DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

Band 114

HOMOLOGY

by

Dr. SAUNDERS MACLANE
Professor of Mathematics
at the University of Chicago

SPRINGER-VERLAG
Berlin · Göttingen · Heidelberg
1963

С. МАКЛЕЙН

ГОМОЛОГИЯ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
М. С. ЦАЛЕНКО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Г. КУРОША

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1966

УДК 519.49

Монография крупного американского математика, одного из создателей гомологической алгебры и теории категорий. Книга написана на современном научном уровне, материал излагается ясно и понятно. Книга сыграет большую роль в распространении среди широких кругов математиков идей и методов гомологической алгебры, приобретающих все большее значение в современной математике.

Книга рассчитана на математиков различных специальностей; может быть использована как учебное пособие для аспирантов, студентов старших курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также как основа для специальных курсов по теории гомологий и гомологической алгебре.

Редакция литературы по математическим наукам

Посвящается

ДОРОТИ МАКЛЕЙН

Предисловие редактора перевода

Гомологическая алгебра сложилась к настоящему времени в хорошо оформившуюся и самостоятельную алгебраическую науку с собственными методами и собственным предметом изучения. Широкие круги математиков узнали о появлении этой новой науки после выхода в 1956 г. основополагающей книги А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра», русский перевод которой, вышедший в 1960 г., доступен советскому читателю. Позже, в связи с бурным развитием гомологической алгебры и выявлением новых возможностей для применения гомологических методов в различных областях математики, были опубликованы и другие книги.

«Гомология» С. Маклейна, русский перевод которой предлагается сейчас читателю, выгодно отличается от всех этих книг тем, что в ней богатство содержания и самый современный подход к излагаемому материалу сочетаются с исключительным мастерством изложения. Читатель, изучивший эту книгу, овладеет методами гомологической алгебры, ознакомится с многочисленными применениями этих методов в алгебре и топологии и вместе с тем получит правильное представление о движущих силах всей той области, к которой книга относится. Говорить о книге подробнее нет необходимости — введение, написанное автором талантливо и с большим подъемом, дает полную возможность читателю, даже владеющему лишь основами общей алгебры, правильно понять и своеобразие книги, и предмет, в ней изучаемый.

Автор книги, профессор Чикагского университета, является одним из самых видных современных американских алгебраистов и топологов. Его роль в гомологической алгебре, как и в теории категорий,—это роль одного из основоположников и создателей этой области. В предисловии к английскому изданию книги, посвященном различным благодарностям, автор говорит следующее:

«Гомологическая алгебра возникла из многих истоков в алгебре и топологии. Решающие примеры появились при изучении расширений групп и их систем факторов, изучении, которое я провел в совместной работе с Отто Шиллингом. Дальнейшее развитие гомологических идей с целью их применения в топологии было проведено в моем продолжительном сотрудничестве с Самуэлем Эйленбергом».

Эти слова, на мой взгляд, правильно отражают действительную историю. Этому не противоречит то, что еще в тридцатых годах активно развивались и алгебраическая (или, как тогда говорили, комбинаторная) топология, и теория расширений групп и теория конечномерных простых алгебр, и без этой предшествующей работы гомологическая алгебра не могла бы в середине сороковых годов возникнуть. Больше того, автор сам отмечает работу В. Майера конца двадцатых годов, в которой впервые понятие комплекса появилось как чисто алгебраическое понятие. Следует отметить, с другой стороны, что около середины сороковых годов разработка теории гомологий в группах была независимо начата Д. К. Фаддеевым. Впрочем, вся эта область еще столь молода, что писать ее историю пока преждевременно.

Настоящая книга, несомненно, необходима каждому алгебраисту, каждому топологу, каждому математику, работающему в такой области, в которой методы гомологической алгебры уже нашли или должны найти применения.

Москва,
февраль 1966 г.

А. Курош

Введение

Эта книга начинается с гомологии, гомоморфизмов и тензоров. Гомология дает алгебраическую «картину» топологических пространств, сопоставляя каждому пространству X семейство абелевых групп $H_0(X), \ldots, H_n(X), \ldots$ и каждому непрерывному отображению $f: X \to Y$ — семейство групповых гомоморфизмов $f_n: H_n(X) \to H_n(Y)$. Свойства пространства или отображения часто могут быть эффективным образом найдены по свойствам групп H_n или гомоморфизмов f_n. Аналогичный процесс сопоставляет группы гомологий другим математическим объектам, например группе Π или ассоциативной алгебре Λ. Гомология во всех таких случаях и есть предмет нашего рассмотрения.

Комплексы дают нам средство для вычисления гомологии. Каждый n-мерный «сингулярный» симплекс T топологического пространства X имеет границу, состоящую из сингулярных симплексов размерности $n-1$. Если K_n — свободная абелева группа, порожденная всеми этими n-мерными симплексами, то функция ∂, которая сопоставляет каждому T альтернированную сумму ∂T его граничных симплексов, определяет гомоморфизм $\partial: K_n \to K_{n-1}$. Таким образом возникает (гл. II) состоящий из абелевых групп K_n и граничных гомоморфизмов ∂ «комплекс» вида

$$0 \leftarrow K_0 \xleftarrow{\partial} K_1 \xleftarrow{\partial} K_2 \xleftarrow{\partial} K_3 \xleftarrow{\partial} \ldots .$$

Кроме того, $\partial\partial = 0$, так что ядро C_n гомоморфизма $\partial: K_n \to K_{n-1}$ содержит образ ∂K_{n+1}. Факторгруппа $H_n(K) = C_n/\partial K_{n+1}$ есть n-я группа гомологий комплекса K или исходного пространства X. Часто меньший или более простой комплекс достаточен для вычисления тех же самых групп гомологий пространства X. Если дана группа Π, то существует соответствующий комплекс, гомология которого совпадает с гомологией, определенной для группы. Например, одномерная группа гомологий группы Π — это факторгруппа $\Pi/[\Pi, \Pi]$ группы Π по ее коммутанту.

Гомоморфизмы соответствующего типа связаны с каждым типом алгебраической системы; относительно умножения гомоморфизмов системы и их гомоморфизмы образуют «категорию» (гл. I). Если

C и A — абелевы группы, то множество Hom (C, A) всех групповых гомоморфизмов $f: C \to A$ также является абелевой группой. При фиксированной группе C это есть ковариантный «функтор», заданный в категории всех абелевых групп A; каждый гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ индуцирует отображение $\alpha_*: \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, A')$, которое переводит каждый гомоморфизм $f: C \to A$ в произведение αf. Если группу A зафиксировать, то Hom — контравариантный функтор: каждый гомоморфизм $\gamma: C' \to C$ индуцирует отображение γ^* в противоположном направлении, $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C', A)$, переводя f в произведение $f\gamma$. Таким образом, применение Hom (?, A) к комплексу $K = ?$ переворачивает стрелки и дает комплекс $\mathrm{Hom}(K_0, A) \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}(K_1, A) \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{Hom}(K_2, A) \to \ldots$. Здесь факторгруппы (Kernel ∂^*)/(Image ∂^*) дают когомологию $H^n(K, A)$ комплекса K с коэффициентами в A. В соответствии с происхождением K это дает когомологию пространства X или группы П.

Расширение группы A с помощью группы C — это такая группа $B \supset A$, что $B/A \cong C$; на языке диаграмм расширение является последовательностью

$$E: 0 \to A \to B \to C \to 0$$

абелевых групп и гомоморфизмов, точной в том смысле, что ядро каждого гомоморфизма равно образу предыдущего гомоморфизма. Множество $\mathrm{Ext}^1(C, A)$ всех расширений A с помощью C оказывается абелевой группой и функтором от аргументов C и A, ковариантным по A и контравариантным по C.

Вопрос: определяет ли гомология комплекса K его когомологию?

Ответ: почти да, при условии, что каждая абелева группа K_n свободна. В этом случае группа $H^n(K, A)$ определяется «с точностью до группового расширения» группами $H_n(K)$, $H_{n-1}(K)$ и A; именно, «теорема об универсальных коэффициентах» (гл. III) дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(K), A) \to H^n(K, A) \to \mathrm{Hom}(H_n(K), A) \to 0,$$

включающую только что введенный функтор Ext^1. Если группы K_n не свободны, то получается более сложный ответ, включающий спектральные последовательности, описанные в гл. XI.

Тензоры возникают из векторных пространств U, V и W и билинейных функций $B(u, v)$, определенных на $U \times V$ со значениями в W. Построим векторное пространство $U \otimes V$, порожденное символами $u \otimes v$, билинейными по $u \in U$ и $v \in V$ и только. Тогда $u \otimes v$ — универсальная билинейная функция: для всякой билинейной функции B существует единственное линейное преобразование $T: U \otimes V \to W$, для которого $B(u, v) = T(u \otimes v)$. Оказывается, что элементы из $V \otimes V$ совпадают с классическими тензорами (с двумя индексами), связанными с векторным пространством V. Две абелевы группы A и G имеют тензорное произведение $A \otimes G$, порожденное билинейными символами $a \otimes g$; оно является абелевой группой и функтором, ковариантным по A и G. В частности, если K — комплекс, то и $A \otimes K: A \otimes K_0 \leftarrow A \otimes K_1 \leftarrow \ldots$ будет комплексом.

Вопрос: определяет ли гомология комплекса K гомологию комплекса $A \otimes K$?

Ответ: почти да; если каждая группа K_n свободна, то существует точная последовательность

$$0 \to A \otimes H_n(K) \to H_n(A \otimes K) \to \mathrm{Tor}_1(A, H_{n-1}(K)) \to 0.$$

Здесь $\mathrm{Tor}_1(A, G)$ — новый ковариантный функтор от абелевых групп A и G, называемый «периодическим умножением»; он зависит (гл. V) от элементов конечного порядка из A и G и порождается подчиненными подходящим соотношениям парами элементов $a \in A$ и $g \in G$, для которых существует такое целое число m, что $ma = 0 = mg$.

Возьмем декартово произведение двух пространств $X \times Y$. Можем ли мы подсчитать его гомологию по гомологии пространств X и Y? Изучение комплексов, построенных из симплексов (гл. VIII), сводит этот вопрос к вычислению гомологии тензорного произведения $K \otimes L$ двух комплексов. В это вычисление вновь через точную последовательность входит тензорное умножение (теорема Кюннета, гл. V):

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L) \to H_n(K \otimes L) \to$$
$$\to \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1(H_p(K), H_q(L)) \to 0.$$

Но, увы, если A — подгруппа группы B, то $A \otimes G$ обычно не есть подгруппа в $B \otimes G$; иначе говоря, если $E: 0 \to A \to B \to C \to 0$ есть точная последовательность, то последовательность тензорных произведений

$$0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$$

точна, *за исключением*, быть может, члена $A \otimes G$. К счастью, периодическое умножение устраняет это затруднение; данная последовательность E определяет гомоморфизм $E_*\colon \mathrm{Tor}_1(C, G) \to A \otimes G$, образ которого в точности равен ядру гомоморфизма $A \otimes G \to B \otimes G$, и последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A, G) \to \mathrm{Tor}_1(B, G) \to \mathrm{Tor}_1(C, G) \xrightarrow{E_*} A \otimes G \to B \otimes G$$

точна. Назовем E_* связывающим гомоморфизмом для Tor_1 и $\otimes$.

Но вновь, увы, если A — подгруппа группы B, то гомоморфизм $f: A \to G$ не всегда можно продолжить до гомоморфизма $B \to G$; другими словами, точная последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ индуцирует последовательность (в обратном направлении ввиду контравариантности)

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to 0,$$

которая может оказаться неточной в $\mathrm{Hom}(A, G)$. Ext^1 спасает положение: существует «связывающий» гомоморфизм E^*, который порождает более длинную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \xrightarrow{E^*}$$
$$\xrightarrow{E^*} \mathrm{Ext}^1(C, G) \to \mathrm{Ext}^1(B, G) \to \mathrm{Ext}^1(A, G) \to 0.$$

Теперь обобщим сказанное; заменим абелевы группы модулями над произвольным коммутативным кольцом R. Тогда $\mathrm{Ext}^1(A, G)$ снова определяется как R-модуль, но наша длинная последовательность может не быть точной в члене $\mathrm{Ext}^1(A, G)$. Существуют новый функтор $\mathrm{Ext}^2(A, G)$, новый связывающий гомоморфизм $E^*: \mathrm{Ext}^1(A, G) \to \mathrm{Ext}^2(C, G)$ и точная последовательность, простирающаяся до бесконечности вправо:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^n(C, G) \to \mathrm{Ext}^n(B, G) \to \mathrm{Ext}^n(A, G) \xrightarrow{E^*}$$
$$\xrightarrow{E^*} \mathrm{Ext}^{n+1}(C, G) \to \ldots .$$

Элементы из $\mathrm{Ext}^n(C, G)$ являются подходящими классами эквивалентности длинных точных последовательностей

$$0 \to G \to B_{n-1} \to \ldots \to B_0 \to C \to 0,$$

идущими от G к C через n промежуточных модулей. Аналогичное положение имеется для периодического умножения; существуют функторы $\mathrm{Tor}_n(A, G)$, определяемые с помощью подходящих образующих и соотношений, которые входят в длинную точную последовательность

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_{n+1}(C, G) \xrightarrow{E_*} \mathrm{Tor}_n(A, G) \to \mathrm{Tor}_n(B, G) \to$$
$$\to \mathrm{Tor}_n(C, G) \to \ldots,$$

индуцированную каждой точной последовательностью $E: 0 \to A \to B \to C \to 0$. Они применимы также и в том случае, когда кольцо не коммутативно, если A, B и C — правые R-модули, а G — левый R-модуль.

Эти функторы Tor_n и Ext^n являются предметом изучения гомологической алгебры. Они дают когомологию различных алгебраических систем. Если Π — группа, то возьмем в качестве R групповое кольцо, порожденное группой Π над кольцом целых чисел. Тогда группа Z целых чисел есть (тривиальный) R-модуль; если A — любой другой R-модуль, то группы $\mathrm{Ext}^n_R(Z, A)$ являются группами когомологий $H^n(\Pi, A)$ группы Π с коэффициентами из A. Если $n = 2$, группа $H^2(\Pi, A)$ оказывается, как и должно быть, группой всех расширений B абелевой группы A с помощью (неабелевой) группы Π, причем структура A как Π-модуля показывает, как A вкладывается в B в качестве нормального делителя. Если $n = 3$, то $H^3(\Pi, A)$ — это группа, элементы которой являются «препятствиями» для задачи расширения. Аналогично $\mathrm{Tor}_n(Z, A)$ дает группы гомологий группы Π. Если теперь Λ — алгебра над полем F, то Ext^n строится с помощью длинных точных последовательностей двусторонних Λ-модулей A. Алгебра Λ сама является таким модулем, и $\mathrm{Ext}^n(\Lambda, A)$ — это когомология Λ с коэффициентами из A; вновь Ext^2 и Ext^3 соответствуют задачам расширения для алгебр.

Модуль P проективен, если каждый гомоморфизм $P \to B/A$ можно провести через B с помощью $P \to B$. Каждый свободный модуль проективен; запишем произвольный модуль в образующих, тогда он выразится как фактормодуль свободного модуля и, следовательно, проективного модуля.

Как можно вычислить Tor_n и Ext^n? Запишем A как фактормодуль проективного модуля P_0, т. е. составим точную последовательность $0 \leftarrow A \leftarrow P_0$. Ядро гомоморфизма $P_0 \to A$ снова является фактормодулем проективного модуля P_1. Продолжение этого процесса дает точную последовательность $0 \leftarrow A \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \ldots$. Комплекс P называется «проективной резольвентой» модуля A. Этот комплекс ни в каком смысле не однозначен; сравним два таких комплекса:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \leftarrow & A & \leftarrow & P_0 & \xleftarrow{\partial} & P_1 & \leftarrow & P_2 & \leftarrow \cdots \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow & \\
0 & \leftarrow & A & \leftarrow & P'_0 & \xleftarrow{\partial} & P'_1 & \leftarrow & P'_2 & \leftarrow \cdots .
\end{array}$$

Поскольку модуль P_0 проективен, отображение $P_0 \to A$ можно провести через $P'_0 \to A$ с помощью f_0. Произведение $P_1 \to P'_0$ затем можно провести через $P'_1 \to P'_0$ с помощью $f_1: P_1 \to P'_1$

так, что $\partial f_1 = f_0\partial$, и так далее по индукции. Результирующее сравнение $f_n : P_n \to P'_n$ комплексов индуцирует гомоморфизм $H_n(P \otimes G) \to H_n(P' \otimes G)$. Изменение ролей P и P' и деформация произведения $P \to P' \to P$ в тождественное отображение (деформации называются гомотопиями) показывают, что этот гомоморфизм является изоморфизмом $H_n(P \otimes G) \cong H_n(P' \otimes G)$. Следовательно, группы гомологий $H_n(P \otimes G)$ не зависят от выбора проективной резольвенты P, а зависят только от A и G. Они оказываются группами $\operatorname{Tor}_n(A, G)$. Аналогично группы когомологий $H^n(P, G)$ являются группами $\operatorname{Ext}^n(A, G)$, а необходимые связывающие гомоморфизмы E^* могут быть получены из основной точной гомологической последовательности комплексов (гл. II). Таким образом, Tor и Ext можно вычислить с помощью проективных резольвент. Например, если Π — группа, то модуль Z имеет стандартную «B-резольвенту» (гл. IX), когомология которой совпадает с когомологией группы Π. Для отдельных групп специальные резольвенты более эффективны.

Качественные рассмотрения относятся к вопросу о минимальной длине проективной резольвенты R-модуля A. Если существует проективная резольвента для A, заканчивающаяся на $P_{n+1} = 0$, то говорят, что A имеет гомологическую размерность, не превосходящую n. Эти размерности входят в арифметическую структуру кольца R; например, если R есть кольцо Z целых чисел, то каждый модуль имеет размерность, не большую 1; как пример отметим еще, что теорема Гильберта о сизигиях (гл. VII) относится к размерностям градуированных модулей над кольцом многочленов.

Две точные последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ и $0 \to C \to D \to F \to 0$ можно «склеить» в C и получить длинную точную последовательность

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & D \arrow[r] & F \arrow[r] & 0; \\ & & & C \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

другими словами, элемент из $\operatorname{Ext}^1(C, A)$ и элемент из $\operatorname{Ext}^1(F, C)$ определяют двукратное расширение, которое является элементом из $\operatorname{Ext}^2(F, A)$, называемым их произведением (гл. III). Эти и аналогичные произведения для Tor могут быть вычислены с помощью резольвент (гл. VIII).

Каждый R-модуль есть также абелева группа, т. е. модуль над кольцом Z целых чисел. Назовем расширение $E : A \to B \to C$ R-модулей Z-расщепляющимся, если средний модуль B как абелева группа разлагается в прямую сумму A и C. Построим группу $\operatorname{Ext}^1_{(R, Z)}(C, A)$, используя только такие Z-расщепляющиеся расширения. Этот функтор имеет связывающие гомоморфизмы E^*, определенные для Z-расщепляющихся последовательностей E.

Вместе с соответствующими периодическими умножениями и их связывающими гомоморфизмами эти функторы составляют предмет изучения относительной гомологической алгебры (гл. IX). Когомология группы — это пример такого относительного функтора. Точно так же, если Λ есть алгебра над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$, то все соответствующие понятия относительны по отношению к $\mathbf{K}$; в частности, когомология алгебры Λ возникает из точных последовательностей Λ-бимодулей, которые расщепляются как последовательности $\mathbf{K}$-модулей.

Отсюда следует, что модули являются существенным элементом исследования. Однако точность резольвенты и определение проективного объекта суть свойства гомоморфизмов; все рассуждения остаются в силе, если модули и гомоморфизмы заменить любыми объектами A, B, ... с «морфизмами» $\alpha : A \to B$, которые можно складывать, перемножать и которые имеют подходящие ядра, коядра $(B/\alpha A)$ и образы. С технической точки зрения это равносильно построению гомологической алгебры в абелевой категории (гл. IX). Из функтора $T_0(A) = A \otimes G$ мы построили последовательность функторов $T_n(A) = \operatorname{Tor}_n(A, G)$. Вообще пусть T_0 — произвольный ковариантный функтор, который аддитивен $[T_0(\alpha_1 + \alpha_2) = T_0\alpha_1 + T_0\alpha_2]$ и переводит каждую точную последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ в точную справа последовательность $T_0(A) \to T_0(B) \to T_0(C) \to 0$. Мы опять исследуем ядро морфизма $T_0(A) \to T_0(B)$ и строим новые функторы для его описания. Если в категории «достаточно» проективных объектов, то каждый объект A имеет проективную резольвенту P и объект $H_n(T_0(P))$ не зависит от выбора P и определяет функтор $T_n(A)$, входящий в длинную точную последовательность

$$\ldots \to T_n(A) \to T_n(B) \to T_n(C) \xrightarrow{E^*} T_{n-1}(A) \to \ldots .$$

Таким образом, T_0 определяет целую последовательность производных функторов T_n и связывающих гомоморфизмов $E_* : T_n(C) \to T_{n-1}(A)$. Эти «производные» функторы можно охарактеризовать аксиоматически тремя основными свойствами (гл. XII):

(i) приведенная выше последовательность точна;

(ii) если P — проективный объект и $n > 0$, то $T_n(P) = 0$;

(iii) если $E \to E'$ — гомоморфизм точных последовательностей, то диаграмма из связывающих гомоморфизмов коммутативна (естественность!):

$$\begin{array}{ccc} T_n(C) & \to & T_{n-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_n(C') & \to & T_{n-1}(A'). \end{array}$$

В частности, если $T_0(A) = A \otimes G$, то эти аксиомы характеризуют $\mathrm{Tor}_n(A, G)$ как функторы аргумента A. Имеется подобная характеристика и для функторов $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ (гл. III). Иначе говоря, каждый производный функтор T_n может быть описан только в терминах предыдущего функтора T_{n-1}; именно, если $E: S_n(C) \to S_{n-1}(A)$ другой естественный связывающий гомоморфизм между аддитивными функторами, то каждое «естественное» отображение S_{n-1} в T_{n-1} продолжается единственным образом до естественного отображения S_n в T_n. Это «универсальное» свойство функтора T_n описывает его как левый сателлит функтора T_{n-1}; он может быть использован для построения умножений.

Последовательные и взаимосвязанные этапы обобщения появляются всюду при изложении гомологической алгебры. Мы идем от абелевых групп к модулям, к бимодулям, к объектам из абелевой категории; от колец к группам, к алгебрам, к алгебрам Хопфа (гл. VI); от точных последовательностей к Z-расщепляющимся точным последовательностям, к «собственному» классу точных последовательностей, охарактеризованному аксиомами (гл. XII). Предмет находится в процессе быстрого развития; наиболее общая формулировка еще должна быть получена. По этой причине движение идет в книге от частного к общему и предшествующие результаты объединяются в заключительном изучении (гл. XII) аддитивных функторов в абелевой категории по отношению к собственному классу точных последовательностей.

Как только некоторое понятие изучено, мы останавливаемся для того, чтобы описать его применения. Так, гл. IV о когомологии групп содержит топологическую интерпретацию групп когомологий группы П как когомологию асферичного пространства с фундаментальной группой П, а также теорему Шура о расщепляемости каждого расширения одной конечной группы с помощью другой, если порядки этих групп взаимно просты. В гл. VII о размерности изучаются сизигии и сепарабельные алгебры. Глава X о когомологии алгебраических систем содержит основную теорему Веддербарна для алгебр и когомологию (на разных уровнях) абелевых групп.

Глава XI содержит стандартное построение спектральной последовательности фильтрации и бикомплекса, использованное для построения спектральной последовательности покрытия и группового расширения (эта последняя идет от Линдона, а не от последующей работы Хохшильда и Серра, как часто думают). Большая часть изложения гомологической алгебры в других главах может быть понята независимо от этих результатов.

Для специалиста мы отметим несколько особенностей. Основные функторы Ext и Tor описаны непосредственно: Ext, следуя Ионеда,— при помощи длинных точных последовательностей, Tor — с помощью улучшенного множества образующих и соотношений. Резольвентам отведено их истинное место, место средств вычисления. Все многообразие алгебр (коалгебры, алгебры Хопфа, градуированные алгебры, дифференциальные градуированные алгебры) описано единообразно коммутативными диаграммами для отображений умножения. Относительная гомологическая алгебра рассматривается на двух уровнях общности: сначала при помощи «пренебрегающего» функтора, к примеру такого, который считает R-модуль абелевой группой, позднее при помощи подходящего собственного класса коротких точных последовательностей в абелевой категории. Когомология групп определяется функторно через B-конструкцию. Эта конструкция позднее фигурирует в абстрактной форме: для пары категорий с пренебрегающим функтором и функтором, строящим относительные проективные объекты (гл. IX, § 7). Указано собственное определение связывающего гомоморфизма через аддитивные отношения (соответствия); эти отношения использованы для описания трансгрессии в спектральной последовательности. Это дает удобную форму для рассмотрения трансгрессии в спектральной последовательности Линдона. Диаграммный поиск работает в абелевой категории с подобъектами и факторобъектами вместо элементов (XII.3).

Обозначения обычные, со следующими несколькими исключениями. Комплекс обозначается буквой K (латинская), коммутативное кольцо — буквой K (греческая). «Градуированный» модуль M есть семейство $M_0, M_1, \ldots$ модулей, а *не* их прямая сумма ΣM_n, в то время как о семействе $\ldots, M_{-1}, M_0, M_1, \ldots$ говорится, что оно Z-градуировано. Мономорфизм обозначается как $\varkappa: A \rightarrowtail B$, эпиморфизм как $\sigma: B \twoheadrightarrow C$, а символ $\varkappa \parallel \sigma$ означает, что последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ точна. Пунктирная стрелка, $A \;.\,.\,.\!\to B$, обозначает гомоморфизм, который нужно построить, штриховая стрелка, $A \dashrightarrow B$ — это групповой гомоморфизм между модулями, неполная стрелка $A \rightharpoonup B$ — аддитивное отношение. Мы различаем бикомплекс (XI.6) и комплекс комплексов (X.9); мы «пополняем», но не «дополняем» алгебру. Двойственной к резольвенте является «корезольвента». Если u — цикл из гомологического класса $h \in H_n(X)$, то обозначение $u \in \in H_n$ есть сокращение записи $u \in h \in H_n$, в то время как h записывается как $h = \mathrm{cls}\, u$. Кограница n-мерной коцепи f равна $\delta f = (-1)^{n+1} f\partial$ со знаком (II.3).

Ссылка на теорему V.4.3 означает ссылку на теорему 3 § 4, гл. V; если номер главы опущен, то имеется в виду теорема из той же главы. Ссылка типа Бурбаки [1999] означает ссылку на работу упомянутого автора, указанную в библиографии в конце книги и опубликованную в отмеченном году; [1999b]— это ссылка на вторую работу того же автора, опубликованную в том же году. Оказавший большое влияние трактат А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра» выделен тем, что упоминается без указания даты. Библиография не претендует на полноту; ее задача — быть путеводителем для дальнейшего чтения, подсказанного в замечаниях, сделанных в конце некоторых глав и параграфов. Эти замечания содержат также несистематические исторические комментарии, которые дают определенный — и, вероятно, субъективный — взгляд на ход развития гомологической алгебры. Упражнения предназначены как для того, чтобы дать элементарную практику в пользовании введенными понятиями, так и для того, чтобы сформулировать дополнительные сведения, не включенные в текст.

ГЛАВА I

Модули, диаграммы и функторы

В теории гомологий постоянно приходится иметь дело с формальными свойствами функций (отображений) и их произведений. Рассматриваемые в этой теории функции обычно являются гомоморфизмами модулей или связанных с ними алгебраических систем. Формальные свойства, используемые постоянно при изучении гомологий, могут быть описаны утверждением, что гомоморфизмы образуют категорию. Эта глава посвящена понятиям модуля и категории.

§ 1. Обозначения при помощи стрелок

Если X и Y — два множества, то *прямым* (*декартовым*) *произведением* $X \times Y$ называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

Символ $f: X \to Y$ означает, что f является *функцией*, *определенной на множестве* X *со значениями в множестве* Y. Формально такая функция может быть описана упорядоченной тройкой $f = (X, F, Y)$, где F — подмножество множества $X \times Y$, содержащее для каждого $x \in X$ только одну пару (x, y). Действительно, мы, как правило, записываем как $f(x) = y$ значение функции f от аргумента x. Отметим, что мы пишем функцию слева от аргумента, т. е. $f(x)$. Заметим также, что каждая функция f связана с определенным множеством X как *областью определения* и определенным множеством Y как *областью значений*.

Если даны две функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то *произведением* gf, иногда записываемым в виде $g \circ f$, считается функция из X в Z, определенная равенством $(gf)(x) = g(f(x))$ для каждого $x \in X$. Поскольку функции записываются слева от аргумента, gf означает, что сначала применяется функция f, а потом функция g. Произведение gf определено *только* в том случае, когда область значений функции f совпадает с областью определения функции g. В частности, умножение не определено в том случае, когда область значений f есть собственное подмножество области определения g.

Для произвольного множества X тождественным отображением (1 или 1_X) является такая функция $1: X \to X$, что $1(x) = x$ для любого $x \in X$. Если S — подмножество множества X, то функция $j: S \to X$ со значениями $j(s) = s$ для каждого $s \in S$ называется («тождественным») *вложением* S в X. Для произвольной функции $f: X \to Y$ произведение $fj: S \to Y$ (записываемое иногда как $f \mid S$) есть «ограничение» f на подмножество S множества X. Аналогично, если Y — подмножество множества W и $k: Y \to W$ есть вложение ($k(y) = y$), то произведение $kf: X \to W$ является той же самой функцией f, область значений которой Y расширена до множества W. Заметим, что функции f и kf имеют одинаковые *значения* для каждого *значения* аргумента x, но тем не менее считаются разными функциями, поскольку у них разные области значений. Это различие, кажущееся излишне педантичным, позднее окупится (см. пример 2 из II.1).

В дальнейшем используются обычные обозначения теории множеств: $X \cap Y$ обозначает пересечение множеств X и Y, а $\varnothing$ обозначает пустое множество.

§ 2. Модули

Пусть R — кольцо с единицей $1 \neq 0$. *Левым R-модулем* называется аддитивно записанная абелева группа A вместе с определенной функцией $p: R \times A \to A$, записываемой в виде $p(r, a) = ra$, удовлетворяющей для всех $r, r' \in R$ и $a, a' \in A$ следующим соотношениям:

$$(r+r')a = ra + r'a, \quad (rr')a = r(r'a),$$
$$r(a+a') = ra + ra', \quad 1a = a.$$

Из этих соотношений вытекает, что $0a = 0$ и $(-1)a = -a$. Некоторые авторы, определяя R-модуль, не требуют выполнения соотношения $1a = a$ и называют модули, для которых $1a = a$, унитарными. В этой книге всегда будет предполагаться, *что кольцо имеет единицу и что модули унитарны*.

Наши рассмотрения левых R-модулей будут mutatis mutandis применимы к *правым R-модулям*, которые являются абелевыми группами A с $ar \in A$, причем выполнены соответствующие четыре тождества, например $a(rr') = (ar)r'$.

Модули встречаются очень часто. В том случае, когда R есть поле или тело, левый R-модуль является левым векторным пространством над R. Если F — поле, а $R = F[x]$ — кольцо многочленов от одного неизвестного x с коэффициентами из F, то R-модуль есть просто векторное пространство V над F, в котором зафиксировано линейное преобразование $T: V \to V$; именно, T — это преобразование, которое задается умножением слева элементов пространства на элемент $x \in R$. Рассмотрим также Z-модули, где Z — кольцо целых чисел. Для каждого положительного m, $ma = a + \ldots + a$ (m раз); значит, Z-модуль A есть просто абелева группа с обычным пониманием целых кратных ma, $m \in Z$. Если Z_k — кольцо вычетов по модулю k, то Z_k-модуль A является абелевой группой, в которой порядок каждого элемента делит k. Наконец, пусть R — коммутативное кольцо, порожденное единицей и таким элементом d, что $d^2 = 0$, т. е. R состоит из всех пар вида $m + nd$ с целыми коэффициентами m и n; тогда R-модуль является абелевой группой A, в которой зафиксирован такой эндоморфизм $d: A \to A$, что $d^2 = 0$. Пара (A, d) называется «дифференциальной группой» (II.1).

Подмножество S R-модуля A называется *подмодулем* (обозначается $S \subset A$), если S — подгруппа группы A и если из $r \in R$, $s \in S$ следует, что $rs \in S$. В этом случае S может рассматриваться как R-модуль. Кольцо R само является левым R-модулем. Подмодуль модуля R — это подмножество L, замкнутое относительно сложения и выдерживающее умножение слева на все элементы кольца R, т. е. $rL \subset L$ для всех $r \in R$. Такое подмножество называется также *левым идеалом* кольца R. Если L — левый идеал в R и A — левый R-модуль, то множество

$$LA = \{\text{все конечные суммы } \Sigma l_i a_i \text{ для } l_i \in L,\ a_i \in A\}$$

является подмодулем модуля A, называемым *произведением* идеала L на модуль A. В частности, произведение двух левых идеалов LL' есть левый идеал, и $(LL')A = L(L'A)$.

Пусть A и B суть R-модули. Обозначения $\alpha: A \to B$ или $A \xrightarrow{\alpha} B$ указывают, что α есть *R-модульный гомоморфизм* A в B, т. е. такое отображение A в B, что

$$\alpha(a+a') = \alpha a + \alpha a', \quad \alpha(ra) = r(\alpha a).$$

Если $\alpha: A \to B$, то A назовем *областью определения*, а B — *областью значений* α. *Образ* $\operatorname{Im}(\alpha) = \alpha A$ состоит из всех элементов вида αa, $a \in A$; он является подмодулем области значений B. *Ядро* $\operatorname{Ker}(\alpha)$ состоит из всех элементов $a \in A$, для которых $\alpha a = 0$; оно является подмодулем области определения A. Если $\alpha A = B$, то мы будем говорить, что α — *эпиморфизм*, и писать $\alpha: A \twoheadrightarrow B$; если же $\operatorname{Ker}(\alpha) = 0$, то будем говорить, что α — *мономорфизм*, и писать $\alpha: A \rightarrowtail B$. Наконец, α — *изоморфизм*, если α одновременно является и эпиморфизмом, и мономорфизмом. Для каждого модуля A тождественное отображение $1_A: A \to A$ есть изоморфизм. Для любых модулей A и B нулевая или «тривиальная» функция 0, равная 0 для всех $a \in A$, есть гомоморфизм $0: A \to B$. Гомоморфизм $\omega : A \to A$ с совпадающими областями определения и значений называется *эндоморфизмом*.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 : A \to B$ — гомоморфизмы с общими областями определения и значений. Тогда отображение $\alpha_1 + \alpha_2$, определенное равенством $(\alpha_1 + \alpha_2) a = \alpha_1 a + \alpha_2 a$, есть R-модульный гомоморфизм $\alpha_1 + \alpha_2 : A \to B$, называемый *суммой* α_1 и α_2.

Если $\alpha : A \to B$ и $\beta : B \to C$ суть R-модульные гомоморфизмы, то *произведение* $\beta\alpha$ также является R-модульным гомоморфизмом $\beta\alpha : A \to C$. Следует напомнить, что указанное произведение определено только тогда, когда область значений гомоморфизма α совпадает с областью определения гомоморфизма β.

Умножение гомоморфизмов ассоциативно, если оно имеет смысл. *Обратным* (двусторонним) к $\alpha : A \to B$ называется такой гомоморфизм $\alpha^{-1} : B \to A$, что $\alpha\alpha^{-1} = 1_B$ и $\alpha^{-1}\alpha = 1_A$. Отображение α обладает обратным тогда и только тогда, когда α есть изоморфизм, и в этом случае обратный гомоморфизм единственен. Мы будем писать $\alpha : A \cong B$, если α — изоморфизм. *Левым обратным* к α называется такой гомоморфизм $\gamma : B \to A$, что $\gamma\alpha = 1_A$: он не обязан существовать или быть единственным.

Говорят, что пара гомоморфизмов (α, β)

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

точна в B, если $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$. Последовательность гомоморфизмов

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \to \ldots \to A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n$$

считается *точной*, если пара (α_{i-1}, α_i) точна в A_i, $i = 2, \ldots n - 1$.

Для каждого подмодуля $T \subset B$ вложение есть мономорфизм $j : T \to B$. Для каждого $b \in B$ множество $b + T$ всех сумм вида $b + t$, где $t \in T$, называется *смежным классом* модуля B по подмодулю T; два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают (причем последнее имеет место при $b_1 - b_2 \in T$). Напомним, что *факторгруппа* B/T состоит из смежных классов B по T, а сложение в ней производится по правилу $(b_1 + T) + (b_2 + T) = (b_1 + b_2) + T$. Поскольку T — подмодуль, абелева группа B/T становится R-модулем, если умножение любого элемента $r \in R$ на смежный класс $b + T$ определить равенством $r(b + T) = rb + T$.

Мы назовем B/T *фактормодулем* модуля B. Отображение η, ставящее в соответствие каждому элементу $b \in B$ его смежный класс $b + T$, является эпиморфизмом $\eta : B \twoheadrightarrow B/T$, называемым *естественным* эпиморфизмом, или *проекцией* B на B/T.

Предложение 2.1. *Если $\beta : B \to B'$ и $T \subset \operatorname{Ker} \beta$, то существует такой единственный модульный гомоморфизм $\beta' : B/T \to B'$, что $\beta'\eta = \beta$, т. е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\beta"'] & B/T \arrow[d, dashed, "\beta'"] \\ & B' \end{tikzcd} \qquad \beta(T) = 0,$$

может быть дополнена до коммутативной при помощи единственного гомоморфизма β' $(\beta'\eta = \beta)$.

Доказательство. Положим $\beta'(b + T) = \beta b$. Поскольку $T \subset \operatorname{Ker} \beta$, отображение однозначно. В частности, если $\beta : B \to B'$ есть эпиморфизм с ядром T, то $\beta' : B/T \cong B'$.

Этот результат можно выразить и по-другому: каждый гомоморфизм β, для которого выполняется $\beta(T) = 0$, единственным образом представим в виде произведения $\eta\beta'$. Мы будем также говорить, что β *однозначно проходит через* η. Это свойство характеризует эпиморфизм $\eta : B \to B/T$ с точностью до изоморфизмов модуля B/T; именно, имеет место следующее

Предложение 2.2. *Если $T \subset B$ и если $\zeta : B \to D$ — такой гомоморфизм, что $\zeta(T) = 0$ и каждый гомоморфизм $\beta : B \to B'$ с $\beta(T) = 0$ однозначно проходит через ζ, то существует изоморфизм $\theta : B/T \cong D$, причем $\zeta = \theta\eta$.*

Доказательство. В силу условия нашего предложения и предложения 2.1 существуют разложения $\zeta = \zeta'\eta$, $\eta = \eta'\zeta$. Следовательно, $\zeta = (\zeta'\eta')\zeta = 1\zeta$. Ввиду единственности разложения отображения ζ, $\zeta'\eta' = 1$. По симметрии $\eta'\zeta' = 1$. Значит, $\eta' = (\zeta')^{-1}$, и ζ' является искомым изоморфизмом θ.

Для каждого подмодуля $T \subset B$ вложение j и проекция η позволяют построить точную последовательность

$$0 \to T \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\eta} B/T \to 0.$$

Обратно, пусть

$$(\varkappa, \sigma) : 0 \to A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

— *короткая точная последовательность*, т. е. точная последовательность пяти R-модулей, в которой первый и последний модули нулевые (и, значит, первое и последнее отображения тривиальны). Точность в A означает, что $\varkappa$ — мономорфизм, точность в B означает, что $\varkappa A = \operatorname{Ker} \sigma$, и точность в C означает, что σ — эпиморфизм. Поэтому короткая точная последовательность может быть записана так: $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, причем имеется точность в B. Мономорфизм $\varkappa$ индуцирует изоморфизм $\varkappa' : A \cong \varkappa A$, а σ — изоморфизм $\sigma' : B/\varkappa A \cong C$.

Этими изоморфизмами устанавливается изоморфизм точных последовательностей в форме коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa'} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle (\sigma')^{-1}} & & \\ 0 & \to & \varkappa A & \xrightarrow{j} & B & \to & B/\varkappa A & \to & 0. \end{array} \tag{2.1}$$

Другими словами, короткая точная последовательность — это другое название для пары, состоящей из подмодуля и фактормодуля по этому подмодулю.

С каждым гомоморфизмом $\alpha : A \to B$ связываются два фактормодуля

$$\mathrm{Coim}\,\alpha = A/\mathrm{Ker}\,\alpha, \quad \mathrm{Coker}\,\alpha = B/\mathrm{Im}\,\alpha,$$

которые называются *кообразом* и *коядром* α. Эти определения позволяют построить две короткие точные последовательности

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \rightarrowtail A \twoheadrightarrow \mathrm{Coim}\,\alpha, \quad \mathrm{Im}\,\alpha \rightarrowtail B \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\,\alpha, \tag{2.2}$$

изоморфизм $\mathrm{Coim}\,\alpha \cong \mathrm{Im}\,\alpha$ и длинную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\alpha \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\eta} \mathrm{Coker}\,\alpha \to 0. \tag{2.3}$$

Из равенства $\beta\alpha = 0$ в силу предложения 2.1 следует, что β однозначно проходит через η, т. е. $\beta = \beta'\eta$. Двойственно, если, для некоторого $\gamma : A' \to A$, $\alpha\gamma = 0$, то γ однозначно проходит через j, т. е. $\gamma = j\gamma'$ для единственного $\gamma' : A' \to \mathrm{Ker}\,\alpha$. Это свойство характеризует вложение $j : \mathrm{Ker}\,\alpha \to A$ однозначно с точностью до изоморфизмов модуля $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Отметим двойственные утверждения: α является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\alpha = 0$, и α является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Coker}\,\alpha = 0$. Эта двойственность будет рассмотрена в § 8.

Если $\alpha : A \to B$ и $S \subset A$, то множество αS всех элементов вида αs с $s \in S$ есть подмодуль модуля B, называемый *образом* S при α.

Аналогично, если $T \subset B$, то множество $\alpha^{-1}T$, состоящее из всех элементов $s \in A$, таких, что $\alpha s \in T$, есть подмодуль модуля A, который называется (полным) *прообразом* подмодуля T. В частности, $\mathrm{Ker}\,\alpha = \alpha^{-1}0$, где 0 означает подмодуль модуля B, содержащий только нулевой элемент.

Если $K \subset S$ — подмодули модуля A, то модуль S/K называется *подфактором* модуля A; он является фактормодулем подмодуля S и одновременно подмодулем фактормодуля A/K. Дальше, если $K \subset K' \subset S' \subset S \subset A$, то K'/K — подмодуль модуля S'/K и произведение проекций $S' \to S'/K \to (S'/K)/(K'/K)$ имеет ядро, равное K', откуда вытекает известный изоморфизм $(S'/K)/(K'/K) \cong S'/K'$. Он позволяет записывать всякий подфактор $(S'/K)/(K'/K)$ подфактора S/K как подфактор самого модуля A.

Пусть S/K и S'/K' — подфакторы модулей A и A' соответственно. Если $\alpha S \subset S'$ для $\alpha : A \to A'$ и $\alpha K \subset K'$, то смежный класс $\alpha s + K'$ подфактора S'/K' однозначно определен смежным классом $s + K$ подфактора S/K. Следовательно, отображение $\alpha_*(s + K) = \alpha s + K'$ задает гомоморфизм

$$\alpha_* : S/K \to S'/K' \quad (\alpha S \subset S',\ \alpha K \subset K'). \tag{2.4}$$

Говорят, что этот гомоморфизм *индуцирован* гомоморфизмом α на данных подфакторах.

Если S и T — подмодули модуля A, то их *пересечение* $S \cap T$ (как множеств) будет подмодулем, так же как и их *объединение* $S \cup T$, состоящее из всех сумм $s + t$, где $s \in S$, $t \in T$. В *теореме Нётер об изоморфизмах* утверждается, что 1_A индуцирует изоморфизм

$$1_* : S/(S \cap T) \cong (S \cup T)/T. \tag{2.5}$$

§ 3. Диаграммы

Говорят, что диаграмма R-модулей и гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{\varkappa'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C' & \to & 0 \end{array} \tag{3.1}$$

коммутативна, если $\varkappa'\alpha = \beta\varkappa$: $A \to B'$ (левый квадрат коммутативен!) и $\sigma'\beta = \gamma\sigma$: $B \to C'$ (правый квадрат коммутативен!). Вообще диаграмма гомоморфизмов коммутативна, если любые два пути, указанные стрелками, из одного модуля в другой модуль дают один и тот же гомоморфизм.

Лемма 3.1. (*Малая лемма о пяти гомоморфизмах.*) *Пусть в коммутативной диаграмме R-модулей* (3.1) *обе строки точны. Тогда*:

(i) *если α и γ — изоморфизмы, то и β — изоморфизм;*
(ii) *если α и γ — мономорфизмы, то и β — мономорфизм;*
(iii) *если α и γ — эпиморфизмы, то и β — эпиморфизм.*

Эти же утверждения справедливы для диаграмм групп, не обязательно абелевых.

Доказательство. Ясно, что (i) вытекает из (ii) и (iii). Для доказательства (ii) возьмем элемент $b \in \mathrm{Ker}\,\beta$. Правый квадрат коммутативен, поэтому $\gamma\sigma b = \sigma'\beta b = 0$. Поскольку γ — мономорфизм, верно, что $\sigma b = 0$. Ввиду точности верхней строки существует такой элемент a, что $\varkappa a = b$. Теперь $\varkappa'\alpha a = \beta\varkappa a = \beta b = 0$, поскольку левый квадрат коммутативен. Нижняя строка точна в A', и поэтому $\alpha a = 0$. Но α — мономорфизм, и поэтому $a = 0$, откуда $b = \varkappa a = 0$. Тем самым доказано, что β — мономорфизм.

Для доказательства (iii) рассмотрим элемент b' из B'. Поскольку γ — эпиморфизм, существует такой элемент $c \in C$, что $\gamma c = \sigma' b'$; поскольку верхняя строка точна, существует такой элемент $b \in B$, что $\sigma b = c$. Тогда $\sigma' (\beta b - b') = 0$ в C'. Ввиду точности нижней строки $\beta b - b' = \varkappa' a'$ для некоторого элемента $a' \in A'$. Поскольку α — эпиморфизм, $\alpha a = a'$ для некоторого элемента $a \in A$, следовательно, $\beta\varkappa a = \varkappa'\alpha a = \beta b - b'$. Отсюда $b' = \beta (b - \varkappa a)$, что и требовалось доказать.

Подобный тип доказательств называется «диаграммным поиском». Можно заметить, что этот «поиск» оказывается успешным и в том случае, когда рассматриваемые группы неабелевы.

Тот же метод позволяет читателю убедиться в справедливости следующих более общих результатов (сформулированных Дж. Лейхтом):

Л е м м а 3.2. (*Сильная лемма о четырех гомоморфизмах.*) *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot & \xrightarrow{\xi} & \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot & \xrightarrow{\eta} & \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array} \tag{3.2}$$

строки точны, τ — эпиморфизм, а ν — мономорфизм. Тогда

$$\operatorname{Ker}\beta = \xi(\operatorname{Ker}\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = \eta^{-1}(\operatorname{Im}\beta).$$

В этой диаграмме точки обозначают модули или группы (не обязательно абелевы).

В упрощенной формулировке (слабая лемма о четырех гомоморфизмах) утверждается, что в той же самой коммутативной диаграмме β — мономорфизм, если α и ν — мономорфизмы, а τ — эпиморфизм и α — эпиморфизм, если τ и β — эпиморфизмы, а ν — мономорфизм. Наиболее часто используется такое следствие.

Л е м м а 3.3. (*Лемма о пяти гомоморфизмах.*) *Пусть дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_5} \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array} \tag{3.3}$$

с точными строками. Если α_1, α_2, α_4, α_5 — изоморфизмы, то и α_3 — изоморфизм. Более полно:

(i) *если α_1 — эпиморфизм и α_2, α_4 — мономорфизмы, то и α_3 — мономорфизм;*

(ii) *если α_5 — мономорфизм и α_2, α_4 — эпиморфизмы, то и α_3 — эпиморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применить диаграммный поиск или лемму 3.2 к первым трем квадратам слева и к первым четырем квадратам справа.

§ 4. Прямые суммы

Внешняя прямая сумма $A_1 \oplus A_2$ двух R-модулей A_1 и A_2 является R-модулем, состоящим из всех упорядоченных пар (a_1, a_2), где $a_i \in A_i$, в котором модульные операции определены следующим образом:

$$(a_1, a_2) + (a_1', a_2') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2'), \quad r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2).$$

Отображения ι и π, заданные формулами $\iota_1 a_1 = (a_1, 0)$, $\iota_2 a_2 = (0, a_2)$, $\pi_1(a_1, a_2) = a_1$, $\pi_2(a_1, a_2) = a_2$, являются гомоморфизмами

$$A_1 \underset{\pi_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} A_1 \oplus A_2 \underset{\pi_2}{\overset{\iota_2}{\leftrightarrows}} A_2, \tag{4.1}$$

которые удовлетворяют равенствам

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_1\iota_1 = 1_{A_1}, & \pi_1\iota_2 = 0, \\ \pi_2\iota_1 = 0, & \pi_2\iota_2 = 1_{A_2}, \\ \iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1_{A_1 \oplus A_2}. & \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Назовем ι_1 и ι_2 *вложениями*, а π_1 и π_2 — *проекциями* прямой суммы. Диаграмма (4.1) включает частичные диаграммы:

Инъективную диаграмму прямой суммы $A \xrightarrow{\iota_1} A_1 \oplus A_2 \xleftarrow{\iota_2} A_2$;

Проективную диаграмму прямой суммы $A_1 \xleftarrow{\pi_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2$;

Одностороннюю диаграмму прямой суммы $A_1 \underset{\pi_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} A_1 \oplus A_2$;

Диаграмму последовательности прямой суммы $A_1 \xrightarrow{\iota_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2$;

в частности, последняя диаграмма есть короткая точная последовательность. Вместо данного выше определения прямой суммы, использующего элементы, можно охарактеризовать каждую из указанных диаграмм подходящими свойствами. Имея в виду последующие обобщения (гл. IX), мы при доказательстве этих свойств используем только диаграмму (4.1), равенства (4.2) и формальные свойства сложения и умножения гомоморфизмов; в частности, используются дистрибутивные законы

$$\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2 \quad \text{и} \quad (\alpha_1 + \alpha_2)\gamma = \alpha_1\gamma + \alpha_2\gamma.$$

Предложение 4.1. *Для данных модулей A_1 и A_2 любая диаграмма*

$$A_1 \underset{\pi_1'}{\overset{\iota_1'}{\rightleftarrows}} B \underset{\pi_2'}{\overset{\iota_2'}{\leftrightarrows}} A_2$$

вида (4.1), *для отображений которой выполнены пять равенств, аналогичных равенствам* (4.2), *изоморфна диаграмме прямой суммы. Более точно, существует такой единственный изоморфизм* $\theta: B \to A_1 \oplus A_2$, *что*

$$\pi_j\theta = \pi_j', \quad \theta\iota_j' = \iota_j, \quad j = 1,\ 2. \tag{4.3}$$

Доказательство. Определим θ равенством $\theta = \iota_1\pi_1' + \iota_2\pi_2'$ и аналогично $\theta': A_1 \oplus A_2 \to B$ равенством $\theta' = \iota_1'\pi_1 + \iota_2'\pi_2$. Из равенств (4.2) вытекает, что θ' является двусторонним обратным для θ и, следовательно, θ — изоморфизм. Свойства (4.3) следуют непосредственно из (4.2). Значит, если θ удовлетворяет (4.3), то $\theta = (\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2)\,\theta = \iota_1\pi_1' + \iota_2\pi_2'$, так что изоморфизм θ действительно однозначно определен.

Теперь мы охарактеризуем одностороннюю диаграмму прямой суммы.

Предложение 4.2. *Любая диаграмма* $A_2 \xrightarrow{\iota''} B \xrightarrow{\pi''} A_2$, *в которой* $\pi''\iota'' = 1_{A_2}$, *изоморфна «односторонней» диаграмме прямой суммы* $A_1 \oplus A_2 \rightleftarrows A_2$, *где* $A_1 = \operatorname{Ker} \pi''$.

Для доказательства требуется построить изоморфизм $\theta: B \to A_1 \oplus A_2$, удовлетворяющий равенствам $\theta\iota'' = \iota_2$, $\pi_2\theta = \pi''$. Определим θ равенством $\theta b = (b - \iota''\pi''b,\ \pi''b)$ и θ^{-1} равенством $\theta^{-1}(a_1, a_2) = a_1 + \iota''a_2$.

Чтобы доказать это предложение без использования элементов модулей, рассмотрим диаграмму

$$\operatorname{Ker}\pi'' \xrightarrow{\iota'} B \underset{\pi''}{\overset{\iota''}{\leftrightarrows}} A_2,$$

в которой ι' — вложение. Поскольку $\pi''(1_B - \iota''\pi'') = 0$, то $1_B - \iota''\pi''$ представимо в виде $1_B - \iota''\pi'' = \iota'\pi'$ для некоторого $\pi': B \to \operatorname{Ker}\pi''$. Теперь $\pi''\iota' = 0$ и $\iota'\pi'\iota' = \iota'$, откуда $\pi'\iota' = 1$. Следовательно, получены равенства, аналогичные равенствам (4.2), и можно применить предложение 4.1.

Опишем теперь прямую сумму как короткую точную последовательность (ι_1, π_2). В этом случае ι_2 — правый обратный к π_2, а π_1 — левый обратный к ι_1.

Предложение 4.3. *Следующие свойства короткой точной последовательности* $(\iota', \pi''): A_1 \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A_2$ *эквивалентны:*

(i) *для* π'' *существует правый обратный* $\iota'': A_2 \to B$, *т. е.* $\pi''\iota'' = 1$;

(ii) *для* ι' *существует левый обратный* $\pi': B \to A_1$, *т. е.* $\pi'\iota' = 1$;

(iii) *данная последовательность изоморфна последовательности*

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\iota_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0,$$

причем A_1 и A_2 отображаются в A_1 и A_2 соответственно тождественным образом.

Говорят, что короткая точная последовательность, обладающая одним из этих свойств (а значит, и всеми) *расщепляется* (некоторые авторы говорят, что последовательность несущественна).

Доказательство. Сразу заметим, что из утверждения (iii) следуют утверждения (i) и (ii). Обратно, из точности последовательности вытекает, что ι' индуцирует изоморфизм $A_1 \cong \operatorname{Ker}\pi''$, так что из (i) следует (iii) ввиду предложения 4.2. Аналогично из (ii) следует (iii).

Теперь рассмотрим пары *котерминальных* гомоморфизмов α_1, α_2, образующих диаграмму вида

$$D: A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B \xleftarrow{\alpha_2} A_2. \tag{4.4}$$

Говорят, что эта диаграмма *универсальна* относительно A_1 и A_2, если для любой диаграммы D': $A_1 \to B' \leftarrow A_2$ с теми же модулями на концах существует единственный гомоморфизм D в D', тождественный на каждом A_j. Другими словами, D универсальна, если в каждую прямоугольную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, dashed, "\beta"] & A_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, equal] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1'"] & B' & A_2 \arrow[l, "\alpha_2'"'] \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

с D в качестве первой строки и тождественными отображениями по крайним вертикалям можно вставить единственным образом среднюю стрелку так, что вся диаграмма станет коммутативной ($\beta\alpha_1 = \alpha_1'$, $\beta\alpha_2 = \alpha_2'$).

Предложение 4.4. (*Инъективная*) *диаграмма прямой суммы* $A_1 \to A_1 \oplus A_2 \leftarrow A_2$ *универсальна относительно A_1 и A_2. Обратно, любая диаграмма* (4.4), *универсальная относительно A_j, изоморфна этой диаграмме прямой суммы* (*причем в этом изоморфизме диаграмм при A_1 и A_2 стоят тождественные отображения*).

Доказательство. Для доказательства универсальности $A_1 \oplus A_2$ определим гомоморфизм β, требуемый в диаграмме (4.5), равенством $\beta(a_1, a_2) = \alpha_1' a_1 + \alpha_2' a_2$, т. е. $\beta = \alpha_1'\pi_1 + \alpha_2'\pi_2$; это является единственной возможностью для определения β. Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно установить, что любые две универсальные относительно A_1 и A_2 диаграммы изоморфны (причем в этом изоморфизме на концах стоят единицы). Предположим, что обе строки в диаграмме (4.5) универсальны. Поскольку верхняя строка универсальна, существует гомоморфизм $\beta : B \to B'$ такой, что $\beta\alpha_j = \alpha_j'$; поскольку нижняя строка универсальна, существует такой гомоморфизм $\beta' : B' \to B$, что $\beta'\alpha_j' = \alpha_j$. Тогда $(\beta'\beta)\alpha_j = \alpha_j$, $j = 1, 2$. Но $1_B\alpha_j = \alpha_j$, откуда в силу свойства единственности для верхней строки $\beta'\beta = 1_B$. Аналогично свойство единственности для нижней строки дает $1_{B'} = \beta\beta'$. Следовательно, β и β' — взаимно обратные изоморфизмы, что и требовалось доказать.

Поскольку универсальная диаграмма единственна с точностью до изоморфизма, отображения α_j в любой универсальной диаграмме относительно A_1 и A_2 являются мономорфизмами, так как они мономорфизмы в диаграмме внешней прямой суммы.

Заметим, что вторая половина доказательства этого предложения не использует элементов модулей, а использует только формальные заключения о гомоморфизмах. Поэтому это доказательство справедливо в любой категории; смысл этого понятия скоро будет разъяснен (§ 7).

Двойственно, пара *коинициальных* отображений, образующая диаграмму D: $A_1 \leftarrow C \to A_2$, *коуниверсальна* относительно A_1 и A_2, если для каждой прямоугольной диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, equal] & C \arrow[l, "\gamma_1"'] \arrow[r, "\gamma_2"] & A_2 \arrow[d, equal] \\ A_1 & C' \arrow[l, "\gamma_1'"] \arrow[r, "\gamma_2'"'] \arrow[u, dashed] & A_2 \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

с D в качестве первой строки и единицами для A_j в качестве вертикальных отображений имеется единственный способ построения среднего гомоморфизма, отмеченного пунктирной стрелкой, который делает диаграмму коммутативной. Читателю предлагается доказать

Предложение 4.5. *Диаграмма прямой суммы*

$$A_1 \xleftarrow{\pi_1} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2$$

коуниверсальна относительно A_1 и A_2. Обратно, любая коуниверсальная диаграмма относительно A_1 и A_2 изоморфна указанной диаграмме (причем в этом изоморфизме крайние отображения — единицы).

Прямые суммы более чем двух модулей строятся аналогично. Например, элементы прямой суммы $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ могут рассматриваться как упорядоченные тройки (a_1, a_2, a_3) или как функции множества индексов $\{1, 2, 3\}$ с $a(i) \in A_i$. Вообще для произвольного семейства модулей $\{A_t\}$, отмеченных элементами множества T, *декартовым произведением* [1] $\prod_t A_t$ считается множество всех таких функций f, определенных на множестве T со значениями в объединении множеств A_t, для которых $f(t) \in A_t$ для каждого t. Определим модульные операции «покомпонентно», т. е. определим функции $f + f'$ и rf для $r \in R$ посредством равенств

$$(f + f')(t) = f(t) + f'(t), \quad (rf)(t) = r(f(t)), \quad t \in T.$$

Тогда $\prod_t A_t$ будет R-модулем. Гомоморфизмы $\pi_t : \prod_t A_t \to A_t$, определенные равенствами $\pi_t f = f(t)$, называются *проекциями* декартова произведения.

Для данных модулей A_t рассмотрим диаграмму $\{\gamma_t : B \to A_t\}$ с дополнительным модулем B и гомоморфизмами γ_t, заданными по одному для каждого $t \in T$. Эта диаграмма *коуниверсальна* относительно всех A_t, если для каждой диаграммы $\{\gamma_t' : B' \to A_t \mid t \in T\}$ существует единственный гомоморфизм $\beta : B' \to B$, удовлетворяющий равенствам $\gamma_t' = \gamma_t\beta$ для всех t. Проекции полного прямого произведения $\prod_t A_t$ образуют такую коуниверсальную диаграмму, и, как прежде, две такие диаграммы изоморфны.

8 *Внешняя прямая сумма* $\sum_t A_t$ тех же модулей A_t будет подмодулем модуля $\prod_t A_t$, состоящим из всех функций f, принимающих только конечное число ненулевых значений. Гомоморфизмы $\iota_t : A_t \to \sum_t A_t$ определяются сопоставлением каждому элементу $a \in A_t$ функции $\iota_t(a)$, заданной на T следующим образом: $[\iota_t(a)](t) = a$, $[\iota_t(a)](s) = 0$ при $s \neq t$. Эти гомоморфизмы называются *вложениями* прямой суммы. Как и в случае двух слагаемых, диаграмма $\{\iota_t : A_t \to \sum_t A_t\}$ универсальна относительно данных модулей A_t и определена этим свойством однозначно с точностью до изоморфизма.

Для *конечного* числа слагаемых внешняя прямая сумма совпадает с полным прямым произведением. Поэтому любая конечная универсальная диаграмма $\alpha_j : A_j \to B$, $j = 1, \ldots, n$, порождает коуниверсальную диаграмму $\{\gamma_j : B \to A_j\}$. Более точно, каждый гомоморфизм γ_j является отображением, однозначно определенным (поскольку B универсальна) условиями $\gamma_j\alpha_j = 1_{A_j}$, $\gamma_j\alpha_k = 0$ при

[1] В советской литературе принят термин "полное прямое произведение". Этот термин будет использоваться в дальнейшем наряду с терминологией автора. — *Прим. перев.*

$j \neq k$. Двойственно, из каждой коуниверсальной диаграммы читателем может быть получена универсальная диаграмма.

Прямые суммы могут быть описаны в терминах подмодулей. Если S_t — некоторое семейство подмодулей модуля B, индексы которого — элементы множества T, то их *объединение* $\bigcup S_t$ определяется как множество всех конечных сумм вида $s_1 + \ldots + s_n$, где каждое s_j взято из некоторого S_t. Это множество является подмодулем модуля B, включающим все S_t и содержащимся в любом другом подмодуле, содержащем все подмодули S_t. *Пересечение* $\bigcap S_t$ определяется как пересечение множеств S_t; это множество является подмодулем модуля B, содержащимся в любом подмодуле S_t и включающим в себя любой подмодуль с тем же свойством. Мы будем также писать $S_1 \bigcup S_2$ или $S_1 \bigcap S_2$ для объединения или пересечения двух подмодулей S_1, S_2.

