обозначение

$$\boxed{h_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta},} \tag{19}$$

то уравнение для главных направлений примет вид

$$\boxed{h_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = 0.} \tag{20}$$

Кривая на поверхности, которая в любой из ее точек касается одного из главных направлений в этой точке, называется *линией кривизны*. Поэтому если du^α есть смещение вдоль линии кривизны, то du^α должно быть пропорционально либо $\lambda^\alpha_{(1)}$, либо $\lambda^\alpha_{(2)}$ и, следовательно,

$$h_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 0. \tag{21}$$

Это — уравнение линии кривизны на поверхности.

Упражнения

1. Доказать, что $\varkappa_1 = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(1)}$, $\varkappa_2 = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(2)}\lambda^\beta_{(2)}$.

2. *Теорема Эйлера.* Показать, что если направление λ^α составляет угол θ с главным направлением $\lambda^\alpha_{(1)}$, то нормальная кривизна для этого направления есть

$$\varkappa_{(n)} = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta.$$

[Мы имеем $\lambda^\alpha = \lambda^\alpha_{(1)}\cos\theta + \lambda^\alpha_{(2)}\sin\theta$. Тогда $\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$, и результат следует из (17) и результатов из задачи 1.]

3. Доказать, что

$$h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(2)} = \varkappa_2, \qquad h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(2)}\lambda^\beta_{(1)} = -\varkappa_1.$$

[Мы имеем $h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(2)} = \varepsilon^{\gamma\delta}a_{\gamma\alpha}b_{\delta\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(2)} = \varkappa_2\varepsilon^{\gamma\delta}a_{\gamma\alpha}a_{\delta\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(2)} = \varkappa_2\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(1)}\lambda^\beta_{(2)} = \varkappa_2$ (задача 2, стр. 227)].

4. Показать, что если λ^α — направление, составляющее угол θ с линией кривизны, то

$$h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = (\varkappa_2 - \varkappa_1)\sin\theta\cos\theta.$$

[$\lambda^\alpha = \lambda^\alpha_{(1)}\cos\theta + \lambda^\alpha_{(2)}\sin\theta$, затем использовать задачу 3.]

5. Показать, что если в качестве u-кривых взяты линии кривизны на поверхности, то $a_{12} = b_{12} = 0$.

§ 5. Асимптотические линии. Формула Эннепера

Направления на поверхности, определяемые уравнением

$$\boxed{b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0.} \tag{22}$$

называются *асимптотическими направлениями*. Кривые, касательные к которым совпадают с асимптотическими направлениями в каждой точке, называются *асимпто-*

тическими линиями поверхности. Очевидно, что в каждой точке существуют два асимптотических направления и, следовательно, существуют две асимптотические линии, проходящие через каждую точку поверхности.

Обратившись к уравнению (7), стр. 274, мы увидим, что для асимптотической линии справедливо соотношение

$$\varkappa \mu^r = \sigma \varrho^r.$$

Отсюда

$$\boxed{\varkappa = \pm \sigma, \quad \mu^r = \pm \varrho^r} \tag{23}$$

и, следовательно, *кривизна и геодезическая кривизна асимптотической линии равны по величине.* Кроме того, ее главная нормаль является касательной к поверхности, т. е. *бинормаль асимптотической линии совпадает с нормалью к поверхности.*

Теперь мы найдем хорошо известную формулу для кручения асимптотической линии. Для асимптотической линии мы имеем

$$\nu^r = \pm \xi^r. \tag{24}$$

Взяв абсолютную производную от обеих частей этого равенства, мы получим (стр. 273)

$$-\tau \mu^r = \frac{\delta \nu^r}{\delta s} = \pm \frac{\delta \xi^r}{\delta s} = \pm \xi^r_{,\alpha} \lambda^\alpha.$$

Следовательно (стр. 267),

$$\tau^2 = g_{mn}(\tau \mu^m)(\tau \mu^n) = g_{mn} \xi^m_{,\alpha} \xi^n_{,\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = c_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta.$$

Но (стр. 269)

$$c_{\alpha\beta} - 2H b_{\alpha\beta} + K a_{\alpha\beta} = 0.$$

Отсюда, если λ^α — асимптотическое направление, мы получим

$$c_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = -K a_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = -K.$$

Таким образом,

$$\boxed{\tau = \pm \sqrt{-K}.} \tag{25}$$

Это так называемая ***формула Эннепера:***

Кручение асимптотической линии равно $\pm\sqrt{-K}$, ***где*** K ***— полная кривизна поверхности.***

Упражнения

1. Доказать, что нормальная кривизна в асимптотическом направлении равна нулю.

2. Показать, что если в качестве u-кривых на поверхности выбрать асимптотические линии, то $b_{11}=b_{22}=0$ и

$$K=-\frac{b_{12}^2}{a},\ H=-\frac{a_{12}b_{12}}{a},\quad \frac{a_{12}}{b_{12}}=\frac{H}{K}.$$

3. Доказать, что если φ — угол между асимптотическими направлениями, то

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}.$$

§ 6. Геодезическое кручение кривой на поверхности

Обозначим через θ угол между ξ^r и μ^r, считаемый положительным от μ^r к ν^r. Тогда

$$\cos\theta=\xi^r\mu_r.$$

Дифференцируя это равенство и воспользовавшись формулами Френе, имеем

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}=\frac{\delta\xi^r}{\delta s}\mu_r+\xi^r\frac{\delta\mu_r}{\delta s}=\frac{\delta\xi^r}{\delta s}\mu_r+\xi^r(\tau\nu_r-\varkappa\lambda_r).$$

Отсюда, так как $\xi^r\nu_r=\sin\theta$, получим

$$-\sin\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)=\frac{\delta\xi^r}{\delta s}\mu_r=\xi^r_{,\alpha}\lambda^\alpha\mu_r=-a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}\lambda^\alpha x^r_\gamma\mu_r,$$

причем мы воспользовались формулой Вейнгартена (стр. 266).

Из рис. 31 получаем:

$$\mu^r=\xi^r\cos\theta+\varrho^r\sin\theta,$$

т. е.

$$-\sin\theta\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)=-\sin\theta a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}\lambda^\alpha x^r_\gamma\varrho_r=$$
$$=-\sin\theta a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}\lambda^\alpha\varrho_\gamma=-\sin\theta b_{\beta\alpha}\varrho^\beta\lambda^\alpha.$$

Но

$$\varrho^\beta=-\varepsilon^{\beta\gamma}\lambda_\gamma,$$

и поэтому

$$\tau+\frac{d\theta}{ds}=-\varepsilon^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha}\lambda_{\gamma}=\varepsilon^{\gamma\delta}a_{\gamma\alpha}b_{\delta\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}=h_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}.$$

Отсюда мы видим, что величина $\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)$ одинакова для всех кривых на поверхности, имеющих общую касательную λ^{α}. В частности, если выбрать из них геодезическую линию, угол θ всегда равен π или 0, а $\left(\tau+\frac{d\theta}{ds}\right)$ равно кручению геодезической линии. *Назовем геодезическим кручением кривой на поверхности кручение той геодезической линии, которая касается кривой в рассматриваемой точке.* Обозначив геодезическое кручение через τ_g, мы, следовательно, имеем

$$\boxed{\tau_g=\tau+\frac{d\theta}{ds}=h_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}.} \tag{26}$$

Упражнения

1. Показать, что если направление λ^{α} составляет угол θ с одной из линий кривизны, то

$$\tau_g=(\varkappa_2-\varkappa_1)\sin\theta\cos\theta.$$

2. Вывести из задачи 1, что геодезическое кручение кривой на поверхности равно нулю только тогда, когда кривая есть линия кривизны.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVI

1. Доказать, что для любой кривой на поверхности

$$\varkappa^2=\sigma^2+\varkappa_{(n)}^2.$$

2. Показать, что если геодезическая линия на поверхности есть плоская кривая, то она является также линией кривизны, и обратно.

[Ее геодезическое кручение равно нулю.]

3. Показать, что если кривая есть пересечение двух поверхностей, образующих всюду постоянный угол, то геодезическое кручение кривой на обеих поверхностях имеет одно и то же значение.

[И τ, и $\frac{d\theta}{ds}$ имеют одно и то же значение.]

4. Вывести *теорему Иоахимсталя*:

Пусть кривая есть пересечение двух поверхностей, которые образуют всюду постоянный угол. Если кривая есть линия кривизны на одной поверхности, то она есть линия кривизны также и на другой.

5. Показать, что если две кривые на поверхности пересекаются под прямым углом, то сумма их геодезических кручений равна нулю.

[Использовать задачу 1, стр. 282.]

6. Вывести *теорему Дюпена*:

Если три поверхности пересекаются взаимно под прямыми углами, то кривые пересечения являются линиями кривизны на каждой поверхности.

7. Показать, что производная от ξ^r вдоль кривой на поверхности есть

$$\frac{\delta\xi^r}{\delta s}=-a^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}x^r_\gamma\lambda^\alpha.$$

[Это следует из теоремы Вейнгартена.]

8. *Формулы Родрига.* Доказать, что вдоль линии кривизны на поверхности имеют место соотношения

$$\frac{\delta\xi^r}{\delta s}+\varkappa\frac{dx^r}{ds}=0,$$

где $\varkappa$ — соответствующая главная кривизна поверхности.

[Это следует из упражнения 7, если использовать равенство $b_{\alpha\beta}\lambda^\beta=\varkappa a_{\alpha\beta}\lambda^\beta$, которое справедливо для главного направления.]

9. Доказать предложение, обратное упражнению 8.

10. Два направления λ^α и μ^α называются *сопряженными на поверхности*, если они удовлетворяют уравнению

$$b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta=0.$$

Два семейства кривых на поверхности, у которых касательные в каждой точке образуют сопряженные направления, называются *сопряженными семействами*

а) Доказать, что если координатные кривые сопряжены, то $b_{12}=0$.

б) Доказать, что необходимым и достаточным условием сопряженности двух направлений, определяемых уравнением $p_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta=0$, является $\beta^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}=0$, где $\beta^{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $b_{\alpha\beta}$ в $|b_{\alpha\beta}|$, деленное на $|b_{\alpha\beta}|$.

в) Показать, что кривые $\varphi=\text{const}$, $\psi=\text{const}$ образуют сопряженную систему, если $\beta^{\alpha\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial\psi}{\partial u^\beta}=0$.

г) Показать, что если λ^α, μ^α — два сопряженных направления, образующих угол φ, то $c_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta=-K\cos\varphi$.

д) Показать, что если два сопряженных направления образуют углы θ и θ' с главными направлениями, то $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\theta'=-\dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$.

11. *Омбилические точки.* Показать, что в точке поверхности, где главные кривизны равны, каждое направление — главное и нормальная кривизна в каждом направлении одна и та же.

Такие точки называются *омбилическими*. Показать, что условие омбиличности точки есть

$$b_{\alpha\beta}=\varkappa a_{\alpha\beta}.$$

12. *Минимальные поверхности. Минимальной* называется поверхность, у которой $H=0$ в каждой точке. Показать, что на минимальной поверхности асимптотические линии образуют ортогональную систему.

13. Доказать, что $\tau_g^2=c_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta-\varkappa_{(n)}^2$.

14. Показать, что если $\varkappa$ и τ — кривизна и кручение геодезической линии, которая образует угол φ с главным направлением, то

$$\text{а)}\ \begin{cases}\varkappa\cos\varphi-\tau\sin\varphi=\varkappa_1\cos\varphi\\ \varkappa\sin\varphi+\tau\cos\varphi=\varkappa_2\sin\varphi\end{cases};\qquad \text{б)}\ \tau^2=-(\varkappa-\varkappa_1)(\varkappa-\varkappa_2).$$

15. Показать, что геодезическое кручение кривой, касательная к которой совпадает с асимптотическим направлением, равно $\pm\sqrt{-K}$. Вывести формулу Эннепера для кручения асимптотической линии.

16. *Формула Лагерра.* Взяв абсолютную производную от равенства (9), стр. 275, по s, доказать, что

$$L\equiv\frac{d\varkappa}{ds}\cos\theta-\varkappa\sin\theta\left(2\tau+3\frac{d\theta}{ds}\right)=b_{\alpha\beta,\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma.$$

Отсюда видно, что L имеет одно и то же значение для всех кривых на поверхности, которые имеют общую касательную.

17. Используя тот факт, что τ_g и L имеют одинаковое значение у любых двух кривых, имеющих общую касательную, доказать, что кривизна в точке P одной из кривых, по которой касательная плоскость в точке P рассекает поверхность, равна двум третям кривизны соответствующей асимптотической линии.

[В точке P $\theta=\frac{\pi}{2}$. Для асимптотической линии также $\theta=\frac{\pi}{2}$, и поэтому $\tau_g=\tau$, $L=-2\varkappa\tau$. Для плоской кривой, обозначив соответствующее выражение штрихом, мы имеем $\tau'=0$, и поэтому $\tau_g=\frac{d\theta'}{ds}$, $L=-3\varkappa'\frac{d\theta'}{ds}$; приравнивая друг другу значения для τ_g и L, мы и получаем наш результат.]

ЧАСТЬ IV
ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

ГЛАВА XVII
ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 1. Уравнения движения

Предположим, что нам дана материальная точка P, движущаяся в пространстве, и пусть ее положение определяется системой криволинейных координат, которые мы будем обозначать x^r *).

По мере того как изменяется время t, точка P (рис. 32) будет описывать в пространстве некоторую кривую, называемую *траекторией точки*. Уравнения этой кривой вообще определяются выражениями координат как функций от времени, т. е.

$$x^r = x^r(t). \tag{1}$$

Если мы перейдем к другой системе криволинейных координат $\overline{x}^r$ при помощи уравнений преобразования

$$\overline{x}^r = f^r(x^1, x^2, x^3), \tag{2}$$

то координаты точки P в новой системе будут определены как функции от t, если выражения (1) подставить в (2).

Рассмотрим объект

$$\boxed{v^r = \frac{dx^r}{dt}.} \tag{3}$$

*) По поводу геометрических свойств криволинейных координат в пространстве мы отсылаем читателя к главам XI—XII.

В новых координатах $\bar{x}^r$ соответствующим объектом является

$$\bar{v}^r = \frac{d\bar{x}^r}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \cdot \frac{dx^s}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} v^s.$$

Эти уравнения выражают тот факт, что величины (3) являются составляющими *контравариантного вектора*. Если бы координаты были декартовыми и прямоугольными, то (3) превратилось бы в составляющие скорости точки P по координатным осям. Поэтому мы назовем (3) *вектором обобщенной скорости материальной точки.*

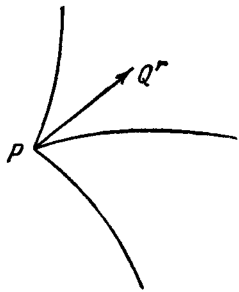

Рис. 32.

Вектор v^r сам по себе является функцией от времени, и мы можем взять его абсолютную производную по t. Это дает нам вектор (см. стр. 197)

$$\boxed{f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{d^2 x^r}{dt^2} + \Gamma^r_{mn} \frac{dx^m}{dt} \cdot \frac{dx^n}{dt},} \tag{4}$$

где Γ^r_{mn} являются символами Кристоффеля нашей координатной системы. Когда система координат — прямоугольная декартова, символы Кристоффеля все равны нулю и вектор f^r принимает вид

$$f^r = \frac{d^2 x^r}{dt^2}.$$

Это — составляющие ускорения по трем координатным осям. Поэтому (4) называем *вектором обобщенного ускорения точки*.

Масса материальной точки является, очевидно, величиной, совершенно не зависящей от используемой координатной системы, и является, следовательно, *скаляром*. Мы будем обозначать ее через M.

Если свободная материальная точка подвергается действию силы, то второй закон Ньютона утверждает, что сила и ускорение одинаково направлены и величина силы (в соответствующих единицах) равна произведению массы на ускорение. Следовательно, если мы рассмотрим векторное уравнение

$$\boxed{Q^r = Mf^r,} \tag{5}$$

где Q^r — контравариантный вектор, то мы увидим, что величины Q^r определяют силу полностью и по величине, и по направлению. Поэтому вектор Q^r называют *вектором обобщенной силы*, а уравнения (5) являются уравнениями движения в криволинейных координатах.

В декартовых координатах уравнение (5) приобретает хорошо известную форму

$$\boxed{Q^r = M\frac{d^2x^r}{dt^2},}$$

где Q^1, Q^2, Q^3 — составляющие силы вдоль трех координатных осей.

Упражнения

1. Доказать, что если X^1, X^2, X^3 — составляющие силы в декартовой системе координат (y^1, y^2, y^3), то в любой криволинейной системе x^r обобщенная сила определяется равенствами

$$Q^r = X^s\frac{\partial x^r}{\partial y^s}.$$

[Эти равенства просто выражают закон преобразования контравариантного вектора, составляющими которого в системе y^r являются X^r.]

2. Показать, что если линейный элемент в нашей координатной системе определяется выражением $ds^2 = g_{mn}\,dx^m\,dx^n$, то

а) модуль скорости равен $(g_{mn}v^m v^n)^{1/2}$,

б) модуль ускорения равен $(g_{mn}f^m f^n)^{1/2}$.

3. Показать, что если материальная точка движется с постоянной скоростью, то $f^r = 0$.

4. Показать, что если v — модуль скорости, то $\dfrac{dv}{dt} = f\cos\theta$, где f — модуль ускорения, а θ — угол между векторами скорости и ускорения. Вывести, что если скорость материальной точки постоянна по величине, то ускорение должно либо равняться нулю, либо быть ортогональным к вектору скорости.

[Имеем $v^2 = g_{mn}v^m v^n$, и следовательно,

$$2v\frac{dv}{dt} = 2g_{mn}v^m\frac{\delta v^n}{\delta t} = 2g_{mn}v^m f^n.$$

С другой стороны, $g_{mn}v^m f^n = vf\cos\theta$, и желаемый результат следует отсюда непосредственно.]

§ 2. Работа и энергия. Уравнения Лагранжа второго рода

В предыдущем параграфе мы ввели обобщенную силу как *контравариантный* вектор, но она может быть введена и как *ковариантный* вектор посредством понятия работы.

Мы знаем, что если система координат $\bar{x}^r$ является прямоугольной декартовой, то сила, составляющие которой вдоль осей этой системы равны $\bar{Q}^r$ и точка приложения которой перемещается на $\delta\bar{x}^r$, совершает работу, равную

$$\delta W = \bar{Q}^1\delta\bar{x}^1 + \bar{Q}^2\delta\bar{x}^2 + \bar{Q}^3\delta\bar{x}^3.$$

Так как в ортогональной декартовой системе ассоциированный вектор $\bar{Q}_r$ имеет в точности те же составляющие, что и $\bar{Q}^r$, то выражение для δW превращается в следующее:

$$\delta W = \bar{Q}_r\delta\bar{x}^r.$$

Из соотношений, связывающих $\bar{x}^r$ и x^r, мы получаем, что δW можно написать также в виде линейной функции от δx^r. Таким образом,

$$\boxed{\delta W = Q_r\delta x^r.} \tag{6}$$

С другой стороны, δW является скаляром; но тогда из (6) следует, что коэффициенты этой линейной формы, Q_r, образуют ковариантный вектор. Далее, из того, что его составляющие в ортогональной декартовой системе координат являются составляющими вектора силы, следует, что Q_r образует *ковариантный вектор обобщенной силы* в криволинейных координатах x^r. Ковариантные и контравариантные составляющие, разумеется, связаны формулами

$$Q_r = g_{rs}Q^s, \quad Q^r = g^{rs}Q_s.$$

Если $Q_r\,dx^r$ — полный дифференциал, то обобщенная сила называется потенциальной и мы можем написать

$$W = \int Q_r\,dx^r. \tag{7}$$

Функция W, которая определяется соотношением (7), исключая произвольную постоянную, называется *силовой функцией*. Обычно используют функцию V, называемую *потенциальной функцией*, которая равна $-W$. Из (7) следует, что

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь *кинетическую энергию* материальной точки. Она равна $\frac{1}{2}Mv^2$, где v — модуль скорости. Но $v^2 = g_{mn}v^m v^n$, где g_{mn} — метрический тензор системы в принятых криволинейных координатах. Следовательно, кинетическая энергия T равна

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mg_{mn}v^m v^n = \frac{1}{2}Mg_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n,} \tag{9}$$

где $\dot{x}^r = \dfrac{dx^r}{dt}$.

Частная производная от T по $\dot{x}^r$ будет

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r} = Mg_{rm}\dot{x}^m.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right) = M\left(g_{rm}\ddot{x}^m + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n}\dot{x}^m\dot{x}^n\right).$$

С другой стороны, беря от T частную производную по x^r, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x^r} = \frac{1}{2}M\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}\dot{x}^m\dot{x}^n.$$

Из этих уравнений мы видим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^r}=M\left\{g_{rm}\ddot{x}^m+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n}+\frac{\partial g_{rn}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}\right)\dot{x}^m\dot{x}^r\right\}=M\left(g_{rm}\ddot{x}^m+\Gamma_{r,\,mn}\dot{x}^m\dot{x}^n\right),$$

где $\Gamma_{p,\,mn}$ — символ Кристоффеля первого рода. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^r}=Mg_{rs}\left(\ddot{x}^s+\Gamma^s_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n\right).$$

Обращаясь к (4), мы видим, что правая часть равна $Mg_{rs}f^s$. Обозначая ковариантные составляющие вектора обобщенного ускорения через f_r, имеем

$$\boxed{Mf_r=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^r}\,.} \tag{10}$$

Эта формула особенно удобна, когда мы желаем найти вектор обобщенного ускорения в какой-либо определенной системе координат.

Уравнения движения (5), стр. 287, теперь могут быть переписаны в ковариантной форме следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^r}=Q_r.} \tag{11}$$

Эти уравнения известны как уравнения Лагранжа второго рода. Если система сил потенциальна, они принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^r}=-\frac{\partial V}{\partial x^r}$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^r}=0, \tag{12}$$

где

$$L=T-V. \tag{13}$$

Функция L называется *функцией Лагранжа*.

Упражнения

1. *Найти ковариантные составляющие вектора обобщенного ускорения в сферических координатах.*

В этих координатах линейный элемент (стр. 184) есть

$$ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(x^1)^2(\sin x^2)^2(dx^3)^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия будет

$$T=\frac{1}{2}M\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}M\{(\dot{x}^1)^2+(x^1\dot{x}^2)^2+(x^1\sin x^2\dot{x}^3)^2\}.$$

Поэтому

$$Mf_1=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^1}-\frac{\partial T}{\partial x^1}=M[\ddot{x}^1-x^1(\dot{x}^2)^2-x^1(\sin x^2\dot{x}^3)^2],$$

$$Mf_2=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^2}-\frac{\partial T}{\partial x^2}=M\left[\frac{d}{dt}\{(x^1)^2\dot{x}^2\}-(x^1)^2\sin x^2\cos x^2(\dot{x}^3)^2\right],$$

$$Mf_3=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^3}-\frac{\partial T}{\partial x^3}=M\left[\frac{d}{dt}\{(x^1\sin x^2)^2\dot{x}^3\}\right].$$

Уравнения движения могут быть написаны сразу же, если только мы знаем составляющие обобщенной силы Q_r. Они получаются в каждой частной задаче как коэффициенты линейной формы δW или при помощи равенства (8), если система сил потенциальна.

2. Показать, что составляющие вектора обобщенной скорости будут

$$\frac{1}{M}g^{rs}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^s}.$$

3. Показать, что если φ — скалярная функция от x^r и $\dot{x}^r$, то $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^r}$ — ковариантный вектор.

$$\left[\text{Показать, что } \frac{\partial \dot{x}^s}{\partial \dot{\bar{x}}^r}=\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} \text{ и, следовательно, } \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\dot{\bar{x}}^r}=\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^s}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^r}.\right]$$

4. Показать, что если φ — скалярная функция от x^r и $\dot{x}^r$, то $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^r}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}$ — ковариантный вектор.

5. Показать, что условиями потенциальности силы являются

$$Q_{r,s} - Q_{s,r} = 0.$$

6. *Интеграл энергии.* Вывести из уравнений движения формулу

$$T + V = h,$$

где h — постоянная. Это соотношение называется *интегралом энергии*

$$\left[\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2} g_{mn} v^m v^n\right) = M g_{mn} v^m f^n = \right.$$

$$= M f_m v^m = -\frac{\partial V}{\partial x^m}\dot{x}^m = -\frac{dV}{dt}.$$

Следовательно, интегрируя, получаем $T = h - V$.]

§ 3. Движение точки по кривой

Пусть кривая задана уравнениями

$$x^r = x^r(s), \tag{14}$$

где s — длина дуги кривой. Мы будем предполагать, что материальная точка принуждена двигаться вдоль кривой и что трение отсутствует. Найдем уравнения движения точки.

Пусть λ^r, μ^r, ν^r — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали, а $\varkappa$, τ — кривизна и кручение кривой; эти величины связаны между собой формулами Френе (стр. 214):

$$\lambda^r = \frac{dx^r}{ds}, \quad \frac{\delta\lambda^r}{\delta s} = \varkappa\mu^r, \quad \frac{\delta\mu^r}{\delta s} = \tau\nu^r - \varkappa\lambda^r, \quad \frac{\delta\nu^r}{\delta s} = -\tau\mu^r. \tag{15}$$

С другой стороны, если обозначить модуль обобщенной скорости через v, то будет

$$v^r = \frac{dx^r}{dt} = \frac{dx^r}{ds}\frac{ds}{dt} = v\lambda^r,$$

так как $v = \frac{ds}{dt}$. Беря абсолютную производную от обеих частей этого уравнения по параметру t, имеем

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^r + v\frac{\delta\lambda^r}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^r + v\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}\cdot\frac{ds}{dt},$$

откуда, воспользовавшись (15), получим

$$\boxed{f^r = \frac{dv}{dt}\lambda^r + v^2\varkappa\mu^r.} \tag{16}$$

Таким образом, *вектор ускорения компланарен с касательной и главной нормалью, а его составляющие по этим направлениям суть $\dot{v}$ и $\varkappa v^2$.*

Пусть Q^r — внешняя обобщенная сила, действующая на материальную точку помимо реакции R^r кривой (рис. 33). Тогда (Q^r+R^r) есть равнодействующая сил, действующих на материальную точку и уравнения движения будут

$$Mf^r = Q^r + R^r,$$

или

$$Q^r + R^r = M\frac{dv}{dt}\lambda^r + Mv^2\varkappa\mu^r.$$

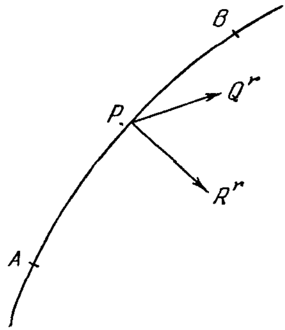

Рис. 33.

Но

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2),$$

а так как кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}Mv^2$, то

$$Q^r + R^r = \frac{dT}{ds}\lambda^r + 2T\varkappa\mu^r. \tag{17}$$

Поскольку трение отсутствует, то вектор R^r ортогонален к кривой и, следовательно, $R^r\lambda_r = 0$. Умножая (17) на λ_r, μ_r и ν_r последовательно, мы приходим к следующим уравнениям:

$$\boxed{\begin{aligned} Q^r\lambda_r &= \frac{dT}{ds}, \\ Q^r\mu_r + R^r\mu_r &= 2T\varkappa, \\ Q^r\nu_r &= -R^r\nu_r. \end{aligned}} \tag{18}$$

Из первого уравнения (18) имеем

$$T=\int Q^r\lambda_r\,ds=\int Q_r\frac{dx^r}{ds}\,ds=-\int\frac{dV}{ds}\,ds\ ^{*)}$$

или

$$T+V=h,\tag{19}$$

где h — постоянная. Это — так называемый *интеграл энергии*; постоянная h есть *полная механическая энергия*. Равенство (19) выражает закон сохранения механической энергии.

Если кривая является естественной траекторией материальной точки, то $R^r=0$ и из (17) мы видим, что *вектор силы должен быть компланарным с касательной и главной нормалью*. Поэтому вместе с интегралом энергии должно выполняться условие

$$Q^r=\frac{dT}{ds}\lambda^r+2T\varkappa\mu^r.\tag{20}$$

Упражнения

1. Доказать, что если сила направлена по касательной к естественной траектории материальной точки, то траектория должна быть прямой линией.

[Здесь $\varkappa=0$.]

2. Показать, что если материальная точка вынуждена двигаться по силовой линии, то реакция направлена по главной нормали кривой и равна $2(h-V)\varkappa$.

[Силовой линией называется кривая, в каждой точке которой направления касательной и силы совпадают.]

3. Показать, что для естественной траектории сила равна

$$\left\{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2+4T^2\varkappa^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

4. Показать, что если V — потенциальная функция, то для естественной траектории

$$\varkappa=\frac{\partial}{\partial x^r}(\log\sqrt{h-V})\,\mu^r,$$

$$2T\varkappa\tau=Q_{r,s}\nu^r\lambda^s.$$

*) Если силы потенциальны. (*Прим. ред.*)

§ 4. Движение точки по поверхности

Рассмотрим теперь движение материальной точки по поверхности, предполагая, что трение отсутствует. Пусть u^1, u^2 — криволинейные координаты на поверхности (рис. 34), и пусть поверхность задана уравнениями

$$x^r = x^r(u^1, u^2). \tag{21}$$

Будем пользоваться обозначениями главы XV (стр. 256).