Предложение 4.6. *Для подмодулей $S_t \subset B$, $t \in T$, следующие условия эквивалентны:*

(i) *диаграмма $\{j_t : S_t \to B\}$, где j_t — вложение, универсальна относительно всех S_t;*

(ii) $B = \bigcup S_t$, *и* $S_{t_0} \bigcap (\bigcup_{t \neq t_0} S_t) = 0$ *для каждого* $t_0 \in T$.

Доказательство. Если выполнено условие (i), то модуль B изоморфен прямой сумме $\sum S_t$, удовлетворяющей условию (ii). Обратно, если выполнено условие (ii), то ввиду равенства $B = \bigcup S_t$ каждый элемент $b \neq 0$ может быть записан как конечная сумма $b = s_1 + \ldots + s_n$ элементов $s_i \neq 0$, принадлежащих различным подмодулям S_{t_i}, $i = 1, \ldots, n$; вторая часть условия (ii) обеспечивает единственность подобного представления. Для любой другой диаграммы $\{\alpha_t : S_t \to B'\}$ гомоморфизм $\beta : B \to B'$, определенный формулой $\beta(s_1 + \ldots + s_n) = \alpha_{t_1}s_1 + \ldots + \alpha_{t_n}s_n$, является единственным гомоморфизмом, удовлетворяющим равенствам $\beta j_t = \alpha_t$; отсюда вытекает универсальность диаграммы $\{j_t : S_t \to B\}$.

При выполнении указанных условий модуль B называется *внутренней прямой суммой* своих подмодулей S_t. Следовательно, внутренняя прямая сумма изоморфна внешней прямой сумме $\sum S_t$. В частности, B является внутренней прямой суммой двух подмодулей S_1 и S_2 тогда и только тогда, когда $S_1 \bigcap S_2 = 0$ и $S_1 \bigcup S_2 = B$; из этих условий вытекает изоморфизм $B \cong S_1 \oplus S_2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что диаграмма (4.1), в которой $\pi_1\iota_1 = 1$, $\pi_2\iota_2 = 1$, $\pi_1\iota_2 = 0$ и пара (ι_1, π_2) точна, является диаграммой прямой суммы.

2. Если эндоморфизм $\alpha : A \to A$ удовлетворяет равенству $\alpha^2 = \alpha$, то A есть прямая сумма подмодулей $\operatorname{Ker} \alpha$ и $\operatorname{Im} \alpha$.

3. Показать, что диаграмма $\{\alpha_t : A_t \to B,\ t \in T\}$ универсальна относительно данных модулей A_t тогда и только тогда, когда (i) модуль B есть объединение подмодулей $\alpha_t A_t$ и когда (ii) существуют такие гомоморфизмы $\pi_t : B \to A_t$, $t \in T$, что $\pi_t\alpha_t = 1$ и $\pi_s\alpha_t = 0$ при $s \neq t$.

4. Сформулировать и доказать предложение, двойственное предложению 4.6. (Двойственным к понятию подмодуля является понятие фактормодуля.)

5. Пусть заданы гомоморфизмы $\alpha_{ij} : A_i \to A'_j$, $i, j = 1, 2$. Показать, что существует единственный гомоморфизм $\omega : A_1 \oplus A_2 \to A'_1 \oplus A'_2$, удовлетворяющий равенствам $\pi'_j\omega\iota_i = \alpha_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

§ 5. Свободные и проективные модули

Кольцо R как левый R-модуль имеет следующее характеристическое свойство. Если a — произвольный элемент R-модуля A, то существует единственный R-модульный гомоморфизм $\mu_a : R \to A$, обладающий свойством $\mu_a(1) = a$; именно, отображение μ_a определяется формулой $\mu_a(r) = ra$.

Свободный левый R-модуль — это прямая сумма некоторого семейства R-модулей, каждый из которых изоморфен R-модулю R. Принимая во внимание указанное выше свойство модуля R, мы можем сказать более точно, что левый R-модуль F *свободен относительно подмножества* T своих элементов, если гомоморфизмы $\mu_t : R \to F$, определенные для каждого $t \in T$ равенством $\mu_t(r) = rt$, образуют универсальную диаграмму относительно R. Поскольку каждый гомоморфизм $\nu : R \to A$ однозначно определяется элементом $\nu(1) \in A$, свойство универсальности может быть сформулировано в виде следующего предложения.

Предложение 5.1. *Модуль F является свободным относительно подмножества $T \subset F$ в том и только в том случае, когда для любого модуля A и любого отображения g множества T в A существует такой единственный модульный гомоморфизм $\mu : F \to A$, что $\mu(t) = g(t)$ для каждого $t \in T$.*

Ввиду изоморфизма между внешними и внутренними прямыми суммами справедливо

Предложение 5.2. *Модуль F тогда и только тогда свободен относительно подмножества $T \subset F$, когда каждый элемент из F может быть единственным образом представлен в виде суммы $\Sigma r_t t$ с коэффициентами $r_t \in R$, которые почти все равны нулю (т. е. равны нулю все, кроме конечного числа).*

Модуль F, свободный относительно множества T, определяется множеством T с точностью до изоморфизма. При заданных кольце R и множестве T мы можем построить R-модуль, свободный относительно T, как прямую сумму $F = \Sigma_t Rt$, где Rt есть множество всех одночленов rt, $r \in R$, с очевидной модульной структурой.

Левый модуль A *порожден* подмножеством U своих элементов, если A является единственным своим подмодулем, содержащим все элементы $u \in U$, т. е. если каждый элемент из A записывается в виде конечной суммы $\Sigma r_i u_i$ с коэффициентами $r_i \in R$. Модуль, свободный относительно T, порожден T.

Предложение 5.3. *Каждый R-модуль изоморфен фактормодулю свободного модуля.*

Доказательство. В данном модуле A выберем подмножество U, порождающее A (например, положим $U = A$). Построим модуль F, свободный относительно множества U, и рассмотрим такой гомоморфизм $\mu : F \to A$, что $\mu(u) = u \in A$. Поскольку множество U порождает модуль A, то μ — эпиморфизм и поэтому $A \cong F/(\operatorname{Ker} \mu)$.

Модуль A *конечно порожден* (или *конечного типа*), если он порождается конечным подмножеством, т. е. если он изоморфен фактормодулю конечной прямой суммы $R \oplus \ldots \oplus R$. Модуль C *циклический*, если он порождается одним элементом; в этом случае $C \cong R/L$, где L — подмодуль модуля R (т. е. L — левый идеал в R). Основная теорема теории элементарных делителей утверждает, что всякий конечно порожденный модуль изоморфен прямой сумме циклических модулей, если R является коммутативной областью целостности, в которой каждый идеал главный (т. е. циклический). В частности ($R = Z$), каждая конечно порожденная абелева группа есть прямая сумма циклических групп.

Модуль P называется *проективным*, если каждую диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, "\sigma"'] & C \end{tikzcd} \qquad (5.1)$$

с эпиморфизмом σ можно сделать коммутативной, пополнив ее отображением, указанным пунктирной стрелкой. Другими словами, при заданном эпиморфизме $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ для каждого отображения $\gamma : P \to C$ найдется гомоморфизм $\beta : P \to B$, такой, что $\sigma\beta = \gamma$, т. е. любой гомоморфизм γ можно *провести* через σ.

Лемма 5.4. *Каждый свободный модуль проективен.*

Доказательство. Пусть F — свободный модуль со свободными образующими t. Поскольку $\sigma B = C$, можно выбрать для каждого t такой элемент $b_t \in B$, что $\sigma b_t = \gamma t$. Тогда единственный гомоморфизм $\beta : F \to B$, определяемый равенствами $\beta t = b_t$ для каждого t, является искомым.

В дальнейшем проективные модули будут постоянно использоваться. Отметим, что проективный модуль может не быть свободным. Например, если в качестве кольца R взять прямую сумму двух экземпляров кольца Z целых чисел, $R = Z \oplus Z$ (с умножением, определенным формулой $(m, n)(m', n') = (mm', nn')$), то первое слагаемое Z как подмодуль R-модуля является R-модулем. Этот R-модуль, очевидно, не является свободным, однако он проективен, что вытекает из следующего предложения:

Предложение 5.5. *R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного R-модуля.*

Доказательство. Предположим сначала, что модуль P есть прямое слагаемое свободного модуля $F = P \oplus Q$ и $\pi : F \to P$ есть соответствующая проекция. Если дана диаграмма (5.1), то отображение $\gamma\pi : F \to C$ можно представить в виде $\sigma\beta = \gamma\pi$, где $\beta : F \to B$. Умножив это равенство на вложение $\iota : P \to P \oplus Q$, получим $\sigma(\beta\iota) = \gamma\pi\iota = \gamma$, откуда следует, что модуль P проективен.

Обратно, пусть P проективен. В силу предложения 5.3 существует эпиморфизм $\rho : F \to P$, где модуль F свободен. Гомоморфизм $1_P : P \to P$ можно представить в виде $\rho\beta = 1$, $\beta : P \to F$. Из предложения 4.2 вытекает, что модуль F есть прямая сумма подмодулей $\beta P \cong P$ и $\operatorname{Ker} \rho$.

Любая подгруппа свободной абелевой группы свободна; следовательно, всякий проективный Z-модуль свободен.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что прямое слагаемое проективного модуля проективно.
2. Показать, что модуль Z_m проективен (но не свободен) над кольцом Z_{mn} вычетов по модулю mn, если m и n взаимно просты.
3. Доказать, что произвольная прямая сумма проективных модулей проективна.

§ 6. Функтор Hom

Пусть A и B некоторые R-модули. Множество

$$\operatorname{Hom}_R(A, B) = \{f \mid f : A \to B\}$$

всех R-модульных гомоморфизмов f модуля A в модуль B является абелевой группой относительно сложения, определенного равенством $(f + g)\,a = fa + ga$ для любых гомоморфизмов $f, g : A \to B$. Если $A = B$, то $\operatorname{Hom}_R(A, A)$ является кольцом относительно указанного сложения и умножения гомоморфизмов; это кольцо называется *кольцом R-эндоморфизмов* модуля A. В том случае, когда кольцо R коммутативно, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ может рассматриваться не только как группа, но и как R-модуль, если гомоморфизм $tf: A \to B$, $t \in R$, $f: A \to B$ определить так: $(tf)\,a = t\,(fa)$ для любого элемента $a \in A$. То, что tf действительно R-модульный гомоморфизм, следует из равенств

$$(tf)(ra) = t(fra) = tr(fa) = rt(fa) = r[(tf)a],$$

в которых использована коммутативность кольца R.

Группа Hom встречается часто. Когда R — поле, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ является векторным пространством всех линейных преобразований векторного пространства A в векторное пространство B. Если G — абелева группа, а P — факторгруппа аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел, обе рассматриваемые как Z-модули, то $\mathrm{Hom}_Z(G, P)$ — группа характеров группы G. Если $\varphi: R \to \mathrm{Hom}_Z(G, G)$ — кольцевой гомоморфизм, то абелева группа G становится R-модулем относительно левого умножения $rg = \varphi(r)\,g$. Все левые R-модули могут быть получены таким образом из разных групп G и гомоморфизмов φ.

Рассмотрим действие фиксированного модульного гомоморфизма $\beta: B \to B'$ на $\mathrm{Hom}_R(A, B)$. Для каждого $f: A \to B$ определено произведение $\beta f: A \to B'$, причем $\beta(f+g) = \beta f + \beta g$. Поэтому соответствие $f \to \beta f$ является гомоморфизмом

$$\beta_*: \mathrm{Hom}_R(A, B) \to \mathrm{Hom}_R(A, B') \tag{6.1}$$

абелевых групп, называемым гомоморфизмом, «индуцированным» β. Более точно, $\beta_* f = \beta \circ f$. Если β — тождественный гомоморфизм, то и β_* тождественно; если β разлагается в произведение, то и β_* есть соответствующее произведение. Точнее,

$$(1_B)_* = 1_{\mathrm{Hom}(A,\,B)}, \quad (\beta\beta')_* = \beta_*\beta'_*, \tag{6.2}$$

причем последнее равенство имеет место всякий раз, когда определено произведение $\beta\beta'$. Можно объединить (6.1) и (6.2) в следующем утверждении: $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ есть «ковариантный функтор» по аргументу B (общее определение дано в § 8).

Для первого аргумента A изменяется направление индуцированного гомоморфизма. При фиксированном модульном гомоморфизме $\alpha: A \to A'$ для каждого $f': A' \to B$ определено произведение $f'\alpha: A \to B$, причем $(f' + g')\,\alpha = f'\alpha + g'\alpha$. Следовательно, отображение $\alpha^* f' = f'\alpha$ задает «индуцированный» гомоморфизм

$$\alpha^*: \mathrm{Hom}_R(A', B) \to \mathrm{Hom}_R(A, B) \tag{6.3}$$

абелевых групп. Вновь $(1_A)^*$ — тождественное отображение. Если $\alpha: A \to A'$, $\alpha': A' \to A''$, то определено произведение $\alpha'\alpha$ и индуцируются отображения

$$\mathrm{Hom}_R(A'', B) \xrightarrow{\alpha'^*} \mathrm{Hom}_R(A', B) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(A, B);$$

можно показать, что $\alpha^*\alpha'^* = (\alpha'\alpha)^*$. Это обращение порядка множителей обобщает тот факт, что транспонированная матрица произведения двух матриц является произведением транспонированных матриц сомножителей в *обратном* порядке. Ввиду изменения порядка в произведении, мы будем говорить, что $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ при фиксированном модуле B является *контравариантным* функтором по аргументу A.

Теперь будем менять и A, и B. При заданных $\alpha: A \to A'$ и $\beta: B \to B'$ для каждого $f: A' \to B$ определено произведение $\beta f \alpha: A \to B'$; соответствие $f \to \beta f \alpha$ является гомоморфизмом

$$\mathrm{Hom}(\alpha, \beta): \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Hom}(A, B')$$

абелевых групп, причем $\alpha^*\beta_* = \mathrm{Hom}(\alpha, \beta) = \beta_*\alpha^*$. Этот гомоморфизм обладает свойствами:

$$\mathrm{Hom}(1, 1') = \text{тождественное отображение};$$
$$\mathrm{Hom}(\alpha\alpha', \beta\beta') = \mathrm{Hom}(\alpha', \beta)\,\mathrm{Hom}(\alpha, \beta');$$

последнее имеет место всякий раз, когда определены произведения $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$. Мы будем говорить, что Hom является функтором от двух аргументов, контравариантным по первому аргументу и ковариантным по второму, из категорий R-модулей в категорию групп.

Если $\alpha_1, \alpha_2: A \to A'$ суть два гомоморфизма, то можно показать, что

$$\mathrm{Hom}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \mathrm{Hom}(\alpha_1, \beta) + \mathrm{Hom}(\alpha_2, \beta). \tag{6.4}$$

Аналогично $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = \mathrm{Hom}(\alpha, \beta_1) + \mathrm{Hom}(\alpha, \beta_2)$. Эти два свойства означают, что Hom —«аддитивный» функтор.

При фиксированном B применим $\mathrm{Hom}(—, B)$ к диаграмме прямой суммы (4.1). В результате

$$\mathrm{Hom}(A_1, B) \underset{\pi_1^*}{\overset{\iota_1^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(A_1 \oplus A_2, B) \underset{\pi_2^*}{\overset{\iota_2^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(A_2, B)$$

вложения ι_j перейдут в проекции ι_j^*, но ввиду (6.4) по-прежнему выполняются равенства (4.2) для диаграммы прямой суммы. Аналогично при фиксированном A диаграмма прямой суммы модулей B_1 и B_2 переходит при применении $\mathrm{Hom}(A, —)$ в диаграмму прямой суммы (причем вложение перейдет во вложение). Таким образом

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}(A_1 \oplus A_2, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(A_2, B),\\ \mathrm{Hom}(A, B_1 \oplus B_2) \cong \mathrm{Hom}(A, B_1) \oplus \mathrm{Hom}(A, B_2).\end{gathered} \tag{6.5}$$

В частности, точна такая последовательность $\mathrm{Hom}(A, B_1) \rightarrowtail \mathrm{Hom}(A, B_1 \oplus B_2) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(A, B_2)$.

Теорема 6.1. *Для любого модуля D и любой последовательности $0 \to A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\beta} L$, точной в A и B, индуцированная последовательность абелевых групп*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(D, A) \xrightarrow{\varkappa_*} \mathrm{Hom}_R(D, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(D, L) \qquad (6.6)$$

точна.

Доказательство. Чтобы показать мономорфность $\varkappa_*$, рассмотрим такой гомоморфизм $f: D \to A$, что $\varkappa_* f = 0$. Для любого элемента $d \in D$, $\varkappa_* fd = \varkappa fd = 0$; поскольку $\varkappa$ — мономорфизм, то все $fd = 0$ и, значит, $f = 0$, т. е. $\varkappa_*$ — мономорфизм. Очевидно, что $\beta_* \varkappa_* = (\beta\varkappa)_* = 0_* = 0$, и поэтому $\mathrm{Im}\, \varkappa_* \subset \mathrm{Ker}\, \beta_*$. Для доказательства обратного включения рассмотрим такой гомоморфизм $g: D \to B$, что $\beta_* g = 0$. Тогда $\beta gd = 0$ для любого элемента d. Но $\mathrm{Ker}\, \beta = \varkappa A$ ввиду точности данной в условии последовательности, поэтому существует единственный элемент $a \in A$, для которого $\varkappa a = gd$. Отображение $fd = a$ определяет такой гомоморфизм $f: D \to A$, что $\varkappa_* f = g$. Следовательно, $\mathrm{Im} \varkappa_* \supset \mathrm{Ker}\, \beta_*$, чем и заканчивается доказательство точности последовательности (6.6).

Аналогичными рассуждениями читатель может доказать следующую теорему.

Теорема 6.2. *Если последовательность $M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ точна и D — произвольный модуль, то индуцированная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, D) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Hom}_R(B, D) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_R(M, D) \qquad (6.7)$$

точна.

Последовательность $M \to B \to C \to 0$, точная в B и C, называется короткой *точной справа* последовательностью. Последняя теорема утверждает, что функтор $\mathrm{Hom}_R(-, D)$ при фиксированном D переводит каждую короткую точную справа последовательность в короткую точную слева последовательность; по предыдущей теореме $\mathrm{Hom}_R(D, -)$ переводит короткую точную слева последовательность в короткую точную слева последовательность. Если $A \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C$ — короткая точная последовательность, то желательно иметь точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(D, A) \to \mathrm{Hom}_R(D, B) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{Hom}_R(D, C) \to ?, \quad (6.6')$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, D) \to \mathrm{Hom}_R(B, D) \to \mathrm{Hom}_R(A, D) \to ?. \quad (6.7')$$

В силу двух предыдущих теорем каждая из этих последовательностей точна, кроме, возможно, правого конца. Если вместо ? поставить 0, то, как правило, последовательности не будут точными. Например, точность последовательности (6.6′) в $\mathrm{Hom}_R(D, C)$ означала бы, что каждый гомоморфизм $h: D \to C$ представим в виде $h = \sigma h'$ при некотором $h': D \to B$, т. е. каждый гомоморфизм в фактормодуль $C = B/\varkappa A$ мог бы быть проведен через B (что было бы возможно при проективном модуле D). Чтобы убедиться в неверности этого утверждения, положим $R = Z$ и $D = Z_m$, циклической группе порядка m. Для короткой точной последовательности $Z \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Z_m$, в которой первый гомоморфизм $\varkappa$ задается умножением целых чисел на m, последовательность (6.6′) принимает вид $0 \to 0 \to 0 \to \mathrm{Hom}(Z_m, Z_m) \to 0$ и, очевидно, не является точной. Аналогично последовательность (6.7′) может не быть точной, если поставить 0 вместо ?, поскольку не всякий гомоморфизм $f: A \to D$ подмодуля $A \subset B$ может быть продолжен до гомоморфизма B в D. Можно описать объект, создающий «препятствие» для расширения указанного гомоморфизма f. Группа этих объектов, поставленная в (6.7′) вместо ?, восстанавливает точность последовательности. Эта конструкция, строящаяся одновременно для последовательностей (6.6′) и (6.7′), является одним из объектов изучения гомологической алгебры.

Теперь мы можем доказать несколько свойств, характеризующих проективные модули.

Теорема 6.3. *Следующие свойства модуля D эквивалентны:*
(i) *модуль D проективен;*
(ii) *для каждого эпиморфизма $\sigma: B \twoheadrightarrow C$ индуцированный гомоморфизм $\sigma_*: \mathrm{Hom}_R(D, B) \to \mathrm{Hom}_R(D, C)$ является эпиморфизмом;*
(iii) *если $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — короткая точная последовательность, то и последовательность $0 \to \mathrm{Hom}_R(D, A) \to \mathrm{Hom}_R(D, B) \to \mathrm{Hom}_R(D, C) \to 0$ точна;*
(iv) *каждая короткая точная последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow D$ расщепляема.*

Доказательство. Содержащееся в (ii) утверждение, что σ_* — эпиморфизм, означает, что каждый гомоморфизм $\gamma: D \to C$ может быть представлен в виде $\gamma = \sigma\beta$; это в точности и означает, что D — проективный модуль.

Ввиду точности последовательности (6.6) условие (ii) эквивалентно условию (iii). Наконец, если модуль D проективен и $\sigma: B \twoheadrightarrow D$, то отображение $1_D: D \to D$ можно представить в виде $1 = \sigma\beta$, где $\beta: D \to B$, поэтому последовательность из (iv) расщепляется. Обратно, пусть всякая короткая точная последовательность, оканчивающаяся модулем D, расщепляется. Представим D

как образ $\rho : F \twoheadrightarrow D$ некоторого свободного модуля F. Поскольку последовательность $\operatorname{Ker}\rho \rightarrowtail F \twoheadrightarrow D$ расщепляется, D является прямым слагаемым модуля F по предложению 4.2; в силу предложения 5.5 модуль D проективен.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Каждый левый идеал L кольца R есть R-модуль и последовательность $L \rightarrowtail R \twoheadrightarrow R/L$ точна. Предположим, что $L^2 \neq L$.

(i) Последовательность (6.6′) может не быть точной, если вместо ? поставить 0. Показать это для $D = R/L$, установив, что гомоморфизм $\operatorname{Hom}_R(R/L, R) \to \operatorname{Hom}_R(R/L, R/L)$ не является эпиморфизмом (1 не является образом!).

(ii) Последовательность (6.7′) может не быть точной, если вместо ? поставить 0. Показать это для $D = L$, установив, что гомоморфизм $\operatorname{Hom}_R(R, L) \to \operatorname{Hom}_R(L, L)$ не является эпиморфизмом (1 не является образом!).

2. Для произвольного множества индексов T установить изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_R(\Sigma_t A_t, B) \cong \Pi_t \operatorname{Hom}_R(A_t, B),$$

сопоставляя каждому отображению $f\colon \sum A_t \to B$ набор его ограничений $f_t\colon A_t \to B$.

3. Для произвольного множества T индексов установить изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_R(A, \Pi_t B_t) \cong \Pi_t \operatorname{Hom}_R(A, B_t).$$

§ 7. Категории

Категория состоит из «объектов» и «морфизмов», которые могут иногда «перемножаться». Формально, категория $\mathscr{C}$ — это *класс объектов* $A, B, C, \ldots$, вместе с

(i) семейством попарно непересекающихся множеств $\hom(A, B)$, причем каждой паре объектов отвечает единственное множество;

(ii) функцией, заданной для каждой тройки объектов A, B, C и сопоставляющей элементам $\alpha \in \hom(A, B)$ и $\beta \in \hom(B, C)$ элемент $\beta\alpha \in \hom(A, C)$;

(iii) функцией, сопоставляющей каждому объекту A элемент $1_A \in \hom(A, A)$.

При этом должны быть выполнены две аксиомы:

аксиома ассоциативности: если $\alpha \in \hom(A, B)$, $\beta \in \hom(B, C)$ и $\gamma \in \hom(C, D)$, то $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$;

аксиома единиц: если $\alpha \in \hom(A, B)$, то $\alpha 1_A = \alpha = 1_B\alpha$.

Если $\alpha \in \hom(A, B)$, то будем писать $\alpha : A \to B$ и называть α *морфизмом* категории $\mathscr{C}$ с *областью определения* A и *областью значений* B. Ввиду (ii) произведение $\beta\alpha$ определено тогда и только тогда, когда область значений морфизма α совпадает с областью определения морфизма β; произведение трех сомножителей $\gamma\beta\alpha$ ассоциативно, если оно определено. Назовем морфизм $\varkappa$ *единицей* категории $\mathscr{C}$, если $\varkappa\alpha = \alpha$ всякий раз, как произведение $\varkappa\alpha$ определено, и $\beta\varkappa = \beta$ всякий раз, как определено произведение $\beta\varkappa$. Каждый морфизм 1_A является единицей. Обратно, если $\varkappa$ единица, то $\varkappa\colon A \to A$ для некоторого объекта A и $\varkappa = \varkappa 1_A = 1_A$, т. е. каждая единица из $\mathscr{C}$ имеет вид 1_A для однозначно определенного объекта A. Другими словами, единицы категории $\mathscr{C}$ определяют объекты этой категории. Можно описать категорию просто как класс морфизмов с частично определенным умножением, удовлетворяющим подходящим аксиомам (см. упражнение 3 в конце этого параграфа).

Морфизм $\theta\colon A \to B$ называется *эквивалентностью* категории $\mathscr{C}$, если существует такой морфизм $\varphi\colon B \to A$, что $\varphi\theta = 1_A$ и $\theta\varphi = 1_B$. В этом случае φ однозначно определен: если $\varphi'\theta = 1_A$, то $\varphi = 1_A\varphi = \varphi'\theta\varphi = \varphi' 1_B = \varphi'$. Назовем φ *обратным*, $\varphi = \theta^{-1}$, к эквивалентности θ.

Произведение двух эквивалентностей, если оно определено, также является эквивалентностью.

(Мультипликативная) группа G есть категория с одним объектом G; можно считать, что $\hom(G, G)$ состоит из элементов группы G.

Если множество M замкнуто относительно ассоциативного умножения с единицей, то его также можно рассматривать как категорию с одним объектом и умножением, совпадающим с данным умножением.

Более типичным примером категории является категория ${}_R\mathscr{M}$ (левых) модулей над данным кольцом R. Объекты этой категории — это все R-модули $A, B, C, \ldots$, множество $\hom(A, B)$ морфизмов — это множество $\operatorname{Hom}_R(A, B)$ всех R-модульных гомоморфизмов из A в B, в то время как умножение — это обычное умножение гомоморфизмов. Аксиомы ассоциативности и существования единиц выполнены очевидным образом. В этой категории использован *класс* всех R-модулей. Мы не можем говорить о *множестве* всех R-модулей, потому что это множество является незаконной совокупностью при обычных аксиомах теории множеств. Если же принять аксиоматику теории множеств Гёделя — Бернайса — фон Неймана (Гёдель [1940]), то в нашем распоряжении оказываются бóльшие, чем множества, совокупности, называемые классами, и можно законно говорить о классе всех модулей или всех топологических пространств. Мы определили категорию как класс объектов, имея в виду эту интерпретацию. Назовем категорию *малой*, если класс ее объектов является множеством.

Чтобы привести другие примеры категорий, достаточно будет указывать объекты и морфизмы категорий; в большинстве случаев области определения и значений морфизмов, умножение и единицы будут иметь их обычный смысл. Мы приводим перечень тех примеров категорий, с которыми нам придется встретиться.

Категория топологических пространств. Объекты — все топологические пространства, морфизмы — все непрерывные отображения $f : X \to Y$ одного пространства в другое.

Категория абелевых групп. Объекты — все абелевы группы; морфизмы — все гомоморфизмы абелевых групп друг в друга.

Категория групп. Объекты — все (не обязательно абелевы) группы; морфизмы — все гомоморфизмы групп.

Категория множеств. Объекты — все множества, морфизмы — все отображения одного множества в другое.

В следующих примерах под R понимается фиксированное кольцо.

Категория точных последовательностей R-модулей длины n. Объекты — все точные последовательности $S : A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_n$, морфизмы $\Gamma : S \to S'$ — все такие наборы $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ модульных гомоморфизмов $\gamma_i : A_i \to A'_i$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \to & A_2 & \to \ldots \to & A_{n-1} & \to & A_n \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_{n-1} & & \downarrow \gamma_n \\ A'_1 & \to & A'_2 & \to \ldots \to & A'_{n-1} & \to & A'_n \end{array}$$

коммутативна. Если $\mathrm{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : S' \to S''$, то произведением $\mathrm{B}\Gamma$ считается набор $(\beta_1\gamma_1, \ldots, \beta_n\gamma_n)$.

Так же может быть построена категория бесконечных вправо или бесконечных влево точных последовательностей или же последовательностей, бесконечных в обе стороны. Другим примером является категория коротких точных последовательностей $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, морфизмами которой считаются все тройки (α, β, γ) модульных гомоморфизмов, делающие коммутативными диаграммы типа диаграммы (3.1). Теперь достаточно ясно, как много примеров может быть построено,— категория последовательностей точных последовательностей и т. д. до бесконечности.

Так же ясно, что многие понятия, применимые к модулям, могут быть применены к объектам любой категории — при условии, что определение этих понятий не использует элементов модулей, а относится к самим модулям и их гомоморфизмам. Так, в произвольной категории $\mathscr{C}$ диаграмма, состоящая из морфизмов $\alpha_t : A_t \to C$ из $\mathscr{C}$, заданных для каждого t из некоторого множества T, *универсальна* относительно данных объектов A_t (или является *диаграммой прямой суммы* для A_t), если для каждой диаграммы $\{\alpha'_t : A_t \to C' \mid t \in T\}$ с теми же объектами A_t существует в $\mathscr{C}$ такой единственный морфизм $\beta : C \to C'$, что $\beta\alpha_t = \alpha'_t$ для всех $t \in T$. (Для множества $T = \{1, 2\}$ эта формулировка в точности совпадает со свойством, указанным для диаграммы (4.5).) Доказательство единственности, проведенное раньше для прямой суммы двух модулей, дословно повторяется для доказательства следующего предложения.

Предложение 7.1. *Пусть $\{\alpha_t : A_t \to C\}$ и $\{\alpha'_t : A_t \to C'\}$ — две диаграммы прямой суммы одного и того же семейства объектов $\{A_t\}$ произвольной категории $\mathscr{C}$. Тогда в $\mathscr{C}$ существует такая единственная эквивалентность $\theta : C \to C'$, что $\theta\alpha_t = \alpha'_t$ для каждого* t.

Аналогичная теорема единственности справедлива для диаграммы прямого произведения, т. е. диаграммы $\{\gamma_t : B \to A_t \mid t \in T\}$ такой, что для любой другой диаграммы $\{\gamma'_t : B' \to A_t \mid t \in T\}$ существует единственный морфизм $\beta : B' \to B$, для которого $\gamma'_t = \gamma_t\beta$ для всех $t \in T$.

Определение прямого произведения строго параллельно определению прямой суммы, однако *направления всех стрелок изменены на противоположные.* Мы говорим, что прямое произведение «двойственно» прямой сумме. Вообще *двойственным* к некоторому утверждению $\mathfrak{S}$ (исчисления высказываний первого порядка) о категории $\mathscr{C}$ считается утверждение $\mathfrak{S}^*$, полученное из $\mathfrak{S}$ изменением направления всех морфизмов, заменой каждого произведения морфизмов $\alpha\beta$ на произведение $\beta\alpha$ и перестановкой области определения и области значений. Сразу же отметим, что двойственное утверждение к каждой аксиоме из определения категории также является аксиомой. Поэтому доказательство, двойственное к доказательству некоторого утверждения $\mathfrak{S}$ о категории $\mathscr{C}$, опирающемуся только на аксиомы, есть доказательство двойственного утверждения $\mathfrak{S}^*$. Например, предложение, двойственное к предложению 7.1, утверждает, что диаграмма прямого произведения относительно данных объектов единственна (с точностью до эквивалентности). Поскольку доказательство предложения 7.1 опиралось только на аксиомы категории, двойственное предложение справедливо без дополнительного доказательства. Однако может случиться, что предложение $\mathfrak{S}$, формулировка которого использует только объекты и морфизмы, справедливо в некоторой определенной категории, хотя двойственное утверждение неверно. Например, в категории всех счетных абелевых групп существует диаграмма прямой суммы счетного множества счетных групп $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, но не существует полного прямого произведения тех же групп (в сущности, потому, что полное прямое произведение этих групп, существующее в категории всех абелевых групп, несчетно).

Для каждой категории $\mathscr{C}$ можно построить *двойственную категорию* $\mathscr{C}^{op}$. В качестве объектов категории $\mathscr{C}^{op}$ возьмем класс, находящийся во взаимно однозначном соответствии $A^* \longleftrightarrow A$ с объектами A категории $\mathscr{C}$. В качестве морфизмов возьмем класс, находящийся во взаимно однозначном соответствии $\alpha^* \longleftrightarrow \alpha$ с морфизмами из $\mathscr{C}$. Дополнительно потребуем, чтобы $\alpha^* : A^* \to B^*$ тогда и только тогда, когда $\alpha : B \to A$, и чтобы произведение $\alpha^*\beta^*$ было определено и равнялось $(\beta\alpha)^*$ тогда и только тогда, когда определено произведение $\beta\alpha$. Тогда $\mathscr{C}^{op}$ будет категорией, и любое утверждение $\mathfrak{S}^*$ о категории $\mathscr{C}$ — это в точности то же самое, что и исходное утверждение $\mathfrak{S}$ о категории $\mathscr{C}^{op}$. Это обстоятельство вновь показывает, что утверждение, двойственное к доказуемому, доказуемо. Взаимно однозначное отображение $T: \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$, $T(A) = A^*$, $T(\alpha) = \alpha^*$, является «антиизоморфизмом», поскольку $T(\beta\alpha) = T(\alpha)\,T(\beta)$.

Впоследствии мы определим специальный класс категорий, называемых «абелевыми категориями», потребовав по существу, чтобы множество $\hom(A, B)$ было абелевой группой и чтобы существовали ядра и коядра, как в случае категорий модулей. Оказывается, что многие теоремы о модулях остаются верными, если модули и их гомоморфизмы заменить объектами и морфизмами произвольной абелевой категории. Интересующийся читатель может сразу перейти к гл. IX и XII.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что в категории топологических пространств непересекающееся объединение двух пространств дает диаграмму прямой суммы и что декартово произведение $X \times Y$ двух пространств с обычной топологией и естественными проекциями на X и Y дает диаграмму прямого произведения.

2. Показать, что для любых двух объектов в категории групп существует диаграмма прямой суммы и диаграмма прямого произведения.

Замечание. «Прямая сумма» не обязательно абелевых групп более известна как их «свободное произведение».

3. Рассмотрим класс $\mathscr{M}$ элементов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ с частично определенным умножением $\beta\alpha \in \mathscr{M}$. Назовем элемент $\varkappa$ единицей в $\mathscr{M}$, если $\varkappa\beta = \beta$ и $\alpha\varkappa = \alpha$ всякий раз, как определены произведения $\varkappa\beta$ и $\alpha\varkappa$. Тогда $\mathscr{M}$ называется *абстрактной категорией*, если выполнены следующие аксиомы.

(i) Произведение $\gamma(\beta\alpha)$ определено тогда и только тогда, когда определено произведение $(\gamma\beta)\alpha$. Если эти произведения существуют, то они равны. Это произведение трех множителей будет записываться как $\gamma\beta\alpha$.

(ii) Произведение $\gamma\beta\alpha$ определено всякий раз, как определены оба произведения $\gamma\beta$ и $\beta\alpha$.

(iii) Для каждого элемента $\alpha \in \mathscr{M}$ существуют такие единицы $\varkappa$ и $\varkappa'$, что определены произведения $\alpha\varkappa$ и $\varkappa'\alpha$ [1]).

Доказать, что класс морфизмов категории образует абстрактную категорию, и обратно, что элементы произвольной абстрактной категории являются морфизмами некоторой категории $\mathscr{C}$, которая определена с точностью до изоморфизма категорий.

---

[1]) Пропущено следующее условие: если $\varkappa$ и $\varkappa'$ — две единицы, то морфизмы α, для которых определены произведения $\alpha\varkappa$ и $\varkappa'\alpha$, составляют множество.— *Прим. перев.*

§ 8. Функторы

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории. *Ковариантным функтором* T из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ называется пара отображений (каждое из которых обозначается одной и той же буквой T): отображение, определенное на объектах и сопоставляющее каждому объекту $C \in \mathscr{C}$ объект $T(C) \in \mathscr{D}$, и отображение, определенное на морфизмах и сопоставляющее каждому морфизму $\gamma: C \to C'$ из $\mathscr{C}$ морфизм $T(\gamma): T(C) \to T(C')$ из $\mathscr{D}$. Эта пара отображений должна удовлетворять следующим двум условиям:

$$T(1_C) = 1_{T(C)}, \qquad C \in \mathscr{C}, \tag{8.1}$$

$$T(\beta\gamma) = T(\beta)\,T(\gamma), \qquad \beta\gamma \text{ определено в } \mathscr{C}. \tag{8.2}$$

Следовательно, ковариантный функтор T из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ — это отображение из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$, которое сохраняет области определения и области значений морфизмов, а также единицы и произведения.

Например, пусть R — фиксированное кольцо. Для произвольного множества T пусть $F(T) = \Sigma_t Rt$ есть свободный модуль относительно множества T. Тогда F является ковариантным функтором из категории множеств в категорию R-модулей. Возьмем теперь, например, категорию $\mathscr{G}$ всех групп, где $G' = [G, G]$ — коммутант группы G, т. е. подгруппа, порожденная всеми «коммутаторами» $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$, где $g_i \in G$. Каждый гомоморфизм $\gamma: G \to H$, очевидно, отображает G' в H' с помощью γ'. Отображения $T(G) = G'$ и $T(\gamma) = \gamma'$ превращают G' в ковариантный функтор из категории $\mathscr{G}$ в категорию $\mathscr{G}$. Аналогично факторгруппа $G/[G, G]$ может рассматриваться как ковариантный функтор из категории $\mathscr{G}$ в категорию абелевых групп.

Пусть S и T — два ковариантных функтора из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$. *Естественным преобразованием* $h: S \to T$ называется отображение, которое сопоставляет каждому объекту $C \in \mathscr{C}$ такой морфизм $h(C): S(C) \to T(C)$ из $\mathscr{D}$, что для каждого морфизма $\gamma: C \to C'$ из $\mathscr{C}$ в категории $\mathscr{D}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} S(C) \arrow[r, "h(C)"] \arrow[d, "S(\gamma)"] & T(C) \arrow[d, "T(\gamma)"] \\ S(C') \arrow[r, "h(C')"] & T(C'). \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

Если морфизмы $h(C)$ удовлетворяют этому условию коммутативности, мы будем более коротко говорить, что «h естествен». Если к тому же каждый морфизм $h(C)$ является эквивалентностью, то мы будем говорить, что h — *естественный изоморфизм*.

Интуитивно, естественное преобразование h определяется единообразно или одной формулой для любого объекта из рассматриваемой категории. Например, определим для каждой группы G гомоморфизм $h(G): G \to G/[G, G]$, сопоставив каждому элементу $g \in G$ смежный класс $g[G, G]$ из факторгруппы по коммутанту. Диаграмма типа (8.3) в этом случае коммутативна, так что h можно рассматривать как естественное преобразование тождественного функтора в функтор взятия факторгруппы по коммутанту (оба функтора в категорию всех групп). Другие (и более наглядные) примеры естественных преобразований вскоре появятся (например, см. предложение II. 4.2 об относительной гомологии).

Контравариантный функтор T из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ состоит из отображения T, *определенного на объектах* из $\mathscr{C}$ и сопоставляющего каждому объекту C объект $T(C) \in \mathscr{D}$, и отображения T, *определенного на морфизмах* и сопоставляющего каждому морфизму $\gamma: C \to C'$ морфизм $T(\gamma): T(C') \to T(C)$ из $\mathscr{D}$, имеющий противоположное направление. Эта пара отображений должна удовлетворять двум условиям:

$$T(1_C) = 1_{T(C)}, \quad C \in \mathscr{C}, \tag{8.4}$$

$$T(\beta\gamma) = T(\gamma)\,T(\beta), \text{ произведение } \beta\gamma \text{ определено в } \mathscr{C}. \tag{8.5}$$

То, что произведение $\beta\gamma$ определено, означает, что $\gamma: C \to C'$, $\beta: C' \to C''$, следовательно, $T(\beta): T(C'') \to T(C')$, $T(\gamma): T(C') \to T(C)$ и поэтому произведение $T(\gamma)\,T(\beta)$ определено. Значит, изменение порядка множителей в равенстве (8.5) необходимо.

В § 6 мы отмечали, что при фиксированном R-модуле B $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ есть контравариантный функтор по аргументу A, определенный в категории R-модулей. Группа характеров абелевой группы A — это группа $\mathrm{Ch}\,A = \mathrm{Hom}_Z(A, P)$, где P — факторгруппа аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел. Если, как в § 6, определить отображение $\mathrm{Ch}\,\alpha = \alpha^*$, где α — гомоморфизм, то Ch становится контравариантным функтором из категории абелевых групп в ту же самую категорию или из категории дискретных абелевых групп в категорию компактных абелевых групп при обычном определении топологии в группе $\mathrm{Ch}\,A$. Для любой категории $\mathscr{D}$ и двойственной ей категории $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ пара отображений P, где $PD = D^*$, $P(\delta) = \delta^*$, задает контравариантный функтор из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$. Каждый контравариантный функтор T из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ может рассматриваться как ковариантный функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}^{\mathrm{op}}$, именно как произведение PT.

Естественным преобразованием $h: S \to T$, связывающим два контравариантных функтора из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$, называется функция, сопоставляющая каждому объекту $C \in \mathscr{C}$ такой морфизм $h(C): S(C) \to T(C)$ в D, что для каждого морфизма $\gamma: C \to C'$ из $\mathscr{C}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} S(C') & \xrightarrow{h(C')} & T(C') \\ \downarrow{\scriptstyle S(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\gamma)} \\ S(C) & \xrightarrow{h(C)} & T(C). \end{array} \tag{8.6}$$

Эта диаграмма получается из диаграммы (8.3) изменением направления вертикальных стрелок.

Если T — функтор из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$, а S — функтор из $\mathscr{D}$ в третью категорию $\mathscr{E}$, то произведение отображений $S \circ T$ определяет функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{E}$, вариантность которого равна произведению вариантностей (ковариантность $= +1$, контравариантность $= -1$). Например, пусть $\mathscr{M}_F$ — категория векторных пространств над фиксированным полем F, и пусть D — функтор из $\mathscr{M}_F$ в $\mathscr{M}_F$, сопоставляющий каждому пространству V сопряженное пространство $D(V) = \mathrm{Hom}_F(V, F)$, а каждому линейному преобразованию ($=$ морфизму из $\mathscr{M}_F$) $\alpha: V \to V'$ индуцированное преобразование $\alpha^*: D(V') \to D(V)$, определенное как в (6.3). Тогда D есть контравариантный функтор, в то время как $D^2 = D \circ D$ является ковариантным функтором, сопоставляющим каждому линейному пространству V его второе сопряженное пространство. Существует гомоморфизм

$$h = h(V): V \to D(DV),$$

который сопоставляет каждому вектору v такую функцию $hv: DV \to F$, что $(hv)f = f(v)$ для каждого преобразования $f \in DV$. В случае конечномерности V гомоморфизм $h(V)$ является известным изоморфизмом пространства V и его второго сопряженного пространства. Легко проверяется, что h определяет естественное преобразование $h: I \to D^2$ (где I обозначает тождественный функтор).

Имеется аналогичный естественный изоморфизм конечной абелевой группы с группой характеров ее группы характеров.

Укажем пример *неестественного* изоморфизма. Напомним, что для любого конечномерного векторного пространства V существует изоморфизм $k: V \cong D(V)$. А именно для каждого такого пространства V выберем фиксированный базис $v_1, \ldots, v_n$ и построим в $D(V)$ дуальный базис $v^1, \ldots, v^n$, где v^i определены требованием, что $v^i(v_j)$ равны 0 или 1 соответственно при $i \neq j$ и $i = j$.

Положим $k(v_i) = v^i$. Это линейное преобразование $k = k(V): V \to D(V)$ определено для каждого V. Оно отображает ковариантный тождественный функтор I в контравариантный функтор D. Если мы ограничимся категорией, объектами которой являются конечномерные векторные пространства, а морфизмами — изоморфизмы α этих пространств, то можно заменить функтор D ковариантным функтором $\bar{D}$, определенным следующим образом: $\bar{D}(V) = D(V)$, $\bar{D}(\alpha) = D(\alpha^{-1})$. Однако $k(V) : V \to \bar{D}(V)$ не является естественным преобразованием. Например, если пространство V одномерно и изоморфизм $\alpha : V \to V$ определен равенством $\alpha(v_1) = cv_1$ для некоторого скаляра $c \in F$, $0 \neq c \neq 1$, то $\bar{D}(\alpha)\, k(V)\, v_1 = (1/c)\, v^1$; однако $k(V)\, \alpha v_1 = cv^1$, так что диаграмма (8.3) в этом случае некоммутативна.

Функторы от нескольких аргументов могут быть ковариантными по одним аргументам и контравариантными по другим. Для иллюстрации достаточно определить функтор от двух аргументов, контравариантный по одному и ковариантный по другому. Пусть $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — три категории. *Бифунктором* T, определенным на $\mathscr{B} \times \mathscr{C}$ со значениями в $\mathscr{D}$, контравариантным в $\mathscr{B}$ и ковариантным в $\mathscr{C}$, называется пара функций, состоящая из функции, сопоставляющей каждой паре объектов $B \in \mathscr{B}$ и $C \in \mathscr{C}$ объект $T(B, C) \in \mathscr{D}$, и функции, сопоставляющей каждой паре морфизмов $\beta : B \to B'$ и $\gamma : C \to C'$ морфизм

$$T(\beta, \gamma) : T(B', C) \to T(B, C') \tag{8.7}$$

из $\mathscr{D}$. (Заметим, что направление по аргументу B меняется, а по аргументу C сохраняется.) Эти функции должны удовлетворять условиям

$$T(1_B, 1_C) = 1_{T(B, C)}, \tag{8.8}$$

$$T(\beta'\beta, \gamma'\gamma) = T(\beta, \gamma')\, T(\beta', \gamma), \tag{8.9}$$

причем последнее соотношение должно выполняться всякий раз, как определены произведения $\beta'\beta$ и $\gamma'\gamma$. Тогда произведение справа определено, так как для $\beta' : B' \to B''$ и $\gamma' : C' \to C''$ ввиду (8.7) получаем

$$T(B'', C) \xrightarrow{T(\beta', \gamma)} T(B', C') \xrightarrow{T(\beta, \gamma')} T(B, C'').$$

Удобно положить $T(\beta, 1_C) = T(\beta, C)$ и $T(1_B, \gamma) = T(B, \gamma)$. Если зафиксировать B, то $T(B, C)$ и $T(B, \gamma)$ становятся функциями, определяющими ковариантный функтор из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$, в то время как при фиксированном C функции $T(B, C)$ и $T(\beta, C)$ определяют контравариантный функтор из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{D}$. Эти функции $T(B, \gamma)$ и $T(\beta, C)$ определяют функцию $T(\beta, \gamma)$, поскольку ввиду (8.9) $T(\beta, \gamma) = T(\beta 1_B, \gamma 1_C) = T(B, \gamma)\, T(\beta, C)$. Мы предоставляем читателю возможность провести окончание доказательства следующего предложения.

П р е д л о ж е н и е 8. 1. *Пусть $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — три категории и пусть T — функция, сопоставляющая каждой паре объектов B и C объект $T(B, C) \in \mathscr{D}$. Пусть при каждом фиксированном $B \in \mathscr{B}$ функция $T(B, C)$ и некоторая функция $T(B, \gamma)$ определяют ковариантный функтор $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, а при каждом фиксированном $C \in \mathscr{C}$ функция $T(B, C)$ и некоторая функция $T(\beta, C)$ определяют контравариантный функтор $\mathscr{B} \to \mathscr{D}$. Предположим, что для каждой пары морфизмов $\beta : B \to B'$ и $\gamma : C \to C'$ имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} T(B', C) & \xrightarrow{T(B', \gamma)} & T(B', C') \\ {\scriptstyle T(\beta, C)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\beta, C')} \\ T(B, C) & \xrightarrow{T(B, \gamma)} & T(B, C'). \end{array} \tag{8.10}$$

Тогда диагональное отображение

$$T(\beta, \gamma) = T(B, \gamma)\, T(\beta, C) = T(\beta, C')\, T(B', \gamma)$$

этой диаграммы превращает T в бифунктор, определенный на $\mathscr{B}$ и $\mathscr{C}$ со значениями в $\mathscr{D}$, контравариантный в $\mathscr{B}$ и ковариантный в $\mathscr{C}$. Каждый такой функтор может быть получен указанным образом.

Если вместо $T(\beta, C)$ и $T(B, \gamma)$ для простоты писать β^* и γ_*, то условие коммутативности диаграммы (8.10) можно записать менее аккуратно, но более наглядно в виде равенства $\beta^*\gamma_* = \gamma_*\beta^*$. Сформулированное предложение обычно позволяет наиболее просто убедиться в том, что данное T действительно бифунктор. Типичным примером бифунктора подобного типа является функтор $\mathrm{Hom}_R(A, B)$, ковариантный по B и контравариантный по A.

Если S и T — два таких функтора, определенных на $\mathscr{B} \times \mathscr{C}$ со значениями в $\mathscr{D}$, то *естественным преобразованием* $f : S \to T$ называется функция, которая сопоставляет каждой паре объектов B, C такой морфизм $f(B, C) : S(B, C) \to T(B, C)$, что для каждой пары морфизмов $\beta : B \to B'$ и $\gamma : C \to C'$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S(B', C) & \xrightarrow{f(B', C)} & T(B', C) \\ {\scriptstyle S(\beta, \gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\beta, \gamma)} \\ S(B, C') & \xrightarrow{f(B, C')} & T(B, C'). \end{array} \tag{8.11}$$

Принимая во внимание указанное выше разложение для $T(\beta, \gamma)$, достаточно потребовать выполнения этого условия только для β и 1_C и для 1_B и γ. Другими словами, достаточно потребовать, чтобы функция $f(B, C)$ при фиксированном одном аргументе была естественным преобразованием по оставшемуся аргументу.

Прямые произведения дают пример бифунктора, ковариантного по двум аргументам. Пусть $\mathscr{C}$ — категория, в которой для каждой пары объектов существует диаграмма прямого произведения, и пусть для каждой пары объектов выбрана такая диаграмма вида

$\{\pi_i : A_1 \times A_2 \to A_i \mid i=1, 2\}$; предположение включает выбор прямого произведения $A_1 \times A_2$ для каждой пары A_1 и A_2. Пусть $\alpha_i : A_i \to A'_i$, $i = 1, 2,$ — морфизмы из $\mathscr{C}$, указанные в диаграмме

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\beta"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A'_1 & A'_1 \times A'_2 \arrow[l, "\pi'_1"'] \arrow[r, "\pi'_2"] & A'_2. \end{tikzcd} \qquad \beta = \alpha_1 \times \alpha_2. \tag{8.12}$$

Тогда $\alpha_i\pi_i : A_1 \times A_2 \to A'_i$; ввиду свойства коуниверсальности нижней строки существует такой единственный морфизм $\beta : A_1 \times A_2 \to A'_1 \times A'_2$, что $\pi'_i\beta = \alpha_i\pi_i$, т. е. существует единственный морфизм β, превращающий эту диаграмму в коммутативную. Например, если $\mathscr{C}$ — категория множеств или R-модулей и если произведение $A_1 \times A_2$ выбрано обычным способом как множество всех пар (a_1, a_2), то $\beta(a_1, a_2) = (\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2)$. Назовем морфизм $\beta = \alpha_1 \times \alpha_2$ *прямым произведением* данных морфизмов. Ввиду свойства коуниверсальности $1 \times 1 = 1$ и $(\gamma_1 \times \gamma_2)(\alpha_1 \times \alpha_2) = \gamma_1\alpha_1 \times \gamma_2\alpha_2$ всякий раз, как определены произведения $\gamma_i\alpha_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, функции $P(A_1, A_2) = A_1 \times A_2$, $P(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \times \alpha_2$ определяют ковариантный бифунктор P из $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$.

Для трех объектов A_1, A_2, A_3 обычное отображение $(A_1 \times A_2) \times A_3 \to A_1 \times (A_2 \times A_3)$ является естественным гомоморфизмом ковариантных трифункторов.

Понятия категории и функтора обеспечивают не глубокие теоремы, а удобный способ выражения. Например, рассмотрим понятие диаграмм «одного и того же вида», скажем, диаграмм модулей вида $D : A \to B \to C$. Каждая такая диаграмма может рассматриваться как функтор. Действительно, введем в рассмотрение конечную категорию $\mathscr{H}$, имеющую три объекта a, b, c, соответствующие тождественные морфизмы и морфизмы $\varkappa_0 : a \to b$, $\lambda_0 : b \to c$ и $\mu_0 : a \to c$, причем $\lambda_0\varkappa_0 = \mu_0$. Тогда любая диаграмма модулей указанного вида есть ковариантный функтор из $\mathscr{H}$ в категорию ${}_R\mathscr{M}$ модулей: такой ковариантный функтор D определяет три модуля $D(a) = A$, $D(b) = B$, $D(c) = C$ — и три гомоморфизма $D(\varkappa_0)$, $D(\lambda_0)$, $D(\mu_0) = D(\lambda_0)D(\varkappa_0)$. Отображение диаграммы D в другую диаграмму D' того же вида есть в точности естественное преобразование $D \to D'$ функторов. В эту формулировку мы можем включить также понятия диаграмм с условиями коммутативности. Так, коммутативная квадратная диаграмма есть функтор из конечной категории

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varkappa_0"] \arrow[d, "\xi_0"'] \arrow[dr, "\omega_0"] & b \arrow[d, "\eta_0"] \\ c \arrow[r, "\nu_0"'] & d \end{tikzcd}, \qquad \eta_0\varkappa_0 = \omega_0 = \nu_0\xi_0. \tag{8.13}$$

Частично упорядоченным множеством S называется множество с бинарным отношением $r \leqslant s$, рефлексивным $(r \leqslant r)$, транзитивным (из $r \leqslant s$ и $s \leqslant t$ следует $r \leqslant t$) и антисимметричным (из $r \leqslant s$ и $s \leqslant r$ следует $r = s$). Частично упорядоченное множество S имеет *нуль*, если существует такой элемент $0 \in S$, необходимо единственный, что $0 \leqslant s$ для каждого s. Элемент $u \in S$ называется *наименьшей верхней гранью* (н. в. г.) (или объединением) элементов s, $t \in S$, если $s \leqslant u$, $t \leqslant u$ и если из $s \leqslant v$, $t \leqslant v$ следует, что $u \leqslant v$. Н. в. г. единственна, если она существует, и обозначается $u = s \cup t$. Аналогично элемент $w = s \cap t$ называется н. н. г. (наибольшей нижней гранью или пересечением) s и t, если $w \leqslant s$, $w \leqslant t$ и если из $x \leqslant s$, $x \leqslant t$ следует $x \leqslant w$. Частично упорядоченное множество S называется *структурой*, если $s \cup t$ и $s \cap t$ существуют для всех элементов s и t.

Каждое частично упорядоченное множество S можно рассматривать как категорию $\mathscr{S}$, объектами которой являются элементы $s \in S$, морфизмами — пары $(s, r) : r \to s$ при $r \leqslant s$ и с умножением морфизмов, определенным равенством $(t, s)(s, r) = (t, r)$, если $r \leqslant s \leqslant t$. Например, конечная категория (8.13) возникает указанным способом из частично упорядоченного множества, имеющего четыре элемента a, b, c, d, с частичным порядком $a \leqslant b \leqslant d$, $a \leqslant c \leqslant d$. Если S является структурой, то любые два элемента s, t из $\mathscr{S}$ имеют прямую сумму (равную $s \cup t$) и прямое произведение $s \cap t$; обратно, если $\mathscr{S}$ имеет прямые суммы и прямые произведения, то S является структурой.

Для любого частично упорядоченного множества S ковариантный функтор $T : \mathscr{S} \to {}_R\mathscr{M}$ является семейством $\{T_s \mid s \in S\}$ R-модулей вместе с такими гомоморфизмами $T(s, r) : T_r \to T_s$, заданными для каждой пары $r \leqslant s$, что $T(t, s)\,T(s, r) = T(t, r)$ всякий раз, как $r \leqslant s \leqslant t$. Прямой предел такого семейства удобно описать в терминах теории категорий (Эйленберг, Маклейн [1945], гл. IV; Кан [1958]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\alpha_j : A_j \to A'_j$ суть модульные гомоморфизмы. Показать, что отображение $\beta = \alpha_1 \times \alpha_2 : A_1 \oplus A_2 \to A'_1 \oplus A'_2$, характеризуемое равенствами $\pi'_j\beta = \alpha_j\pi_j$, $j = 1, 2$, характеризуется также равенствами $\beta\iota_j = \iota'_j\alpha_j$, $j = 1, 2$.

2. Показать, что ассоциативный закон для (внешней) прямой суммы модулей может быть выражен как *естественный* изоморфизм $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.

3. Доказать, что изоморфизмы (6.5) естественны.

4. Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, в которой каждое множество $\mathrm{hom}(A, B)$ морфизмов имеет не более одного элемента, а каждая эквивалентность есть

тождественное отображение. Доказать, что $\mathscr{C}$ может быть получена из частично упорядоченного множества.

Замечания. Идея модуля восходит по крайней мере к Кронекеру, который рассматривал модули над кольцом многочленов, но только в последние двадцать лет эта идея стала играть центральную роль в алгебре. Проективные модули впервые были эффективно использованы Картаном и Эйленбергом [1952]. Теперь стало ясным, что они дают линейной алгебре подходящее обобщение векторного пространства (которое всегда является свободным модулем). Эмми Нётер в своих лекциях в Геттингене подчеркнула важность гомоморфизмов.

Первоначальное ограничение в определении гомоморфизма $\alpha : A \to B$, а именно $\alpha(A) = B$, приведенное в «*Современной алгебре*» ван дер Вардена, вскоре оказалось излишне стеснительным и было отброшено. Теперь естественно ожидать, что каждое определение типа математической системы дается одновременно с определением морфизмов такой системы. Обозначения при помощи стрелок появились в топологических исследованиях около 1940 г., вероятно в связи с использованием соответствий, а затем для непрерывных отображений. Точные последовательности впервые отмечены Гуревичем [1940]. Функтор Hom давно известен, но видимо впервые появился под этим именем у Эйленберга и Маклейна [1942]. Категории и функторы были введены теми же авторами в 1945 г. Они оказались полезными в аксиоматической теории гомологий (см. гл. II), в теории когомологий пучка над топологическим пространством (Годеман [1958]), в дифференциальной геометрии (Эресманн [1957]) и в алгебраической геометрии (Гротендик — Дьедонне [1960], см. также обзор Ленга [1961]). Вопросы обоснования теории категорий с использованием множеств и классов рассмотрены Маклейном [1961].

ГЛАВА II

Гомология комплексов

В этой главе мы впервые встретимся с основными понятиями теории гомологий в простых геометрических случаях, где появление группы гомологий обусловлено наличием граничного оператора.

Абелева группа с граничным гомоморфизмом называется вообще «дифференциальной группой», или «цепным комплексом», в том случае, когда она снабжена размерностями. В этой главе рассматривается алгебраический процесс построения групп гомологий и когомологий для цепных комплексов. Основным является тот факт (§ 4), что короткая точная последовательность комплексов порождает длинную точную последовательность групп гомологий. Как иллюстрация в последних параграфах дано краткое описание групп сингулярных гомологий топологического пространства.

§ 1. Дифференциальные группы

Дифференциальной группой C называется абелева группа C, в которой задан такой эндоморфизм $d: C \to C$, что $d^2 = 0$; назовем d «дифференциалом» или «граничным гомоморфизмом» группы C. Элементы из C часто называются *цепями*, элементы из $\operatorname{Ker} d$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{Im} d$ — *границами*. Требование $d^2 = 0$ эквивалентно включению $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. Группа гомологий дифференциальной группы C определяется как факторгруппа группы циклов по подгруппе границ

$$H(C) = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d/dC. \tag{1.1}$$

Элементами этой группы являются смежные классы $c + \operatorname{Im} d$ циклов c; мы назовем их *гомологическими классами* и будем обозначать их как

$$\operatorname{cls}(c) = c + dC \in H(C). \tag{1.2}$$

Два цикла c и c' из одного и того же гомологического класса называются *гомологичными*, что записывается как $c \sim c'$.

В качестве первых примеров мы рассмотрим несколько специальных дифференциальных групп с их гомологиями. Большинство этих примеров будет найдено при помощи разбиения простой геометрической фигуры на клетки и взятия в качестве d оператора, который сопоставляет каждой клетке сумму ее граничных клеток, снабженных подходящим знаком.

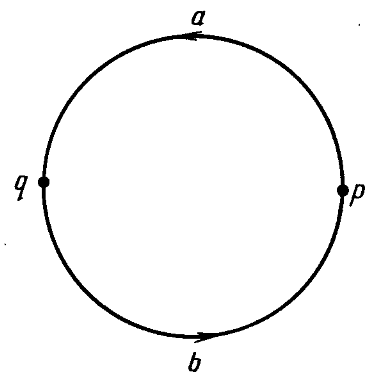


Рис. 1.

Пример 1. Возьмем на окружности S^1 две точки p и q, разбивающие окружность на две полуокружности a и b. «Границами» или «концами» дуги a являются точки q и p. Введем свободную абелеву группу $C(S^1)$ с четырьмя свободными образующими a, b, p и q и определим эндоморфизм d группы $C(S^1)$, положив

$$da = q - p, \quad db = p - q,$$
$$dp = 0 = dq. \tag{1.3}$$

Каждый элемент из $C(S^1)$ единственным образом представим как линейная комбинация $m_1 a + m_2 b + m_3 p + m_4 q$ с целыми коэффициентами m_1, m_2, m_3 и m_4, в то время как

$$d(m_1 a + m_2 b + m_3 p + m_4 q) = m_1(q-p) + m_2(p-q) = \\ = (m_1 - m_2)(q-p).$$

Таким образом, $C(S^1)$ становится дифференциальной группой. Ее циклы — это все целые линейные комбинации p, q и $a+b$, в то время как границами являются все кратные элемента $q-p$. Следовательно, p и q гомологичны, и группа гомологий является прямой суммой

$$H(C(S^1)) = Z_\infty(\operatorname{cls}(p)) \oplus Z_\infty(\operatorname{cls}(a+b)), \tag{1.4}$$

где $Z_\infty(\operatorname{cls}(p))$ обозначает бесконечную циклическую группу, порожденную гомологическим классом $\operatorname{cls}(p)$. Значит, окружность S^1 имеет два основных гомологических класса: точку p (размерность 0) и окружность $a+b$ (размерность 1).

В этом примере та же самая окружность могла быть разделена и по-другому, например на большее число дуг. Группы гомологий оказываются независимыми от выбранного разбиения. Например, изоморфные группы гомологий возникают, если окружность разделена на три дуги так, чтобы получился треугольник!

Пример 2. Возьмем треугольник Δ с вершинами 0, 1 и 2 и сторонами 01, 12 и 02. Соответствующая дифференциальная группа $C(\Delta)$ является свободной абелевой группой с шестью образующими (0), (1), (2), (01), (12), (02) и дифференциалом, заданным равенствами $d(0) = d(1) = d(2) = 0$, $d(01) = (1) - (0)$, $d(02) = (2) - (0)$,

$d(12) = (2) - (1)$; другими словами, граница каждой стороны есть разность ее концов. Можно убедиться в том, что

$$H(C(\Delta)) = Z_\infty(\operatorname{cls}(0)) \oplus Z_\infty(\operatorname{cls}[(12) - (02) + (01)]).$$

Эта группа в действительности изоморфна группе гомологий окружности, найденной в примере 1: обе группы являются свободными абелевыми группами с двумя образующими. Изоморфизм между этими группами может быть получен из некоторого гомоморфизма f дифференциальной группы $C(S^1)$ в $C(\Delta)$; положим, к примеру, $f(p) = (0)$, $f(q) = (1)$, $f(a) = (01)$ и $f(b) = (12) - (02)$. Тогда $df(b) = fd(b)$, $df(a) = fd(a)$ и f переводит образующие циклы p и $a+b$ из $H(C(S^1))$ в образующие циклы (0) и $(12) - (02) + (01)$ группы $H(C(\Delta))$.

Вообще пусть C и C' — две дифференциальные группы. *Гомоморфизмом* $f: C \to C'$ дифференциальных групп называется групповой гомоморфизм с дополнительным свойством $fd = d'f$; другими словами, это отображение группы C в группу C', которое сохраняет целиком заданную алгебраическую структуру (сложение *и* дифференциал). Отсюда следует, что образ fc цепи c из C является циклом или границей всякий раз, как c — цикл или граница соответственно. Следовательно, отображение $H(f) = f_*$, определенное посредством равенства $f_*(\operatorname{cls}(c)) = \operatorname{cls}(fc)$, есть групповой гомоморфизм

$$H(f): H(C) \to H(C') \quad (\text{при } f: C \to C'). \tag{1.5}$$

Мы назовем $H(f)$ гомоморфизмом, *индуцированным* f. Поскольку $H(1_C) = 1_{H(C)}$ и $H(f'f) = H(f')H(f)$, то H является ковариантным функтором из категории дифференциальных групп в категорию абелевых групп.

Пример 3. Круговой диск (круг) D получается добавлением внутренней части c к окружности S^1; соответствующая дифференциальная группа $C(D)$ строится путем добавления к $C(S^1)$ нового свободного образующего c с границей $dc = a + b$. Тогда $H(C(D)) = Z_\infty(\operatorname{cls} p)$. Вложение $j: C(S^1) \to C(D)$ индуцирует отображение $H(j): H(C(S^1)) \to H(C(D))$, которое отображает второе слагаемое из (1.4) в нуль. Другими словами, гомоморфизм $H(j)$, индуцированный вложением, может не быть мономорфизмом, т. е. группа гомологий подпространства может не быть подгруппой группы гомологий самого пространства. Поэтому мы и обозначаем вложение j символом, отличным от единицы.

Пример 4. Пусть u — верхняя, а l — нижняя полусферы сферы S^2 с экватором S^1 (см. рис. 2). Построим дифференциальную группу $C(S^2)$ добавлением к $C(S^1)$ двух новых свободных образующих u и l с границами $du = a + b = -dl$. Тогда

$$H(C(S^2)) = Z_\infty(\operatorname{cls}(p)) \oplus Z_\infty(\operatorname{cls}(u+l)), \tag{1.6}$$

значит, имеется цикл p размерности 0 и один цикл размерности 2.

Пример 5. Действительная проективная плоскость P^2, рассматриваемая как топологическое пространство, может быть получена из сферы S^2 отождествлением каждой точки из S^2 с диаметрально противоположной точкой. В частности, каждая точка верхней полусферы отождествляется с точкой нижней полусферы. Это наводит на мысль, что с алгебраической точки зрения целесообразно положить $u = -l$, $a = b$ и $p = q$ в указанной в предыдущем примере дифференциальной группе $C(S^2)$. Тем самым получается новая дифференциальная группа $C(P^2)$, которая является свободной абелевой группой со свободными образующими u, a и p и дифференциалом $du = 2a$, $da = 0$, $dp = 0$. В этой группе цикл a не есть граница, хотя $2a$ — граница. Следовательно,

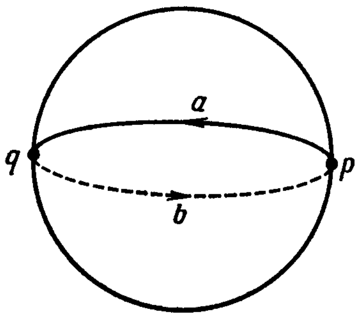


Рис. 2.

$$H(C(P^2)) = Z_\infty(\operatorname{cls}(p)) \oplus Z_2(\operatorname{cls}(a)),$$

где $Z_2(\operatorname{cls}(a))$ обозначает циклическую группу порядка 2 с образующим $\operatorname{cls}(a)$.

Пример 6. Пусть $f(x, y)$ — действительная функция класса C^∞ [т. е. $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков], определенная на связном открытом множестве D точек (x, y) декартовой плоскости. При фиксированном D множество A всех таких функций является абелевой группой относительно операции сложения значений функций. Обозначим через C прямую сумму $A \oplus A \oplus A \oplus A$; тогда элемент из C — это четверка функций (f, g, h, k), которую более удобно обозначить как формальный «дифференциал»

$$(f, g, h, k) = f + g\,dx + h\,dy + k\,dx\,dy.$$

Определим $d: C \to C$, положив

$$d(f, g, h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Равенство $d^2 = 0$ является следствием того, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Любой цикл из C есть сумма элементов следующих трех типов: констант $f = a$; выражений $g\,dx + h\,dy$, где $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$ (другими словами, точных дифференциалов), и выражений $k\,dx\,dy$.

Если область определения D является, к примеру, внутренностью квадрата, то мы можем записать функцию k как $\partial h/\partial x$ для подходящей функции h, в то время как любой точный дифференциал может быть выражен (при помощи подходящего интегрирования) как дифференциал функции f. Следовательно, при такой области D единственными гомологическими классами являются классы, определяемые константами, и поэтому $H(C)$ является аддитивной группой действительных чисел. Это же заключение остается в силе, если D — внутренность круга, но становится неверным, если D есть, например, внутренность круга с выкинутым началом координат. В этом последнем случае точный дифференциал может не быть дифференциалом некоторой функции f. Например, $\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ не является таким.

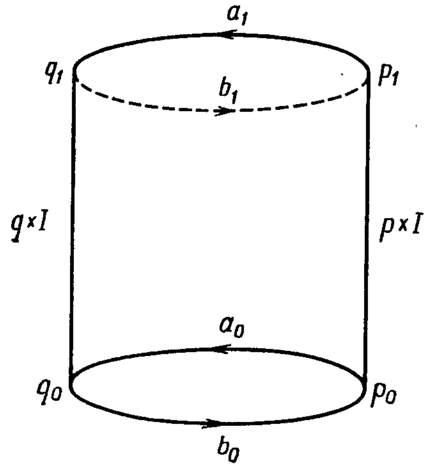


Рис. 3.

Пример 7. Круговой цилиндр можно рассматривать как прямое произведение $S^1 \times I$ окружности S^1 и единичного интервала I. Мы разобьем его, как показано на рис. 3, так что окружность S^1 на нижнем основании имеет вершины p_0, q_0 и дуги a_0, b_0, а на верхнем основании вершины и дуги обозначены теми же буквами, но с индексом 1.

Поверхность цилиндра состоит из интервалов $p \times I$ и $q \times I$, расположенных над p_0 и q_0 соответственно, и поверхностей $a \times I$ и $b \times I$ над a_0 и b_0. Введем свободную абелеву группу $C(S^1 \times I)$ с двенадцатью свободными образующими $p \times I$, $q \times I$, $a \times I$, $b \times I$ и a_i, b_i, p_i, q_i $(i = 0, 1)$. Определим дифференциал $d: C \to C$ на нижнем и верхнем основаниях так же, как на окружности ($da_i = q_i - p_i$, $db_i = p_i - q_i$, $dp_i = 0 = dq_i$). Положим также $d(p \times I) = p_1 - p_0$, $d(q \times I) = q_1 - q_0$. Рассмотрение геометрической границы поверхности $a \times I$ подсказывает, что нужно положить

$$d(a \times I) = a_1 - (q \times I) - a_0 + (p \times I)$$

и

$$d(b \times I) = b_1 - b_0 + (q \times I) - (p \times I).$$

Этими равенствами эндоморфизм d определен так, что $d^2 = 0$.

Рассмотрение циклов и границ показывает, что

$$H(C(S^1 \times I)) = Z_\infty(\operatorname{cls}(p_0)) \oplus Z_\infty(\operatorname{cls}(a_0+b_0)).$$

Эта группа гомологий изоморфна группе гомологий $H(S^1)$, найденной для окружности в примере 1. Изоморфизм может быть записан как $H(f_0): H(S^1) \cong H(S^1 \times I)$, если в качестве f_0 взять гомоморфизм $f_0: C(S^1) \to C(S^1 \times I)$ дифференциальных групп, определенный следующим образом: $f_0 p = p_0$, $f_0 q = q_0$, $f_0 a = a_0$, $f_0 b = b_0$. Этот же изоморфизм может быть записан так же как $H(f_1)$, где гомоморфизм $f_1: C(S^1) \to C(S^1 \times I)$ определен подобно f_0. Равенство $H(f_0) = H(f_1)$ выполняется потому, что циклы $a_0 + b_0$ и $a_1 + b_1$ на цилиндре гомологичны, поскольку их разность есть граница

$$d(a \times I + b \times I) = (a_1 + b_1) - (a_0 + b_0).$$

Для точного сравнения f_0 и f_1 определим функцию s соотношениями

$$sp = p \times I, \quad sq = q \times I, \quad sa = a \times I, \quad sb = b \times I.$$

Функция определяет гомоморфизм $s: C(S^1) \to C(S^1 \times I)$ абелевых групп (но не дифференциальных групп), обладающий тем свойством, что

$$dsc + s\,dc = f_1 c - f_0 c \tag{1.7}$$

для всех элементов c из $C(S^1)$. Это равенство можно прочитать так: граница $d(sc)$ цилиндра sc над c состоит из верхнего основания $f_1 c$ минус нижнее основание $f_0 c$ и минус цилиндр $s(dc)$ над границей элемента c. Из этого равенства следует, что гомоморфизмы $H(f_1)$ и $H(f_0)$ равны, поскольку для цикла c ($dc = 0$) из равенства (1.7) получаем $f_1 c - f_0 c = d(sc)$, откуда $f_1 c \sim f_0 c$.

Отображения, обладающие свойством (1.7), будут часто встречаться под названием «цепных гомотопий».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть C — дифференциальная группа. Определение $H(C) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ можно записать как $H(C) = \operatorname{Coker}(d': C \to \operatorname{Ker} d)$, где d' индуцировано d. Используя изоморфизм $C/\operatorname{Ker} d \cong \operatorname{Im} d$, показать, что $H(C)$ имеет двойственное описание как $\operatorname{Ker}(d'': (\operatorname{Coker} d) \to C)$.

2. Для семейства C_t, $t \in T$, дифференциальных групп определить прямую сумму ΣC_t и прямое произведение ΠC_t и доказать, что $H(\Sigma C_t) \cong \Sigma H(C_t)$, $H(\Pi C_t) \cong \Pi H(C_t)$.

§ 2. Комплексы

В обычных дифференциальных группах C из § 1 мы можем некоторым элементам из C приписать целые размерности. Множество C_n всех элементов размерности n есть группа, а C есть прямая сумма C_n и $\partial C_n \subset C_{n-1}$. Более целесообразно иметь дело непосредственно с этим набором групп. Объект, который получается в результате, называется «комплексом» абелевых групп.

Для произвольного кольца R *цепной комплекс* K R-модулей есть семейство $\{K_n, \partial_n\}$ R-модулей K_n и R-модульных гомоморфизмов $\partial_n: K_n \to K_{n-1}$, заданных для всех целых n, $-\infty < n < \infty$, причем $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Это последнее условие эквивалентно утверждению, что $\operatorname{Ker} \partial_n \supset \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Значит, комплекс K появляется как бесконечная в обе стороны последовательность

$$K: \ldots \leftarrow K_{-2} \leftarrow K_{-1} \leftarrow K_0 \leftarrow K_1 \leftarrow K_2 \leftarrow \ldots,$$

в которой произведение любых двух последовательных отображений равно нулю. *Гомология* $H(K)$ — это семейство модулей

$$H_n(K) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1} = (\operatorname{Ker} K_n \to K_{n-1}) / \partial_{n+1} K_{n+1}. \tag{2.1}$$

Равенство $H_n(K) = 0$ означает, что последовательность K точна в K_n; *n-мерный цикл* комплекса K — это элемент подмодуля $C_n(K) = \operatorname{Ker} \partial_n$, *$n$-мерная граница* — это элемент из $\partial_{n+1} K_{n+1}$. Тогда $H_n = C_n / \partial K_{n+1}$ (фактормодуль модуля циклов по подмодулю границ). Смежный класс цикла c в H_n будет записываться как $\operatorname{cls} c = c + \partial K_{n+1}$ или как $\{c\}$, причем последнее обозначение часто встречается в литературе.

Говорят, что n-мерные циклы c и c' из одного и того же гомологического класса ($\operatorname{cls} c = \operatorname{cls} c'$) *гомологичны* ($c \sim c'$); это будет тогда и только тогда, когда $c - c' \in \partial K_{n+1}$.

Если K и K' комплексы, то *цепным преобразованием* $f: K \to K'$ называется такое семейство модульных гомоморфизмов $f_n: K_n \to K'_n$, заданных по одному для каждого n, что $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$ для всех n. Последнее условие означает, что коммутативна следующая диаграмма (на пунктирные стрелки не надо обращать внимания)

$$\begin{tikzcd}
K: \cdots & K_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dr, dashed] & K_n \arrow[l, "\partial_n"'] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, dashed] & K_{n+1} \arrow[l, "\partial_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
K': \cdots & K'_{n-1} \arrow[l] & K'_n \arrow[l, "\partial'_n"] & K'_{n+1} \arrow[l, "\partial'_{n+1}"] & \cdots . \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

(Впоследствии мы обычно будем опускать индекс n у ∂_n и штрих у $\partial': K'_n \to K'_{n-1}$.) Отображение $H_n(f) = f_*$, определенное равенством $f_*(c + \partial K_{n+1}) = fc + \partial K'_{n+1}$, является гомоморфизмом $H_n(f): H_n(K) \to H_n(K')$. С этим определением каждое H_n становится ковариантным функтором из категории цепных комплексов и цепных преобразований в категорию модулей.

Цепная гомотопия s между двумя цепными преобразованиями $f, g : K \to K'$ — это семейство модульных гомоморфизмов $s_n : K_n \to K'_{n+1}$ по одному для каждой размерности n [эти гомоморфизмы указаны в диаграмме (2.2) пунктирными стрелками], причем

$$\partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n. \tag{2.3}$$

Мы будем писать $s : f \simeq g$. Геометрический источник этого отношения отмечен в примере 7 § 1. С алгебраической же точки зрения справедлива

Теорема 2.1. *Если* $s : f \simeq g : K \to K'$, *то*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(K) \to H_n(K'), \quad -\infty < n < \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Если c — цикл из K_n, то $\partial_n c = 0$; следовательно, ввиду (2.3), $f_n c - g_n c = \partial s_n c$, что означает, что $f_n c$ и $g_n c$ гомологичны. Поэтому $\operatorname{cls} f_n c = \operatorname{cls} g_n c$ в $H_n(K')$, что и требовалось доказать.

Говорят, что цепное преобразование $f : K \to K'$ есть *цепная эквивалентность*, если существуют другое цепное преобразование $h : K' \to K$ (в обратную сторону!) и гомотопии $s : hf \simeq 1_K$, $t : fh \simeq 1_{K'}$. Поскольку $H_n(1_K) = 1$, из теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.2. *Если $f : K \to K'$ — цепная эквивалентность, то индуцированное отображение $H_n(f) : H_n(K) \cong H_n(K')$ является изоморфизмом для каждой размерности n.*

Предложение 2.3. *Если $s : f \simeq g : K \to K'$ и $s' : f' \simeq g' : K' \to K''$ — цепные гомотопии, то цепной гомотопией является и отображение*

$$f's + s'g : f'f \simeq g'g : K \to K''.$$

Доказательство. По условию имеют место равенства $\partial s + s\partial = f - g$ и $\partial s' + s'\partial = f' - g'$. Для доказательства предложения достаточно умножить первое равенство слева на f', а второе справа на g и сложить.

Подкомплексы и факторкомплексы имеют свойства, аналогичные свойствам подмодулей и фактормодулей. *Подкомплекс* S комплекса K — это семейство таких подмодулей $S_n \subset K_n$, по одному для каждого n, что $\partial S_n \subset S_{n-1}$. Следовательно, S — это комплекс с дифференциалом, индуцированным $\partial = \partial_K$, причем вложение $j : S \to K$ есть цепное преобразование. Если S — подкомплекс комплекса K, то *факторкомплекс* K/S состоит из семейства фактормодулей $(K/S)_n = K_n/S_n$ и дифференциала $\partial' : K_n/S_n \to K_{n-1}/S_{n-1}$, индуцированного ∂_K. Проекция является в этом случае цепным

преобразованием $K \to K/S$ и короткая последовательность модулей $S_n \rightarrowtail K_n \twoheadrightarrow (K/S)_n$ точна для каждого n.

Если $f : K \to K'$ — цепное преобразование, то $\operatorname{Ker} f = \{\operatorname{Ker} f_n\}$ является подкомплексом комплекса K, $\operatorname{Im} f = \{f_n K_n\}$ — подкомплексом комплекса K', в то время как комплекс $K'/\operatorname{Im} f$ есть коядро f, а комплекс $K/\operatorname{Ker} f$ есть кообраз. Пара цепных преобразований $K \xrightarrow{f} K' \xrightarrow{g} K''$ называется *точной* в K', если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, т. е. если каждая последовательность модулей $K_n \to K'_n \to K''_n$ точна в K'_n. Для любого $f : K \to K'$ последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to K \xrightarrow{f} K' \to \operatorname{Coker} f \to 0$$

является точной.

Вместо использования нижних индексов, как в K_n, часто более удобно писать K^n для K_{-n} и $\partial^n : K^n \to K^{n+1}$ вместо $\partial_{-n} : K_{-n} \to K_{-n-1}$. Этим способом тот же самый комплекс записывается при помощи «верхних индексов».

Комплекс K *положителен* (т. е. неотрицателен), если $K_n = 0$ при $n < 0$; его гомология также положительна [$H_n(K) = 0$ при $n < 0$]. Комплекс K *отрицателен*, если $K_n = 0$ при $n > 0$; эквивалентно комплекс положителен по верхним индексам и имеет вид

$$0 \to K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \xrightarrow{\delta^2} \ldots, \quad \delta\delta = 0,$$

причем гомология $H^n(K) = \operatorname{Ker} \delta^n / \delta K^{n-1}$ положительна по верхним индексам. Записанный указанным способом комплекс часто называют «правым комплексом» или «коцепным комплексом». Под «коцепной гомотопией» $s : f \simeq g : K \to K'$ понимается цепная гомотопия, записанная с верхними индексами, т. е. такое семейство отображений $s^n : K^n \to K'^{n-1}$, что $\delta s + s\delta = f - g$. Появляющиеся на практике комплексы обычно или положительны, или отрицательны; общее понятие цепного комплекса полезно при проведении общих доказательств формальных свойств, подобных свойствам, сформулированным в теореме 2.1.

Каждый модуль A можно рассматривать как «тривиальный» положительный комплекс, у которого $A_0 = A$, $A_n = 0$ при $n \neq 0$ и $\partial = 0$. *Комплекс над* A — это положительный комплекс K вместе с цепным преобразованием $\varepsilon : K \to A$; такое преобразование ε — это просто модульный гомоморфизм $\varepsilon : K_0 \to A$, для которого $\varepsilon\partial = 0 : K_1 \to A$. *Стягивающей гомотопией* для $\varepsilon : K \to A$ называется цепное преобразование $f : A \to K$, для которого $\varepsilon f = 1_A$, причем имеется гомотопия $s : 1 \simeq f\varepsilon$. Другими словами, стягивающая гомотопия состоит из таких модульных гомоморфизмов $f : A \to K_0$ и $s_n : K_n \to K_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, что

$$\varepsilon f = 1, \quad \partial_1 s_0 + f\varepsilon = 1_{K_0}, \quad \partial_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = 1 \quad (n > 0). \tag{2.5}$$

Эквивалентно, расширим комплекс, положив $K_{-1}=A$, $\partial_0=\varepsilon: K_0\to K_{-1}$ и $s_{-1}=f$. Тогда равенства (2.5) означают просто, что $s: 1\simeq 0$ для отображений 1 и 0 расширенного комплекса в себя. Если преобразование $\varepsilon: K\to A$ имеет стягивающую гомотопию, то группами гомологий являются группы $\varepsilon_*: H_0(K)\cong A$ при $n=0$ и $H_n(K)=0$ при $n>0$.

В топологии встречаются комплексы K свободных абелевых групп. Если каждая группа K_n имеет конечное число образующих, то и каждая группа $H_n(K)$ является конечно порожденной абелевой группой. Структурная теорема для таких групп представляет $H_n(K)$ как прямую сумму $Z\oplus\ldots\oplus Z\oplus Z_{m_1}\oplus\ldots\oplus Z_{m_k}$, где число b_n бесконечных циклических групп и натуральные числа $m_1,\ldots,m_k$ (каждое из которых есть делитель следующего) зависят только от $H_n(K)$. Число b_n называется n-м *числом Бетти* комплекса K, а числа $\{m_i\}$ называются n-ми *коэффициентами кручения*.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовем комплекс S *q-специальным*, если $S_n=0$ при $n\neq q$, $q+1$ и $\partial: S_{q+1}\to S_q$ — мономорфизм. Доказать, что любой комплекс K свободных абелевых групп K_n является прямой суммой q-специальных комплексов (для каждого q имеется только одно слагаемое).

2. Назовем q-специальный комплекс S абелевых групп *элементарным*, если $S_{q+1}=S_q=Z$ или $S_q=Z$, $S_{q+1}=0$. Доказать, что каждый q-специальный комплекс S, у которого S_q, S_{q+1} — свободные абелевы группы с конечным числом образующих, есть прямая сумма элементарных комплексов. (Указание: использовать операции над строками и столбцами в целочисленной матрице для выбора новых базисов в S_q и в S_{q+1}.)

3. Доказать, что каждый комплекс, у которого K_n — свободные абелевы группы с конечным числом образующих, есть прямая сумма элементарных комплексов.

§ 3. Когомология

Пусть C — дифференциальная группа, а G — абелева группа. Построим абелеву группу $C^*=\mathrm{Hom}_Z(C, G)$; элементами этой группы служат групповые гомоморфизмы $f: C\to G$, называемые *коцепями* группы C с «коэффициентами» в G. Дифференциал $d: C\to C$ индуцирует отображение $d^*: C^*\to C^*$, определенное равенством $d^*f=fd: C\to G$; назовем d^*f *кограницей* коцепи f; кограница часто записывается как $\delta f=d^*f$. Поскольку $d^2=0$, $(d^*)^2=0$. Следовательно, группа C^* есть дифференциальная группа с дифференциалом d^*. Группа гомологий этой группы называется группой *когомологий* группы C с коэффициентами из G и обозначается как $H^*(C, G)=H(\mathrm{Hom}(C, G))$.

Пусть K — комплекс R-модулей и G — R-модуль. Построим абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(K_n, G)$; ее элементами служат модульные гомоморфизмы $f: K_n\to G$, называемые *n-мерными коцепями* комплекса K. *Кограница* гомоморфизма f — это $(n+1)$-мерная коцепь

$$\delta^n f=(-1)^{n+1}f\partial_{n+1}: K_{n+1}\to G. \qquad (3.1)$$

Другими словами, $\partial_{n+1}: K_{n+1}\to K_n$ индуцирует

$$\partial^*_{n+1}: \mathrm{Hom}(K_n, G)\to\mathrm{Hom}(K_{n+1}, G) \text{ и } \delta^n=(-1)^{n+1}\partial^*_{n+1}$$

(знак будет объяснен ниже). Поскольку $\delta^n\delta^{n-1}=0$, последовательность

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_R(K_{n-1}, G)\xrightarrow{\delta^{n-1}}\mathrm{Hom}_R(K_n, G)\xrightarrow{\delta^n}$$
$$\xrightarrow{\delta^n}\mathrm{Hom}_R(K_{n+1}, G)\to\cdots \qquad (3.2)$$

является комплексом абелевых групп, называемым $\mathrm{Hom}_R(K, G)$, причем обычно каждую группу записывают с верхним индексом: $\mathrm{Hom}^n(K, G)=\mathrm{Hom}(K_n, G)$. Если комплекс K положителен по нижним индексам, то комплекс $\mathrm{Hom}(K, G)$ положителен по верхним индексам.

Гомология этого комплекса $\mathrm{Hom}(K, G)$ называется *когомологией* комплекса K с *коэффициентами* в G. Она является семейством абелевых групп, отмеченных верхними индексами,

$$H^n(K, G)=H^n(\mathrm{Hom}(K, G))=\mathrm{Ker}\,\delta^n/\delta\,\mathrm{Hom}(K_{n-1}, G). \qquad (3.3)$$

Элемент из $\delta\,\mathrm{Hom}(K_{n-1}, G)$ называется *n-мерной кограницей*, а элемент из $\mathrm{Ker}\,\delta^n$ — *n-мерным коциклом*. Значит, коцикл — это такой гомоморфизм $f: K_n\to G$, что $f\partial=0: K_{n+1}\to G$. Любое цепное преобразование $h: K\to K'$ индуцирует цепное преобразование $h^*=\mathrm{Hom}(h, 1): \mathrm{Hom}(K', G)\to\mathrm{Hom}(K, G)$. Поэтому $\mathrm{Hom}(K, G)$ и $H^n(K, G)$ являются бифункторами, ковариантными по G и контравариантными по K. Если $s: h\simeq g$ — гомотопия, то из (2.3) следует, что $s_n^*\partial^*_{n+1}+\partial^*_n s^*_{n-1}=h^*_n-g^*_n$. Следовательно, $t^{n+1}=(-1)^{n+1}s^*_n$ есть гомотопия $t: h^*\simeq g^*$.

Более обще, мы можем определить комплекс $\mathrm{Hom}_R(K, L)$ для любой пары K и L комплексов R-модулей. Пользуясь нижними индексами, положим

$$\mathrm{Hom}_n(K, L)=\prod_{p=-\infty}^{\infty}\mathrm{Hom}_R(K_p, L_{p+n}), \qquad (3.4)$$

так что элементом f для Hom_n служит семейство гомоморфизмов $f_p: K_p\to L_{p+n}$, где $-\infty<p<\infty$. Границей $\partial_H f$ является семейство $(\partial_H f)_p: K_p\to L_{p+n-1}$, где отображение $(\partial_H f)_p$ определяется следующим образом:

$$(\partial_H f)_p k=\partial_L(f_p k)+(-1)^{n+1}f_{p-1}(\partial_K k), \quad k\in K_p,\ f\in\mathrm{Hom}_n; \qquad (3.5)$$

∂_L и ∂_K обозначают граничные гомоморфизмы в L и K соответственно. Прямой подсчет показывает, что это определение действительно дает комплекс

$$(\partial_H\partial_H f)_p k = \partial_L\partial_L (f_p k) + (-1)^n \partial_L f_{p-1}\partial_K k +$$
$$+ (-1)^{n+1} \partial_L f_{p-1}\partial_K k + (-1)^1 f_{p-2} (\partial_K\partial_K k) = 0,$$

поскольку $\partial_L \partial_L = 0 = \partial_K \partial_K$. Ясно, что $\operatorname{Hom}_R (K, L)$ есть бифунктор, ковариантный по L и контравариантный по K.

Знак в определении (3.5) выбран так, чтобы были справедливы следующие два результата.

Предложение 3.1. *Если кольцо R рассматривается как тривиальный комплекс, то имеет место естественный изоморфизм* $\operatorname{Hom}(R, L) \cong L$, *устанавливаемый сопоставлением каждому гомоморфизму $f_p: R \to L_p$ его образа $f_p(1) \in L_p$.*

Доказательство. Указанное сопоставление дает изоморфизм $\operatorname{Hom}(R, L_p) \cong L_p$ для каждого p. В этом случае в формуле взятия границы (3.5) нет члена с ∂_K; оставшийся член $+\partial_L f$ показывает, что этот изоморфизм перестановочен со взятием границ.

Предложение 3.2. *Цикл нулевой размерности комплекса* $\operatorname{Hom}(K, L)$ *является цепным преобразованием $f: K \to L$; он является границей элемента s из* $\operatorname{Hom}_1 (K, L)$ *тогда и только тогда, когда s есть гомотопия $s: f \simeq 0$.*

Доказательство. Формула (3.5) для взятия границы (*со знаком*) принимает вид

$$(\partial_H f)_p = \partial_L f_p - f_{p-1}\partial_K \quad \text{при } n = 0,$$
$$(\partial_H s)_p = \partial_L s_p + s_{p-1}\partial_K \quad \text{при } n = 1.$$

Поэтому равенство $\partial_H f = 0$ означает, что f — цепное преобразование, а равенство $\partial_H s = f$ означает, что $f = \partial_L s + s\partial_K$, откуда $s: f \simeq 0$, что и утверждалось. Эти выводы можно сформулировать как

Следствие 3.3. *Группа гомологий* $H_0(\operatorname{Hom}(K, L))$ *есть абелева группа гомотопических классов цепных преобразований $f: K \to L$.*

В частности, если $L = G$ — тривиальный комплекс, то граничный гомоморфизм ∂_L равен нулю, а элемент f из $\operatorname{Hom}_n (K, G)$ — это просто гомоморфизм $f: K_{-n} \to G$, для которого $\partial_H f = (-1)^{n+1} \times f\partial: K_{-n+1} \to G$. При обозначениях с верхними индексами это означает, что элемент из $\operatorname{Hom}^n (K, G)$ — это гомоморфизм $f: K_n \to G$ с кограницей $\delta f = (-1)^{n+1} f \partial$. Это выражение совпадает с ранее введенной формулой (3.1) и объясняет использованный там знак.

Однако необходимо предупредить читателя, что в большинстве современных работ по когомологиям этот знак не используется, а вместо этого пишут $\delta f = f\partial$.

§ 4. Точная гомологическая последовательность

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$E: 0 \to K \xrightarrow{\varkappa} L \xrightarrow{\sigma} M \to 0 \tag{4.1}$$

цепных комплексов и цепных преобразований $\varkappa$, σ. Первое преобразование $\varkappa$ имеет нулевое ядро, однако индуцированное отображение $H_n(\varkappa): H_n(K) \to H_n(L)$ групп гомологий может иметь нетривиальное ядро, как показано в примере 1.3. Чтобы исследовать, когда это может произойти, отождествим K с подкомплексом $\varkappa K$ комплекса L и рассмотрим цикл c из K_n, гомологический класс которого равен нулю в L. Это значит, что $c = \partial l$ для некоторой $(n+1)$-мерной цепи $l \in L$ и, следовательно, смежный класс $l + K_{n+1}$ является циклом факторкомплекса $L/K \cong M$. Обратно, любой гомологический класс из $H_{n+1}(L/K)$ состоит из таких циклов $l + K_{n+1}$, что $\partial l = c \in K_n$, и значит, ему соответствует гомологический класс $\operatorname{cls} c$ из $H_n(K)$, который лежит в ядре $H_n(\varkappa)$. Сопоставление смежному классу $l + K_{n+1}$ элемента c определяет гомоморфизм $H_{n+1}(L/K) \to H_n(K)$, который мы теперь опишем детально.

Пусть в (4.1) m — цикл из M_{n+1}. Поскольку σ — эпиморфизм, можно выбрать такой элемент $l \in L_{n+1}$, что $\sigma l = m$, и, поскольку $\partial m = 0$, имеем $\sigma\partial l = 0$; раз последовательность E точна, то существует единственный цикл $c \in K_n$, для которого $\varkappa c = \partial l$, что отображено в диаграммах

$$\begin{tikzcd} l \arrow[r] \arrow[d] & m \arrow[d] \\ c \arrow[r] & \partial l \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{в} \quad \begin{tikzcd} & L_{n+1} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\partial"] & M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ K_n \arrow[r, "\varkappa"] & L_n \arrow[r] & M_n. \end{tikzcd}$$

Гомологический класс $\operatorname{cls} c \in H_n(K)$ не зависит от выбора l, удовлетворяющего равенству $\sigma l = m$, определяется только гомологическим классом элемента m и аддитивно зависит от m. Следовательно, отображение $\partial_E (\operatorname{cls} m) = \operatorname{cls} c$ определяет гомоморфизм

$$\partial_E: H_{n+1}(M) \to H_n(K), \tag{4.2}$$

называемый *инвариантной границей* или *связывающим гомоморфизмом* последовательности E. Более детально,

$$\partial_E \operatorname{cls} m = \operatorname{cls} c, \text{ если } \varkappa c = \partial l, \ \sigma l = m \text{ для некоторого } l. \tag{4.3}$$

Это подсказывает обозначение $c = \varkappa^{-1}\partial\sigma^{-1}m$; или, если рассматривать символ cls как гомоморфизм $\operatorname{cls}_K : C_n(K) \to H_n(K)$, то ∂_E определяется «обращающей» формулой $\partial_E = (\operatorname{cls}_K)\ \varkappa^{-1}\partial\sigma^{-1}(\operatorname{cls}_M)^{-1}$, несмотря на то, что обратные отображения cls^{-1}, $\varkappa^{-1}$, σ^{-1} определены неоднозначно (см., однако, § 6, ниже).

Теорема 4.1. (*Точная гомологическая последовательность.*) *Для каждой короткой точной последовательности* (4.1) *цепных комплексов соответствующая длинная последовательность*

$$\cdots \to H_{n+1}(M) \xrightarrow{\partial_E} H_n(K) \xrightarrow{\varkappa_*} H_n(L) \xrightarrow{\sigma_*}$$
$$\xrightarrow{\sigma_*} H_n(M) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(K) \to \cdots \tag{4.4}$$

групп гомологий, в которой отображение ∂_E — связывающий гомоморфизм, а $\varkappa_* = H_n(\varkappa)$, $\sigma_* = H_n(\sigma)$, является точной.

Последовательность (4.4) бесконечна в обе стороны, но равна нулю при $n < 0$, если комплексы положительны. Она дает искомое описание ядра и коядра отображения $H_n(\varkappa)$: $H_n(K) \to H_n(L)$ в том случае, когда $\varkappa$ мономорфизм, именно, ядро равно $\partial_E H_{n+1}(M)$, а коядро изоморфно $\sigma_* H_n(L)$.

Доказательство. В силу определений произведение любых двух последовательных гомоморфизмов последовательности (4.4) равно нулевому гомоморфизму. Для каждой размерности n покажем, что (i) $\operatorname{Ker}\varkappa_* \subset \partial_E H_{n+1}(M)$; (ii) $\operatorname{Ker}\sigma_* \subset \varkappa_* H_n(K)$; (iii) $\operatorname{Ker}\partial_E \subset \sigma_* H_n(L)$. Нашими предварительными рассуждениями показана уже справедливость первого включения.

Для доказательства второго включения предположим, что $\operatorname{cls}(c)$ — это гомологический класс такого цикла c из L_n, что $\sigma_*(\operatorname{cls} c) = 0$. Это значит, что $\sigma c = \partial m$ для некоторого $m \in M_{n+1}$. Поскольку σ — эпиморфизм, существует элемент $l \in L_{n+1}$, для которого $\sigma l = m$. Следовательно, $\sigma(c - \partial l) = 0$, так что $c - \partial l = \varkappa k$ для некоторого $k \in K_n$, причем $\partial k = 0$. Это означает, что $\operatorname{cls}(c) = \operatorname{cls}(c - \partial l) = \varkappa_* \operatorname{cls}(k)$ лежит в образе $\varkappa_*$.

Для доказательства третьего включения напомним, что $\partial_E \operatorname{cls}(m) = \operatorname{cls} c$, где $c \in K_{n-1}$, и существует элемент $l \in L_n$, для которого $\varkappa c = \partial l$, $\sigma l = m$, как в (4.3). Если $\operatorname{cls} c = 0$, то существует такой элемент k' из K_n, что $\partial k' = c$. Тогда $\varkappa\partial k' = \partial l$, следовательно, $\partial(l - \varkappa k') = 0$. Значит, $l - \varkappa k'$ есть цикл в L и $\sigma(l - \varkappa k') = \sigma l = m$, так что $\operatorname{cls}(m) \in \operatorname{Im}\sigma_*$, что и утверждалось. Этим доказательство закончено.

Рассмотрим категорию $\mathscr{E}$ коротких точных последовательностей цепных комплексов. Морфизмом $E \to E'$ в этой категории является тройка (f, g, h) цепных преобразований, превращающая диаграмму

$$\begin{array}{rl} E\colon & 0 \to K \to L \xrightarrow{\sigma} M \to 0 \\ & \quad\ \ \downarrow f \quad \downarrow g \quad\ \downarrow h \\ E'\colon & 0 \to K' \to L' \to M' \to 0 \end{array} \tag{4.5}$$

в коммутативную. При каждом n, $H_n(K)$, $H_n(L)$, $H_n(M)$ являются функторами аргумента E.

Предложение 4.2. *Для каждой последовательности $E \in \mathscr{E}$ связывающий гомоморфизм ∂_E: $H_{n+1}(M) \to H_n(K)$ естествен.*

Утверждение о естественности гомоморфизма ∂_E означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(M) & \xrightarrow{\partial_E} & H_n(K) \\ \downarrow{\scriptstyle H_{n+1}(h)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(f)} \\ H_{n+1}(M') & \xrightarrow{\partial_{E'}} & H_n(K') \end{array} \tag{4.6}$$

коммутативна. Доказательство легко проводится методом «диаграммного поиска» в (4.5), использующим определение гомоморфизма ∂_E. Полученный результат можно сформулировать в виде бо́льшей диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_{n+1}(L) & \xrightarrow{\sigma_*} & H_{n+1}(M) & \xrightarrow{\partial_E} & H_n(K) & \xrightarrow{\varkappa_*} & H_n(L) & \to \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & \\ \cdots \to & H_{n+1}(L') & \xrightarrow{\sigma'_*} & H_{n+1}(M') & \xrightarrow{\partial_{E'}} & H_n(K') & \xrightarrow{\varkappa'_*} & H_n(L') & \to \cdots . \end{array} \tag{4.7}$$

В этой диаграмме строки являются точными гомологическими последовательностями из теоремы 4.1, построенными для последовательностей E и E', а вся диаграмма коммутативна, например крайний слева квадрат коммутативен, потому что $\sigma'_* g_* = (\sigma' g)_*$, $h_*\sigma_* = (h\sigma)_*$ и $\sigma' g = h\sigma$ в силу коммутативности диаграммы (4.5). Наш вывод можно сформулировать так: морфизм E в E' индуцирует морфизм точных гомологических последовательностей, построенных для E и E' соответственно.

Конус отображения цепного преобразования $f : K \to K'$ дает пример указанной точной последовательности. Задача заключается в том, чтобы индуцированные отображения $f_* : H_n(K) \to H_n(K')$ групп гомологий поместить в точную последовательность. Для этой цели построим комплекс $M = M(f)$, называемый *конусом* *отображения* преобразования f (иногда менее точно называемый *цилиндром отображения* преобразования f), положив

$$M_n = K_{n-1} \oplus K'_n, \quad \partial(k, k') = (-\partial k, \partial k' + fk).$$

Тогда $\partial\colon M_n \to M_{n-1}$ удовлетворяет условию $\partial^2 = 0$, так что M — комплекс, а вложение $\iota\colon K' \to M$ есть цепное преобразование. Проекция $\pi : M \to K^+$, определенная как $\pi(k, k') = k$, также является цепным преобразованием, если под K^+ мы будем понимать комплекс K со сдвинутыми на единицу размерностями и измененным знаком у дифференциала [т. е. $(K^+)_n = K_{n-1}$]. Более того, последовательность $E_f\colon K' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow K^+$ является короткой точной последовательностью комплексов. Следовательно, имеем

Предложение 4.3. *Цепное преобразование $f\colon K \to K'$ с конусом отображения $M(f)$ определяет точную последовательность*

$$\dots \to H_n(K') \xrightarrow{\iota_*} H_n(M(f)) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(K) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(K') \to \dots .$$

Доказательство. Эта последовательность является точной гомологической последовательностью для E_f, поскольку $H_n(K^+) \cong H_{n-1}(K)$, а связывающий гомоморфизм $\partial_{E_f}\colon H_n(K^+) \to H_{n-1}(K')$ совпадает, как можно проверить, с гомоморфизмом, индуцированным f.

Конус отображения есть алгебраический аналог следующей геометрической конструкции. Пусть $f\colon X \to X'$ непрерывное отображение топологических пространств. Построим конус над X,

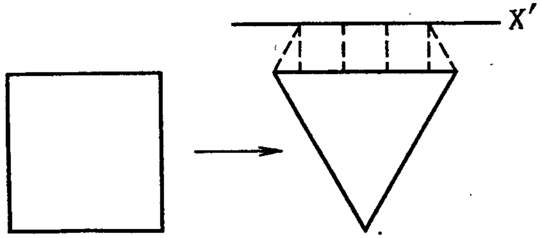


Рис. 4.

взяв декартово произведение $X \times I$ с единичным интервалом I и отождествив все точки $(x, 0)$ для $x \in X$. Присоединим этот конус к X', отождествив каждую точку $(x, 1)$ из $X \times I$ с $f(x) \in X'$; получившееся пространство есть конус отображения f и подсказывает формулу для взятия границы. Дольд [1960] провел дальнейшее исследование этих идей.

Теперь мы рассмотрим точные когомологические последовательности. Говорят, что короткая точная последовательность E комплексов R-модулей расщепляется как последовательность модулей, если для каждого n последовательность $K_n \rightarrowtail L_n \twoheadrightarrow M_n$ расщепляется, т. е. если для каждого n, K_n есть прямое слагаемое для L_n. Например, если каждый модуль M_n проективен, то последовательность E из (4.1) расщепляется как последовательность модулей в силу теоремы I.6.3.

Теорема 4.4. *Если G — R-модуль, а E короткая точная последовательность (4.1) комплексов R-модулей, которая расщепляется как последовательность модулей, то существует для каждой размерности n такой естественный связывающий гомоморфизм $\delta_E : H^n(K, G) \to H^{n+1}(M, G)$, что последовательность групп когомологий*

$$\dots \to H^n(M, G) \xrightarrow{\sigma^*} H^n(L, G) \xrightarrow{\varkappa^*} H^n(K, G) \xrightarrow{\delta_E} H^{n+1}(M, G) \to \dots \tag{4.8}$$

точна.

Доказательство. Для построения когомологической последовательности для E сначала применим контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_R(-, G)$ к E. В результате получим обращенную последовательность комплексов

$$E^* : 0 \to \mathrm{Hom}(M, G) \to \mathrm{Hom}(L, G) \to \mathrm{Hom}(K, G) \to 0.$$

Поскольку последовательность E расщепляется как последовательность модулей, последовательность E^* точна. Связывающий гомоморфизм для E^*

$$\partial_{E^*} : H_{-n+1}(\mathrm{Hom}(K, G)) \to H_{-n}(\mathrm{Hom}(M, G))$$

дает искомый связывающий гомоморфизм δ_E, если записать члены последовательности с верхними индексами: $H^{n-1} = H_{-n+1}$.

Ввиду предложения 4.2 δ_E естествен, если аргументы групп $H^n(K, G)$ и $H^{n+1}(M, G)$ рассматривать как аргументы контравариантных функторов из категории тех коротких точных последовательностей комплексов, которые расщепляются как модули. По той же причине δ_E также естествен, если рассматривать указанные функторы как ковариантные по аргументу G. Наконец, точная гомологическая последовательность для E^* с поднятыми индексами становится искомой точной когомологической последовательностью (4.8).

Для ссылок мы опишем, как действует δ_E на коцепи. Поскольку последовательность E^* точна, каждый n-мерный коцикл из K, рассматриваемый как гомоморфизм $f\colon K_n \to G$, можно представить в виде $f = g\varkappa$, где $g\colon L_n \to G$ есть n-мерная коцепь из L. Тогда $g\partial\varkappa = g\varkappa\partial = f\partial = 0$, так что $g\partial$ представимо в виде $g\partial = h\sigma$ для некоторого $h\colon M_{n+1} \to G$. Поскольку $h\partial\sigma = h\sigma\partial = g\partial\partial = 0$ и σ эпиморфизм, то $h\partial = 0$, т. е. h — коцикл в M. Тогда отображение

$$\delta_E \operatorname{cls} f = \operatorname{cls} h \text{ определяет гомоморфизм } \delta_E\colon H^n(K, G) \to H^{n+1}(M, G), \tag{4.9}$$

причем $h\sigma = g\partial$, $g\varkappa = f$ для некоторого g. Снова получается «обращающее» правило: $\delta_E = \operatorname{cls} \sigma^{*-1}\delta\varkappa^{*-1} \operatorname{cls}^{-1}$.

Другая точная последовательность групп когомологий возникает из короткой точной последовательности

$$S\colon 0 \to G' \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\tau} G'' \to 0 \tag{4.10}$$

модулей «коэффициентов». Если K — произвольный комплекс, то мономорфизм $\lambda\colon G' \to G$ индуцирует гомоморфизм $\lambda_*\colon H^n(K, G') \to H^n(K, G)$. Информация о ядре и коядре λ_* содержится в следующей точной последовательности (которая *не* является двойственной к последовательности из теоремы 4.4).

Т е о р е м а 4.5. *Если K — комплекс R-модулей, в котором каждый модуль K_n проективен, и если S — короткая точная последовательность R-модулей типа* (4.10), *то для каждой размерности n существует связывающий гомоморфизм $\delta_S\colon H^n(K, G'') \to H^{n+1}(K, G')$; этот гомоморфизм естествен, если рассматривать $H^n(K, G)$ как ковариантный функтор по аргументу S и контравариантный функтор по аргументу K, и включается в длинную точную последовательность*

$$\cdots \to H^n(K, G') \xrightarrow{\lambda_*} H^n(K, G) \xrightarrow{\tau_*} H^n(K, G'') \xrightarrow{\delta_S} H^{n+1}(K, G') \to \cdots. \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку каждый модуль K_n проективен, последовательность

$$S_*\colon 0 \to \operatorname{Hom}(K, G') \to \operatorname{Hom}(K, G) \to \operatorname{Hom}(K, G'') \to 0$$

точна и дает гомоморфизм δ_S, равный ∂_{S*}, причем индексы поднимаются, а точность последовательности (4.11) становится следствием теоремы 4.1.

Укажем явное правило для построения δ_S. Пусть $f\colon K_n \to G''$ — коцикл. Поскольку последовательность S_* точна, $f = \tau g$ для некоторой коцепи $g\colon K_n \to G$; поскольку f — коцикл, $g\partial = \lambda h$, где $h\colon K_{n+1} \to G'$ — коцикл. Тогда

$$\delta_S \operatorname{cls} f = \operatorname{cls} h, \quad \lambda h = g\partial, \quad \tau g = f. \tag{4.12}$$

Снова получается обращающее правило: $\delta_S = \operatorname{cls} \lambda^{-1}\delta\tau^{-1} \operatorname{cls}^{-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть преобразования $f, g\colon K \to K'$ цепно гомотопны. Показать, что ассоциированные точные последовательности для конусов отображения $M(f)$ и $M(g)$ изоморфны.

2. (Оператор Бокштейна.) Пусть K — комплекс свободных абелевых групп, Z_p — аддитивная группа целых чисел, приведенная по модулю простого числа p, и $S = (\lambda, \tau)\colon Z \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Z_p$ является короткой точной последовательностью, где λ есть умножение на p. Построить соответствующую точную последовательность (4.11) и показать, что при этом гомоморфизм $\beta = \tau_*\delta_S\colon H^n(K, Z_p) \to H^{n+1}(K, Z_p)$ можно описать так: представим каждый n-мерный коцикл $c\colon K_n \to Z_p$ как образ n-мерной коцепи $a\colon K_n \to Z$, тогда $\delta a = pb$ для некоторого $b\colon K_{n+1} \to Z$ и $\beta(\operatorname{cls} c) = \operatorname{cls}(\tau b)$. Этот гомоморфизм β известен как когомологический оператор Бокштейна (ср. Браудер [1961]).

3. Пусть преобразование $f\colon K \to K'$ имеет конус отображения M, ядро L и коядро N, так что точны короткие последовательности комплексов $F\colon L \rightarrowtail K \twoheadrightarrow fK$ и $G\colon fK \rightarrowtail K' \twoheadrightarrow N$. Построить цепные преобразования $g\colon L^+ \to M$ и $h\colon M \to N$, положив $g(l) = (l, 0)$, $h(k, k') = k' + fK$, и показать, что последовательность

$$\cdots \to H_{n-1}(L) \xrightarrow{g_*} H_n(M) \xrightarrow{h_*} H_n(N) \xrightarrow{\eta} H_{n-2}(L) \to \cdots$$

точна, где $\eta = \partial_F\partial_G$ есть произведение связывающих гомоморфизмов для F и G.

4. Показать, что точные последовательности предыдущего упражнения, предложения 4.3 и гомологические последовательности для F и G встречаются в «сплетенной» диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n+1}(N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n-1}(L) \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \\
H_{n+1}(fK) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_{n+1}(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_n(fK) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_n(M) \\
\cdots \arrow[r] & H_n(L) \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_n(K) \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_n(K') \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd},$$

которая коммутативна с точностью до знака (-1) в среднем квадрате (Маклейн [1960b]).

§ 5. Некоторые леммы о диаграммах

Как приложение точной гомологической последовательности может быть получена

Лемма 5.1. *(3×3 лемма.) Предположим, что в следующей коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\lambda"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\mu"'] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_3 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\xi"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d] & C_2 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

все три столбца и две верхние строки (или две нижние строки) точны. Тогда и третья строка точна.

Доказательство. Любая последовательность $A_3 \to A_2 \to A_1$ с такими отображениями α_2, α_1, что $\alpha_1\alpha_2 = 0$, может рассматриваться как цепной комплекс A с граничными гомоморфизмами α_2, α_1 и ненулевыми цепями только в размерностях 1, 2, 3. Группы гомологий этого комплекса исчезают (в размерностях 1, 2 и 3) тогда и только тогда, когда указанная последовательность является короткой точной последовательностью.

Предположим теперь, что последние две строки точны. Тогда для любого $a \in A_3$, $\nu\alpha_1\alpha_2 a = \beta_1\beta_2\lambda a = 0$; поскольку ν — мономорфизм, $\alpha_1\alpha_2 a = 0$. Значит, первая строка действительно является комплексом. Поскольку столбцы точны, мы можем рассматривать всю 3×3 диаграмму как короткую точную последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$ трех комплексов. Соответствующая гомологическая последовательность имеет вид

$$\cdots \to H_{n+1}(C) \to H_n(A) \to H_n(B) \to \cdots .$$

Но $H_{n+1}(C) = 0 = H_n(B)$ ввиду точности строк B и C. Поэтому из точности соответствующей гомологической последовательности следует, что $H_n(A) = 0$ для $n = 1, 2, 3$.

Доказательство аналогично, если точны первые две строки.

Основной результат этой главы — точность гомологической последовательности (4.4) — может быть выведен иным путем из леммы о коротких точных последовательностях модулей.

Морфизм коротких точных последовательностей описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varkappa'"] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

с точными строками; ядро и коядро этого морфизма являются короткими последовательностями, не обязательно точными (например, отображение $0 \rightarrowtail A = A$ в $A = A \twoheadrightarrow 0$ с $\beta = 1_A$). Горизонтальные отображения этой диаграммы индуцируют отображения, дающие точные последовательности

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma$$

и

$$\operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0.$$

Они могут быть соединены в длинную точную последовательность.

Лемма 5.2. *Для любой коммутативной диаграммы*

$$(D):\quad \begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varkappa'"] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C' & \end{tikzcd}$$

с точными строками существует такое отображение $D_* : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, естественное для функторов с аргументом D, что последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{D_*} \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \tag{5.2}$$

точна. Мы назовем (5.2) *последовательностью* Ker-Coker.

Доказательство. Пусть ι: $\operatorname{Ker}\gamma \to C$ — вложение, η: $A' \to A'/\alpha A$ — проекция. Обращающая формула $D_* = \eta\varkappa'^{-1}\beta\sigma^{-1}\iota$ однозначно определяет D_*. Для доказательства точности последовательности (5.2), например в члене $\operatorname{Coker}\alpha$, предположим, что $\varkappa'_*(a' + \alpha A) = 0$ для некоторого a'. Тогда $\varkappa' a' = \beta b$ для некоторого b и $\sigma'\varkappa' a' = \gamma\sigma b = 0$, так что $\sigma b \in \operatorname{Ker}\gamma$ и, следовательно, $D_*\sigma b = a' + \alpha A$, что и дает нужную точность. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично.

Мы назовем D_* *связывающим гомоморфизмом* диаграммы D.

Теперь мы докажем теорему 4.1 для короткой точной последовательности E комплексов $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow M$. Пусть $C_n(K)$ обозначает модуль n-мерных циклов модуля K; построим диаграмму

$$D(E):\quad \begin{array}{ccccccc} K_n/\partial K_{n+1} & \to & L_n/\partial L_{n+1} & \to & M_n/\partial M_{n+1} & \to & 0 \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \\ 0 \to C_{n-1}(K) & \to & C_{n-1}(L) & \to & C_{n-1}(M) & & \end{array}$$

с точными строками и вертикальными отображениями, индуцированными ∂. Первое ядро — это $C_n(K)/\partial K_{n+1} = H_n(K)$, а первое коядро — это $C_{n-1}(K)/\partial K_n = H_{n-1}(K)$, так что Ker-Coker последовательность (5.2) принимает вид

$$H_n(K) \to H_n(L) \to H_n(M) \xrightarrow{D(E)_*} H_{n-1}(K) \to H_{n-1}(L) \to H_{n-1}(M).$$

Среднее отображение $D(E)_*$, определенное обращением, совпадает со связывающим гомоморфизмом ∂_E теоремы 4.1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать 3×3 лемму диаграммным поиском, не используя точную гомологическую последовательность.

2. Показать, что вторая строка может не быть точной, если в условии 3×3 леммы предположить точность только первой и третьей строк; эта строка точна, если $\beta_1\beta_2 = 0$.

3. В предположениях 3×3 леммы установить точность последовательностей

$$0 \to A_3 \to B_3 \oplus A_2 \to B_2 \to C_1 \to 0,$$

$$0 \to A_3 \to B_2 \to C_2 \oplus B_1 \to C_1 \to 0.$$

4. Предположим, что в коммутативной 3×3 диаграмме все три столбца точны «слева» (т. е. точны в A и B) и две последние строки точны слева. Доказать, что первая строка точна слева. Если дополнительно β_1 и ξ — эпиморфизмы, то доказать точность первой строки.

5. Доказать точность Ker-Coker последовательности при помощи точной гомологической последовательности. [Указание: заменить A на Coim $(A \to B)$ и двойственно для C'.]

6. Для любых гомоморфизмов $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ построить точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to 0.$$

§ 6. Аддитивные отношения

«Обращающие» формулы могут быть объяснены в терминах «аддитивных отношений». Они появятся позднее при рассмотрении спектральных последовательностей.

Аддитивное отношение $r\colon A \rightharpoondown B$ определяется как подмодуль прямой суммы $A \oplus B$; другими словами, r есть непустое множество пар (a, b), замкнутое относительно сложения и умножения на элементы из R. *Обратным* к r является аддитивное отношение $r^{-1}\colon B \rightharpoondown A$, состоящее из всех таких пар (b, a), что $(a, b) \in r$. Если $s\colon B \rightharpoondown C$ — другое аддитивное отношение, то *произведением* $sr\colon A \rightharpoondown C$ считается множество всех таких пар (a, c), для которых существует такое $b \in B$, что $(a, b) \in r$, $(b, c) \in s$. Это умножение ассоциативно, если оно определено. *Граф* гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ — это аддитивное отношение, состоящее из всех пар $(a, \alpha a)$ для $a \in A$; поскольку произведением двух графов является граф произведения гомоморфизмов, мы можем отождествить каждый гомоморфизм с его графом. Класс всех модулей, играющих роль объектов, и всех аддитивных отношений $r\colon A \rightharpoondown B$, играющих роль морфизмов, является категорией, но отметим, что произведение rr^{-1} не обязано быть единичным отношением.

Для каждого аддитивного отношения $r\colon A \rightharpoondown B$ введем подмодули

$$\begin{aligned} \operatorname{Def} r &= [a \mid (\exists b),\ (a, b) \in r] & \operatorname{Im} r &= \operatorname{Def} r^{-1}, \\ \operatorname{Ker} r &= [a \mid (a, 0) \in r] & \operatorname{Ind} r &= \operatorname{Ker} r^{-1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Def} r \subset A$ и $\operatorname{Ind} r \subset \operatorname{Im} r \subset B$. Подмодуль $\operatorname{Def} r$ — это *область определения* r, в то время как Ind — *«неопределенность»* r, состоящая из всех таких b, что $(0, b) \in r$. Более того, r есть граф гомоморфизма тогда и только тогда, когда $\operatorname{Def} r = A$ и $\operatorname{Ind} r = 0$.

Например, обратным для гомоморфизма $\beta\colon B \to A$ служит аддитивное отношение β^{-1}, где $\operatorname{Def}\beta^{-1} = \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Ind}\beta^{-1} = \operatorname{Ker}\beta$. В комплексе K множество пар $(c, \operatorname{cls} c)$, где $c \in C_n(K)$, составляет аддитивное отношение $\operatorname{cls}\colon K_n \rightharpoondown H_n(K)$ с $\operatorname{Def}(\operatorname{cls}) = C_n(K)$. В силу этих замечаний «обращающая» формула для связывающего гомоморфизма появляется как произведение аддитивных отношений.

Каждое аддитивное отношение может рассматриваться как «многозначный» гомоморфизм; более точно, как гомоморфизм подмодуля в фактормодуль.

Предложение 6.1. *Каждое аддитивное отношение $r\colon A \rightharpoondown B$ определяет такой гомоморфизм $r^0\colon \operatorname{Def} r \to B/(\operatorname{Ind} r)$, что*

$$r = \pi^{-1} r^0 j^{-1}, \qquad j\colon \operatorname{Def} r \to A, \qquad \pi\colon B \to B/\operatorname{Ind} r, \tag{6.2}$$

где j — вложение, а π — проекция. Обратно, пусть даны подмодуль $S \subset A$, фактормодуль B/L модуля B и гомоморфизм $\beta\colon S \to B/L$. Существует такое единственное аддитивное отношение $r\colon A \rightharpoondown B$, что $r^0 = \beta$.

Доказательство. Если $a \in \operatorname{Def} r$, то из того, что $(a, b) \in r$ и $(a, b') \in r$ следует, что $(0, b - b') \in r$, значит, $b - b' \in \operatorname{Ind} r$. Тогда отображение $r^0(a) = b + \operatorname{Ind} r$ определяет гомоморфизм требуемого вида (6.2). Обратно, если дан гомоморфизм β, то r есть множество всех пар (s, b), где $b \in \beta(s)$.

Аналогичное рассуждение показывает, что каждое аддитивное отношение r индуцирует изоморфизм θ_r: $(\mathrm{Def}\, r)/(\mathrm{Ker}\, r) \cong$ $\cong (\mathrm{Im}\, r)/(\mathrm{Ind}\, r)$; обратно, каждый изоморфизм подфактора модуля A и подфактора модуля B возникает этим путем из единственного аддитивного отношения r.

Пусть даны подфактор S/K модуля A и подфактор S'/K' модуля A'. Каждый гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ *индуцирует* аддитивное отношение

$$\alpha_{\#} = \alpha(S/K,\ S'/K'):\ S/K \twoheadrightarrow S'/K', \tag{6.3}$$

определенное как множество всех пар $(s + K, s' + K')$ смежных классов, где $s \in S$, $s' \in S'$ и $s' = \alpha s$. Сюда включается введенное раньше понятие индуцированного гомоморфизма.

Для эквивалентности можно определить обратное отношение для индуцированного отношения.

Предложение 6.2. (*Принцип эквивалентности.*) *Если* θ: $A \to A'$ — *эквивалентность, то*

$$(\theta_{\#})^{-1} = (\theta^{-1})_{\#}: S'/K' \twoheadrightarrow S/K.$$

Действительно, каждое из отношений $(\theta_{\#})^{-1}$ и $(\theta^{-1})_{\#}$ состоит из одних и тех же пар.