Имеем

$$v^r = \frac{dx^r}{dt} = \frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} = x^r_\alpha \dot{u}^\alpha.$$

Поэтому, введя обозначение $v^\alpha = \dot{u}^\alpha$, получаем

$$v^r = x^r_\alpha v^\alpha. \tag{22}$$

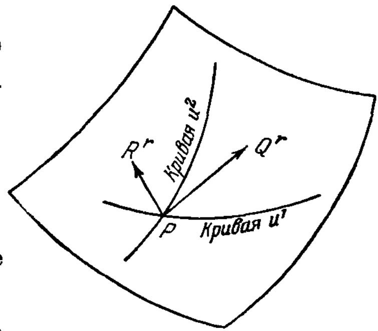

Рис. 34.

Мы будем называть v^α *вектором обобщенной скорости на поверхности*, а v^r — *пространственным вектором обобщенной скорости*. Найдя абсолютную производную по t от (22), получаем

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = x^r_\alpha \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} + x^r_{\alpha,\beta} v^\alpha v^\beta.$$

Если мы положим $f^\alpha = \dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}$ и используем формулы Гаусса (стр. 264), это выражение превращается в

$$\boxed{f^r = x^r_\alpha f^\alpha + b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \xi^r,} \tag{23}$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности, а ξ^r — единичный вектор нормали к поверхности. Мы будем называть f^α *вектором обобщенного ускорения на поверхности*.

Пусть Q^r — вектор обобщенной внешней силы, действующей на материальную точку, и пусть R^r — реакция поверхности, направленная по нормали к последней.

Тогда уравнения движения будут

$$Q^r + R^r = Mf^r = Mx^r_\alpha f^\alpha + Mb_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \xi^r =$$
$$= Mx^r_\alpha f^\alpha + Mv^2 b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\xi^r;$$

здесь λ^α — единичный вектор касательной к траектории.

Умножая эти уравнения на ξ_r, получаем

$$\boxed{Q^r\xi_r + R^r\xi_r = 2Tb_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.} \tag{24}$$

Далее, умножая те же уравнения на $g_{rs}x^s_\beta$ и вспоминая, что R^r нормален к поверхности, имеем

$$g_{rs}Q^r x^s_\beta = Mg_{rs}x^r_\alpha x^s_\beta f^\alpha = Ma_{\alpha\beta}f^\alpha = Mf_\beta.$$

Если мы обозначим вектор на поверхности $Q_r x^r_\alpha$ (см. § 2, стр. 257, и задача 4, стр. 259) через Q_α, то это равенство примет вид

$$\boxed{Q_\beta = Mf_\beta.} \tag{25}$$

Рассмотрим сначала вектор Q_α. Если материальная точка совершает малое перемещение δu^α на поверхности, то элементарная работа сил будет

$$\delta W = Q_r \delta x^r = Q_r x^r_\alpha \delta u^\alpha = Q_\alpha \delta u^\alpha.$$

Если система сил потенциальна, то

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial u^\alpha}, \tag{26}$$

где V — потенциальная функция.

Кинетическая энергия может быть выражена в виде

$$T = \frac{1}{2}Ma_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = \frac{1}{2}Ma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta,$$

и нетрудно доказать (см. стр. 290), что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = Ma_{\alpha\beta}(\ddot{u}^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\dot{u}^\mu\dot{u}^\nu) = Ma_{\alpha\beta}f^\beta.$$

Следовательно,

$$Mf_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha}. \tag{27}$$

Значит, уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial u^\alpha},} \tag{28}$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0, \tag{29}$$

где L — функция Лагранжа.

Читателю полезно сравнить эти уравнения с уравнениями (11) и (12), стр. 290, для свободной материальной точки в пространстве.

Упражнения

1. *Доказать, что если σ — геодезическая кривизна и ϱ^α — вектор на поверхности, нормальный к траектории, то*

$$f^\alpha = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\lambda^\alpha + \sigma v^2 \varrho^\alpha.$$

Так как λ^α — единичный вектор касательной к кривой, то

$$v^\alpha = v\lambda^\alpha.$$

Находя абсолютную производную этого уравнения по t, получаем

$$f^\alpha = \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^\alpha + v\frac{\delta \lambda^\alpha}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^\alpha + v^2\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}.$$

Обращаясь к § 10, стр. 243, мы видим, что

$$\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s} = \sigma\varrho^\alpha.$$

Кроме того,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

откуда видно, что

$$f^\alpha = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2)\lambda^\alpha + \sigma v^2\varrho^\alpha.$$

2. Вывести из задачи 1, что

$$Q^{\alpha}=\frac{dT}{ds}\lambda^{\alpha}+2\sigma T\varrho^{\alpha}.$$

3. Показать, что если на материальную точку не действуют никакие силы, то $\sigma=0$, т. е. материальная точка описывает на поверхности геодезическую кривую.

4. Показать, что если реакции поверхности отсутствуют, то нормальная составляющая вектора силы должна быть равной

$$Mb_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}.$$

5. Доказать, что если материальная точка движется вдоль асимптотической линии поверхности, то реакция должна быть равной и противоположно направленной нормальной составляющей вектора силы. Показать, что верно и обратное утверждение.

§ 5. Принцип наименьшего действия. Траектории как геодезические линии

Мы видели, что материальная точка массы M, на которую действует система сил с потенциалом V, имеет следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}-\frac{\partial T}{\partial x^r}=-\frac{\partial V}{\partial x^r}, \tag{30}$$

где T — кинетическая энергия; кроме того, существует интеграл энергии

$$T+V=h, \tag{31}$$

где h — постоянная, называемая полной энергией.

Рассмотрим все кривые, проходящие через две фиксированные точки A и B (рис. 35). Интеграл

$$\boxed{A=\sqrt{2M}\int\limits_{A}^{B}\left\{(h-V)\,g_{mn}\frac{dx^m}{d\lambda}\frac{dx^n}{d\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}}d\lambda,} \tag{32}$$

взятый вдоль любой из этих кривых, где λ — параметр, изменяющийся вдоль кривой, и h — константа, имеет определенное значение, которое называется *действием* вдоль кривой AB. Мы хотим доказать следующее предположение, называемое *принципом стационарного действия*:

Из всех кривых, проходящих через A и B, та, для которой действие стационарно, является естественной траекторией материальной точки, движущейся под действием системы сил с потенциалом V и с постоянной полной энергией h.

Из вариационного исчисления хорошо известно, что уравнениями кривой, проходящей через точки A и B, для которой интеграл

$$\int_A^B \varphi(x,\,x')\,d\lambda, \quad x'^r = \frac{dx^r}{d\lambda} \qquad (33)$$

имеет стационарное значение, будут

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{dx'^r} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^r} = 0. \qquad (34)$$

Это может быть доказано тем же методом, который был применен для получения уравнений геодезической линии на поверхности (§ 5, стр. 228).

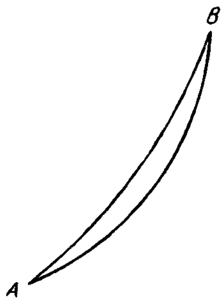

Рис. 35.

Следовательно, мы получим кривую, для которой действие стационарно, если в (34) положим

$$\varphi = \{(h-V)\,g_{mn}x'^m x'^n\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{(h-V)\,g_{rs}x'^s}{\varphi}\right\} - \frac{h-V}{2\varphi}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}x'^m x'^n + {} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x^r}\frac{g_{mn}x'^m x'^n}{\varphi} = 0.$$

В эти уравнения введем вместо λ новую независимую переменную t, определяемую посредством соотношения

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\sqrt{M}\,\varphi}{\sqrt{2}\,(h-V)}. \qquad (35)$$

Мы получим

$$M\frac{d}{dt}(g_{rs}\dot{x}^s) - \frac{M}{2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r}\dot{x}^m\dot{x}^n + \frac{\partial V}{\partial x^r} = 0.$$

Эти уравнения в точности совпадают с уравнениями (30), где t — время. Следовательно, кривая, вдоль которой действие стационарно, является естественной траекторией точки, движущейся под действием силы с потенциалом V. С другой стороны, возведя равенство (35) в квадрат, получим

$$Mg_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = 2(h - V),$$

а это показывает, что h есть полная энергия, постоянная вдоль траектории.

Приведем геометрическое представление движения, в котором естественные траектории будут изображены геодезическими линиями. Возьмем специальное трехмерное пространство, точки которого поставлены во взаимно однозначное соответствие с точками обычного пространства, так что мы можем выбрать x^r в качестве координат этого нового пространства. Кроме того, мы примем линейный элемент этого пространства в виде

$$\boxed{dS^2 = 2M(h - V)\,ds^2 = 2M(h - V)\,g_{mn}\,dx^m\,dx^n,} \tag{36}$$

где ds — линейный элемент обычного пространства.

Таким образом, каждая кривая обычного пространства соответствует некоторой изображающей кривой в новом пространстве, и действие вдоль кривой будет

$$A = \int_A^B \frac{dS}{d\lambda}\,d\lambda = [S]_A^B.$$

Следовательно, действие равно длине изображающей кривой в новом пространстве. Кроме того, естественная траектория является экстремалью, определенной уравнением

$$\delta A = \delta S = 0.$$

Но решениями этого уравнения являются, очевидно, кривые наименьшей длины или геодезические кривые нового пространства. Следовательно, *естественные траектории соответствуют геодезическим линиям в нашем изображающем пространстве.* Поэтому разыскание траекторий материальных точек, движущихся под действием сил с потенциалом V, есть точно та же самая задача, что и определение геодезических линий пространства, линейный элемент которого есть (36).

Упражнения

1. Показать, что действие равно

$$\sqrt{2M}\int_A^B \sqrt{h-V}\,ds.$$

2. Показать, что действие, подсчитанное вдоль естественной траектории, равно

$$2\int_A^B T\,dt.$$

3. Показать, что из всех кривых на поверхности, проходящих через две данные точки A и B, та, для которой $\int_A^B \sqrt{h-V}\,ds$ является стационарным, есть траектория материальной точки, которая движется по поверхности под действием силы с потенциалом V.

[Это—принцип стационарного действия для точек на поверхности. Использовать криволинейные координаты на поверхности совместно с (28), стр. 297.]

4. Показать, что траектория материальной точки, движущейся по поверхности с линейным элементом $[a_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta]^{\frac{1}{2}}$ под действием силы с потенциалом V, является геодезической линией поверхности, линейный элемент которой есть $[(h-V)\,a_{\alpha\beta}\,du^\alpha du^\beta]^{\frac{1}{2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVII

1. Доказать, что если материальная точка движется с постоянной скоростью по прямой линии, то $\dfrac{\delta v^r}{\delta t}=0$.

2. Показать, что если ускорение постоянно по направлению, но не обязательно постоянно по величине, то

$$\frac{\delta f^r}{\delta t}=kf^r,$$

где $k=\frac{d}{dt}(\log f)$. Показать, что обратное предложение тоже верно.

3. *Физические составляющие сил.* Показать, что если $\varepsilon^r_{(1)}$, $\varepsilon^r_{(2)}$, $\varepsilon^r_{(3)}$ — единичные векторы касательных к координатным кривым, то вектор силы Q^r может быть выражен в виде

$$Q^r=Q^{(1)}\varepsilon^r_{(1)}+Q^{(2)}\varepsilon^r_{(2)}+Q^{(3)}\varepsilon^r_{(3)}=Q^{(s)}\varepsilon^r_{(s)},$$

где

$$Q^{(1)}=\sqrt{g_{11}}\,Q^1,\quad Q^{(2)}=\sqrt{g_{22}}\,Q^2,\quad Q^{(3)}=\sqrt{g_{33}}\,Q^3.$$

[Если сила Q^r разложена на составляющие по касательным к координатным кривым в соответствии с обычным законом разложения сил, то эти составляющие равны $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$.]

Мы можем назвать их *физическими составляющими* Q^r, чтобы отличить их от *тензорных составляющих* Q^1, Q^2, Q^3. При доказательстве сформулированного в задаче утверждения использовать формулы

$$\varepsilon^r_{(1)}=\frac{\delta^r_1}{\sqrt{g_{11}}},\quad \varepsilon^r_{(2)}=\frac{\delta^r_2}{\sqrt{g_{22}}},\quad \varepsilon^r_{(3)}=\frac{\delta^r_3}{\sqrt{g_{33}}}.$$

4. *Система параллельных сил.* Показать, что если поле сил образует постоянное параллельное векторное поле (как, например, в случае гравитационного поля у поверхности земли), то $Q^r{}_{,s}=0$. Вывести отсюда, что естественная траектория материальной точки в таком поле удовлетворяет соотношениям

$$\tau=0,\quad \frac{d^2}{ds^2}\left(\varkappa^{-\frac{2}{3}}\right)=2\varkappa^{\frac{4}{3}},\quad T=a\varkappa^{-\frac{2}{3}}.$$

Доказать, что эти уравнения характеризуют *параболу*, и показать, что кривизна $\varkappa$ максимальна в точке, где Q^r ортогональна к кривой.

5. *Теорема Бонне**). Если кривая является естественной траекторией для каждого из N силовых полей, причем в каждом из этих полей порознь скорость точки была бы $v_1, v_2, \ldots, v_N$ соответственно, то эта кривая будет естественной траекторией для силового поля, являющегося суммой этих силовых полей, причем скорость точки равна $(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_N^2)^{\frac{1}{2}}$.

6. Материальная точка движется по поверхности под действием некоторой силы. Показать, что сумма нормальной реакции поверхности и нормальной составляющей силы равна $Mv^2\varkappa$, где $\varkappa$ — нормальная кривизна поверхности в направлении движения.

*) См. Уиттекер, Аналитическая динамика, М.—Л., 1937, стр. 110. (*Прим. ред.*)

7. *Вектор количества движения.* Положим $p_r = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^r}$. Показать, что p_r — ковариантный вектор, и доказать, что

$$T = \frac{1}{2M} g^{mn} p_m p_n.$$

8. *Уравнения движения в форме Гамильтона.* Положим $H = T + V$ и выразим H через x^r и p_r. Показать, что уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{dx^r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^r}.$$

9. Показать, что если H — скалярная функция, зависящая только от x^r и p_r, то $\dfrac{\partial H}{\partial p_r}$ есть контравариантный вектор, а $\left(\dfrac{dp_r}{dt} + \dfrac{\partial H}{\partial x^r}\right)$ — ковариантный вектор. Вывести отсюда, что *уравнения Гамильтона являются векторными уравнениями.*

[Для новой координатной системы $\bar{x}^r$ имеем $\bar{p}_r = p_s \dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}$, т. е. $\dfrac{\partial p_r}{\partial \bar{p}_s} = \dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^r}$. Следовательно, $\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \dfrac{\partial p_s}{\partial \bar{p}_r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_s} \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}$, что и доказывает первое утверждение. Второе доказывается аналогично.]

10. Доказать, что $\dfrac{\delta p_r}{\delta t} = -\dfrac{\partial V}{\partial x^r}$.

11. Положим $L = T - V$ и выразим L через x^r, $\dot{x}^r$, в то время как H выражено через x^r, p_r. Доказать, что

$$\frac{\partial H}{\partial x^r} = -\frac{\partial L}{\partial x^r}.$$

12. Материальные точки равных масс, находящиеся под действием некоторой системы сил, начинают движение с равными скоростями v в любом из направлений, ортогональных данному. Показать, что для поверхности, на которой лежат различные траектории, начальная точка является омбилической.

13. Материальная точка движется по поверхности. Показать, что если положить

$$p_\alpha = M a_{\alpha\beta} \dot{u}^\beta,$$

$$H = \frac{1}{2M} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + V,$$

то уравнения движения по поверхности могут быть записаны в виде

$$\frac{du^\alpha}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt}+\frac{\partial H}{\partial u^\alpha}=0.$$

[Это — уравнения Гамильтона для точки, движущейся по поверхности.]

14. Показать, что если S — скалярная функция от $(x^r, \dot{x}^r, \ddot{x}^r)$, то $\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}^r}$ — ковариантный вектор.

15. *Уравнения Аппеля.* Положим $S=\frac{1}{2}Mg_{mn}f^m f^n$. Показать, что уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}^r}=Q_r=-\frac{\partial V}{\partial x^r}.$$

ГЛАВА XVIII

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Моменты инерции

Возьмем систему N материальных точек, каждая из которых имеет массу $M_{(\alpha)}$ и аффинные координаты $x^r_{(\alpha)}$. Если точки системы, в частности, жестко связаны друг с другом, то мы получим твердое тело.

Координаты *центра инерции системы материальных точек* определяются формулой

$$\boxed{\xi^r = \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} x^r_{(\alpha)}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)}}.} \tag{1}$$

В случае непрерывно распределенного вещества суммирование в этой и последующих формулах должно быть заменено тройным интегрированием, а $M_{(\alpha)}$ — элементом массы dM.

Другой величиной, имеющей большое значение в динамике системы материальных точек, является *симметричный тензор второго порядка*

$$\boxed{I^{rs} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} x^r_{(\alpha)} x^s_{(\alpha)},} \tag{2}$$

который мы назовем *тензором инерции относительно начала координат.*

Пусть задана прямая, проходящая через начало, на которую из различных материальных точек опущены перпендикуляры $p_{(\alpha)}$; тогда число $\sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} p_{(\alpha)}^2$ называется *моментом инерции системы материальных точек относительно данной прямой*. Мы можем выразить этот момент инерции через I^{rs}. Пусть λ^r — единичный вектор, определяющий направление заданной прямой; тогда

$$p_{(\alpha)}^2 = g_{mn} x_{(\alpha)}^m x_{(\alpha)}^n - (g_{mn} \lambda^m x_{(\alpha)}^n)^2.$$

Следовательно, момент инерции относительно λ^r равен

$$I(\lambda^r) = \sum_{\alpha=1}^{N} M_{(\alpha)} p_{(\alpha)}^2 = g_{mn} I^{mn} - g_{mp} g_{nq} \lambda^m \lambda^n I^{pq}.$$

Обозначив через I_{rs} ассоциированный тензор инерции, равный $g_{rm} g_{sn} I^{mn}$, и через I — скаляр $g_{mn} I^{mn}$, получаем

$$I(\lambda^r) = (I g_{rs} - I_{rs}) \lambda^r \lambda^s, \tag{3}$$

так как λ^r — единичный вектор. Поэтому если мы рассмотрим поверхность второго порядка Q, уравнение которой есть

$$\boxed{(I g_{rs} - I_{rs}) x^r x^s = 1,} \tag{4}$$

то мы найдем, что момент инерции относительно λ^r равен $\frac{1}{R^2}$, где R — радиус-вектор точки на поверхности Q в направлении λ^r. Q называется *эллипсоидом инерции относительно начала* O.

В § 3, стр. 148, мы видели, что эллипсоид инерции имеет всегда три главные оси, которые в данном случае называются *главными осями инерции для точки* O, а плоскости, проходящие через каждые две из этих осей, называются *главными плоскостями инерции для точки* O.

Если главные оси инерции принять за оси координат, то система координат будет ортогональной и, кроме того,

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = 0.$$

Главные оси инерции определяются уравнениями

$$(Ig_{rs}-I_{rs})\lambda^s=\theta\lambda_r, \tag{5}$$

где θ — корень характеристического уравнения

$$|(I-\theta)g_{rs}-I_{rs}|=0. \tag{6}$$

Упражнения

1. Показать, что момент инерции относительно произвольной прямой равен моменту инерции относительно прямой, проходящей через центр инерции параллельно данной прямой, плюс масса всей системы M, умноженная на квадрат расстояния между прямыми.

[Момент инерции относительно прямой, проходящей через центр тяжести ξ^r в направлении λ^r, равен

$$\{(I-Mg_{mn}\xi^m\xi^n)g_{rs}-I_{rs}+M\xi_r\xi_s\}\lambda^r\lambda^s.]$$

2. Пусть $p_{(\alpha)}$ — перпендикуляр, опущенный из $M_{(\alpha)}$ на данную плоскость. Тогда $\sum M_{(\alpha)}p^2_{(\alpha)}$ иногда называется *моментом инерции относительно плоскости*. Показать, что момент инерции относительно плоскости $u_rx^r=0$ равен

$$\frac{I^{mn}u_mu_n}{g^{rs}u_ru_s}.$$

3. Доказать, что момент инерции относительно плоскости $u_rx^r=1$ равен

$$\frac{I^{mn}u_mu_n-2Mu_m\xi^m+M}{g^{rs}u_ru_s}.$$

4. Показать, что $\frac{I^{33}}{g^{33}}$ — момент инерции относительно плоскости $x^3=0$. Аналогично истолковать I^{11} и I^{22}.

5. Показать, что если I_3 — момент инерции относительно оси x^3, то $I_3=I-\frac{I_{33}}{g_{33}}$. Показать, далее, что если система координат декартова и ортогональна, то $I_3=I_{11}+I_{22}$.

§ 2. Уравнения движения

Найдем уравнения движения системы материальных точек и, в частности, твердого тела под действием заданных сил.

Мы знаем, что если $X^r_{(\alpha)}$ — равнодействующая системы сил, приложенных к материальной точке $M_{(\alpha)}$, то

$$M_{(\alpha)} \ddot{x}^r_{(\alpha)} = X^r_{(\alpha)};$$

это — уравнение движения одной материальной точки. Следовательно, если $\delta x^r_{(\alpha)}$ — произвольное малое перемещение этой точки, то

$$\{M_{(\alpha)} \ddot{x}^r_{(\alpha)} - X^r_{(\alpha)}\} \delta x_{(\alpha) r} = 0, \tag{7}$$

де $\delta x_{(\alpha) r}$ — ассоциированный вектор $g_{rs} \delta x^s_{(\alpha)}$. Выражение $X^r_{(\alpha)} \delta x_{(\alpha) r}$, равное произведению силы на проекцию перемещения на направление силы, есть *работа силы* $X^r_{(\alpha)}$ *на перемещении* $\delta x^r_{(\alpha)}$.

Просуммируем выражения (7) по всем материальным точкам. Имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \{M_{(\alpha)} \ddot{x}^r_{(\alpha)} - X^r_{(\alpha)}\} \delta x_{(\alpha) r} = 0. \tag{8}$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на перемещения $\delta x^r_{(\alpha)}$; $X^r_{(\alpha)}$ есть равнодействующая всех сил, внешних и внутренних, действующих на каждую отдельную материальную точку. Если мы ограничимся определенными видами перемещений, то может случиться, что некоторые силы не совершают работы на этом перемещении и, следовательно, часть слагаемых $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} X^r_{(\alpha)} \delta x_{(\alpha) r}$ окажется равной нулю. Например, если мы будем рассматривать твердое тело как систему материальных точек, то равнодействующая внутренних сил не будет совершать работы и в уравнении (8) ее можно не учитывать.

Следовательно, для твердого тела мы имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \{M_{(\alpha)} \ddot{x}^r_{(\alpha)} - X^r_{(\alpha)}\} \delta x_{(\alpha) r} = 0, \tag{9}$$

где $\delta x^r_{(\alpha)}$ относится только к перемещениям твердого тела, а $X^r_{(\alpha)}$ — только внешние силы. Из § 5, стр. 173, мы видим, что наиболее общим выражением бесконечно малого перемещения твердого тела является

$$\delta x^r = u^r \delta t + \omega^r_{.s} x^s \delta t. \tag{10}$$

где ω_{rs} антисимметричен. Подставляя в (9), имеем

$$\sum_{\alpha}\{M_{(\alpha)}\ddot{x}^{r}_{(\alpha)}-X^{r}_{(\alpha)}\}u_{r}+\sum_{\alpha}\{M_{(\alpha)}\ddot{x}^{r}_{(\alpha)}-X^{r}_{(\alpha)}\}\omega_{rs}x^{s}_{(\alpha)}=0.$$

Мы всегда можем найти такой вектор ω^r, что $\omega_{rs}=-\omega^p\varepsilon_{prs}$, действительно, по определению $\omega^r=-\frac{1}{2}\varepsilon^{mnr}\omega_{mn}$. Следовательно, последнее уравнение можно привести к виду

$$\sum_{\alpha}\{M_{(\alpha)}\ddot{x}^{r}_{(\alpha)}-X^{r}_{(\alpha)}\}u_{r}+\sum_{\alpha}\varepsilon_{rst}\{M_{(\alpha)}\ddot{x}^{t}_{(\alpha)}-X^{t}_{(\alpha)}\}x^{s}_{(\alpha)}\omega^{r}=0.$$

Это уравнение справедливо для произвольных значений u_r и ω^r, и поэтому оно эквивалентно системе уравнений

$$\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\ddot{x}^{r}_{(\alpha)}=\sum_{\alpha}X^{r}_{(\alpha)},$$

$$\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\varepsilon_{rst}x^{s}_{(\alpha)}\ddot{x}^{t}_{(\alpha)}=\sum_{\alpha}\varepsilon_{rst}x^{s}_{(\alpha)}X^{t}_{(\alpha)},$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\dot{x}^{r}_{(\alpha)}\Big\}=\sum_{\alpha}X^{r}_{(\alpha)}=X^{r},\\ \frac{d}{dt}\Big\{\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\varepsilon_{rst}x^{s}_{(\alpha)}\dot{x}^{t}_{(\alpha)}\Big\}=\sum_{\alpha}\varepsilon_{rst}x^{s}_{(\alpha)}X^{t}_{(\alpha)}.\end{gathered}\tag{11}$$

Вектор

$$\boxed{G^{r}\equiv\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\dot{x}^{r}_{(\alpha)}}\tag{12}$$

называется *количеством движения твердого тела*; если M — общая масса, а ξ^r — координаты центра инерции, то нетрудно видеть, что

$$G^{r}=M\dot{\xi}^{r}.$$

Далее, вектор

$$\boxed{H_{r}\equiv\sum_{\alpha}M_{(\alpha)}\varepsilon_{rst}x^{s}_{(\alpha)}\dot{x}^{t}_{(\alpha)}}\tag{13}$$

называется *моментом количества движения твердого тела относительно начала*, а вектор

$$\boxed{L_r \equiv \sum_a \varepsilon_{rst}\, x^s_{(\alpha)} X^t_{(\alpha)}} \tag{14}$$

называется главным моментом системы сил $X^r_{(\alpha)}$ ***относительно начала***. Уравнения (11) теперь принимают вид

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt} G^r = X^r, \\ &\frac{d}{dt} H_r = L_r. \end{aligned}} \tag{15}$$

Найдем выражение для H_r через тензор инерции системы. Из (10) видно, что скорость любой точки твердого тела может быть выражена в виде

$$\dot{x}^r = u^r + \omega^{r}_{.s} x^s.$$

Здесь u^r обозначает линейную скорость точки, совпадающей в данный момент с началом координат, а $\omega^{r}_{.s}$ обозначает угловую скорость. Следовательно,

$$\begin{aligned} H_r = \sum_a M_{(\alpha)}\, \varepsilon_{rst}\, x^s_{(\alpha)}\, \dot{x}^t_{(\alpha)} &= \sum_a M_{(\alpha)}\, \varepsilon_{rst}\, x^s_{(\alpha)} (u^t + \omega^{t}_{.p}\, x^p_{(\alpha)}) = \\ &= M \varepsilon_{rst}\, \xi^s u^t + \varepsilon_{rst}\, \omega^{t}_{.p}\, I^{sp}. \end{aligned}$$

Положив $\omega^{rs} = -\varepsilon^{mrs}\omega_m$, имеем

$$H_r = M\varepsilon_{rst}\xi^s u^t - (I^s_r - I\delta^s_r)\, \omega_s. \tag{16}$$

Рассмотрим два следующих частных случая.

а) Если твердое тело имеет одну неподвижную точку и если мы выберем эту точку за начало координат, то $u^r = 0$ и поэтому

$$H_r = (I\delta^s_r - I^s_r)\, \omega_s.$$

б) Если мы возьмем начало координат в центре инерции, то $\xi^r = 0$ и поэтому

$$H_r = (I\delta^s_r - I^s_r)\, \omega_s.$$

Упражнения

1. Показать, что движение центра инерции определяется уравнениями

$$M\ddot{\xi}^r = X^r,$$

т. е. *центр инерции движется так, как если бы в нем была сосре-*

доточена вся масса и к нему приложены все силы, действующие на тело.

2. Момент количества движения относительно точки x_0^r определяется следующим образом:

$$H_r^0 \equiv \sum_\alpha M_{(\alpha)} \varepsilon_{rst} (x_{(\alpha)}^s - x_0^s)\, \dot{x}_{(\alpha)}^t.$$

Показать, что

$$H_r^0 = \sum_\alpha M_{(\alpha)} \varepsilon_{rst}\, x_{(\alpha)}^s \dot{x}_{(\alpha)}^t - M\varepsilon_{rst}\, x_0^s \dot{\xi}^t.$$

3. Главный момент сил $X_{(\alpha)}^r$ относительно точки x_0^r есть

$$L_r^0 = \sum_\alpha \varepsilon_{rst} (x_{(\alpha)}^s - x_0^s)\, X_{(\alpha)}^t.$$

Показать, что

$$L_r^0 = \sum_\alpha \varepsilon_{rst}\, x_{(\alpha)}^s X_{(\alpha)}^t - \varepsilon_{rst} x_0^s X^t.$$

4. Доказать, что

$$\frac{dH_r^0}{dt} - L_r^0 = -M\varepsilon_{rst}\, \dot{x}_0^s \dot{\xi}^t.$$

5. Вывести из задачи 4, что если точка x_0^r — центр инерции, то имеют место уравнения

$$\frac{dH_r^0}{dt} = L_r^0.$$

Следовательно, *движение вокруг центра тяжести будет таким же, как если бы центр тяжести был закреплен, а тело подвергалось действию тех же самых сил.*

§ 3. Подвижные оси. Уравнения Эйлера

Рассмотрим следующие два случая движения твердого тела.