В гл. XI мы используем произведение двух индуцированных отношений. Оно не всегда является отношением, индуцированным произведением гомоморфизмов. Пусть, например, B_1 — подмодуль прямой суммы $A = B \oplus B$, состоящий из всех пар $(b, 0)$, B_2 — подмодуль всех пар $(0, b)$ и Δ — подмодуль всех пар (b, b) («диагональный» подмодуль). Тогда 1_A индуцирует изоморфизм $B_1 \cong$ $\cong A/B_2 \cong \Delta$, однако отношение $B_1 \twoheadrightarrow \Delta$, индуцированное 1_A, состоит только из $(0, 0)$. Произведение отношений согласовано с произведением гомоморфизмов лишь при дополнительных предположениях, указанных, например, в следующем предложении:

Предложение 6.3 (*Принцип композиции.*) *Если гомоморфизмы* α: $A \to A'$ *и* β: $A' \to A''$ *индуцируют аддитивные отношения* $\alpha_{\#}: S/K \twoheadrightarrow S'/K'$ *и* $\beta_{\#}: S'/K' \twoheadrightarrow S''/K''$, *то*

$$\beta_{\#}\alpha_{\#} = (\beta\alpha)_{\#}: S/K \twoheadrightarrow S''/K''$$

при условиях (i) $\alpha K \supset K'$ *или* $\beta K' \subset K''$ *и* (ii) $\alpha S \subset S'$ *или* $\beta^{-1}S'' \subset S'$.

Доказательство. Предположим сначала, что $(s + K, s'' + K'') \in \beta_{\#}\alpha_{\#}$. По определению умножения двух отношений существуют такие элементы s_1' и s_2' в S', что $s_1' + K' = s_2' + K'$ и $\alpha s =$ $= s_1'$, $\beta s_2' = s''$. Значит, $s_1' - s_2' = k' \in K'$ и $\beta\alpha s = s'' + \beta k'$. В случае, когда $\beta K' \subset K''$ или $K' \subset \alpha K$, имеем $(s + K, s'' + K'') \in (\beta\alpha)_{\#}$, так что из условия (i) следует включение $\beta_{\#}\alpha_{\#} \subset (\beta\alpha)_{\#}$. Аналогично условие (ii) обеспечивает обратное включение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что $rr^{-1}r = r$ для каждого аддитивного отношения $r: A \twoheadrightarrow B$.

2. Доказать, что $(rs)^{-1} = s^{-1}r^{-1}$ для аддитивных отношений r и s.

3. Пусть u: $A \twoheadrightarrow A$ есть такое аддитивное отношение, что $u^{-1} = u = u^2$. Доказать, что существуют подмодули $K \subset S \subset A$, для которых $u =$ $= [(s, s + k) \mid s \in S,\ k \in K]$. Установить обратное утверждение.

4. Описать rr^{-1} и $r^{-1}r$ для аддитивного отношения $r: A \twoheadrightarrow B$.

5. В условиях сильной леммы о четырех гомоморфизмах (лемма I.3.2) доказать, что $\xi\alpha^{-1} = \beta^{-1}\eta$.

§ 7. Сингулярная гомология

Полезность комплексов можно проиллюстрировать, кратко описав группы сингулярных гомологий топологического пространства. Для этого введем аффинные симплексы.

Пусть E — n-мерное евклидово пространство, т. е. n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, в котором задано симметричное, билинейное и положительно определенное скалярное (внутреннее) произведение (u, v) для каждой пары векторов $u, v \in E$. Обычное расстояние $\rho(u, v) = (u - v, u - v)^{1/2}$ превращает E в метрическое пространство и, следовательно, в топологическое пространство. В частности, E может быть пространством E^n всех упорядоченных наборов $u = (a_1, \ldots, a_n)$ из n действительных чисел a_i, в котором сложение определено покомпонентно, а скалярное произведение задано стандартно,

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = \sum a_i b_i.$$

Прямолинейный отрезок, соединяющий две точки u, $v \in E$,— это множество всех точек $tu + (1 - t)v$, где t действительно и $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. множество всех точек $x_0 u + x_1 v$, где x_0, x_1 — действительные числа, $x_0 + x_1 = 1$, $x_0 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$. Подмножество C из E *выпукло*, если оно содержит отрезок, соединяющий любые две точки из C. Если $u_0, \ldots, u_m$ есть $m + 1$ точка из E, то множество всех точек

$$u = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \ldots + x_m u_m,\quad x_0 + \ldots + x_m = 1,\quad x_i \geqslant 0, \tag{7.1}$$

является выпуклым множеством, содержащим $u_0, \ldots, u_m$, причем наименьшим выпуклым множеством, содержащим эти точки; оно называется *выпуклой оболочкой* точек $u_0, \ldots, u_m$.

Говорят, что точки $u_0, \ldots, u_m$ *аффинно независимы*, если каждая точка их выпуклой оболочки имеет единственное представление в виде (7.1); действительные числа x_i называются *барицентрическими координатами* точки u относительно $u_0, \ldots, u_m$. Можно показать, что точки $u_0, \ldots, u_m$ аффинно независимы тогда и только тогда, когда векторы $u_1 - u_0, \ldots, u_m - u_0$ линейно независимы.

Аффинный m-мерный симплекс — по определению выпуклая оболочка $m+1$ аффинно независимых точек. Эти точки являются *вершинами* симплекса. Так, одномерный симплекс — это прямолинейный отрезок, двумерный симплекс — это треугольник (с внутренностью), трехмерный симплекс — тетраэдр и т. д. Для каждой размерности n мы выберем *стандартный* аффинный n-мерный симплекс Δ^n в пространстве E^n и будем обозначать вершины Δ^n как $(0, 1, \ldots, n)$. (Например, возьмем за 0 начало координат, а за $1, 2, \ldots, n$ ортогональный базис из n векторов из E^n.)

Для любого топологического пространства X *сингулярным n-мерным симплексом* T в X называется непрерывное отображение $T\colon \Delta^n \to X$. Так, нульмерный симплекс в X — это просто точка из X или, более точно, отображение стандартной точки Δ^0 в точку из X. Сначала мы построим некоторые сингулярные симплексы в выпуклых подмножествах пространства E.

Пусть E и E' — евклидовы пространства, $L\colon E \to E'$ — линейное преобразование и u_0' — фиксированный вектор в E'. Функция $f(u) = u_0' + L(u)$, $u \in E$, называется *аффинным преобразованием* $f\colon E \to E'$. Будучи композицией линейного преобразования L и сдвига на u_0', f является непрерывным отображением.

Предложение 7.1. *Если $u_0, \ldots, u_n$ суть $(n+1)$ аффинно независимых точек в E^n, а $v_0, \ldots, v_n \in E'$, то существует единственное аффинное преобразование $f\colon E^n \to E'$, для которого $f(u_i) = v_i$, $i = 0, \ldots, n$.*

Доказательство. Векторы $u_i - u_0$, $i = 1, \ldots, n$ составляют базис в E^n. Пусть L — однозначно определенное линейное преобразование, для которого $L(u_i - u_0) = v_i - v_0$; тогда $f(u) = v_0 - L(u_0) + L(u)$ есть искомое аффинное преобразование. Оно может быть записано также в барицентрических координатах:

$$f(x_0u_0 + x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_0v_0 + \ldots + x_nv_n, \quad \sum x_i = 1.$$

В частности, пусть $v_0, \ldots, v_n$ — упорядоченное множество точек выпуклого подмножества C из E'. Единственное аффинное преобразование $f\colon E^n \to E'$, которое переводит вершины $0, 1, \ldots, n$ стандартного симплекса Δ^n в том же порядке в точки $v_0, \ldots, v_n$, задает непрерывное отображение $\Delta^n \to C$, обозначаемое как

$$(v_0, \ldots, v_n)_C\colon \Delta^n \to C. \tag{7.2}$$

Это отображение мы будем называть аффинным *сингулярным n-мерным симплексом* (отображающим стандартные вершины $0, \ldots, n$ в $v_0, \ldots, v_n$). Например, если $v_0, \ldots, v_n$ аффинно независимы, это отображение является гомеоморфизмом стандартного симплекса Δ^n на аффинный симплекс, натянутый на точки v. В частности, $J_n = (0, 1, \ldots, n)_{\Delta^n}$ — тождественное отображение Δ^n на себя. Если $v_0, \ldots, v_n$ зависимы, то соответствующее отображение $(v_0, \ldots, v_n)_C$ стягивает стандартный симплекс Δ^n на симплекс меньшей размерности.

Теперь мы можем описать «границу» Δ^n, состоящую из некоторых $(n-1)$-мерных сингулярных симплексов, которые являются «гранями» Δ^n. Например, грани треугольника $\Delta^2 = (0, 1, 2)$ суть стороны, представленные отрезками (12), (02) и (01); в обозначениях (7.2) они являются тремя непрерывными отображениями $(1, 2)_{\Delta^2}$, $(0, 2)_{\Delta^2}$ и $(0, 1)_{\Delta^2}$ симплекса Δ^1 в Δ^2.

В общем случае Δ^n имеет $n+1$ грань; i-я грань этого симплекса — это аффинный сингулярный $(n-1)$-мерный симплекс

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i_n\colon (0, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n)_{\Delta^n}\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{7.3}$$

где символ $\hat{i}$ означает, что вершина i должна быть пропущена. Любой сингулярный n-мерный симплекс $T\colon \Delta^n \to X$ имеет $n+1$ грань d_iT. Эти грани определяются формулой

$$d_iT = T\varepsilon^i_n\colon \Delta^{n-1} \to X, \quad i = 0, \ldots, n, \quad n > 0. \tag{7.4}$$

Другими словами, d_iT есть отображение, полученное ограничением T на i-й грани Δ^n и рассматриваемое (при помощи ε^i) как отображение, определенное на Δ^{n-1}. Любой сингулярный симплекс T можно записать как произведение $T = TJ_n$, где $J_n\colon \Delta^n \to \Delta^n$ — тождественное отображение Δ^n и, следовательно, сингулярный n-мерный симплекс пространства Δ^n. Грани T задаются тогда формулой

$$d_iT = T(d_iJ_n), \quad i = 0, \ldots, n, \quad n > 0. \tag{7.5}$$

Для аффинного сингулярного симплекса (7.2) i-я грань получается, если опустить i-ю вершину

$$d_i(v_0, \ldots, v_n)_C = (v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)_C. \tag{7.6}$$

Процесс построения итерированных граней удовлетворяет тождеству

$$d_i d_jT = d_{j-1} d_iT, \quad i < j. \tag{7.7}$$

Ввиду (7.5) достаточно установить это соотношение для $T = J_n$; но в этом случае оно очевидно, поскольку опустить сначала вершину j, а потом вершину i — это то же самое, что опустить сначала вершину i, а затем (в новой нумерации вершин $d_i J_n$) вершину $j-1$. Другое доказательство можно получить, представив каждую точку стандартного n-мерного симплекса Δ^n ее барицентрическими координатами $x_0, \ldots, x_n$. Сингулярный n-мерный симплекс T в пространстве X является тогда непрерывной функцией со значениями $T(x_0, \ldots, x_n) \in X$, определенной для всех действительных чисел x_i, где $x_i \geqslant 0$ и $x_0 + \ldots + x_n = 1$, причем i-я грань будет функцией, определенной формулой

$$(d_i T)(x_0, \ldots, x_{n-1}) = T(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}),$$

т. е. приравниванием i-й переменной в T нулю. Следовательно, получаем (7.7), потому что приравнять сначала x_j нулю, а затем x_i нулю при $i < j$ в $T(x_0, \ldots, x_n)$ — то же самое, что приравнять x_i нулю, а затем приравнять нулю переменное с новым номером $j-1$.

Для каждого пространства X мы построим теперь комплекс $S(X)$ абелевых групп, называемый *сингулярным комплексом* пространства X. Возьмем за $S_n(X)$ свободную абелеву группу, свободными образующими которой являются все сингулярные n-мерные симплексы T пространства X. Тогда операция взятия i-й грани определяет гомоморфизм d_i: $S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ для $i = 0, \ldots, n$ и $n > 0$. Определим *граничный* гомоморфизм

$$\partial\colon S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

как сумму гомоморфизмов взятия граней с чередующимися знаками, т. е.

$$\partial T = d_0 T - d_1 T + \ldots + (-1)^n d_n T = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i T, \quad n > 0. \quad (7.8)$$

Далее, n-мерная цепь $c \in S_n(X)$ имеет единственное представление в виде суммы $c = \Sigma_T\, c(T)\, T$, где коэффициенты $c(T)$ будут целыми числами, равными нулю, за исключением конечного числа симплексов T; ее граница $\partial c = \Sigma\, c(T)\, \partial T$. Для доказательства того, что $S(X)$ есть комплекс, нужно показать, что произведение $\partial\partial : S_n \to S_{n-2}$ равно нулевому гомоморфизму при $n > 1$. Достаточно установить, что $\partial\partial T = 0$. Но

$$\partial\partial T = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} d_i d_j T + \sum_{i \geqslant j} (-1)^{i+j} d_i d_j T.$$

Используем (7.7) и изменим символы i и j во второй сумме. Тогда

$$\partial\partial T = \sum_{j-1 \geqslant i} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i T + \sum_{k \geqslant i} (-1)^{i+k} d_k d_i T.$$

Обе суммы равны с точностью до знака, следовательно, они взаимно уничтожаются, что и дает $\partial\partial = 0$. Теперь n-мерная группа сингулярных гомологий $H_n(X)$ пространства X определяется как n-я группа гомологий $H_n(S(X))$ комплекса $S(X)$.

Теорема 7.2. *Группа гомологий $H_n(X)$ является ковариантным функтором от X.*

Доказательство. Если Y — второе топологическое пространство и f: $X \to Y$ — произвольное непрерывное отображение, то каждый сингулярный симплекс T: $\Delta^n \to X$ пространства X определяет при умножении на f сингулярный симплекс fT: $\Delta^n \to Y$ пространства Y. Соответствие $T \to fT$, заданное для образующих группы $S_n(X)$, определяет гомоморфизм $S_n(f)$: $S_n(X) \to S_n(Y)$. Более того, $d_i(fT) = f(d_i T)$; следовательно, $\partial S(f) = S(f)\,\partial$, так что $S(f)$ — цепное преобразование, которое индуцирует гомоморфизмы $H_n(S(f))$: $H_n(X) \to H_n(Y)$ групп гомологий любой размерности. Вместе с этими гомоморфизмами H_n является ковариантным функтором в категории, объектами которой служат все топологические пространства, а морфизмами — все непрерывные отображения.

Если G — произвольная абелева группа, то группы когомологий $H^n(S(X), G)$ являются *группами сингулярных когомологий* пространства X с коэффициентами в G. Они являются бифункторами, контравариантными по X и ковариантными по G.

Гомоморфизм ε: $S_0(X) \to Z$, переводящий все сингулярные 0-мерные симплексы в $1 \in Z$, называется *пополнением* $S(X)$. Поскольку $\varepsilon\partial = 0 : S_1(X) \to Z$, ε: $S(X) \to Z$ есть комплекс над Z. Более того, ε индуцирует эпиморфизм $\varepsilon_* : H_0(X) \twoheadrightarrow Z$. Пространство X называется *ацикличным*, если $H_n(X) = 0$ при $n > 0$ и ε_* является изоморфизмом $H_0(X) \cong Z$.

Предложение 7.3. *Топологическое пространство с единственной точкой ациклично.*

Доказательство. Пусть $X = \{x\}$ — данное пространство. Для любой размерности n пространство X имеет только один сингулярный симплекс, именно отображение $T_n : \Delta^n \to \{x\}$, которое стягивает Δ^n в точку x. Следовательно, каждая грань $d_i T_n$ есть T_{n-1}, $i = 0, \ldots, n$. Поскольку ∂T есть альтернированная сумма граней $\partial T_{2m} = T_{2m-1}$ и $\partial T_{2m-1} = 0$. Значит, в четных размерностях $S(X)$ нет циклов, кроме 0, в то время как в нечетных размерностях все элементы из $S_{2m-1}(X)$ являются циклами, а также границами. Следовательно, $H_n(X) = 0$ при всех $n > 0$; очевидно, что $H_0(X) \cong Z$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть аффинный симплекс Г является выпуклой оболочкой аффинно независимых точек $u_0, \ldots, u_m$. Показать, что точка u тогда и только тогда совпадает с одной из точек u_i, когда из того, что $v, w \in \Gamma$ и u лежит на отрезке, соединяющем v и w, следует, что $u = v$ или $u = w$. Вывести отсюда, что Г как выпуклое множество определяет свои вершины.

2. Пусть пространство X линейно связно. Доказать, что $\varepsilon_* : H_0(X) \cong Z$. (Определение: пусть I — единичный интервал. Пространство X *линейно связно*, если для любой пары точек $x, y \in X$ существует непрерывное отображение $f\colon I \to X$, для которого $f(0) = x$, $f(1) = y$.)

§ 8. Гомотопия

Говорят, что два непрерывных отображения пространства X в пространство Y *гомотопны*, если можно непрерывно деформировать первое отображение во второе. Рассмотрим деформацию как протекающую на единичном временном интервале; тогда ее можно считать непрерывным отображением, определенным на декартовом произведении $X \times I$ пространства X и единичного интервала I, $0 \leqslant t \leqslant 1$, действительной оси t. Значит, мы даем такое

Определение. Два непрерывных отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ называются гомотопными, если существует такое непрерывное отображение $F\colon X \times I \to Y$, что

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x). \tag{8.1}$$

В этом случае мы будем писать $F\colon f_0 \simeq f_1 : X \to Y$.

Условие (8.1) означает, что гомотопия начинается при $t = 0$ с начального отображения $f_0(x)$ и кончается при $t = 1$ последним отображением $f_1(x)$. Например, пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $1\colon X \to X$ гомотопно отображению, которое переводит X в точку. Любое выпуклое множество C евклидова пространства стягиваемо в любую свою точку w гомотопией D, определенной формулой

$$D(u, t) = tw + (1-t)u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u \in C. \tag{8.2}$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и принимает значения из множества C, потому что C выпукло.

Геометрическое понятие гомотопии тесно связано с алгебраическим понятием цепной гомотопии. В качестве первого примера мы докажем

Предложение 8.1. *Любое выпуклое множество C евклидова пространства ациклично.*

В доказательстве используется цепная гомотопия $s : S_n(C) \to S_{n+1}(C)$. Поскольку $S_n(C)$ — свободная абелева группа, порожденная сингулярными n-мерными симплексами T пространства C, достаточно определить для каждого T сингулярный $(n+1)$-мерный симплекс $sT : \Delta^{n+1} \to C$. Используя барицентрические координаты $(x_0, \ldots, x_{n+1})$ точки симплекса Δ^{n+1}, положим

$$(sT)(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \tag{8.3}$$
$$= \begin{cases} x_0 w + (1-x_0)\, T\left(\dfrac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \dfrac{x_{n+1}}{1-x_0}\right), & x_0 \neq 1, \\ w, & x_0 = 1, \end{cases}$$

где w — фиксированная точка из C. Для того чтобы убедиться в том, что функция sT непрерывна при $x_0 = 1$, мы перепишем определение таким образом, чтобы оно походило на геометрическую гомотопию D из (8.2). Пусть $v_0 = 0$ есть первая вершина симплекса Δ^{n+1}. Тогда

$$(0, x_1/(1-x_0), \ldots, x_{n+1}/(1-x_0))$$

можно рассматривать как барицентрические координаты некоторой точки u' на противоположной грани. Каждая точка из Δ^{n+1} может быть записана как среднее взвешенное $x_0 v_0 + (1 - x_0)\, u'$ для некоторой единственной точки u', за исключением того случая, когда $x_0 = 1$. Точка u' противоположной грани определяет такую точку $u \in \Delta^n$, для которой $\varepsilon^0 u = u'$. Определение (8.3) теперь во всех случаях можно прочитать следующим образом:

$$(sT)(x_0 v_0 + (1-x_0)\, u') = x_0 w + (1-x_0)\, T(u), \quad \varepsilon^0 u = u'.$$

Другими словами отрезок из Δ^{n+1}, соединяющий v_0 с каждой точкой u' противоположной грани, отображается посредством sT линейно на сегмент, соединяющий $w \in C$ с $T(u) \in C$. В частности, поскольку Δ^n компактно, то $T\Delta^n$ компактно и, следовательно, ограничено, так что $sT\colon \Delta^{n+1} \to C$ непрерывно при $x_0 = 0$.

Это отображение $s\colon S_n(C) \to S_{n+1}(C)$ является стягивающей гомотопией для расширенного комплекса $\varepsilon\colon S(X) \to Z$. Пусть в обозначениях (2.5) $f : Z \to S(X)$ — цепное преобразование, которое переводит $1 \in Z$ в сингулярный нульмерный симплекс T_0 данной точки $w \in C$. Если положить $x_i = 0$, i-я грань $d_i(sT)$ является сингулярным n-мерным симплексом, получающимся из (8.3). Следовательно, $d_0(sT) = T$, а $d_{i+1}(sT) = sd_iT$, если $n > 0$, и $d_1 sT = T_0$, если $n = 0$. Отсюда $\partial(sT) = T - s(\partial T)$ при $n > 0$, $\partial sT = T - f\varepsilon T$ при $n = 0$ и $\varepsilon f = 1$, в согласии с (2.5). Значит, комплекс $S(X)$ ацикличен, что и требовалось доказать. ∎

Более обще, рассмотрим произвольную гомотопию $F\colon X \times I \to Y$. Будем считать $X \times I$ цилиндром с основанием X; границей этого цилиндра является верхнее основание (на котором $F = f_1$) минус нижнее основание (на котором $F = f_0$) минус стороны [т. е. минус F на $(\partial X)\times I$]. Окончательная схематическая формула $\partial F = f_1 - f_0 - F\partial$ подсказывает определение $\partial s = f_1 - f_0 - s\partial$ цепной гомотопии. Эти наводящие рассуждения можно точно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 8.2. *Если $f_0 \simeq f_1$: $X \to Y$ есть гомотопные непрерывные отображения, то индуцированные цепные преобразования $S(f_0)$, $S(f_1): S(X) \to S(Y)$ цепно гомотопны.*

Мы сведем эту теорему к специальному случаю цилиндра $X \times I$. Под нижним основанием b и верхним основанием t этого цилиндра мы будем понимать непрерывные функции b, t: $X \to X\times I$, определенные равенствами $b(x) = (x, 0)$ и $t(x) = (x, 1)$; эти функции, очевидно, гомотопны.

Лемма 8.3. *Для любого цилиндра существует цепная гомотопия $u: S(t) \simeq S(b)$.*

Из этой леммы вытекает теорема 8.2. Действительно, пусть F: $X\times I \to Y$ — произвольная гомотопия F: $f_0 \simeq f_1$. Тогда $Fb = f_0$, $Ft = f_1$ и $S(F)$ — цепное преобразование. Определим s как произведение

$$s = S_{n+1}(F)\, u : S_n(X) \xrightarrow{u} S_{n+1}(X\times I) \to S_{n+1}(Y).$$

Тогда

$$\partial s + s\partial = S(F)(\partial u + u\partial) = S(F)(S(t) - S(b)) = S(f_1) - S(f_0).$$

При доказательстве леммы мы установим большее: отображение $u = u_X: S(X) \to S(X\times I)$ можно построить сразу для всех топологических пространств таким образом, чтобы это отображение было естественным. Для каждого непрерывного отображения g: $X \to X'$ топологических пространств естественность требует, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{u_X} & S_{n+1}(X\times I) \\ \downarrow{\scriptstyle S(g)} & & \downarrow{\scriptstyle S(g\times 1)} \\ S_n(X') & \xrightarrow{u_{X'}} & S_{n+1}(X'\times I) \end{array} \tag{8.4}$$

была коммутативной. Заметим, что отображения $b, t: X \to X\times I$ уже естественны. Мы построим нужное отображение u индукцией по n. Для $n = 0$ сингулярный нульмерный симплекс — это просто точка $T(0)$ из X. Возьмем в качестве u_0T сингулярный одномерный симплекс, определенный равенством $(u_0T)(x_0, x_1) = (T(0), x_1)$, так что u_0T есть вертикальный отрезок, проходящий через $T(0)$ в цилиндре $X\times I$. Тогда $d_0(u_0T) = t(T(0))$, $d_1(u_0T) = b(T(0))$, так что $\partial(u_0T)$ действительно равняется $S(t)T - S(b)T$. Более того, u_0, очевидно, естественно.

При $n > 0$ предположим, что отображения u_m определены уже для всех $m < n$, в частности $S(t) - S(b) = \partial u_{n-1} + u_{n-2}\partial$; если $n = 1$, то u_{n-2} в этом равенстве есть нуль. Пусть J_n: $\Delta^n \to \Delta^n$ — тождественное отображение стандартного симплекса. Сначала мы определим $uJ_n \in S_{n+1}(\Delta^n\times I)$; граница этого элемента должна быть равной

$$\partial uJ_n = S(t)J_n - S(b)J_n - u_{n-1}\partial J_n. \tag{8.5}$$

Выражение c, стоящее справа в этом равенстве, является цепью из $S_n(\Delta^n\times I)$; его граница

$$\partial c = \partial S(t)J_n - S(b)\partial J_n - \partial u_{n-1}\partial J_n = (S(t) - S(b) - \partial u_{n-1})\partial J_n$$

равна нулю по индуктивному предположению. Значит, c является n-мерным циклом из $\Delta^n\times I$. Но $\Delta^n \times I$ — это выпуклое множество евклидова пространства, и, следовательно, оно ациклично в силу предложения 8.1. Поэтому c — граница, т. е. $c = \partial a$ для некоторого $a \in S_{n+1}(\Delta^n\times I)$. Мы полагаем $uJ_n = a$; тогда равенство (8.5) имеет место.

Если теперь T: $\Delta^n \to X$ есть сингулярный симплекс некоторого пространства X, $T = TJ_n = S(T)J_n$ и $T\times 1: \Delta^n\times I \to X\times I$, то положим $uT = S(T\times 1)\,u\,J_n = S(T\times 1)\,a$. При таком определении u немедленно выполняется требование естественности. Чтобы установить, что в результате получается нужная гомотопия, подсчитаем

$$\partial uT = S(T\times 1)\partial a = S(T\times 1)[S(t)J_n - S(b)J_n - u_{n-1}\partial J_n],$$

где t и b — верхнее и нижнее основания цилиндра $\Delta^n\times I$. Но t, b и u_{n-1} естественны, следовательно, ввиду (8.5) $\partial uT = S(t)T - S(b)T - u_{n-1}\partial T$, что и требовалось.

Этот тип доказательства состоит в том, что искомый объект (в данном случае — искомая цепная гомотопия) сперва строится для цепи, взятой в качестве модели, например для J_n, причем принимается во внимание, что пространство $\Delta^n\times I$, в котором эта модель лежит, ациклично, а затем этот объект распространяется на другие пространства при помощи отображений T. Это старый метод доказательства в топологии; он встретится позднее вновь (гл. VIII) как метод ацикличных моделей. Здесь же его достоинство состоит в том, что он позволяет избежать установления явной формулы для гомотопии u.

Следствие 8.4. *Если непрерывные отображения $f_0, f_1: X \to Y$ гомотопны, то индуцированные гомоморфизмы $H(f_0)$, $H(f_1): H_n(X) \to H_n(Y)$ равны.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что любое стягиваемое пространство ациклично.

2. Пусть в *призме* $\Delta^n \times I$ числа 0, 1, ..., n обозначают вершины нижнего основания, а $0'$, $1'$, ..., n' — вершины верхнего основания. Показать, что точное выражение для гомотопии u при $X = \Delta^n$ в лемме 8.3 дается формулой

$$uJ_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (0, 1, \ldots, i, i', (i+1)', \ldots, n')_{\Delta^n \times I},$$

в которой использованы обозначения, введенные для аффинных сингулярных симплексов.

3. Показать, что при $n = 1, 2$ в упражнении 2 члены uJ_n соответствуют «триангуляции» призмы $\Delta^n \times I$ (сделать чертеж!).

4. Показать, что $\Delta^n \times I$ можно «триангулировать» следующим образом. Частично упорядочим вершины $\Delta^n \times \{0\}$ и $\Delta^n \times \{1\}$ по правилу: $(i, \varepsilon) \leqslant (j, \eta)$, где $\varepsilon, \eta = 0, 1$, если $i \leqslant j$ и $\varepsilon \leqslant \eta$. Возьмем в качестве симплексов триангуляции все те симплексы, которые образованы линейно упорядоченными подмножествами всего множества вершин. Показать, что полученные n-мерные симплексы — это в точности те симплексы, которые фигурируют в uJ_n в упражнении 2.

§ 9. Аксиомы для гомологии

Пусть A — подпространство пространства X. Отождествим каждый сингулярный симплекс $T: \Delta^n \to A$ пространства A с отображением $\Delta^n \to A \to X$; тогда T становится симплексом из X, а сингулярный комплекс $S(A)$ — подкомплексом в $S(X)$. Группы гомологий факторкомплекса

$$H_n(X, A) = H_n(S(X)/S(A)) \tag{9.1}$$

называются *группами относительных гомологий пары* пространств (X, A). Они являются подфакторами факторгруппы $S(X)/S(A)$, следовательно, они могут быть переписаны как подфакторы

$$H_n(X, A) = C_n(X, A)/B_n(X, A) \tag{9.2}$$

комплекса $S(X)$. Группа $C_n(X, A)$ состоит из таких элементов $c \in S_n(X)$, для которых $\partial c \in S_{n-1}(A)$, в то время как $B_n(X, A) = S_n(A) \cup \partial S_{n+1}(X)$. Элементы c из $C_n(X, A)$ называются *относительными циклами*; элементы из $B_n(X, A)$ называются *относительными границами*. Само пространство X можно рассматривать как пару пространств $(X, \varnothing)$, где $\varnothing$ — пустое множество; тогда $H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$.

Отображением $f: (X, A) \to (Y, B)$ одной пары пространств в другую по определению считается такое непрерывное отображение $f: X \to Y$, что $f(A) \subset B$. Относительно этих отображений как морфизмов пары пространств образуют категорию, а $H_n(X, A)$ является ковариантным функтором из этой категории в категорию абелевых групп.

Каждая пара (X, A) порождает короткую точную последовательность комплексов $S(A) \rightarrowtail S(X) \twoheadrightarrow S(X)/S(A)$. Связывающий гомоморфизм ∂_* этой последовательности называется *инвариантным граничным оператором* (дифференциалом, *инвариантной границей*) пары (X, A); из точной гомологической последовательности теоремы 4.1 получаем теорему:

Теорема 9.1. *Если (X, A) — пара пространств, то длинная последовательность*

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \to \ldots, \tag{9.3}$$

оканчивающаяся членами $\to H_0(X) \to H_0(X, A) \to 0$, *точна.*

В этой последовательности $i: (A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$ и $j: (X, \varnothing) \to (X, A)$ суть отображения пар, индуцированные тождественным отображением, а ∂_* задается для каждого относительного цикла c равенством $\partial_*(\operatorname{cls} c) = \operatorname{cls}(\partial c)$. Мы уже отмечали [пример (1.3)], что отображение $i_*: H_n(A) \to H_n(X)$ может не быть мономорфизмом; указанная выше точная последовательность описывает ядро и образ i_*.

Два отображения $f_0, f_1: (X, A) \to (Y, B)$ пар пространств гомотопны, если существует гомотопия $F: f_0 \simeq f_1: X \to Y$, при которой $F(A \times I) \subset B$; это последнее условие означает, что F как отображение из $A \times I$ является гомотопией между f_0 и f_1 как отображениями A в B. Распространением доказательства теоремы 8.2 можно показать, что для гомотопных отображений f_0, f_1 пар $H_n(f_0) = H_n(f_1): H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.

Теория групп сингулярных гомологий пар пространств дает таким образом:

1. Функторы $H_n(X, A)$ из категории пар пространств в категорию абелевых групп, $n = 0, 1, \ldots$.

2. Естественные гомоморфизмы $\partial_*: H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Эти объекты удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

3. Если X состоит из одной точки, то $H_0(X) \cong Z$, а $H_n(X) = 0$ при $n > 0$.

4. Для любой пары (X, A) относительная гомологическая последовательность (9.3) точна.

5. Гомотопные отображения пар пространств индуцируют равные гомоморфизмы для каждой группы H_n.

6. (Вырезание.) Если $X \supset A \supset M$ — такие пространства, что замыкание M содержится во внутренней области A, то обозначим через $X - M \supset A - M$ пространства, полученные из X и из A соответственно выбрасыванием всех точек пространства M. Тогда вложение $k: X - M \to X$ индуцирует изоморфизм групп относительных гомологий

$$H_n(k): H_n(X-M, A-M) \cong H_n(X, A). \tag{9.4}$$

В наших рассмотрениях были установлены все эти свойства, кроме шестого. Доказательство этого свойства использует «барицентрические подразделения», оно может быть найдено у Стинрода — Эйленберга [1952], Уоллеса [1957] или Хилтона — Уайли [1960].

Эти шесть свойств могут быть взяты в качестве аксиом для теории гомологий. Можно доказать, что в том случае, когда пара (X, A) триангулируется конечным числом аффинных симплексов, любые группы относительных гомологий, удовлетворяющие аксиомам, должны совпадать с группами сингулярных гомологий. Более того, можно вычислить только из аксиом сингулярные гомологические группы элементарных пространств, совпадающие с вычисленными в § 1 при помощи «наивного» подразбиения группами. В частности, если S^n есть n-мерная сфера, то устанавливается, что $H_n(S^n) \cong Z$, $H_0(S^n) \cong Z$ и $H_i(S^n) = 0$ при $0 \neq i \neq n$. Эти и другие поразительные геометрические свойства (теорема Брауэра о фиксированной точке и т. д.) изложены в книге Эйленберга и Стинрода [1952], гл. XI.

Мы же теперь заканчиваем наше слишком короткое описание использования теории гомологий в топологии.

Замечания. Слово «комплекс» первоначально означало симплициальный комплекс; в топологии слово «комплекс» имеет различные геометрические значения, такие, как цепной комплекс или «CW-комплекс». Цепные комплексы в нашем чисто алгебраическом смысле были введены Майером [1929, 1938]. Формулирование точных гомологических последовательностей, сделанное Келли и Питчером [1947], позволило провести систематическое исследование простых фактов, которые раньше каждый раз получались «вручную». Пуанкаре ввел гомологии через числа Бетти; Эмми Нётер подчеркнула, что гомологии пространства связаны с *группами* гомологий, а не только с числами Бетти и коэффициентами кручения. Сингулярные гомологии в их нынешней форме введены Эйленбергом; аксиомы теории гомологий с приложениями к другим гомологическим теориям (теория Чеха) появились в оказавшей большое влияние книге Эйленберга и Стинрода. Аддитивные отношения были отмечены в явном виде только недавно (Любкин [1960], Маклейн [1961], Пуппе [1962]). Соответствующее понятие для мультипликативных групп встречается у Веддербарна [1941], Цассенхауза [1958], а для общих алгебраических систем у Лоренцена [1954] и Ламбека [1958].

ГЛАВА III

Расширения и резольвенты

Длинная точная последовательность R-модулей

$$0 \to A \to B_{n-1} \to \cdots \to B_1 \to B_0 \to C \to 0,$$

идущая от A к C через n промежуточных модулей, называется «n-кратным расширением» модуля A при помощи модуля C. Эти расширения, классифицированные соответствующим образом при помощи отношения конгруэнтности, являются элементами группы $\operatorname{Ext}^n(C, A)$. Для вычисления этой группы мы представим C как фактормодуль $C = F_0/S_0$ свободного модуля F_0; этот процесс можно итерировать $S_0 = F_1/S_1$, $S_1 = F_2/S_2, \ldots$; в результате возникает точная последовательность

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to C \to 0,$$

называемая «свободной резольвентой» модуля C. Когомология комплекса $\operatorname{Hom}(F_n, A)$ состоит из групп $\operatorname{Ext}^n(C, A)$. С другой стороны, можно вложить модуль A в инъективный модуль J_0 (§ 7), затем фактормодуль J_0/A в инъективный модуль J_1; итерирование этого процесса дает точную последовательность

$$0 \to A \to J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_n \to \cdots,$$

называемую «инъективной корезольвентой» модуля A. Комплекс $\operatorname{Hom}(C, J_n)$ имеет когомологию $\operatorname{Ext}^n(C, A)$. В частности, $\operatorname{Ext}^1(C, A)$ часто называется $\operatorname{Ext}(C, A)$.

Эта глава начинается с определения функтора Ext^1, который немедленно применяется (§ 4) для вычисления когомологии комплекса свободных абелевых групп по его гомологии. Заканчивается глава описанием канонического процесса вложения любого модуля в «минимальный» инъективный модуль.

§ 1. Расширения модулей

Пусть A и C — модули над фиксированным кольцом R. *Расширением A при помощи C* называется короткая точная последовательность $E = (\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ R-модулей и R-модульных гомоморфизмов. *Морфизм* $\Gamma: E \to E'$ расширений — это такая тройка $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ модульных гомоморфизмов, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ \downarrow\Gamma & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ E': 0 & \to & A' & \xrightarrow{\varkappa'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C' & \to & 0 \end{array} \tag{1.1}$$

коммутативна. В частности, положим $A' = A$ и $C' = C$; два расширения E и E' модуля A при помощи модуля C считаются *конгруэнтными* ($E \equiv E'$), если существует морфизм $(1_A, \beta, 1_C) : E \to E'$. Если такой морфизм существует, то в силу короткой леммы о пяти гомоморфизмах средний гомоморфизм β является изоморфизмом; поэтому конгруэнтность расширений является симметричным, рефлексивным и транзитивным отношением. Пусть $\operatorname{Ext}_R(C, A)$ обозначает множество всех классов конгруэнтности расширений A при помощи C.

Расширение A при помощи C иногда описывается парой (B, θ), где A является подмодулем модуля B, а θ — изоморфизмом $B/A \cong C$. Каждая такая пара определяет короткую точную последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/A$, и каждое расширение A при помощи C конгруэнтно расширению, полученному таким способом.

Прямая сумма $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$ есть расширение A при помощи C. Говорят, что расширение $E = (\varkappa, \sigma)$ *расщепляется*, если оно конгруэнтно прямой сумме как расширению; ввиду предложения I.4.3 это имеет место тогда и только тогда, когда σ обладает правым обратным $\mu: C \to B$ (или эквивалентным образом $\varkappa$ имеет левый обратный). Любое расширение с помощью проективного модуля P расщепляется, так что $\operatorname{Ext}_R(P, A)$ имеет только один элемент. Для иллюстрации нетривиального случая положим $R = Z$. Тогда, например, аддитивная группа $2Z$ четных чисел имеет два расширения при помощи циклической группы Z_2 порядка 2: прямую сумму $2Z \oplus Z_2$ и группу $Z \supset 2Z$. Этот пример является частным случаем следующего факта.

Предложение 1.1. *Для любой абелевой группы A и циклической группы $Z_m(c)$ порядка m с образующим c существует взаимно однозначное соответствие*

$$\eta: \operatorname{Ext}_Z(Z_m(c), A) \cong A/mA,$$

где mA — подгруппа группы A, состоящая из всех элементов вида ma, $a \in A$.

Доказательство. Возьмем любое расширение E группы A с помощью группы Z_m; в средней группе B выберем в качестве «представителя» образующего c такой элемент u, что $\sigma u = c$. Каждый элемент из B может быть записан единственным образом в виде $b = \varkappa a + hu$ для некоторого $a \in A$ и некоторого целого h, $h = 0, 1, \ldots, m-1$. Поскольку $mc = 0$, $\sigma(mu) = 0$, так что $mu = \varkappa g$ для однозначно определенного элемента $g \in A$. Этот элемент g определяет «таблицу сложения» для группы B, потому что

$$(\varkappa a + hu) + (\varkappa a' + h'u) = \begin{cases} \varkappa(a + a') + (h + h')u, & h + h' < m, \\ \varkappa(a + a' + g) + (h + h' - m)u, & h + h' \geqslant m. \end{cases}$$

Элемент g неинвариантен; представитель u может быть заменен любым элементом $u' = u + \varkappa f$, где $f \in A$; тогда g заменяется на $g' = g + mf$. Однако смежный класс $g + mA$ из A/mA однозначно определен расширением E. Положим $\eta(E) = g + mA$. Если $E \equiv E'$, то $\eta(E) = \eta(E')$. Если g — любой элемент из A, возьмем для построения группы B множество всех пар (a, h), где $a \in A$, $h = 0, 1, \ldots, m-1$, и определим сложение пар, используя g как в приведенной выше таблице. Это сложение ассоциативно, превращает множество B в группу и дает такое расширение E, что $\eta(E) = g + mA$. Следовательно, η есть взаимно однозначное отображение на A/mA.

Теперь η есть соответствие между множеством Ext_Z и абелевой группой A/mA; это подсказывает нам, что $\operatorname{Ext}_R(C, A)$ всегда является абелевой группой. Мы вскоре покажем, что это действительно так. Сначала мы установим, что Ext есть функтор из категории модулей в категорию множеств.

Пусть модуль A фиксирован. Для того чтобы показать, что $\operatorname{Ext}_R(C, A)$ есть контравариантный функтор по аргументу C, требуется для каждого $E \in \operatorname{Ext}_R(C, A)$ и каждого $\gamma: C' \to C$ указать подходящее расширение $E' = \gamma^* E \in \operatorname{Ext}_R(C', A)$. Это расширение E', которое можно обозначить как $E\gamma$, описывается следующей леммой, показывающей, что E' единственно, откуда легко вытекают конгруэнтности

$$E 1_C \equiv E, \qquad E(\gamma\gamma') \equiv (E\gamma)\gamma'. \tag{1.2}$$

Они показывают, что E зависит от C контравариантным образом; заметим, в частности, что обозначение $E\gamma$, в котором γ пишется на втором месте, дает хорошую упорядоченность для умножения на γ и γ' во втором равенстве (1.2).

Лемма 1.2. *Если E — расширение R-модуля A при помощи R-модуля C и если $\gamma: C' \to C$ — модульный гомоморфизм, то существует расширение E' модуля A при помощи C' и морфизм $\Gamma = (1_A, \beta, \gamma) : E' \to E$. Пара (Γ, E') определена однозначно с точностью до конгруэнтности E'.*

Доказательство существования. В диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} E': 0 & \to & A & \overset{\varkappa'}{\dashrightarrow} & ? & \overset{\sigma'}{\dashrightarrow} & C' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ E: 0 & \to & A & \overset{\varkappa}{\to} & B & \overset{\sigma}{\to} & C & \to & 0 \end{array} \tag{1.3}$$

даны боковые стороны и нижнее основание; мы хотим заменить знак ? модулем и пунктирные стрелки гомоморфизмами так, чтобы диаграмма стала коммутативной, а верхняя строка точной. Чтобы добиться этого, поставим вместо ? подгруппу $B' \subset B \oplus C'$, состоящую из таких пар (b, c'), что $\sigma b = \gamma c'$; определим σ' и β следующим образом: $\sigma'(b, c') = c'$, $\beta(b, c') = b$. Этот выбор влечет за собой коммутативность правого квадрата из (1.3). Положив $\varkappa' a = (\varkappa a, 0)$, мы построим требуемую диаграмму; выполнение остальных условий может быть проверено.

Доказательство единственности. Возьмем любое другое расширение E'' с морфизмом $\Gamma'' = (1_A, \beta'', \gamma): E'' \to E$. Если B'' — средний модуль из E'', то определим $\beta': B'' \to B'$ равенством $\beta' b'' = (\beta'' b'', \sigma'' b'')$; тогда $\Gamma_0 = (1_A, \beta', 1_{C'}): E'' \to E'$ есть конгруэнтность и произведение $E'' \to E' \to E$ равняется Γ'', так что диаграмма $\Gamma: E' \to E$ определена однозначно с точностью до конгруэнтности Γ_0 расширения E', что и утверждалось.

Назовем расширение $E' = E\gamma$ *композицией* расширения E и гомоморфизма γ; указанный способ построения постоянно встречается, например, при изучении индуцированных расслоенных пространств (где γ — отображение расслоенных пространств). С алгебраической точки зрения расширение E' имеет следующее «коуниверсальное» свойство.

Лемма 1.3. *В предположениях леммы* 1.2 *каждый морфизм расширений* $\Gamma_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1): E_1 \to E$, *где* $\gamma_1 = \gamma$, *может быть единственным способом представлен в виде произведения*

$$E_1 \xrightarrow{(\alpha_1, \beta', 1)} E\gamma \xrightarrow{(1, \beta, \gamma)} E. \tag{1.4}$$

Более коротко: Γ_1 *можно «провести через»* $\Gamma: E\gamma \to E$.

Доказательство. Пусть расширение $E_1 = (\varkappa_1, \sigma_1)$ имеет вид $A_1 \rightarrowtail B_1 \twoheadrightarrow C'$. (Начертите диаграмму!) Определим гомоморфизм $\beta': B_1 \to B'$ так: $\beta' b_1 = (\beta_1 b_1, \sigma_1 b_1)$. Это единственный способ определить β' таким образом, чтобы $\beta_1 = \beta\beta'$ и чтобы диаграмма $(\alpha_1, \beta', 1): E_1 \to E'$ была коммутативной. Проверка того, что гомоморфизм β' порождает искомое разложение (1.4), тривиальна.

Между прочим, возможность подобного разложения содержит в себе утверждение об единственности из леммы 1.2, поскольку морфизм $\Gamma'' = (1_A, \beta'', \gamma): E'' \to E$ представим в силу (1.4) в виде $(1, \beta'', \gamma) = (1, \beta, \gamma)(1, \beta', 1)$ с множителем $(1, \beta', 1): E'' \to E'$, являющимся конгруэнтностью.

Теперь мы покажем, что $\operatorname{Ext}(C, A)$ есть ковариантный функтор по аргументу A при фиксированном C, построив для каждого расширения E и каждого гомоморфизма $\alpha: A \to A'$ «композицию» $E' = \alpha E$, характеризуемую следующей леммой.

Лемма 1.4. *Для* $E \in \operatorname{Ext}(C, A)$ *и* $\alpha: A \to A'$ *существует расширение* E' *модуля* A' *при помощи* C *и морфизм* $\Gamma = (\alpha, \beta, 1_C): E \to E'$. *Пара* (Γ, E') *определена однозначно с точностью до конгруэнтности* E'.

Доказательство. Мы должны в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \overset{\varkappa}{\to} & B & \overset{\sigma}{\to} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \| & & \\ E': 0 & \to & A' & \overset{\varkappa'}{\dashrightarrow} & ? & \overset{\sigma'}{\dashrightarrow} & C & \to & 0 \end{array} \tag{1.5}$$

заменить знак вопроса и пунктирные стрелки таким образом, чтобы диаграмма стала коммутативной, а нижняя строка — точной. Чтобы сделать это, возьмем в прямой сумме $A' \oplus B$ подгруппу N всех элементов вида $(-\alpha a, \varkappa a)$, где $a \in A$. Вместо ? в диаграмме поставим факторгруппу $(A' \oplus B)/N$ и будем записывать элементы этой факторгруппы как $(a', b) + N$. Тогда равенства $\varkappa' a' = (a', 0) + N$, $\sigma'[(a', b) + N] = \sigma b$ и $\beta b = (0, b) + N$ определяют отображения, которые удовлетворяют требуемым условиям. Единственность E' может быть доказана непосредственно или выведена из следующего «универсального» свойства расширения E'.

Лемма 1.5. *В предположениях леммы* 1.4 *любой морфизм* $\Gamma_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1): E \to E_1$ *расширений с* $\alpha_1 = \alpha$ *может быть записан единственным образом в виде произведения*

$$E \xrightarrow{(\alpha, \beta, 1)} \alpha E \xrightarrow{(1, \beta', \gamma_1)} E_1.$$

Более кратко, Γ_1 *можно «провести через»* $E \to \alpha E$.

Доказательство. Если в расширении $E_1 = (\varkappa_1, \sigma_1)$ средний модуль B_1, то гомоморфизм $\beta': (A' \oplus B)/N \to B_1$ можно определить равенством $\beta'[(a', b) + N] = \varkappa_1 a' + \beta_1 b$. Тогда можно проверить, что $\beta_1 = \beta'\beta$, что $(1_{A'}, \beta', \gamma_1)$ — морфизм расширений и что гомоморфизм β' однозначно определен, тем самым и заканчивается доказательство.

Из свойства единственности расширения αE вытекают конгруэнтности

$$1_A E \equiv E, \quad (\alpha\alpha') E \equiv \alpha(\alpha' E).$$

Следовательно, $\operatorname{Ext}(C, A)$ — ковариантный функтор по аргументу A. Из следующего результата вытекает, что $\operatorname{Ext}(C, A)$ есть бифунктор (от A и C).

Лемма 1.6. *Для гомоморфизмов α, γ и расширения E из лемм 1.2 и 1.4 существует конгруэнтность расширений $\alpha(E\gamma) \equiv (\alpha E)\gamma$.*

Доказательство. По определению $E\gamma$ и αE существуют морфизмы

$$E\gamma \xrightarrow{(1,\,\beta_1,\,\gamma)} E \xrightarrow{(\alpha,\,\beta_2,\,1)} \alpha E,$$

произведение которых равно $(\alpha, \beta_2, \beta_1, \gamma) : E\gamma \to \alpha E$. В силу леммы 1.3 расширение $(\alpha E)\gamma$ коуниверсально для таких отображений, т. е. $(\alpha, \beta_2, \beta_1, \gamma)$ разлагается в произведение

$$E\gamma \xrightarrow{(\alpha,\,\beta',\,1)} (\alpha E)\gamma \xrightarrow{(1,\,\beta,\,\gamma)} \alpha E.$$

Но первый множитель этого разложения является в точности таким морфизмом, который был использован в лемме 1.4 для построения $\alpha(E\gamma)$ из $E\gamma$. Значит, в силу утверждения этой леммы об единственности $\alpha(E\gamma) \equiv (\alpha E)\gamma$, что и требовалось доказать.

Чтобы проиллюстрировать полезность этих лемм, докажем

Предложение 1.7. *Для любого расширения $E = (\varkappa, \sigma)$ композиции $\varkappa E$ и $E\sigma$ расщепляются.*

Доказательство. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E: 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\varkappa"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\nu"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E': 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B \oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой отображение ν определено формулой $\nu b = (b, \sigma b)$, коммутативна. Следовательно, определение $\varkappa E$ из леммы 1.4 показывает, что $\varkappa E$ задается нижней строкой и, значит, расщепляется. Пусть читатель построит двойственную диаграмму, которая расщепляет $E\sigma$.

Предложение 1.8. *Любой морфизм расширений $\Gamma_1 = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ влечет конгруэнтность $\alpha E \equiv E'\gamma$.*

Доказательство. В силу свойства универсальности расширения αE (лемма 1.5) отображение Γ_1 можно провести через $\Gamma : E \to \alpha E$ в виде $\Gamma_1 = \Gamma_2\Gamma$, где $\Gamma_2 = (1_{A'}, \beta', \gamma) : \alpha E \to E'$. Это последнее отображение характеризует αE как $E'\gamma$ в силу леммы 1.2.

§ 2. Сложение расширений

Прямая сумма $A \oplus C$ двух модулей может рассматриваться как ковариантный бифунктор от аргументов A и C, поскольку для любых двух гомоморфизмов $\alpha: A \to A'$ и $\gamma: C \to C'$ существует гомоморфизм

$$\alpha \oplus \gamma : A \oplus C \to A' \oplus C'$$

с обычными свойствами $(\alpha \oplus \gamma)(\alpha' \oplus \gamma') = \alpha\alpha' \oplus \gamma\gamma'$ и $1_{A'} \oplus 1_C = 1_{A \oplus C}$. Этот гомоморфизм можно определить, положив $(\alpha \oplus \gamma) \times (a, c) = (\alpha a, \gamma c)$, или определить как единственный гомоморфизм, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\alpha"] & A \oplus C \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha \oplus \gamma"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' & A' \oplus C' \arrow[l] \arrow[r] & C'
\end{tikzcd}$$

коммутативной. В этой диаграмме каждая строка состоит из проекций, как и в I (8.12).

Диагональный гомоморфизм модуля C — это гомоморфизм

$$\Delta = \Delta_C : C \to C \oplus C, \quad \Delta(c) = (c, c). \tag{2.1}$$

Он может быть описан как гомоморфизм, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\Delta"] & C \arrow[d, equal] \\
C & C \oplus C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C
\end{tikzcd}$$

в коммутативную. Кодиагональное отображение модуля A — это гомоморфизм

$$\nabla = \nabla_A : A \oplus A \to A, \quad \nabla(a_1, a_2) = a_1 + a_2. \tag{2.1$'$}$$

Он имеет двойственное диаграммное описание: $\nabla\iota_1 = 1_A = \nabla\iota_2: A \to A$. Отображения Δ и ∇ могут быть использованы для переформулировки обычного определения суммы $f + g$ двух гомоморфизмов $f, g : C \to A$ в виде

$$f + g = \nabla_A (f \oplus g) \Delta_C; \tag{2.2}$$

читатель должен проверить, что при таком определении по-прежнему $(f + g)c$ равняется $fc + gc$.

Если даны два расширения $E_i = (\varkappa_i, \sigma_i)$: $A_i \rightarrowtail B_i \twoheadrightarrow C_i$ для $i = 1, 2$, то мы определим их прямую сумму как расширение

$$E_1 \oplus E_2 : 0 \to A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2 \to C_1 \oplus C_2 \to 0. \tag{2.3}$$

Теперь мы превратим Ext (C, A) в группу по сложению, определение которого использует (2.3).

Теорема 2.1. *Для данных R-модулей A и C множество* $\operatorname{Ext}_R(C, A)$ *всех классов конгруэнтности расширений модуля A при помощи модуля C является абелевой группой относительно бинарной операции, которая сопоставляет классам конгруэнтности расширений E_1 и E_2 класс конгруэнтности расширения*

$$E_1+E_2=\nabla_A(E_1\oplus E_2)\Delta_C. \tag{2.4}$$

Класс расщепляющегося расширения $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$ является нулевым элементом этой группы, в то время как обратным для любого расширения E служит расширение $(-1_A)E$; для гомоморфизмов $\alpha: A \to A'$ и $\gamma: C' \to C$ выполнены равенства

$$\alpha(E_1+E_2)\equiv \alpha E_1+\alpha E_2, \quad (E_1+E_2)\gamma\equiv E_1\gamma+E_2\gamma, \tag{2.5}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2)E\equiv \alpha_1 E+\alpha_2 E, \quad E(\gamma_1+\gamma_2)\equiv E\gamma_1+E\gamma_2. \tag{2.6}$$

Композиция (2.4) известна как *сложение Бэра*; правило (2.5) устанавливает, что отображения α_*: Ext $(C, A) \to$ Ext (C, A') и γ^*: Ext $(C, A) \to$ Ext (C', A) являются групповыми гомоморфизмами.

Мы дадим два различных доказательства. Первое из них «вычислительное»; оно похоже на вычисления, проделанные в § 1 для того, чтобы показать, что $\operatorname{Ext}_Z(Z_m, A)$ есть группа A/mA.

Возьмем произвольное расширение $E = (\varkappa, \sigma)$ модуля A при помощи модуля C, где $\sigma: B \twoheadrightarrow C$. Для каждого элемента c из C выберем представителя $u(c)$, т. е. такой элемент $u(c) \in B$, что $\sigma u(c) = c$. Для каждого $r \in R$ разность $ru(c) - u(rc) \in \varkappa A$ в силу точности E; аналогично если элементы $c, d \in C$, то $u(c+d) - u(c) - u(d) \in \varkappa A$. Следовательно, существуют элементы $f(c, d)$ и $g(r, c) \in A$, для которых

$$u(c)+u(d)=\varkappa f(c, d)+u(c+d), \quad c, d\in C, \tag{2.7a}$$

$$ru(c)=\varkappa g(r, c)+u(rc), \quad r\in R, \quad c\in C. \tag{2.7b}$$

Назовем пару функций (f, g) *системой факторов расширения* E. Пусть в течение этого доказательства $F_R(C,A)$ обозначает множество всех пар (f, g) функций f, определенных на $C\times C$ со значениями в A и функций g, определенных на $R\times C$ со значениями в A. Каждая система факторов является элементом из $F_R(C, A)$, а F_R будет группой относительно почленного сложения, т. е. относительно операции $(f_1+f_2)(c, d) = f_1(c, d) + f_2(c, d)$.

Система факторов для последовательности E не единственна. Для другого выбора представителей $u'(c)$ мы должны иметь соотношение $u'(c) = \varkappa h(c) + u(c)$, где h — некоторая функция из C в A.

Можно подсчитать, что

$$u'(c)+u'(d)=\varkappa[h(c)+h(d)-h(c+d)+f(c, d)]+u'(c+d),$$

$$ru'(c)=\varkappa[rh(c)-h(rc)+g(r, c)]+u'(rc).$$

Новая система факторов $f'(c, d)$, $g'(r, c)$ для представителей u' определяется выражениями, стоящими в квадратных скобках в написанных выше равенствах. Мы можем выразить это обстоятельство по-другому: для каждой функции h, отображающей C в A, существует элемент $(\delta_C h, \delta_R h) \in F_R(C,A)$, определенный следующим образом:

$$(\delta_C h)(c, d)=h(c)+h(d)-h(c+d), \quad (\delta_R h)(r, c)=rh(c)-h(rc).$$

Система факторов f', g' для представителей u' тогда имеет вид $(f', g') = (f, g) + (\delta_C h, \delta_R h)$. Обратно, любая такая функция h может быть использована для изменения представителей расширения. Поэтому если мы обозначим через $S_R(C,A)$ подгруппу всех пар функций из $F_R(C, A)$, имеющих вид $(\delta_C h, \delta_R h)$, то система факторов (f,g) расширения E оказывается однозначно определенной по модулю $S_R(C, A)$.

Используем теперь факторгруппу $F_R(C, A)/S_R(C, A)$; каждому расширению E сопоставим смежный класс $\omega(E)$ из F_R/S_R, содержащий какую-то систему факторов (f, g) этого расширения. Класс $\omega(E)$ однозначно определяется расширением E.

Конгруэнтность расширений отображает представителей в представители, следовательно, конгруэнтные расширения имеют одни и те же системы факторов. Отсюда следует, что ω есть взаимно однозначное отображение множества классов конгруэнтных расширений на подмножество абелевой группы $F_R(C,A)/S_R(C,A)$. Чтобы показать, что Ext (C,A) является абелевой группой относительно сложения Бэра, достаточно проверить справедливость равенств

$$\omega(E_1+E_2)=\omega(E_1)+\omega(E_2), \quad \omega[(-1_A)E]=-\omega(E).$$

Первое равенство вытекает из подсчета системы факторов для расширения $E_1 \oplus E_2$ и, значит, для $E_1 + E_2$. Второе равенство вытекает из замечания (начертить диаграмму!), что $(-1_A)E$ получается из E изменением знака у отображения $\varkappa: A \rightarrowtail B$ и, значит, изменением знаков у функций f и g, составляющих систему факторов. Наконец, расщепляющееся расширение E_0 в качестве одной из систем факторов имеет пару $(0, 0)$ и поэтому является нулем относительно введенного сложения.

Возможно также (см. упражнения) охарактеризовать непосредственно те пары функций (f, g), которые могут встретиться как системы факторов расширения и, следовательно, показать, что

$\operatorname{Ext}_R(C, A)$ есть абелева группа, вообще не используя сложение Бэра.

Доказательство соотношения (2.5) просто: $F_R(C, A)/S_R(C, A)$ — это бифунктор, а ω — естественный гомоморфизм. Доказательство (2.6) аналогично.

Мы теперь переходим ко второму («умозрительному») доказательству теоремы. Для прямой суммы (2.3) двух расширений E_i конгруэнтности

$$(\alpha_1 \oplus \alpha_2)(E_1 \oplus E_2) \equiv \alpha_1 E_1 \oplus \alpha_2 E_2, \tag{2.8}$$

$$(E_1 \oplus E_2)(\gamma_1 \oplus \gamma_2) \equiv E_1\gamma_1 \oplus E_2\gamma_2, \tag{2.9}$$

могут быть установлены при помощи лемм § 1, которые характеризуют композиции $E_i\gamma_i$ и $\alpha_i E_i$. Для гомоморфизма $\alpha: A \to A'$ легко проверить, что

$$\alpha\nabla = \nabla(\alpha \oplus \alpha): A \oplus A \to A' \tag{2.10}$$

и аналогично для гомоморфизма $\gamma: C' \to C$

$$\Delta\gamma = (\gamma \oplus \gamma)\Delta: C' \to C \oplus C. \tag{2.10'}$$

Теперь следующая цепочка конгруэнтностей доказывает утверждение (2.5) теоремы:

$$\begin{aligned} \alpha(E_1 + E_2) &\equiv \alpha\nabla(E_1 \oplus E_2)\Delta \equiv \nabla(\alpha \oplus \alpha)(E_1 \oplus E_2)\Delta \equiv \\ &\equiv \nabla(\alpha E_1 \oplus \alpha E_2)\Delta \equiv \alpha E_1 + \alpha E_2; \end{aligned}$$

вторая половина утверждения доказывается аналогично. Доказательство (2.6) проводится параллельно приведенному, как только мы установим, что

$$\Delta E \equiv (E \oplus E)\Delta, \quad E\nabla \equiv \nabla(E \oplus E). \tag{2.11}$$

Поскольку тройка $(\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C): E \to E \oplus E$ является морфизмом расширений, первое из этих соотношений вытекает из предложения 1.8. Аналогично из того, что тройка $(\nabla, \nabla, \nabla): E \oplus E \to E$ есть морфизм, вытекает второе соотношение.

Теперь покажем, что сложение Бэра (2.4) превращает Ext в группу. Ассоциативный закон вытекает из определения (2.4) сразу, как только установлено, что диагональное и кодиагональное отображения удовлетворяют тождествам

$$(\Delta \oplus 1_C)\Delta = (1_C \oplus \Delta)\Delta: C \to C \oplus C \oplus C, \tag{2.12}$$

$$\nabla(\nabla \oplus 1_A) = \nabla(1_A \oplus \nabla): A \oplus A \oplus A \to A. \tag{2.12'}$$

Эти тождества следуют прямо из определений Δ и ∇, если отождествить $(C \oplus C) \oplus C$ с $C \oplus (C \oplus C)$ при помощи очевидного изоморфизма. Для доказательства коммутативного закона для сложения Бэра используем изоморфизм $\tau_A: A_1 \oplus A_2 \to A_2 \oplus A_1$, определенный равенством $\tau_A(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$ (или при желании свойством универсальности и подходящей диаграммой!). Морфизм $(\tau_A, \tau_B, \tau_C): (E_1 \oplus E_2) \to E_2 \oplus E_1$ показывает, что $\tau_A(E_1 \oplus E_2) \equiv \equiv (E_2 \oplus E_1)\tau_C$; подсчетом или при помощи диаграммы доказывается, что $\nabla_A\tau_A = \nabla_A$ и $\Delta_C = \tau_C\Delta_C$. Следовательно, коммутативный закон получается посредством цепочки соотношений

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \nabla(E_1 \oplus E_2)\Delta = \nabla\tau(E_1 \oplus E_2)\Delta \equiv \\ &\equiv \nabla(E_2 \oplus E_1)\tau\Delta \equiv \nabla(E_2 \oplus E_1)\Delta = E_2 + E_1. \end{aligned}$$

Для того чтобы показать, что расщепляющееся расширение E_0 действует как нуль для сложения Бэра, сначала заметим, что для любого расширения $E \in \operatorname{Ext}(C, A)$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \nu & & \| & & \\ E_0: 0 & \to & A & \to & A \oplus C & \to & C & \to & 0, \end{array}$$

где ν — отображение, действующее так: $\nu b = (0, \sigma b) = \iota_2\sigma b$. Эта диаграмма утверждает, что расщепляющееся расширение E_0 может быть записано как композиция $E_0 = 0_A E$, где $0_A: A \to A$ — нулевой гомоморфизм. Теперь в силу закона дистрибутивности $E + E_0 \equiv 1_A E + 0_A E \equiv (1_A + 0_A)E \equiv 1_A E \equiv E$. Аналогичное доказательство показывает, что $(-1_A)E$ есть аддитивный обратный к E относительно сложения Бэра. Наше второе доказательство теоремы закончено.

Второй дистрибутивный закон (2.6), содержащийся в этой теореме, можно выразить следующим образом. Для каждого гомоморфизма $\alpha: A \to A'$ пусть $\alpha_*: \operatorname{Ext}(C, A) \to \operatorname{Ext}(C, A')$ обозначает индуцированный гомоморфизм, и аналогично положим $\gamma^* E = E\gamma$. Тогда $(\gamma_1^* + \gamma_2^*)E = \gamma_1^* E + \gamma_2^* E$, так что (2.6) можно переписать в виде

$$(\alpha_1 + \alpha_2)_* = (\alpha_1)_* + (\alpha_2)_*, \quad (\gamma_1 + \gamma_2)^* = (\gamma_1)^* + (\gamma_2)^*.$$

Говорят, что бифунктор *аддитивен*, если он обладает этими свойствами. Точно так же, как и в (I.6.5), из этих свойств вытекают естественные изоморфизмы

$$\operatorname{Ext}(C, A_1 \oplus A_2) \cong \operatorname{Ext}(C, A_1) \oplus \operatorname{Ext}(C, A_2),$$

$$\operatorname{Ext}(C_1 \oplus C_2, A) \cong \operatorname{Ext}(C_1, A) \oplus \operatorname{Ext}(C_2, A).$$

Для $R = Z$ и конечно порожденной абелевой группы C эти формулы вместе с предложением 1.1 и равенством $\operatorname{Ext}_Z(Z, A) = 0$ позволяют вычислить $\operatorname{Ext}_Z(C, A)$.

Следствие 2.2. *Если конечные абелевы группы A и C имеют взаимно простые порядки, то любое расширение A при помощи C расщепляется.*

Доказательство. Пусть m и n — порядки групп A и C и пусть $\mu_m : C \to C$ — гомоморфизм, определенный умножением на m элементов из C, так что $\mu_m c = mc$. Поскольку m и n взаимно просты, существует такое m', что $m'm \equiv 1 \pmod n$, следовательно, μ_m — автоморфизм, и каждый элемент из $\operatorname{Ext}(C, A)$ имеет вид $E\mu_m$ для некоторого E. Однако $\mu_m = 1_C + \ldots + 1_C$ (m слагаемых), так что

$$E\mu_m = E(1_C + \cdots + 1_C) \equiv (1_A + \cdots + 1_A)E = \nu_m E = 0,$$

где $\nu_m : A \to A$ — такой гомоморфизм, что $\nu_m(a) = ma = 0$, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

В следующих упражнениях удобно считать, что все системы факторов (f, g) удовлетворяют «условию нормализации»:

$$f(c, 0) = 0 = f(0, d), \quad g(r, 0) = 0.$$

Этому условию всегда можно удовлетворить, выбрав представители u так, чтобы $u(0) = 0$.

1. Показать, что для абелевых групп (т. е. при $R = Z$) «нормализованная» функция из $C \times C$ в A тогда и только тогда является системой факторов для расширений абелевых групп, когда

$$f(c, d) + f(c + d, e) = f(c, d + e) + f(d, e), \quad f(c, d) = f(d, c),$$

что соответствует законам ассоциативности и коммутативности.

2. Пусть $G_Z(C, A)$ — множество всех нормализованных функций f, удовлетворяющих тождествам упражнения 1. Показать, что $\operatorname{Ext}_Z(C, A) \cong G_Z(C, A)/S_Z(C, A)$.

3. Указать аналог упражнения 1 для произвольного кольца (указать тождества для систем факторов, состоящих из двух функций f и g).

§ 3. Препятствия для продолжения гомоморфизмов

Мы уже отмечали, что функтор Hom не сохраняет точность последовательностей, потому что гомоморфизм $\alpha : A \to G$ подмодуля A модуля B не всегда может быть продолжен до гомоморфизма B в G. Мы можем теперь описать некоторый элемент αE из $\operatorname{Ext}(B/A, G)$, который служит «препятствием» для этого продолжения.

Лемма 3.1. *Пусть A — подмодуль модуля B и $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — соответствующая точная последовательность, в которой $C = B/A$. Гомоморфизм $\alpha : A \to G$ может быть продолжен до*

гомоморфизма $B \to G$ тогда и только тогда, когда расширение αE расщепляется.

Доказательство. Предположим сначала, что α продолжается до $\hat{\alpha}: B \to G$. Построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E: 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E': 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\iota_1"] & G \oplus C \arrow[r, "\pi_2"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

в которой E'—диаграмма внешней прямой суммы с вложением ι_1 и проекцией π_2. Поставим вместо пунктирной стрелки отображение $b \to (\hat{\alpha}b, \sigma b) = \iota_1\hat{\alpha}b + \iota_2\sigma b$. Получающаяся в результате диаграмма коммутативна и, следовательно, определяет морфизм $E \to E'$. В согласии с леммой 1.4 $E' \equiv \alpha E$. Поскольку E' расщепляется, αE также расщепляется.

Обратно, предположим, что αE расщепляется. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E: 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\alpha E: 0 \arrow[r] & G \arrow[r, shift left, "\iota_1"] & B' \arrow[l, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

использованная для построения αE, определяет отображение $\pi_1\beta : B \to G$, которое является продолжением α. Лемма доказана.

Сопоставление каждому $\alpha: A \to G$ его препятствия αE является ввиду (2.6) групповым гомоморфизмом

$$E^* : \operatorname{Hom}_R(A, G) \to \operatorname{Ext}_R(C, G).$$

Назовем этот гомоморфизм связывающим гомоморфизмом для точной последовательности E.

Теорема 3.2. *Если $E : A \overset{\varkappa}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C$ — короткая точная последовательность R-модулей, то последовательность*

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(C, G) \to \operatorname{Hom}_R(B, G) \to \operatorname{Hom}_R(A, G) \xrightarrow{E^*}$$
$$\xrightarrow{E^*} \operatorname{Ext}_R(C, G) \xrightarrow{\sigma^*} \operatorname{Ext}_R(B, G) \xrightarrow{\varkappa^*} \operatorname{Ext}_R(A, G) \qquad (3.1)$$

абелевых групп точна для любого R-модуля G.

Доказательство. Ввиду I (.6.7) нам уже известна точность в членах $\operatorname{Hom}(C, G)$ и $\operatorname{Hom}(B, G)$. Лемма 3.1 устанавливает точность в $\operatorname{Hom}(A, G)$. По предложению 1.7 $\sigma^* E^* = (E\sigma)^* = 0$.

Обратно, чтобы убедиться в том, что ядро содержится в образе группы $\mathrm{Hom}\,(A,\ G)$ в $\mathrm{Ext}\,(C,\ G)$ мы должны взять такое расширение $E_1 \in \mathrm{Ext}\,(C,\ G)$, что $E_1\sigma$ расщепляется, и показать, что E_1 служит препятствием для некоторого отображения $A \to G$. В силу расщепляемости $E_1\sigma$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & & & A \arrow[d, "\varkappa"] & \\
E_1\sigma\colon & 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G\oplus B \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
E_1\colon & 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\varkappa_1"] & B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & C \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Расщепляющее отображение μ, умноженное на β, дает отображение $\beta_1 = \beta\mu : B \to B_1$ (указано пунктирной стрелкой в приведенной выше диаграмме), которое делает правый нижний треугольник коммутативным. Значит, $\sigma_1\beta_1\varkappa = \sigma\varkappa = 0$. Но последовательность E_1 точна, так что $\beta_1\varkappa$ представимо в виде $\varkappa_1\alpha_1$ для некоторого $\alpha_1\colon A \to G$. Тогда тройка $(\alpha_1,\ \beta_1,\ 1) : E \to E_1$ является морфизмом точных последовательностей, который устанавливает, что $E_1 \equiv \equiv \alpha_1 E$.

Аналогичным рассуждением доказываем точность последовательности в $\mathrm{Ext}_R\,(B,\ G)$ и тем самым заканчиваем доказательство теоремы.

Эта теорема утверждает, что функтор Ext исправляет неточность функтора Hom справа. В то же время Ext порождает новую неточность: в последовательности (3.1) отображение $\mathrm{Ext}_R\,(B,\ G) \to \to \mathrm{Ext}_R\,(A,\ G)$ не всегда является эпиморфизмом (см. упражнение). Для описания коядра этого отображения мы нуждаемся в новом функторе Ext^2.

Обратимся теперь к такой задаче: когда гомоморфизм $\gamma : G \to \to B/A$ можно «поднять» до B, т. е. когда существует такой гомоморфизм $\hat\gamma : G \to B$, что γ равняется произведению $G \to B \to B/A$? Этот вопрос приводит к лемме, двойственной предыдущей лемме 3.1.

Лемма 3.3. *Пусть $C = B/A$ — фактормодуль, а E — соответствующая точная последовательность. Гомоморфизм $\gamma : G \to \to B/A$ может быть поднят до гомоморфизма $\hat\gamma : G \to B$ тогда и только тогда, когда расширение $E\gamma$ расщепляется.*

Доказательство в точности двойственно доказательству леммы 3.1 в том смысле, что направления всех стрелок изменены на противоположные и прямые суммы заменены прямыми произведениями. Снова назовем элемент $E\gamma \in \mathrm{Ext}\,(G,\ A)$ *препятствием* для поднятия γ. Сопоставление каждому $\gamma\colon G \to C$ его препятствия $E\gamma$ определяет групповой гомоморфизм

$$E_*: \mathrm{Hom}\,(G,\ C) \to \mathrm{Ext}\,(G,\ A),$$

называемый связывающим гомоморфизмом для E.

Теорема 3.4. *Если $E\colon A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — короткая точная последовательность R-модулей, то последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R\,(G,\ A) \to \mathrm{Hom}_R\,(G,\ B) \to \mathrm{Hom}_R\,(G,\ C) \xrightarrow{E_*}$$
$$\xrightarrow{E_*} \mathrm{Ext}_R\,(G,\ A) \to \mathrm{Ext}_R\,(G,\ B) \to \mathrm{Ext}_R\,(G,\ C) \qquad (3.2)$$

абелевых групп точна для каждого R-модуля G.

Доказательство двойственно доказательству теоремы 3.2.

Теорема 3.5. *R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}_R\,(P,\ G) = 0$ для любого R-модуля G.*

По теореме I.6.3 P проективен тогда и только тогда, когда каждое расширение при помощи P расщепляется. Теорема 3.2 указывает следующий путь для определения группы Ext.

Теорема 3.6. *Если C и G — данные модули и если $F\colon K \overset{\varkappa}{\rightarrowtail} P \twoheadrightarrow C$ — точная последовательность с проективным модулем P, то*

$$\mathrm{Ext}_R\,(C,\ G) \cong \mathrm{Hom}_R\,(K,\ G)/\varkappa^*\,\mathrm{Hom}_R\,(P,\ G). \qquad (3.3)$$

В частности, группа, стоящая справа, не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора короткой точной последовательности F.

Доказательство. В (3.1) заменим последовательность E последовательностью F. Поскольку модуль P проективен, $\mathrm{Ext}_R\,(P, G) = = 0$ и точность последовательности (3.1) дает формулу (3.3) для $\mathrm{Ext}_R\,(C,\ G)$.

Поскольку любой модуль C можно представить как фактормодуль свободного модуля, можно вычислить всегда $\mathrm{Ext}_R\,(C,\ G)$ по формуле (3.3), в которой P свободен. Например, точная последовательность $Z \overset{\varkappa}{\rightarrowtail} Z \twoheadrightarrow Z/mZ$, в которой гомоморфизм $\varkappa$ означает умножение на целое число m, дает представление циклической группы Z_m как факторгруппы группы Z. Поскольку $\mathrm{Hom}\,(Z, A) \cong \cong A$, где изоморфизм устанавливается отображением, переводящим каждый гомоморфизм $f\colon Z \to A$ в элемент $f\,(1)$, мы получаем изоморфизм $\mathrm{Ext}_Z\,(Z_m,\ A) \cong A/mA$. Это соответствие уже было использовано в предложении 1.1.

Предложение 3.7. *Для абелевых групп последовательности, указанные в теоремах 3.2 и 3.4, остаются точными, если справа добавить нуль.*

Доказательство. В случае теоремы 3.2 мы должны показать, что мономорфизм $\varkappa : A \rightarrowtail B$ индуцирует эпиморфизм $\varkappa^*$: Ext $(B,G) \to$ Ext (A,G). Для этой цели возьмем свободную абелеву группу F и эпиморфизм $\varphi : F \twoheadrightarrow B$ с ядром K. Пусть $L = \varphi^{-1}(\varkappa A)$. Тогда φ отображает L на $\varkappa A$ с тем же ядром K и поэтому возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1: 0 & \to & K & \to & L & \to & A & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa} & & \\ E_2: 0 & \to & K & \to & F & \xrightarrow{\varphi} & B & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками E_1 и E_2; следовательно, $E_1 \equiv E_2\varkappa$. Отсюда мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(K, G) & \xrightarrow{E_2^*} & \mathrm{Ext}(B, G) & & \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa^*} & & \\ \mathrm{Hom}(K, G) & \xrightarrow{E_1^*} & \mathrm{Ext}(A, G) & \to & \mathrm{Ext}(L, G) \end{array}$$

с точной нижней строкой в силу теоремы 3.2. Но L как подгруппа свободной абелевой группы сама свободна. По теореме 3.5 Ext $(L, G) = 0$, следовательно, отображение E_1^* из диаграммы является эпиморфизмом, а поэтому и $\varkappa^*$ — эпиморфизм, что и требовалось доказать.

В случае теоремы 3.4 нам дана точная последовательность $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, и мы должны показать, что отображение Ext $(G, B) \to$ Ext (G, C) — эпиморфизм. Представим любой элемент из Ext (G, C) точной последовательностью $S: C \rightarrowtail D \twoheadrightarrow G$. Поскольку $\mu: C \to D$ — мономорфизм, уже рассмотренный случай теоремы 3.2 показывает, что существует точная последовательность $E': A \rightarrowtail M \twoheadrightarrow D$, для которой $\mu^* E' = E$. Этим установлено, что мы можем пополнить следующую коммутативную диаграмму таким образом, чтобы первые две строки и последний столбец были точны:

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \\ E': 0 & \to & A & \to & ? & \to & D & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & G & = & G. & & \end{array}$$

Диаграммный поиск показывает, что средний столбец точен. Этот средний столбец и представляет элемент из Ext (G, B), отображающийся на последний столбец $S \in$ Ext (G, C), что и требовалось доказать.

Отметим, что приведенная выше диаграмма симметрична: если точны верхняя строка и правый столбец, то точность средней строки эквивалентна точности среднего столбца. В случае теоремы 3.2 утверждается, что диаграмма может быть пополнена таким образом, чтобы средняя строка была точной; в случае теоремы 3.4 утверждается, что диаграмма может быть пополнена таким образом, чтобы средний столбец был точен. Тот же факт можно сформулировать на групповом языке следующим образом.

Следствие 3.8. *Если даны абелевы группы D и $A \subset B$ и мономорфизм $\mu : B/A \rightarrowtail D$, то существует абелева группа $M \supset B$ и продолжение μ до изоморфизма $M/A \cong D$.*

Это следствие приводит к построению группы M по данной подгруппе группы B и «накрывающей» факторгруппе D.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Неточность Ext справа.) Пусть $R = K[x,y]$ — кольцо многочленов от двух неизвестных x и y с коэффициентами из поля K, и пусть (x, y) — идеал, состоящий из всех многочленов со свободным членом, равным 0, фактормодуль $R/(x, y)$ изоморфен полю K, где K рассматривается как такой R-модуль, что $xk = 0 = yk$ для всех $k \in K$, а E: $(x,y) \rightarrowtail R \twoheadrightarrow K$ — точная последовательность R-модулей. Показать, что отображение $\mathrm{Ext}_R(R, G) \to \mathrm{Ext}_R((x, y), G)$ не является эпиморфизмом для всех G, выбрав во второй группе такое расширение, в котором (x, y) представляется как фактормодуль свободного модуля с двумя образующими.

2. Подобным же образом показать, что последовательность теоремы 3.4 не всегда может оканчиваться нулем с сохранением точности.

3. Показать, что следствие 3.8 приводит к следующему (самодвойственному) утверждению: любой гомоморфизм α: $B \to D$ абелевых групп можно записать в виде произведения $\alpha = \tau\nu$, где ν — мономорфизм, τ — эпиморфизм и $\mathrm{Ker}\,\tau = \nu(\mathrm{Ker}\,\alpha)$.

4. Дать прямое доказательство второй половины предложения 3.7 (записать G как факторгруппу свободной группы).

5. Доказать предложение 3.7 для модулей над кольцом главных идеалов.

6. Для простого числа p и такой абелевой группы C, что $pC = 0$, доказать, что

$$\mathrm{Ext}_Z(C, G) \cong \mathrm{Hom}_Z(C, G/pG)$$

(Эйленберг — Маклейн [1954], теорема 26.5).

7. Для простого числа p аддитивной группы P всех рациональных чисел вида m/p^e, $m, e \in Z$, и аддитивной группы p-адических чисел $Z^{(p)}$ доказать, что

$$\mathrm{Ext}_Z(P, Z) \cong Z^{(p)}/Z$$

(Эйленберг — Маклейн [1942], добавление B).

§ 4. Теорема об универсальных коэффициентах для групп когомологий

В качестве первого приложения функтора Ext мы дадим метод «вычисления» групп когомологий комплекса с произвольной группой коэффициентов по группам гомологий этого комплекса — в предположении, что мы имеем дело с комплексами свободных абелевых групп или свободных модулей над кольцом главных идеалов.

Теорема 4.1. (*Об универсальных коэффициентах.*) *Пусть K — комплекс свободных абелевых групп K_n, и пусть G — произвольная абелева группа. Тогда для каждой размерности n имеется точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(K),\ G) \xrightarrow{\beta} H^n(K,\ G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H_n(K),\ G) \to 0, \qquad (4.1)$$

в которой гомоморфизмы β и α естественны по аргументам K и G. Эта последовательность расщепляется при помощи гомоморфизма, естественного по G, но не по K.

Второе отображение α определено на когомологическом классе $\mathrm{cls}\, f$ *следующим образом. Каждый n-мерный цикл из* $\mathrm{Hom}(K, G)$ *является гомоморфизмом f: $K_n \to G$, который равен нулю на ∂K_{n+1}, так что индуцируется гомоморфизм f_*: $H_n(K) \to G$. Если $f = \delta g$ — кограница, то на циклах это отображение равно нулю, так что $(\delta g)_* = 0$. Положим $\alpha(\mathrm{cls}\, f) = f_*$.*

Доказательство. Обозначим через C_n группу n-мерных циклов из K; тогда группа $D_n = K_n/C_n$ изоморфна группе B_{n-1} $(n-1)$-мерных границ из K. Граничный гомоморфизм ∂: $K_n \to K_{n-1}$ представим в виде

$$K_n \xrightarrow{j} D_n \xrightarrow{\partial'} C_{n-1} \xrightarrow{i} K_{n-1}, \qquad (4.2)$$

где j — проекция, i — вложение. Короткие последовательности

$$T_n : C_n \rightarrowtail K_n \twoheadrightarrow D_n, \quad S_n : D_{n+1} \overset{\partial'}{\rightarrowtail} C_n \twoheadrightarrow H_n(K) \qquad (4.3)$$

точны, причем вторая точна в силу определения H_n как $C_n/\partial K_n$. Когpаничный дифференциал комплекса $\mathrm{Hom}(K,G)$ равен $\delta = \pm\partial^*$, где гомоморфизм $\partial^* : \mathrm{Hom}(K_{n-1},G) \to \mathrm{Hom}(K_n,G)$ индуцирован дифференциалом ∂. Этот комплекс появляется как

средняя строка в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_n,\ G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C_n,\ G) \arrow[r, "\partial'^*"] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(D_{n+1},\ G) \arrow[d, "j^*"] \arrow[from=u] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{n-1},\ G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Hom}(K_n,\ G) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "i^*"] & \mathrm{Hom}(K_{n+1},\ G) \arrow[r] & \cdots & \\
 & \mathrm{Hom}(C_{n-1},\ G) \arrow[r, "\partial'^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(D_n,\ G) \arrow[r, "S^*_{n-1}"] \arrow[u, "j^*"] & \mathrm{Ext}(H_{n-1},\ G) \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма коммутативна с точностью до знака (включенного в определение $\delta = \pm\partial^*$). В этой диаграмме фундаментальная точная последовательность для Hom и Ext (теорема 3.2) встречается несколько раз. Верхняя строка — это точная последовательность для S_n, нижняя строка — та же последовательность для S_{n-1} с нулем справа, заменяющим группу $\mathrm{Ext}(C_{n-1}, G)$, которая исчезает, поскольку группа $C_{n-1} \subset K_{n-1}$ свободна. Столбцы же являются (частями) точных последовательностей для T_{n-1}, T_n и T_{n+1}; нуль в средней вершине стоит вместо $\mathrm{Ext}(D_n, G)$, поскольку группа D_n свободна.

Группа когомологий средней строки равна $\mathrm{Ker}\,\delta/\mathrm{Im}\,\delta$. Поскольку j^* — мономорфизм, а i^* — эпиморфизм, она равняется $\mathrm{Ker}(\partial'^*\, i^*)/\mathrm{Im}(j^*\, \partial'^*)$ и отображается при помощи i^* на группу $\mathrm{Ker}\,\partial'^*$, изоморфную $\mathrm{Hom}(H_n, G)$ в силу точности верхней строки. Результирующее отображение группы когомологий и есть отображение α. Ядро его равно $\mathrm{Im}\, j^*/\mathrm{Im}(j^*\partial'^*)$; так как j^* — мономорфизм, оно совпадает с $\mathrm{Ext}(H_{n-1}, G)$ ввиду точности нижней строки. Тем самым точность последовательности (4.1) доказана, причем β описывается в «обращающих» обозначениях как $j^*(S^*_{n-1})^{-1}$, и поэтому естественно.

Чтобы расщепить последовательность (4.1), заметим, что группа $D_n \cong B_{n-1} \subset K_{n-1}$ свободна, поэтому последовательность T_n из (4.3) расщепляется таким гомоморфизмом $\varphi : D_n \to K_n$, что $j\varphi = 1_D$. Тогда $\varphi^* j^* = 1$, так что отображение $S^*_{n-1}\varphi^*$ является левым обратным для $\beta = j^*(S^*_{n-1})^{-1}$, что и требовалось. Этот левый обратный зависит от выбора отображения φ, расщепляющего T_n. Такой выбор не может быть сделан единообразно для всех свободных комплексов K, поэтому φ^* не зависит естественно от K (но зависит естественно от G при фиксированном K).

В этом доказательстве несколько раз использовался тот факт, что подгруппы свободных абелевых групп свободны. Аналогичное утверждение справедливо для свободных модулей над кольцом главных идеалов; следовательно, теорема верна для комплекса K свободных модулей над таким кольцом D (и для D-модуля G). Наиболее полезный случай этой теоремы — это случай векторных пространств над полем. Тогда из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.2. *Если K — цепной комплекс, состоящий из векторных пространств K_n над полем F, и если V — любое векторное пространство над тем же полем, то существует естественный изоморфизм $H^n(K,V) \cong \operatorname{Hom}(H_n(K),V)$.*

В частности, если $V = F$, то $H^n(K, F)$ является пространством, сопряженным пространству $H_n(K)$.

Теорема 4.1 является специальным случаем более общего результата, который «подсчитывает» группу когомологий комплекса $\operatorname{Hom}(K, L)$, образованного двумя комплексами K и L. Напомним (II.3.4), что $\operatorname{Hom}(K,L)$— это комплекс, у которого $\operatorname{Hom}_n(K,L) = \prod_p \operatorname{Hom}(K_p,L_{p+n})$, а граничный гомоморфизм $\partial = \partial_H$ действует на любую n-мерную цепь $f = \{f_p : K_p \to L_{p+n}\}$ по правилу

$$(\partial_H f)_p k = \partial_L(f_p k) + (-1)^{n+1} f_{p-1}(\partial_K k), \quad k \in K_p. \tag{4.4}$$

Общая теорема такова:

Теорема 4.3. (*Теорема о гомотопической классификации.*) *Если K и L — комплексы абелевых групп, причем каждая группа K_n свободна как абелева группа, то для каждого n существует короткая точная последовательность*

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{Ext}(H_p(K), H_{p+n+1}(L)) \overset{\beta}{\rightarrowtail} H_n(\operatorname{Hom}(K,L)) \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \prod_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{Hom}(H_p(K),H_{p+n}(L)), \tag{4.5}$$

в которой гомоморфизмы β и α естественны по аргументам K и L. Эта последовательность расщепляется гомоморфизмом, естественным по аргументу L, но не по аргументу K.

Заменим нижние индексы верхними в соответствии с обычным соглашением $H_{-n} = H^n$ и предположим, что комплекс $L = L_0 = G$ имеет нулевой дифференциал; тогда каждое из произведений имеет не более одного ненулевого члена, так что (4.5) превращается в (4.1). Вообще, если мы уменьшим все индексы в L на n (и изменим знак у границ из L на $(-1)^n$), мы превратим $H_n(\operatorname{Hom}(K, L))$

в $H_0(\operatorname{Hom}(K, L))$; значит, достаточно доказать теорему для $n = 0$. Теперь в силу (4.4) 0-мерный цикл из $\operatorname{Hom}(K, L)$— это в точности цепное преобразование $f\colon K \to L$; это преобразование индуцирует в каждой размерности p гомоморфизм $(f_p)_*\colon H_p(K) \to H_p(L)$. Семейство этих гомоморфизмов является элементом

$$f_* = \{(f_p)_*\} \in \prod_p \operatorname{Hom}(H_p(K), H_p(L)).$$

Любое преобразование f', гомотопное f, индуцирует тот же гомоморфизм f_*. Поскольку элемент из $H_0(\operatorname{Hom}(K, L))$ — это гомотопический класс, $\operatorname{cls} f$, цепных преобразований (предложение II.3.2), сопоставление $\alpha(\operatorname{cls} f) = f_*$ определяет естественный гомоморфизм α, указанный в теореме. Определение гомоморфизма β более тонкое и будет дано ниже. Сначала мы рассмотрим частный случай теоремы.

Лемма 4.4. *Если граничный дифференциал в K тождественно равен нулю, то гомоморфизм $\alpha = \alpha_0$ является изоморфизмом*

$$\alpha_0 : H_0(\operatorname{Hom}(K,L)) \cong \prod_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{Hom}(K_p, H_p(L)).$$

Доказательство. Поскольку $\partial_K = 0$, $H_p(K) = K_p$. Пусть $C_p(L)$ — группа p-мерных циклов из L, а $B_p(L)$ — группа p-мерных границ. Любой элемент $g = \{g_p\} \in \prod \operatorname{Hom}(K_p,H_p(L))$ состоит из гомоморфизмов $g_p\colon K_p \to H_p(L)$; поскольку группа K_p свободна и $C_p(L) \twoheadrightarrow H_p(L)$ — эпиморфизм, каждый гомоморфизм g_p можно «поднять» до гомоморфизма $g_p' : K_p \to C_p(L)$. Эти отображения, рассматриваемые как отображения в $L_p \supset C_p(L)$, образуют цепное преобразование $f\colon K \to L$, для которого $\alpha_0(\operatorname{cls} f) = g$. Значит α_0 — эпиморфизм.

Чтобы установить мономорфность α_0, предположим, что $\alpha_0(\operatorname{cls} f) = 0$ для некоторого f. Для каждого p это означает, что $f_p(K_p) \subset B_p(L)$. Поскольку $\partial\colon L_{p+1} \twoheadrightarrow B_p(L)$ и группа K_p свободна, отображение f_p можно поднять до гомоморфизма $s_p : K_p \to L_{p+1}$ и $\partial s_p = f_p$. Поскольку $s_{p-1}\partial = s_{p-1}\partial_K = 0$, последнее равенство можно переписать в виде $f_p = \partial s_p + s_{p-1}\partial$. Отсюда следует, что f цепно гомотопно нулю, следовательно, $\operatorname{cls} f = 0$ в $H_0(\operatorname{Hom}(K, L))$. Поэтому $\operatorname{Ker} \alpha_0 = 0$, и лемма доказана.

Теперь рассмотрим общий случай теоремы 4.3, используя для комплекса K обозначения (4.2), (4.3). Семейство групп $C_n \subset K_n$ можно рассматривать как комплекс с нулевым граничным оператором. Аналогичное соглашение для D дает точную последовательность комплексов

$$0 \to C \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} D \to 0. \tag{4.6}$$

Применим функтор Hom (—, L) для получения другой точной последовательности комплексов

$$E\colon 0 \to \operatorname{Hom}(D,\ L) \xrightarrow{j^*} \operatorname{Hom}(K,\ L) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}(C,\ L) \to 0,$$

в которой нуль справа стоит вместо группы Ext (D, L), исчезающей, поскольку $D_n \cong B_{n-1} \subset K_{n-1}$ — подгруппа свободной группы и поэтому сама свободна. Точная гомологическая последовательность для E дает

$$\ldots \xrightarrow{\partial_E} H_0(\operatorname{Hom}(D, L)) \xrightarrow{j^*} H_0(\operatorname{Hom}(K, L)) \xrightarrow{i^*} H_0(\operatorname{Hom}(C, L)) \xrightarrow{\partial_E} \ldots,$$

со связывающими гомоморфизмами (для $n = 1$ и $n = 0$)

$$\partial_{E,n}\colon H_n(\operatorname{Hom}(C,\ L)) \to H_{n-1}(\operatorname{Hom}(D,\ L)).$$

Средняя часть этой последовательности может быть описана с использованием ∂_E как короткая точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Coker} \partial_{E,1} \to H_0(\operatorname{Hom}(K, L)) \to \operatorname{Ker} \partial_{E,0} \to 0. \qquad (4.7)$$

Как и в нашей теореме, средний член этой последовательности равен H_0 (Hom (K, L)); остается отождествить крайние члены, проанализировав ∂_E.

Отображение $\partial'\colon D \to C$ индуцирует отображения $\partial'^*\colon\operatorname{Hom}_n(C,L) \to \operatorname{Hom}_{n-1}(D,L)$, антикоммутирующие с ∂_L, и, следовательно, индуцирует так же отображения групп гомологий. Эти отображения (с точностью до знака) совпадают со связывающими гомоморфизмами ∂_E. Действительно, ∂_E определяется на циклах с помощью «обращения» как $j^{*-1}\partial_H i^{*-1}$. Цикл g из $\operatorname{Hom}_n(C,\ L)$ — это семейство отображений $\{g_p\colon C_p \to L_{p+n}\}$, для которых $\partial_L g_p = 0$; поскольку группа D_p свободна, $K_p \cong C_p \oplus D_p$, так что каждый гомоморфизм g_p можно расширить до такого гомоморфизма $f_p\colon K_p \to L_{p+n}$, что $\partial_L f_p = 0$. Поскольку $i^*f = fi = g$, положим $i^{*-1}g$ равным f. Поскольку $\partial_L f = 0$, формула (4.4) для граничного дифференциала ∂_H в Hom (K, L) сводится к $\partial_H f = \pm \partial_K^* f$. Теперь $\partial_K = i\partial' j$ в силу (4.2), так что $\partial_H f = \pm j^*\partial'^* i^* f$, и мы можем считать $j^{*-1}\partial_H i^{*-1}g$ равным $\pm\partial'^* g$. Таким образом, ∂_E действительно индуцировано $\pm\partial'^*$. Но изоморфизм α_0 в лемме 4.4 естествен, поэтому диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
H_n(\operatorname{Hom}(C,\ L)) & \xrightarrow{\partial_E = \pm\partial'^*} & H_{n-1}(\operatorname{Hom}(D,\ L)) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} \\
\prod_p \operatorname{Hom}(C_p,\ H_{p+n}(L)) & \xrightarrow{\partial'^*} & \prod_p \operatorname{Hom}(D_{p+1},\ H_{p+n}(L))
\end{array}$$

коммутативны с точностью до знака. Поэтому мы можем отождествить ядро гомоморфизма ∂_E с изоморфным ему ядром гомоморфизма ∂'^* (из нижней строки диаграммы).

Теперь применим функтор Hom (—, $H_{p+n}(L)$) к точной последовательности S_p из (4.3). Согласно основной точной последовательности (теорема 3.2) для Hom и Ext, мы получим точную последовательность

$$\begin{aligned}
&0 \to \operatorname{Hom}(H_p(K),\ H_{p+n}(L)) \to \operatorname{Hom}(C_p,\ H_{p+n}(L)) \xrightarrow{\partial'^*} \\
&\xrightarrow{\partial'^*} \operatorname{Hom}(D_{p+1},\ H_{p+n}(L)) \xrightarrow{S^*} \operatorname{Ext}(H_p(K),\ H_{p+n}(L)) \to 0,
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

в которой последний нуль стоит вместо Ext (C_p, $H_{p+n}(L)$), так как эта группа исчезает в силу того, что группа $C_p \subset K_p$ свободна. Прямое произведение этих последовательностей по всем p также дает точную последовательность, которая описывает ядра и коядра гомоморфизмов ∂'^* в виде

$$\operatorname{Ker} \partial_{E,0} \cong \operatorname{Ker} \partial'^* = \prod_p \operatorname{Hom}(H_p(K),\ H_p(L)),$$

$$\operatorname{Coker} \partial_{E,1} \cong \operatorname{Coker} \partial'^* = \prod_p \operatorname{Ext}(H_p(K),\ H_{p+1}(L)).$$

Подстановка этих выражений в (4.7) и дает требуемую точную последовательность (4.5) теоремы 4.3. Гомоморфизм α определяется при этом как произведение

$$H_0(\operatorname{Hom}(K,L)) \xrightarrow{i^*} H_0(\operatorname{Hom}(C,L)) \xrightarrow{\alpha_0} \prod_p \operatorname{Hom}(C_p,\ H_p(L)) \to$$

$$\to \prod_p \operatorname{Hom}(H_p(K),\ H_p(L));$$

здесь последняя стрелка обозначает аддитивное отношение, «обратное» к первому мономорфизму из (4.8). Это произведение α сопоставляет каждому $f\colon K \to L$ семейство индуцированных отображений гомологических классов, так что совпадает с уже описанным отображением. Гомоморфизм β является произведением

$$\prod_p \operatorname{Ext}(H_p(K),\ H_{p+1}(L)) \xrightarrow{S^{*-1}} \prod_p \operatorname{Hom}(D_{p+1},\ H_{p+1}(L)) \xrightarrow{\alpha_0^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\alpha_0^{-1}} H_0(\operatorname{Hom}(D,\ L)) \xrightarrow{j^*} H_0(\operatorname{Hom}(K,\ L)),$$

т. е. $\beta = j^*\alpha_0^{-1} S^{*-1}$, где S^{*-1} — «обратный» к гомоморфизму S^* из (4.8), полученному для последовательности S. Будучи произведением естественных отображений, гомоморфизм β естествен. Чтобы расщепить (4.5), выберем, как и раньше, такой гомоморфизм φ, что $j\varphi = 1_D$; тогда $S^*\alpha_0\varphi^*$ — левый обратный для $\beta = j^*\alpha_0^{-1}S^{*-1}$, естественный по L, но не по K.

В теореме о гомотопической классификации группы Ext аннулируются, если $H_n(K)$— свободные группы. Поэтому получаем такое

Следствие 4.5. *Если K и L — комплексы абелевых групп, причем группы K_n и $H_n(K)$ свободны, то два цепных преобразования f, f': $K \to L$ цепно гомотопны тогда и только тогда, когда $f_* = f'_*: H_n(K) \to H_n(L)$ для любой размерности n.*

Доказательство основывается на замечании, что $f \simeq f'$ означает то же, что и $\operatorname{cls} f = \operatorname{cls} f'$ в $H_0(\operatorname{Hom}(K, L))$. С другой стороны, если некоторая группа $\operatorname{Ext}(H_p(K), H_{p+1}(L)) \neq 0$, условие $f_* = f'_*$ для всех n недостаточно для цепной гомотопии f и f'.

Полезным приложением теоремы об универсальных коэффициентах является

Следствие 4.6. *Если $f: K \to K'$ — цепное преобразование комплексов K и K' свободных абелевых групп, причем $f_*: H_n(K) \cong H_n(K')$ для всех n, то для любой группы коэффициентов G отображение f^*: $H^n(K', G) \to H^n(K, G)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку отображения α и β естественны, диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(K'), G) & \to & H^n(K', G) & \to & \operatorname{Hom}(H_n(K'), G) & \to 0 \\ & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & \\ 0 \to & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(K), G) & \to & H^n(K, G) & \to & \operatorname{Hom}(H_n(K), G) & \to 0 \end{array}$$

коммутативна. Поскольку отображения $f_n: H_n(K) \to H_n(K')$ — изоморфизмы, крайние вертикальные отображения $\operatorname{Ext}(f_{n-1}, 1_G)$ и $\operatorname{Hom}(f_n, 1_G)$ также являются изоморфизмами. В силу короткой леммы о пяти гомоморфизмах среднее отображение есть изоморфизм, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дать прямое доказательство следствия 4.2.

2. Показать, что теоремы 4.1 и 4.3 остаются справедливыми для комплексов R-модулей, если требование о свободе K_n заменить предположением о том, что $C_n(K)$ и $K_n/C_n(K)$ являются проективными модулями для каждого n.

3. Если K и L — комплексы абелевых групп, причем группы K_n свободны, то для любого семейства гомоморфизмов $\gamma_n: H_n(K) \to H_n(L)$ по одному для каждого n, существует цепное преобразование f: $K \to L$, для которого $\gamma_n = H_n(f)$.

§ 5. Умножение расширений

Вернемся теперь к изучению расширений модулей. Две короткие точные последовательности

$$E: 0 \to A \to B_1 \xrightarrow{\sigma} K \to 0, \quad E': 0 \to K \xrightarrow{\lambda} B_0 \to C \to 0,$$

первая из которых оканчивается модулем K, с которого начинается вторая, можно *соединить* вместе с помощью отображения $B_1 \to K \to B_0$ и получить длинную точную последовательность

$$E \circ E': 0 \to A \to B_1 \xrightarrow{\lambda\sigma} B_0 \to C \to 0, \tag{5.1}$$

называемую *произведением* Ионеды последовательностей E и E'. Обратно, любая точная последовательность $A \rightarrowtail B_1 \to B_0 \twoheadrightarrow C$ обладает таким разложением, в котором $K = \operatorname{Ker}(B_0 \to C) = \operatorname{Im}(B_1 \to B_0)$.

Длинные точные последовательности перемножаются аналогично. Рассмотрим n-кратную точную последовательность

$$S: 0 \to A \to B_{n-1} \to B_{n-2} \to \cdots \to B_0 \to C \to 0,$$

начинающуюся с модуля A и *кончающуюся* модулем C. Если T — любая m-кратная последовательность, начинающаяся с модуля C, которым оканчивается S, соединение в C дает произведение Ионеды $S \circ T$, которое является $(n+m)$-кратной точной последовательностью, имеющей начало, общее с S, и конец, общий с T. Это умножение последовательностей, очевидно, ассоциативно, но оно может не быть связанным ассоциативным законом с умножением на гомоморфизмы. Например, пусть E и E' — последовательности из (5.1), M — произвольный модуль и $\pi: K \oplus M \to K$ есть проекция прямой суммы. Из коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{cccccc} E_1: A & \rightarrowtail & B_1 \oplus M & \twoheadrightarrow & K \oplus M \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ E: A & \rightarrowtail & B_1 & \twoheadrightarrow & K, \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} E'_1: K \oplus M & \rightarrowtail & B_0 \oplus M & \twoheadrightarrow & C \\ \downarrow \pi & & \downarrow & & \| \\ E': K & \rightarrowtail & B_0 & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

и определения умножений на гомоморфизмы видно, что $E_1 \equiv E\pi$ и $E' \equiv \pi E'_1$; однако произведение верхних строк

$$E_1 \circ E'_1: 0 \to A \to B_1 \oplus M \xrightarrow{\lambda\sigma \oplus 1} B_0 \oplus M \to C \to 0 \tag{5.1}$$

не совпадает с (5.1), другими словами, $(E\pi) \circ E'_1 \neq E \circ (\pi E'_1)$, и ассоциативный закон не выполнен.

Для коротких точных последовательностей мы уже определили конгруэнтность как изоморфизм с тождественными отображениями на концах. Для длинных последовательностей нам необходимо более широкое отношение конгруэнтности $\equiv$, обладающее свойством

$$(E''\beta) \circ E' \equiv E'' \circ (\beta E'), \tag{5.2}$$

причем это отношение имеет место всякий раз, как определены все встречающиеся произведения, т. е. всякий раз, как последовательность E'' оканчивается некоторым модулем K, β: $L \to K$ для некоторого L и последовательность E' начинается с модуля L. Определим

8—353

конгруэнтность как наименьшее рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, включающее (5.2) и ранее введенную конгруэнтность коротких точных последовательностей. Это определение можно выразить следующим образом. Запишем произвольную n-кратную точную последовательность S как произведение n точных последовательностей E_i,

$$S = E_n \circ E_{n-1} \circ \cdots \circ E_1; \tag{5.3}$$

последовательности E_i единственны с точностью до изоморфизма. Вторая n-кратная последовательность S' с тем же началом и тем же концом *конгруэнтна* S, если S' можно получить из S конечной последовательностью замещений следующих трех типов:

(i) замена любого множителя E_i конгруэнтной короткой точной последовательностью;

(ii) если два последовательных множителя имеют вид $E''\beta \circ E'$ для некоторых E'', β и E', как в (5.2), то их можно заменить на $E'' \circ \beta E'$;

(iii) если два последовательных множителя имеют вид $E'' \circ \beta E'$, то их можно заменить на $E''\beta \circ E'$.

Например, двукратные последовательности (5.1) и (5.1′) конгруэнтны.

Мы также определим произведение длинной точной последовательности или ее класса конгруэнтности и некоторых гомоморфизмов. Именно, если S — n-кратная точная последовательность, начинающаяся с A и кончающаяся C, то мы определим произведение αS для всякого гомоморфизма α с областью определения A и определим произведение $S\gamma$ для всякого гомоморфизма γ с областью значений C с помощью формул (S представлена как в (5.3)):

$$\alpha(E_n \circ \cdots \circ E_1) = (\alpha E_n) \circ E_{n-1} \circ \cdots \circ E_1,$$
$$(E_n \circ \cdots \circ E_2 \circ E_1)\gamma = E_n \circ \cdots \circ E_2 \circ (E_1\gamma).$$

Если S и S' — n-кратные точные последовательности, то *морфизм* $\Gamma: S \to S'$ — это семейство гомоморфизмов $(\alpha, \ldots, \gamma)$, образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
S: 0 & \to & A & \to & B_{n-1} & \to & \cdots & \to & B_0 & \to & C & \to & 0 \\
\downarrow \Gamma & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\
S': 0 & \to & A' & \to & B'_{n-1} & \to & \cdots & \to & B'_0 & \to & C' & \to & 0.
\end{array}$$

Мы будем говорить, что Γ *начинается* с гомоморфизма α и *кончается* гомоморфизмом γ. Композиция αE определялась при помощи подобной диаграммы $E \to \alpha E$, так что приведенное выше определение αS порождает морфизм $S \to \alpha S$, начинающийся с α и кончающийся 1; аналогично возникает морфизм $S\gamma \to S$, начинающийся с 1 и кончающийся γ. В обобщение предложения 1.8 мы получаем

Предложение 5.1. *Каждый морфизм Γ n-кратных точных последовательностей S и S', начинающийся с α и кончающийся γ, порождает конгруэнцию $\alpha S \equiv S'\gamma$.*

Доказательство. Для симметрии в обозначениях положим $B_n = A$, $B_{-1} = C$. Пусть $K_i = \operatorname{Im}(B_i \to B_{i-1}) = \operatorname{Ker}(B_{i-1} \to B_{i-2})$, $i = n-1, \ldots, 1$; тогда S разлагается в произведение $E_n \circ \ldots \circ E_1$, где $E_i: K_i \rightarrowtail B_{i-1} \twoheadrightarrow K_{i-1}$ и $K_n = A$, $K_0 = C$. Последовательность S' можно разложить аналогично. Заданный морфизм $\Gamma: S \to S'$ индуцирует гомоморфизмы $\beta_i: K_i \to K'_i$, которые образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_i: 0 & \to & K_i & \to & B_{i-1} & \to & K_{i-1} & \to & 0 \\
& & \downarrow \beta_i & & \downarrow & & \downarrow \beta_{i-1} & & \\
E'_i: 0 & \to & K'_i & \to & B'_{i-1} & \to & K'_{i-1} & \to & 0.
\end{array}$$

В силу предложения 1.8 из этой диаграммы вытекает, что $\beta_i E_i \equiv E'_i \beta_{i-1}$, причем на концах $\beta_n = \alpha$ и $\beta_0 = \gamma$. Следовательно, по нашему определению конгруэнтности

$$\alpha S = (\alpha E_n) \circ E_{n-1} \ldots \equiv (E'_n \beta_{n-1}) \circ E_{n-1} \circ \ldots \equiv E'_n \circ (\beta_{n-1} E_{n-1}) \circ \ldots \equiv$$
$$\equiv E'_n \circ (E'_{n-1} \beta_{n-2}) \circ \ldots \equiv \ldots \equiv S'\beta_0 = S'\gamma.$$

Этот результат дает иное определение конгруэнтности, приведенное в следующем предложении.

Предложение 5.2. *Конгруэнтность $S \equiv S'$ между двумя n-кратными точными последовательностями, начинающимися с A и кончающимися C, имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого натурального числа k существуют $2k$ морфизмов n-кратных точных последовательностей,*

$$S = S_0 \to S_1 \leftarrow S_2 \to \cdots \leftarrow S_{2k-2} \to S_{2k-1} \leftarrow S_{2k} = S',$$

причем эти морфизмы направлены навстречу друг другу и все начинаются с 1_A и кончаются 1_C.

Это предложение устанавливает, что $S \equiv S'$ — такое наименьшее рефлективное, симметричное и транзитивное отношение, что существование морфизма $\Gamma: S \to S'$ с 1 на концах влечет конгруэнтность $S \equiv S'$.

Доказательство. Предположим сначала, что $S \equiv S'$. Для исходной конгруэнции (5.2) определение произведения $E''\beta$ порождало морфизм $E''\beta \to E''$, в то время как определение $\beta E'$ порождало морфизм $E' \to \beta E'$ точных последовательностей. Соединение следующих двух диаграмм

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
E''\beta: A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & L \arrow[d, "\beta"] & L \arrow[r, tail] \arrow[d, "\beta"] & B_0' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C: E' \arrow[d, equal] \\
E'': A \arrow[r, tail] & B_1'' \arrow[r, two heads] & K & K \arrow[r, tail] & B_0 \arrow[r, two heads] & C: \beta E'
\end{tikzcd}$$

по общему отображению β порождает морфизм $(E''\beta) \circ E' \to E'' \circ (\beta E')$. Следовательно, строка конгруэнций вида (5.2) порождает описанную последовательность морфизмов. Обратное утверждение немедленно вытекает из предложения 5.1.

Пусть $\operatorname{Ext}_R^n(C, A)$ для фиксированных R-модулей A и C обозначает множество всех классов конгруэнтности $\sigma = \operatorname{cls} S$ n-кратных точных последовательностей, начинающихся с A и кончающихся C. Будем писать $S \in\in \operatorname{Ext}^n(C, A)$, если $S \in \sigma \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$. Если $T \in \tau \in \operatorname{Ext}^m(D, C')$, то произведение $S \circ T$ определено при $C = C'$; класс, в котором лежит $S \circ T$, определяется σ и τ и является элементом из $\operatorname{Ext}^{n+m}(D, A)$, который мы обозначим $\sigma\tau$ (не используя знака $\circ$ для умножения). «Встречное» условие, необходимое для определения $\sigma\tau$, можно сформулировать, если считать $\sigma \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ «морфизмом» последнего модуля C в начальный модуль A; тогда $\sigma\tau$ определено, если область определения морфизма τ совпадает с областью значений морфизма σ. Это условие включает «встречное» условие для умножения гомоморфизма $\alpha: A \to A'$ на расширение $\sigma \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$. Оно также включает в себя условие для перемножения обычных гомоморфизмов, если интерпретировать $\operatorname{Ext}^0(C, A)$ как $\operatorname{Hom}(C, A)$, что мы и будем делать.

Для каждого n, $\operatorname{Ext}_R^n(C, A)$ есть бифунктор, контравариантный по C и ковариантный по A. Бифунктор $\operatorname{Ext}_R^n(C, A)$ является также абелевой группой относительно сложения, введенного при помощи сложения Бэра. Действительно, две n-кратные точные последовательности $S \in \sigma \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ и $S' \in \sigma' \in \operatorname{Ext}^n(C', A')$ имеют прямую сумму $S \oplus S' \in\in \operatorname{Ext}^n(C \oplus C', A \oplus A')$, которая находится путем взятия прямой суммы соответствующих модулей и отображений в S и S'. Класс конгруэнтности последовательности $S \oplus S'$ зависит только от классов σ и σ', и поэтому его можно обозначить $\sigma \oplus \sigma'$; для доказательства заметим, что конгруэнция $(E''\beta) \circ E' \equiv E'' \circ (\beta E')$ из (5.2) распространяется следующим образом до конгруэнции прямых сумм:

$$(E''\beta \oplus F'') \circ (E' \oplus F') \equiv (E'' \oplus F'')(\beta \oplus 1) \circ (E' \oplus F') \equiv$$
$$\equiv (E'' \oplus F'') \circ (\beta \oplus 1)(E' \oplus F') \equiv (E'' \oplus F'') \circ (\beta E' \oplus F').$$

Наконец, сложение Бэра определяется для $\sigma_1, \sigma_2 \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$, $i = 1, 2$, уже известной формулой

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \nabla_A(\sigma_1 \oplus \sigma_2)\Delta_C. \tag{5.4}$$

Теорема 5.3. *Пусть* Ext_R *— собрание всех классов конгруэнтности* $\sigma, \tau, \ldots$ *кратных точных последовательностей R-модулей. Каждый класс σ имеет степень n ($n = 0, 1, 2, \ldots$); R-модуль C как областью определения и R-модуль A как областью значений; в этом случае мы пишем* $\sigma \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ *и* $\operatorname{Ext}^0(C, A) = \operatorname{Hom}(C, A)$. *Произведение $\sigma\tau$ определено, если* $\operatorname{range} \tau = \operatorname{domain} \sigma$, $\operatorname{degree}(\sigma\tau) = \deg \sigma + \deg \tau$, $\operatorname{range} \sigma\tau = \operatorname{range} \sigma$, $\operatorname{domain} \sigma\tau = \operatorname{domain} \tau$. *Сумма $\sigma_1 + \sigma_2$ определена для σ_1, σ_2 из одного и того же множества* $\operatorname{Ext}^n(C, A)$ *и превращает* $\operatorname{Ext}^n(C, A)$ *в абелеву группу. Дистрибутивные законы*

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\tau = \sigma_1\tau + \sigma_2\tau, \qquad \sigma(\tau_1 + \tau_2) = \sigma\tau_1 + \sigma\tau_2 \tag{5.5}$$

и ассоциативный закон $\rho(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\tau$ справедливы всякий раз, как определены встречающиеся сложение и умножение.

Короче, Ext_R подобно кольцу, за исключением того, что сумма $\sigma + \tau$ и произведение $\sigma\tau$ не всегда определены.

Эта теорема, очевидно, включает в себя доказанную ранее теорему 2.1 для $\operatorname{Ext}^1 = \operatorname{Ext}$, и ее доказательство подобно «умозрительному» доказательству теоремы 2.1. Такое доказательство опирается на некоторые правила для «прямых сумм». В нашем случае эти правила (и их аналоги из теоремы 2.1) выглядят так

$$(\sigma \oplus \sigma')(\tau \oplus \tau') = \sigma\tau \oplus \sigma'\tau', \quad (2.8) \text{ и } (2.9), \tag{5.6}$$

$$\sigma\nabla = \nabla(\sigma \oplus \sigma), \quad (2.10), (2.11) \tag{5.7}$$

$$\Delta\tau = (\tau \oplus \tau)\Delta, \quad (2.10'), (2.11') \tag{5.8}$$

$$\omega(\sigma \oplus \sigma') = (\sigma' \oplus \sigma)\omega, \tag{5.9}$$

где ω — естественный изоморфизм $\omega: A \oplus A' \to A' \oplus A$. Остается только доказать эти правила.

Сначала рассмотрим (5.6). Если и σ, и τ имеют степень нуль, то они являются обычными гомоморфизмами и (5.6) превращается в обычное (функторное) правило для подсчета прямой суммы гомоморфизмов. Если и σ, и τ имеют положительную степень, то (5.6) становится очевидным правилом для произведения прямых сумм точных последовательностей. Если σ — степени нуль, а τ — положительной степени, то σ и σ' в действительности действуют только на крайние левые множители τ и τ'; значит, (5.6) сводится к случаю, когда τ и τ' — короткие точные последовательности, а этот случай рассмотрен в (2.8). Аналогично, когда σ положительной, а τ нулевой степени, (5.6) сводится к (2.9).

Теперь возьмем (5.7). Когда σ имеет степень нуль, (5.7) превращается в (2.10); когда σ степени 1 и является короткой точной последовательностью, то (5.7) совпадает со вторым соотношением (2.11).

В случае, когда степень σ равна 2, из (2.11) следуют конгруэнции

$$(E_2 \circ E_1)\nabla = E_2 \circ (E_1\nabla) \equiv E_2 \circ \nabla (E_1 \oplus E_1) \equiv$$
$$\equiv E_2\nabla \circ (E_1 \oplus E_1) \equiv \nabla (E_2 \oplus E_2) \circ (E_1 \oplus E_1),$$

устанавливающие (5.7.). Более длинные случаи разбираются подобным же образом.

Доказательство (5.8) аналогично, а (5.9) вытекает из соотношения $\omega (E_1 \oplus E_2) \cong (E_2 \oplus E_1)\, \omega$, полученного применением предложения 1.8 к морфизму $(\omega, \omega, \omega) : E_1 \oplus E_2 \to E_2 \oplus E_1$.

Нам осталось только указать нуль и противоположный элемент в абелевой группе $\operatorname{Ext}^n (C,A)$. Противоположным к $\operatorname{cls} S$ будет $\operatorname{cls} ((-1_A)\, S)$. Нулевым элементом в Ext^n для $n = 0$ служит нулевой гомоморфизм, для $n = 1$ — расширение, являющееся прямой суммой, для $n > 1$ класс конгруэнтности n-кратной точной последовательности

$$S_0 : 0 \to A \xrightarrow{1} A \to 0 \to \cdots \to 0 \to C \xrightarrow{1} C \to 0.$$

Действительно, для каждой последовательности $S \in \in \operatorname{Ext}^n (C,A)$ существует морфизм $(0, \ldots, 1): S \to S_0$, так что в силу предложения 5.1 $S_0 \equiv 0_A S$ и $\operatorname{cls} S + \operatorname{cls} S_0 = \operatorname{cls} S$.

Правила (5.5) показывают, что функтор Ext^n аддитивен, так что мы получаем, как и для Ext^1, изоморфизмы

$$\operatorname{Ext}^n (A \oplus B, G) \cong \operatorname{Ext}^n (A, G) \oplus \operatorname{Ext}^n (B, G),$$
$$\operatorname{Ext}^n (A, G \oplus H) \cong \operatorname{Ext}^n (A, G) \oplus \operatorname{Ext}^n (A, H).$$

Далее, любое короткое расширение с помощью проективного модуля расщепляется. Поэтому

$$\operatorname{Ext}^n (P, G) = 0, \qquad n > 0, \qquad P \text{ проективен}. \tag{5.10}$$

Наше построение элемента $\sigma \in \operatorname{Ext}^n (C, A)$ как класса всех (возможных) n-кратных последовательностей, конгруэнтных данной последовательности S, дает «большой» класс, и поэтому класс $\operatorname{Ext}^n (C, A)$ таких классов не строго определен при обычной аксиоматике теории множеств. Это «непорядочное» использование теории множеств можно исправить: интуитивно ясно, что достаточно ограничить кардинальные числа множеств, используемых при построении последовательностей S для данных модулей A и C.

Перейдём теперь к отысканию методов вычисления групп Ext^n.

§ 6. Резольвенты

Любой модуль C является фактормодулем $C = F_0/R_0$ некоторого свободного модуля F_0. Подмодуль R_0 снова есть фактормодуль $R_0 = F_1/R_1$ для подходящего свободного модуля F_1. Продолжение

этого процесса приводит к точной последовательности $\cdots \to F_1 \to \to F_0 \to C \to 0$, которая называется «свободной резольвентой» модуля C. Мы хотим сравнить между собой две такие резольвенты. Более детально, *комплекс* (X, ε) *над* R-модулем C — это такая последовательность R-модулей X и гомоморфизмов

$$\to X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0, \tag{6.1}$$

что произведение любых двух последовательных гомоморфизмов равно нулю. Другими словами, X — это положительный комплекс R-модулей, C — тривиальный цепной комплекс ($C = C_0$, $\partial = 0$) и ε: $X \to C$ — цепное преобразование комплекса X в комплекс C. *Резольвентой* модуля C называется *точная* последовательность (6.1), т. е. комплекс (X, ε) с группами гомологий $H_n (X) = 0$ при $n > 0$ и $\varepsilon : H_0 (X) \cong C$. Комплекс X *свободен*, если каждый модуль X_n свободен, и *проективен*, если каждый модуль X_n проективен. Мы сравним любой проективный комплекс с некоторой резольвентой.

Теорема 6.1. (*Теорема сравнения.*) *Если, γ: $C \to C'$ — гомоморфизм модулей, ε: $X \to C$ — проективный комплекс над C и ε': $X' \to C'$ — резольвента C', то существует цепное преобразование $f : X \to X'$, причем $\varepsilon' f = \gamma\varepsilon$, и любые два таких цепных преобразования цепно гомотопны.*

Мы будем говорить, что преобразование f *накрывает* гомоморфизм γ.

Доказательство использует лишь категорные свойства проективных модулей и точности. Поскольку модуль X_0 проективен, а ε' — эпиморфизм, отображение $\gamma\varepsilon : X_0 \to C'$ можно провести через отображение $f_0 : X_0 \to X'_0$, где $\varepsilon' f_0 = \gamma\varepsilon$. Для завершения доказательства достаточно построить по индукции такое отображение f_n, если даны отображения $f_{n-1}, \ldots, f_0$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & X_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
X'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & X'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & X'_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C'
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Ввиду этой коммутативности $\partial'_{n-1} f_{n-1} \partial_n = f_{n-2} \partial\partial = 0$. Значит, $\operatorname{Im} (f_{n-1}\partial_n) \subset \operatorname{Ker} \partial'_{n-1}$. В силу точности нижней строки последнее ядро равно $\partial'_n X'_n$. Поскольку модуль X_n проективен, отображение $f_{n-1}\partial_n$ можно провести через $\partial'_n : \partial'_n f_n = f_{n-1}\partial_n$, что и требовалось доказать.

Построение гомотопии проводится подобным же образом; оно может быть проведено непосредственно или с использованием замечания, что разность между двумя цепными преобразованиями

$f: X \to X'$, накрывающими один и тот же гомоморфизм γ, есть цепное преобразование, накрывающее $0: C \to C'$.

Лемма 6.2. *Пусть в условиях теоремы* 6.1 $f: X \to X'$ — *цепное преобразование, накрывающее* $\gamma: C \to C'$. *Предположим, что существует такой гомоморфизм* $t: C \to X_0'$, *что* $\varepsilon' t = \gamma$. *Тогда существуют такие гомоморфизмы* $s_n: X_n \to X_{n+1}'$ *для* $n = 0, 1, \ldots$, *что для всех* n

$$\partial' s_0 + t\varepsilon = f_0, \quad \partial' s_{n+1} + s_n \partial = f_{n+1}.$$

Доказательство. Отображение $\varepsilon'(f_0 - t\varepsilon): X_0 \to C'$ равно нулю. Поэтому $f_0 - t\varepsilon$ отображает проективный модуль X_0 в $\operatorname{Ker} \varepsilon' = \operatorname{Im}(X_1' \to X_0')$, следовательно, это отображение можно провести через ∂': $\partial' s_0 = f_0 - t\varepsilon$. Предположим по индукции, что мы уже построили искомые отображения $t = s_{-1}, s_0, \ldots, s_n$. Мы хотим найти такое отображение s_{n+1}, что $\partial' s_{n+1} = f_{n+1} - s_n \partial$. Теперь

$$\partial'(f_{n+1} - s_n \partial) = f_n \partial - (f_n - s_{n-1}\partial)\partial = 0$$

по индуктивному предположению, так что $f_{n+1} - s_n \partial$ отображает X_{n+1} в $\operatorname{Ker} \partial' = \partial' X_{n+2}'$ и, следовательно, может быть проведено через ∂' с помощью нужного отображения $s_{n+1}: X_{n+1} \to X_{n+2}'$.

Пусть A — фиксированный модуль; применим функтор $\operatorname{Hom}_R(-, A)$ к резольвенте (6.1). Поскольку этот функтор не сохраняет точность, результирующий комплекс $\operatorname{Hom}_R(X, A)$ может иметь нетривиальные группы когомологий

$$H^n(X, A) = H^n(\operatorname{Hom}_R(X, A)).$$

Следствие 6.3. *Если X и X' — две проективные резольвенты модуля C, а A — произвольный модуль, то группы* $H_n(X, A) \cong H^n(X', A)$ *зависят только от C и A.*

Доказательство. В силу первой половины теоремы 6.1 существуют отображения $f: X \to X'$ и $g: X' \to X$, накрывающие 1_C; в силу второй половины теоремы произведение gf гомотопно $1: X \to X$. Следовательно, для отображений $f^*: H^n(X', A) \to H^n(X, A)$ и g^* имеют место равенства $g^* f^* = 1 = f^* g^*$, так что эти отображения являются изоморфизмами, что и требовалось доказать.