а) Одна из точек тела неподвижна в пространстве. Выбираем эту точку за начало координат и убеждаемся, что справедливы уравнения (15). В первом из этих уравнений необходимо включить в X^r реакцию неподвижной точки. Кроме того, мы можем заменить H_r на $(I\delta_r^s - I_r^s)\,\omega_s$, где I_r^s — смешанный тензор инерции, I — скаляр I_m^m, а ω^r — вектор угловой скорости тела.

б) Ни одна точка тела не остается неподвижной в пространстве. Первая половина уравнений (15) справедлива в неподвижной системе координат. Вторая половина (15) также справедлива, если H_r — главный момент количества движения и L_r — главный момент системы сил взяты относительно центра инерции. Другими словами, тело движется относительно центра инерции совершенно так же, как если бы центр инерции был неподвижен, а на тело действовали те же самые силы. Следовательно, абсолютное движение центра инерции относительно системы, неподвижной в пространстве, определяется первой половиной уравнений (15), а движение относительно центра инерции будет такое же, как в случае а), если за неподвижную точку считать центр инерции.

Если мы теперь воспользуемся выражением

$$H_r = (I\delta_r^s - I_r^s)\,\omega_s \tag{17}$$

и пожелаем найти $\frac{dH_r}{dt}$, то сюда войдут производные от I_s^r по t, так как составляющие I_s^r изменяются со временем. Чтобы избежать этого, мы введем движущиеся оси координат, жестко связанные с телом, относительно которых тензор инерции будет иметь не зависящие от времени составляющие.

Пусть $\bar{x}^r$ — неподвижная в пространстве система координат, а x^r — система координат, движущаяся вместе с телом и совпадающая в начальный момент с $\bar{x}^r$. Обращаясь к стр. 171, мы видим, что переход от одной системы координат к другой, которая изменяет свое положение в связи с непрерывным перемещением твердого тела, определяется формулами

$$\bar{x}^r = a^r_{.s}\, x^s, \tag{18}$$

где $a^r_{.s}$ — функции времени, удовлетворяющие уравнениям

$$\bar{g}_{mn}\, a^m_{.r}\, a^n_{.s} = g_{rs}.$$

Кроме того,

$$\frac{da^r_{.s}}{dt} = a^{rp}\omega_{ps}, \tag{19}$$

где ω_{ps} — антисимметричный тензор, а $a^{rp} = g^{ps}a^r_{.s}$.

Далее, любой ковариантный вектор, имеющий относительно подвижных осей составляющие A_r, будет иметь относительно неподвижных осей составляющие $\bar{A}_r$, причем

$$A_r = \bar{A}_s\, a^s_{.r}. \tag{20}$$

Дифференцируя это соотношение по t при помощи (19), получаем

$$\frac{dA_r}{dt} = \frac{d\bar{A}_s}{dt}\, a^s_{.r} + \bar{A}_s a^s_{.t}\, \omega^t_{.r} = a^s_{.r}\frac{d\bar{A}_s}{dt} + A_t\omega^t_{.r},$$

или

$$\frac{dA_r}{dt} - A_s\,\omega^s_{.r} = a^s_{.r}\frac{d\bar{A}_s}{dt}. \tag{21}$$

Относительно неподвижных осей мы имеем

$$\frac{d\overline{H}_r}{dt}=\overline{L}_r.$$

Следовательно, используя (20) и (21), мы получаем

$$\boxed{\frac{dH_r}{dt}-H_s\omega^s_{.r}=L_r.} \tag{22}$$

Это—уравнения движения относительно подвижных осей, связанных с телом.

Вектор угловой скорости движущейся системы координат (и тела) определяется (см. стр. 309) соотношением

$$\omega_{rs}=-\varepsilon_{prs}\omega^p, \tag{23}$$

а так как

$$H_r=(I\delta^p_r-I^p_r)\,\omega_p,$$

где теперь I^r_s—постоянные, то

$$\frac{dH_r}{dt}=(I\delta^p_r-I^p_r)\,\dot{\omega}_p,$$

и уравнения (22) принимают вид

$$\boxed{(I\delta^p_r-I^p_r)\,\dot{\omega}_p-\varepsilon_{rsp}\,(I\delta^s_l-I^s_l)\,\omega^l\omega^p=L_r.} \tag{24}$$

Это—*уравнения Эйлера* в тензорной форме.

Упражнения

1. Показать, что если подвижные оси являются главными осями инерции для неподвижной точки, то уравнения Эйлера приобретают вид

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\,\omega_2\omega_3=L_1 \text{ и т. д.},$$

где

$$I_1=I^2_2+I^3_3 \text{ и т. д.}$$

[Система координат здесь прямоугольная декартова и в I^r_s отличны от нуля лишь I^1_1, I^2_2, I^3_3. Величины I_1, I_2, I_3 являются главными моментами инерции.]

2. Показать, что если A^r—составляющие *контравариантного* вектора относительно движущихся осей, а $\overline{A}^r$—его составляющие относительно неподвижных осей, то

$$\frac{d\overline{A}^r}{dt}=a^r_{.s}\left(\frac{dA^s}{dt}+\omega^s_{.t}A^t\right).$$

3. Показать, что если A^r — вектор, фиксированный в пространстве, то его составляющие относительно подвижных осей удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dA^r}{dt} = -\omega^r_{.s} A^s.$$

4. Показать, что если K_{rs} и $\overline{K}_{rs}$ — составляющие ковариантного тензора второго порядка отосительно подвижных и неподвижных осей соответственно, то

$$\frac{dK_{mn}}{dt} - \omega^p_{.m} K_{pn} - \omega^p_{.n} K_{mp} = a^r_{.m} a^s_{.n} \frac{d\overline{K}_{rs}}{dt}.$$

[Этот результат может быть доказан посредством дифференцирования уравнения $K_{mn} = \overline{K}_{rs} a^r_{.m} a^s_{.n}$, после чего нужно учесть (19). Другой способ: пусть A^m, B^n — два вектора, фиксированных в пространстве. Тогда $K_{mn}A^m B^n$, будучи скаляром, равен $\overline{K}_{mn}\overline{A}^m\overline{B}^n$ и их производные равны. Тогда желаемый результат следует из задачи 3.]

§ 4. Обобщенные координаты динамической системы

Материальная система с динамической точки зрения рассматривается как совокупность материальных точек, взаимно связанных друг с другом различного рода связями. Например, твердое тело рассматривается как множество материальных точек, жестко соединенных друг с другом, так что расстояния между ними остаются неизменными.

Если мы знаем структуру такой динамической системы и связи, наложенные на нее, то ее конфигурация или положение может быть определено некоторым числом независимых переменных, которые называются *обобщенными координатами динамической системы*. Так, например, материальная точка в пространстве имеет три независимые координаты относительно системы координат, неподвижной в пространстве, а материальная точка, принуждаемая двигаться по поверхности, — две независимые координаты: криволинейные координаты на поверхности. Жесткий прямолинейный стержень имеет пять координат, например три координаты одного конца стержня в пространстве и два угла, определяющие его направление.

Число независимых координат, которые полностью определяют конфигурацию динамической системы, называется ее *числом степеней свободы*. Пусть имеется динамическая система; предположим для простоты, что она имеет три степени свободы. Читатель легко увидит, что метод, который мы собираемся развить, может быть немедленно распространен на случай динамической системы с любым числом степеней свободы. Конфигурация нашей системы с тремя степенями свободы в любой момент времени определяется тремя обобщенными координатами, которые мы обозначим через

$$q^1, \ q^2, \ q^3,$$

а используя наше соглашение относительно латинских индексов, их можно записать более кратко: q^r. По мере того как координаты изменяются по величине, динамическая система будет, конечно, изменять свою конфигурацию.

Имеется, очевидно, бесконечно много систем независимых обобщенных координат, которые могут определять конфигурацию динамической системы, но как только ее конфигурация полностью определена при помощи какой-нибудь одной системы обобщенных координат, все эти системы координат должны быть функционально связаны друг с другом. Следовательно, если $\bar{q}^r$ — любая другая система координат, то $\bar{q}^r$ должны быть связаны с q^r формулами типа

$$\bar{q}^r = f^r(q^1, \ q^2, \ q^3). \tag{25}$$

Эти уравнения определяют преобразование одной системы обобщенных координат в другую, и мы можем определить обычным путем векторы и тензоры относительно преобразований (25). Так, например, A^r_{st} являются составляющими смешанного тензора третьего порядка в системе координат q^r, если в новой координатной системе эти составляющие определяются формулами

$$\bar{A}^r_{st} = A^m_{np} \frac{\partial \bar{q}^r}{\partial q^m} \frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^s} \frac{\partial q^p}{\partial \bar{q}^t}\,; \tag{26}$$

здесь суммирование по повторяющимся индексам справа производится, как обычно, от 1 до 3.

Упражнения

1. *Показать, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы.*

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — трехгранник главных осей инерции тела в какой-нибудь момент времени, и пусть $OX_1X_2X_3$ — начальное положение этого трехгранника, так что $Ox_1x_2x_3$ предполагается движущимся вместе с телом, а $OX_1X_2X_3$ — неподвижным в пространстве. Возьмем пересечение этих трехгранников с единичной сферой с центром в неподвижной точке O тела (рис. 36).

Обозначим через θ угол X_3Ox_3, через φ угол между плоскостями X_1OX_3 и X_3Ox_3 и через ψ угол между плоскостями X_3Ox_3 и x_3Ox_1. Эти углы называются *углами Эйлера*; мы покажем, что положение тела полностью определяется тремя эйлеровыми углами, которые и будут поэтому обобщенными координатами тела.

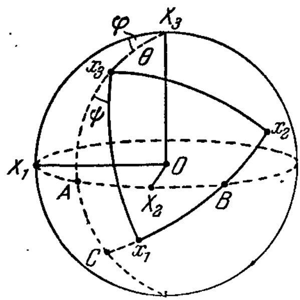

Рис. 36.

Пусть OA — пересечение плоскостей X_3Ox_3, X_1OX_2, OB — пересечение x_1Ox_2, X_1OX_2 и OC — пересечение x_1Ox_2 и X_3Ox_3. Изменяя величину φ путем вращения тела вокруг OX_3, совместим OX_1 с OA и OX_2 с OB. Изменяя θ вращением тела вокруг OB, совместим OX_3 с Ox_3 и OA с OC. Наконец, изменяя ψ вращением вокруг Ox_3, совместим OC с Ox_1 и OB с Ox_2. Следовательно, эти три поворота, выполненных последовательно, приведут трехгранник $OX_1X_2X_3$ в положение $Ox_1x_2x_3$. Поэтому положение главных осей инерции, а следовательно, и связанного с ними тела полностью определяются тремя углами θ, φ, ψ.

2. Показать, что преобразование одной системы координат предыдущего примера в другую происходит в соответствии с таблицей, в которой приведены косинусы углов между старыми и новыми осями.

	X^1	X^2	X^3
x^1	$\cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$	$\cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
x^2	$-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi$	$-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
x^3	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$

3. Показать, что положение свободного твердого тела может быть определено шестью обобщенными координатами, а именно, тремя координатами положения его центра инерции и тремя углами Эйлера.

§ 5. Уравнения движения в обобщенных координатах

Предположим, что положения точек нашей динамической системы определены при помощи аффинных координат x^r в обычном пространстве. Тогда, если нам задано время и какие-нибудь другие обобщенные координаты q^r, то тем самым заданы и все координаты x^r динамической системы, потому что конфигурация динамических систем должна быть определена единственным образом.

Следовательно, x^r являются функциями от q^r и, быть может, от времени, т. е.

$$x^r = x^r(q^1, q^2, q^3, t).$$

Мы ограничимся рассмотрением лишь таких динамических систем, для которых эти уравнения не содержат явно времени, так что

$$x^r = x^r(q^1, q^2, q^3). \tag{27}$$

Дифференцируя (27) по t, имеем

$$\dot{x}^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^s}\dot{q}^s. \tag{28}$$

Объект $\dot{q}^r$, который является вектором относительно преобразования координат (25), называется *обобщенной скоростью*. Из (28) видно, что, когда обобщенная скорость задана, мы знаем скорость в обычном смысле этого слова.

Кинетическая энергия T системы есть

$$T = \frac{1}{2} M g_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = \frac{1}{2} M g_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial q^r}\frac{\partial x^n}{\partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s.$$

Таким образом, мы можем написать

$$\boxed{T = \frac{1}{2} a_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s,} \tag{29}$$

где положено

$$a_{rs} = Mg_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial q^r} \frac{\partial x^n}{\partial q^s}, \tag{30}$$

т. е. кинетическая энергия выражается в виде однородной квадратичной формы от переменных $\dot{q}^r$. Из (30) мы видим, что объект a_{rs} симметричен относительно r и s. Так как, кроме того, T есть скаляр относительно всех преобразований обобщенных координат, то из (29) мы заключаем, что a_{rs} — симметричный тензор второго порядка.

Теперь найдем уравнения движения нашей динамической системы в обобщенных координатах. Обращаясь к (8), стр. 308, мы видим, что уравнения движения в аффинных координатах можно объединить в одно уравнение

$$g_{mn}(M\ddot{x}^m - X^m)\,\delta x^n = 0, \tag{31}$$

где δx^r — возможное перемещение системы, причем мы можем не включать в X^r те внутренние или внешние силы, которые не совершают работы на этом перемещении. Если мы хотим сообщить системе малое перемещение, совместимое со связями, то оно может быть осуществлено посредством изменения координат системы q^r на малые величины δq^r, причем эти последние связаны с δx^r следующими формулами:

$$\delta x^r = \frac{\partial x^r}{\partial q^s}\,\delta q^s.$$

Таким образом, (31) принимает вид

$$g_{mn}\left\{M\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^m}{\partial q^s}\dot{q}^s\right)\frac{\partial x^n}{\partial q^r} - X^m\frac{\partial x^n}{\partial q^r}\right\}\delta q^r = 0. \tag{32}$$

Но

$$Mg_{mn}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^m}{\partial q^s}\dot{q}^s\right)\frac{\partial x^n}{\partial q^r} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{Mg_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial q^s}\frac{\partial x^n}{\partial q^r}\dot{q}^s\right\} - Mg_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial q^s}\frac{\partial^2 x^n}{\partial q^r\,\partial q^t}\dot{q}^s\dot{q}^t =$$

$$= \frac{d}{dt}(a_{rs}\dot{q}^s) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{st}}{\partial q^r}\dot{q}^s\dot{q}^t = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r}.$$

Далее, если мы положим

$$Q_r = g_{mn} X^m \frac{\partial x^n}{\partial q^r},$$

то получим

$$\boxed{Q_r \delta q^r = g_{mn} X^m \delta x^n = \delta W,} \tag{33}$$

где δW — работа, совершаемая силами на элементарном перемещении δq^r; отсюда видно, что Q_r — *ковариантный* вектор; этот вектор называется *обобщенной силой.*

Уравнения (32) принимают теперь вид

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} - Q_r \right\} \delta q^r = 0.$$

Так как координаты q^r независимы, это уравнение справедливо для любых вариаций δq^r, вследствие чего уравнения движения получаются в виде

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r.} \tag{34}$$

Упражнения

1. Показать, что

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} \right\} \delta q^r = M g_{mn} \ddot{x}^m \delta x^n,$$

и вывести отсюда, что величины $\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} \right\}$ образуют *ковариантный вектор.*

2. Показать, что если $\Gamma_{t,rs}$ — символ Кристоффеля первого рода относительно a_{rs}, т. е. если

$$\Gamma_{t,rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{st}}{\partial q^r} + \frac{\partial a_{rt}}{\partial q^s} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial q^t} \right),$$

то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = a_{rs} \ddot{q}^s + \Gamma_{r,st} \dot{q}^s \dot{q}^t.$$

3. Показать, что если a^{rs} — алгебраическое дополнение a_{rs} в $|a_{rs}|$, разделенное на этот определитель, то уравнения движения

могут быть записаны в виде

$$\ddot{q}^r + \Gamma^r_{st}\dot{q}^s\dot{q}^t = Q^r,$$

где

$$\Gamma^r_{st} = a^{rp}\Gamma_{p,\,st}, \quad Q^r = a^{rs}Q_s.$$

[Γ^r_{st} — символ Кристоффеля второго рода относительно a_{rs}; отсюда видно, что $\ddot{q}^r + \Gamma^r_{st}\dot{q}^s\dot{q}^t$ есть абсолютная производная от $\dot{q}^r$ по t. Используя обозначения стр. 197, ее можно написать в виде $\frac{\delta\dot{q}^r}{\delta t}$, а это, как мы знаем, есть контравариантный вектор.]

4. Показать, что если система обобщенных сил консервативна и V — потенциальная функция, то

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q^r},$$

и что уравнения движения принимают форму Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial L}{\partial q^r} = 0,$$

где $L = T - V$.

[Первый результат следует из (33), ибо $\delta W = -\delta V$, а второй результат — из того, что V не содержит $\dot{q}^r$.]

§ 6. Пространство конфигураций

Рассмотрим трехмерное пространство, в котором точка определена тремя обобщенными координатами q^r. Тогда каждой точке этого пространства соответствует определенная конфигурация динамической системы, координатами которой являются q^r; это дает нам геометрическую интерпретацию конфигураций динамической системы. Такое пространство называется *пространством конфигураций*.

Если динамическая система каким-либо образом движется, ее координаты являются функциями времени. Таким образом, движение определяется уравнениями вида

$$q^r = q^r(t). \tag{35}$$

По мере изменения t точка пространства конфигураций, изображающая динамическую систему, описывает *кривую*, причем (35) является ее уравнением. Эта кривая называется *траекторией динамической системы.*

Если, кроме того, система движется свободно под действием заданной системы сил в согласии с законами динамики, то соответствующая точка описывает в пространстве конфигураций кривую, называемую *естественной траекторией для данной системы сил.*

§ 7. Кинематический линейный элемент

Кинетическая энергия системы есть

$$T=\frac{1}{2}a_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s, \tag{36}$$

где a_{rs} — функции от координат q^r. Кинетическая энергия всегда положительна, за исключением случая, когда $\dot{q}^r=0$; в этом случае она обращается в нуль. Иначе говоря, квадратичная форма (36) положительно определена. Следовательно, мы всегда можем выбрать ds так, что

$$\boxed{ds^2=a_{rs}\,dq^r\,dq^s.} \tag{37}$$

При помощи этой формулы мы введем в пространстве конфигураций *определение расстояний* между соседними точками q^r и q^r+dq^r. Мы примем, что это расстояние есть ds. Это значит, что линейный элемент пространства конфигураций определен формулой (37). Таким образом, ds^2 есть однородная функция второй степени от dq^r, совершенно как в эвклидовом трехмерном пространстве. Пространство, в котором ds^2 задано посредством формулы вида (37), называется *пространством Римана.*

Линейный элемент вида (37) называется *кинематическим линейным элементом* в отличие от другого, который будет введен ниже (см. § 9).

Таким образом, располагая метрическим тензором a_{rs} пространства конфигураций, мы, как обычно, определяем ассоциированный метрический тензор в виде алгебраического дополнения элемента a_{rs} в $|a_{rs}|$, деленного на этот определитель. Мы определим длину A вектора A^r следующим образом:

$$A^2 = a_{rs} A^r A^s,$$

и введем операцию получения ассоциированных векторов и тензоров совершенно таким же образом, как мы это делали в случае эвклидова пространства. Далее, мы можем определить абсолютное и ковариантное дифференцирование тензоров с помощью символов Кристоффеля, совершенно как в § 3, стр. 198.

Предположим, что изображающая точка описывает в пространстве конфигураций некоторую кривую, и возьмем длину ее дуги s за параметр, так что уравнения кривой будут

$$q^r = q^r(s). \tag{38}$$

Как мы знаем, $\frac{dq^r}{ds}$ есть вектор; обозначим его через λ^r, так что

$$\lambda^r = \frac{dq^r}{ds}. \tag{39}$$

Из (37) мы видим, что

$$a_{rs} \lambda^r \lambda^s = 1; \tag{40}$$

таким образом, λ^r есть единичный вектор. Назовем его *единичным вектором касательной к кривой.*

Если взять абсолютную производную от уравнения (40), то будет

$$a_{rs} \lambda^r \frac{\delta \lambda^s}{\delta s} = 0,$$

откуда следует, что вектор $\frac{\delta \lambda^r}{\delta s}$ ортогонален к кривой. Обозначив его модуль через $\varkappa$, мы можем написать

$$\boxed{\frac{\delta \lambda^r}{\delta s} = \varkappa \mu^r,} \tag{41}$$

где μ^r — единичный вектор. По аналогии с евклидовым пространством (стр. 211) число $\varkappa$ называется *кривизной*, а μ^r — *главной нормалью кривой.*

§ 8. Траектории динамической системы в пространстве конфигураций

Уравнения траектории имеют вид (35); таким образом, роль параметра обычно играет время t.

Назовем вектор

$$\boxed{v^r = \dot{q}^r} \tag{42}$$

обобщенной скоростью; легко видеть, что квадрат его модуля равен

$$v^2 = a_{rs} v^r v^s = 2T. \tag{43}$$

Определим теперь вектор *обобщенного ускорения* f^r как абсолютную производную от v^r по t. Тогда для f^r будет иметь место следующее выражение:

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \dot{v}^r + \Gamma^r_{st} v^s \dot{q}^t, \tag{44}$$

или

$$\boxed{f^r = \ddot{q}^r + \Gamma^r_{st} \dot{q}^s \dot{q}^t.}$$

Перейдем теперь к новому независимому переменному, в качестве которого примем длину дуги s траектории. Очевидно, имеем

$$ds^2 = a_{rs}\, dq^r\, dq^s = a_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s\, dt^2.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt} = (a_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s)^{\frac{1}{2}} = v. \tag{45}$$

Далее, имеем

$$v^r = \frac{dq^r}{dt} = \frac{dq^r}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\lambda^r, \tag{46}$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \dot{v}\lambda^r + v \frac{\delta \lambda^r}{\delta s} \frac{ds}{dt} .$$

Используя (41), это можно записать в виде

$$\boxed{f^r = \dot{v}\lambda^r + \varkappa v^2\mu^r.} \tag{47}$$

Стало быть, *вектор обобщенного ускорения всегда компланарен с касательной и главной нормалью траектории.* Его составляющей вдоль касательной является $\dot{v}$, а вдоль главной нормали $\varkappa v^2$.

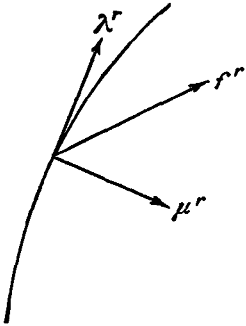

Рис. 37.

Этот результат может быть выражен в несколько иной форме. Так как

$$v = \sqrt{2T},$$

а

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2) = \frac{dT}{ds},$$

то

$$\boxed{f^r = \frac{dT}{ds}\lambda^r + 2\varkappa T\mu^r.} \tag{48}$$

Обозначив через f_r ковариантные составляющие вектора ускорения, имеем

$$f_r = a_{rs}f^s = a_{rs}\ddot{q}^s + \Gamma_{r,st}\,\dot{q}^s\dot{q}^t =$$
$$= \frac{d}{dt}(a_{rs}\dot{q}^s) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{st}}{\partial q^r}\dot{q}^s\dot{q}^t,$$

или

$$f_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r}. \tag{49}$$

Если траектория является естественной для системы сил Q_r, то динамическая система движется в соответствии с законами динамики и уравнение движения (34) принимает вид

$$f_r = Q_r$$

или, в контравариантной форме,

$$\boxed{f^r = Q^r.} \tag{50}$$

Следовательно, *на естественной траектории вектор силы и вектор ускорения совпадают.*

Читателю предлагается отметить сходство изложенного здесь с результатами, полученными в предыдущей главе для движения материальной точки.

Упражнения

1. Доказать, что

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2T}.$$

2. Показать, что на естественной траектории вектор обобщенной силы должен быть компланарным с касательной и главной нормалью.

3. Доказать, что скорость изменения кинетической энергии определяется формулой

$$\frac{dT}{ds}=f_r\dot{q}^r,$$

и вывести отсюда, что при движении по естественной траектории кинетическая энергия может быть выражена так:

$$T=\int Q_r\,dq^r.$$

4. Показать, что если система обобщенных сил имеет потенциал, то из предыдущей задачи получаем $T+V=h$, где h — постоянная.

5. Показать, что естественное движение может происходить вдоль силовой линии обобщенной силы тогда и только тогда, когда она есть геодезическая линия пространства конфигураций.

[Силовая линия — это кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением обобщенной силы Q_r, а геодезическая линия — кривая, у которой кривизна равна нулю.]

§ 9. Принцип стационарного действия. Линейный элемент действия

Мы видели, что на каждой естественной траектории для консервативной силы имеет место закон сохранения энергии

$$T+V=h, \tag{51}$$

где h — полная механическая энергия. В этом разделе мы будем рассматривать лишь те траектории, для которых полная энергия равна постоянной h. Если мы имеем две конфигурации системы, изображаемые точками A и B

(рис. 38), то, вообще говоря, существует лишь одна естественная траектория с заданной полной энергией, проходящая через обе точки.

Рассмотрим все кривые в пространстве конфигураций, которые проходят через точки A и B, соответствующие двум заданным конфигурациям. Мы можем выбрать параметр λ вдоль каждой из этих кривых так, чтобы при изменении λ от значения λ_0 до значения λ_1 изображающая точка перемещалась из A в B.

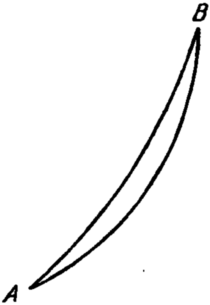

Рис. 38.

Тогда интеграл

$$\boxed{A = \int_A^B \left\{2(h-V)\,a_{rs}\frac{dq^r}{d\lambda}\frac{dq^s}{d\lambda}\right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda} \qquad (52)$$

имеет определенное значение для каждой кривой, проходящей через A и B. Оно называется *действием* для рассматриваемой кривой. Существует следующее предложение, известное под названием *принципа стационарного действия*.

Из всех кривых, проходящих через A и B, та, для которой действие стационарно, является естественной траекторией системы с полной энергией h, находящейся под действием обобщенных сил с потенциалом V.

Доказательство этого принципа совершенно такое же, как в случае движения материальной точки, рассмотренного в § 5, стр. 298, к которому мы и отсылаем читателя.

Принцип стационарного действия для материальной точки является, конечно, лишь частным случаем принципа для произвольной динамической системы.

Вместо того чтобы определять в пространстве конфигураций элементарное расстояние q^r между точками q^r и $q^r + dq^r$ так, как это было сделано в (37), стр. 321, введем его с помощью уравнения

$$\boxed{ds^2 = 2(h-V)\,a_{rs}\,dq^r\,dq^s.} \qquad (53)$$

В этом виде мы будем называть ds *линейным элементом действия* в отличие от уже упоминавшегося кинематического линейного элемента. Заметим, что ds^2 — однородная квадратичная форма от dq^r.

Вводя новый линейный элемент в (52), получаем

$$A = \int_A^B ds = [s]_A^B,$$

так что действие от A до B — это просто *длина* кривой от A до B. Таким образом, кривая стационарного действия есть кривая стационарной длины. Но последняя есть *геодезическая линия* нашего пространства конфигураций. Следовательно, *естественными траекториями с заданной полной энергией h являются геодезические линии пространства конфигураций, если в качестве линейного элемента для пространства конфигураций выбран линейный элемент действия.*

Упражнения

1. Показать, что если использовать кинематический линейный элемент, то действие вдоль кривой равно

$$\int_A^B \sqrt{2(h-V)}\, ds.$$

2. Показать, что действие вдоль естественной траектории равно

$$2\int_A^B T\, dt.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVIII

1. Показать, что все плоскости, проходящие через точку P, относительно которых некоторое тело имеет момент инерции, равный Mk^2, касаются конуса с вершиной в точке P, являющегося касательным конусом поверхности второго порядка, уравнение которой в плоскостных переменных есть

$$(I^{mn} - Mk^2 g^{mn})\, u_m u_n - 2M\xi^m u_m + M = 0.$$

2. Выбрав начало координат в центре инерции, показать, что уравнение эллипсоида инерции в точке a' есть

$$\{(I + M\alpha^2)\, g_{mn} - I_{mn} - M\alpha_m\alpha_n\}\,(x^m - \alpha^m)\,(x^n - \alpha^n) = 1,$$

где $\alpha^2 = g_{mn}\alpha^m\alpha^n$ и $\alpha_r = g_{rm}\alpha^m$.

3. Показать, что составляющей количества движения вдоль произвольной прямой λ^r является $G^r\lambda_r$.

4. Показать, что момент количества движения относительно оси, заданной шестью координатами λ^r, μ_r, равен $H_r\lambda^r - G^r\mu_r$.

[О шести координатах прямой см. стр. 103.]

5. Показать, что сумма моментов системы сил относительно прямой λ^r, μ_r равна $L_r\lambda^r - X^r\mu_r$.

6. Показать, что если H_r^0 — момент количества движения относительно точки x_0^r, а L_r^0 — главный момент системы сил относительно той же точки, то векторное уравнение

$$\frac{dH_r^0}{dt} = L_r^0$$

имеет место в следующих случаях:

а) если точка x_0^r неподвижна;

б) если центр инерции неподвижен;

в) если точка x_0^r совпадает с центром инерции или движется в том же направлении, что и центр инерции.

[Использовать уравнения задачи 4, стр. 311.]

7. Показать, что если v^r — скорость точки x^r движущегося твердого тела, то

$$\frac{\partial v^r}{\partial x^r} = 0.$$

[Имеем $v^r = \omega_{.s}^{\ r} x^s + u^r$, где ω_{rs} антисимметричен.]

8. Показать, что если A^r — вектор, зафиксированный в движущемся твердом теле с одной неподвижной точкой, то составляющие $\overline{A}^r$ относительно неподвижной системы координат удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d\overline{A}^r}{dt} = \omega_{.s}^{\ r}\overline{A}^s.$$

9. Показать, что если скорость каждой точки твердого тела состоит только из двух скоростей, порожденных соответственно двумя угловыми скоростями $\omega_{(1)}^r$ и $\omega_{(2)}^r$, то скорость каждой точки тела порождается угловой скоростью $\omega^r = \omega_{(1)}^r + \omega_{(2)}^r$, т. е. *угловые скорости можно складывать как векторы.*

[Так как скорости точек твердого тела определяются формулами $v_{(1)}^r = \varepsilon^{rst}\omega_{(1)s}x_t$ и $v_{(2)}^r = \varepsilon^{rst}\omega_{(2)s}x_t$, то общая скорость равна $v^r = v_{(1)}^r + v_{(2)}^r = \varepsilon^{rst}(\omega_{(1)s} + \omega_{(2)s})\,x_t$.]

10. Показать, что кинетическая энергия твердого тела с одной неподвижной точкой равна

$$T = \frac{1}{2}\,(I\omega^2 - I_{mn}\omega^m\omega^n) = \frac{1}{2}\,(Ig_{mn} - I_{mn})\,\omega^m\omega^n.$$

$$\Big[\, T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} M_{(\alpha)}g_{mn}\dot{x}_{(\alpha)}^m\dot{x}_{(\alpha)}^n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} M_{(\alpha)}g_{mn}\omega_{.s}^{m}\omega_{.t}^{n}x_{(\alpha)}^s x_{(\alpha)}^t =$$

$$= \frac{1}{2}\, I^{st}g^{mn}\varepsilon_{msp}\varepsilon_{ntq}\omega^p\omega^q = \frac{1}{2}\, I_s^t\delta_{tq}^{sp}\omega_p\omega^q = \text{и т. д.}\,\Big]$$

11. Показать, что если осями координат являются главные оси инерции для неподвижной точки, то кинетическая энергия определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\{I_1(\omega^1)^2+I_2(\omega^2)^2+I_3(\omega^3)^2\},$$

где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции.

• 12. Показать, что

$$\frac{\partial T}{\partial \omega^r}=H_r.$$

13. Показать, что кинетическая энергия твердого тела равна $T=\frac{1}{2}MV^2+T_0$, где V — скорость центра инерции, а T_0 — кинетическая энергия относительно центра инерции (т. е. вычисленная так, как если бы центр инерции был неподвижен).

14. Показать, что кинетическая энергия твердого тела с одной закрепленной точкой, выраженная через главные моменты инерции и углы Эйлера, определяется формулой

$$2T=I_1(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)^2+\\+I_2(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2+I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2.$$

15. Симметричный волчок с закрепленной точкой O на его оси находится под действием силы тяжести; найти выражение функции Лагранжа через углы Эйлера.

[$L=\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2+\frac{1}{2}I_2\dot\varphi\sin^2\theta+\frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2-Mgh\cos\theta$, где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции, M — масса волчка и h — расстояние от O до центра инерции.]

16. Показать, что если K — скалярная функция от q^r и $\dot q^r$, то $\frac{\partial K}{\partial \dot q^r}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot q^r}-\frac{\partial K}{\partial q^r}$ являются ковариантными векторами.

17. *Уравнения Гамильтона.* Положив $p_r=a_{rs}\dot q^s$, мы назовем p_r *обобщенными импульсами.* Показать, что уравнения движения могут быть записаны в форме

$$\dot q^r=\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q^r}=0,$$

где $H=\frac{1}{2}a^{rs}p_rp_s+V$.

18. Вывести из уравнений задачи 17, что $\frac{dH}{dt}=0$, т. е. что эти уравнения имеют первый интеграл $H=\text{const}$. Показать, что это — интеграл энергии.

19. Показать, что если H — скалярная функция от q^r и ковариантного вектора p_r, то $\frac{\partial H}{\partial p_r}$ — контравариантный вектор. Показать также, что если мы возьмем кривую, заданную в параметрической форме посредством уравнений $\frac{dq^r}{du}=\frac{\partial H}{\partial p_r}$, где u — параметр, то $\frac{dp_r}{du}+\frac{\partial H}{\partial q^r}$ — ковариантный вектор.

[Это означает, что уравнения Гамильтона — векторные уравнения.]

20. Показать, что при естественном движении полная производная кинетической энергии по времени равна произведению модуля скорости, модуля силы и косинуса угла между этими векторами.

[Косинус угла между двумя единичными векторами определяется следующим образом: $\cos\theta=a_{rs}\lambda^r\mu^s$. Утверждение, которое требуется доказать, имеет вид $\frac{dT}{dt}=Q_rv^r$.]

21. Показать, что вдоль естественной траектории $\frac{dT}{ds}=Q\cos\varphi$, где Q — модуль вектора силы, а φ — угол, образуемый этим вектором с касательной к траектории.

22. *Теорема Бонне.* Показать, что если динамическая система может проходить определенную последовательность конфигураций под раздельным действием некоторого числа систем сил, то, когда все силы действуют одновременно, динамическая система может проходить через ту же последовательность конфигураций, причем кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий, которые динамическая система имела при раздельном действии этих систем сил.

[С геометрической точки зрения доказательство совершенно такое же, как для случая материальной точки.]

23. Доказать, что кривизна траектории определяется формулой

$$\varkappa^2=\frac{f^2-\dot{v}^2}{v^4}=\frac{f^2}{4T^2}-\frac{\dot{T}^2}{8T^3}.$$

[Использовать (47), стр. 324.]

24. Показать, что если φ — угол между векторами ускорения и скорости, то кривизна траектории равна

$$\varkappa=\frac{f\sin\varphi}{2T}.$$

[$\cos\varphi=\frac{\dot{T}}{f\sqrt{2T}}$ или $\dot{T}^2=2f^2T\cos^2\varphi$. Подставить выражение для $\dot{T}^2$ в формулу задачи 23.]

25. Показать, что если нет действующих сил, то изображающая точка в пространстве конфигураций с кинематическим линейным элементом описывает геодезическую линию.

[Геодезическая линия — линия нулевой кривизны. Выше всюду использовался кинематический линейный элемент.]

26. Показать, что если на динамическую систему наложена связь, определяемая уравнением $\psi(q^1, q^2, q^3) = 0$, то уравнениями движения являются

$$f_r = Q_r + \theta\psi_r,$$

где $\psi_r = \frac{\partial\psi}{\partial q^r}$, а θ — произвольный множитель.

27. *Импульсивное движение* *). Показать, что уравнениями импульсивного движения являются

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r,$$

где $Q_r \delta q^r$ — элементарная работа, совершаемая *импульсивной* силой на виртуальном перемещении δq^r. Вывести, что изменение вектора скорости равно

$$\Delta\dot{q}^r = a^{rs}Q_s.$$

28. Показать, что если на динамическую систему внезапно накладывается связь $\psi(q^1, q^2, q^3) = 0$, то изменение вектора скорости равно

$$\Delta\dot{q}^r = \theta a^{rs}\psi_s,$$

где

$$\psi_r = \frac{\partial\psi}{\partial q^r}, \quad \text{а} \quad \theta = -\frac{\psi_r \dot{q}^r}{a^{rs}\psi_r\psi_s}.$$

29. Динамическая система движется под действием системы сил с потенциалом V и с постоянной полной энергией h. Показать, что если использовать кинематический линейный элемент, то время вдоль траектории определяется формулой

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2(h - V)}}.$$

30. Показать, что из всех траекторий в пространстве конфигураций, проходящих через две заданные конфигурации A и B и удовлетворяющих интегралу энергии $T + V = h$, та, которая сообщает интегралу

$$t = \int_A^B \left\{\frac{a_{mn}q'^m q'^n}{2(h-V)}\right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda, \qquad q'^r = \frac{dq^r}{d\lambda},$$

---

*) См. Уиттекер, Аналитическая динамика, М.—Л., 1937, стр. 63. (*Прим. ред.*)

стационарное значение, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}-\frac{\partial T}{\partial q^r}-\frac{\partial V}{\partial q^r}+\frac{1}{h-V}\frac{dV}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r}=0.$$

[Траектория, время прохождения по которой является стационарным, называется *брахистохроной*, так что мы получаем уравнения брахистохрон нашей динамической системы.]

31. Показать, что уравнения упражнения 30 могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^r}-\frac{\partial T_1}{\partial q^r}=0,$$

где $T_1=\frac{T}{h-V}$. Вывести отсюда, что брахистохроны динамической системы совпадают с естественными траекториями такой динамической системы, кинетическая энергия которой равна $\frac{T}{h-V}$ и на которую не действуют никакие силы.

32. Показать, что брахистохроны динамической системы являются геодезическими линиями в пространстве конфигураций, если его линейный элемент определен формулой

$$ds^2=\frac{a_{mn}dq^m dq^n}{h-V}.$$

33. Показать, что если динамическая система начинает двигаться из состояния покоя в положение O, то естественная траектория и силовая линия, проходящие через O, имеют общие касательные и нормальные векторы. Показать также, что кривизна первой кривой в точке O равна $\frac{1}{3}$ кривизны второй кривой.

ГЛАВА XIX

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 1. Теорема Грина

Прежде чем приступить к изучению применения тензорного исчисления к математической теории электричества и магнетизма, мы рассмотрим две важные теоремы о преобразованиях интегралов по объему в интегралы по поверхности и интегралов по поверхности в криволинейные.

Пусть в пространстве имеется система прямоугольных декартовых координат (x, y, z). В этих координатах теорема Грина, как хорошо известно, формулируется следующим образом (рис. 39):

Если S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, а P, Q, R — три функции, однородные, непрерывные и имеющие частные производные первого порядка повсюду в V, то

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau = \iint\limits_S (lP+mQ+nR)\, d\sigma, \quad (1)$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к S, $d\tau$ — элемент объема, а $d\sigma$ — элемент поверхности на S *).

Этот результат легко доказывается интегрированием вдоль прямых, параллельных координатным осям.

Возьмем общую криволинейную систему координат x^r и сформулируем теорему Грина в этих координатах. Мы знаем, что вектор можно определить, взяв в качестве его

---

*) Эту формулу называют также формулой Остроградского. (*Прим. ред.*)

составляющих в одной какой-нибудь системе три произвольных числа и в качестве его составляющих во всех других системах числа, удовлетворяющие закону преобразования векторов.

Определим вектор F^r так, чтобы в системе координат (x, y, z) его составляющими являлись P, Q, R. Это определяет векторное поле, поскольку вектор является функцией от координат. Если, далее, через $F^r_{\cdot,s}$ обозначить ковариантную производную от F^r, т. е. если

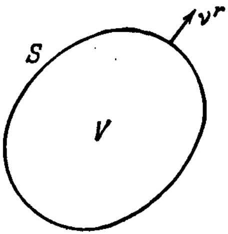

Рис. 39.

$$F^r_{\cdot,s} = \frac{\partial F^r}{\partial x^s} + \Gamma^r_{ps} F^p,$$

то $F^r_{\cdot,r}$ является скаляром. Следовательно, его значение в системе (x, y, z) равно

$$F^r_{\cdot,r} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad (2)$$

благодаря тому, что в декартовой системе координат символы Кристоффеля обращаются в нуль. Скаляр $F^r_{\cdot,r}$ часто называют *дивергенцией вектора* F^r. Обозначив через ν^r единичный вектор внешней нормали к S, составляющими которого в декартовых координатах являются l, m, n, рассмотрим скаляр $F^r \nu_r$, определяемый так:

$$g_{pq} F^p \nu^q = Pl + Qm + Rn. \qquad (3)$$

Теорема Грина в тензорной форме будет

$$\boxed{\iiint\limits_V F^r_{\cdot,r}\, d\tau = \iint\limits_S F^r \nu_r\, d\sigma.} \qquad (4)$$

Интеграл в правой части этого уравнения часто называют *потоком вектора* F^r *через поверхность* S. Таким образом, поток вектора F^r через поверхность S равен интегралу по объему V, ограниченному поверхностью S, от дивергенции вектора F^r. Теорема может быть распространена на области, лежащие между несколькими поверхностями, а объемный интеграл может быть распространен на все пространство, если только F^r удовлетворяет некоторым ограничениям на бесконечности.

Мы можем представить теорему Грина в другой форме. Пусть φ и ψ будут две скалярные функции; введем для краткости обозначения

$$\varphi_r = \frac{\partial\varphi}{\partial x^r}, \quad \psi_r = \frac{\partial\psi}{\partial x^r}.$$

Если мы положим

$$F_r = g_{rs}F^s = \varphi\psi_r, \tag{5}$$

то

$$F^r_{\cdot, r} = g^{rs}F_{r,s} = g^{rs}(\varphi\psi_{r,s} + \varphi_s\psi_r),$$

где $\psi_{r,s}$ есть ковариантная производная от ψ_r. Скаляр $g^{rs}\psi_{r,s}$ часто обозначают через $\Delta\psi$ и называют *лапласианом функции* ψ. В декартовых координатах он имеет вид

$$\Delta\psi = g^{rs}\psi_{r,s} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Объект $g^{rs}\varphi_r\psi_s$ является скалярным и обозначается через $\nabla(\varphi, \psi)$. В декартовых координатах (x, y, z) он имеет следующее выражение:

$$\nabla(\varphi, \psi) = g^{rs}\varphi_r\psi_s = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{7}$$

Итак,

$$F^r_{\cdot, r} = \varphi\Delta\psi + \nabla(\varphi, \psi), \tag{8}$$

и теорема Грина имеет вид

$$\iiint\limits_V \nabla(\varphi, \psi)\, d\tau = \iint\limits_S \varphi\psi_r\nu^r\, d\sigma - \iiint\limits_V \varphi\Delta\psi\, d\tau. \tag{9}$$

Упражнения

1. Показать, что

$$F^r_{\cdot, r} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}F^r), \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}g^{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right).$$

[См. стр. 208.]

2. Вычислить $\Delta\varphi$ в сферических и цилиндрических координатах.

[Использовать задачу 1.]

3. Доказать, что

$$\iint\limits_S \psi_r \nu^r d\sigma = \iiint\limits_V \Delta\psi\, d\tau.$$

[Положить в (9) $\varphi = 1$.]

4. Показать, что если объем V содержит поверхность Σ, на которой F^r разрывно, то

$$\iint\limits_S F^r \nu_r\, d\sigma = \iiint\limits_V F^r_{\cdot,\, r}\, d\tau - \iint\limits_\Sigma \{(F^r\nu_r)_1 + (F^r\nu_r)_2\}\, d\sigma,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности Σ.

§ 2. Теорема Стокса

Вторая важная теорема, известная как теорема Стокса, касается преобразования криволинейного интеграла в интеграл по поверхности. В прямоугольных декартовых координатах эта теорема формулируется так:

Если S — часть поверхности, ограниченная контуром C, и если P, Q, R — три функции, непрерывные и обладающие частными производными первого порядка на S, то

$$\int\limits_C \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right) ds =$$

$$= \iint\limits_S \left\{ l\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} d\sigma, \tag{10}$$

где криволинейный интеграл берется по всему контуру C, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к S.

Сейчас мы сформулируем эту теорему в криволинейных координатах x^r. Возьмем снова вектор F^r, составляющие которого в системе (x, y, z) равны P, Q, R. Составляющие ассоциированного вектора в той же системе также равны P, Q, R, так как в прямоугольных декартовых координатах нет различия между ковариантными и контравариантными составляющими вектора.

Ковариантная производная $F_{r,s}$ вектора F_r является тензором второго порядка, и следовательно, объект

$$\boxed{G^r \equiv -\varepsilon^{rst} F_{s,t}} \tag{11}$$

является контравариантным вектором, где ε^{rst} — контравариантный ε-объект, т. е. ε^{rst} равен $+\frac{1}{\sqrt{g}}$ или $-\frac{1}{\sqrt{g}}$ в зависимости от того, является ли r, s, t четной или нечетной перестановкой чисел 1, 2, 3, и обращается в 0 при всех других значениях r, s, t. Вектор (11) обычно называется *вихрем* или *ротором* F_r; его составляющими в прямоугольной декартовой системе являются

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

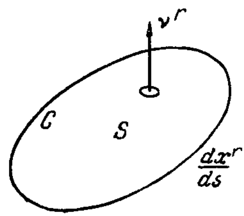

Рис. 40.

Следовательно, обозначив через ν^r единичный вектор нормали к S, мы видим, что $G^r \nu_r$ является скаляром, который в системе (x, y, z) определяется формулой

$$G^r \nu_r = -\varepsilon^{rst} F_{s,t} \nu_r =$$

$$= l\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Так как $\frac{dx^r}{ds}$ является единичным вектором касательной к кривой C (рис. 40), то $F_r \frac{dx^r}{ds}$ является скаляром, который в декартовой системе координат выражается так:

$$F_r \frac{dx^r}{ds} = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}.$$

Поэтому теорема Стокса в тензорных обозначениях имеет вид

$$\boxed{\int_C F_r \frac{dx^r}{ds}\, ds = -\iint_S \varepsilon^{rst} F_{s,t} \nu_r \, d\sigma.} \tag{12}$$

Интеграл в левой части этого уравнения часто называют *циркуляцией вектора F_r вдоль контура C.*

Упражнения

1. Пусть составляющие вектора в ортогональных декартовых координатах будут P, Q, R. Найти составляющие вихря этого вектора: а) в сферических координатах, б) в цилиндрических координатах, в) в косоугольных декартовых координатах (см. задачу 4, стр. 208).

2. Показать, что если мы введем криволинейные координаты u^1, u^2 на поверхности S (см. стр. 218), то

$$\varepsilon^{rst}F_{s,\,t}\nu_r=\varepsilon^{\alpha\beta}F_{\alpha,\beta},$$

где $F_{\alpha,\beta}$ — ковариантная производная от следующего вектора на поверхности:

$$F_\alpha=F_r\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha}.$$

[Использовать соотношение $\nu_r=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{rst}\frac{\partial x^s}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^t}{\partial u^\beta}$, доказанное в § 4, стр. 259. Получим

$$\varepsilon^{rst}F_{s,\,t}\nu_r=\varepsilon^{\alpha\beta}F_{s,\,t}\frac{\partial x^s}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^t}{\partial u^\beta}=\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(F_s\frac{\partial x^s}{\partial u^\alpha}\right)=$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u^\beta}\right)=\varepsilon^{\alpha\beta}F_{\alpha,\,\beta}.]$$

3. Из задачи 2 вывести, что теорема Стокса может быть записана в следующем виде:

$$\int\limits_C F_\alpha\frac{du^\alpha}{ds}\,ds=-\int\limits_S\int\varepsilon^{\alpha\beta}F_{\alpha,\,\beta}\,d\sigma.$$

§ 3. Электростатическое поле

Мы знаем, что электрическое поле, образованное в данной точке некоторым числом электрических зарядов в вакууме, определяется потенциальной функцией V:

$$V=\frac{1}{4\pi}\sum\frac{e}{r},\tag{13}$$

если заряды дискретны; здесь e — электрический заряд в рационализованной системе единиц*), а r — расстояние

---

*) В этой главе всюду используется рационализованная система единиц; см. Сена Л. А., Единицы измерения физических величин, М.—Л., 1948, стр. 101. (*Прим. ред.*)

от данной точки до заряда e. Если заряды непрерывно распределены по объему и на поверхности, то выражение для V принимает вид

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\varrho \, d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{\mu \, d\sigma}{r}, \tag{14}$$

где ϱ — объемная, а μ — поверхностная плотность заряда. Плотность ϱ будет, разумеется, равна нулю в любой точке, где нет объемного распределения зарядов, и аналогично μ обратится в нуль в любой точке, где нет поверхностных зарядов.

Обозначим *вектор напряженности электрического поля* через E_r, так что

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r},} \tag{15}$$

причем здесь принята общая криволинейная система координат x^r.

Теорема Гаусса утверждает, что поток вектора напряженности электрического поля через какую-либо поверхность равен общему электрическому заряду, заключенному внутри поверхности, Итак,

$$\iint\limits_S E_r \nu^r \, d\sigma = \iiint\limits_V \varrho \, d\tau + \iint\limits_\Sigma \mu \, d\sigma,$$

где Σ — поверхность внутри S, имеющая поверхностное распределение заряда. Но из теоремы Гаусса просто выводится, что

$$\iint\limits_S E_r \nu^r \, d\sigma = \iiint\limits_V E^r_{\cdot, r} \, d\tau - \iint\limits_\Sigma \{ (E_r \nu^r)_1 + (E_r \nu^r)_2 \} \, d\sigma,$$

где индексы 1 и 2 относятся к противоположным сторонам поверхности Σ. Следовательно,

$$\iiint\limits_V (E^r_{\cdot, r} - \varrho) \, d\tau - \iint\limits_\Sigma \{ (E_r \nu^r)_1 + (E_r \nu^r)_2 + \mu \} \, d\sigma = 0,$$

и этот результат справедлив для любой поверхности S. Значит, для каждой точки пространства мы имеем

$$\boxed{g^{rs}E_{r,\,s} = E^{r}_{\cdot,\,r} = \varrho,} \tag{16}$$

причем ϱ равно 0 там, где нет электрических зарядов. Кроме того, на поверхности Σ, имеющей поверхностное распределение с плотностью μ, будет

$$\boxed{(E_r\nu^r)_1 + (E_r\nu^r)_2 + \mu = 0.} \tag{17}$$

Это — основные уравнения электростатического поля.

Упражнения

1. Показать, что в любой точке, где нет заряда, $E^{r}_{\cdot,\,r}=0$.

2. Показать, что первое из уравнений (16) может быть переписано в виде $\Delta V = -\varrho$, где $\Delta V = g^{mn}V_{m,\,n}$ — лапласиан V.

3. *Силовые линии.* Силовой линией поля называется кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля. Показать, что уравнениями силовых линий являются

$$\frac{dx^r}{ds} = kE^r,$$

где $\dfrac{1}{k^2} = g_{mn}E^mE^n$.

4. Показать, что силовые линии ортогональны к поверхностям $V = \text{const}$. Эти поверхности называются *эквипотенциальными.*

§ 4. Диэлектрики

Если электрические заряды существуют в некоторой материальной среде, то уравнения предыдущего параграфа необходимо изменить. Электрическое поле в этом случае определяется двумя векторами:

а) *вектором напряженности электрического поля* E_r, который равен градиенту потенциальной функции V, взятому с обратным знаком, т. е.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r} = -V_{,\,r}; \tag{18}$$

б) вектором D_r, который называется *вектором смещения.*

Вектор D_r обладает тем свойством, что его поток через любую поверхность равен общему заряду внутри поверхности. Совершенно так же, как и на стр. 340, с помощью теоремы Грина можно доказать, что во всем пространстве

$$\boxed{g^{rs} D_{r,s} = D^{r}_{\cdot,r} = \varrho,} \tag{19}$$

причем в тех точках, где нет электрических зарядов, $\varrho = 0$; на поверхности Σ, имеющей поверхностное распределение зарядов с плотностью μ, мы имеем

$$\boxed{(D_r\nu^r)_1 + (D_r\nu^r)_2 + \mu = 0,} \tag{20}$$

где индексы 1 и 2 относятся к противоположным сторонам поверхности Σ.

Векторы E_r и D_r связаны между собой таким образом, что если один задан, то задан и другой, т. е. один является функцией другого. Простейшее соотношение между ними, согласующееся с экспериментом, состоит в том, что один вектор является линейной функцией другого. Это нам дает

$$\boxed{D_r = \varepsilon_r^s E_s,} \tag{21}$$

где ε_s^r является функцией лишь координат. Соотношение (21) показывает, что ε_s^r является смешанным тензором второго порядка; назовем его *диэлектрическим тензором.*

Рассмотрим условия того, что диэлектрик *однороден.* Это значит, что если в двух различных точках существуют одинаковые напряженности электрического поля, то в этих точках и векторы D_r также должны быть равными. Иначе говоря, если векторы электрической напряженности образуют постоянное параллельное векторное поле, то векторы смещения также образуют подобное поле.

Условием того, что E_r образуют постоянное параллельное векторное поле, является $E_{r,s}=0$, где $E_{r,s}$ — ковариантная производная; то же самое и для D_r. Дифференцируя (21) ковариантно по x^t, получаем

$$D_{r,t}=\varepsilon_r^s E_{s,t}+\varepsilon_{r,t}^s E_s;$$

следовательно, условием однородности диэлектрика является

$$\varepsilon_{s,t}^r=0, \tag{22}$$

т. е. ковариантная производная от ε_s^r должна исчезать в каждой точке.

Если диэлектрик *изотропный*, то векторы D_r и E_r должны иметь одинаковые направления; это влечет за собой соотношение

$$\varepsilon_s^r=\varepsilon\delta_s^r, \tag{23}$$

где ε — скаляр, а δ_s^r — символ Кронекера. Если среда однородна и изотропна, то из соотношений (22) и (23) видно, что ε постоянно во всех точках среды. В этом случае ε называется *диэлектрической постоянной*.

Уравнения (18) — (21) являются основными уравнениями электрического поля в анизотропном диэлектрике. Однако иногда пользуются другим вектором. Этот вектор определяется равенством

$$P_r=D_r-E_r \tag{24}$$

и называется *вектором поляризации*.

Очевидно, что

$$P_r=(\varepsilon_r^s-\delta_r^s)E_s, \tag{25}$$

так что составляющие вектора поляризации могут быть линейно выражены через составляющие вектора напряженности электрического поля. Тензор $(\varepsilon_s^r-\delta_s^r)$ называется *тензором диэлектрической восприимчивости*.

Упражнения

1. Показать, что

$$g^{rs}D_{r,s}=g^{rs}\varepsilon_{r,s}^t\,E_t+\varepsilon^{rs}E_{r,s},$$

где ε^{rs} есть ассоциированный диэлектрический тензор $g^{sm}\varepsilon_m^r$.

2. Вывести из задачи 1, что потенциальная функция V удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^{rs}_{\cdot\cdot,\, s} V_r + \varepsilon^{rs} V_{r,s} = -\varrho.$$

3. Показать, что если диэлектрик однороден, то

$$\varepsilon^{rs} V_{r,s} = -\varrho.$$

4. Показать, что в однородной изотропной среде

$$\varepsilon \Delta V = \varepsilon g^{mn} V_{m,n} = -\varrho,$$

а на границе двух таких диэлектриков будет

$$(\varepsilon E_r \nu^r)_1 + (\varepsilon E_r \nu^r)_2 = -\mu,$$

где μ — поверхностный заряд на границе.

§ 5. Магнетостатическое поле

Если в точке P помещен элементарный магнит, то потенциал Ω создаваемого им магнитного поля в любой точке пространства определяется формулой

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} I^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где I^r есть магнитный момент, а r — расстояние от взятой точки до P. Потенциал при любом объемном распределении элементарных магнитов равен

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \iiint_V I^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau, \tag{26}$$

где $I^r\, d\tau$ есть магнитный момент элемента объема $d\tau$, называемый *вектором намагничения*. Используя теорему Грина, равенство (26) можно записать в виде

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint_S I_m \nu^m \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{4\pi} \iiint_V I^m_{\cdot,\, m} \frac{d\tau}{r}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что потенциал можно считать порожденным магнитной материей с объемной плотностью ϱ и поверхностной плотностью μ, где

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho &= -I^m_{\cdot,\, m}, \\ \mu &= I_m \nu^m. \end{aligned}} \tag{28}$$

Вектор напряженности магнитного поля определяется формулой

$$\boxed{H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial x^r} = -\Omega_r.} \tag{29}$$

Из (29) и (27) следует, что

$$g^{mn} H_{m,n} = -g^{mn} \Omega_{m,n} = -\Delta\Omega = -g^{mn} I_{m,n},$$

или

$$g^{mn} (H_m + I_m)_{,n} = 0.$$

Следовательно, определив вектор B_r уравнением

$$\boxed{B_r = H_r + I_r,} \tag{30}$$

мы получим

$$\boxed{g^{mn} B_{m,n} = 0.} \tag{31}$$

Вектор B_r называется *вектором магнитной индукции*, а уравнение (31) показывает, что *дивергенция вектора магнитной индукции равна нулю.*

Некоторая часть магнетизма в нашем поле может оставаться постоянной; будем обозначать плотность магнитного момента постоянного магнетизма через I_r^0. Остальная часть магнетизма индуцируется магнитным полем, а поэтому зависит от вектора напряженности магнитного поля H_r. Эту зависимость мы будем предполагать линейной. Поэтому общая интенсивность намагничения будет

$$I_r = I_r^0 + \lambda_r^s H_s.$$

Тензор λ_s^r называется *тензором магнитной восприимчивости*. Воспользовавшись этим выражением, мы можем написать

$$\boxed{B_r = I_r^0 + \mu_r^s H_s,} \tag{32}$$

где

$$\mu_r^s = \lambda_r^s + \delta_r^s.$$

Тензор μ_r^s называется *тензором магнитной проницаемости*.