Теперь мы покажем, что эта функция $H^n(X, A)$ от A и C в точности совпадает с $\operatorname{Ext}^n(C, A)$. Пусть $n = 0$; последовательность $X_1 \to X_0 \to C \to 0$ точна справа, поэтому последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, A) \xrightarrow{\varepsilon^*} \operatorname{Hom}(X_0, A) \to \operatorname{Hom}(X_1, A)$$

точна слева. Она показывает, что $\varepsilon^*: \operatorname{Hom}(C, A) \cong H^0(X, A)$. Пусть теперь $n > 0$. Каждую n-кратную точную последовательность S можно рассматривать как резольвенту C, в которой за членом A степени n стоят только нули, что и показано в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & X_n & \to & X_{n-1} & \to & \cdots & \to & X_0 & \to & C \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| \\ S: 0 & \to & & & A & \to & B_{n-1} & \to & \cdots & \to & B_0 & \to & C \to 0. \end{array} \tag{6.2}$$

Теорема 6.4. *Если C и A суть R-модули и $\varepsilon: X \to C$ — проективная резольвента C, то существует изоморфизм*

$$\zeta: \operatorname{Ext}^n(C, A) \cong H^n(X, A), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6.3}$$

определенный для $n > 0$ следующим образом. Рассмотрим последовательность $S \in \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ как резольвенту модуля C и накроем 1_C цепным преобразованием $g: X \to S$. Тогда $g_n: X_n \to A$ — коцикл комплекса X. Положим

$$\zeta(\operatorname{cls} S) = \operatorname{cls} g_n \in H^n(X, A). \tag{6.4}$$

Этот изоморфизм ζ естествен по A. Он также естествен по C в следующем смысле: если $\gamma: C' \to C$, $\varepsilon': X' \to C'$ — проективная резольвента C' и $f: X' \to X$ накрывает γ, то

$$\zeta' \gamma^* = f^* \zeta: \operatorname{Ext}^n(C, A) \to H^n(X', A). \tag{6.5}$$

Доказательство. Сначала покажем, что отображение ζ определено корректно. Поскольку $g_n \partial = 0$, g_n — коцикл, как и утверждалось. Заменим g любым другим цепным преобразованием g', накрывающим 1_C [см. (6.2)]. По теореме 6.1 существует такая цепная гомотопия s, что $g_n' - g_n = \partial s_n + s_{n-1}\partial$. Но $s_n: X_n \to 0$, так что $s_n = 0$, $g_n' - g_n = s_{n-1}\partial = (-1)^n \delta s_{n-1}$; последнее по определению кограничного дифференциала [II (3.1)] в $\operatorname{Hom}(X, A)$. Этим показано, что коциклы g_n и g_n' когомологичны, поэтому $\operatorname{cls} g_n' = \operatorname{cls} g_n$. Теперь заменим S произвольной конгруэнтной точной последовательностью S'. Согласно описанию отношения конгруэнтности $S \equiv S'$, данному в предложении 5.2, достаточно рассмотреть случай, когда существует морфизм $\Gamma: S \to S'$, начинающийся и кончающийся 1. В этом случае любому преобразованию $g: X \to S$ отвечает преобразование $\Gamma g: X \to S'$ с тем же самым коциклом $g_n = (\Gamma g)_n$; следовательно, $\operatorname{cls} g_n$ — корректно определенная функция $\operatorname{cls} S$. Тем самым ζ определено; свойства естественности этого отображения, сформулированные в теореме, получаются немедленно, при использовании подходящих произведений цепных преобразований.

Вместо прямого доказательства того, что ζ — изоморфизм, мы построим обратное отображение. Пусть дана резольвента X; представим $\partial : X_n \to X_{n-1}$ как $X_n \xrightarrow{\partial'} \partial X_n \xrightarrow{\varkappa} X_{n-1}$, где $\varkappa$ — вложение; при этом возникает n-кратная точная последовательность $S_n(C, X)$, указанная в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & X_n \arrow[d, "\partial'"] \arrow[dr, "\partial"] & & & & \\
S_n(C,X)\colon & 0 \arrow[r] & \partial X_n \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "h"] & X_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & C \arrow[d, equal] \\
hS_n\colon & 0 \arrow[r] & A & & & & C.
\end{tikzcd}$$

Любой n-мерный цикл $X_n \to A$ аннулирует $\partial X_{n+1} = \operatorname{Ker} \partial'$ и поэтому может быть единственным способом представлен в виде $h\partial'$ для некоторого h: $\partial X_n \to A$. Построим произведение hS_n гомоморфизма h и n-кратной точной последовательности S_n, оно включается в нижнюю строку диаграммы. Определим отображение η: $H^n(X,A) \to \operatorname{Ext}^n(C,A)$, положив

$$\eta \operatorname{cls}(h\partial') = \operatorname{cls}(hS_n(C, X)), \quad h : \partial X_n \to A. \tag{6.7}$$

В силу закона дистрибутивности, имеющего место в Ext, правая часть написанного равенства аддитивна по h. Следовательно, для доказательства корректности определения η достаточно показать, что $\eta(\operatorname{cls} h\partial') = 0$, если $h\partial'$ есть кограница некоторой коцепи $k : X_{n-1} \to A$. Но равенство $h\partial' = \delta k = (-1)^n k\partial = (-1)^n k\varkappa\partial'$ означает, что $h = \pm k\varkappa$ и, значит, $hS_n = \pm k\varkappa S_n$, где $\varkappa S_n \equiv 0$ по предложению 1.7. Следовательно, отображение η определено корректно и является гомоморфизмом. Сравнение диаграмм (6.2) и (6.6) показывает, что $\eta = \zeta^{-1}$.

Эта теорема утверждает, что группы $\operatorname{Ext}^n(C, A)$ могут быть вычислены с помощью любой проективной резольвенты ε: $X \to C$; в частности, (6.5) показывает, как вычислить индуцированные гомоморфизмы γ^*: $\operatorname{Ext}^n(C, A) \to \operatorname{Ext}^n(C', A)$ с помощью резольвент.

С другой стороны, многие авторы *определяют* функтор Ext^n, не используя длинные точные последовательности, полагая $\operatorname{Ext}^n(C, A) = H^n(X, A) = H^n(\operatorname{Hom}(X, A))$. Таким путем получается функтор, ковариантный по A, в то время как для γ: $C' \to C$ индуцированные отображения γ^*: $\operatorname{Ext}^n(C, A) \to \operatorname{Ext}^n(C', A)$ определяются накрытием γ до сравнения $X' \to X$.

Другим следствием является «каноническая форма» для последовательностей относительно конгруэнтности.

Следствие 6.5. *Если $S \in \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$, $n > 1$, то существует последовательность $T \equiv S$ вида T: $0 \to A \to B_{n-1} \to B_{n-2} \to \cdots \to B_0 \to C \to 0$, в которой модули $B_{n-2}, \ldots, B_0$ свободны.*

Доказательство. Положим $T = hS_n(C, X)$ для подходящего $h : \partial X_n \to A$ и произвольной свободной резольвенты X модуля C.

Следствие 6.6. *Для абелевых групп A и C, $\operatorname{Ext}^n_Z(C, A) = 0$, если $n > 1$.*

Доказательство. Представим C в виде $C = F/R$, где F — свободная абелева группа. Поскольку подгруппа R свободной абелевой группы F свободна, $0 \to R \to F \to C \to 0$ есть свободная резольвента C, тривиальная (вместе с группами когомологий) в размерностях, больших 1.

Рассмотрим теперь действие кольцевого гомоморфизма ρ: $R' \to R$ ($\rho 1 = 1$). Любой левый R-модуль A становится левым R'-модулем, если действие операторов определить следующим образом: $r'a = (\rho r')a$; мы будем говорить, что модуль A превращен в R'-модуль ${}_\rho A$ *отступлением вдоль* ρ. Каждый R'-модульный гомоморфизм $\alpha : C \to A$ является также R'-модульным гомоморфизмом ${}_\rho C \to {}_\rho A$. Точно так же каждая длинная точная последовательность S из R-модулей превращается в длинную точную последовательность ${}_\rho S$ из R'-модулей; при этом конгруэнтные последовательности остаются конгруэнтными. Следовательно, отображения $\rho^{\#}\alpha = \alpha$, $\rho^{\#}(\operatorname{cls} S) = \operatorname{cls} {}_\rho S$ определяют гомоморфизмы

$$\rho^{\#} : \operatorname{Ext}^n_R(C, A) \to \operatorname{Ext}^n_{R'}({}_\rho C, {}_\rho A), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6.8}$$

называемые *заменой колец*. При фиксированном ρ они естественны по C и A.

Эти гомоморфизмы могут быть вычислены с помощью проективных резольвент ε: $X \to C$ и ε': $X' \to {}_\rho C$ для R и R'-модулей соответственно. Для указания кольца R будем писать $H^n(\operatorname{Hom}_R(X, A))$ вместо $H^n(X, A)$.

Теорема 6.7. *Замена колец $\rho^{\#}$ с точностью до изоморфизма ζ теоремы 6.4. совпадает с произведением*

$$H^n(\operatorname{Hom}_R(X, A)) \xrightarrow{\rho^*} H^n(\operatorname{Hom}_{R'}({}_\rho X, {}_\rho A)) \xrightarrow{f^*} H^n(\operatorname{Hom}_{R'}(X', {}_\rho A)),$$

где ρ^* — отображение групп когомологий, индуцированное цепным преобразованием $\rho^{\#} : \operatorname{Hom}_R \to \operatorname{Hom}_{R'}$, а f: $X' \to {}_\rho X$ — цепное преобразование, накрывающее тождественное отображение модуля ${}_\rho C$.

Доказательство. Случай $n = 0$ оставляется читателю. При $n > 0$ возьмем $S \in \in \operatorname{Ext}^n_R(C, A)$. Как и в (6.2), 1_C накрывается отображением $g : X \to S$. Поскольку ${}_\rho X \to {}_\rho C$ есть резольвента ${}_\rho C$, по теореме сравнения тождественное отображение модуля ${}_\rho C$

накрывается цепным преобразованием $f : X' \to {}_\rho X$. Соответствующая диаграмма такова:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X'_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & X'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d] & {}_\rho C \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, equal] \\
S : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

Теперь проследим за отображениями: изоморфизм ζ переводит $\operatorname{cls} S$ в $\operatorname{cls} g_n$, $\rho^\#$ рассматривает g_n как R'-модульный гомоморфизм, f^* отображает $\operatorname{cls} g_n$ в $\operatorname{cls}(g_n f_n)$, равный $\zeta(\operatorname{cls}_\rho S)$, так как gf накрывает 1. Отсюда и вытекает указанный результат, который окажется полезным при изучении умножений.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\varepsilon : Y \to C$ — проективный комплекс над C и $\varepsilon' : X \to C$ — резольвента C. Построить естественные гомоморфизмы

$$\zeta : \operatorname{Ext}^n_R(C, A) \longrightarrow H^n(Y, A), \qquad \eta : H^n(X, A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_R(C, A).$$

2. (Вычисление произведения Ионеды с помощью резольвент.) Пусть $X \to C$ и $Y \to A$ — проективные резольвенты, $g \in \operatorname{Hom}^n(X, A)$ и $h \in \operatorname{Hom}^m(Y, C)$ — коциклы. Запишем g в виде $g_0\partial'$, где $g_0 : \partial X_n \to A$, и накроем g_0 отображением f, как показано в диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
X_{m+n} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \partial X_n \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & 0 \\
Y_m \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Показать, что hf есть $(m+n)$-мерный коцикл в $\operatorname{Hom}^{m+n}(X, C)$, и доказать, что произведение Ионеды $\eta(\operatorname{cls} h) \circ \eta(\operatorname{cls} g)$ равно $\eta(\operatorname{cls} hf)$.

3. Дана точная последовательность $E = (\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ и отображения $\alpha : A \to A'$, $\xi : B \to A'$. Показать при помощи диаграммы, что $(\alpha + \xi\varkappa) E \equiv \alpha E$.

4. Если $S = E_n \circ \ldots \circ E_1$, то показать, что любой морфизм $\Gamma : S \to S'$ n-кратных точных последовательностей, который начинается с $\alpha : A \to A'$, можно разложнть в произведение

$$S \longrightarrow (\alpha E_n) \circ E_{n-1} \circ \ldots \circ E_1 \longrightarrow S'.$$

5. (Другое определение отношения конгруэнтности для точных последовательностей.) Пусть $S, S' \in\in \operatorname{Ext}^n(C, A)$. Показать, что $S \equiv S'$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $T \in\in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ и морфизмы $\Gamma : T \to S$ н $\Gamma' : T \to S'$, начинающиеся и кончающиеся единицами. (Использовать упражнения 3 и 4 и последовательность $T = hS_n(C, X)$.)

§ 7. Инъективные модули

Описание групп Ext^n с помощью резольвент таково: заменить первый аргумент проективными модулями и вычислить Ext^n с помощью групп когомологий: $\operatorname{Ext}^n(C, A) \cong H^n(\operatorname{Hom}(X, A))$. Мы хотим получить двойственное утверждение, используя подходящие резольвенты для *второго* аргумента A. Для этого нам нужны модули, двойственные проективным, такие модули называются инъективными.

Говорят, что левый R-модуль J *инъективен*, если любой гомоморфизм α с областью значений J можно всегда продолжать, т. е. для всякого $\alpha : A \to J$ и $A \subset B$ существует гомоморфизм $\beta : B \to J$, продолжающий α. Эквивалентно, модуль J инъективен, если произвольная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\
& J &
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

с точной горизонтальной строкой может быть дополнена (пунктирной стрелкой указано пополняющее отображение) до коммутативной диаграммы. Характеризации проективных модулей из теоремы I.6.3 и теоремы 3.5 немедленно дуализируются:

Теорема 7.1. *Следующие свойства модуля J эквивалентны:*

(i) *J — инъективный модуль;*

(ii) *для каждого мономорфизма $\varkappa : A \to B$ отображение $\varkappa^* : \operatorname{Hom}(B, J) \to \operatorname{Hom}(A, J)$ является эпиморфизмом:*

(iii) *каждая короткая точная последовательность $J \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ расщепляется;*

(iv) *для каждого модуля C, $\operatorname{Ext}^1(C, J) = 0$.*

Последнее свойство можно еще более ограничить.

Предложение 7.2. *Левый R-модуль J инъективен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ext}_R(R/L, J) = 0$ для каждого левого идеала L из R.*

Доказательство. Условие необходимо. Обратно, предположим, что каждая группа $\operatorname{Ext}(R/L, J)$ равна нулю. Для данных $A \subset B$ и $\alpha : A \to J$ мы должны, как указано в (7.1), построить продолжение $\beta : B \to J$ гомоморфизма α. Рассмотрим все пары (S, γ), состоящие из подмодуля S, $A \subset S \subset B$ и продолжения $\gamma : S \to J$ гомоморфизма $\alpha : A \to J$. Частично упорядочим эти пары по правилу: $(S, \gamma) \leqslant (S', \gamma')$, если $S \subset S'$ и γ' — продолжение γ. Для любого линейно упорядоченного подмножества (S_i, γ_i) этих пар существует верхняя граница (T, τ), т. е. $(S_i, \gamma_i) \leqslant (T, \tau)$:

нужно взять T равным объединению подмодулей S_i и определить τ следующим образом: $\tau t = \gamma_i t$, если $t \in S_i$. Значит, по лемме Цорна существует максимальная пара $(S_\infty, \gamma_\infty)$. Нам нужно только доказать, что $S_\infty = B$. Предположим, что это не так. Тогда существует элемент $b \in B$, не принадлежащий S_∞; возьмем подмодуль U модуля B, порожденный b и S_∞. Отображение $r \to rb + S_\infty$ является эпиморфизмом $R \twoheadrightarrow U/S_\infty$, ядром которого служит левый идеал L и $R/L \cong U/S_\infty$. Поскольку последовательность $S_\infty \rightarrowtail U \twoheadrightarrow U/S_\infty$ точна, точна последовательность

$$\mathrm{Hom}\,(U,J) \to \mathrm{Hom}\,(S_\infty,J) \to \mathrm{Ext}\,(U/S_\infty,J); \tag{7.2}$$

но $\mathrm{Ext}\,(U/S_\infty,J) \cong \mathrm{Ext}\,(R/L,J) = 0$ по условию, так что $\mathrm{Hom}\,(U,J) \to \mathrm{Hom}\,(S_\infty,J)$— эпиморфизм. Другими словами, каждый гомоморфизм $S_\infty \to J$ можно продолжить до гомоморфизма $U \to J$. В частности, можно продолжить $\gamma_\infty : S_\infty \to J$, что противоречит максимальности (S_∞,γ_∞).

Рассмотрим теперь инъективные модули над специальными типами колец. Если R — поле, то не существует собственных левых идеалов $L \subset R$, в то время как $\mathrm{Ext}_R\,(R, —)$ всегда есть нуль. Следовательно, каждый модуль (= векторное пространство) над полем инъективен. Положим $R = Z$, где Z — кольцо целых чисел. Назовем Z-модуль (= абелева группа) D *полным* тогда и только тогда, когда для всякого целого $m \neq 0$ и каждого $d \in D$ существует решение уравнения $mx = d$.

Следствие 7.3. *Абелева группа инъективна (как Z-модуль) тогда и только тогда, когда она полна.*

Доказательство. Единственными идеалами в Z являются главные идеалы (m), а $Z/(m)$ — циклическая группа порядка m. По предложению 1.1, $\mathrm{Ext}\,(Z/(m),\, A) \cong A/mA$, а $A/mA = 0$ для всех $m \neq 0$ в точности тогда, когда A — полная группа.

Построение проективных резольвент опиралось на тот факт, что каждый модуль есть фактормодуль свободного модуля, а значит, и фактормодуль проективного модуля. Для получения инъективных резольвент нам необходима

Теорема 7.4. *Каждый R-модуль является подмодулем инъективного R-модуля.*

Доказательство. Предположим сначала, что $R = Z$. Аддитивная группа Z вкладывается в аддитивную группу Q рациональных чисел, а группа Q полна. Любая свободная абелева группа F является прямой суммой копий группы Z; она вкладывается в прямую сумму соответствующих копий Q, и эта прямая сумма D полна. Теперь представим произвольную абелеву группу как факторгруппу $A = F/S$ свободной группы F и вложим F в некоторую полную группу D, как указано выше; тем самым $A = F/S$ вкладывается в D/S. Прямая проверка показывает, что любая факторгруппа D/S полной группы полна и, значит, инъективна. Абелева группа A оказывается, таким образом, вложенной в инъективную группу D/S.

Вернемся теперь к случаю произвольного кольца R. Для любой абелевой группы G аддитивная группа $\mathrm{Hom}_Z\,(R,\, G)$ является левым R-модулем, если произведение sf для $s \in R$ и $f : R \to G$ определить как гомоморфизм $sf : R \to G$, действующий на элемент $r \in R$ так:

$$(sf)\,(r) = f\,(rs), \quad r \in R. \tag{7.3}$$

Если C — левый R-модуль, мы можем определить гомоморфизм

$$j: C \to \mathrm{Hom}_Z\,(R,C), \tag{7.4}$$

положив jc для $c \in C$ равным гомоморфизму $jc : R \to C$, заданному

$$(jc)\,(r) = rc, \quad r \in R. \tag{7.5}$$

Для доказательства того, что это гомоморфизм R-модулей, возьмем $s,\ r \in R$ и подсчитаем

$$[j\,(sc)]\,(r) = r\,(sc) = (rs)\,c = (jc)\,(rs) = \qquad \text{по } (7.5)$$
$$= [s\,(jc)]\,(r). \qquad \text{по } (7.3)$$

Поэтому $j\,(sc) = s\,(jc)$. Поскольку $1c = c$, то j есть мономорфизм.

Теперь вложим аддитивную группу модуля C в полную группу D, это вложение индуцирует мономорфизм R-модулей

$$k: \mathrm{Hom}_Z\,(R,C) \to \mathrm{Hom}_Z\,(R,D).$$

Произведение kj вкладывает C в $\mathrm{Hom}_Z\,(R,\, D)$. Если мы покажем, что $\mathrm{Hom}_Z\,(R,\, D) = J$ есть инъективный модуль, то мы докажем теорему. По теореме 7.1 (ii), достаточно показать, что каждый мономорфизм $\varkappa$: $A \to B$ R-модулей индуцирует эпиморфизм $\varkappa^* = \mathrm{Hom}_R\,(\varkappa,\, 1_J)$. Здесь $\varkappa^*$ верхняя строка диаграммы

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{Hom}_R\,(\varkappa,\ 1_J) : \mathrm{Hom}_R\,(B,\ \mathrm{Hom}_Z\,(R,D)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R\,(A,\ \mathrm{Hom}_Z\,(R,\ D)) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \eta_B & & \qquad \downarrow \eta_A \\
\mathrm{Hom}_Z\,(\varkappa,\ 1_D) : \mathrm{Hom}_Z\,(B,\ D) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_Z\,(A,\ D),
\end{array}$$

в которой вертикальные отображения — изоморфизмы, что устанавливается в следующей дальше лемме. Эти изоморфизмы естественны, так что диаграмма коммутативна. Нижняя строка относится не к кольцу R, а только к кольцу Z; поскольку D — полная группа, нижнее отображение $\mathrm{Hom}_Z\,(\varkappa,\, 1_D)$ — эпиморфизм. Так как η_B и η_A — изоморфизмы, верхнее отображение $\mathrm{Hom}_R\,(\varkappa,\, 1_J)$ также является эпиморфизмом.

Лемма 7.5. *Если G — абелева группа и A — R-модуль, то существует естественный изоморфизм* $\eta_A : \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_Z(R, G)) \cong \mathrm{Hom}_Z(A, G)$.

Доказательство. Возьмем $f \in \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_Z(R, G))$. Для $a \in A$, fa: $R \to G$, т. е. $(fa)(r) \in G$. Теперь рассмотрим f как функцию от двух переменных $f(a, r)$ со значениями в G. Тот факт, что fa есть Z-гомоморфизм, означает аддитивность $f(a, r)$ по аргументу r, а то, что f: $A \to \mathrm{Hom}_Z(R, G)$ есть R-гомоморфизм, означает аддитивность по a и выполнение равенства $s(fa) = f(sa)$ для каждого $s \in R$. По определению (7.3) умножения на s, это значит, что всегда

$$[s(fa)](r) = (fa)(rs) = [f(sa)](r),$$

другими словами, $f(a, rs) = f(sa, r)$. В частности, $f(a, s) = f(sa, 1)$, так что функция f определяется функцией $g(a) = f(a, 1)$. Очевидно, что $g : A \to G$ — гомоморфизм. Теперь гомоморфизм η_A и обратный к нему определяются формулами

$$(\eta_A f)(a) = f(a, 1); \quad (\eta_A^{-1} g)(a, r) = g(ra).$$

Отображения η_A и η_A^{-1}, очевидно, гомоморфны и естественны (по A и G).

Возникшая здесь идея рассматривать функцию $f(a, r)$ от двух переменных как функцию аргумента a, значениями которой являются функции от r, встретится позже (V.3) много более формальным образом, а эта лемма окажется частным случаем более общего естественного изоморфизма, называемого «сопряженной ассоциативностью». Инъективные модули будут изучаться дальше в § 11.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть R — область целостности. Показать, что поле частных кольца R есть полный R-модуль. Если дополнительно R — кольцо главных идеалов, то показать, что это поле инъективно как R-модуль.

2. Если A — левый R-модуль и L — левый идеал в R, то каждый элемент $a \in A$ определяет R-модульный гомоморфизм f_a: $L \to A$, задаваемый формулой $f_a(l) = la$. Доказать, что модуль A инъективен тогда и только тогда, когда для всех L каждый гомоморфизм $f : L \to A$ равен f_a для некоторого a.

3. Если K — комплекс R-модулей и J есть инъективный R-модуль, то показать, что отображение α из (4.1) порождает изоморфизм

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(K, J)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(K), J).$$

§ 8. Инъективные резольвенты

Комплекс $\varepsilon : A \to Y$ *под* модулем A — это последовательность вида

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} Y^0 \xrightarrow{\delta} Y^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \to Y^n \xrightarrow{\delta} Y^{n+1} \to \cdots, \tag{8.1}$$

в которой произведение любых двух последовательных гомоморфизмов равно нулю. Другими словами, Y — отрицательный комплекс, т. е. положительный по верхним индексам, а $\varepsilon : A \to Y$ — цепное преобразование. Если указанная последовательность точна, то $\varepsilon : A \to Y$ называется *корезольвентой* модуля A; если каждый модуль Y_n инъективен, то $\varepsilon : A \to Y$ называется *инъективным комплексом* под A. Результаты предыдущего параграфа показывают, что каждый модуль A имеет инъективную (ко) резольвенту, для удобства речи —«инъективную резольвенту».

Теорема 8.1. (*Теорема сравнения.*) *Если* α: $A \to A'$ — *модульный гомоморфизм,* ε: $A \to Y$ — *корезольвента и* ε': $A' \to Y'$ — *инъективный комплекс под* A', *то существует цепное преобразование* f: $Y \to Y'$, *для которого* $\varepsilon'\alpha = f\varepsilon$, *и любые два таких цепных преобразования гомотопны.*

Доказательство строго двойственно доказательству теоремы 6.1, в котором использовались лишь категорные свойства проективных модулей и точных последовательностей. Мы снова будем говорить, что отображение f *накрывает* гомоморфизм α.

Для каждого модуля C отрицательный комплекс Y определяет, как и в (4.4), отрицательный комплекс

$$\mathrm{Hom}(C, Y) : \mathrm{Hom}(C, Y^0) \to \mathrm{Hom}(C, Y^1) \to \cdots \to \mathrm{Hom}(C, Y^n) \to \ldots. \tag{8.2}$$

Группы гомологий этого комплекса равны группам Ext, как показывает следующая

Теорема 8.2. *Для каждого модуля C и каждой инъективной корезольвенты* $\varepsilon : A \to Y$ *существует изоморфизм*

$$\check{\zeta} : \mathrm{Ext}^n(C, A) \cong H^n(\mathrm{Hom}(C, Y)), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{8.3}$$

естественный по C и по A в том смысле, что если $\alpha : A \to A'$, ε': $A' \to Y'$ *есть инъективная резольвента и* f: $Y \to Y'$ *есть произвольное цепное преобразование, накрывающее* α, *то* $\check{\zeta}\alpha_* = f_*\check{\zeta}$. *Здесь* f_* — *индуцированный гомоморфизм* $f_* : H^n(\mathrm{Hom}(C, Y)) \to H^n(\mathrm{Hom}(C, Y'))$.

Гомоморфизм $\check{\zeta}$ определяется следующим образом. Рассмотрим любую последовательность $S \in \mathrm{Ext}^n(C, A)$ как корезольвенту A с нулями, стоящими за членом C (верхней) степени n; по теореме 8.1

построим цепное преобразование, указанное в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} Y: 0 & \to & A & \to & Y^0 & \to & Y^1 & \to & \ldots & \to & Y^{n-1} & \to & Y^n & \to & Y^{n+1} \\ \uparrow g & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow g^n & & \\ S: 0 & \to & A & \to & B_{n-1} & \to & B_{n-2} & \to & \ldots & \to & B_0 & \to & C & \to & 0. \end{array} \quad (8.4)$$

Тогда $g^n: C \to Y^n$ является циклом из $\mathrm{Hom}(C, Y)$. Положим

$$\check{\zeta}(\mathrm{cls}\, S) = (\mathrm{cls}\, g^n) \in H^n(\mathrm{Hom}(C, Y)). \quad (8.5)$$

Остальная часть доказательства, подобно определению $\check{\zeta}$, двойственна доказательству теоремы 6.4.

Мы можем суммировать результаты § 6 и § 8 в схеме

$$H^n(\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_P C, A)) \cong \mathrm{Ext}^n(C, A) \cong H^n(\mathrm{Hom}(C, \mathrm{Res}_J A)),$$

где $\mathrm{Res}_P C$ обозначает произвольную проективную резольвенту модуля C, $\mathrm{Res}_J A$ — произвольную инъективную корезольвенту модуля A. Симметричная формула $\mathrm{Ext}^n(C, A) \cong H^n(\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_P C, \mathrm{Res}_J A))$ также может быть доказана (упражнение V.9.3).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Провести построение g в (8.4) и построить изоморфизм, обратный к ζ.
2. Сформулировать и доказать лемму, двойственную лемме 6.2.
3. Для прямых сумм и произведений установить изоморфизмы

$$\mathrm{Ext}^n\left(\sum C_t, A\right) \cong \prod \mathrm{Ext}^n(C_t, A), \quad \mathrm{Ext}^n\left(C, \prod A_t\right) \cong \prod \mathrm{Ext}^n(C, A_t).$$

§ 9. Две точные последовательности для Ext^n

Произведение длинных точных последовательностей с короткой точной последовательностью E от A до C порождает *связывающие гомоморфизмы*

$$E^*: \mathrm{Ext}^k(A, G) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(C, G), \quad E_*: \mathrm{Ext}^k(G, C) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(G, A).$$

Поскольку E определяет A и C, и $\mathrm{Ext}^k(A, G)$ и $\mathrm{Ext}^{k+1}(C, G)$ можно рассматривать как контравариантные функторы от коротких точных последовательностей E. Более того, морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma): E \to E'$ коротких точных последовательностей определяет конгруэнцию $\alpha E \equiv E'\gamma$ и, значит,

$$E^*\alpha^* = \gamma^* E'^*: \mathrm{Ext}^k(A', G) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(C, G).$$

Этим устанавливается, что E^* есть естественное преобразование между функторами от E, как и E_*. Указанные связывающие гомоморфизмы позволяют продолжить точные последовательности для Hom и $\mathrm{Ext} = \mathrm{Ext}^1$, найденные в (3.1) и в (3.2), на более высокие размерности. Отметим аналогично, что n-кратная точная последовательность S, начинающаяся с A и кончающаяся C, является произведением n коротких точных последовательностей, следовательно, умножение на S порождает *итерированные связывающие гомоморфизмы*

$$S^*: \mathrm{Ext}^k(A, G) \to \mathrm{Ext}^{k+n}(C, G), \quad S_*: \mathrm{Ext}^k(G, C) \to \mathrm{Ext}^{k+n}(G, A),$$

которые зависят только от класса конгруэнтности последовательности S.

Теорема 9.1. *Если $E = (\varkappa, \sigma): A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — короткая точная последовательность модулей и G — какой-то модуль, то последовательности*

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^n(C, G) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Ext}^n(B, G) \xrightarrow{\varkappa^*} \mathrm{Ext}^n(A, G) \xrightarrow{E^*} \mathrm{Ext}^{n+1}(C, G) \to \ldots \quad (9.1)$$

и

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^n(G, A) \xrightarrow{\varkappa_*} \mathrm{Ext}^n(G, B) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{Ext}^n(G, C) \xrightarrow{E_*} \mathrm{Ext}^{n+1}(G, A) \to \ldots \quad (9.2)$$

точны. Эти последовательности начинаются слева членами $0 \to \mathrm{Hom}(C, G) = \mathrm{Ext}^0(C, G)$ и $0 \to \mathrm{Hom}(G, A)$ соответственно и продолжаются вправо для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отображения в этих последовательностях определены для аргументов $\rho \in \mathrm{Ext}^n(C, G)$, $\omega \in \mathrm{Ext}^n(B, G)$, $\tau \in \mathrm{Ext}^n(A, G), \ldots$ при помощи умножения на $\varkappa$, σ, E следующим образом:

$$\sigma^*\rho = \rho\sigma, \quad \varkappa^*\omega = \omega\varkappa, \quad E^*\tau = (-1)^n \tau E, \quad (9.3)$$

$$\varkappa_*\rho' = \varkappa\rho', \quad \sigma_*\omega' = \sigma\omega', \quad E_*\tau' = E\tau'. \quad (9.4)$$

Знак в последнем из равенств (9.3) появляется потому, что $E^*\tau = \tau E$ включает перестановку элемента E степени 1 с элементом τ степени n.

Доказательство. Сначала рассмотрим (9.2). Выберем любую свободную резольвенту X модуля G и применим точную когомологическую последовательность (теорема II.4.5) для последовательности E коэффициентов. Поскольку группы $H^n(X, A)$ равны $\mathrm{Ext}^n(G, A)$ и т. д., получается точная последовательность с теми же членами, что и в (9.2). Для доказательства того, что отображения из этой последовательности получены с помощью умножения, как утверждается в (9.4), мы должны установить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^n(G, A) \arrow[r, "\varkappa_*"] \arrow[d, "\zeta"] & \operatorname{Ext}^n(G, B) \arrow[r, "\sigma_*"] \arrow[d, "\zeta"] & \operatorname{Ext}^n(G, C) \arrow[r, "E_*"] \arrow[d, "\zeta"] & \operatorname{Ext}^{n+1}(G, A) \arrow[d, "\zeta"] \\
H^n(X, A) \arrow[r, "\varkappa_*"] & H^n(X, B) \arrow[r, "\sigma_*"] & H^n(X, C) \arrow[r, "(-1)^{n+1}\delta_E"] & H^{n+1}(X, A),
\end{tikzcd} \tag{9.5}$$

в которой каждое отображение ζ — это изоморфизм, построенный в теореме 6.4, а δ_E — связывающий гомоморфизм, указанный в теореме II.4.5. Поскольку ζ естествен относительно гомоморфизмов $\varkappa$ и σ групп коэффициентов, первые два квадрата коммутативны. Доказательство коммутативности крайнего правого квадрата требует систематического использования определений всех встречающихся отображений и проводится следующим образом. Для $n > 0$ и $S \in \in \operatorname{Ext}^n(G,C)$ рассмотрим $E \circ S$ как резольвенту G и построим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X: & X_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, equal] \\
E \circ S: & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\sigma"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[d, equal] \\
S: & 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & G,
\end{tikzcd}$$

в которой f накрывает 1_ζ. По определению ζ

$$\zeta E_*(\operatorname{cls} S) = (\operatorname{cls} f_{n+1}) \in H^{n+1}(X, A).$$

С другой стороны, σf является цепным преобразованием, накрывающим 1_G, так что $\zeta(\operatorname{cls} S) = \operatorname{cls}(\sigma f_n)$. Гомоморфизм δ_E определяется «обращением», $\delta_E = \operatorname{cls} \varkappa^{-1}\delta\sigma^{-1}\operatorname{cls}^{-1}$, из (II.4.12) и $\varkappa^{-1}\delta\sigma^{-1}(\sigma f_n) = \varkappa^{-1}\delta f_n = (-1)^{n+1}\varkappa^{-1}(f_n\partial) = (-1)^{n+1}\varkappa^{-1}(\varkappa f_{n+1}) = (-1)^{n+1} f_{n+1}$, так что $\delta_E \operatorname{cls}(\sigma f_n) = (-1)^{n+1}\operatorname{cls} f_{n+1} = (-1)^{n+1}\zeta E_* \operatorname{cls} S$. Этим показана коммутативность диаграммы (9.5).

Для $n = 0$ определение ζ (и доказательство коммутативности) соответственно проще.

Точность последовательности (9.1) доказывается аналогично с использованием инъективных резольвент. Именно, пусть $\varepsilon: G \rightarrowtail Y$ — инъективная резольвента модуля G. Тогда $\operatorname{Hom}(A,Y)$, как и в § 8,— отрицательный комплекс; далее, поскольку каждый модуль Y^n инъективен, каждая последовательность $\operatorname{Hom}(C, Y^n) \rightarrowtail \operatorname{Hom}(B, Y^n) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(A, Y^n)$ точна. Следовательно,

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, Y) \xrightarrow{\sigma^*} \operatorname{Hom}(B, Y) \xrightarrow{\varkappa^*} \operatorname{Hom}(A, Y) \to 0$$

есть точная последовательность комплексов. Значит, теорема II.4.1 в формулировке для верхних индексов утверждает, что первая строка следующей диаграммы точна для каждого n:

$$\begin{tikzcd}
H^n(\operatorname{Hom}(C,Y)) \arrow[r, "\sigma^*"] & H^n(\operatorname{Hom}(B,Y)) \arrow[r, "\varkappa^*"] & H^n(\operatorname{Hom}(A, Y)) \arrow[r, "\delta_E"] & H^{n+1}(\operatorname{Hom}(C,Y)) \\
\operatorname{Ext}^n(C,G) \arrow[u, "\zeta"] \arrow[r, "\sigma^*"] & \operatorname{Ext}^n(B,G) \arrow[u] \arrow[r, "\varkappa^*"] & \operatorname{Ext}^n(A, G) \arrow[u] \arrow[r, "E^*"] & \operatorname{Ext}^{n+1}(C, G). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Для доказательства точности нижней строки требуется теперь только установить коммутативность диаграммы. Заметим, что связывающий гомоморфизм δ_E определяется обращением $\delta_E = \operatorname{cls}\sigma^{*-1}\delta\varkappa^{*-1}\operatorname{cls}^{-1}$, и теперь не возникает затруднения со знаком. После принятия этого определения доказательство коммутативности становится похожим на приведенное выше доказательство для двойственного случая, хотя, поскольку в нем используются не только стрелки, но и элементы, мы не можем сказать, что оно строго двойственно. Хотя теорема 9.1 сформулирована на языке точных последовательностей, она может также рассматриваться как утверждение об аннуляторах «псевдокольца» Ext_R теоремы 5.3. Действительно, если $E(\varkappa, \sigma)$— короткая точная последовательность R-модулей, то

$$\varkappa E = 0, \quad \sigma\varkappa = 0, \quad E\sigma = 0,$$

и эти равенства следующим образом определяют левый и правый аннуляторы в Ext_R каждого из элементов $\varkappa$, E, σ. Правый аннулятор для $\varkappa$ состоит из кратных E; всякий раз, как элемент $\rho \in \operatorname{Ext}_R$ таков, что произведение $\varkappa\rho$ определено и равно 0, $\rho = 0$ или $\rho = E\tau$ для подходящего $\tau \in \operatorname{Ext}_R$. Аналогично из $\rho\varkappa = 0$ следует $\rho = \tau\sigma$ для некоторого τ и т. д. Другими словами, левый аннулятор для $\varkappa$ — это главный левый идеал $(\operatorname{Ext}_R)\,\sigma$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для заданной обычной короткой точной последовательности E модулей и данных проективных резольвент $\varepsilon': X \to A$ и $\varepsilon'': Z \to C$ крайних модулей A и C построить проективную резольвенту $\varepsilon: Y \to B$ среднего модуля B и цепные преобразования $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, накрывающие $\varkappa$ и σ соответственно, так, чтобы короткая последовательность $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$ комплексов была точной. (Указание: для каждого n взять $Y_n = X_n \oplus Z_n$ и определить ε и ∂ так, чтобы (Y, ε) было комплексом.)

2. Используя результат упражнения 1, дать доказательство точности (9.1) с помощью проективных резольвент.

3. Вывести предложение 3.7 из теоремы 9.1 и следствия 6.6.

4. Для конечной абелевой группы A и аддитивной группы Q рациональных чисел доказать, что $\mathrm{Ext}_Z(A, Z) \cong \mathrm{Hom}_Z(A, Q/Z)$.

§ 10. Аксиоматическое описание функторов Ext

Уже полученные свойства последовательности функторов Ext^n достаточны для определения этих функторов с точностью до естественной эквивалентности в следующем смысле.

Теорема 10.1. *Пусть для каждого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *задан контравариантный функтор* $\mathrm{Ex}^n(A)$, *определенный в категории модулей со значениями в категории абелевых групп, и пусть для каждого n и каждой точной последовательности* $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *задан гомоморфизм* $E^n: \mathrm{Ex}^n(A) \to \mathrm{Ex}^{n+1}(C)$, *естественный относительно морфизмов* $\Gamma: E \to E'$, *коротких точных последовательностей.*

Предположим, что существует такой фиксированный модуль G, для которого

$$Ex^0(A) = \mathrm{Hom}(A, G) \quad \text{для всех } A, \tag{10.1}$$

$$Ex^n(F) = 0 \quad \text{для } n > 0 \text{ и всех свободных модулей } F, \tag{10.2}$$

и предположим, что для каждой последовательности $E = (\varkappa, \sigma)$ последовательность

$$\cdots \to Ex^n(C) \xrightarrow{\sigma^*} Ex^n(B) \xrightarrow{\varkappa^*} Ex^n(A) \xrightarrow{E^n} Ex^{n+1}(C) \to \ldots \tag{10.3}$$

точна. Тогда для каждого модуля A и каждого n существует изоморфизм $\varphi_A^n: \mathrm{Ex}^n(A) \cong \mathrm{Ext}^n(A, G)$, *причем* $\varphi_A^0 = 1$; *этот изоморфизм естествен по A, и имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ex}^n(A) & \xrightarrow{E^n} & \mathrm{Ex}^{n+1}(C) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi^n} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{n+1}} \\ \mathrm{Ext}^n(A, G) & \xrightarrow{E^*} & \mathrm{Ext}^{n+1}(C, G) \end{array} \tag{10.4}$$

для всех n и всех коротких точных последовательностей $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$.

Свойство (10.4) означает, что «φ коммутирует со связывающими гомоморфизмами». Вместе с естественностью φ это означает, что изоморфизмы φ^n определяют морфизм длинной последовательности (10.3) в соответствующую последовательность (9.1) для Ext.

Эта же теорема верна, если слово «свободный» в (10.2) заменить словом «проективный».

Поскольку функторы Ext^n, очевидно, удовлетворяют аналогам свойств (10.1), (10.2) и (10.3), мы можем рассматривать эти свойства как аксиомы, характеризующие последовательность функторов Ext^n, «связанную» гомоморфизмами E^*.

В доказательстве изоморфизмы φ^n строятся индукцией по n; случай $n = 1$ представляет наибольший интерес. Представим каждый модуль C как фактормодуль F/K свободного модуля F. Этим определяется короткая точная последовательность $E_C: K \rightarrowtail F \twoheadrightarrow C$. В силу (10.2) $\mathrm{Ex}^1(F) = 0$, поэтому последовательность (10.3) принимает вид

$$\mathrm{Hom}(F, G) \xrightarrow{\varkappa^*} \mathrm{Hom}(K, G) \xrightarrow{E_C^1} \mathrm{Ex}^1(C) \to 0.$$

Точность этой последовательности означает, что $\mathrm{Ex}^1(C) \cong \mathrm{Hom}(K, G)/\varkappa^* \mathrm{Hom}(F, G)$. Последовательность (9.1) для Ext^1 показывает, что группа $\mathrm{Ext}^1(C, G)$ изоморфна той же группе. Комбинирование этих изоморфизмов дает изоморфизм $\varphi_C^1: \mathrm{Ex}^1(C) \cong \mathrm{Ext}^1(C, G)$; по своему построению φ_C^1 характеризуется равенством

$$\varphi_C^1 E_C^1 = E_C^*: \mathrm{Hom}(K, G) \to \mathrm{Ext}^1(C, G),$$

которое является частным случаем (10.4). Для доказательства естественности φ_C' для любого $\gamma: C \to C'$ выберем точную последовательность $E_{C'}: K' \rightarrowtail F' \twoheadrightarrow C'$. По теореме сравнения γ накрывается гомоморфизмом $\beta: F \to F'$, который индуцирует морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma): E_C \to E_{C'}$. Поскольку оба связывающих гомоморфизма E^1 и E^* естественны относительно таких морфизмов Γ, то

$$\gamma^* \varphi_{C'}^1 E_{C'}^1 = \gamma^* E_{C'}^* = E_C^* \alpha^* = \varphi_C^1 E_C^1 \alpha^* = \varphi_C^1 \gamma^* E_{C'}^1.$$

Но $E_{C'}$ — эпиморфизм, поэтому

$$\gamma^* \varphi_{C'}^1 = \varphi_C^1 \gamma^*: \mathrm{Ex}^1(C') \to \mathrm{Ext}^1(C, G);$$

таким образом, изоморфизм φ^1 действительно естествен относительно отображений модулей. В частности, если E_C и $E_{C'}$ два свободных представления одного и того же модуля C ($\gamma = 1_C$), то последнее тождество показывает, что гомоморфизм φ_C^1 не зависит от выбора свободного модуля F, использованного при построении. Наконец, если $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ произвольная короткая точная последовательность, то по теореме сравнения (для свободного модуля E) опять можно накрыть 1 морфизмом $(\alpha, \beta, 1): E_C \to E$ и установить, что

$$\begin{aligned} 1_C^* E^* &= E_C^* \alpha^* && \text{(ввиду естественности } E^*\text{)}, \\ &= \varphi_C^1 E_C^1 \alpha^* && \text{(по определению } \varphi\text{)}, \\ &= \varphi_C^1 E^1 && \text{(ввиду естественности } E^1\text{)}. \end{aligned}$$

Но это и есть свойство (10.4) для $n = 1$.

Для $n > 1$ мы поступаем подобным же образом, выбирая короткую точную последовательность E_C со свободным средним членом. Тогда $\operatorname{Ex}^{n-1}(F) = 0 = \operatorname{Ex}^n(F)$, так что точная последовательность (10.3) принимает вид

$$0 \to \operatorname{Ex}^{n-1}(K) \xrightarrow{E_C^{n-1}} \operatorname{Ex}^n(C) \to 0,$$

и $\operatorname{Ex}^n(C) \cong \operatorname{Ex}^{n-1}(K)$. Используя аналогичную последовательность для Ext^n, мы определим φ^n равенством

$$\varphi_C^n = E_C^* \varphi_K^{n-1} (E_C^{n-1})^{-1} : \operatorname{Ex}^n(C) \cong \operatorname{Ext}^n(C, G)$$

и установим естественность, независимость от выбора F и коммутативность диаграммы (10.4), так же как и для $n = 1$.

Существует двойственная характеристика для $\operatorname{Ext}(C, A)$ как функтора от A, использующая вторую точную последовательность (9.2).

Теорема 10.2. *При фиксированном модуле G ковариантные функторы $\operatorname{Ext}^n(G, A)$ от аргумента A, $n = 0, 1, \ldots$ вместе с естественными гомоморфизмами $E_* : \operatorname{Ext}^n(G, C) \to \operatorname{Ext}^{n+1}(G, A)$, определенными для коротких точных последовательностей E модулей, характеризуются с точностью до естественного изоморфизма следующими тремя свойствами:*

$$\operatorname{Ext}^0(G, A) = \operatorname{Hom}(G, A) \quad \text{для всех } A, \tag{10.5}$$

$$\operatorname{Ext}^n(G, J) = 0 \quad \text{для } n > 0 \text{ и всех инъективных модулей } J, \tag{10.6}$$

$$\text{последовательность (9.2) точна для всех } E. \tag{10.7}$$

Доказательство. Сначала заметим, что функторы Ext^n обладают свойством (10.6), так как инъективный модуль J имеет инъективную резольвенту $0 \to J \to J \to 0$, которая исчезает во всех размерностях, следующих за 0. Обратно, доказательство того, что эти три свойства характеризуют $\operatorname{Ext}^n(G, A)$ как функторы от A, двойственно данному выше доказательству теоремы 10.1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Шануэль.) Даны две короткие точные последовательности $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow C$ и $K' \rightarrowtail P' \twoheadrightarrow C$, где P и P' проективны, $K \subset P$, $K' \subset P'$, а на конце — один и тот же модуль C. Построить изоморфизм $P \oplus P' \cong P \oplus P'$, отображающий изоморфно $K \oplus P'$ на $P \oplus K'$.

2. Назовем два модуля C и C' *проективно эквивалентными*, если существуют проективные модули Q и Q' и изоморфизм $C \oplus Q' \cong C' \oplus Q$. Пусть $S: K \rightarrowtail P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \twoheadrightarrow C$ — n-кратная точная последовательность с проективными модулями P_i. Используя упражнение 1, показать, что класс модулей, проективно эквивалентных модулю K, зависит только от класса проективной эквивалентности модуля C и не зависит от выбора S.

3. Если S — последовательность из упражнения 2, то показать, что итерированный связывающий гомоморфизм устанавливает изоморфизм $S^* : \operatorname{Ext}^1(K, G) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}(C, G)$ для любого модуля G.

§ 11. Инъективная оболочка

Каждый R-модуль A является подмодулем инъективного модуля (теорема 7.4). Мы сейчас покажем, что для каждого A существует единственный «минимальный» инъективный модуль с этим свойством.

Расширение $A \subset B$, или мономорфизм $\varkappa : A' \to B$ с образом A, называется *существенным*, если из $S \subset B$ и $S \cap A = 0$ всегда следует $S = 0$. Это условие равносильно требованию, чтобы для всякого элемента $b \neq 0$ из B нашелся такой элемент $r \in R$, что $rb \neq 0$ и $rb \in A$. Например, аддитивная группа Q рациональных чисел является существенным расширением группы целых чисел Z. Если $A \subset B$ и $B \subset C$ — существенные расширения, то $A \subset C$ — существенное расширение.

Лемма 11.1. *Если $\varkappa: A' \to B$ — существенный мономорфизм а $\lambda : A' \to J$ — мономорфизм с инъективной областью значений J, то существует мономорфизм $\mu : B \to J$, для которого $\mu\varkappa = \lambda$.*

Другими словами, существенное расширение модуля A' вкладывается в любое инъективное расширение модуля A'.

Доказательство. Поскольку J — инъективный модуль, $\lambda : A' \to J$ продолжается до μ и $\mu\varkappa = \lambda$. Пусть K — ядро μ. Поскольку λ — мономорфизм, $K \cap \varkappa A' = 0$; поскольку мономорфизм $\varkappa$ существенный, $K = 0$. Следовательно, μ — мономорфизм.

Предложение 11.2. *Модуль J инъективен тогда и только тогда, когда J не имеет собственного существенного расширения.*

Доказательство. Если $J \subset B$ и J инъективен, то J есть прямое слагаемое B, так что расширение $J \subset B$ несущественно в любом случае, кроме случая $J = B$. Обратно, если J не имеет собственного расширения, то мы хотим показать, что любое расширение $J \subset B$ расщепляется.

Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех подмодулей S модуля B, для которых $S \cap J = 0$. Если подмножество $\{S_t\}$ элементов из $\mathcal{S}$ линейно упорядочено по включению, то объединение $S = \bigcup S_t$ множеств S_t есть подмодуль в B и $S \cap J = 0$; значит, S принадлежит $\mathcal{S}$. Поскольку любое линейно упорядоченное подмножество из $\mathcal{S}$ имеет верхнюю грань в $\mathcal{S}$, по лемме Цорна в $\mathcal{S}$ существует элемент M, максимальный в том смысле, что он не содержится строго ни в одном S. Тогда $J \to B \to B/M$ — существенный мономорфизм. Но по предположению J не имеет собственных существенных расширений, поэтому $J \to B/M$ — изоморфизм, $B = J \cup M$ и $J \cap M = 0$. Значит, модуль J является прямым слагаемым любого содержащего его модуля B и поэтому инъективен.

Это подсказывает, что мы можем построить минимальное инъективное расширение как максимальное существенное расширение.

Теорема 11.3. *Для любого модуля A имеется существенный мономорфизм $\varkappa\colon A \to J$ в инъективный модуль J. Если $\varkappa'\colon A \to J'$ — другой такой мономорфизм, то существует такой изоморфизм $\theta\colon J \to J'$, что $\theta\varkappa = \varkappa'$.*

Доказательство. По теореме 7.4 существует инъективный модуль J_0, для которого $A \subset J_0$. Пусть $\mathcal{T}$ — множество всех таких подмодулей S модуля J_0, что расширение $A \subset S$ существенно. Если $\{S_t\}$ — подмножество из $\mathcal{T}$, линейно упорядоченное по включению, то объединение $\bigcup S_t$ является существенным расширением A и, следовательно, принадлежит $\mathcal{T}$. По лемме Цорна в $\mathcal{T}$ имеется максимальный элемент J, причем расширение $A \subset J$ существенно. Любое собственное расширение J можно было по лемме 11.1 вложить в J_0 в противоречие с максимальностью J. Следовательно, по предложению 11.2 модуль J инъективен.

Пусть $\varkappa\colon A \to J$ есть вложение. Если $\varkappa'\colon A \to J'$ есть другой существенный мономорфизм в инъективный модуль J', то в силу леммы 11.1 имеется мономорфизм $\mu\colon J' \to J$, для которого $\mu\varkappa' = \varkappa$. Поскольку подмодуль $\mu J'$ инъективен, он является прямым слагаемым в J. Поскольку вложение $A \to J$ существенно, $\mu J'$ должен совпадать с J, так что μ — изоморфизм, как и утверждалось.

Существенный мономорфизм $\varkappa\colon A \to J$ в инъективный модуль J, единственный с точностью до эквивалентности, называется *инъективной оболочкой* модуля A. Ее существование было установлено Бэром [1940]; в своем доказательстве мы следовали Экману — Шопфу [1953]. О некоторых из применений оболочек см. работу Матлиса [1958]. Двойственная конструкция — «минимального» проективного модуля P с эпиморфизмом $P \to A$ вообще невозможна (почему?).

Замечания. Изучение расширений производилось вначале для расширений мультипликативных групп (см. гл. IV), причем расширения описывались с помощью систем факторов. Систематическое исследование Шрейера [1926] оказало большое влияние, хотя идея системы факторов появилась значительно раньше (Гёльдер [1893]). Те же системы факторов были важны при представлении центральных простых алгебр как скрещенных произведений (Брауэр [1928], Хассе—Брауэр—Нётер [1932]) и, следовательно, в теории полей классов. Инвариантное исследование расширений без систем факторов впервые было начато Бэром [1934, 1935]. Эйленберг и Маклейн [1942] в своем исследовании проблемы универсальных коэффициентов впервые установили, что расширения абелевых групп имеют

топологические приложения. Там же был введен функтор Ext^1. Другое доказательство теоремы об универсальных коэффициентах и теоремы о гомотопической классификации было дано Масси [1958] с использованием конуса отображения.

Резольвенты, возможно без названия, использовались давно, например, Гильбертом [1890]. Хопф в 1944 г. использовал их явно для описания гомологий группы. Картан [1950] использовал их для теории когомологий групп и дал аксиоматическое описание, такое, как в § 10; функтор Ext^n был определен с помощью резольвент Картаном и Эйленбергом. Определение с помощью длинных точных последовательностей дал Ионеда [1954], который также провел [1960] более общее исследование произведений.

ГЛАВА IV

Когомология групп

Когомология группы Π — это наш первый пример функторов $\operatorname{Ext}_R^n(C, A)$, где R — групповое кольцо и $C = Z$. Эти группы когомологий можно определить непосредственно в терминах стандартной «B-резольвенты». В малых размерностях когомологии появляются в вопросе о групповых расширениях с помощью Π; во всех размерностях они имеют топологическую интерпретацию (§ 11).

§ 1. Групповое кольцо

Пусть Π — мультипликативная группа. Свободная абелева группа $Z(\Pi)$, порожденная элементами $x \in \Pi$, состоит из конечных сумм $\Sigma m(x)\, x$ с целыми коэффициентами $m(x) \in Z$. Произведение в Π индуцирует произведение

$$(\sum_x m(x)\, x)(\sum_y m'(y)\, y) = \sum_{x,y} m(x)\, m'(y)\, xy$$

двух таких элементов и превращает $Z(\Pi)$ в кольцо, называемое *целочисленным групповым кольцом* группы Π. Таким образом, элемент из $Z(\Pi)$ — это функция m, определенная на Π со значениями в Z, равная нулю, за исключением конечного числа аргументов $x \in \Pi$; сумма двух функций определяется формулой $(m+m')(x) = m(x) + m'(x)$, а произведение — формулой $(mm')(x) = \Sigma m(y)\, m'(z)$, причем последняя сумма берется по всем y и z из Π, для которых $yz = x$. Кольцевой гомоморфизм $\varepsilon\colon Z(\Pi) \to Z$, называемый *пополнением*, определяется следующим образом:

$$\varepsilon(\sum_x m(x)\, x) = \sum_x m(x). \tag{1.1}$$

Пусть $\mu_0\colon \Pi \to Z(\Pi)$ — функция, которая сопоставляет каждому элементу $y \in \Pi$ элемент из $Z(\Pi)$, записываемый через $1y$; более точно это означает, что $\mu_0 y$ — это такая функция из Π в Z, что $(\mu_0 y)(y) = 1$ и $(\mu_0 y)(x) = 0$ для $x \neq y$. Очевидно, что μ_0 — мультипликативный гомоморфизм, т. е. $\mu_0(yy') = (\mu_0 y)(\mu_0 y')$ и $\mu_0(1) = 1$.

Групповое кольцо $Z(\Pi)$ совместно с этим гомоморфизмом μ_0 можно охарактеризовать следующим свойством универсальности.

Предложение 1.1. *Если Π — мультипликативная группа, R — кольцо с единицей и $\mu\colon \Pi \to R$ — функция, обладающая свойствами $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ и $\mu(1) = 1$, то существует единственный кольцевой гомоморфизм $\rho\colon Z(\Pi) \to R$, для которого $\rho\mu_0 = \mu$.*

Доказательство. Мы можем положить $\rho(\Sigma m(x)\, x) = \Sigma m(x)\, \mu(x)$; это отображение является кольцевым гомоморфизмом, причем единственным, обладающим свойством $\rho\mu_0 = \mu$.

Имея в виду это свойство, было бы последовательнее называть $Z(\Pi)$ не «групповым кольцом группы Π», а *свободным кольцом над мультипликативной группой* Π.

Модули над кольцом $Z(\Pi)$ (сокращенно, Π-модули) будут постоянно встречаться в дальнейшем.

Предложение 1.2. *Абелева группа A приобретает однозначно определенную структуру левого Π-модуля, если задана или*

(i) *такая функция, определенная на множестве $\Pi \times A$ со значениями в A и записываемая как xa, где $x \in \Pi$, $a \in A$, что соотношения*

$$x(a_1 + a_2) = xa_1 + xa_2, \quad (x_1x_2)a = x_1(x_2a), \quad 1a = a \tag{1.2}$$

выполняются тождественным образом, или, если задан

(ii) *групповой гомоморфизм*

$$\varphi : \Pi \to \operatorname{Aut} A. \tag{1.3}$$

Здесь $\operatorname{Aut} A$ обозначает множество всех автоморфизмов группы A, т. е. всех изоморфизмов $\alpha : A \to A$. Относительно умножения $\operatorname{Aut} A$ образует мультипликативную группу.

Доказательство непосредственно: формула (1.2) определяет φ равенством $\varphi(x)\, a = xa$, в то время как группа $\operatorname{Aut} A$ содержится в кольце эндоморфизмов $\operatorname{Hom}_Z(A, A)$, а поэтому по предложению 1.1 φ расширяется до гомоморфизма $\psi : Z(\Pi) \to \operatorname{Hom}_Z(A, A)$, который превращает A в левый модуль с операторами $\psi(u)\, a$ для каждого $u \in Z(\Pi)$.

В частности, любую абелеву группу A можно рассматривать как *тривиальный* Π-модуль, если считать, что $\varphi x = 1$ для всех $x \in \Pi$; тогда $xa = a$ для всех x.

Для каждого Π-модуля A мы построим аддитивную, но не обязательно абелеву группу $A \times_\varphi \Pi$, называемую *полупрямым произведением* A и Π с операторами φ. Элементами этой группы служат пары (a, x), а сложение определяется формулой

$$(a, x) + (a_1, x_1) = (a + xa_1, xx_1), \quad xa_1 = \varphi(x)\, a_1. \tag{1.4}$$

Можно доказать, что действительно построена группа с «единичным» элементом $0 = (0, 1)$ и обратным $-(a, x) = (-x^{-1}a, x^{-1})$ и что существует короткая точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\varkappa} A \times_{\varphi} \Pi \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1, \qquad (1.5)$$

в которой гомоморфизм $\varkappa$ определен равенством $\varkappa a = (a, 1)$, гомоморфизм σ — равенством $\sigma(a, x) = x$, а 1 обозначает тривиальную мультипликативную группу. Для σ имеется также правый обратный гомоморфизм ν, определяемый как $\nu x = (0, x)$ для всех x; ν отображает мультипликативную группу Π в аддитивную группу $A \times_{\varphi} \Pi$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Голоморфизм h мультипликативной группы G — это взаимно однозначное отображение G в G, при котором $h(ab^{-1}c) = h(a)\,h(b)^{-1}h(c)$ для всех $a, b, c \in G$. Показать, что множество всех голоморфизмов группы G образует относительно умножения группу Hol G, называемую *голоморфом* G. Построить короткую точную последовательность $(\lambda, \tau) : G \rightarrowtail \operatorname{Hol} G \twoheadrightarrow \operatorname{Aut} G$, где $(\lambda g)(a) = ga$, $(\tau h)(a) = h(1)^{-1}h(a)$ и для τ существует правый обратный.

2. (Р. Бэр.) Пусть A есть Π-модуль и Hol A — голоморф аддитивной группы модуля A, описанный в упражнении 1. Построить прямое произведение $(\operatorname{Hol} A)\times\Pi$ с проекциями π_1 и π_2 на множители и показать, что группа $A \times_{\varphi} \Pi$ изоморфна той подгруппе группы $(\operatorname{Hol} A)\times\Pi$, для которой

$$\tau\pi_1 = \varphi\pi_2 : (\operatorname{Hol} A) \times \Pi \to \operatorname{Aut} A;$$

сравнить последовательность (1.5) с последовательностью, указанной в упражнении 1.

§ 2. Скрещенные гомоморфизмы

Если A — Π-модуль, то *скрещенным гомоморфизмом* группы Π в группу A называется такое отображение f из Π в A, что

$$f(xy) = xf(y) + f(x), \quad x, y \in \Pi. \qquad (2.1)$$

При этом обязательно $f(1) = 0$. Например, если A — тривиальный Π-модуль (всегда $xa = a$), то скрещенный гомоморфизм — это в точности обычный гомоморфизм мультипликативной группы Π в аддитивную абелеву группу A.