Уравнения (29) — (32) являются основными уравнениями магнитного поля. Если постоянный магнетизм отсутствует, то, разумеется, $I_r^0=0$.

Упражнения

1. Показать, что

$$g^{rs}B_{r,s}=g^{rs}I^0_{r,s}+g^{rs}\mu^t_{r,s}H_t+\mu^{rs}H_{r,s},$$

где $\mu^{rs}=g^{ms}\mu^r_m$ — ассоциированный тензор магнитной проницаемости.

2. Вывести из задачи 1, что потенциальная функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\mu^{rs}_{\cdot\cdot,s}\Omega_r+\mu^{rs}\Omega_{r,s}=g^{rs}I^0_{r,s}.$$

3. Показать, что если среда однородна, то

$$\mu^r_{s,t}=0,$$

а потенциальная функция удовлетворяет уравнению

$$\mu^{mn}\Omega_{m,n}=g^{mn}I^0_{m,n}.$$

4. Показать, что если среда изотропна, то

$$\mu^r_s=\mu\delta^r_s.$$

5. Показать, что если среда однородна и изотропна, то Ω удовлетворяет уравнению

$$\mu\Delta\Omega=g^{mn}I^0_{m,n},$$

где μ — постоянная.

§ 6. Уравнения электромагнитного поля

Электрический ток в проводнике изображается вектором i^r, который мы назовем *вектором тока*. Этот вектор таков, что изменение потока электричества через элемент поверхности $d\sigma$, перпендикулярный к единичному вектору λ^r, измеряется величиной $i^r\lambda_r\,d\sigma$.

Закон Ома утверждает, что вектор тока является линейной функцией вектора напряженности электрического поля E_r. Таким образом,

$$\boxed{i^r=\varkappa^{rs}E_s,} \tag{33}$$

где составляющие $\varkappa^{rs}$ являются функциями только от координат. Мы видим, что $\varkappa^{rs}$ есть *тензор второго порядка*; назовем его *тензором проводимости*. Если среда однородная, мы увидим, как и раньше, что

$$\varkappa^{rs}_{\cdot\cdot,\,t}=0,$$

а если среда изотропная, то

$$\varkappa^{rs}=\varkappa g^{rs}.$$

Электрический ток в проводнике иногда называют *током проводимости* в отличие от других видов электрического тока, с которыми мы встретимся ниже.

Предположим, у нас имеется покоящаяся среда, которая может состоять из диэлектриков и проводников и в которой электрические заряды могут перемещаться. Мы хотим найти уравнения электромагнитного поля при этих условиях.

Электромагнитное поле определяется следующими векторами:

а) вектором напряженности электрического поля E_r;

б) вектором смещения D_r. С этими двумя векторами связан вектор поляризации $P_r=D_r-E_r$;

в) вектором магнитной индукции B_r, который удовлетворяет уравнению $g^{mn}B_{m,n}=0$;

г) вектором наведенного магнетизма среды I_r. Этот вектор вместе с B_r определяет новый вектор $H_r=B_r-I_r$, который называется вектором напряженности магнитного поля;

д) вектором *полного* тока C^r. Вектор полного тока включает в себя три различных вида векторов тока:

1) вектор тока *проводимости*, связанный с E_r законом Ома. Вектор тока проводимости есть $\varkappa^{rs}E_s$, где $\varkappa^{rs}$ — тензор проводимости среды;

2) вектор тока *смещения*, который определяется формулой

$$\frac{\partial D^r}{\partial t};$$

3) вектор тока *конвекции*, который возникает благодаря движению электрических зарядов в среде. Например, если электрический заряд с объемной плотностью ϱ

имеет скорость v^r, то вектор тока конвекции равен

$$\varrho v^r.$$

Первым основным законом электромагнитного поля является *закон Фарадея*, который утверждает, что электродвижущая сила, индуцированная в контуре, пропорциональна уменьшению потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром. Электродвижущая сила в контуре L измеряется криволинейным интегралом

$$\int\limits_L E_r \frac{dx^r}{ds}\, ds.$$

Поэтому закон Фарадея записывается в виде

$$\int\limits_L E_r \frac{dx^r}{ds}\, ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S B_r \nu_r\, d\sigma, \tag{34}$$

где S — какая-нибудь поверхность, проходящая через контур L. Применяя теорему Стокса к криволинейному интегралу, имеем

$$\iint\limits_S \left\{\frac{1}{c}\frac{\partial B^r}{\partial t} - \varepsilon^{rst} E_{s,t}\right\} \nu_r\, d\sigma = 0.$$

Это уравнение справедливо для любой поверхности S, поэтому

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial B^r}{\partial t} = \varepsilon^{rst} E_{s,\,t},} \tag{35}$$

т. е. скорость изменения B^r равна произведению вихря вектора E_r на c, взятому со знаком минус. Это — первое векторное уравнение электромагнитного поля.

Вторым основным законом является *закон Ампера*, утверждающий, что интеграл от вектора напряженности магнитного поля, взятый по замкнутому контуру, пропорционален потоку вектора тока через поверхность, ограниченную контуром. В наших обозначениях это имеет вид

$$\int\limits_L H_r \frac{dx^r}{ds}\, ds = \frac{1}{c}\iint\limits_S C^r \nu^r\, d\sigma. \tag{36}$$

Применяя, как и выше, теорему Стокса, получаем

$$\boxed{\frac{1}{c} C^r = -\varepsilon^{rst} H_{s,t},} \tag{37}$$

т. е. вектор тока равен произведению c на вихрь вектора H_r. Это — второе векторное уравнение поля.

К двум векторным уравнениям (35) и (37) мы должны добавить два скалярных уравнения

$$\boxed{\begin{aligned} g^{mn} D_{m,n} &= \varrho, \\ g^{mn} B_{m,n} &= 0, \end{aligned}} \tag{38}$$

которые, как мы уже видели, справедливы в статических полях (стр. 340—343). Уравнения (35), (37) и (38) составляют систему уравнений электромагнитного поля.

Векторы D_r, E_r и B_r, H_r связаны, разумеется, формулами

$$\left.\begin{aligned} D_r &= \varepsilon_r^s E_s, \\ B_r &= \mu_r^s H_s. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Упражнения

1. Показать, что

$$\varepsilon^{rst} E_{s,t} = \frac{1}{c} \mu^{rs} \frac{\partial H_s}{\partial t}.$$

[Так как среда покоится, то $\dfrac{\partial \mu_s^r}{\partial t} = \dfrac{\partial \varepsilon_s^r}{\partial t} = 0$.]

2. Показать, что

$$\varepsilon^{rst} H_{s,t} = -\frac{1}{c}\left\{\varkappa^{rs} E_s + \varepsilon^{rs} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \varrho v^r\right\}.$$

3. Показать, что если среда однородна и изотропна, то уравнения электромагнитного поля принимают вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon g^{mn} E_{m,n} = \varrho, \\ &g^{mn} H_{m,n} = 0, \\ &\varepsilon^{rst} E_{s,t} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H^r}{\partial t}, \\ &\varepsilon^{rst} H_{s,t} = -\frac{1}{c}\left\{\varkappa E^r + \varepsilon \frac{\partial E^r}{\partial t} + \varrho v^r\right\}. \end{aligned}$$

4. Показать, что в электромагнитном поле

$$\varepsilon^{rst}B_{s,t}=-\frac{1}{c}\{C^r-c\varepsilon^{rst}I_{s,t}\}.$$

5. Показать, что уравнения электромагнитного поля могут быть записаны в виде

$$E_{r,s}-E_{s,r}=\frac{1}{c}\,\varepsilon_{prs}\frac{\partial B^p}{\partial t},$$

$$H_{r,s}-H_{s,r}=-\frac{1}{c}\,\varepsilon_{prs}C^p,$$

$$D^r_{,r}=\varrho,$$

$$B^r_{,r}=0.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XIX

1. С помощью теоремы Стокса показать, что если F_r — векторное поле, удовлетворяющее условию $\operatorname{rot} F_r=0$, то существует такая скалярная функция φ, что

$$F_r=\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}.$$

2. С помощью теоремы Грина показать, что если интеграл $\iint\limits_S F^r\nu_r\,d\sigma$, взятый по поверхности S, ограниченной контуром C, зависит только от C, то $F^r_{,r}=0$, т. е. дивергенция F^r равна нулю.

3. Доказать, что если дивергенция F^r всюду равна нулю, то мы можем найти такой вектор A_r, что $F^r=\operatorname{rot} A_r$, и показать, что F^r является также вихрем вектора $\left(A_r+\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}\right)$, где φ — произвольная скалярная функция координат.

4. Показать, что энергия электростатического поля равна

$$W=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \varrho V\,d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_S \mu V\,d\sigma.$$

5. Вывести из упражнения 4, что W может быть выражено следующим образом:

$$W=\frac{1}{2}\iiint g_{mn}E^mE^n\,d\tau,$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

6. Показать, что энергия электрического поля в диэлектрике равна

$$W=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon_{mn}E^mE^n\,d\tau.$$

$$\left[W=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \varrho V\,d\tau+\frac{1}{2}\iint\limits_S \mu V\,d\sigma=\right.$$

$$=\frac{1}{2}\iiint VD^r_{,r}\;d\tau-\frac{1}{2}\iint\limits_S V\{(D_r\nu^r)_1+(D_r\nu^r)_2\}\,d\sigma=$$

$$\left.=\frac{1}{2}\iiint E^mD_m\,d\tau \text{ по теореме Грина.}\right]$$

7. Показать, что в анизотропном диэлектрике существуют три семейства таких силовых линий, что в каждой точке их направление совпадает с направлением соответствующей линии смещения. Мы можем назвать их *главными линиями*, а направления касательных к ним — *главными направлениями диэлектрика.*

[Линии смещения определяются тем, что для них $dx^r=\theta D^r$. Главное направление λ^r диэлектрика определяется тем, что для него $(\varepsilon_{rs}-\theta g_{rs})\lambda^s=0$, где θ — корень характеристического уравнения $|\varepsilon_{rs}-\theta g_{rs}|=0$.]

8. Показать, что в магнитном поле можно выбрать вектор F_r так, что $B^r=-\varepsilon^{rst}F_{s,t}$, т. е. B^r является вихрем вектора F_r. Вектор F_r называется *векторным потенциалом*.

9. Показать, что в каждой точке любой среды имеются три таких ортогональных направления, что если магнитная силовая линия в этой точке касается одного из них, то векторы B_r и I_r имеют то же самое направление.

[Эти направления λ^r удовлетворяют уравнениям $(\mu^r_s-\theta\delta^r_s)\lambda^s=0$, где θ — корень уравнения $\left|\mu^r_s-\theta\delta^r_s\right|=0$.]

10. Показать, что в любой точке поверхности Σ, находящейся в магнитном поле,

$$(B_r\nu^r)_1+(B_r\nu^r)_2=0,$$

где ν^r_1 и ν^r_2 — единичные векторы нормалей к обеим сторонам Σ.

11. Показать, что для магнитного поля

$$\iiint B_rH^r\,d\tau=0,$$

где интеграл берется по всему пространству, и вывести, что

$$\iiint I^0_rH^r\,d\tau+\iiint \mu_{rs}H^rH^s\,d\tau=0.$$

12. Показать, что энергия магнитного поля равна

$$W=\frac{1}{2}\iiint \mu_{rs}H^rH^s\,d\tau,$$

где интеграл распространен на все пространство, и что для однородной изотропной среды эта формула превращается в следующую:

$$W=\frac{1}{2}\mu\iiint g_{rs}H^rH^s\,d\tau.$$

13. Энергия электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей. Показать, что плотность энергии w электромагнитного поля выражается формулой

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_{rs}E^rE^s+\mu_{rs}H^rH^s).$$

14. Показать, что если S — любая фиксированная поверхность, ограничивающая объем V, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V w\,d\tau=c\iint\limits_S \varepsilon^{rst}H_sE_t\nu_r\,d\sigma-\iiint\limits_V(\varkappa^{rs}E_rE_s+\varrho v^rE_r)\,d\tau.$$

Вектор $S^r=c\varepsilon^{rst}H_sE_t$ называется *вектором потока энергии* (*вектором Пойнтинга*).

15. Показать, что дивергенция C^r равна нулю, т. е. $C^r_{,r}=0$.

16. Доказать, что в однородной изотропной непроводящей среде без конвекционных токов

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2E_r}{\partial t^2}=g^{mn}E_{r,\,mn}-E^m_{\cdot,mr}.$$

Если нет точечных электрических зарядов, то уравнение превращается в

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2E_r}{\partial t^2}=g^{mn}E_{r,\,mn}.$$

[Здесь $\varkappa^{rs}=0$, $v^r=0$, $\varepsilon_{rs}=\varepsilon g_{rs}$ и $\mu_{rs}=\mu g_{rs}$.]

17. Доказать, что инвариантная функция $\varphi=E_r\lambda^r$, где E_r — вектор напряженности электрического поля в однородном изотропном диэлектрике, а λ^r — постоянное параллельное векторное поле, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta\varphi.$$

[Использовать равенство $\lambda^r_{,s}=0$ и второе утверждение задачи 16.]

18. В электронной теории считают, что электроны находятся в вакууме. Показать, что в этой теории электромагнитными

уравнениями являются

$$H^r_{\cdot,r}=0, \quad E^r_{\cdot,r}=\varrho,$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E^r}{\partial t}+\varrho v^r\right)=-\varepsilon^{rst}H_{s,t}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial H^r}{\partial t}=\varepsilon^{rst}E_{s,t},$$

причем вне электрона $\varrho=0$.

[Здесь $\varepsilon_{rs}=g_{rs}=\mu_{rs}$, $\varkappa^{rs}=0$.]

19. Уравнениями электромагнитного поля для однородной изотропной проводящей среды, находящейся в состоянии покоя, являются

$$E^r_{\cdot,r}=\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad H^r_{\cdot,r}=0,$$

$$\frac{1}{c}\left(\varkappa E^r+\varepsilon\frac{\partial E^r}{\partial t}\right)=-\varepsilon^{rst}H_{s,t}, \qquad \frac{\mu}{c}\frac{\partial H^r}{\partial t}=\varepsilon^{rst}E_{s,t}.$$

Показать, что

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}=-\frac{\varkappa}{\varepsilon}\varrho.$$

Доказать, что при $\varrho=0$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2}+\frac{\varkappa\mu}{c^2}\frac{\partial E_r}{\partial t}=g^{mn}E_{r,mn}.$$

$\Big[$Имеем $\frac{1}{c}\left(\varkappa E^r_{\cdot,r}+\varepsilon\frac{\partial E^r_{\cdot,r}}{\partial t}\right)=-\varepsilon^{rst}H_{s,tr}=0$, так как тензор $H_{s,tr}$ симметричен относительно t и r. После подстановки $E^r_{\cdot,r}=\frac{\varrho}{\varepsilon}$ получаем первый результат. Второе утверждение следует из уравнения $\frac{\mu}{c}\frac{\partial H^r}{\partial t}=\varepsilon^{rst}E_{s,t}$.$\Big]$

20. Доказать, что в однородной изотропной покоящейся среде

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_r}{\partial t^2}+\frac{\varkappa\mu}{c^2}\frac{\partial H_r}{\partial t}=g^{mn}H_{r,mn}.$$

[Доказательство аналогично предыдущему.]

ГЛАВА XX

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 1. Бесконечно малые деформации

Рассмотрим сплошную среду, в которой задана криволинейная система координат x^r. Если каждую точку среды слегка сместить, так чтобы она заняла соседнее положение, то говорят, что среда имеет *бесконечно малое смещение* или *бесконечно малую деформацию*; мы рассмотрим геометрические свойства таких смещений.

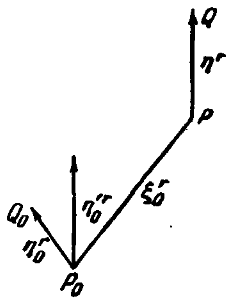

Рис. 41.

Пусть P_0 — точка среды в начальном состоянии (рис. 41), а P — ее новое положение в смещенном состоянии. Так как смещение бесконечно мало, то и расстояние P_0P бесконечно мало. Обозначим малый вектор P_0P через ξ_0^r и будем называть его *вектором смещения в точке* P_0. Смещение среды будет задано, если в каждой ее точке определен бесконечно малый вектор смещения.

Если x^r и x_0^r — координаты точек P и P_0 соответственно, то $x^r - x_0^r$ — составляющие вектора смещения,

$$x^r - x_0^r = \xi^r(x_0^1,\ x_0^2,\ x_0^3), \tag{1}$$

причем ξ^r — бесконечно малая первого порядка. Выясним, как смещается окрестность точки P_0. Пусть Q_0 — точка, близкая к P_0, а Q — ее положение после смещения. Если обозначить вектор P_0Q_0 через η_0^r, а вектор PQ, получающийся из P_0Q_0 в результате смещения, через η^r, то координатами точек Q и Q_0 будут $x^r + \eta^r$ и $x_0^r + \eta_0^r$

соответственно. Отрезок Q_0Q является вектором смещения ξ^r в точке Q_0, и следовательно,

$$(x^r+\eta^r)-(x_0^r+\eta_0^r)=\xi^r(x_0^1+\eta_0^1,\ x_0^2+\eta_0^2,\ x_0^3+\eta_0^3)=$$
$$=\xi_0^r+\left(\frac{\partial\xi^r}{\partial x^s}\right)_0\eta_0^s,$$

где мы пренебрегаем членами высших порядков относительно η_0^r. Используя (1), имеем

$$\eta^r-\eta_0^r=\left(\frac{\partial\xi^r}{\partial x^s}\right)_0\eta_0^s. \qquad (2)$$

Для того чтобы сравнить η^r с η_0^r, возьмем вектор η^r и перенесем его *параллельно* в точку P; получим вектор $\eta_0'^r$ (рис. 41). Если система координат декартова, то η^r и $\eta_0'^r$ будут равны между собой и мы получим

$$\eta_0'^r-\eta_0^r=\left(\frac{\partial\xi^r}{\partial x^s}\right)_0\eta_0^s.$$

Для того чтобы найти соответствующее соотношение в общих криволинейных координатах, мы должны просто ввести ковариантную производную $\xi^r_{.,s}$:

$$\xi^r_{.,s}=\frac{\partial\xi^r}{\partial x^s}+\Gamma^r_{st}\xi^t.$$

Мы получим

$$\eta_0'^r-\eta_0^r=(\xi^r_{.,s})\,\eta_0^s. \qquad (3)$$

Это уравнение является тензорным, справедливым в любой системе декартовых координат. Поэтому оно справедливо во всех вообще системах координат. Вектор $\delta\eta_0^r=\eta_0'^r-\eta_0^r$ является мерой растяжения вектора η_0^r. Так как впоследствии мы будем иметь дело с векторами смещения только в точке P_0, можно отбросить индекс 0 и написать (3) просто

$$\boxed{\delta\eta^r=\xi^r_{.,s}\eta^s.} \qquad (4)$$

Ассоциированный тензор $\xi_{r,s}=g_{rt}\xi^t_{.,s}$, вообще говоря, не симметричен.

Положим

$$e_{rs}=\frac{1}{2}(\xi_{r,s}+\xi_{s,r}),\quad \omega_{rs}=\frac{1}{2}(\xi_{r,s}-\xi_{s,r}). \qquad (5)$$

Тогда

$$\xi_{r,s} = e_{rs} + \omega_{rs},$$

или, поднимая индекс r,

$$\xi^r_{\cdot,s} = e^r_{\cdot s} + \omega^r_{\cdot s}.$$

Поэтому (4) можно записать в виде

$$\boxed{\delta\eta^r = e^r_{\cdot s}\eta^s + \omega^r_{\cdot s}\eta^s.} \tag{6}$$

Если пренебречь величинами более высокого порядка, чем ξ^r, то при последовательном выполнении в любом порядке двух смещений

$$\delta\eta^r = e^r_{\cdot s}\eta^s \tag{7}$$

и

$$\delta\eta^r = \omega^r_{\cdot s}\eta^s \tag{8}$$

они приводят к одному и тому же результату (6). Мы назовем *чистой деформацией* смещение типа (7), где e_{rs} — симметричный тензор, а в дальнейшем из задач мы увидим, что (8) является малым поворотом окрестности точки P_0 вокруг P_0. Таким образом, каждое бесконечно малое смещение среды состоит из:

а) чистой деформации;

б) поворота окрестности точки P_0 вокруг P_0;

в) параллельного переноса окрестности P_0 в точку P.

Последние два типа смещений представляют собой движение окрестности точки P_0 как единого целого. Итак, деформация среды в окрестности P_0, исключая перемещение этой окрестности как твердого тела, определяется тензором e_{rs}, который называется *тензором деформации*.

Упражнения

1. *Показать, что относительное объемное расширение (сжатие) определяется скаляром* $\xi^r_{,r}$.

Возьмем три бесконечно малых вектора $\eta^r_{(1)}$, $\eta^r_{(2)}$, $\eta^r_{(3)}$ в точке P_0 и обозначим их после смещения штрихованными буквами. Если ΔV — объем тетраэдра, ребрами которого являются три взятых вектора в точке P_0, и если $\Delta V'$ — его объем после смещения, то $\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V}$ называется *относительным расширением* в точке P_0. Имеем

$$\Delta V = \frac{1}{6} \varepsilon_{rst} \eta^r_{(1)} \eta^s_{(2)} \eta^t_{(3)}, \quad \Delta V' = \frac{1}{6} \varepsilon_{rst} \eta'^r_{(1)} \eta'^s_{(2)} \eta'^t_{(3)}.$$

Таким образом, удерживая лишь члены наинизшего порядка малости, получим

$$\Delta V' = \Delta V + \frac{1}{6} \varepsilon_{rst} (\eta^r_{(1)} \eta^s_{(2)} \delta\eta^t_{(3)} + \eta^r_{(1)} \delta\eta^s_{(2)} \eta^t_{(3)} + \delta\eta^r_{(1)} \eta^s_{(2)} \eta^t_{(3)}) =$$

$$= \Delta V + \frac{1}{6} \varepsilon_{rst} (\eta^r_{(1)} \eta^s_{(2)} \xi^t_{\cdot,p} \eta^p_{(3)} + \eta^r_{(1)} \xi^s_{\cdot,p} \eta^p_{(2)} \eta^t_{(3)} + \xi^r_{\cdot,p} \eta^p_{(1)} \eta^s_{(2)} \eta^t_{(3)}) =$$

$$= \Delta V + \frac{1}{6} \xi^r_{\cdot,r} \varepsilon_{mnp} \eta^m_{(1)} \eta^n_{(2)} \eta^p_{(3)}.$$

Следовательно, относительное расширение равно

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \xi^r_{\cdot,r}.$$

Таким образом, *относительное расширение (сжатие) равно дивергенции вектора смещения.*

2. *Показать, что относительное расширение равно* $g^{mn} e_{mn}$.

3. Показать, что если η — длина вектора η^r, а $\delta\eta$ — изменение длины после смещения, то $\eta\delta\eta = e_{rs}\eta^r\eta^s$. Вывести отсюда, что если λ^r — единичный вектор направления η^r, то

$$e = \frac{\delta\eta}{\eta} = e_{rs}\lambda^r\lambda^s.$$

Скаляр e называется *удлинением вектора* η^r.

4. Возьмем элементарную поверхность второго порядка

$$e_{rs}\eta^r\eta^s = k,$$

где k бесконечно мало. Показать, что удлинение вектора η^r равно $\frac{k}{\eta^r}$. Эта поверхность второго порядка иногда называется *эллипсоидом деформации.*

5. Главные оси эллипсоида деформации называются *главными осями деформации.* Показать, что главные оси деформации определяются уравнениями

$$(e_{rs} - e g_{rs}) \lambda^s = 0,$$

где e — корень уравнения $| e_{rs} - e g_{rs} | = 0$.

6. Беря подходящие декартовы координаты в точке P_0, показать, что смещение (8) является бесконечно малым поворотом вокруг оси λ^r на угол $\delta\theta$, определяемый равенством

$$\varepsilon^{rmn}\omega_{mn} = -2\delta\theta\lambda^r.$$

[Выбрать декартову систему $\bar{x}^r$, в которой $\bar{\lambda}^1 = \bar{\lambda}^2 = 0$, $\bar{\lambda}^3 = 1$.]

§ 2. Напряжения

Теперь рассмотрим силы, действующие на малый элемент сплошной среды.

Во-первых, могут существовать *внешние* массовые силы, которые действуют на каждую частицу среды; если обозначить через F^r силу, действующую на единицу массы, то сила, действующая на элемент объема $d\tau$, будет $F^r \varrho\, d\tau$, где ϱ — плотность среды. Кроме массовых сил могут существовать внешние поверхностные силы, действующие на внешнюю поверхность среды, так что на элемент поверхности $d\sigma$ действует сила $T^r\, d\sigma$ (рис. 42).

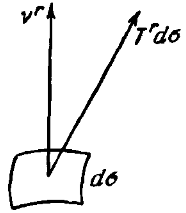

Рис. 42.

Внутренние силы в среде рассматриваются следующим образом. Пусть имеется элемент поверхности $d\sigma$ внутри среды. Действие материи, находящейся по одну сторону от элемента $d\sigma$, на материю, находящуюся по другую сторону его, представляется вектором силы $T^r\, d\sigma$. Назовем одну сторону поверхности положительной стороной, а другую — отрицательной и будем считать вектор нормали и поверхности направленным в положительную сторону. Мы будем также полагать, что $T^r\, d\sigma$ есть действие вещества, расположенного с положительной стороны поверхности, на вещество, находящееся с отрицательной стороны. Тогда, разумеется, действие вещества, расположенного с отрицательной стороны, на вещество, расположенное с положительной стороны, будет равно $-T^r\, d\sigma$, по принципу равенства действия и противодействия. Здесь вектор силы $T^r\, d\sigma$ зависит не только от $d\sigma$, но также и от ориентации $d\sigma$, т. е. от ν^r. Беря декартову систему координат и рассматривая равновесие бесконечно малого тетраэдра, легко показать, что T^r — линейная однородная функция от ν^r, вследствие чего мы имеем

$$\boxed{T^r = E^{rs}\nu_s,} \tag{9}$$

где E^{rs} *симметричен* по r и s и зависит только от координат точки. Мы видим, что E^{rs} — контравариантный тензор второго порядка. Внутренние силы среды называются напряжениями; поэтому мы назовем E^{rs} *тензором напряжений*.

Найдем теперь уравнения движения любой частицы среды. Пусть внутри среды некоторый объем V ограничен поверхностью S (рис. 43). Уравнениями движения этой части вещества являются

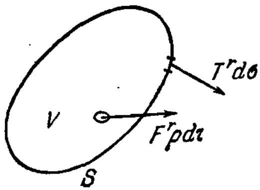

Рис. 43.

$$\iiint_V \varrho (F^r - f^r)\,\lambda_r\,d\tau + \iint_S T^r \lambda_r\,d\sigma = 0,$$

где f^r — вектор ускорения, а λ_r — произвольное постоянное параллельное векторное поле. Если ν^r — единичный вектор нормали к S, направленный во внешнюю сторону, то согласно (9) получаем

$$\iiint_V \varrho (F^r - f^r)\,\lambda_r\,d\tau + \iint_S E^{rs} \lambda_r \nu_s\,d\sigma = 0.$$

Пользуясь теоремой Грина, мы найдем, что

$$\iint_S E^{rs}\lambda_r \nu_s\,d\sigma = \iiint_V (E^{rs}\lambda_r)_{,\,s}\,d\tau = \iiint_V E^{rs}_{\cdot\cdot,\,s}\lambda_r\,d\tau,$$

так как $\lambda_{r,\,s} = 0$. Следовательно, будет

$$\iiint_V \{\varrho (F^r - f^r) + E^{rs}_{\cdot\cdot,\,s}\}\,\lambda_r\,d\tau = 0,$$

причем это уравнение справедливо для любого объема V и любого параллельного векторного поля λ_r. Следовательно, в каждой точке среды справедливы уравнения

$$\boxed{E^{rs}_{\cdot\cdot,\,s} + \varrho F^r = \varrho f^r,} \tag{10}$$

которые и являются уравнениями движения среды.

Упражнения

1. Возьмем поверхность второго порядка $E_{rs}\eta^r\eta^s = k$. Показать, что напряжение на элементе $d\sigma$ действует в направлении перпендикуляра к плоскости, сопряженной с нормалью элемента $d\sigma$ относительно взятой поверхности второго порядка. Эту последнюю иногда называют *эллипсоидом напряжений*.

2. Показать, что нормальное напряжение на элементе $d\sigma$ равно $\frac{k}{\eta^2}$, где η — длина радиуса-вектора эллипсоида напряжений в направлении нормали к $d\sigma$.

3. Главные оси эллипсоида напряжения называются *главными осями напряжений*. Показать, что эти главные оси определяются уравнением

$$(E_{rs} - Eg_{rs})\lambda^s = 0,$$

где E — корень уравнения $|E_{rs} - Eg_{rs}| = 0$.

4. Показать, что напряжение на элементе поверхности, перпендикулярном к одной из главных осей напряжения, направлено по нормали к элементу поверхности. Такие напряжения называются *главными*.

§ 3. Уравнения движения идеальной жидкости

В случае идеальной жидкости напряжение на элементе $d\sigma$ всегда нормально к $d\sigma$ и, следовательно,

$$\boxed{E_{rs} = -pg_{rs},} \tag{11}$$

где p — *скаляр*, называемый *давлением* жидкости. Заметим, что величина давления на элемент поверхности в данной точке не зависит от ориентации элемента.

Уравнения (10) могут быть записаны в ковариантной форме

$$g^{st}E_{rs,t} + \varrho E_r = \varrho f_r.$$

Но

$$g^{st}E_{rs,t} = -g^{st}(pg_{rs})_{,t} = -g^{st}\frac{\partial p}{\partial x^t}g_{rs} = -\frac{\partial p}{\partial x^r}.$$

Следовательно, уравнения движения жидкости будут

$$\frac{\partial p}{\partial x^r} = \varrho(F_r - f_r). \tag{12}$$

Обозначим через v^r вектор скорости любой точки среды; этот вектор является функцией как времени, так и координат точки:

$$v^r = v^r(x^1, x^2, x^3, t). \tag{13}$$

Поэтому

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{\partial v^r}{\partial t} + v^r_{\cdot, s} v^s \tag{14}$$

или, опуская индекс r,

$$f_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_{r,s} v^s. \tag{15}$$

Уравнения движения принимают вид

$$\boxed{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^r} = F_r - \frac{\partial v_r}{\partial t} - v_{r,s} v^s.} \tag{16}$$

Масса жидкости, содержащейся в фиксированном объеме V, равна

$$M = \iiint\limits_V \varrho \, d\tau,$$

и следовательно, скорость изменения массы в этом объеме равна

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \iiint\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, d\tau.$$

Но, с другой стороны, эта же самая скорость определяется формулой

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\iint\limits_S \varrho v^r \nu_r \, d\sigma = -\iiint\limits_V (\varrho v^r)_{,r} \, d\tau,$$

где мы воспользовались теоремой Грина. Сравнивая эти два выражения для $\frac{\partial M}{\partial t}$, получаем

$$\iiint\limits_V \left\{ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho v^r)_{,r} \right\} d\tau = 0.$$

Это уравнение справедливо для любого объема V в жидкости, и следовательно,

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho v^r)_{,r} = 0.} \tag{17}$$

Соотношение (17) называется *уравнением неразрывности*. Кроме того, существует *характеристическое* уравнение жидкости

$$K(p, \varrho) = 0, \tag{18}$$

которое определяет связь между давлением и плотностью.

Вектор Ω^r, определяемый соотношением

$$2\Omega^r = -\varepsilon^{rmn} v_{m,\,n}, \tag{19}$$

назовем *вихрем*, а кривые, определяемые уравнениями

$$\frac{dx^r}{ds} = \frac{\Omega^r}{\Omega},$$

где Ω — модуль вектора Ω^r, будем называть вихревыми линиями.

Упражнения

1. Показать, что

$$\Omega^r{}_{,r} = 0.$$

2. Показать, что уравнения движения идеальной жидкости могут быть записаны в форме

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^r} = F_r - \frac{\partial v_r}{\partial t} + 2\varepsilon_{rmn} v^m \Omega^n - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x^r},$$

где

$$v^2 = g_{mn} v^m v^n.$$

3. Жидкость называется *несжимаемой*, если плотность в данной точке жидкости неизменна. Показать, что для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x^r} v^r = 0$$

и получить отсюда, что уравнение неразрывности принимает вид

$$v^r{}_{,r} = 0.$$

4. Показать, что если однородная жидкость подвергается действию системы сил с потенциальной функцией V, то уравнения движения можно привести к виду

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\varepsilon_{rmn} v^m \Omega^n = -\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{p}{\varrho} + V + \frac{1}{2} v^2\right).$$

[Для однородной жидкости $\varrho = \text{const}$.]

5. Движение называется *безвихревым*, если $\Omega^r = 0$. Показать, что необходимым и достаточным условием этого является сущест-

вование такой функции φ, что $v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$; показать, что уравнения движения в этом случае могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p}{\varrho} + V + \frac{1}{2} v^2 + c(t),$$

где $c(t)$ — произвольная функция от t. Функция φ называется *потенциалом скоростей.*

§ 4. Уравнения теории упругости

Мы видели, что уравнениями движения упругого тела являются

$$g^{st} E_{rs,t} + \varrho F_r = \varrho f_r,$$

где E_{rs} — тензор напряжения, а f_r — вектор ускорения. При малом смещении точка, имевшая сначала координаты x^r, займет положение $x^r + \xi^r$. Мы будем рассматривать только малые перемещения упругой среды. Поэтому ускорение f_r с соответствующей степенью приближения определяется формулой

$$f_r = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2},$$

и уравнения движения принимают вид

$$\boxed{g^{st} E_{rs,t} + \varrho F_r = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}.} \tag{20}$$

Напряжение в упругой среде зависит от ее деформации и равно нулю, когда деформация отсутствует. Иначе говоря, тензор напряжения зависит от тензора деформации. Более того, *закон Гука* утверждает, что напряжение есть линейная функция деформации. Поэтому мы можем положить

$$\boxed{E_{rs} = c^{mn}_{rs} e_{mn},} \tag{21}$$

где c^{mn}_{rs} зависят только от координат и образуют смешанный тензор четвертого порядка, называемый *тензо-*

ром модулей упругости *). Ясно также, что без ограничения общности этот тензор может быть выбран симметричным как по нижним, так и по верхним индексам, т. е.

$$c^{mn}_{rs} = c^{nm}_{rs} = c^{mn}_{sr} = c^{nm}_{sr}.$$

Заменив E_{rs} в уравнениях движения его выражением (21), получаем

$$g^{st}(c^{mn}_{rs}e_{mn})_{,t} + \varrho F_r = \varrho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2},$$

или

$$g^{st}c^{mn}_{rs}e_{mn,t} + g^{st}c^{mn}_{rs,t}e_{mn} + \varrho F_r = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}. \tag{22}$$

Если тело *однородное*, то одинаковая деформация в различных точках вызывает одинаковое напряжение. Это равносильно тому, что тензор напряжения образует постоянное параллельное тензорное поле, если его образует тензор деформации, т. е. $E_{rs,t} = 0$, если $e_{rs,t} = 0$. Поэтому для того, чтобы среда была упругооднородной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$c^{mn}_{rs,t} = 0. \tag{23}$$

Уравнения движения такой среды принимают вид

$$g^{st}c^{mn}_{rs}e_{mn,t} + \varrho F_r = \varrho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}.$$

Если среда *изотропна*, то напряжение и деформация связаны соотношениями

$$E_{rs} = \lambda\theta g_{rs} + 2\mu e_{rs}, \tag{24}$$

где λ и μ — так называемые *модули упругости*, а θ — *объемное расширение*

$$\theta = \xi^r_{\cdot,r} = g^{mn}e_{mn}. \tag{25}$$

Постоянные λ и μ являются скалярами, и из (24) и (25) мы видим, что для изотропной среды модули связаны

---

*) См. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 1954, стр. 678; Гольденблат И. И., Некоторые вопросы механики деформируемых сред, 1955, стр. 136. (*Прим. ред.*)

формулой

$$\boxed{c^{mn}_{rs} = \lambda g^{mn} g_{rs} + \mu\,(\delta^m_r \delta^n_s + \delta^n_r \delta^m_s).} \tag{26}$$

В случае однородной изотропной среды можно записать уравнения движения при помощи вектора смещения. Мы имеем

$$g^{st} E_{rs,t} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x^r} + 2\mu g^{st} e_{rs,t}.$$

Кроме того,

$$g^{st} e_{rs,t} = \frac{1}{2} g^{st} (\xi_{r,st} + \xi_{s,rt}) = \frac{1}{2} g^{st} (\xi_{r,st} + \xi_{s,tr}) = \\ = \frac{1}{2} g^{st} \xi_{r,st} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x^r}.$$

Поэтому уравнения движения будут иметь вид

$$\boxed{(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^r} + \mu g^{st} \xi_{r,st} + \varrho F_r = \varrho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}.} \tag{27}$$

Упражнения

1. Показать, что в изотропной среде

$$g^{rs} E_{rs} = (3\lambda + 2\mu)\,\theta.$$

2. *Энергия*. Показать, что работа, совершаемая при бесконечно малом изменении деформации, определяемом вариацией δe_{mn}, выражается формулой

$$\delta W = \iiint E^{mn} \delta e_{mn}\, d\tau,$$

где интеграл должен быть взят по всему упругому телу. Вывести отсюда, что энергия, запасенная при деформации, равна

$$W = \frac{1}{2} \iiint E^{mn} e_{mn} d\tau = \frac{1}{2} \iiint c^{mn}_{rs} e_{mn} e^{rs} d\tau.$$

3. Показать, что в случае изотропного тела энергия деформации W равна

$$W = \frac{1}{2} \iiint \{\lambda\,(g^{mn} e_{mn})^2 + 2\mu g^{mr} g^{ns} e_{mn} e_{rs}\}\, d\tau.$$

§ 5. Движение вязкой жидкости

Мы видели (стр. 359), что уравнения движения любой деформируемой среды имеют вид

$$g^{st} E_{rs,t} + \varrho\,(F_r - f_r) = 0,$$

где вектор ускорения f_r выражается через скорость v^r

следующим образом:

$$f_r = \frac{\partial v^r}{\partial t} + v_{r,s} v^s.$$

Мы видели, что если среда является идеальной жидкостью, то

$$E_{rs} = -p g_{rs},$$

где p — давление, равное $-\frac{1}{3} g^{mn} E_{mn}$. Если среда не является идеальной жидкостью, то положим

$$E_{rs} + p g_{rs} = E'_{rs} \tag{28}$$

и будем называть E'_{rs} *вязким тензором напряжений* *). Таким образом, уравнения движения будут

$$\boxed{-\frac{\partial p}{\partial x^r} + g^{st} E'_{rs,t} + \varrho F_r = \varrho f_r.} \tag{29}$$

Смещение жидкости за время dt определяется вектором смещения

$$\xi^r = v^r dt.$$

Следовательно, составляющие тензора деформации будут

$$e_{rs} = \frac{1}{2}(v_{r,s} + v_{s,r})\, dt.$$

Назовем $\frac{e_{rs}}{dt}$ *тензором скорости деформации* и обозначим его через e'_{rs}, так что

$$e'_{rs} = \frac{1}{2}(v_{r,s} + v_{s,r}). \tag{30}$$

Как и прежде, будем полагать

$$2\Omega^r = -\varepsilon^{rmn} v_{m,n}. \tag{31}$$

Мы допускаем, что вязкий тензор напряжений E'_{rs} является линейной функцией тензора скоростей

---

*) См. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Физматгиз, М., 1954, стр. 65 и 66. (*Прим. ред.*)

деформации и, таким образом,

$$\boxed{E'_{rs} = \gamma^{mn}_{rs} e'_{mn}.} \tag{32}$$

Смешанный тензор четвертого порядка γ^{mn}_{rs} может быть назван *тензором вязкости* *). Этот тензор симметричен как по нижним, так и по верхним индексам. Следовательно,

$$E'_{rs} = \gamma^{mn}_{rs} v_{m,n}$$

и уравнения движения будут

$$-\frac{\partial p}{\partial x^r} + g^{st}(\gamma^{mn}_{rs,t} v_{m,n} + \gamma^{mn}_{rs} v_{m,nt}) + \varrho F_r = \varrho f_r. \tag{33}$$

Если жидкость однородная, имеем дополнительно $\gamma^{mn}_{rs,t} = 0$.

В случае изотропной жидкости имеем соотношение

$$\gamma^{mn}_{rs} = \lambda' g^{mn} g_{rs} + \mu' (\delta^m_r \delta^n_s + \delta^n_r \delta^m_s), \tag{34}$$

и уравнения (33) для однородной изотропной жидкости имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x^r} - (\lambda' + \mu') \frac{\partial \theta'}{\partial x^r} - \mu' g^{st} v_{r,st} = \varrho (F_r - f_r). \tag{35}$$

Здесь

$$\theta' = v^r_{\cdot,r} \tag{36}$$

и уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\varrho v^r)_{,r} = 0.$$

Упражнения

1. Показать, что $g^{mn} E'_{mn} = 0$, и вывести отсюда, что $g^{mn} \gamma^{rs}_{mn} = 0$. [$3p = -g^{mn} E_{mn}$, затем использовать (28).]

2. Вывести из задачи 1, что если жидкость изотропна, то $\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$.

---

*) См. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Физматгиз, М., 1954, стр. 780—781. (*Прим. ред.*)

3. Доказать, что уравнениями движения изотропной жидкости являются

$$\frac{\partial p}{\partial x^r}-\frac{1}{3}\mu'\frac{\partial\theta'}{\partial x^r}-\mu' g^{st}v_{r,st}=\varrho\,(F_r-f_r).$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XX

1. Показать, что при чистой деформации приращение $\delta\eta^r$ является бесконечно малым вектором, ортогональным к плоскости, сопряженной с η_r относительно эллипса деформаций.

2. Показать, что условием того, что смещение среды является чистой деформацией, есть существование такой функции φ, что $\xi_r=\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}$; она называется *потенциалом деформации*.

3. Показать, что если среда однородна и несжимаема, то $g^{mn}e_{mn}=0$. Если, кроме того, смещение среды есть чистая деформация, то потенциал деформации φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$.

4. Показать, что тензор деформации e_{rs} удовлетворяет следующим тождествам:

$$e_{rs,tu}+e_{tu,rs}=e_{rt,su}+e_{su,rt}.$$

[Использовать равенство $e_{rs,t}-e_{rt,s}=\omega_{st,r}$; дифференцируя затем ковариантно по x^u, принять во внимание, что $\omega_{st,ru}$ симметричен по r и u.]

5. Интеграл $\int\limits_C v_r\frac{dx^r}{du}\,du$, взятый по замкнутому контуру, называется *циркуляцией* по этому контуру. Доказать, что при движении идеальной жидкости

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_C v_r\frac{dx^r}{du}\,du=\int\limits_C F_r dx^r-\int\limits_C\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{du}\,du,$$

где $\frac{D}{Dt}$ означает дифференцирование в направлении движения жидкости.

$$\left[\frac{Dx^r}{Dt}=v^r \quad\text{и, следовательно,}\quad \frac{D}{Dt}\int\limits_C v_r\frac{dx^r}{du}\,du=\right.$$

$$\left.=\int\limits_C\left(f_r\frac{dx^r}{du}+v_r\frac{\delta v^r}{\delta u}\right)du=\int\limits_C f_r\frac{dx^r}{du}\,du.\right]$$

6. Показать, что в идеальной жидкости

$$\int\limits_C v_r dx^r=2\iint\limits_S\Omega_r\nu^r d\sigma,$$

где S — поверхность, ограниченная контуром C.

7. Доказать, что если силы, действующие на идеальную жидкость, потенциальны, а ϱ является функцией от p, то

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\Omega^r}{\varrho}\right)=\frac{1}{\varrho}\,\Omega^s v^r_{,s}.$$

$$\left[\frac{D\Omega^r}{Dt}=\frac{\partial\Omega^r}{\partial t}+\Omega^r_{,s}v^s=-\frac{1}{2}\varepsilon^{rmn}\frac{\partial v_{m,n}}{\partial t}+\Omega^r_{,s}v^r=\right.$$

$=-\varepsilon^{rmn}(\varepsilon_{mpq}v^p\Omega^q)_{,n}+\Omega^r_{,s}v^s=-v^s_{,s}\Omega^r+\Omega^s v^r_{,s}$. Теперь использовать уравнение неразрывности, а именно $\left.\dfrac{D\varrho}{Dt}+\varrho v^m_{,m}=0.\right]$

8. Обозначим через $2I^r$ *вихрь* вектора f_r, т. е. $2I^r=-\varepsilon^{rmn}f_{m,n}$. Доказать, что если поверхность S движется вместе с жидкостью, то

$$\frac{D}{Dt}\left\{\iint\limits_S \Omega_r\nu^r\,d\sigma\right\}=\iint\limits_S I_r\nu^r\,d\sigma.$$

[Имеем $\dfrac{D}{Dt}\displaystyle\int\limits_C v_r\,dx^r=\int\limits_C f_r\,dx^r$. Преобразовать каждый криволинейный интеграл в интеграл по поверхности при помощи теоремы Стокса.]

9. Доказать, что если система сил потенциальна и ϱ является функцией от p, то $I^r=0$.

10. Показать, что если вектор смещения ξ^r деформированной упругой среды определен потенциалом деформации φ, то уравнения движения принимают вид

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x^r}+\varrho F_r=\varrho f_r,$$

где $\theta=\Delta\varphi$ — относительное объемное расширение.

11. Показать, что если в упражнении 10 на тело не действуют массовые силы и тело находится в равновесии, то $\Delta\varphi=k$, где k — постоянная.

12. *Виды деформаций.* Вывести следующие выражения для тензора деформации:

а) *всестороннее сжатие*, $e_{rs}=eg_{rs}$,

б) *простое растяжение*, $e_{rs}=e\lambda_r\lambda_s$, где λ_r — единичный вектор в данном направлении;

в) *чистый сдвиг* $e_{rs}=e(\lambda_r\lambda'_s+\lambda'_r\lambda_s)$, где λ_r, λ'_r — единичные векторы заданных направлений.

13. Показать, что если деформация связана с напряжением посредством уравнений

$$e_{rs}=C^{mn}_{rs}E_{mn},$$

то c^{mn}_{rs} и C^{pq}_{mn} связаны формулой

$$c^{mn}_{rs} C^{pq}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\delta^p_r \delta^q_s + \delta^q_r \delta^p_s\right) = c^{pq}_{mn} C^{mn}_{rs}.$$

14. Подвергнем упругое тело всестороннему давлению E. Показать, что отношение E к объемному сжатию равно

$$\frac{1}{C^{mn}_{rs} g_{mn} g^{rs}}.$$

Это отношение называется *коэффициентом всестороннего сжатия*.

[Указание: $E_{rs} = E g_{rs}$.]

15. Пусть упругое тело подвергнуто напряжению $E(\lambda_r \lambda'_s + \lambda'_r \lambda_s)$, причем λ_r и λ'_r — ортогональные единичные векторы. Отношение E к $2e_{rs}\lambda^r \lambda'^s$ называется *жесткостью*, соответствующей двум данным направлениям λ^r и λ'^r. Показать, что жесткость равна

$$\frac{1}{4C^{mn}_{rs} \lambda^r \lambda'^s \lambda_m \lambda'_n}.$$

16. Если упругое тело подвергнуто напряжению $E\lambda_r \lambda_s$, то скаляр $e_{rs}\lambda^r \lambda^s$ называется *модулем Юнга*, соответствующим направлению λ^r. Показать, что модуль Юнга равен

$$\frac{1}{C^{mn}_{rs} \lambda_m \lambda_n \lambda^r \lambda^s}.$$

Показать также, что отношение сжатия в любом направлении λ'^r, перпендикулярном к λ^r, к удлинению $e_{rs}\lambda^r \lambda^s$ равно

$$-\frac{C^{mn}_{rs} \lambda_m \lambda_n \lambda'^r \lambda'^s}{C^{mn}_{rs} \lambda_m \lambda_n \lambda^r \lambda^s}.$$

Оно называется *коэффициентом Пуассона* для направлений λ^r и λ'^r.

17. Показать, что если имеется изотропное упругое тело, на которое не действуют массовые силы, то в положении равновесия тела тензоры напряжения и деформации связаны следующими соотношениями:

а) $\Delta\theta = 0$; б) $\Delta(g^{mn} E_{mn}) = 0$;

в) $(3\lambda + 2\mu) g^{mn} E_{rs, mn} + 2(\lambda + \mu) g^{mn} E_{mn, rs} = 0$;

г) $(\lambda + \mu)\ \theta_{, rs} + \mu g^{mn} e_{rs, mn} = 0$;

д) $(\lambda + 2\mu)\theta_{, r} + 2\mu g^{st} \omega_{rs, t} = 0$;

е) $g^{mn} g^{pq} \xi_{r, mnpq} = 0$.

18. Показать, что тензор напряжений вязкой жидкости есть

$$E_{rs} = \mu'(v_{r, s} + v_{s, r}) - g_{rs}\left(p + \frac{2}{3}\mu' v^m_{\cdot, m}\right).$$

19. Показать, что если вязкая жидкость движется медленно, то уравнения движения с достаточной степенью точности могут

быть записаны в виде

$$\varrho\frac{\partial v_r}{\partial t}=\varrho F_r-\frac{\partial p}{\partial x^r}+(\lambda'+\mu')\frac{\partial\theta'}{\partial x^r}+\mu' g^{mn}v_{r,mn}.$$

Если, кроме того, жидкость несжимаема, то $\theta'=0$.

20. Показать, что при медленном установившемся движении однородной вязкой жидкости будет

$$g^{mn}v_{r,mn}=\frac{1}{\mu'}\left(\frac{\partial p}{\partial x^r}-\varrho F_r\right).$$

Вывести отсюда, что

$$\Delta p=g^{mn}p_{,mn}=\varrho F^{\cdot}{}_{,r},$$

т. е. дивергенция вектора $\left(\frac{\partial p}{\partial x^r}-\varrho F_r\right)$ равна нулю.

[Принять во внимание, что $\theta'=g^{rs}v_{r,s}=0$] и как следствие $g^{rs}v_{r,mns}=g^{rs}v_{r,smn}=0$.]

ГЛАВА XXI

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*)

§ 1. Четырехмерное многообразие

Теперь мы рассмотрим приложения тензорных методов к теории относительности. Мы ограничимся специальной теорией относительности, так как все работы по общей теории относительности написаны уже в тензорной форме. Читатель увидит, что уравнения, которые мы получим, во многих случаях легко могут быть обобщены так, чтобы удовлетворять требованиям общей теории относительности.

Предположим, что места, в которых происходит некоторое событие, определяются относительно прямоугольной декартовой системы координат (x, y, z), т. е. положение любого события определяется тремя числами, называемыми пространственными координатами. Кроме того, наблюдатель, пользующийся этой системой координат, при помощи часов измеряет моменты времени, в которые события занимают наблюдаемое положение. Очевидно, что событие полностью представлено четырьмя величинами x, y, z, t. До сих пор мы представляли себе событие геометрически, отметив точку (x, y, z) в пространстве и присоединяя к ней как скаляр момент времени, в который событие произошло. Однако мы можем воспользоваться и другим геометрическим представлением. Мы можем взять четырехмерное многообразие, или четырехмерное пространство, т. е. пространство, в котором требуются четыре числа или координаты для того, чтобы отметить положение точки; мы примем за эти четыре

*) Ср. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, М., 1960. (*Прим. ред.*)

координаты x, y, z и t. В таком четырехмерном пространстве каждое событие представляется точкой и, обратно, каждая точка представляет событие. Такая точка называется *мировой точкой*. Мы увидим, что такое представление событий очень существенно для развития идей, излагаемых в этой главе. Введенное с этой целью четырехмерное многообразие пространства и времени мы иногда для краткости будем называть *пространство — время*.

§ 2. Обобщенные координаты в пространстве—времени

Если нам даны четыре переменных x^1, x^2, x^3, x^4, которые являются известными функциями пространственных координат x, y, z и времени t, мы будем иметь четыре соотношения вида

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= f^1(x, y, z, t), \\ x^2 &= f^2(x, y, z, t), \\ x^3 &= f^3(x, y, z, t), \\ x^4 &= f^4(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Мы предположим, что эти соотношения обратимы, т. е. переменные x, y, z, t могут быть выражены единственным образом через x^1, x^2, x^3, x^4. Как результат этих соотношений видно, что любое событие может быть однозначно представлено при помощи четырех переменных x^1, x^2, x^3, x^4. Эти переменные, которые мы назовем *координатами*, являются прямым обобщением криволинейных координат в обыкновенном пространстве на многообразие четырех измерений. Чтобы отличить эти переменные, мы применим *греческие* индексы и условимся для них о следующем:

греческий индекс, будучи свободным, пробегает значения от 1 *до* 4; *греческий индекс, повторенный дважды, обозначает суммирование от* 1 *до* 4. Следовательно, (1) можно записать кратко в виде

$$x^\alpha = f^\alpha(x, y, z, t).$$

С другой стороны, мы по-прежнему будем считать, что *латинские* индексы пробегают значения от 1 до 3.

Любой другой наблюдатель может представить то же самое событие при помощи четырех других переменных $\bar{x}^\alpha$, которые должны быть однозначно связаны с x^α, так как и та, и другая система переменных представляет одно и то же событие. Поэтому мы должны иметь соотношения

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4) \tag{2}$$

вместе с их обращением

$$x^\alpha = x^\alpha (\bar{x}^1,\ \bar{x}^2,\ \bar{x}^3,\ \bar{x}^4). \tag{3}$$

Другими словами, переход от одной системы координат к другой определяется функциональным преобразованием.

Как и в случае преобразования трех переменных, мы можем определить *тензоры* относительно преобразования четырех переменных. Так, объект $A^\alpha_{\beta\gamma}$ есть *тензор третьего порядка*, контравариантный относительно α и ковариантный относительно β и γ, если в новой системе координат его составляющие $\bar{A}^\alpha_{\beta\gamma}$ определяются следующим образом:

$$\bar{A}^\alpha_{\beta\gamma} = A^\varrho_{\sigma\tau} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\varrho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^\gamma}. \tag{4}$$

Мы можем назвать эти тензоры *четырехмерными* или *4-тензорами* для того, чтобы отличить их от обыкновенных трехмерных тензоров.

Пусть $(x,\ y,\ z,\ t)$ будут пространственные координаты и время, применяемые наблюдателем S, и пусть другой наблюдатель $\bar{S}$ пользуется переменными $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t})$, причем наблюдатель в обоих случаях помещается в начале координат. Это — частные случаи обобщенных координат в пространстве — времени, и мы имеем

$$\bar{x} = \bar{x}(x,\ y,\ z,\ t), \qquad \bar{y} = \bar{y}(x,\ y,\ z,\ t),$$
$$\bar{z} = \bar{z}(x,\ y,\ z,\ t), \qquad \bar{t} = \bar{t}(x,\ y,\ z,\ t),$$

а также обратные соотношения

$$x = x(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t}) \text{ и т. д.},$$

которые связывают пространственные координаты и время, используемые двумя различными наблюдателями. Отсюда легко вывести движение наблюдателя $\bar{S}$ относительно S. Положение $\bar{S}$ в пространстве в любой момент времени в его собственных координатах есть $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$, $\bar{z}=0$, и поэтому в координатах наблюдателя S мы имеем

$$x=x(0,\ 0,\ 0,\ \bar{t}) \text{ и т. д.}$$

Исключив отсюда $\bar{t}$, получим x, y, z как функции t, определяющие движение наблюдателя $\bar{S}$ в координатах наблюдателя S. Кроме того, координатная поверхность $\bar{x}=0$ наблюдателя $\bar{S}$ в координатах наблюдателя S имеет уравнение

$$\bar{x}(x,\ y,\ z,\ t)=0,$$

которое определяет движение этой поверхности относительно наблюдателя S. Подобные же результаты нетрудно получить для остальных координатных поверхностей наблюдателя $\bar{S}$.

Упражнения

1. Показать, что обычное движение частицы в обычном пространстве — представляется линией четырехмерного пространства-времени. Она называется *мировой линией* частицы.

2. Показать, что обычное движение поверхности изображается в пространстве — времени трехмерной гиперповерхностью. Эта трехмерная гиперповерхность может быть названа *историей движущейся поверхности* *).

3. Показать, что если пространственные координаты $(x,\ y,\ z)$ наблюдателя S ортогональны и декартовы, а координаты другого наблюдателя $\bar{S}$ связаны с ними при помощи формул

$$\bar{x}=l(x-ut),\quad \bar{y}=m(y-vt),\quad \bar{z}=n(z-\omega t),$$
$$\bar{t}=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t,$$

где l, u, α и т. д. — все постоянны, то наблюдатель $\bar{S}$ движется с постоянной скоростью относительно S и его пространственно-координатные плоскости, с точки зрения наблюдателя S, движутся параллельно самим себе с постоянной скоростью.

§ 3. Принцип относительности. Интервал и фундаментальная квадратичная форма

Сейчас мы введем гипотезы (или законы) специальной теории относительности. Для наших целей их лучше всего сформулировать в виде так называемого *принципа относительности*:

---

*) Этот термин в советской литературе не применяется. (*Прим. ред.*)

Уравнения, описывающие все физические явления в некоторой определенной системе координат, сохраняют свою форму после преобразования их к другой системе координат, которая движется относительно первой поступательно со скоростью, постоянной по величине и направлению.