Сумма двух скрещенных гомоморфизмов f и g, определенная как $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, является скрещенным гомоморфизмом. Относительно этого сложения множество скрещенных гомоморфизмов Π в A образует абелеву группу, которая будет обозначаться $Z^1_{\varphi}(\Pi, A)$, причем φ отмечает здесь Π-модульную структуру $\Pi \to \operatorname{Aut} A$ в A. Для каждого фиксированного элемента $a \in A$ функция f_a, определенная равенством $f_a(x) = xa - a$, является скрещенным гомоморфизмом. Функции вида f_a называются *главными скрещенными гомоморфизмами*. Поскольку $f_a + f_b = f_{(a+b)}$ и $f_{(-a)} = -f_a$, они образуют подгруппу $B^1_{\varphi}(\Pi, A)$ группы $Z^1_{\varphi}(\Pi, A)$. Первая группа когомологий группы Π над A определяется как факторгруппа

$$H^1_{\varphi}(\Pi, A) = Z^1_{\varphi}(\Pi, A)/B^1_{\varphi}(\Pi, A). \qquad (2.2)$$

Если A — мультипликативная группа поля, а Π — конечная группа автоморфизмов группы A (определяющая Π-модульную структуру в A), то основная теорема теории Галуа (Артин [1944], теорема 21) утверждает, что $H^1(\Pi, A) = 0$, т. е. в этом случае каждый скрещенный гомоморфизм является главным. Другое приложение скрещенных гомоморфизмов дано в следующем предложении.

Предложение 2.1. *Группа всех автоморфизмов полупрямого произведения $B = A \times_{\varphi} \Pi$, которое индуцируют тождественные автоморфизмы в подгруппе A и факторгруппе $B/A \cong \Pi$, изоморфна группе $Z^1_{\varphi}(\Pi, A)$ скрещенных гомоморфизмов. При этом изоморфизме внутренние автоморфизмы группы B, индуцированные элементами из A, соответствуют главным скрещенным гомоморфизмам.*

Доказательство. Автоморфизм ω, обладающий указанными в условии свойствами, должен определяться формулой $\omega(a, x) = (a + f(x), x)$, где $f(x)$ — некоторая функция из Π в A, причем $f(1) = 0$. Условие, что ω — автоморфизм, эквивалентно равенству (2.1). При этом произведение автоморфизмов соответствует сложению функций f, а внутренние автоморфизмы $(b,x) \to (a,1) + (b,x) - (a,1)$ — главным скрещенным гомоморфизмам.

Скрещенные гомоморфизмы могут быть описаны следующим образом в терминах группового кольца $Z(\Pi)$ и пополнения $\varepsilon : Z(\Pi) \to Z$.

Предложение 2.2. *Скрещенный гомоморфизм группы Π в $Z(\Pi)$-модуль A — это такой гомоморфизм $g : Z(\Pi) \to A$ абелевых групп, что*

$$g(rs) = rg(s) + g(r)\,\varepsilon(s), \quad r, s \in Z(\Pi). \qquad (2.3)$$

Главные скрещенные гомоморфизмы — это гомоморфизмы g_a, определяемые для каждого фиксированного элемента $a \in A$ формулой $g_a(r) = ra - a\varepsilon(r)$.

Доказательство. В приведенных формулах $\varepsilon(s)$ и $\varepsilon(r)$ — целые числа, которые действуют справа на A как кратные, т. е. $a\varepsilon(r) = \varepsilon(r)\,a$. Если дана некоторая функция g со свойством (2.3), то ее ограничение $f = g|\Pi$ на элементах $x \in \Pi$ является скрещенным гомоморфизмом в смысле (2.1), поскольку $\varepsilon(x) = 1$. Обратно, любой скрещенный гомоморфизм f в смысле (2.1) можно продолжить линейно до гомоморфизма $g: Z(\Pi) \to A$ абелевых групп, положив $g(\Sigma m_x x) = \Sigma m_x f(x)$. Тогда (2.3) следует из (2.1). Мы отождествляем f с его расширением g и получаем сформулированный результат.

Пополнение $\varepsilon: Z(\Pi) \to Z$ является кольцевым гомоморфизмом, следовательно, его ядро $I(\Pi)$ — двусторонний идеал в $Z(\Pi)$ и, значит, П-подмодуль модуля $Z(\Pi)$.

Вложение ι определяет точную последовательность

$$0 \to I(\Pi) \xrightarrow{\iota} Z(\Pi) \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0 \tag{2.4}$$

П-модулей, в которой Z имеет тривиальную модульную структуру. Отображение $m \to m1$ из Z в $Z(\Pi)$ является гомоморфизмом аддитивных групп (но не П-модулей!), правым обратным к ε. Следовательно, последовательность (2.4) расщепляется как последовательность абелевых групп. Левый обратный $p: Z(\Pi) \to I(\Pi)$ к вложению ι — это отображение, определенное для $r \in Z(\Pi)$ формулой $pr = r - \varepsilon(r)1$. Оно является гомоморфизмом абелевых групп и скрещенным гомоморфизмом группы П в модуль $I(\Pi)$.

Предложение 2.3. *Для любого П-модуля A операция ограничения до $I(\Pi)$ всякого скрещенного гомоморфизма g вида* (2.3) *порождает изоморфизм*

$$Z^1_\varphi(\Pi, A) \cong \mathrm{Hom}_{Z(\Pi)}(I(\Pi), A). \tag{2.5}$$

Главные гомоморфизмы соответствуют модульным гомоморфизмам $h_a: I(\Pi) \to A$, определенным для фиксированного a формулой

$$h_a(u) = ua, \quad u \in I(\Pi).$$

Доказательство. Если $\varepsilon(s) = 0$, то тождество (2.3) принимает вид $g(rs) = rg(s)$, так что отображение g, ограниченное ядром ε, становится модульным гомоморфизмом, что и утверждалось. Обратно, любой модульный гомоморфизм $h: I(\Pi) \to A$, умноженный на специальный скрещенный гомоморфизм $pr = r - \varepsilon(r)1$, порождает скрещенный гомоморфизм hp модуля $Z(\Pi)$, ограничение которого на $I(\Pi)$ совпадает с h. Наконец, главные гомоморфизмы ведут себя надлежащим образом.

Пусть П — фиксированная группа, тогда $Z^1_\varphi(\Pi, A)$ и H^1_φ — ковариантные функторы аргумента A; для каждого модульного гомоморфизма $\alpha: A \to B$ $(\alpha_* f)(x)$ определяется как $\alpha[f(x)]$. При фиксированной абелевой группе A с тривиальной П-модульной структурой можно превратить Z^1_φ и H^1_φ в контравариантные функторы аргумента П; групповой гомоморфизм $\zeta: \Pi \to \Pi'$ и скрещенный гомоморфизм f группы Π' определяют индуцированное отображение $\zeta^*: Z^1_\varphi(\Pi', A) \to Z^1_\varphi(\Pi, A)$ при помощи формулы $(\zeta^* f)(x) = f(\zeta x)$. Этого нельзя сделать, если A есть нетривиальный П- или П′-модуль. Однако если $\zeta: \Pi \to \Pi'$ и A' есть П′-модуль относительно гомоморфизма $\varphi': \Pi' \to \mathrm{Aut}\, A'$, то A' является также П-модулем относительно гомоморфизма $\varphi'\zeta: \Pi \to \mathrm{Aut}\, A'$ и мы можем определить индуцированные гомоморфизмы

$$\zeta^*: Z^1_{\varphi'}(\Pi', A') \to Z^1_{\varphi'\zeta}(\Pi, A'), \qquad \zeta^*: H^1_{\varphi'}(\Pi', A') \to H^1_{\varphi'\zeta}(\Pi, A'),$$

положив $(\zeta^* f)(x) = f(\zeta x)$ для любого скрещенного гомоморфизма f группы Π'. Эти индуцированные гомоморфизмы ζ^* ведут себя функторным образом, т. е. $(\zeta'\zeta)^* = \zeta^*\zeta'^*$ и $1^* = 1$.

Более формально, рассмотрим тройку (Π, A, φ) как объект категории $\mathcal{G}^-$, морфизмами $\rho: (\Pi, A, \varphi) \to (\Pi', A', \varphi')$ которой являются *замены групп*, т. е. пары $\rho = (\zeta, \alpha)$ таких групповых гомоморфизмов $\zeta: \Pi \to \Pi'$, $\alpha: A' \to A$, что

$$x(\alpha a') = \alpha[(\zeta x) a'] \tag{2.6}$$

для всех $x \in \Pi$ и $a' \in A'$. Отметим, что α направлен в обратную сторону (от A' к A) и что условие (2.6) утверждает, что гомоморфизм $\alpha: A' \to A$ является гомоморфизмом П-модулей. Если $\rho' = (\zeta', \alpha'): (\Pi', A', \varphi') \to (\Pi'', A'', \varphi'')$ — вторая замена групп, то произведение $\rho'\rho$ равняется $(\zeta'\zeta, \alpha\alpha')$. Для любого скрещенного гомоморфизма f' группы Π' в A' определение $(\rho^* f')(x) = \alpha[f'(\zeta x)]$ дает отображение $\rho^*: Z^1_{\varphi'}(\Pi', A') \to Z^1_\varphi(\Pi, A)$. Тем самым Z^1_φ и H^1_φ превращаются в контравариантные функторы, определенные в категории $\mathcal{G}^-$ замен групп. Отображение ρ^* есть произведение

$$H^1_{\varphi'}(\Pi', A') \xrightarrow{\zeta^*} H^1_{\varphi'\zeta}(\Pi, A') \xrightarrow{\alpha_*} H^1_\varphi(\Pi, A)$$

ранее введенных отображений ζ^* и α_*.

§ 3. Расширения групп

Расширением групп называется короткая точная последовательность

$$E: 0 \to G \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1, \tag{3.1}$$

вообще говоря, неабелевых групп. Удобно записывать групповую операцию в 0, G и B как сложение, а в П и 1 как умножение. Как и раньше, утверждение о точности E равносильно утверждению, что $\varkappa$ отображает G изоморфно на нормальный делитель в B, а σ индуцирует изоморфизм $B/\varkappa G \cong \Pi$ соответствующей фактор-группы. Расширение E *расщепляется*, если σ обладает правым обратным ν, т. е. если существует такой гомоморфизм $\nu: \Pi \to B$, что $\sigma\nu = 1_\Pi$, где 1_Π — тождественный автоморфизм группы П. Полупрямое произведение (1.5) расщепляется как расширение.

Пусть Aut G обозначает группу автоморфизмов группы G с групповой операцией: последовательным выполнением автоморфизмов. Трансформирование в B порождает гомоморфизм $\theta : B \to \operatorname{Aut} G$. Действие каждого автоморфизма $\theta(b)$ на элемент $g \in G$ описывается равенством

$$\varkappa[(\theta b) g] = b + (\varkappa g) - b, \qquad b \in B, \qquad g \in G.$$

Предположим, что $G = A$ — абелева группа; тогда $\theta(A) = 1$, так что θ индуцирует гомоморфизм $\varphi : \Pi \to \operatorname{Aut} A$ и $\varphi\sigma = \theta$. Таким образом, φ определяется равенством

$$\varkappa[(\varphi\sigma b) a] = b + (\varkappa a) - b, \qquad b \in B, \qquad a \in A. \tag{3.2}$$

В этом случае мы скажем, что E есть расширение абелевой группы A при помощи группы Π *с операторами* $\varphi : \Pi \to \operatorname{Aut} A$. Отображение φ указывает способ, при котором A появляется как нормальный делитель расширения.

Задачей теории расширений групп является построение всех последовательностей E с заданными A, Π и φ. Гомоморфизм φ задает Π-модульную структуру в A; значит, задача теории расширений групп при известных группе Π и Π-модуле A состоит в построении всех E. Имеется по крайней мере одно такое расширение — полупрямое произведение $A \times_\varphi \Pi$.

Если E и E' — любые два расширения групп, то *морфизмом* $\Gamma : E \to E'$ считается такая тройка $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ групповых гомоморфизмов, что диаграмма

$$\begin{array}{rccccccccc} E: & 0 & \to & A & \to & B & \to & \Pi & \to & 1 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ E': & 0 & \to & A' & \to & B' & \to & \Pi' & \to & 1 \end{array} \tag{3.3}$$

коммутативна. Если A и A' абелевы группы, а φ и $\varphi' : \Pi' \to \operatorname{Aut} A'$ — ассоциированные операторы для E и E', то легко показать, что имеет место тождество

$$\alpha[\varphi(x) a] = (\varphi'\gamma x)\alpha a. \tag{3.4}$$

Например, если $A = A'$ и $\alpha = 1_A$, то $(\varphi x) a = (\varphi'\gamma x) a$. Другими словами, Π-модульная структура в A определяется Π'-модульной структурой. Если $\Gamma : E \to E'$ и $\Gamma' : E' \to E''$ являются морфизмами расширений, то $\Gamma'\Gamma : E \to E''$ — также морфизм расширений.

Если E и E' — два групповых расширения одного и того же модуля A с помощью группы Π, то *конгруэнция* $\Gamma : E \to E'$ — это морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ с $\alpha = 1_A$ и $\gamma = 1_\Pi$. Для абелевой группы A из (3.4) вытекает, что $\varphi = \varphi'$, т. е. конгруэнтные расширения имеют одинаковые операторы. Короткая лемма о пяти гомоморфизмах (для некоммутативного случая) показывает, что в конгруэнции $\Gamma = (1_A, \beta, 1_\Pi)$ β — изоморфизм, следовательно, каждая конгруэнция имеет обратную. Поэтому мы можем говорить о классах конгруэнтности расширений. Пусть Opext (Π, A, φ) обозначает множество всех классов конгруэнтности расширений абелевой группы A при помощи Π с операторами φ. Мы хотим описать Opext.

Любое расширение (3.1) абелевой группы $G = A$, которое расщепляется (гомоморфизмом $\nu : \Pi \to B$), конгруэнтно полупрямому произведению $A \times_\varphi \Pi$; изоморфизм $\beta : B \to A \times_\varphi \Pi$ определяется формулой $\beta b = (\varkappa^{-1}[b - \nu\sigma b], \sigma b)$. Подробнее

$$\begin{aligned} b + b_1 - \nu\sigma(b + b_1) &= (b - \nu\sigma b) + \nu\sigma b + (b_1 - \nu\sigma b_1) - \nu\sigma b = \\ &= (b - \nu\sigma b) + \varkappa[(\theta b)\varkappa^{-1}(b_1 - \nu\sigma b_1)], \end{aligned}$$

точно так же, как и в правиле сложения (1.4) для полупрямого произведения.

Если Π — (неабелева) свободная группа с образующими t_k, то любой эпиморфизм $\sigma : B \to \Pi$ имеет правый обратный, который можно задать, положив $\nu t_k = b_k$, где b_k — такой элемент из B, что $\sigma b_k = t_k$. Следовательно, любое расширение при помощи свободной группы расщепляется, и Opext в этом случае состоит из одного элемента.

В качестве более интересного примера возьмем $\Pi = C_m(t)$, где $C_m(t)$ — циклическая группа конечного порядка m с образующим t. В некотором расширении E с помощью C_m отождествим каждый элемент $a \in A$ с его образом $\varkappa a \in B$, так что $A \subset B$. Выберем представитель u для $t : \sigma u = t$; так как $\sigma(mu) = t^m = 1$, то $mu = a_0 \in A$. Каждый элемент из B можно единственным образом записать в виде $a + iu$, где $a \in A$, и $0 \leqslant i < m$. В силу выбора a_0 и (3.2)

$$mu = a_0, \qquad u + a = ta + u. \tag{3.5}$$

Используя эти равенства, сумму любых двух элементов вида $a + iu$ можно представить в этом же виде. В силу ассоциативности $u + mu = (m + 1) u = mu + u$, так что $u + a_0 = a_0 + u$. Следовательно, $a_0 = ta_0$, т. е. элемент a_0 «инвариантен» относительно t. Этот элемент a_0 не единствен: если $u' = a_1 + u$ — другой представитель t в B, то ввиду (3.5) и индукции по m

$$mu' = m(a_1 + u) = a_1 + ta_1 + \ldots + t^{m-1}a_1 + mu = N_t a_1 + a_0.$$

Здесь $N_t a_1 = a_1 + ta_1 + \ldots + t^{m-1}a_1$ *норма* относительно t в C_m-модуле A; N_t есть групповой гомоморфизм $N_t : A \to A$. Поскольку смежный класс a_0 по модулю $N_t A$ однозначно определен классом конгруэнтности расширения, мы установили соответствие

$$\operatorname{Opext}(C_m(t), A, \varphi) \longleftrightarrow [a \mid ta = a]/N_t A. \tag{3.6}$$

Указанное сопоставление взаимно однозначно: если дан инвариантный элемент a_0, то возьмем в качестве B множество всех символов вида $a + iu$, $0 \leqslant i < m$, и определим в этом множестве сложение формулой (3.5). Инвариантность a_0 обеспечивает ассоциативность этого сложения, и поэтому B является расширением A при помощи C_m с данными операторами. В частности, если операторы в A тривиальны (всегда $ta = a$), выражение, стоящее справа в (3.6), превращается в группу A/mA — в согласии с уже полученным результатом для случая абелевых расширений (предложение III.1.1). В этом случае все расширения A с помощью C_m абелевы.

Пусть теперь $\Pi = C_\infty \times C_\infty$ — свободная мультипликативно записанная абелева группа с двумя образующими t_1 и t_2. В произвольном расширении с помощью Π выберем представители u_i образующих t_i, $i = 1, 2$. Тогда существует такой элемент a_0 из A, что $u_2 + u_1 = a_0 + u_1 + u_2$, а все элементы расширения можно единственным образом записать в виде $a + m_1u_1 + m_2u_2$ с целыми коэффициентами m_1 и m_2. Сложение в B определяется сложением в A и правилами

$$u_1 + a = t_1a + u_1, \quad u_2 + a = t_2a + u_2, \quad u_2 + u_1 = a_0 + u_1 + u_2.$$

Так определенное сложение на множестве элементов $a + m_1u_1 + m_2u_2$ всегда ассоциативно и превращает это множество в группу. Если представители u_1 и u_2 заменить другими представителями $u_1' = a_1 + u_1$, $u_2' = a_2 + u_2$, где $a_1, a_2 \in A$, то константа a_0 заменяется элементом $a_0 + a_2 - t_1a_2 - a_1 + t_2a_1$. Следовательно, если S — подгруппа, порожденная всеми суммами вида $a_2 - t_1a_2 - a_1 + t_2a_1$, то мы получаем взаимно однозначное соответствие

$$\operatorname{Opext}(C_\infty \times C_\infty,\ A,\ \varphi) \longleftrightarrow A/S. \tag{3.7}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать $\operatorname{Opext}(C_\infty \times C_\infty \times C_\infty,\ A,\ \varphi)$.
2. Описать $\operatorname{Opext}(C_m \times C_n,\ A,\ \varphi)$.
3. Показать, что предложение 2.1 остается в силе, если $A \times_\varphi \Pi$ заменить произвольным расширением (Π, A, φ).

§ 4. Системы факторов

Проведенные рассуждения наводят на мысль, что $\operatorname{Opext}(\Pi, A, \varphi)$ подобно Ext есть группа. Эта групповая структура может быть описана посредством некоторых систем факторов.

Пусть E — расширение (3.1) из $\operatorname{Opext}(\Pi, A, \varphi)$; для удобства отождествим каждый элемент a с $\varkappa a$. Для каждого x из Π выберем «представитель» $u(x)$ в B, т. е. такой элемент $u(x)$, что $\sigma u(x) = x$.

В частности, положим $u(1) = 0$. Теперь в каждом смежном классе B по A содержится ровно один представитель $u(x)$, а элементы из B однозначно представимы в виде $a + u(x)$, $a \in A$, $x \in \Pi$. Мы будем записывать действие операторов так: $\varphi(x)a = xa$. Тогда формула (3.2) при $b = u(x)$ принимает вид

$$u(x) + a = xa + u(x). \tag{4.1}$$

С другой стороны, сумма $u(x) + u(y)$ должна лежать в том же смежном классе, что и $u(xy)$; поэтому существуют однозначно определенные элементы $f(x, y) \in A$, для которых

$$u(x) + u(y) = f(x, y) + u(xy). \tag{4.2}$$

Поскольку $u(1) = 0$, мы получаем, что

$$f(x, 1) = 0 = f(1, y), \quad x, y \in \Pi. \tag{4.3}$$

Функция f называется *системой факторов* расширения E. При данной системе факторов и при заданной тройке (Π, A, φ) сложение в B любых двух элементов $a + u(x)$ и $a_1 + u(y)$ производится на основании формул (4.1) и (4.2):

$$[a + u(x)] + [a_1 + u(y)] = (a + xa_1 + f(x, y)) + u(xy). \tag{4.4}$$

По этому правилу запишем суммы трех слагаемых:

$$[u(x) + u(y)] + u(z) = f(x, y) + f(xy, z) + u(xyz),$$

$$u(x) + [u(y) + u(z)] = xf(y, z) + f(x, yz) + u(xyz).$$

Из равенства этих сумм (закон ассоциативности!) следует

$$xf(y, z) + f(x, yz) = f(x, y) + f(xy, z), \quad x, y, z \in \Pi. \tag{4.5}$$

Система факторов f расширения зависит от выбора представителей; если $u'(x)$ — второе множество представителей, причем $u'(1) = 0$, то $u'(x)$ и $u(x)$ лежат в общем смежном классе, поэтому существует функция g из Π в A, для которой $g(1) = 0$ и $u'(x) = g(x) + u(x)$. Тогда $u'(x) + u'(y) = g(x) + xg(y) + u(x) + u(y) = g(x) + xg(y) + f(x, y) + u(xy)$. Новой системой факторов будет $f'(x, y) = \delta g(x, y) + f(x, y)$, где δg обозначает функцию

$$(\delta g)(x, y) = xg(y) - g(xy) + g(x), \quad x, y \in \Pi. \tag{4.6}$$

Можно проверить, что функция δg удовлетворяет тождеству (4.5), если f заменить на δg.

Эти рассмотрения подсказывают следующие определения. Пусть $Z_\varphi^2(\Pi, A)$ обозначает множество всех функций f из $\Pi \times \Pi$ в A, которые удовлетворяют тождеству (4.5) и условию нормализованности (4.3). Это множество является абелевой группой относительно обычного сложения функций $(f+f')(x, y) = f(x, y) + f'(x, y)$. Пусть $B^2_\varphi(\Pi, A)$ обозначает подмножество из Z^2_φ, состоящее из всех функций f вида $f = \delta g$, где функция δg определяется формулой (4.6) для любой такой функции g из Π в A, что $g(1) = 0$. Факторгруппа

$$H^2_\varphi(\Pi, A) = Z^2_\varphi(\Pi, A)/B^2_\varphi(\Pi, A)$$

называется второй группой когомологий группы Π над A. Наше исследование приводит к следующей теореме.

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi : \Pi \to \operatorname{Aut} A$ — гомоморфизм группы Π в группу автоморфизмов абелевой группы A. Отображение ω, которое сопоставляет каждому расширению A при помощи Π с операторами φ смежный класс одной из его систем факторов, устанавливает взаимно однозначное соответствие*

$$\omega : \operatorname{Opext}(\Pi, A, \varphi) \longleftrightarrow H^2_\varphi(\Pi, A) \qquad (4.7)$$

между множеством Opext *всех классов конгруэнтности таких расширений и второй группой когомологий. При этом соответствии полупрямое произведение переходит в нулевой элемент из H^2_φ.*

Поскольку H^2_φ — абелева группа, это соответствие определяет групповую структуру в Opext. Эта групповая структура может быть описана также с точки зрения бэровского сложения, что отмечено в приведенных ниже упражнениях.

Доказательство. Поскольку системы факторов одного и того же расширения совпадают по модулю подгруппы B^2_φ и поскольку конгруэнтные расширения имеют общие системы факторов, отображение ω определено корректно. Полупрямое произведение $A \times_\varphi \Pi$ имеет, очевидно, тривиальную функцию $f(x, y) = 0$ в качестве одной из своих систем факторов. Если два расширения порождают системы факторов, разность которых равна некоторой функции $\delta g(x, y)$, то изменением представителей в одном из расширений можно добиться совпадения систем факторов и, значит, расширения конгруэнтны. Следовательно, отображение (4.7) устанавливает взаимно однозначное соответствие множества Opext с подмножеством H^2. Наконец, пусть дана функция f, удовлетворяющая (4.5) и (4.3). Тогда можно построить группу B, взяв в качестве ее элементов все пары (a, x) и определив сложение, как в (4.4):

$$(a, x) + (a_1, y) = (a + xa_1 + f(x, y), xy), \quad a, a_1 \in A.$$

Правила действия модульных операторов и условие (4.5) показывают, что сложение ассоциативно; тем самым оказывается построенным расширение с представителями $u(x) = (0, x)$ и системой факторов f. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Если группа A абелева, то расширение E из (3.1) A с помощью Π называется *центральным групповым расширением*, если $\varkappa A$ лежит в центре B. Другими словами, центральное расширение — это расширение с операторами $\varphi = 1$. В доказанной теореме поэтому содержится тот факт, что множество классов конгруэнтности центральных расширений A с помощью Π находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H^2(\Pi, A)$, где абелева группа A берется с тривиальными операторами φ. Если группа Π — абелева, то каждое абелево расширение центрально, так что существует мономорфизм $\operatorname{Ext}^1_Z(\Pi, A) \to H^2(\Pi, A)$.

Мы можем рассматривать группы когомологий H^2_φ и H^1_φ как группы когомологий подходящего комплекса

$$X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3$$

свободных Π-модулей. Возьмем в качестве X_2 свободный Π-модуль, порожденный всеми парами $[x, y]$ элементов $x \neq 1$, $y \neq 1$ из Π. Чтобы определить элемент $[x, y] \in X_2$ для всех $x, y \in \Pi$, положим также $[1, y] = 0 = [x, 1]$ и $[1, 1] = 0$. Двумерная коцепь из $\operatorname{Hom}_\Pi(X, A)$ — это Π-гомоморфизм $f: X_2 \to A$; он определяется своими значениями $f[x, y]$ на свободных образующих модуля X_2, следовательно, в действительности это просто такая функция из $\Pi \times \Pi$ в A, что $f(x, 1) = 0 = f(1, y)$. Теперь в качестве X_3 возьмем свободный Π-модуль, порожденный всеми тройками $[x, y, z]$ элементов из Π, отличных от 1, а $\partial: X_3 \to X_2$ зададим формулой

$$\partial[x, y, z] = x[y, z] - [xy, z] + [x, yz] - [x, y]. \qquad (4.8)$$

Условие коцикличности $f(f\partial = 0)$ совпадает с тождеством (4.5). Наконец, возьмем в качестве X_1 свободный модуль, порожденный всеми $[x]$ с $x \neq 1$, и положим $[1] = 0$. Одномерная коцепь — это модульный гомоморфизм $X_1 \to A$, который определяется своими значениями на $[x]$, так что в действительности является функцией g из Π в A, причем $g(1) = 0$. Если мы теперь определим $\partial: X_2 \to X_1$ формулой

$$\partial[x, y] = x[y] - [xy] + [x], \qquad (4.9)$$

то $\partial\partial = 0$, а кограницей для g служит функция, удовлетворяющая тождеству (4.6). Значит, $H^2_\varphi(\Pi, A)$ совпадает с $H^2(\operatorname{Hom}_{Z(\Pi)}(X, A))$. Мы получим аналогичный результат для H^1_φ, если в качестве X_0 возьмем $Z(\Pi)$ и положим $\partial[x] = x - 1 \in Z(\Pi)$.

Этот комплекс определяет также нульмерную группу когомологий $H^0_\varphi(\Pi, A) = H^0(\operatorname{Hom}_{Z(\Pi)}(X, A))$. Нульмерная коцепь — это модульный гомоморфизм $f: Z(\Pi) \to A$, который определяется своим значением $f(1) = a \in A$. Он является коциклом, если элемент — $(\delta f)[x] = f\partial[x] = f(x-1) = xa - a$ равен нулю. Следовательно, нульмерные коциклы соответствуют элементам $a \in A$, инвариантным относительно Π ($xa = a$ для всех x):

$$H^0_\varphi(\Pi, A) = A^\Pi, \quad A^\Pi = [a \mid xa = a \quad \text{для } x \in \Pi]. \tag{4.10}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Сложение Бэра, введенное в гл. III для расширений модулей, может быть применено также для расширений групп, как показывает следующая последовательность упражнений.

1. Доказать: если E — расширение группы G с помощью группы Π и $\gamma: \Pi' \to \Pi$, то существует расширение E' группы G с Π' и морфизм $\Gamma = (1_G, \beta, \gamma): E' \to E$. Пара (Γ, E') определена с точностью до конгруэнтности для E'. Если G — абелева группа с операторами $\varphi: \Pi \to \operatorname{Aut} G$, то E' имеет операторы $\varphi\gamma$. Положить $E\gamma = E'$.

2. В условиях упражнения 1 показать, что каждый морфизм $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1): E_1 \to E$ расширений с $\gamma_1 = \gamma$ «проходит» единственным образом через Γ.

3. Пусть $E \in \operatorname{Opext}(\Pi, A, \varphi)$, $\varphi': \Pi \to \operatorname{Aut} A'$ и $\alpha: A \to A'$ есть Π-модульный гомоморфизм. Доказать, что существует единственное с точностью до конгруэнтности E' расширение $E' \in \operatorname{Opext}(\Pi, A', \varphi')$ и морфизм $\Theta = (\alpha, \beta, 1_\Pi): E \to E'$. Положить αE равным E'.

4. При предположениях упражнения 3 доказать, что каждый морфизм $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1): E \to E_1$, где $E_1 \in \operatorname{Opext}(\Pi_1, A', \varphi_1')$, $\alpha_1 = \alpha$ и $\varphi_1'\gamma_1 = \varphi'$, «проходит» единственным способом через Θ.

5. Пусть относительно α, γ и E сделаны те же предположения, что и в упражнениях 1 и 3, и пусть $G = A$ — абелева группа. Доказать, что расширение $\alpha(E\gamma)$ конгруэнтно расширению $(\alpha E)\gamma$.

6. Используя упражнения 1, 3 и 5, показать, что Opext является контравариантным функтором в категории $\mathcal{G}^-$ замен групп.

7. Показать, что множество $\operatorname{Opext}(\Pi, A, \varphi)$ является абелевой группой относительно сложения Бэра, определенного формулой $E_1 + E_2 = \nabla_A (E_1 \times E_2) \Delta_\Pi$, и показать, что это определение согласуется с определением, данным с помощью систем факторов.

§ 5. *B*-резольвента

Формулы (4.8) и (4.9) для взятия границы в комплексе X предыдущего параграфа могут быть обобщены на более высокие размерности. Именно, для любой группы Π мы построим некоторый цепной комплекс Π-модулей $B_n(Z(\Pi))$. Возьмем в качестве B_n свободный Π-модуль, образующими которого являются последовательности $[x_1 | \ldots | x_n]$ из n элементов $x_1 \neq 1, \ldots, x_n \neq 1$ группы Π. Результатом действия элемента $x \in \Pi$ на образующий является элемент $x[x_1 | \ldots | x_n]$ из B_n, так что B_n есть свободная абелева группа, порожденная элементами вида $x[x_1 | \ldots | x_n]$.

Чтобы придать смысл каждому символу $[x_1 | \ldots | x_n]$, положим

$$[x_1 | \ldots | x_n] = 0, \quad \text{если хотя бы один элемент } x_i = 1; \tag{5.1}$$

это есть условие *нормализованности*. В частности, B_0 — это свободный модуль, порожденный одним символом $[\ ]$ и поэтому изоморфный $Z(\Pi)$, а отображение $\varepsilon[\ ] = 1$ определяет Π-модульный гомоморфизм $\varepsilon: B_0 \to Z$, где Z — тривиальный Π-модуль.

Гомоморфизмы $s_{-1}: Z \dashrightarrow B_0$, $s_n: B_n \dashrightarrow B_{n+1}$ абелевых групп определяются формулами

$$s_{-1}1 = [\ ], \quad s_n x[x_1 | \ldots | x_n] = [x | x_1 | \ldots | x_n]. \tag{5.2}$$

Определим Π-модульный гомоморфизм $\partial: B_n \to B_{n-1}$ при $n > 0$:

$$\begin{aligned} \partial[x_1 | \ldots | x_n] &= x_1[x_2 | \ldots | x_n] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1 | \ldots | x_i x_{i+1} | \ldots | x_n] + (-1)^n [x_1 | \ldots | x_{n-1}]; \end{aligned} \tag{5.3}$$

в частности, $\partial[x] = x[\ ] - [\ ]$, $\partial[x|y] = x[y] - [xy] + [x]$. Отметим, что формула (5.3) справедлива и тогда, когда некоторые $x_i = 1$, поскольку члены $(i-1)$ и i в правой части уничтожаются, а остальные члены равны нулю. Суммируя сказанное, мы получаем диаграмму

$$Z \overset{\varepsilon}{\underset{s_{-1}}{\rightleftarrows}} B_0 \overset{\partial}{\underset{s_0}{\rightleftarrows}} B_1 \rightleftarrows \ldots \rightleftarrows B_{n-1} \overset{\partial}{\underset{s_{n-1}}{\rightleftarrows}} B_n \rightleftarrows \ldots, \tag{5.4}$$

в которой сплошные стрелки означают модульные гомоморфизмы, а пунктирные — групповые гомоморфизмы. Назовем $B = B(Z(\Pi))$ *В-резольвентой*.

Теорема 5.1. *Для любой группы* Π *В-резольвента* $B(Z(\Pi))$ *с пополнением* ε *является свободной резольвентой тривиального* Π*-модуля* Z.

Доказательство. Модули B_n свободны по построению, поэтому мы должны доказать, что последовательность гомоморфизмов, отмеченных сплошными стрелками в (5.4), с присоединенным слева нулем, точна. Мы докажем больше: эта последовательность является комплексом абелевых групп со стягивающей гомотопией s. Последнее утверждение означает, что

$$\varepsilon s_{-1} = 1, \quad \partial s_0 + s_{-1}\varepsilon = 1, \quad \partial s_n + s_{n-1}\partial = 1, \quad (n > 0). \tag{5.5}$$

Каждое из этих равенств вытекает немедленно из определений; в силу (5.3), например, $\partial s_n(x[x_1 | \ldots | x_n])$ начинается с члена $x[x_1 | \ldots | x_n]$, в то время как остальные члены совпадают с членами из $s_{n-1}\partial x[x_1 | \ldots | x_n]$, но с измененным знаком; этим доказано последнее из равенств (5.5). Более того, эти равенства рекурсией по n однозначно определяют и ε, и $\partial_{n+1}: B_{n+1} \to B_n$, так как B_{n+1} порождается как П-модуль подгруппой $s_n B_n$, а равенства (5.5) определяют ∂_{n+1} на этой подгруппе: $\partial_{n+1}s_n = 1 - s_{n-1}\partial_n$, значит, формула (5.3) может быть выведена из формул (5.5) и (5.2) для s. То же самое рекурсивное соотношение устанавливает, что $\varepsilon\partial_1 = 0$ и $\partial_n\partial_{n+1} = 0$, поскольку

$$\partial_n\partial_{n+1}s_n = \partial_n(1 - s_{n-1}\partial_n) = \partial_n - (\partial_n s_{n-1})\partial_n = \\ = \partial_n - \partial_n + s_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n,$$

откуда $\partial^2 = 0$ по индукции. Это же можно доказать непосредственно, но более трудоемко с помощью формулы (5.3) для ∂. Любым способом доказывается, что $B(Z(\Pi))$ — комплекс и резольвента Z, что и утверждалось в теореме.

Эта же теорема справедлива для «ненормализованной» B-резольвенты $\beta(Z(\Pi))$. В качестве β_n здесь берется свободный П-модуль, порожденный всеми наборами $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ из n элементов группы П (без условия нормализованности), а ε, s и ∂ задаются теми же формулами, что и в B. Значит, $B_n \cong \beta_n/D_n$, где D_n — подмодуль, порожденный всеми элементами $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ с хотя бы одним $x_i = 1$. Символ $\otimes$ используется здесь потому, что указанное описание превращает β_n в $(n+1)$-кратное «тензорное произведение» $Z(\Pi) \otimes \ldots \otimes Z(\Pi)$ абелевых групп $Z(\Pi)$; эти тензорные произведения определяются в гл. V и применяются при изучении B-резольвенты в гл. IX.

Для любого П-модуля A мы определим *группы когомологий* П с коэффициентами в A формулой

$$H^n(\Pi, A) = H^n(B(Z(\Pi)), A), \tag{5.6}$$

в согласии с частными случаями, рассмотренными в предыдущем параграфе (где индекс φ использовался для явного описания структуры A как П-модуля). Значит, группы когомологий $H^n(\Pi, A)$ совпадают с группами когомологий коцепного комплекса $B(\Pi, A) = \operatorname{Hom}_\Pi(B(Z(\Pi)), A)$, где Hom_Π — сокращение для $\operatorname{Hom}_{Z(\Pi)}$. Поскольку B_n — свободный модуль с образующими $[x_1 | \ldots | x_n]$, $(x_i \neq 1)$, n-мерная коцепь $f: B_n \to A$ — это П-модульный гомоморфизм, который однозначно определяется своими значениями на этих образующих. Следовательно, группа $B^n(\Pi, A)$ из n-мерных коцепей может быть отождествлена с множеством всех таких функций f от n аргументов x_i из П со значениями в A, которые удовлетворяют условию «нормализованности»

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.7}$$

Сумма двух коцепей f_1 и f_2 определяется суммированием значений:

$$(f_1 + f_2)(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_2(x_1, \ldots, x_n);$$

относительно этого сложения множество B^n всех таких функций f является абелевой группой. Кограничный гомоморфизм $\delta: B^n \to B^{n-1}$ определяется формулой

$$\delta f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-1)^{n+1}[x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)], \tag{5.8}$$

и $H^n(\Pi, A)$ есть n-я группа когомологий этого комплекса.

Как функтор, $H^n(\Pi, A)$ контравариантен по аргументу (Π, A, φ): если $\rho = (\zeta, \alpha)$ — замена групп (2.6), то индуцированное отображение $\rho^*: H^n(\Pi', A') \to H^n(\Pi, A)$ определяется для любого $f' \in B'^n$ равенством

$$(\rho^* f')(x_1, \ldots, x_n) = \alpha[f'(\zeta x_1, \ldots, \zeta x_n)], \\ \zeta: \Pi \to \Pi', \quad \alpha: A' \to A. \tag{5.9}$$

В частности, при П — фиксированной группе $H^n(\Pi, A)$ — ковариантный функтор в категории П-модулей A.

Следствие 5.2. *Для любого* П-*модуля* A *существует изоморфизм*

$$\theta: \operatorname{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z, A) \cong H^n(\Pi, A),$$

естественный по аргументу A.

Поскольку B — свободная резольвента тривиального П-модуля Z, этот результат непосредственно вытекает из теоремы III.6.4; он показывает, что группы когомологий групп являются частным случаем функтора Ext_R, где R — групповое кольцо.

Для короткой точной последовательности $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ П-модулей следствие 5.2 и обычная точная последовательность для Ext устанавливают существование точной последовательности

$$\cdots \to H^n(\Pi, A) \to H^n(\Pi, B) \to H^n(\Pi, C) \xrightarrow{E_*} H^{n+1}(\Pi, A) \to \cdots.$$

Связывающие гомоморфизмы E_* естественны по E. При фиксированной группе П группы когомологий $H^n(\Pi, A)$ являются ковариантными функторами по аргументу A, которые могут быть охарактеризованы вместе со связывающими гомоморфизмами тремя аксиомами, аналогичными аксиомам для Ext (III.10): приведенная выше последовательность точна, $H^0(\Pi, A) \cong A^\Pi$ и $H^n(\Pi, J) = 0$, если $n > 0$, а J — инъективный П-модуль.

Для конечной группы П кограничная формула устанавливает любопытный результат.

Предложение 5.3. *Если П — конечная группа порядка k, то каждый элемент группы $H^n(\Pi, A)$ при $n > 0$ имеет порядок, делящий k.*

Доказательство. Для любой n-мерной коцепи f определим $(n-1)$-коцепь g посредством формулы

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{x \in \Pi} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x).$$

Сложим равенства (5.8) для всех $x = x_{n+1}$ из П. Последний член суммы не зависит от x; предпоследний член при фиксированном x_n дает

$$\sum_x f(\ldots, x_{n-1}, x_n x) = \sum_x f(\ldots, x_{n-1}, x) = g(\ldots, x_{n-1}).$$

Следовательно, в результате имеем

$$\sum_{x \in \Pi} \delta f(x_1, \ldots, x_n, x) = -\delta g(x_1, \ldots, x_n) + kf(x_1, \ldots, x_n).$$

При $\delta f = 0$ из этого соотношения следует, что элемент $kf = \delta g$ является кограницей, откуда вытекает результат.

Следствие 5.4. *Если П — конечная группа, а D — полная абелева группа без кручения, любым образом превращенная в П-модуль, то $H^n(\Pi, D) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Для элемента g указанного выше вида существует такая $(n-1)$-мерная коцепь h, что $g = kh$. Тогда $kf = \pm k\delta h$. Поскольку в D нет элементов конечного порядка, $f = \pm \delta h$, т. е. коцикл f является кограницей.

Следствие 5.5. *Если П — конечная группа, P — факторгруппа аддитивной группы действительных чисел по подгруппе целых чисел и если P и Z — тривиальные П-модули, то $H^2(\Pi, Z) \cong \cong \mathrm{Hom}(\Pi, P)$.*

Группа (абелева) $\mathrm{Hom}(\Pi, P)$ всех групповых гомоморфизмов $\Pi \to P$ — это группа характеров группы П.

Доказательство. Аддитивная группа R действительных чисел полна и не имеет элементов конечного порядка. Короткая точная последовательность тривиальных П-модулей $Z \rightarrowtail R \twoheadrightarrow P$ порождает точную последовательность

$$H^1(\Pi, R) \to H^1(\Pi, P) \to H^2(\Pi, Z) \to H^2(\Pi, R).$$

По следствию 5.4 обе крайние группы равны нулю; поскольку P имеет тривиальную модульную структуру, $H^1(\Pi, P) = \mathrm{Hom}(\Pi, P)$. Следовательно, связывающий гомоморфизм будет искомым изоморфизмом.

Для иллюстрации употребления резольвент рассмотрим операцию сопряжения с помощью фиксированного элемента $t \in \Pi$. Пусть $\theta_t : \Pi \to \Pi$ обозначает внутренний автоморфизм $\theta_t x = t^{-1}xt$, в то время как для любого П-модуля A, $\alpha_t : A \to A$ — автоморфизм, задаваемый равенством $\alpha_t a = ta$. Тогда $x(\alpha_t a) = xta = t(t^{-1}xta) = \alpha_t[(\theta_t x)a]$, так что пара $(\theta_t, \alpha_t) : (\Pi, A, \varphi) \to (\Pi, A, \varphi)$ является заменой групп в смысле (2.6). Индуцированное отображение групп когомологий необходимо является изоморфизмом, однако справедливо более сильное утверждение.

Предложение 5.6. *Для любого П-модуля A сопряжение с помощью фиксированного элемента $t \in \Pi$ индуцирует тождественный изоморфизм*

$$(\theta_t, \alpha_t)^* : H^n(\Pi, A) \to H^n(\Pi, A).$$

Доказательство. Определим модульный гомоморфизм $g_t : B_n(Z(\Pi)) \to B_n(Z(\Pi))$ формулой

$$g_t(x[x_1 | \ldots | x_n]) = xt[t^{-1}x_1 t | \ldots | t^{-1}x_i t | \ldots | t^{-1}x_n t].$$

Можно заметить, что $g_t \partial = \partial g_t$, т. е. g_t — цепное преобразование резольвент, накрывающее тождественное отображение $Z \to Z$. По теореме сравнения для резольвент, g_t гомотопно тождественному отображению, так что индуцированное отображение групп когомологий тождественно. Но это индуцированное отображение переводит каждую n-мерную коцепь f в $g_t^* f$, где

$$(g_t^* f)(x_1, \ldots, x_n) = fg_t[x_1 | \ldots | x_n] = tf(t^{-1}x_1 t, \ldots, t^{-1}x_n t).$$

Коцепь, стоящая справа, равна $(\theta_t, \alpha_t)^* f$ по определению (5.9), откуда получаем требуемое заключение. Отметим, что теорема сравнения позволила нам избежать построения явной гомотопии $g_t \simeq 1$.

Эта теорема может быть прочитана следующим образом: каждый n-мерный коцикл f когомологичен определенному выше коциклу $g_t^* f$. Подобно многим результатам в теории когомологий групп этот результат был открыт для $n = 2$ из свойств расширений групп (упражнение 3 ниже).

В B-резольвенте $B_n(Z(\Pi))$ — это свободные абелевы группы, свободными образующими которых являются все символы $x[x_1 | \ldots | x_n]$, где все $x \in \Pi$ и ни один из элементов $x_1, \ldots, x_n$ не равен $1 \in \Pi$. Мы назовем эти символы *неоднородными образующими* комплекса B. Далее, последовательность $x, x_1, \ldots, x_n$ элементов из П определяет и определяется последовательностью элементов $y_0 = x$, $y_1 = xx_1$, $y_2 = xx_1x_2$, $\ldots$, $y_n = xx_1 \ldots x_n$, из П, а равенство $x_i = 1$ превращается в равенство $y_{i-1} = y_i$. Следовательно, образующие из B_n можно переписать с помощью $y_i \in \Pi$

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n) = y_0 [y_0^{-1} y_1 \mid y_1^{-1} y_2 \mid \ldots \mid y_{n-1}^{-1} y_n], \tag{5.10}$$

и обратно:

$$x [x_1 \mid \ldots \mid x_n] = (x, xx_1, xx_1x_2, \ldots, xx_1 \ldots x_n). \tag{5.11}$$

Перевод граничной формулы в эти обозначения доказывает

Предложение 5.7. *Абелева группа $B_n(Z(\Pi))$ содержит элементы $(y_0, \ldots, y_n)$ из* (5.10) *для всех $y_i \in \Pi$. Если $y_{i-1} = y_i$, то $(y_0, \ldots, y_n) = 0$. Остальные элементы такого вида являются свободными образующими группы B_n. Здесь Π-модульная структура задается формулой*

$$y (y_0, y_1, \ldots, y_n) = (yy_0, yy_1, \ldots, yy_n), \tag{5.12}$$

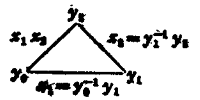
а дифференциал $\partial\colon B_n \to B_{n-1}$ определяется формулой

$$\partial (y_0, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n), \tag{5.13}$$

где крышка над y_i указывает на то, что y_i нужно опустить.

Заметим, что в этом описании $B(Z(\Pi))$ умножение из Π используется только в определении (5.12) модульной структуры. Ввиду формы этого определения символы $(y_0, \ldots, y_n)$ называются *однородными* образующими B_n. Они имеют геометрическую интерпретацию. Если мы рассмотрим $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ как n-мерный симплекс σ, i-ю вершину которого описывает элемент $y_i \in \Pi$, то $(y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n)$ — это $(n-1)$-мерный симплекс, который является i-й гранью симплекса σ, а граничная формула (5.13) — это обычная формула для границы симплекса как альтернированной суммы его $(n-1)$-мерных граней.

Неоднородные образующие можно подобным же образом рассматривать как систему обозначений ребер. Обозначим ребро симплекса, идущее от вершины i к вершине j, через $z_{ij} = y_i^{-1} y_j$, так что симплексы σ и $y\sigma$ имеют одинаковые обозначения ребер, $z_{ij} z_{jk} = z_{ik}$. Следовательно, символы ребер $x_i = z_{i-1,i}$ определяют все обозначения ребер с помощью умножения. Неоднородный образующий $x [x_1 \mid \ldots \mid x_n]$ просто указывает эти обозначения ребер x_i, а символ $x = y_0$ указывает первую вершину, как показано на диаграмме



Неоднородная граничная формула (5.3) может быть вычитана из этих обозначений для ребер. Этому схематическому описанию можно придать точный геометрический смысл, если Π — фундаментальная группа пространства (Эйленберг — Маклейн [1945]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что $\beta(Z(\Pi))$ — ненормализованная B-резольвента — вместе с подходящим пополнением является свободной Π-модульной резольвентой модуля Z.

2. Установить, что $\mathrm{Opext}(\Pi, A, \varphi)$ можно описать с помощью систем факторов, которые удовлетворяют условию (4.5), но не удовлетворяют условию нормализованности (4.3). Найти единичный элемент группового расширения, заданного такой ненормализованной системой факторов.

3. Для $n = 2$ в предложении 5.6 показать непосредственно, что когомологичные системы факторов f и $g_1^* f$ определяют конгруэнтные элементы в $\mathrm{Opext}(\Pi, A, \varphi)$.

4. Показать, что $\mathrm{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z, A)$ — контравариантный функтор в категории $\mathcal{G}^-$ замен групп, и доказать естественность изоморфизма θ из следствия 5.2.

§ 6. Характеристический класс группового расширения

Для $n = 2$ в следствии 5.2 устанавливается изоморфизм

$$\theta : \mathrm{Ext}^2_{Z(\Pi)}(Z, A) \cong H^2(\Pi, A). \tag{6.1}$$

Следовательно, каждое групповое расширение E группы A с помощью группы Π

$$E\colon 0 \to A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$$

вместе с заданными операторами φ должно определять двукратное Π-модульное расширение A при помощи тривиального модуля Z. Весьма поучительно непосредственное построение этого модульного расширения

$$\chi(E) : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} Z(\Pi) \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0. \tag{6.2}$$

Для этого возьмем групповое кольцо $Z(\Pi)$ группы Π вместе с пополнением ε. Возьмем в качестве M фактормодуль $M = F/L$, где F — свободный Π-модуль с образующими $[b]$, $b \neq 0$ — произвольный элемент из B, и условимся, что $[0] = 0$; а L — подмодуль модуля F, порожденный всеми суммами $[b_1 + b_2] - (\sigma b_1)[b_2] - [b_1]$, где $b_1, b_2 \in B$. Модульные гомоморфизмы α и β из (6.2) могут быть тогда определены формулами $\alpha a = [\varkappa a] + L$, $\beta([b] + L) = \sigma b - 1 \in Z(\Pi)$. Ясно, что $\beta\alpha = 0$ и $\varepsilon\beta = 0$, поэтому последовательность $\chi(E)$ из (6.2) может рассматриваться как комплекс

П-модулей. Точность этой последовательности вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.1. *Как комплекс абелевых групп последовательность* (6.2) *имеет стягивающую гомотопию.*

Доказательство. Стягивающая гомотопия s должна состоять из таких гомоморфизмов $s: Z \to Z(\Pi)$, $s: Z(\Pi) \to M$ и $s: M \to A$ абелевых групп, что $\varepsilon s = 1_Z$, $\beta s + s\varepsilon = 1_{Z(\Pi)}$, $\alpha s + s\beta = 1_M$ и $s\alpha = 1_A$. Первое условие выполняется, если положить $s1 = 1$, а второе выполняется, если положить $sx = [u(x)] + L$, где $u(x) \in B$ — представитель x в B, $\sigma u(x) = x$, а $u(1) = 0$. Для всех x и b элемент $u(x) + b - u(x(\sigma b))$ лежит в ядре σ, так что существуют элементы $h(x, b) \in A$, для которых

$$u(x) + b = \varkappa h(x,b) + u(x(\sigma b)).$$

Гомоморфизм $s: M \to A$ можно определить, положив $s(x[b] + L) = h(x, b)$. Доказательство заканчивается проверкой того, что $\alpha s + s\beta = 1$, $s\alpha = 1$.

Тем самым данная короткая точная последовательность E групп определяет точную последовательность $\chi(E)$ модулей, т. е. элемент из $\mathrm{Ext}^2_{Z(\Pi)}(Z,A)$, называемый *характеристическим классом* последовательности E. То, что соответствие

$$\chi: \mathrm{Opext}(\Pi, A, \varphi) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{Z(\Pi)}(Z, A)$$

является изоморфизмом, будет вытекать из следующей теоремы, относящейся к произведению χ и θ из (6.1):

Теорема 6.2. *Произведение*

$$\mathrm{Opext}(\Pi, A, \varphi) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Ext}^2_{Z(\Pi)}(Z, A) \xrightarrow{\theta} H^2(\Pi, A) \qquad (6.3)$$

является изоморфизмом, который сопоставляет каждому расширению E класс когомологий одной из его систем факторов.

Набросок доказательства. Для применения определения θ мы должны найти цепное преобразование B-резольвенты, рассматриваемой как свободная резольвента тривиального модуля Z, в последовательность $\chi(E)$, также рассматриваемую как резольвента Z. Такое цепное преобразование

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B_2(Z(\Pi)) \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & B_1(Z(\Pi)) \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & B_0(Z(\Pi)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & M \arrow[r] & Z(\Pi) \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

можно указать в терминах представителей $u(x)$ для x из B с обычной системой факторов для $u(x)$ при помощи модульных гомо-

морфизмов

$$g_1[x] = [u(x)] + L, \qquad g_2[x \mid y] = f(x, y). \qquad (6.4)$$

Когомологический класс последовательности $\chi(E)$ является тогда когомологическим классом гомоморфизма g_2 как коцикла из $B(Z(\Pi))$, т. е. является когомологическим классом системы факторов f расширения E, что и утверждается в нашей теореме.

Указанное построение можно обратить, а именно B-резольвента дает двукратную точную последовательность, начинающуюся с ∂B_2 и кончающуюся на Z. Умножение слева этой последовательности на коцикл f дает последовательность $\chi(E)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что отображения α и β, определенные формулами (6.2), действительно являются модульными гомоморфизмами.

2. Закончить доказательство леммы 6.1, показав, в частности, что функция h, введенная там, удовлетворяет равенству $h(x, b_1 + b_2) = h(x(\sigma b_1), b_2) + h(x, b_1)$, и поэтому отображение $s: M \to A$ корректно определено.

3. Выразить функцию h в терминах системы факторов f.

4. Проверить, что равенства (6.4) задают цепное преобразование.

§ 7. Когомология циклических и свободных групп

Поскольку $H^2(\Pi, A) \cong \mathrm{Ext}^2_{Z(\Pi)}(Z, A)$, мы можем вычислить группы когомологий определенной группы Π, используя Π-модульную резольвенту модуля Z, соответственно приспособленную к структуре группы Π.

Пусть $\Pi = C_m(t)$ — мультипликативная циклическая группа порядка m с образующим t. Групповое кольцо $\Gamma = Z(C_m(t))$ — это кольцо всех многочленов $u = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i$ от переменного t с целыми коэффициентами a_i, взятое по модулю отношения $t^m = 1$. Два специальных элемента из Γ — это элементы

$$N = 1 + t + \ldots + t^{m-1}, \qquad D = t - 1. \qquad (7.1)$$

Очевидно, что $ND = 0$, в то время как для любого элемента $u = \sum a_i t^i$ из Γ

$$Nu = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i \right) t^j, \qquad Du = \sum_{j=1}^{m} (a_{j-1} - a_j)\, t^j, \qquad a_m = a_0.$$

Если $Du = 0$, то $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1}$ и $u = Na_0$. Если $Nu = 0$, то $\Sigma a_i = 0$ и $u = -D\,[a_0 + (a_1 + a_0)\,t + \ldots + (a_{m-1} + \ldots + a_0)\,t^{m-1}]$.

Это означает, что последовательность П-модулей

$$\Gamma \xleftarrow{D_*} \Gamma \xleftarrow{N_*} \Gamma \xleftarrow{D_*} \Gamma, \quad D_* u = Du, \quad N_* u = Nu,$$

точна. Пополнение ε: $\Gamma \to Z$ действует на u так: $\varepsilon u = \Sigma a_i$, следовательно, из $\varepsilon u = 0$ вытекает, что $u = Dv$ для некоторого v. Учитывая все сказанное, устанавливаем, что длинная точная последовательность

$$0 \longleftarrow Z \xleftarrow{\varepsilon} \Gamma \xleftarrow{D_*} \Gamma \xleftarrow{N_*} \Gamma \xleftarrow{D_*} \Gamma \longleftarrow \cdots \tag{7.2}$$

является свободной резольвентой модуля Z. Эту резольвенту обычно обозначают через W, особенно в алгебраической топологии, где она существенно используется при вычислении когомологических операций (Стинрод [1953]).

Для любого П-модуля A изоморфизм $\mathrm{Hom}_\Pi(\Gamma, A) \cong A$ отображает каждый гомоморфизм f: $\Gamma \to A$ в $f(1)$. Следовательно, коцепной комплекс $\mathrm{Hom}_\Pi(W, A)$ с обычным знаком $\delta f = (-1)^{n+1} f\partial$ для кограничного дифференциала становится последовательностью

$$A \xrightarrow{-D^*} A \xrightarrow{N^*} A \xrightarrow{-D^*} A \longrightarrow \cdots,$$

начинающейся с размерности нуль, где $N^* a = Na$, $D^* a = Da = (t-1)a$. Ядром D^* является подгруппа $[a \mid ta = a]$ всех элементов из A, инвариантных относительно действия $t \in C_m$, а ядром N^* является подгруппа всех таких элементов a из A, что $a + ta + \ldots + t^{m-1} a = 0$. Группы когомологий группы C_m — это группы когомологий этого коцепного комплекса. Следовательно, нами получена

Теорема 7.1. *Для конечной циклической группы C_m порядка m с образующим t и C_m-модуля A группы когомологий таковы:*

$$H^0(C_m, A) = [a \mid ta = a],$$
$$H^{2n}(C_m, A) = [a \mid ta = a]/N^*A, \quad n > 0,$$
$$H^{2n+1}(C_m, A) = [a \mid Na = 0]/D^*A, \quad n \geqslant 0.$$

Заметим, что эти группы для $n > 0$ повторяются с периодом 2.

Теперь мы рассмотрим свободные группы.

Лемма 7.2. *Если F — свободная группа со свободными образующими e_i, $i \in J$, то группа $Z^1_\varphi(F, A)$ изоморфна прямому произведению ΠA_i копий $A_i \cong A$ группы A, причем этот изоморфизм устанавливается соответствием, отображающим каждый скрещенный гомоморфизм f в семейство $\{fe_i\}$ его значений на образующих.*

Доказательство. По определению свободная группа F состоит из единицы и *слов* $x = e_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots e_{i_h}^{\varepsilon_h}$ от образующих с показателями $\varepsilon_j = \pm 1$. Если мы предположим, что слово редуцировано (т. е. $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$, если $i_j = i_{j+1}$), то это представление единственно. Произведение двух слов получается приписыванием одного слова к другому с последующим сокращением. Далее, скрещенный гомоморфизм f удовлетворяет равенству $f(xy) = xf(y) + f(x)$ и, следовательно, $f(1) = 0$ и $f(x^{-1}) = -x^{-1}f(x)$. Значит, f полностью определяется своими значениями $f(e_i) = a_i \in A$ на свободных образующих e_i. Обратно, если даны константы a_i в A, мы можем положить $f(e_i) = a_i \in A$ и определить $f(x)$ индукцией по длине редуцированного слова x с помощью формул

$$f(e_i x) = e_i f(x) + a_i, \quad f(e_i^{-1}x) = e_i^{-1} f(x) - e_i^{-1} a_i.$$

Можно проверить, что эти формулы верны и тогда, когда слово $e_i x$ или $e_i^{-1} x$ не редуцировано, и, следовательно, так определенное отображение f является скрещенным гомоморфизмом. Доказательство закончено.

Теперь рассмотрим точную последовательность (2.4) $Z(F)$-модулей

$$0 \longrightarrow I(F) \xrightarrow{j} Z(F) \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0 \tag{7.3}$$

вместе со скрещенным гомоморфизмом p из F в $I(F)$, заданным равенством $px = x - 1$. По предложению 2.3 скрещенные гомоморфизмы F в A взаимно однозначно соответствуют модульным гомоморфизмам h: $I(F) \to A$; действительно, каждый гомоморфизм h определяет $f = hp$. В частности, $fe_i = hpe_i = h(e_i - 1)$. Следовательно, доказанная выше лемма утверждает, что гомоморфизм h определяется своими значениями на элементах $e_i - 1 \in I(F)$. Это значит, что $I(F)$ — свободный F-модуль с образующими $e_i - 1$. Поэтому последовательность (7.3) является свободной резольвентой тривиального F-модуля Z и, следовательно, может быть использована для вычисления групп когомологий группы F. Поскольку эта резольвента равна нулю в размерностях, больших 1, мы получаем следующий результат:

Теорема 7.3. *Для свободной группы F, $H^n(F, A) = 0$ при $n > 1$.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать $H^1(F, A)$ для свободной группы F.

2. Доказать, что $I(F)$ — свободный модуль без использования скрещенных гомоморфизмов.

3. Найти резольвенту для Z как тривиального модуля над свободной абелевой группой П с двумя образующими и вычислить группы когомологий группы П.

4. Определить произведение Ионеды для групп когомологий $H^k(C_m, Z)$, установив, что

$$S^{2n}: 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{N_*} \Gamma \xrightarrow{D_*} \Gamma \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$$

— точная последовательность с $2n$ промежуточными членами Γ и отображениями, являющимися чередующимися умножениями на N и D, что для $n > 0$ в $\operatorname{Hom}^{2n}(C_m, Z) = \operatorname{Ext}^{2n}(Z, Z) = Z/mZ$ имеется аддитивный образующий порядка m, определяемый классом конгруэнтности последовательности S^{2n}, и что произведение $S^{2n}S^{2k} = S^{2(n+k)}$.

5. Если E_0 — точная последовательность $Z \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow C_m$, в которой отображение $Z \to Z$ есть умножение на m, то показать, что характеристический класс $\chi(E_0)$ в смысле § 6 является последовательностью S^2 из упражнения 4. Вывести отсюда, что $\operatorname{Opext}(C_m, Z)$ есть циклическая группа порядка m, порожденная расширением E_0.

6. Пусть $\zeta: C_m \to C_k$ — гомоморфизм циклических групп. Для тривиального П-модуля A из теоремы 7.1 вычислить индуцированное отображение ζ^* групп когомологий.

§ 8. Препятствия для расширений

Трехмерные группы когомологий появляются при изучении расширений неабелевой группы G. Мы будем записывать операцию в G как сложение, хотя группа G неабелева.

Для любого элемента h из G обозначим через $\mu(h)$ или μ_h *внутренний автоморфизм* $\mu_h g = h + g - h$, т. е. трансформирование элементом h. Отображение $\mu: G \to \operatorname{Aut} G$ является гомоморфизмом аддитивной группы G в мультипликативную группу $\operatorname{Aut} G$ всех автоморфизмов G; образ μG — это группа $\operatorname{In} G$ внутренних автоморфизмов группы G. Этот образ является нормальным делителем в $\operatorname{Aut} G$, так как если $\eta \in \operatorname{Aut} G$, то всегда

$$\eta(\mu_h g) = \eta(h + g - h) = \eta h + \eta g - \eta h = \mu_{\eta h}(\eta g)$$

и, значит,

$$\eta \mu_h \eta^{-1} = \mu_{\eta h}, \quad \mu_h \text{— трансформирование элементом } h. \tag{8.1}$$

Факторгруппа $\operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$ называется группой *классов автоморфизмов* или *внешних автоморфизмов* группы G; она является коядром гомоморфизма $\mu: G \to \operatorname{Aut} G$. Ядро μ называется *центром* C группы G; центр состоит из всех таких элементов $c \in G$, что $c + g = g + c$ для любого $g \in G$. Значит, последовательность

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow G \xrightarrow{\mu} \operatorname{Aut} G \longrightarrow \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G \longrightarrow 1 \tag{8.2}$$

точна.