Таким образом, в специальной теории относительности существует специальный класс привилегированных наблюдателей или координатных систем, относительные скорости которых постоянны. Такие специальные системы координат назовем *галилеевыми*.

Из принципа относительности при помощи двух гипотез (или законов), принятых в классической механике и оптике, можно сделать два важных вывода. Пусть S и $\bar{S}$ будут две из наших специальных систем координат; предположим, что пространственные координаты в обеих системах декартовы.

а) Во-первых, мы предположим, что частица, на которую не действуют силы, будет в S-системе двигаться равномерно по прямой линии, т. е. ее пространственные координаты будут линейными функциями S-времени. Вследствие принципа относительности частица должна будет двигаться по прямой линии и в системе $\bar{S}$, и новые пространственные координаты будут линейными функциями $\bar{S}$-времени. Следовательно, *пространственно-временные координаты в $\bar{S}$ являются линейными функциями от пространственно-временных координат в S.*

б) Во-вторых, мы предположим, что скорость распространения света относительно S постоянна и независима от движения источника света; обозначим ее через c. Отсюда следует, что скорость распространения света относительно $\bar{S}$ тоже есть постоянная, которую мы обозначим через $\bar{c}$. Таким образом, из принципа относительности следует, что *скорость распространения света относительно любой из наших специальных систем отсчета постоянна.*

Пусть (x^1, x^2, x^3, t) будут координаты в галилеевой системе S; обозначим соответствующие кооординаты в системе $\bar{S}$ буквами с чертой сверху. Из нашей первой гипотезы следует, что соотношения между координатами этих двух систем будут

$$\bar{x}^r = \gamma^r_s x^s + \gamma^r_4 t, \qquad \bar{t} = \gamma^4_s x^s + \gamma^4_4 t,$$

где все коэффициенты постоянны. Кроме того, если в системе S наблюдено, что в момент времени t из точки (x^1, x^2, x^3) испущена сферическая световая волна, то в момент t' фронт волны будет лежать на поверхности

$$g_{mn}(x'^m - x^m)(x'^n - x^n) - c^2(t' - t)^2 = 0, \qquad (5)$$

где g_{mn} — метрический тензор пространства S. Для наблюдателя в системе $\bar{S}$ фронт той же волны будет лежать на поверхности

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x}'^m - \bar{x}^m)(\bar{x}'^n - \bar{x}^n) - \bar{c}^2(\bar{t}' - \bar{t})^2 = 0. \qquad (6)$$

Другими словами, уравнение (6) является следствием (5). Так как преобразование от одной системы координат к другой линейно, то мы должны иметь

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x}'^m - \bar{x}^m)(\bar{x}'^n - \bar{x}^n) - \bar{c}^2(\bar{t}' - \bar{t})^2 = \\ = K\,[g_{mn}(x'^m - x^m)(x'^n - x^n) - c^2(t' - t)^2],$$

где K — постоянная. Теперь сразу видно, что путем выбора единиц измерения длины и времени в системе $\bar{S}$ мы можем сделать не только $K = 1$, но и $\bar{c} = c$. Мы будем предполагать, что этот выбор единиц всегда осуществлен и поэтому всегда будет

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x}'^m - \bar{x}^m)(\bar{x}'^n - \bar{x}^n) - c^2(\bar{t}' - \bar{t})^2 = \\ = g_{mn}(x'^m - x^m)(x'^n - x^n) - c^2(t' - t)^2.$$

Если события (x^r, t) и (x'^r, t') близки друг к другу в пространстве и времени, мы можем положить

$$x'^r = x^r + dx^r, \qquad t' = t + dt,$$

и то же самое для букв с чертой. Это приводит нас к соотношению

$$\bar{g}_{mn}\,d\bar{x}^m\,d\bar{x}^n - c^2\,d\bar{t}^2 = g_{mn}\,dx^m\,dx^n - c^2\,dt^2$$

или, в других обозначениях,

$$d\bar{\sigma}^2 - c^2\, d\bar{t}^2 = d\sigma^2 - c^2\, dt^2, \tag{7}$$

где $d\bar{\sigma}$, $d\sigma$ — пространственные элементы длины в $\bar{S}$ и S соответственно. Очевидно также, что соотношение (7) будет справедливым, если мы возьмем вместо декартовых какие-нибудь криволинейные пространственные координаты для наблюдателей S и $\bar{S}$.

Следовательно, квадратичная форма

$$\boxed{ds^2 = c^2\, dt^2 - d\sigma^2 = c^2\, dt^2 - g_{mn}\, dx^m\, dx^n} \tag{8}$$

является *инвариантом* относительно всех преобразований координат системы S к системе $\bar{S}$, принадлежащих к нашему специальному классу. Скаляр ds будем называть *интервалом* между двумя событиями $(x^r,\, t)$ и $(x^r + dx^r,\, t + dt)$. Если мы, как указано выше, используем обобщенные координаты, то увидим, что ds^2 будет однородной квадратичной формой относительно dx^α, т. е.

$$\boxed{ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,} \tag{9}$$

где $a_{\alpha\beta}$ — функция координат, симметричная относительно α, β. Так как ds^2 — скаляр, то $a_{\alpha\beta}$ — тензор второго порядка, который мы назовем *метрическим тензором*, а форму (9) — фундаментальной квадратичной формой. Если мы используем одну из наших специальных систем отсчета, то, как мы знаем, в ней фундаментальная квадратичная форма примет вид (8). Кроме того, если мы воспользуемся галилеевой координатной системой, в которой пространственные координаты (x^1, x^2, x^3) ортогональны и декартовы, фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{10}$$

Таким образом, мы вывели фундаментальную квадратичную форму в четырехмерной области подобно тому, как мы определили расстояние между двумя соседними точками в обычном трехмерном пространстве. Следовательно, мы можем выписать символы Кристоффеля для этой формы; они будут

$$\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right), \tag{11}$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=a^{\gamma\delta}\Gamma_{\delta,\,\alpha\beta},$$

где $a^{\gamma\delta}$ — алгебраическое дополнение $a_{\gamma\delta}$ в определителе $|a_{\gamma\delta}|$, деленном на $|a_{\gamma\delta}|$. Точно таким же образом, как и в части III, при помощи символов Кристоффеля мы можем определить абсолютную и ковариантную производные 4-тензорного поля, и эти 4-производные будут иметь свойства, аналогичные полученным выше в трехмерном пространстве. Для примера найдем абсолютную производную 4-тензора A^{α}_{β} по параметру u (ср. стр. 198, 199). Мы получим

$$\frac{\delta A^{\alpha}_{\beta}}{\delta u}=\frac{dA^{\alpha}_{\beta}}{du}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A^{\mu}_{\beta}\frac{dx^{\nu}}{du}-\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}A^{\alpha}_{\mu}\frac{dx^{\nu}}{du}. \tag{12}$$

Его ковариантная производная по x^{γ} будет

$$A^{\alpha}_{\beta,\,\gamma}=\frac{\partial A^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}A^{\mu}_{\beta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}A^{\alpha}_{\mu}. \tag{13}$$

Упражнения

1. Показать, что в галилеевой системе с декартовыми пространственными координатами символы Кристоффеля равны нулю, и получить, что абсолютная и ковариантная производные в такой системе равны обыкновенным производным.

2. Если частица движется от одной мировой точки A к другой B со скоростью v относительно наблюдателя S, то показать, что интервал между этими двумя мировыми точками есть

$$S=\int_A^B\sqrt{c^2-v^2}\,dt.$$

3. Показать, что если частица движется от одной мировой точки к другой с постоянной скоростью, то интервал s между этими двумя точками, деленный на c, равен времени, измеряемому часами, движущимися вместе с частицей. Поэтому s иногда называют *собственным временем*.

[Выбрать галилееву систему, начало которой всегда совпадает с частицей, и использовать результат задачи 2.]

4. *Преобразование Лоренца.* Показать, что если (x^1, x^2, x^3) — ортогональные декартовы пространственные координаты и t — время в некоторой галилеевой системе S и если координаты в некоторой другой системе $\overline{S}$ связаны с ними преобразованием

$$\bar{x}^1 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (x^1 - ut), \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3,$$

$$\bar{t} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{ux^1}{c^2}\right),$$

то система $\overline{S}$ движется вдоль оси x^1 с постоянной скоростью u, и что $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ — ортогональные декартовы пространственные координаты в системе $\overline{S}$. Таким образом, это преобразование определяет зависимость между пространственными и временными координатами двух галилеевых систем.

[Показать, что $ds^2 = c^2 d\bar{t}^2 - (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2$.]

5. Показать, что в галилеевой системе

$$a_{rs} = -g_{rs}, \quad a_{r4} = 0, \quad a_{44} = c^2, \quad a = -c^2 g,$$

$$a^{rs} = -g^{rs}, \quad a^{r4} = 0, \quad a^{44} = \frac{1}{c^2},$$

где тензор g_{rs} относится к пространственным координатам и

$$a = |a_{\alpha\beta}|, \quad g = |g_{rs}|.$$

[Отметим, что a отрицательно.]

§ 4. Собственные координатные системы и их преобразования

Рассмотрим точку P, как угодно движущуюся в трехмерном пространстве. Мы можем связать с этой точкой сколько угодно галилеевых координатных систем следующим образом. Пусть в данный момент скорость точки P равна v; выберем галилееву систему, которая в этот момент движется с той же самой скоростью v, так что P в ней покоится.

Теперь мы можем представить любое событие посредством пространственных и временных координат (x^r, t), взятых в этой системе. Такую галилееву систему назовем *собственной координатной системой точки P*. Очевидно, что это определение не однозначно; найдем преобразование, связывающее координаты — время в двух собственных системах (x^r, t) и $(\bar{x}^r, \bar{t})$.

Так как обе координатные системы движутся с одной и той же постоянной скоростью, мы видим, что их собственное время, т. е. время, измеренное часами, движущимися вместе с ними, совпадает. Таким образом, $t=\bar{t}$. Кроме того, в формулы преобразования пространственных координат время входить не будет, так как обе системы не имеют относительного движения. Поэтому должно быть $\bar{x}^r=\bar{x}^r(x^1, x^2, x^3)$, и мы получаем, что преобразование одной собственной системы в другую должно иметь вид

$$\bar{x}^r=\bar{x}^r(x^1, x^2, x^3), \quad \bar{t}=t. \tag{14}$$

Если мы введем обозначение $x^4=t$, $\bar{x}^4=\bar{t}$, то (14) примет вид

$$\bar{x}^r=\bar{x}^r(x^1, x^2, x^3), \quad \bar{x}^4=x^4. \tag{15}$$

Найдем теперь, как преобразуются 4-векторы и 4-тензоры при переходе от одной собственной системы к другой, причем обе связаны с одной и той же точкой P. Рассмотрим сначала контравариантный 4-вектор A^α. По общему закону преобразование 4-векторов будет

$$\bar{A}^\alpha=A^\mu\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu},$$

а так как преобразование координат имеет вид (15), то

$$\bar{A}^r=A^m\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}, \quad \bar{A}^4=A^4. \tag{16}$$

Другими словами, при преобразовании собственных координатных систем (A^1, A^2, A^3) преобразуются как составляющие трехмерного вектора, а A^4 преобразуется как скаляр. Отсюда следует, что мы можем всегда определить 4-вектор A^α так, чтобы в любой собственной координатной системе его первые три составляющие совпадали с составляющими некоторого заданного трехмерного вектора, а его четвертая составляющая была заданным скаляром. Конечно, подобный же результат мы получим для ковариантного 4-вектора A_α.

Теперь мы рассмотрим 4-тензор второго порядка $A^{\alpha\beta}$. Для него закон преобразования есть

$$\bar{A}^{\alpha\beta}=A^{\mu\nu}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\nu},$$

а так как преобразование координат имеет вид (15), то

$$\bar{A}^{rs}=A^{mn}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^n}, \quad \bar{A}^{r4}=A^{m4}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m},$$

$$\bar{A}^{4r}=A^{4m}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}, \quad \bar{A}^{44}=A^{44}.$$

Поэтому мы можем разделить составляющие 4-тензора $A^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$A^{\alpha\beta}=\begin{Bmatrix} A^{rs}, & A^{r4} \\ A^{4s}, & A^{44} \end{Bmatrix}.$$

Здесь A^{rs} преобразуется как трехмерный тензор второго порядка, A^{r4} и A^{4r} — как трехмерный контравариантный вектор, а A^{44} — как скаляр. Таким образом, мы можем всегда определить 4-тензор второго порядка $A^{\alpha\beta}$ так, чтобы в любой собственной координатной системе составляющие A^{rs} образовали заданный трехмерный тензор; A^{r4}, A^{4r} — заданные контравариантные трехмерные векторы, а A^{44} — заданный скаляр. Подобные же результаты получаются для ковариантного 4-тензора второго порядка $A_{\alpha\beta}$.

Упражнения

1. Показать, что в собственной системе

$$a_{44}=c^2,\quad a_{4r}=0,\quad a^{44}=\frac{1}{c^2},\quad a^{4r}=0,\ \frac{\partial a_{mn}}{\partial t}=0.$$

2. Вывести из задачи 1, что символы Кристоффеля $\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}$ и $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ оба исчезают, когда один из индексов α, β, γ равен 4.

3. Вывести из задачи 2, что если вычислить вектор $A^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,\beta}$ в собственной координатной системе, то его первые три составляющие будут

$$\left(A^{rs}_{\cdot\cdot,s}+\frac{\partial A^{r4}}{\partial t}\right),$$

а четвертая составляющая будет

$$\left(A^{4m}_{\cdot\cdot,m}+\frac{\partial A^{44}}{\partial t}\right).$$

Здесь $A^{rs}_{\cdot\cdot,s}$ и $A^{4m}_{\cdot\cdot,m}$ являются пространственными трехмерными ковариантными производными от A^{rs} и A^{4r}, которые, как мы видели, относительно преобразований собственных систем координат являются трехмерными тензором и вектором.

[Используя результат задачи 2, мы имеем $A^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,\beta}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}+$ $+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu\beta}+\Gamma^{\beta}_{\mu\beta}A^{\alpha\mu}=\frac{\partial A^{\alpha m}}{\partial x^m}+\frac{\partial A^{\alpha 4}}{\partial t}+\Gamma^{\alpha}_{mn}A^{mn}+\Gamma^{m}_{nm}A^{\alpha n}$.]

4. Показать, что для точки P в рассматриваемый момент в собственной системе координат будет

$$\frac{ds}{dt}=c,\quad \frac{d^2s}{dt^2}=0.$$

[Если v — скорость точки P в галилеевой системе, то из (8) мы видим, что $\frac{ds}{dt}=\sqrt{c^2-v^2}$ и поэтому $\frac{d^2s}{dt^2}=-v\frac{dv}{dt}\Big/\sqrt{c^2-v^2}$. Но в собственной координатной системе точки P в рассматриваемый момент $v=0$.]

§ 5. Релятивистская динамика частицы

Пусть частица движется под действием некоторой системы сил. Представлением этого движения в пространстве — времени будет кривая, которая называется *мировой линией частицы*; в качестве параметра вдоль этой линии мы можем взять интервал, который, как и раньше, мы будем обозначать через s.

Рассмотрим 4-вектор

$$\boxed{\alpha^\mu=\frac{dx^\mu}{ds}.} \tag{17}$$

Его составляющими относительно галилеевой системы координат являются

$$\left(\frac{dx^1}{ds},\ \frac{dx^2}{ds},\ \frac{dx^3}{ds},\ \frac{dt}{ds}\right).$$

Если теперь ввести собственную систему координат частицы, то мы без труда увидим, что в этой системе $\frac{ds}{dt}=c$, а составляющие 4-вектора α^μ в ней будут

$$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{c}\right). \tag{18}$$

Мы будем называть 4-вектор (17) *4-вектором скорости*.

Рассмотрим теперь 4-вектор

$$\boxed{\gamma^\mu=\frac{\delta\alpha^\mu}{\delta s}=\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\varrho\sigma}\frac{dx^\varrho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds},} \tag{19}$$

который является абсолютной производной от α^μ по s. Чтобы найти его составляющие в собственной системе, используем тот факт, что в ней $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)=0$ (см. выше, задачу 4). Следовательно, для рассматриваемого момента составляющими γ^μ относительно локальной системы координат являются

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^r}{dt^2},\ 0\right). \tag{20}$$

Мы будем называть γ^μ *4-вектором ускорения.*

Выведем уравнения движения частицы под действием заданной системы сил. Выберем собственную систему координат для частицы, т. е. предположим, что наблюдатель движется в данный момент с той же скоростью, что и частица, и что законы классической динамики в этой специальной системе координат выполняются. Имеем, следовательно,

$$m_0\frac{d^2x^r}{dt^2}=X^r, \tag{21}$$

где m_0 — скаляр, называемый *собственной массой* или *массой покоя* частицы, а X^r — вектор силы в собственной системе. Введем 4-вектор F^μ, составляющими которого в собственной системе координат являются

$$\left(\frac{1}{c^2}X^r,\ 0\right). \tag{22}$$

В предыдущем параграфе мы показали, что это возможно. Обращаясь к (20)—(22), мы видим, что имеет место тензорное уравнение

$$\boxed{m_0\gamma^\mu=F^\mu\,.} \tag{23}$$

Очевидно, что это уравнение справедливо в собственной системе координат, а поэтому справедливо и во всех других системах. Мы можем назвать F^μ *4-вектором силы*, а (23) представляют собой релятивистские уравнения движения частицы.

Упражнения

1. Показать, что $a_{\mu\nu}\alpha^\mu\alpha^\nu=1$.

[По аналогии с трехмерным пространством мы скажем, что α^μ — *единичный* 4-вектор.]

2. Вывести, что в галилеевой системе $c^2(\alpha^4)^2=1+g_{mn}\alpha^m\alpha^n$.

3. Показать, что $a_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\alpha^{\nu}=0$.

[Это — инвариантное соотношение, которое справедливо в собственной системе координат. По аналогии с трехмерным пространством мы назовем γ^{μ} ортогональным к α^{μ}.]

4. Показать, что $a_{\mu\nu}F^{\mu}\alpha^{\nu}=0$, и вывести, что в галилеевой системе

$$c^2F^4=g_{mn}F^m\frac{dx^n}{dt}.$$

5. Показать, что в собственной системе координат ассоциированный 4-вектор $\alpha_{\mu}=a_{\mu\nu}\alpha^{\nu}$ имеет составляющие (0, 0, 0, c).

§ 6. Динамика сплошной среды *)

Найдем релятивистскую форму уравнений движения сплошной среды. Рассмотрим определенную точку среды и выберем собственную систему координат для этой точки. Мы предполагаем, как и ранее, что классические уравнения движения справедливы в этой специальной системе координат. Напряжение в среде определяется трехмерным тензором E^{rs}, а массовые силы — трехмерным вектором X^r. Уравнениями движения в собственной системе координат являются

$$E^{rs}_{..,s}+\varrho_0(X^r-f^r)=0, \tag{24}$$

где ϱ_0 — скаляр, называемый *собственной плотностью*, а f^r — трехмерный вектор ускорения. Кроме того, имеет место уравнение неразрывности

$$(\varrho_0u^r)_{,r}+\frac{\partial\varrho_0}{\partial t}=0, \tag{25}$$

где u^r — трехмерный вектор скорости. Наша задача — записать эти уравнения при помощи *4-тензоров*.

Для этого мы используем 4-векторы α^{μ}, γ^{μ} и F^{μ} предыдущего параграфа и введем новый 4-тензор $E^{\mu\nu}$, определяемый условием, что его составляющими отно-

---

*) Ср. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Физматгиз, М., 1954, стр. 606. (*Прим. ред.*)

сительно собственной системы координат являются

$$E^{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{c^2} E^{rs}, & 0 \\ 0, & 0 \end{Bmatrix}. \tag{26}$$

Возможность этого мы видели в § 4 (стр 381). Введя этот 4-тензор, мы без труда увидим, что уравнения (24) и (25) могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} E^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu} + \varrho_0(F^\mu - \gamma^\mu) = 0, \\ (\varrho_0\alpha^\mu)_{,\mu} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

причем оба эти уравнения являются тензорными в пространстве — времени, а поэтому верны во всех четырехмерных координатных системах.

Эти два уравнения могут быть объединены в одно следующим образом. Имеем

$$\gamma^\mu = \frac{\delta\alpha^\mu}{\delta s} = \alpha^\mu_{\cdot,\nu}\alpha^\nu.$$

Следовательно, используя второе из уравнений (27), имеем

$$\varrho_0\gamma^\mu = \varrho_0\alpha^\mu_{\cdot,\nu}\alpha^\nu = (\varrho_0\alpha^\mu\alpha^\nu)_{,\nu} - \alpha^\mu(\varrho_0\alpha^\nu)_{,\nu} = (\varrho_0\alpha^\mu\alpha^\nu)_{,\nu}.$$

Таким образом, положив

$$\boxed{T^{\mu\nu} = E^{\mu\nu} - \varrho_0\alpha^\mu\alpha^\nu,} \tag{28}$$

замечаем, что имеет место тензорное уравнение

$$\boxed{T^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu} + \varrho_0 F^\mu = 0.} \tag{29}$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям (27). Действительно, умножая (29) на α_μ и суммируя по μ от 1 до 4, мы находим, что

$$T^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}\alpha_\mu = -\varrho_0 F^\mu \alpha_\mu = 0$$

и, следовательно,

$$(\varrho_0\alpha^\nu)_{,\nu} = (\varrho_0\alpha^\mu\alpha^\nu)_{,\nu}\alpha_\mu = -T^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}\alpha_\mu = 0,$$

т. е. уравнение неразрывности удовлетворяется. Мы можем теперь доказать, что и первое уравнение (27) является следствием (29). Это достигается с помощью тех же рассуждений, проведенных в обратном порядке.

Тензорное уравнение (29) является поэтому окончательной релятивистской формой уравнений движения сплошной среды.

Упражнения

1. Показать что $E^{\mu\nu}a_\nu=0$ и что $E^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}a_\mu=0$.

2. Показать что $E^{\mu\nu}a_{\mu,\nu}=0$.

3. Показать, что тензорное уравнение (29) может быть представлено в виде

$$E^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}+\varrho_0(F^\mu-\gamma^\mu)=(\varrho_0 a^\nu)_{,\nu}a^\mu.$$

§ 7. Уравнения электромагнитного поля

Для того чтобы найти четырехмерные уравнения электромагнитного поля, нам необходимо ввести антисимметричные 4-тензоры четвертого порядка. Обозначим их через $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\varrho}$ и $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}$; они обладают свойствами, аналогичными свойствам ε-объектов в трехмерном пространстве. Они определяются следующим образом:

а) $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\varrho}$ равен 0, если любые два индекса равны между собой, и равен $\pm\sqrt{-a}$ в зависимости от четности или нечетности перестановки (λ, μ, ν, ϱ);

б) $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}$ равен 0, если любые два индекса равны, и равен $\pm\frac{1}{\sqrt{-a}}$ в зависимости от четности или нечетности перестановки (λ, μ, ν, ϱ). Мы выбираем $\sqrt{-a}$ вместо $\sqrt{a}$ потому, что в формулах теории относительности a всегда отрицательно.

Точно так же, как в случае трех измерений, доказывается, что эти объекты являются 4-тензорами.

Если имеется движущийся диэлектрик, то мы можем выбрать собственную систему координат для данной точки диэлектрика. Эта точка в некоторый момент времени находится *в покое* относительно собственной системы координат, и поэтому мы предположим, что в этой системе координат справедливы классические уравнения электромагнитного поля. Тогда электромагнитное поле определяется трехмерными векторами D^r, E_r, B^r, H_r, а его уравнениями в собственной системе будут

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{rst}E_{s,t}-\frac{1}{c}\frac{\partial B^r}{\partial t}=0,\\ \frac{1}{c}B^{r}_{\cdot,r}=0 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{rst}H_{s,t}+\frac{1}{c}\frac{\partial D^r}{\partial t}+\frac{1}{c}C^r=0,\\ -\frac{1}{c}D^{r}_{\cdot,r}+\frac{1}{c}\varrho_0=0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где C^r — вектор, определяющий ток проводимости. К этим уравнениям мы должны добавить соотношения

$$D^r=\varepsilon^{rs}E_s,\qquad B^r=\mu^{rs}H_s. \tag{32}$$

Мы сейчас введем в эти уравнения 4-тензоры. С этой целью возьмем два антисимметричных 4-тензора $F^{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$, составляющими которых в собственной системе координат являются

$$F^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} \varepsilon^{rst}E_t, & \frac{1}{c}B^r\\ -\frac{1}{c}B^s, & 0 \end{Bmatrix},\qquad G^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} \varepsilon^{rst}H_t, & -\frac{1}{c}D^r\\ \frac{1}{c}D^s, & 0 \end{Bmatrix}, \tag{33}$$

а также 4-вектор S^μ, составляющие которого в собственной системе будут

$$S^\mu=\left(\frac{1}{c}C^1,\ \frac{1}{c}C^2,\ \frac{1}{c}C^3,\ \frac{1}{c}\varrho_0\right). \tag{34}$$

Нетрудно проверить, что в 4-тензорной форме уравнения (30) и (31) будут

$$\boxed{F^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}=0,\quad G^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\nu}=S^\mu.} \tag{35}$$

Эти уравнения и являются релятивистскими уравнениями электромагнитного поля.

Из уравнений (32) вытекают следующие соотношения между тензорами $F^{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu}$:

$$cF^{14}=\sqrt{g}\,(\mu^{11}G^{23}+\mu^{12}G^{31}+\mu^{13}G^{12}) \quad \text{и т. д.}$$

и

$$cG^{14}=-\sqrt{g}\,(\varepsilon^{11}F^{23}+\varepsilon^{12}F^{31}+\varepsilon^{13}F^{12}) \quad \text{и т. д.}$$

Если мы введем 4-тензоры $\mu^{\varrho\sigma}$ и $\varepsilon^{\varrho\sigma}$, составляющими которых в собственной системе координат являются

$$\mu^{\varrho\sigma}=\begin{Bmatrix}\mu^{rs}, & 0\\ 0, & 0\end{Bmatrix}, \qquad \varepsilon^{\varrho\sigma}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^{rs}, & 0\\ 0, & 0\end{Bmatrix}, \tag{36}$$

и вспомним, что составляющими 4-векторов α^{ϱ} и α_{ϱ} являются $\left(0,\,0,\,0,\,\frac{1}{c}\right)$ и $(0,\,0,\,0,\,c)$ соответственно, то получаем 4-тензорные соотношения:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}2F^{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma}&=\mu^{\varrho\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}G^{\mu\nu}\alpha^{\sigma},\\ 2G^{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma}&=-\varepsilon^{\varrho\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}F^{\mu\nu}\alpha^{\sigma}.\end{aligned}\right\}} \tag{37}$$

Упражнения

1. Показать, что если определить E_{ϱ}, D^{ϱ}, H_{ϱ}, B^{ϱ} как 4-тензоры с составляющими в собственной системе координат, равными $(E_r,\,0)$, $(D^r,\,0)$, $(H_r,\,0)$ $(B^r,\,0)$ соответственно, то

$$F^{\lambda\mu}=\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}E_{\nu}\alpha_{\varrho}+B^{\lambda}\alpha^{\mu}-B^{\mu}\alpha^{\lambda},$$

$$G^{\lambda\mu}=\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}H_{\nu}\alpha_{\varrho}-D^{\lambda}\alpha^{\mu}+D^{\mu}\alpha^{\lambda}.$$

2. Показать, что если C^{ϱ} есть 4-вектор, составляющие которого в собственной системе координат равны $\left(\frac{1}{c}C^1,\,\frac{1}{c}C^2,\,\frac{1}{c}C^3,\,0\right)$, то $S^{\varrho}=C^{\varrho}+\varrho_0\alpha^{\varrho}$.

3. Показать, что если 4-тензор $H_{\mu\nu}$ определяется формулой

$$H_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma},$$

то первое из уравнений (35) может быть записано в форме

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}H_{\mu\nu,\,\varrho}=0.$$

4. Вывести соотношение

$$G^{\mu\nu}a_{\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu}H_{\lambda\nu}a^{\nu}.$$

5. Показать, что составляющими $H_{\mu\nu}$ в собственной системе координат являются

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rst}B^{t}, & cE_{r}, \\ -cE_{s}, & 0. \end{Bmatrix}$$

6. Показать, что составляющими ассоциированного 4-тензора $G_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}G^{\alpha\beta}$ в собственной системе координат являются

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rst}H^{t}, & cD_{r}, \\ -cD_{s}, & 0. \end{Bmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XXI

1. Наблюдатель $\bar{S}$ движется с постоянной скоростью u относительно другого наблюдателя S. Показать, что если S пользуется ортогональной декартовой пространственной системой координат, а координатные плоскости наблюдателя $\bar{S}$ в момент $t = \bar{t} = 0$ совпадают с координатными плоскостями наблюдателя S, то формулами преобразования координат являются

$$\bar{x}^1 = \left(1 + \frac{u_1^2}{c^2 - u^2}\right)^{\frac{1}{2}}(x^1 - u_1 t), \qquad \bar{x}^2 = \left(1 + \frac{u_2^2}{c^2 - u^2}\right)^{\frac{1}{2}}(x^2 - u_2 t),$$

$$\bar{x}^3 = \left(1 + \frac{u_3^2}{c^2 - u^2}\right)^{\frac{1}{2}}(x^3 - u_3 t), \qquad \bar{t} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - \frac{u_r x^r}{c^2}\right),$$

где u_1, u_2, u_3 — составляющие скорости u в системе S. Показать также, что косинусы углов между пространственными координатными плоскостями системы $\bar{S}$ для наблюдателя S равны

$$\frac{u_2 u_3}{c^2 - u^2}\left(1 + \frac{u_2^2}{c^2 - u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{u_3^2}{c^2 - u^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ и т. д.}$$

[Мы должны допустить, что $\bar{x}^1 = e_1(x^1 - u_1 t)$ и т. д., $\bar{t} = \alpha_r x^r + \beta t$. Использовать тот факт, что $ds^2 = c^2 dt^2 - \sum (dx^1)^2 = c^2 d\bar{t}^2 - \sum (d\bar{x}^1)^2 - 2\sum \bar{a}_1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3$ для всех значений дифференциалов, причем $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ — косинусы интересующих нас углов. Кроме того $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.]

2. *Преобразования Лоренца.* Показать, что если $\bar{S}$ движется вдоль оси x^1 системы координат S, то преобразования из

упражнения 1 принимают вид

$$\bar{x}^1=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(x^1-ut),\qquad \bar{x}^2=x^2,\qquad \bar{x}^3=x^3,$$

$$\bar{t}=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{ux^1}{c^2}\right),$$

и что пространственные координаты наблюдателя $\bar{S}$ являются также ортогональными.

3. Показать, что уравнения траектории частицы, на которую не действуют никакие силы, в обобщенных координатах будут иметь вид

$$\frac{d^2x^\varrho}{ds^2}+\Gamma^\varrho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0.$$

[Эти траектории называются *геодевическими линиями* пространства — времени, так как их уравнения аналогичны уравнениям геодезических линий на поверхности.]

4. Показать, что в галилеевой системе координат уравнения движения частицы могут быть написаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{dx^r}{dt}\right)=\sqrt{c^2-v^2}\,F^r,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)=\sqrt{c^2-v^2}\,F^4=\frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c^2}\,g_{mn}F^m\frac{dx^n}{dt},$$

где v — скорость частицы относительно выбранной системы координат.

[Принять во внимание, что в галилеевой системе $\frac{ds}{dt}=$ $=\sqrt{c^2-v^2}$.]

5. Вывести из упражнения 4, что уравнения движения материальной точки в галилеевой системе координат имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx^r}{dt}\right)=X^r,\qquad \frac{d}{dt}(m)=\frac{1}{c^2}\,g_{mn}X^m\frac{dx^n}{dt},$$

где

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad X^r=c^2F^r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

[Нетрудно видеть аналогию между этими уравнениями и уравнениями классической динамики. Мы можем интерпретировать m как массу, а X^r как вектор силы.]

6. Показать, что если на частицу не действуют силы, то величина $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ постоянна для наблюдателя S, движущегося вместе с собственной системой координат, и что ее скорость относительно этого наблюдателя постоянна.

7. Показать, что релятивистскими уравнениями движения идеальной жидкости являются

$$T^{\mu\nu}_{\cdot\cdot,\,\nu} + \varrho_0 F^{\mu} = 0,$$

где

$$T^{\mu\nu} = pa^{\mu\nu} - (p + \varrho_0)\,\alpha^{\mu}\alpha^{\nu}.$$

Скаляр p есть *давление в данной точке.*

[Показать, что тензор напряжения есть $E^{\mu\nu} = p\,(a^{\mu\nu} - \alpha^{\mu}\alpha^{\nu})$.]

8. Показать, что при движении сплошной среды имеют место равенства

$$T^{\mu\nu}\alpha_{\mu}\alpha_{\nu} = -\varrho_0, \qquad -\varrho_0\alpha^{\mu} = T^{\mu\nu}\alpha_{\nu},$$

$$a_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = a_{\mu\nu}E^{\mu\nu} - \varrho_0.$$

9. Показать, что в электромагнитном поле имеют место соотношения

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma}\,(a_{\varrho\lambda}H_{\mu\nu} - \mu_{\varrho\lambda}G_{\mu\nu})\,\alpha_{\sigma} = 0,$$

связывающие тензоры $H_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$.

10. Показать, что если диэлектрик изотропен, то в электромагнитном поле имеют место соотношения

$$(G_{\mu\nu} - \varepsilon H_{\mu\nu})\,\alpha^{\nu} = 0, \qquad \varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}\,(H_{\mu\nu} - \mu G_{\mu\nu})\,\alpha_{\varrho} = 0,$$

где ε и μ — скаляры.

11. Доказать, что 4-вектор тока S^{μ} удовлетворяет уравнению $S^{\mu}_{\cdot,\,\mu} = 0$.

12. Показать, что если определить 4-вектор φ^{μ} при помощи соотношений

$$G_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu,\,\mu}, \qquad \varphi^{\mu}_{,\,\mu} = 0,$$

то φ^{μ} удовлетворяет также уравнению

$$a^{\sigma\tau}\varphi^{\mu}_{\cdot,\,\sigma\tau} = S^{\mu}.$$

4-вектор φ^{μ} называется четырехмерным потенциалом электромагнитного поля.

13. Показать, что если определить 4-тензор $\varkappa^{\mu\nu}$ так, чтобы его составляющие в собственной системе координат были

$$\varkappa^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{c}\varkappa^{rs}, & 0 \\ 0\ , & 0 \end{Bmatrix},$$

где $\varkappa^{rs}$ — тензор проводимости, то S^μ определяется формулой

$$S^\mu=\varkappa^{\mu\nu}E_\nu+\varrho_0\alpha^\mu.$$

14. Показать, что результат упражнения 13 может быть записан так:

$$S^\mu=\frac{1}{2}\varkappa^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\varrho\sigma\tau}F^{\varrho\sigma}\alpha^\tau+\varrho_0\alpha^\mu, \qquad S^\mu=\varkappa^{\mu\nu}H_{\nu\varrho}\alpha^\varrho+\varrho_0\alpha^\mu.$$

15. Чтобы получить уравнения электронной теории в релятивистской форме, мы просто отметим, что в собственной системе вектор D_r совпадает с E_r, а B^r — с H^r. Показать, что для электронной теории $G_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}$ и $S^\mu=\varrho_0\alpha^\mu$, и вывести, что искомые уравнения будут

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}H_{\mu\nu,\,\varrho}=0, \quad a^{\mu\nu}H_{\lambda\mu,\,\nu}=\varrho_0\alpha_\lambda.$$

16. Показать, что если мы переходим от собственной системы координат x^μ к другой галилеевой системе $\bar{x}^\mu$ в соответствии с преобразованием Лоренца

$$\bar{x}^1=k\,(x^1-vx^4) \quad \bar{x}^2=x^2, \quad \bar{x}^3=x^3, \quad \bar{x}^4=k\left(x^4-\frac{vx^1}{c^2}\right),$$

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta=\frac{v}{c},$$

то новыми величинами для $\bar{E}^r$ и $\bar{H}^r$ в электронной теории являются

$$\bar{E}^1=E^1, \quad \bar{E}^2=k\,(E^2-\beta H^3), \quad \bar{E}^3=k\,(E^3+\beta H^2),$$
$$\bar{H}^1=H^1, \quad \bar{H}^2=k\,(H^2+\beta E^3), \quad \bar{H}^3=k\,(H^3-\beta E^2).$$

[Принять во внимание, что $H_{\mu\nu}$ — тензор второго порядка.]

ДОПОЛНЕНИЕ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 1. Классические обозначения

В настоящей книге мы применяли криволинейные координаты к вопросам математической физики исключительно в тензорных обозначениях. Так как ортогональные криволинейные координаты вводятся в обычные учебники по математической физике без использования тензорных методов или тензорных обозначений, целесообразно изложить те же самые результаты в классических обозначениях *).

Имеются три семейства поверхностей, записываемых в этих обозначениях так:

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma, \tag{1}$$

которые взаимно пересекаются под прямыми углами; x, y, z — декартовы координаты. Точка определяется тремя координатами α, β, γ, а линейный элемент определяется формулой

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}, \tag{2}$$

где h_1, h_2, h_3 являются функциями от α, β, γ. Сопоставляя эти обозначения с обозначениями настоящей книги,

---

*) Ниже мы используем обозначения, принятые, например, в книге: Love, Mathematical Theory of Elasticity [есть русский перевод (*Прим. ред.*)].

мы получим

$$\left.\begin{array}{c} x^1=\alpha, \quad x^2=\beta, \quad x^3=\gamma, \\ g_{11}=\frac{1}{h_1^2}, \; g_{22}=\frac{1}{h_2^2}, \; g_{33}=\frac{1}{h_3^2}, \; g_{mn}=0 \quad (m\neq 0), \\ g=\frac{1}{h_1^2h_2^2h_3^2}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Ассоциированный тензор g^{mn} имеет составляющие

$$g^{11}=h_1^2, \; g^{22}=h_2^2, \; g^{33}=h_3^2, \; g^{mn}=0 \quad (m\neq n). \tag{4}$$

Нетрудно установить, что символы Кристоффеля будут

$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma^k_{ij}=0, & \Gamma^j_{ii}=\frac{h_j^2}{h_i^3}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}, \\ \Gamma^i_{ij}=-\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^j}, & \Gamma^i_{ii}=-\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x^i}, \end{array}\right\} \tag{5}$$

где i, j, k не равны между собой, а соглашение о суммировании не применяется (см. упражнение 9, стр. 209).

§ 2. Физические составляющие векторов и тензоров

Обозначим через $\varepsilon^r_{(i)}$ единичный вектор касательной к i-й координатной кривой. Очевидно, что

$$\varepsilon^r_{(1)}=h_1\delta^r_1, \quad \varepsilon^r_{(2)}=h_2\delta^r_2, \quad \varepsilon^r_{(3)}=h_3\delta^r_3. \tag{6}$$

Если нам задан вектор A^r, то вместо того, чтобы взять A^1, A^2, A^3 в качестве составляющих вектора, в классических обозначениях берут проекции вектора на касательные к координатным кривым. Мы будем обозначать эти проекции через A_α, A_β, A_γ; имеем

$$A_\alpha=A_r\varepsilon^r_{(1)}, \quad A_\beta=A_r\varepsilon^r_{(2)}, \quad A_\gamma=A_r\varepsilon^r_{(3)},$$

где $A_r=g_{rs}A^s$ — вектор, ассоциированный с A^r. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{c} A_\alpha=h_1A_1=\frac{A^1}{h_1}, \quad A_\beta=h_2A_2=\frac{A^2}{h_2}, \\ A_\gamma=h_3A_3=\frac{A^3}{h_3}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Мы назовем эти величины *физическими составляющими* вектора в отличие от тензорных составляющих. Так как A_α, A_β, A_γ являются проекциями A^r на касательные к координатным кривым, то физические составляющие вектора — это просто его составляющие по осям декартовой системы координат, совпадающим с упомянутыми касательными.

Аналогично, если нам задан тензор второго порядка A^{rs}, мы обозначим его *физические составляющие* через $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\beta\gamma}$ и т. д., где $A_{\alpha\alpha} = A_{rs}\varepsilon^r_{(1)}\varepsilon^s_{(1)}$, $A_{\beta\gamma} = A_{rs}\varepsilon^r_{(2)}\varepsilon^s_{(3)}$ и т. д. A_{rs} является тензором, ассоциированным с A^{rs}, следовательно,

$$A_{\alpha\alpha} = h_1^2 A_{11} = \frac{A^{11}}{h_1^2}, \quad A_{\beta\gamma} = h_2 h_3 A_{23} = \frac{A^{23}}{h_2 h_3} \text{ и т. д.} \tag{8}$$

Интерпретация физических составляющих тензора второго порядка может быть дана по аналогии с интерпретацией физических составляющих вектора. Выражения

$$A_{\alpha\alpha} = A_{rs}\varepsilon^r_{(1)}\varepsilon^r_{(2)}, \quad A_{\beta\gamma} = A_{rs}\varepsilon^r_{(2)}\varepsilon^r_{(3)} \text{ и т. д.}$$

являются, очевидно, *инвариантами* для всех преобразований координат при условии, что $\varepsilon^r_{(1)}$, $\varepsilon^r_{(2)}$, $\varepsilon^r_{(3)}$ — три фиксированных вектора. Они фиксированы, если фиксированы их направления, так как это единичные векторы. Возьмем в качестве специальной координатной системы декартову прямоугольную систему координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ с осями $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$, направленными по $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ в точках касания. В этой системе координат $\varepsilon^r_{(1)}$, $\varepsilon^r_{(2)}$, $\varepsilon^r_{(3)}$ имеют место составляющие (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно, так что

$$A_{\alpha\alpha} = \bar{A}_{11}, \quad A_{\beta\gamma} = \bar{A}_{23} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, физические составляющие тензора A_{rs} — это просто его составляющие в системе координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Например, если A_{rs} есть тензор деформации e_{rs}, определённый на стр. 355, то

$$A_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad A_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}\right) \quad \text{и т. д.,}$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — составляющие вектора смещения относительно $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$.

Мы можем, очевидно, распространить это определение физических составляющих на тензоры любого порядка.

§ 3. Динамика

Найдем уравнение движения материальной точки в системе координат (α, β, γ).

Пусть (v_α, v_β, v_γ) — физические составляющие вектора скорости. Так как $v^1 = \dot{\alpha}$, $v^2 = \dot{\beta}$, $v^3 = \dot{\gamma}$, то из (7) мы видим, что

$$v_\alpha = \frac{\dot{\alpha}}{h_1}, \quad v_\beta = \frac{\dot{\beta}}{h_2}, \quad v_\gamma = \frac{\dot{\gamma}}{h_3}. \tag{9}$$

Вектор ускорения может быть найден подстановкой прямо в (4), стр. 286, или следующим образом: используя (10), стр. 290, мы имеем

$$f_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\dot{\alpha}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\beta}}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{h_3}\right)^2\right\}.$$

Следовательно, физическими составляющими вектора ускорения являются

$$f_\alpha = h_1 f_1 = h_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\alpha}}{h_1^2}\right) +$$

$$+ h_1\left(\frac{\partial \log h_1}{\partial\alpha}\frac{\dot{\alpha}^2}{h_1^2} + \frac{\partial \log h_2}{\partial\alpha}\frac{\dot{\beta}^2}{h_2^2} + \frac{\partial \log h_3}{\partial\alpha}\frac{\dot{\gamma}^2}{h_3^2}\right) \text{ и т. д.} \tag{10}$$

Две другие составляющие нетрудно написать из соображений симметрии.

Физические составляющие вектора силы (Q_α, Q_β, Q_γ) определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha = h_1 Q_1 = -h_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad Q_\beta = h_2 Q_2 = -h_2 \frac{\partial V}{\partial \beta}, \\ Q_\gamma = h_3 Q_3 = -h_3 \frac{\partial V}{\partial \gamma}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где V является потенциальной функцией; уравнения движения будут

$$Mf_\alpha = Q_\alpha, \quad Mf_\beta = Q_\beta, \quad Mf_\gamma = Q_\gamma. \tag{12}$$

§ 4. Теория электромагнитного поля

Мы будем пользоваться следующими обозначениями физических составляющих векторов электромагнитного поля:

а) $(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma)$ — вектор напряженности электрического поля,
б) $(D_\alpha, D_\beta, D_\gamma)$ — вектор смещения,
в) $(H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$ — вектор напряженности магнитного поля,
г) $(B_\alpha, B_\beta, B_\gamma)$ — вектор магнитной индукции и
д) $(C_\alpha, C_\beta, C_\gamma)$ — вектор тока.

Из (35), стр. 347, мы видим, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{c} g_{mn} \frac{\partial B^m}{\partial t} \varepsilon^n_{(1)} = \frac{1}{ch_1}\frac{\partial B^1}{\partial t} =$$

$$= h_2 h_3 \left(\frac{\partial E_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial E_3}{\partial \beta}\right), \text{ т. е.}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{E_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{E_\gamma}{h_3}\right)\right]. \tag{13}$$

Два других уравнения получаем из соображений симметрии. Аналогично

$$\frac{1}{c} C_\alpha = h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{H_\beta}{h_2}\right)\right] \quad \text{и т. д.} \tag{14}$$

Из (38), стр. 348, мы имеем $D^r_{,r}=\varrho$; но (задача 5, стр. 349)

$$D^r_{,r}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,D^r\right),$$

следовательно,

$$h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{D_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{D_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{D_\gamma}{h_1h_2}\right)\right]=\varrho \qquad (15)$$

и аналогично

$$h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{B\gamma}{h_1h_2}\right)\right]=0. \qquad (16)$$

Равенства (13)—(16) являются уравнениями электромагнитного поля в нашей криволинейной системе координат.

Для электромагнитного поля в вакууме существует потенциальная функция V, удовлетворяющая уравнению Пуассона $\Delta V=-\varrho$, которое при помощи упражнения 6, стр. 208, может быть написано в виде

$$\Delta V=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_3}{h_2h_1}\frac{\partial V}{\partial\gamma}\right)\right]=-\varrho. \qquad (17)$$

Это дает выражение лапласиана в ортогональной криволинейной системе координат.

§ 5. Теория упругости

Если мы обозначим (u_α, u_β, u_γ) проекции вектора смещения ξ_r (стр. 360), то будем иметь

$$u_\alpha=h_1\xi_1=\frac{\xi^1}{h_1};\qquad u_\beta=h_2\xi_2=\frac{\xi^2}{h_2},\qquad u_\gamma=h_3\xi_3=\frac{\xi^3}{h_3}.$$

Физическими составляющими тензора деформации будут

$$\left.\begin{aligned}
&e_{\alpha\alpha}=h_1^2e_{11}=h_1^2\xi_{1,\,1}=h_1^2\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial\alpha}-\Gamma^p_{11}\,\xi_p\right]\ \text{и т. д.},\\
&e_{\beta\gamma}=h_2h_3e_{23}\doteq\frac{1}{2}h_2h_3\left(\xi_{2,\,3}+\xi_{3,\,2}\right)=\\
&=\frac{1}{2}h_2h_3\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial\gamma}+\frac{\partial\xi_3}{\partial\beta}-2\Gamma^p_{23}\xi_p\right]\ \text{и т. д.}
\end{aligned}\right\}\qquad (18)$$

После подстановки значений символов Кристоффеля из (5) эта формула может быть приведена к виду

$$e_{\alpha\alpha}=h_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}-h_2\frac{\partial\log h_1}{\partial\beta}u_\beta-h_3\frac{\partial\log h_1}{\partial\gamma}u_\gamma \text{ и т. д.,}$$

$$e_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left[\frac{h_2\partial}{h_3\partial\beta}(h_3u_\gamma)+\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2u_\beta)\right] \text{ и т. д.}$$

Физическими составляющими тензора поворота ω_{rs} являются

$$\omega_{\beta\gamma}=h_2h_3\omega_{23}=\frac{1}{2}h_2h_3[\xi_{2,3}-\xi_{3,2}]=$$
$$=\frac{1}{2}h_2h_3\left[\frac{\partial\xi_2}{\partial\gamma}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\beta}\right] \text{ и т. д.,}$$

т. е.

$$\omega_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)\right] \text{ и т. д.} \tag{19}$$

Физические составляющие тензора E^{rs} обозначим через $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\beta\gamma}$ и т. д.; тогда

$$\widehat{\alpha\alpha}=\frac{E^{11}}{h_1^2},\quad \widehat{\beta\gamma}=\frac{E^{23}}{h_2h_3} \text{ и т. д.}$$

Уравнения движения сплошной среды определяются посредством (10), стр. 358. Вводя туда физические составляющие, мы получаем

$$\varrho(f_\alpha-F_\alpha)=\frac{1}{h_1}E^{1m}_{\cdot\cdot,m}=\frac{1}{h_1}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sqrt{g}E^{1m}\right)+\Gamma^1_{mn}E^{mn}\right]$$

(см. упражнение 7, стр. 208). Поэтому мы имеем

$$E^{1m}_{\cdot\cdot,m}=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{E^{11}}{h_1h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{E^{12}}{h_1h_2h_3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{E^{13}}{h_1h_2h_3}\right)\right]-\frac{\partial\log h_1}{\partial\alpha}E^{11}+\frac{h_1^2}{h_2^2}\frac{\partial\log h_2}{\partial\alpha}E^{22}+$$
$$+\frac{h_1^2}{h_3^2}\frac{\partial\log h_3}{\partial\alpha}E^{33}-2\frac{\partial\log h_1}{\partial\beta}E^{12}-2\frac{\partial\log h_1}{\partial\gamma}E^{13}.$$

Вводя сюда физические составляющие тензора E^{rs}, мы получаем уравнения движения в окончательной форме:

$$\varrho(f_\alpha - F_\alpha) = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\widehat{\alpha\alpha}}{h_2 h_3}\right) + h_1 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\widehat{\alpha\beta}}{h_1^2 h_3}\right) + \right.$$

$$\left. + h_1 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\widehat{\alpha\gamma}}{h_1^2 h_2}\right)\right] + h_1 \frac{\partial \log h_2}{\partial\alpha} \widehat{\beta\beta} + h_1 \frac{\partial \log h_3}{\partial\alpha} \widehat{\gamma\gamma} \quad \text{и т. д.} \tag{20}$$

Выражение для относительного объемного расширения (сжатия) θ принимает вид

$$\theta = \xi^r_{\cdot, r} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\, \xi^r\right) = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2 h_3}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1 h_2}\right)\right]. \tag{21}$$

§ 6. Гидродинамика

При движении жидкости вектор ускорения f_r определяется посредством (15), стр. 360. Следовательно, его физическими составляющими являются

$$f_\alpha = h_1 f_1 = h_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_{1,\,m} v^m \right] =$$

$$= h_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_{1,\,m} - v_{m,\,1}) v^m + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} (v_m v^m) \right],$$

так как $\frac{\partial}{\partial x^r}(v_m v^m) = 2 v_{m,\,r} v^m$; вводя сюда физические составляющие v_α, v_β, v_γ вектора скорости, получим

$$f_\alpha = h_1 \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_\alpha}{h_1}\right) + \left\{ \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_\beta}{h_2}\right)\right\} h_2 v_\beta + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v_\gamma}{h_3}\right)\right\} h_3 v_\gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(v_\alpha^2 + v_\beta^2 + v_\gamma^2\right)\right].$$

Поэтому

$$f_\alpha = \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + h_1 \left[v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha} + h_2 v_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v_\alpha}{h_1}\right) + \right.$$

$$\left. + h_3 v_\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v_\alpha}{h_1}\right) + \frac{\partial \log h_2}{\partial\alpha} v_\beta^2 + \frac{\partial \log h_3}{\partial\alpha} v_\gamma^2 \right] \quad \text{и т. д.} \tag{22}$$

Уравнения движения выводятся из (12), стр. 359; мы получаем

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \alpha}=\frac{1}{h_1}(F_\alpha - f_\alpha) \text{ и т. д.} \tag{23}$$

Из (17), стр. 360, мы видим, что уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+(\varrho v^r)_{,r}=\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\sqrt{g}\,\varrho v^r\right)=0$$

или, вводя физические составляющие,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\varrho v_\alpha}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\varrho v_\beta}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\varrho v_\gamma}{h_1h_2}\right)\right]=0. \tag{24}$$

Упражнения

1. *Сферическая система координат.* Получить следующие результаты для сферических координат:

а) *Элемент длины*

$$ds^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2.$$

б) *Динамика*

$$M\{\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\}=Q_r=-\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$M\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)-r\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2\right\}=Q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$M\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi)\right\}=Q_\varphi=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

в) *Теория электромагнитного поля*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_r}{\partial t}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\varphi)\right],$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_\theta}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E_r}{\partial \theta}-\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)\right],$$

$$\frac{1}{c}C_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta H_\varphi)-\frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}\right],$$

$$\frac{1}{c} C_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi),$$

$$\frac{1}{c} C_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta} \right],$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi} = \varrho,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

г) *Теория упругости*

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} u_\theta$$

$$e_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} u_\varphi \right),$$

$$e_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right),$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right),$$

$$\omega_{\theta\gamma} = \frac{1}{2r \sin\theta} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta u_\varphi) \right],$$

$$\omega_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} \right],$$

$$\omega_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right],$$

$$\varrho (f_r - F_r) =$$
$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \widehat{rr}) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\, \widehat{r\theta}) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (\widehat{r\varphi}) - \frac{1}{r} (\widehat{\theta\theta} + \widehat{\varphi\varphi}),$$

$$\varrho (f_\theta - F_\theta) =$$
$$= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \widehat{\theta r}) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \widehat{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (\widehat{\theta\varphi}) - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} \widehat{\varphi\varphi},$$

$$\varrho (f_\varphi - F_\varphi) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \widehat{\varphi r}) + \frac{1}{r \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta \widehat{\varphi\theta}) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (\widehat{\varphi\varphi}).$$

д) *Гидродинамика*

$$f_r=\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}(v_\theta^2+v_\varphi^2),$$

$$f_\theta=\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}v_\varphi^2,$$

$$f_\varphi=\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)+\frac{v_\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi)+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=(F_r-f_r),\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\theta}=r(F_\theta-f_\theta),$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=r\sin\theta(F_\varphi-f_\varphi),$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varrho v_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\varrho v_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0.$$

2. *Цилиндрические координаты.* Получить следующие результаты для цилиндрических координат (r, θ, z):

а) *Элемент длины*

$$ds^2=(dr)^2+r^2d\theta^2+(dz)^2.$$

б) *Динамика*

$$M(\ddot r-r\dot\theta^2)=Q_r=-\frac{\partial V}{\partial r},\quad M\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)\right\}=Q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

$$M\ddot z=Q_z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

в) *Теория электромагнитного поля*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_r}{\partial t}=\frac{\partial E_\theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial B_\theta}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta)\right],$$

$$\frac{1}{c}C_r=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial z},\quad \frac{1}{c}C_\theta=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$\frac{1}{c}C_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right],\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\varrho,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0,$$

$$\Delta V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}.$$

г) *Теория упругости*

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$e_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right),\quad e_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right),$$

$$\omega_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right),$$

$$\omega_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),$$

$$\omega_{r\theta}=\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_z}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial z}(ru_\theta)\right],$$

$$\varrho(f_r-F_r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\widehat{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\widehat{r\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\widehat{rz})-\frac{\widehat{\theta\theta}}{r},$$

$$\varrho(f_\theta-F_\theta)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\widehat{\theta r})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\widehat{\theta\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\widehat{\theta z}),$$

$$\varrho(f_z-F_z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\widehat{zr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\widehat{z\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\widehat{zz}).$$

д) *Гидродинамика*

$$f_r=\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r},$$

$$f_\theta=\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z},$$

$$f_z=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}=(F_r-f_r),\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\theta}=r(F_\theta-f_\theta),\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=F_z-f_z,$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\varrho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_z)=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

Для дальнейшего чтения рекомендуются следующие книги и статьи

1. Ricci G. et Levi-Civita T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann., 54, 1901.
2. Einstein A., Lorentz H. A., Minkowski H. and Weyl H., The principle of relativity, 1923.
3. Weyl H., Space—Time—Matter, 1922.
4. Eddington A. S., The mathematical theory of relativity, 1924. (Имеется русский перевод: Эддингтон А. С., Теория относительности, ГТТИ, Москва, 1934.)
5. Silberstein L., The theory of relativity, 1924.
6. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, 1926. (Имеется русский перевод: Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, Гостехиздат, Москва, 1948.)
7. Appel P., Cours de mécanique rationnelle, Tome V, 1926.
8. Synge J. L., On the Geometry of Dynamics, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 1926. (Имеется русский перевод: Синдж Дж. Л., Тензорные методы в динамике, ИЛ, Москва, 1947; большой список литературы.)
9. Levi-Civita T., The absolute differential calculus, 1927.
10. Veblen O., Invariants of quadratic differential forms. (Имеется русский перевод: Веблен О., Инварианты дифференциальных квадратичных форм, Гостехиздат, Москва, 1948.)
11. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 1934.
12. Schouten J. A., Der Ricci—Kalkül, 1924.

Добавление к русскому переводу

13. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, Москва, 1953.
14. Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, Москва, 1948.
15. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. I—X, Гостехиздат, Москва, 1933, 1956.
16. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, т. I, Гостехиздат, Москва, 1943, т. II, Москва, 1947.

17. Каган В. Ф., Геометрические идеи Римана и их современное развитие, ГТТИ, Москва, 1933.
18. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, Гостехиздат, Москва, 1948.
19. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва, 1954.
20. Седов Л. И., Введение в механику сплошных сред, Физматгиз, Москва, 1962.
21. Гольденблат И. И., Некоторые вопросы механики деформируемых сред, Гостехиздат, Москва, 1955.
22. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, Физматгиз, Москва, 1961.
23. Thomas T. Y., Concepts from tensor analysis and differential geometry, N. Y., 1961.
24. Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, перев. с нем., т. I, Москва, 1939, т. II, Москва, 1948.
25. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, Москва, 1961.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