Произвольное групповое расширение

$$E: 0 \longrightarrow G \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\sigma} \Pi \longrightarrow 1$$

группы G с помощью группы П определяет путем трансформирования в аддитивной группе B гомоморфизм $\theta: B \to \operatorname{Aut} G$, для которого

$\theta(\varkappa G) \subset \operatorname{In} G$. Значит, определяется индуцированный гомоморфизм $\psi: \Pi \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$. Другими словами, для каждого элемента $b \in B$ автоморфизм $g \to b + g - b$ группы G содержится в классе автоморфизмов $\psi(\sigma b)$. Мы будем говорить, что расширение E имеет *класс сопряжения* ψ; таким образом, ψ указывает способ вложения G в качестве нормального делителя в группу B. Обратно, назовем пару групп П, G и гомоморфизм $\psi: \Pi \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$ *абстрактным ядром*. Общая задача теории расширений групп состоит в построении всех расширений E с данным абстрактным ядром (Π, G, ψ), т. е. в построении всех коротких точных последовательностей E с данными концами G и П и данным классом сопряжения ψ. Как и в § 3, конгруэнтные расширения имеют общий класс сопряжения.

Заданное расширение E можно описать следующим образом. Отождествим каждый элемент $g \in G$ с элементом $\varkappa g \in B$. Выберем для каждого $x \in \Pi$ представитель $u(x) \in B$, $\sigma u(x) = x$, причем $u(1) = 0$. Тогда сопряжение элементом $u(x)$ порождает автоморфизм $\varphi(x) \in \psi(x)$ группы G:

$$u(x) + g = [\varphi(x) g] + u(x), \quad x \in \Pi, \quad g \in G. \tag{8.3}$$

Сумма $u(x) + u(y)$ равна $u(xy)$ с точностью до слагаемого из G, который мы можем обозначить как $f(x, y) \in G$,

$$u(x) + u(y) = f(x, y) + u(xy), \quad x, y \in \Pi. \tag{8.4}$$

Из закона ассоциативности для $u(x) + u(y) + u(z)$ вытекает, что

$$[\varphi(x) f(y, z)] + f(x, yz) = f(x, y) + f(xy, z). \tag{8.5}$$

Если бы группа G, содержащая значения функции f, была абелевой, то это тождество означало бы, что $\delta f = 0$. Следовательно, сопряжение отдельно левой и отдельно правой частями равенства (8.4) должно давать один и тот же автоморфизм в G, поэтому должно иметь место равенство

$$\varphi(x)\varphi(y) = \mu(f(x, y))\varphi(xy), \tag{8.6}$$

в котором утверждается, что μf измеряет степень отклонения φ от гомоморфизма $\varphi: \Pi \to \operatorname{Aut} G$.

Обратно, эти условия могут быть использованы для построения расширения, как показывает следующая лемма.

Лемма 8.1. *Пусть даны группы П, G и функции φ из П в $\operatorname{Aut} G$ и f — из $\Pi \times \Pi$ в G, которые удовлетворяют равенствам (8.5) и (8.6) и условиям нормализованности $\varphi(1) = 1$, $f(x, 1) = 0 = f(1, y)$. Тогда множество $B_0(G, \varphi, f, \Pi)$ всех пар (g, x) является группой относительно операции, определенной формулой*

$$(g, x) + (g_1, y) = (g + \varphi(x) g_1 + f(x, y), xy). \tag{8.7}$$

Гомоморфизмы $g \to (g, 1)$ и $(g, x) \to x$ задают расширение $G \rightarrowtail B_0 \twoheadrightarrow \Pi$ группы G с помощью Π, причем класс сопряжения этого расширения определяется классом автоморфизмов, порожденным функцией φ.

Доказательство. Обычное вычисление показывает, что из (8.5) и (8.6) следует закон ассоциативности. В силу условия нормализованности пара $(0, 1)$ — нуль, а $(-f(x^{-1}, x) - \varphi(x^{-1}) g, x^{-1})$ является противоположным элементом для элемента (g, x).

Мы назовем группу $B_0 = [G, \varphi, f, \Pi]$, построенную указанным способом, *скрещенным произведением* групп, а построенное расширение — *расширением скрещенного произведения*. Проведенный перед последней леммой анализ показывает, что любое расширение изоморфно подобному скрещенному произведению в следующем точном смысле.

Лемма 8.2. *Если $\varphi(1) = 1$ для $\varphi(x) \in \psi(x)$, то любое расширение E абстрактного ядра (Π, G, ψ) конгруэнтно расширению скрещенного произведения $[G, \varphi, f, \Pi]$ с данной функцией φ.*

Доказательство. В данном расширении E представители $u(x)$ можно выбрать так, чтобы автоморфизм $g \to u(x) + g - u(x)$ принадлежал классу автоморфизмов $\psi(x)$. Произведем этот выбор так, чтобы этот автоморфизм был $\varphi(x)$. Тогда каждый элемент из B имеет единственное представление в виде $g + u(x)$, а правила сложения (8.3) и (8.4) определяют сумму двух элементов так, что при соответствии $g + u(x) \to (g, x)$ она переходит в соответствующую сумму в скрещенном произведении (8.7). Это соответствие есть конгруэнтность. Поэтому лемма доказана.

Теперь предположим, что задано только абстрактное ядро (Π, G, ψ). В каждом классе автоморфизмов $\psi(x)$ выберем автоморфизм $\varphi(x)$, положив на всякий случай $\varphi(1) = 1$. Поскольку ψ — гомоморфизм в $\operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$, автоморфизм $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(xy)^{-1}$ является внутренним. Для каждой пары элементов $x, y \in \Pi$ выберем элемент $f(x, y)$ из G, порождающий этот внутренний автоморфизм, в частности, положим $f(x, 1) = 0 = f(1, y)$; тогда $\varphi(x)\varphi(y) = \mu[f(x, y)]\varphi(x, y)$, т. е. выполняется равенство (8.6). Мы хотели бы, чтобы выполнялось равенство (8.5), однако это не всегда имеет место. Закон ассоциативности для $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ показывает только, что (8.5) выполняется после применения μ к обеим частям. Ядро μ — это центр C группы G; следовательно, существует для всех x, y, z такой элемент $k(x, y, z) \in C$, что

$$[\varphi(x) f(y, z)] + f(x, yz) = k(x, y, z) + f(x, y) + f(xy, z). \qquad (8.5')$$

Очевидно, что $k(1, y, z) = k(x, 1, z) = k(x, y, 1) = 0$, так что эту функцию k можно рассматривать как нормализованную трехмерную коцепь группы Π с коэффициентами в G.

Абелева группа $C = \text{центр}(G)$ может рассматриваться как Π-модуль, так как каждый автоморфизм $\varphi(x)$ группы G переводит C в C и индуцирует автоморфизм $c \to \varphi(x) c$, для $c \in C$, который не зависит от выбора $\varphi(x)$ в классе $\psi(x)$. Поэтому мы можем писать xc вместо $\varphi(x) c$.

Мы называем коцепь k из (8.5′) *препятствием* для абстрактного ядра (Π, G, ψ). Существуют разные препятствия для данного ядра, зависящие от выбора $\varphi(x) \in \psi(x)$ и функции f, удовлетворяющей (8.6). Однако если существует расширение E, то, как уже показано нами в (8.5), имеется препятствие $k = 0$. Значит, доказана

Лемма 8.3. *Абстрактное ядро (Π, G, ψ) имеет расширение тогда и только тогда, когда одно из его препятствий есть коцепь, тождественно равная нулю.*

Теперь мы докажем следующую лемму.

Лемма 8.4. *Любое препятствие k ядра (Π, G, ψ) является неоднородным трехмерным коциклом в $B(Z(\Pi))$.*

Мы должны доказать, что $\delta k = 0$. Это утверждение правдоподобно, так как в случае абелевости группы G и гомоморфности φ определение (8.5′) для k выглядело бы как $k = \delta f$, следовательно, $\delta k = \delta\delta f = 0$. Значит, нужно показать, что $\delta\delta$ по-прежнему есть 0 и в неабелевом случае. Точнее вычислим двумя способами выражение

$$L = \varphi(x)[\varphi(y) f(z, t) + f(y, zt)] + f(x, yzt)$$

для $x, y, z, t \in \Pi$. При первом способе применим (8.5′) к внутренним членам, начинающимся с $\varphi(y) f(z, t)$; после применения гомоморфизма $\varphi(x)$ к результату появляются члены $\varphi(x) f(y, z)$ и $\varphi(x) f(yz, t)$, к каждому из которых снова применяем (8.5′). Если теперь члены k из центра поставить в начале, то наш результат принимает вид

$$L = [xk(y, z, t)] + k(x, yz, t) + k(x, y, z) + U, \qquad (8.8)$$

где U — сокращение для выражения

$$U = f(x, y) + f(xy, z) + f(xyz, t).$$

При втором способе вычисления произведение автоморфизмов $\varphi(x)\varphi(y)$ при первом члене, получающемся при раскрытии скобок в L, можно переписать с помощью (8.6), что дает

$$L = f(x, y) + \varphi(xy) f(z, t) - f(x, y) + \varphi(x) f(y, zt) + f(x, yzt).$$

Используя (8.5′) для каждого члена, содержащего φ, и принадлежность всех значений функции k центру, получаем

$$L = k(xy,\ z,\ t) + k(x,\ y,\ zt) + U, \tag{8.9}$$

где U — то же самое, что и выше. Но члены, прибавленные к U в (8.8) и (8.9), являются соответственно положительными и отрицательными членами в $\delta k(x,\ y,\ z,\ t)$; следовательно, из сравнения (8.8) и (8.9) вытекает, что $\delta k = 0$, что и требовалось доказать.

Теперь мы исследуем, какое влияние оказывает изменение выбора φ и f на построение препятствий для данного ядра.

Лемма 8.5. *При данных $\varphi(x) \in \psi(x)$ изменение выбора f в (8.6) приводит к замене k когомологичным коциклом. При соответствующем изменении выбора f можно заменить k любым когомологичным коциклом.*

Доказательство. Поскольку ядром μ является центр C группы G, при любом другом выборе функция f в (8.6) имеет вид

$$f'(x,\ y) = h(x,\ y) + f(x,\ y), \qquad h(x,\ 1) = 0 = h(1,\ y), \tag{8.10}$$

где функция h принимает значения в C и, следовательно, может рассматриваться как двумерный нормализованный коцикл группы Π со значениями в C. Теперь определение (8.5′) по существу означает, что препятствие k есть кограница $k = \delta f$. Препятствие k' для f' поэтому равно $k' = \delta(h + f)$. Так как значения h лежат в центре, то мы можем написать $\delta(h + f) = (\delta h) + (\delta f)$; значит, новое препятствие имеет указанную в лемме форму. Поскольку h в (8.10) можно выбрать произвольно в C, мы действительно можем заменить k любым когомологичным коциклом.

Лемма 8.6. *При изменении выбора автоморфизмов $\varphi(x)$ можно так изменить выбор функции f, чтобы препятствие k не изменилось.*

Доказательство. Пусть автоморфизмы $\varphi(x) \in \psi(x)$ заменены автоморфизмами $\varphi'(x) \in \psi(x)$, причем $\varphi'(1) = 1$. Поскольку $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ лежат в общем классе автоморфизмов, существует такая функция $g(x)$ со значениями в G, что $g(1) = 0$ и $\varphi'(x) = [\mu g(x)]\,\varphi(x)$. Используя (8.1) и (8.6), находим, что

$$\varphi'(x)\,\varphi'(y) = \mu\,[g(x) + \varphi(x)\,g(y) + f(x,\ y) - g(xy)]\,\varphi'(xy).$$

В качестве новой функции $f'(x,\ y)$ мы можем выбрать выражение, стоящее в скобках. Запишем это определение так:

$$f'(x,\ y) + g(xy) = g(x) + \varphi(x)\,g(y) + f(x,\ y). \tag{8.11}$$

Это определение имеет вид $f' = (\delta g) + f$, так что мы должны были бы иметь $\delta f' = (\delta\delta g) + \delta f = \delta f$, если пренебречь затруднениями с некоммутативностью сложения. Если действительно последовательно преобразовать выражение $\varphi'(x)\,f'(y,\ z) + f'(x,\ yz) + g(xyz)$ с помощью (8.11) и (8.6), то получим выражение $k(x,\ y,\ z) + f'(x,\ y) + f'(xy,\ z) + g(xyz)$, которое показывает, что препятствие k осталось прежним.

Эти результаты можно суммировать в виде следующей теоремы.

Теорема 8.7. *Для любого абстрактного ядра $(\Pi,\ G,\ \psi)$ представим центр C группы G как Π-модуль с операторами $xc = \varphi(x)\,c$ при некотором выборе автоморфизмов $\varphi(x) \in \psi(x)$. Сопоставление этому ядру класса когомологий любого из его препятствий дает корректно определенный элемент* $\operatorname{Obs}(\Pi,\ G,\ \psi) \in H^3(\Pi,\ C)$. *Ядро $(\Pi,\ G,\ \psi)$ имеет расширение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Obs}(\Pi,\ G,\ \psi) = 0$.

Действительно, если класс когомологий препятствия k равен нулю, то любое препятствие k имеет вид $k = \delta h$. По лемме 8.5 существует возможность выбрать функцию f' вместо f так, чтобы препятствие стало равным нулю тождественно; взяв эту функцию f' в качестве системы факторов, можно построить расширение как скрещенное произведение $[G,\ \varphi,\ f',\ \Pi]$.

Для окончания изучения проблемы расширений мы установим ледующий результат о множестве расширений.

Теорема 8.8. *Если абстрактное ядро $(\Pi,\ G,\ \psi)$ имеет расширение, то множество конгруэнтных классов расширений находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $H^2(\Pi,\ C)$, где C — центр группы G, рассматриваемый как Π-модуль с Π-модульной структурой, описанной в теореме 8.7.*

В действительности мы докажем больше. Группа $H^2(\Pi,\ C)$ действует как группа преобразований на множестве $\operatorname{Opext}(\Pi,\ G, \psi)$, причем это действие просто транзитивно, т. е. таково, что из любого расширения E_0 мы получим все конгруэнтные классы расширений (каждый класс по одному разу) с помощью элементов из $H^2(\Pi,\ C)$.

Доказательство. Запишем любое расширение $E \in \operatorname{Opext}(\Pi,\ G,\ \psi)$ как скрещенное произведение $[G,\ \varphi,\ f,\ \Pi]$. Зафиксируем φ. Представим каждый элемент из $H^2(\Pi,\ C)$ системой факторов (двумерным коциклом) h. Требуемая операция есть сопоставление $[G,\ \varphi,\ f,\ \Pi] \to [G,\ \varphi,\ h + f,\ \Pi]$. Сформулированные свойства этой операции вытекают сразу. В частности, чтобы показать, что любое расширение E' можно получить таким способом из E, запишем E' в виде скрещенного произведения $[G,\ \varphi,\ f',\ \Pi]$ с той же функцией φ, использовав лемму 8.2. Два раза применив (8.6), получим

$$\mu\,[f(x,\ y)] = \varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(xy)^{-1} = \mu\,[f'(x,\ y)].$$

Из этого равенства следует, что элемент $f(x, y) - f''(x, y)$ лежит в ядре μ, т. е. в центре группы G. Если определить h как $h(x, y) = -f(x, y) + f''(x, y)$, то (8.5) для f и f'' показывает, что $\delta h = 0$, значит, h — коцикл и $f'' = h + f$.

Действие элементов из H^2 на Opext можно также определить в инвариантных терминах, не используя систем факторов. Представим элемент из $H^2(\Pi, C)$ согласно теореме 4.1 как расширение D группы C с помощью группы Π с указанными операторами. Пусть $C \times G$ — прямое произведение групп C и G. Определим «кодиагональное» отображение $\nabla: C \times G \to G$, положив $\nabla(c, g) = c + g$; поскольку C — центр G, это отображение — гомоморфизм. Результат действия D на расширение E из Opext (Π, G, ψ) можно тогда записать как $\nabla(D \times E)\Delta_\Pi$. Точно так же, как и в случае сложения Бэра (упражнение 4.7), этот результат определяет расширение G при помощи Π с операторами ψ. Если мы вычислим систему факторов для этого расширения, то увидим, что она, как и выше, определяется отображением $f \to h + f$.

§ 9. Реализация препятствий

Мы уже доказали, что препятствием для задачи расширения является элемент из $H^3(\Pi, C)$. Если $C = 0$, то препятствий нет, и, следовательно, задача имеет решение, т. е. справедлива

Теорема 9.1. *Если аддитивная, неабелева группа G не имеет центра, то любое абстрактное ядро* (Π, G, ψ) *имеет расширение.*

Полезно иметь прямое доказательство этого простого результата. Поскольку группа G без центра, последовательность $G \rightarrowtail \operatorname{Aut} G \twoheadrightarrow \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$ является расширением E_0; индуцированное расширение $E_0\psi$ из упражнения 4.1 и дает искомое расширение G с помощью Π и с операторами ψ.

В других случаях задача расширения может не иметь решения В силу результатов § 7 бывают случаи (например, если Π — конечная циклическая группа), когда $H^3(\Pi, C) \neq 0$. Изложенная выше теория препятствий дает возможность построить абстрактные ядра, не имеющие расширений, при условии, если мы знаем, что каждый трехмерный коцикл можно реализовать как препятствие. Этот факт, интересный также и потому, что показывает «пригодность» теории когомологий групп для решения проблемы расширения, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 9.2. *Пусть группа Π отлична от циклической группы порядка 2, C есть Π-модуль и $\bar{k}$ — произвольный когомологический класс из $H^3(\Pi, C)$. Тогда существуют группа G с центром C и гомоморфизм $\psi: \Pi \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$, индуцирующий заданную Π-модульную структуру в C, причем* $\operatorname{Obs}(\Pi, G, \psi) = \bar{k}$.

Эта теорема справедлива для всех групп Π (см. Эйленберг — Маклейн [1947]); случай, когда Π имеет порядок 2, требует особого доказательства.

Доказательство получается путем такого обращения рассмотрений, приведших к определению препятствия, которое позволяет построить «свободное» ядро с данным трехмерным коциклом k в качестве препятствия.

Возьмем $G = C \times F$, где C — данный Π-модуль, а F — свободная (неабелева) группа с образующими $[x, y]$, где x, y — произвольные элементы из Π, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Будем записывать операцию в F и в G как сложение. Определим функцию f из $\Pi \times \Pi$ в $G \supset F$, положив $f(x, 1) = 0 = f(1, y)$ и $f(x, y) = [x, y]$ для $x \neq 1$, $y \neq 1$. Для каждого $x \in \Pi$ определим эндоморфизм $\beta(x): G \to G$, положив $\beta(x)c = xc$ (используя модульную структуру в C) и

$$\beta(x)[y, z] = k(x, y, z) + f(x, y) + f(xy, z) - f(x, yz) \quad (9.1)$$

для любого образующего $[y, z]$ группы F. Поскольку функция k нормализована (т. е. $k(x, y, 1) = k(x, 1, z) = k(1, y, z) = 0$, это равенство выполняется также и в том случае, когда элемент $[y, z]$ заменен элементом $f(y, z)$, т. е. когда y или z есть 1. Оно означает, что $k = \delta f$ в том же «неабелевом» смысле, что и в определении (8.5′) для препятствий.

В силу определения $\beta(1)$ — тождественный автоморфизм. Мы утверждаем, что для всех $x, y \in \Pi$

$$\beta(x)\beta(y) = \mu[f(x, y)]\beta(x, y): G \to G. \quad (9.2)$$

Действительно, при применении обеих частей этого равенства к элементу c из Π-модуля C получается одинаковый результат; значит, достаточно доказать, что эндоморфизмы из обеих частей равенства (9.2) дают одинаковый результат на любом образующем $[z, t]$ группы F. Сначала вычислим $\beta(x)\beta(y)[z, t]$, повторно применяя определение (9.1) один раз к $\beta(y)$, а затем три раза к $\beta(x)$. Члены, которые являются значениями функции k, лежат в C, а потому в центре G, так что их можно собрать вместе. Они будут содержать все члены из $\delta k(x, y, z, t)$, кроме члена $-k(xy, z, t)$. Так как $\delta k = 0$, эти члены можно заменить членом $k(xy, z, t)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \beta(x)\beta(y)[z, t] &= f(x, y) + k(xy, z, t) + f(xy, z) + f(xyz, t) - \\ &- f(xy, zt) - f(x, y) = f(x, y) + \beta(xy)[z, t] - f(x, y) = \\ &= \mu[f(x, y)]\beta(xy)[z, t]. \end{aligned}$$

Этим равенство (9.2) доказано.

Мы утверждаем, что каждый эндоморфизм $\beta(x)$ является автоморфизмом в G. В самом деле из (9.2) следует, что $\beta(x)\beta(x^{-1}) = \mu[f(x, x^{-1})]\beta(1) = \mu[f(x, x^{-1})]$ — внутренний автоморфизм. Следовательно, ядро $\beta(x^{-1})$ равно 0, а образ $\beta(x)$ равен G. Так как элемент x произволен, то мы и получаем наше утверждение.

Обозначим через $\psi(x)$ класс автоморфизмов, содержащий $\beta(x)$. По (9.2) ψ — это гомоморфизм $\psi: \Pi \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{In} G$, значит, (Π, G, ψ)—абстрактное ядро. Поскольку группа Π отлична от циклической группы порядка 2, мы можем считать, что в Π имеется более чем два элемента. Тогда свободная группа F имеет более одного образующего, и поэтому без центра, так что группа C в точности совпадает с центром группы $G = C \times F$. Но наше построение было задумано так, чтобы получить k как препятствие для данного ядра. Тем самым теорема доказана.

Нами установлено соответствие между абстрактными ядрами с центром C и группой $H^3(\Pi, C)$. Это соответствие можно преобразовать таким образом, чтобы получился групповой изоморфизм. Сначала надо определить отношение подобия между абстрактными ядрами: два ядра подобны тогда и только тогда, когда они имеют общее препятствие. Относительно подходящего произведения ядер группа классов подобия ядер (Π, G, ψ) с фиксированной группой Π и фиксированным Π-модулем C в качестве центра становится изоморфной группе $H^3(\Pi, C)$. Подробности даны в работе Эйленберга и Маклейна [1947].

Какая-либо разумная аналогичная интерпретация групп $H^4(\Pi, C)$ или групп когомологий более высоких размерностей неизвестна.

§ 10. Теорема Шура

Теперь мы применим системы факторов к одной задаче теории групп.

Для любого множества S совокупность $\operatorname{Aut} S$ всех взаимно однозначных отображений S на себя является группой относительно умножения отображений. Говорят, что (мультипликативная) группа G *действует* на множестве S, если задан гомоморфизм $\mu: G \to \operatorname{Aut} S$. Эквивалентно, для каждого элемента $g \in G$ и каждой «точки» $s \in S$ однозначно определена точка $gs = \mu(g)s \in S$, причем $(g_1g_2)s = g_1(g_2s)$ и $1s = s$. *Траекторией* точки $s_0 \in S$ относительно действия группы G называется множество всех точек gs_0, где $g \in G$; любая другая точка в этом подмножестве имеет ту же траекторию. Все множество S является объединением попарно непересекающихся траекторий. Множество всех элементов $h \in G$, для которых $hs_0 = s_0$, есть подгруппа H, называемая группой *фиксирующей* s_0. Соответствие $gH \to gs_0$ является взаимно однозначным отображением левых смежных классов G по H на траекторию точки s_0. По определению число таких смежных классов — это индекс $[G : H]$ подгруппы H; если индекс конечен, то, следовательно, конечно число точек траектории. Значит, когда конечная группа G действует на множестве S, число точек в каждой траектории является делителем порядка группы G.

Возьмем за S множество всех подгрупп U данной группы G. Соответствие $U \to gUg^{-1}$ определяет действие G на S; говорят, что *G действует на S с помощью трансформирования.* Аналогичным образом группа G (или любая ее подгруппа) действует с помощью сопряжения на множестве элементов этой группы.

Теорема 10.1. (*Теорема Коши.*) *Если порядок n конечной группы G делится на простое число p, то G содержит элемент порядка p.*

Доказательство проводится индукцией по n. Пусть G действует на множестве своих элементов с помощью сопряжения. Траектория элемента c состоит только из c в том случае, когда $gcg^{-1} = c$ для всех $g \in G$, т. е. тогда, когда c лежит в центре C группы G. Пусть m обозначает порядок подгруппы C, а $k_i > 1$ — число точек в i-й траектории, не лежащей в C, $i = 1, \ldots, t$. Поскольку G есть объединение непересекающихся между собой траекторий, имеем $n = m + k_1 + \ldots + k_t$.

Если m делится на p, то представим абелеву группу C как прямую сумму циклических групп; тогда одно из слагаемых имеет порядок, который делится на p и поэтому содержит элемент порядка p. С другой стороны, если m и p взаимно просты, то хотя бы одно из чисел k_i также взаимно просто с p. Но k_i — это число точек некоторой траектории и, значит, равно индексу $[G : H]$ некоторой подгруппы. Поскольку p не делит k_i, порядок подгруппы H делится на p. По индуктивному предположению в H содержится элемент порядка p.

Группа называется p-группой, если порядок каждого элемента является степенью простого числа p. По теореме Коши конечные p-группы можно также описать как группы, порядок которых есть степень простого числа p.

Теорема 10.2. *Любая конечная p-группа $\neq 1$ имеет центр $C \neq 1$.*

Доказательство. Пусть p-группа действует с помощью сопряжения на множестве своих элементов. Каждая траектория состоит из p^{m_i} точек для некоторого показателя $m_i \geqslant 0$; вместе во всех траекториях имеется p^n элементов группы. Поскольку траектория 1 состоит только из 1, $p^n = 1 + \Sigma p^{m_i}$. Следовательно, по крайней мере еще $p - 1$ траекторий состоят только из одного элемента c. Эти элементы лежат в центре C, и поэтому $C \neq 1$.

Максимальная p-подгруппа — это p-группа $P \subset C$, которая не содержится ни в какой большей p-подгруппе группы G. В силу теоремы Коши конечная группа порядка n имеет по крайней мере одну максимальную p-подгруппу $\neq 1$ для каждого простого делителя p числа n.

Говорят, что подгруппа U группы G ***нормализует*** подгруппу V, если $uVu^{-1} = V$ для всех $u \in U$, т. е. если V — одноточечная траектория при действии U на подгруппы из G.

Лемма 10.3. *Если P и Q — максимальные p-подгруппы в G и P нормализует Q, то $P = Q$.*

Доказательство. Пусть PQ обозначает подгруппу из G, порожденную P и Q. Поскольку P нормализует Q, то Q является нормальным делителем в PQ. Поскольку P является p-группой, то и факторгруппа $P/P \cap Q \cong PQ/Q$ является p-группой. Значит, группа PQ есть расширение p-группы Q с помощью p-группы $P/P \cap Q$ и, значит, сама является p-группой. Так как P не содержится ни в какой большей p-подгруппе, то $P = PQ$, откуда $P \supset Q$. Так как Q не содержится в большей p-подгруппе, то $P = Q$.

Любая подгруппа, сопряженная с максимальной p-подгруппой, сама является максимальной p-подгруппой. Более того, имеет место

Теорема 10.4. *Любые две максимальные p-подгруппы конечной группы сопряжены.*

Доказательство. Пусть S — множество всех подгрупп, сопряженных в G, с некоторой максимальной p-подгруппой P, и пусть P действует на S с помощью сопряжения. По лемме точка $P' \in S$ является одноточечной траекторией только тогда, когда $P' = P$. Число точек в любой другой траектории является индексом подгруппы из P и поэтому делится на p. Следовательно, число точек в S сравнимо с 1 по модулю p.

Любая максимальная p-подгруппа $Q \in G$ действует на S с помощью сопряжения. При этом действии каждая траектория имеет или одну точку, или число точек делится на p. Установленное выше сравнение показывает, что существует одноточечная траектория P'. Другими словами, Q нормализует некоторую подгруппу P', сопряженную с P, так что по лемме $Q = P'$ и сама сопряжена с P.

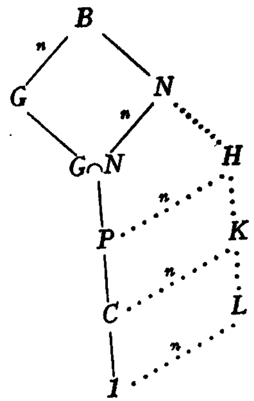
Теорема 10.5. (*Теорема Шура — Цассенхауза.*) *Если целые числа m и n взаимно просты, то любое расширение группы порядка m с помощью группы порядка n расщепляется.*

Доказательство. Пусть $G \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} \Pi$ — такое групповое расширение, в котором G имеет порядок m, а Π — порядок n. Это расширение расщепляется, если для σ есть правый обратный, т. е. если B содержит подгруппу (также порядка n), которая отображается изоморфно на Π эпиморфизмом σ.

Предположим сначала, что группа G абелева. Тогда данное расширение есть элемент $e \in H^2(\Pi, G)$. По предложению 5.3 $ne = 0$; очевидно, что $me = 0$. Поскольку m и n взаимно просты, $e = 0$, поэтому расширение расщепляется.

Для неабелевой группы G доказательство проводится индукцией по порядку m группы G. Достаточно доказать, что расширение B содержит подгруппу порядка n, так как такая подгруппа отобразится при гомоморфизме $B \twoheadrightarrow \Pi$ на Π изоморфно.

Возьмем простое число p, делящее m, и максимальную p-подгруппу P в B. Нормализатор N подгруппы P определяется как множество всех элементов b, для которых $bPb^{-1} = P$. Индекс $[B : N]$ показывает тогда число подгрупп, сопряженных с P в группе B. Все эти сопряженные подгруппы должны лежать в G и являются там максимальными p-подгруппами. По теореме 10.4 они все сопряжены в G. Пересечение $G \cap N$ является нормализатором P в G, поэтому индекс $[G : G \cap N]$ равен числу подгрупп, сопряженных с P, и, следовательно, равен $[B : N]$. Это равенство индексов (см. диаграмму) доказывает, что $n = [B : G] = [N : G \cap N]$.



Теперь P и $G \cap N$ — нормальные делители в N, а факторгруппа N/P является расширением группы $(G \cap N)/P$, порядок которой является собственным делителем числа m, при помощи группы $N/G \cap N$ порядка n. По предположению индукции в N/Pсодержится подгруппа порядка n, которую можно представить в виде H/P для некоторого H, где $P \subset H \subset N$ и $[H : P] = n$. Центр C

группы P по теореме 10.2 отличен от 1. При трансформировании элементами из $H \subset N$ группа P, а следовательно и C, отображаются на себя, так что C и P — нормальные делители в H. Значит, H/C есть расширение p-группы P/C с помощью группы H/P порядка n, взаимно простого с p. Поскольку $C \neq 1$, порядок группы P/C меньше m; по предположению индукции существует подгруппа $K/C \subset H/C$ порядка n. Эта группа K есть расширение абелевой p-группы C при помощи группы K/C порядка n и, значит, расщепляется, так как для абелева случая утверждение уже доказано. Это расщепление выделяет подгруппу $L \subset K$ порядка n, которая расщепляет также исходное расширение B.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Первая теорема Силова.) Если порядок конечной группы G делится на степень p^k простого числа p, то в G имеется подгруппа порядка p^k.

2. Если p^n — наибольшая степень p, делящая порядок группы G, то каждая максимальная p-подгруппа из G имеет порядок p^n.

3. Пусть порядок конечной группы Π взаимно прост с порядком конечной абелевой группы A. Показать, что $H^n(\Pi, A) = 0$ для $n > 0$ и любой Π-модульной структуры в A.

4. Пусть $\sigma: B \twoheadrightarrow \Pi$ — расширение абелевой группы G порядка m с помощью группы Π порядка n, причем $(n, m) = 1$, как в теореме Шура — Цассенхауза. Если S и T — две подгруппы из B, изоморфно отображающиеся на Π при отображении σ, то можно показать, что S и T сопряжены с помощью элемента из G (использовать равенство $H^1(\Pi, G) = 0$).

§ 11. Пространства с операторами

Проиллюстрируем геометрический смысл групп когомологий группы исследованием пространств с операторами.

Для произвольного топологического пространства X обозначим через $\operatorname{Aut}(X)$ группу всех гомеоморфизмов X с самим собой. Группа Π *действует* на пространстве X, если задан гомоморфизм $\mu: \Pi \to \operatorname{Aut}(X)$. Эквивалентно, каждому элементу $a \in \Pi$ и каждой точке $x \in X$ однозначно сопоставлена точка $ax = \mu(a)\,x \in X$ таким образом, что отображение ax непрерывно по x при каждом фиксированном a и $(a_1a_2)\,x = a_1(a_2x)$, $1x = x$. Открытое множество U из X называется *собственным* (относительно действия Π), если $aU \cap U = \varnothing$ (пустое множество) для всякого $a \neq 1$. Любое открытое подмножество собственного множества собственно. Говорят, что группа Π действует *собственным образом*, если каждая точка из X содержится в собственном открытом множестве; тогда каждое открытое множество в X является объединением собственных открытых множеств, так что собственные открытые множества образуют базу топологии пространства X. Если Π действует собственным образом, то ни один гомеоморфизм $\mu(a)$ с $a \neq 1$ не оставляет на месте ни одной точки x.

Предположим теперь, что Π действует собственным образом на X. *Факторпространство* X/Π — это пространство, точками которого служат траектории точек из X при действии группы Π. Пусть проекция $p: X \to X/\Pi$ — это отображение, сопоставляющее каждой точке x ее траекторию px. Значит, $px_1 = px_2$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in \Pi$, что $ax_1 = x_2$. Топология в X/Π определяется выбором множеств pU в качестве базы открытых множеств, где U — собственное открытое множество из X относительно Π; множества $V = pU$ называются *собственными* в X/Π.

Предложение 11.1. *Отображение $p: X \to X/\Pi$ непрерывно. Пространство X/Π покрыто собственными открытыми множествами V; каждое множество $p^{-1}V$ есть объединение таких попарно непересекающихся открытых множеств U_α, для которых ограничение $p \mid U_\alpha$ является гомеоморфизмом $U_\alpha \cong V$.* ∎

Это предложение утверждает, что X есть «накрывающее пространство» для X/Π относительно отображения p. U_α при этом являются *листами* пространства X над V.

Доказательство. Если U — собственное множество и $V = pU$, то $p^{-1}V$ является объединением множеств aU для $a \in \Pi$. Эти множества попарно не пересекаются в силу того, что U собственно. Каждое множество aU отображается на V при отображении p, причем все эти множества собственны и отображаются на собственные множества в X/Π, так что $p \mid aU$, действительно, гомеоморфизм.

Например, пусть X — действительная прямая E^1, а Π — бесконечная (мультипликативная) циклическая группа с образующим c, действующая на E^1 по правилу $c^kx = x + k$ для любого целого k. Тогда открытые интервалы на прямой длины, меньшей чем 1, являются собственными открытыми множествами, так что Π действует собственным образом. Факторпространство E^1/Π гомеоморфно единичной окружности S^1. Если мы отождествим E^1/Π с S^1, то отображение $p: E^1 \to S^1$ принимает вид $px = e^{2\pi ix}$ и накручивает прямую E^1 на окружность S^1. Аналогично свободная абелева группа с двумя образующими b и c собственно действует на евклидовой плоскости E^2 по правилу $b^kc^l(x, y) = (x + k, y + l)$; здесь b — это горизонтальный сдвиг, а c — вертикальный сдвиг на одну и ту же единицу. Факторпространство E^2/Π — это двумерный тор $S^1 \times S^1$. Далее, циклическая группа порядка 2 собственно действует на двумерной сфере S^2, отображая каждую точку в диаметрально противоположную; при этом S^2/Π — действительная проективная плоскость. Во всех этих случаях X — «универсальное накрывающее пространство» пространства X/Π, а Π —«фундаментальная группа» X/Π (Ху Сы-Цзян [1959]).

Теперь рассмотрим сингулярную гомологию пространства X, определенную в гл. II.

Лемма 11.2. *Если группа* Π *действует собственным образом на пространстве* X, *то сингулярный комплекс* $S(X)$ *является комплексом свободных* Π-*модулей.*

Доказательство. Группа $S_n(X)$ n-мерных цепей — это свободная абелева группа, порожденная сингулярными n-мерными симплексами $T:\Delta^n \to X$. Для каждого $a \in \Pi$ произведение aT также является сингулярным n-мерным симплексом; операторы $T \to aT$ превращают $S_n(X)$ в Π-модуль. Если d_iT есть i-я грань симплекса T, то $a(d_iT) = d_i(aT)$, следовательно, $\partial = \Sigma(-1)^i d_i: S_n \to S_{n-1}$ есть Π-модульный гомоморфизм. Значит, $S(X)$ — комплекс Π-модулей. Для доказательства того, что модуль $S_n(X)$ свободен, выберем некоторое подмножество $X_0 \subset X$ («фундаментальная область»), содержащее ровно по одному элементу из каждой траектории пространства X относительно действия Π. Тогда те сингулярные n-мерные симплексы T, первая вершина которых принадлежит X_0, образуют множество свободных образующих для $S_n(X)$ как модуля.

Лемма 11.3. *Если группа* Π *действует собственным образом на пространстве* X, *то любой симплекс* $T:\Delta^n \to X/\Pi$ *можно представить в виде* $T = pT'$, *где* $T':\Delta^n \to X$. *При подходящем выборе для каждого* T *одного* T' *симплексы* T' *образуют множество свободных образующих в* $S_n(X)$ *как в* Π-*модуле.*

Мы будем говорить, что T можно накрыть отображением T'; возможность такого накрытия в действительности вытекает из более общего факта накрытия отображений в накрывающем пространстве.

Доказательство. Если симплекс T «мал», т. е. $T(\Delta^n)$ содержится в собственном открытом подмножестве V из X/Π, и если U — произвольный лист над V, то T накрывается отображением $T' = (p \mid U)^{-1} T$ в U. Общий случай может быть сведен к рассмотренному разбиением Δ^n на малые куски и последовательным накрытием T на этих кусках. Технически проще сделать это, заменив Δ^n на n-мерный куб $I^n = I \times \ldots \times I$ (n множителей), где I — единичный интервал. Поскольку Δ^n и I^n гомеоморфны, достаточно накрыть отображение $T: I^n \to X/\Pi$. Куб I^n покрывается прообразами $T^{-1}(V)$ собственных открытых множеств из X/Π. Поскольку I^n — компактное метрическое пространство, по лемме Лебега существует такое действительное $\varepsilon > 0$, что каждое подмножество

с диаметром, меньшим чем ε, лежит в одном из $T^{-1}(V)$. Теперь разобьем I^n на конгруэнтные n-мерные кубы с диаметром, меньшим ε, и ребрами, параллельными осям. Тогда T можно последовательно накрыть на кубах этого разбиения, начиная с кубов, лежащих на нижнем основании. Когда приходится накрывать T на одном из кубов, то непрерывное накрытие T' оказывается определенным на некотором связном множестве граней этого куба, целиком содержащемся внутри одного листа U над некоторым собственным множеством V; на остатке куба T накрывается тогда при помощи $(p \mid U)^{-1}$. Этим доказательство закончено.

Предложение 11.4. *Если группа* Π *действует собственным образом на пространстве* X, *а абелева группа* A *имеет тривиальную* Π-*модульную структуру, то отображение* $p: X \to X/\Pi$ *индуцирует изоморфизм* $p^*: \mathrm{Hom}_Z(S(X/\Pi), A) \cong \mathrm{Hom}_\Pi(S(X), A)$ *цепных комплексов и, следовательно, изоморфизм*

$$p^*: H^n(X/\Pi, A) \cong H^n(\mathrm{Hom}_\Pi(S(X), A)). \tag{11.1}$$

Доказательство. Коцепь $f: S_n(X/\Pi) \to A$ однозначно определяется своими значениями на n-мерных симплексах T из X/Π, в то время как коцепь f' из $S(X)$, будучи модульным гомоморфизмом $f': S_n(X) \to A$, однозначно определяется значениями на свободных образующих T' модуля $S_n(X)$. Поскольку эти образующие находятся во взаимно однозначном соответствии $T' \to pT'$ с образующими модуля $S(X/\Pi)$ в силу леммы 11.3 и поскольку $(p^*f)T' = f(pT')$, утверждение доказано.

Вообще, если A — произвольный Π-модуль, то группы когомологий комплекса $\mathrm{Hom}_\Pi(S(X), A)$ известны как группы *эквивариантных когомологий* пространства X с коэффициентами из A; в этой общей ситуации теорема остается верной, если $H^n(X/\Pi, A)$ интерпретировать как группу когомологий пространства X/Π с «локальными коэффициентами» из A, определенными так, как это было сделано Эйленбергом [1947] и Эйленбергом и Маклейном [1949]. Теперь мы докажем основной результат.

Теорема 11.5. *Если группа* Π *действует собственным образом на ацикличном пространстве* X *и если* A — *абелева группа с тривиальной* Π-*модульной структурой, то существует изоморфизм*

$$H^n(X/\Pi, A) \cong H^n(\Pi, A), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{11.2}$$

естественный по аргументу A, *между группами когомологий факторпространства* X/Π *и группами когомологий группы* Π.

Доказательство. Предположение об ацикличности пространства X означает, что $H_n(S(X)) = 0$ для $n > 0$ и $H_0(S(X)) \cong Z$. Последний изоморфизм порождает эпиморфизм $S_0(X) \to Z$

с ядром $\partial S_1(X)$. Значит, точная последовательность П-модулей

$$\ldots \to S_1(X) \to S_0(X) \to Z \to 0$$

является свободной резольвентой тривиального модуля Z. Следовательно, эквивариантные группы когомологий для $S(X)$ равны $\mathrm{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z,A)$, а в силу следствия 5.2 и $H^n(\Pi, A)$.

Система (X, Π), состоящая из топологического пространства с собственной группой операторов Π, может рассматриваться как объект категории, морфизмами $\rho: (X,\Pi) \to (X',\Pi')$ которой являются пары $\rho = (\xi, \gamma)$, где $\xi: X \to X'$ — непрерывное отображение, а $\gamma: \Pi \to \Pi'$ — групповой гомоморфизм, причем для всех $x \in X$ и $a \in \Pi$ выполняется $\xi(ax) = (\gamma a)\,\xi x$. Изоморфизм (11.2) естествен относительно этих отображений.

Эта теорема дает геометрическую интерпретацию для всех групп когомологий группы Π. Предположим известными некоторые понятия теории гомотопий. Пусть Y — линейно связное топологическое пространство с фундаментальной группой $\Pi = \pi_1(Y)$. Тогда, если Y имеет соответствующую локальную связность, то можно построить универсальное накрывающее пространство; это пространство, в котором группа Π действует собственно таким образом, что Y гомеоморфно X/Π. Предположим, что Y асферично (т. е. все высшие группы гомотопий исчезают). Тогда можно доказать, что универсальное накрывающее пространство ациклично. С помощью теоремы 11.5 убеждаемся в том, что группы когомологий асферичного пространства Y в действительности изоморфны группам когомологий фундаментальной группы пространства Y.

Замечания. Тот факт, что когомологии асферичного пространства Y зависят только от фундаментальной группы, был доказан Гуревичем [1935], а выражение этой зависимости с точки зрения когомологий групп было установлено Эйленбергом и Маклейном [1943, 1945b] и независимо позднее Экманом [1945—1946]. Имеется соответствующий результат, выражающий гомологии пространства Y через гомологии группы Π, найденный Хопфом [1945] и независимо от него Фрейденталем [1946]. Все эти исследования были стимулированы работой Хопфа [1942] о влиянии фундаментальной группы на вторую группу гомологий пространства. Это направление исследований послужило толчком для изучения групп когомологий всех размерностей и явилось исходным пунктом гомологической алгебры. Одномерные группы когомологий (скрещенные гомоморфизмы) были известны давно; двумерные группы когомологий в облике систем факторов появились также достаточно давно при изучении расширений групп Шрейером [1926], Бэром [1934, 1935], Холлом [1938] и Фиттингом [1938]. Ранее Шур рассматривал проективные представления ρ группы Π. Каждое представление ρ есть гомоморфизм Π в группу проективных коллинеаций комплексного проективного n-мерного пространства и, следовательно, может быть представлено как множество $(n+1)\times(n+1)$ невырожденных комплексных матриц A_x для $x \in \Pi$, причем $A_xA_y = f(x, y)\,A_{xy}$, где $f(x, y)$ — комплексное число, отличное от нуля. Эти числа f образуют систему факторов для Π в мультипликативной группе C^* комплексных чисел, отличных от нуля. Поэтому «мультипликатор» Шура — это группа когомологий $H^2(\Pi,C^*)$ с тривиальной Π-модульной структурой в C^*. (Из современной литературы см. Асано — Сёда [1935], Фрухт [1955], Кохендёрфер [1956].)

Проективные представления бесконечных групп изучались Макки [1958]. Трехмерные группы когомологий группы впервые рассматривались Тейхмюллером [1940] при изучении простых алгебр над числовым полем. Когомологии групп широко применялись в теории полей классов: Хохшильд [1950], Тэйт [1952], Артин — Тэйт [1960].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что множество V тогда и только тогда открыто в X/Π, когда $p^{-1}V$ открыто в X. (Это означает, что X/Π имеет стандартную топологию «факторпространства».)

2. Построить в явном виде гомеоморфизм между Δ^n и I^n.

ГЛАВА V

Тензорное и периодическое умножения

§ 1. Тензорные произведения

Пусть G — правый R-модуль, а A — левый R-модуль; эту ситуацию мы будем отмечать как G_R, ${}_RA$. *Тензорным произведением* $G \otimes_R A$ этих модулей называется абелева группа, порожденная символами $g \otimes a$, где $g \in G$, $a \in A$, связанными соотношениями

$$(g+g') \otimes a = g \otimes a + g' \otimes a, \quad g \otimes (a+a') = g \otimes a + g \otimes a', \quad (1.1)$$

$$gr \otimes a = g \otimes ra, \quad a \in A, \quad r \in R, \quad g \in G. \quad (1.2)$$

Более формально, это определение описывает группу $G \otimes_R A$ как факторгруппу $(G \circ A)/S$, где $G \circ A$ — свободная абелева группа, образующими которой служат все символы $g \circ a$, а S — подгруппа группы $G \circ A$, порожденная всеми элементами вида $(g+g') \circ a - g \circ a - g' \circ a$, $g \circ (a + a') - g \circ a - g \circ a'$ и $gr \circ a - g \circ ra$. Тогда символ $g \otimes a$ обозначает смежный класс $(g \circ a) + S$ из $(G \circ A)/S$.

Замысел этого построения состоит в том, что в группе $G \otimes_R A$ каждый элемент из A можно «умножить» на любой элемент из G и получить «произведение» $g \otimes a$; при этом желательно, чтобы произведение было дистрибутивным в смысле (1.1) и ассоциативным в смысле (1.2). Более точно, пусть $G \times A$ — прямое произведение множеств G и A, а M — произвольная абелева группа. Назовем функцию f из $G \times A$ в M *биаддитивной*, если тождественно имеют место соотношения

$$f(g+g', a) = f(g, a) + f(g', a), \quad f(g, a+a') = f(g, a) + f(g, a'); \quad (1.3)$$

назовем функцию *внутренне ассоциативной*, если всегда

$$f(gr, a) = f(g, ra). \quad (1.4)$$

Если функция f удовлетворяет обоим условиям, то назовем ее *внутренне линейной*. Тогда функция $g \otimes a$ внутренне линейна по определению, а группа $G \otimes_R A$ является универсальной областью

определения для любой внутренне линейной функции f в следующем смысле.

Теорема 1.1. *Если даны модули G_R и ${}_RA$ и внутренне линейная функция f из $G \times A$ в абелеву группу M, то существует единственный гомоморфизм $\omega : G \otimes_R A \to M$ абелевых групп, для которого $\omega(g \otimes a) = f(g, a)$.*

Доказательство. Формула $\omega(g \otimes a) = f(g, a)$ определяет ω на образующих группы $G \otimes_R A$; из предположения о внутренней линейности f следует, что ω «сохраняет» соотношения (1.1) и (1.2), определяющие группу $G \otimes_R A$. Следовательно, ω — гомоморфизм и притом, очевидно, единственный, обладающий нужными свойствами. Это доказательство есть сокращенное изложение следующего рассуждения: поскольку $G \circ A$ — свободная абелева группа с образующими $g \circ a$, существует единственный гомоморфизм $\omega' : G \circ A \to M$, для которого $\omega'(g \circ a) = f(g, a)$. Предположения о f показывают, что ω' отображает подгруппу S в нуль. Следовательно, ω' разлагается в произведение $G \circ A \to (G \circ A)/S \to M$; второй множитель этого разложения и есть искомый гомоморфизм ω.

Эта теорема имеет много приложений. Во-первых, она дает универсальное свойство группы $M_0 = G \otimes_R A$, которое однозначно (с точностью до изоморфизма M_0) характеризует эту группу и внутренне линейную функцию $\otimes : G \times A \to M_0$. Поэтому эта теорема может рассматриваться как аксиоматическое определение тензорного произведения. Во-вторых, эта теорема утверждает, что всякая внутренне линейная функция f может быть получена из одной такой функции $\otimes$ при помощи умножения на групповой гомоморфизм ω; в этом смысле теорема сводит внутренне линейные функции к гомоморфизмам. Наконец, теорема утверждает, что гомоморфизм ω с областью определения $G \otimes_R A$ однозначно определяется заданием образов символов $g \otimes a$ относительно ω при условии, что эти образы аддитивны по g и a и внутренне ассоциативны относительно элементов из R.

Последнее утверждение мы будем постоянно использовать при построении отображений ω.

Например, если $\gamma: G_R \to G'_R$ и $\alpha: {}_RA \to {}_RA'$ суть R-модульные гомоморфизмы, то в группе $G' \otimes_R A'$ можно образовать элементы $\gamma g \otimes \alpha a$, причем они будут внутренне ассоциативны и аддитивны по $g \in G$ и $a \in A$. Следовательно, существует гомоморфизм $\gamma \otimes \alpha : G \otimes_R A \to G' \otimes_R A'$, такой, что $(\gamma \otimes \alpha)(g \otimes a) = \gamma g \otimes \alpha a$. Очевидно, что $1_G \otimes 1_A = 1$ и что для согласованных отображений $\gamma\gamma' \otimes \alpha\alpha' = (\gamma \otimes \alpha)(\gamma' \otimes \alpha')$, значит, $G \otimes_R A$ — ковариантный бифунктор от аргументов A и G. Кроме того,

$$\gamma \otimes (\alpha + \beta) = \gamma \otimes \alpha + \gamma \otimes \beta, \quad (\gamma_1 + \gamma_2) \otimes \alpha = \gamma_1 \otimes \alpha + \gamma_2 \otimes \alpha. \quad (1.5)$$

Эти равенства можно применить к диаграмме прямой суммы и получить изоморфизм

$$\zeta : G \otimes_R (A \oplus B) \cong (G \otimes_R A) \oplus (G \otimes_R B). \tag{1.6}$$

С другой стороны, поскольку отображение $(g \otimes a,\ g \otimes b)$ внутренне линейно по g и (a, b), мы можем построить изоморфизм ζ непосредственно с помощью теоремы 1.1 как такой гомоморфизм $\zeta : G \otimes_R (A \oplus B) \to (G \otimes_R A) \oplus (G \otimes_R B)$, что $\zeta\,[g \otimes (a, b)] = (g \otimes a,\ g \otimes b)$; ζ^{-1} можно построить, используя отображения $g \otimes a \to g \otimes (a, 0)$ и $g \otimes b \to g \otimes (0, b)$.

Кольцо R можно рассматривать или как левый, или как правый модуль над самим собой. Для модулей G_R и $_RA$ имеются изоморфизмы (абелевых групп)

$$G \otimes_R R \cong G, \quad R \otimes_R A \cong A, \tag{1.7}$$

которые задаются отображениями $g \otimes r \to gr$, $r \otimes a \to ra$.

Если $\rho: S \to R$ — кольцевой гомоморфизм, то каждый правый R-модуль G становится правым S-модулем G_ρ при следующем определении действия операторов: $gs = g(\rho s)$. Аналогично каждый левый R-модуль A становится левым S-модулем $_\rho A$; это «отступление вдоль ρ», определенное в III.6. Если $\rho': T \to S$ — второй кольцевой гомоморфизм, то $G_{(\rho\rho')} = (G_\rho)_{\rho'}$, а $_{(\rho\rho')}A = {}_{\rho'}({}_\rho A)$, т. е. в обратном порядке.

Лемма 1.2. (*Лемма об отступлении.*) *Для любого кольцевого гомоморфизма $\rho : S \to R$ и модулей G_R, $_RA$, $_RC$ существуют естественные гомоморфизмы*

$$\rho_\# : (G_\rho) \otimes_S ({}_\rho A) \to G \otimes_R A, \qquad \rho^\# : \mathrm{Hom}_R(C, A) \to \mathrm{Hom}_S({}_\rho C, {}_\rho A). \tag{1.8}$$

Если ρ — эпиморфизм, то оба гомоморфизма $\rho_\#$ и $\rho^\#$ являются изоморфизмами.

Доказательство. Для любых элементов $g \in G$, $a \in A$, $s \in S$

$$gs \otimes_R a = g\rho(s) \otimes_R a = g \otimes_R \rho(s)\,a = g \otimes_R sa,$$

так что функция $g \otimes_R a$ внутренне S-ассоциативна. Поэтому по теореме 1.1 отображение $\rho_\#(g \otimes_S a) = g \otimes_R a$ определяет гомоморфизм. Если $\rho(R) = S$, то для $\rho_\#$ имеется обратное отображение $g \otimes_R a \to g \otimes_S a$. Аналогично каждый R-модульный гомоморфизм $f: C \to A$ является S-модульным гомоморфизмом и обратно, если $\rho(S) = R$.

Как правило, мы не будем писать индекс ρ у модулей G_ρ, $_\rho A$, если он подразумевается в $G \otimes_S A$.

Абелева группа A является модулем над кольцом целых чисел Z, поэтому наше определение тензорного произведения включает в себя определение тензорного произведения $G \otimes A$ двух абелевых групп (здесь знак $\otimes$ стоит вместо $\otimes_Z$). В этом случае любая биаддитивная функция $f(g, a)$ автоматически внутренне ассоциативна, потому что для любого натурального числа m

$$f(mg, a) = f(g + \cdots + g, a) = f(g, a) + \cdots + f(g, a) =$$
$$= f(g, a + \cdots + a) = f(g, ma).$$

Это равенство выполняется также и для отрицательных m, поскольку $f(-g, a) = -f(g, a) = f(g, -a)$. Следовательно, условие внутренней ассоциативности (1.2) можно в определении $\otimes_Z$ опустить.

Тензорное произведение конечных абелевых групп можно точно вычислить. Для каждого положительного целого числа m обозначим через $Z_m(g_0)$ циклическую группу с образующим g_0 порядка m, а через mA обозначим подгруппу группы A, которая состоит из всех кратных ma элементов $a \in A$. Мы утверждаем, что изоморфизм

$$\eta: A/mA \cong Z_m(g_0) \otimes A \tag{1.9}$$

можно задать, положив $\eta(a + mA) = g_0 \otimes a$. Действительно, поскольку $g_0 \otimes ma = mg_0 \otimes a = 0$, произведение $g_0 \otimes a$ зависит только от смежного класса элемента a по подгруппе mA, следовательно, η — гомоморфизм $A/mA \to Z_m \otimes A$. Для построения гомоморфизма, обратного к η, заметим, что любой образующий тензорного произведения имеет вид $kg_0 \otimes a$ для некоторого $k \in Z$; поскольку произведение ka дистрибутивно по обоим множителям, формула $\psi(kg_0 \otimes a) = ka + mA$ определяет гомоморфизм, направленный справа налево в (1.9). Очевидно, что $\psi\eta = 1$, в то время как $\eta\psi(kg_0 \otimes a) = g_0 \otimes ka = kg_0 \otimes a$, так что и $\eta\psi = 1$. Значит, η и ψ — взаимно обратные изоморфизмы, что и доказывает (1.9).

Ввиду (1.7) имеется также изоморфизм $Z \otimes A \cong A$. Поскольку любая конечно порожденная абелева группа является прямой суммой циклических групп Z и Z_m, эти формулы вместе с (1.6) дают способ вычисления $G \otimes A$, где G — конечно порожденная группа. Отметим также, что $G \otimes A \cong A \otimes G$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что $Z_m \otimes Z_n \cong Z_{(m, n)}$, где (m, n) — наибольший общий делитель m и n.

2. Показать, что $G \otimes_R \sum A_t \cong \sum G \otimes_R A_t$.

3. Показать, что тензорное произведение двух свободных модулей есть свободная абелева группа.

4. Если Q — аддитивная группа рациональных чисел, то показать, что $Q \otimes Q \cong Q$.

§ 2. Модули над коммутативными кольцами

Значение тензорных произведений можно показать, разобрав несколько других частных случаев. Если $\mathbf{K}$ — коммутативное кольцо (как обычно, с единицей), то любой левый $\mathbf{K}$-модуль A можно рассматривать и как правый $\mathbf{K}$-модуль; просто считая по определению кратные ak, где $k \in \mathbf{K}$, равными ka. Равенство $a(kk') = (ak)k'$ выполнено в силу коммутативности кольца $\mathbf{K}$: $a(kk') = (k'k)a = k'(ka) = (ak)k'$; остальные аксиомы из определения правого модуля устанавливаются еще более непосредственно. Ввиду этого замечания бесполезно делать различие между левыми и правыми модулями над $\mathbf{K}$; вместо этого мы будем просто говорить о *модулях* и писать скалярные множители с той стороны, с какой будет удобнее.

Тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ модулей A и B над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ является не только абелевой группой, но даже $\mathbf{K}$-модулем, если умножение на элементы из $\mathbf{K}$ (для образующих) определить следующим образом:

$$k(a \otimes b) = (ka) \otimes b \quad (\text{или} = a \otimes kb). \tag{2.1}$$

Это определение приводит к видоизменению теоремы 1.1. Пусть A, B и M являются $\mathbf{K}$-модулями. Назовем функцию f, определенную на $A \times B$ со значениями в M, *$\mathbf{K}$-билинейной*, если $f(a, b)$ есть $\mathbf{K}$-линейная функция каждого аргумента при фиксированном другом аргументе (т. е. $f(k_1a_1 + k_2a_2, b) = k_1f(a_1, b) + k_2f(a_2, b)$). Значит, $a \otimes b$ — это *$\mathbf{K}$-билинейная* функция из $A \times B$ в $A \otimes_{\mathbf{K}} B$, и из теоремы 1.1 следует, что любая $\mathbf{K}$-билинейная функция f из $A \times B$ в M может быть записана в виде $f(a, b) = \omega(a \otimes b)$, где ω — однозначно определенный гомоморфизм $\mathbf{K}$-модулей $\omega : A \otimes_{\mathbf{K}} B \to M$.

Поскольку тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ также является $\mathbf{K}$-модулем, можно образовать итерированное тензорное произведение типа $(A \otimes_{\mathbf{K}} B) \otimes_{\mathbf{K}} C$; это итерированное произведение ассоциативно и коммутативно в том смысле, что отображения $\xi[(a \otimes b) \otimes c] = a \otimes (b \otimes c)$ и $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ определяют естественные изоморфизмы

$$\xi : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C), \quad \tau : A \otimes B \cong B \otimes A \tag{2.2}$$

$\mathbf{K}$-модулей; где $\otimes$ есть сокращение для $\otimes_{\mathbf{K}}$. Функция $(a \otimes b) \otimes c$ будет *$\mathbf{K}$-трилинейна* (т. е. $\mathbf{K}$-линейна по каждому аргументу в отдельности) и универсальна среди всех $\mathbf{K}$-трилинейных функций, определенных в $A \times B \times C$ со значениями в $\mathbf{K}$-модулях. То же самое верно для $\mathbf{K}$-полилинейных функций любого числа аргументов.

Аналогично (см. 1.6) группа $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ становится $\mathbf{K}$-модулем, если для каждого гомоморфизма $f: A \to B$ кратное $kf : A \to B$ определить как $(kf)(a) = k(fa)$.

Модуль над полем F — это просто векторное пространство V, а $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ — это векторное пространство всех линейных преобразований $f : V \to W$. Предположим, что V и W имеют конечные базисы $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и $\{h_1, \ldots, h_n\}$ соответственно. Это значит, что V есть прямая сумма ΣFe_i копий Fe_i поля F. Поскольку функтор Hom переводит конечные прямые суммы в прямые суммы, $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ есть векторное пространство размерности mn согласно обычному представлению линейных преобразований $f : V \to W$ матрицами размера $m \times n$. Поскольку тензорное произведение аддитивно, пространство $V \otimes_F W$ имеет базис из mn векторов $e_i \otimes h_j$ и, следовательно, имеет размерность mn. В частности, любой вектор u из $V \otimes_F V$ однозначно представим в виде $u = \Sigma x^{ij}(e_i \otimes e_j)$; m^2 констант $x^{ij} \in F$ известны как «компоненты» тензора u относительно базиса $\{e_i\}$. При изменении базисов можно вычислить соответствующее изменение этих компонент x^{ij}. Классический тензорный анализ, использующий строго аксиоматическое определение тензорного произведения, описывает двухвалентные ковариантные тензоры (элементы u из $V \otimes_F V$) строго в терминах таких компонент и их преобразований при изменении базиса. Тензор с одним ковариантным и одним контравариантным индексами является по определению элементом из $V \otimes_F V^*$, где $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ — сопряженное пространство. В этом случае базис $\{e_i\}$ определяет сопряженный базис $\{e^i\}$ в V^*. Любой тензор из $V \otimes_F V^*$ имеет единственное представление в виде суммы $\Sigma x^i_j(e_i \otimes e^i)$ и поэтому определяется своими компонентами x^i_j, $i, j = 1, \ldots, n$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть новый базис $\{e'_i\}$ конечномерного пространства V задан формулами $e'_i = \sum_j t^j_i e_j$. Вычислить соответствующее преобразование компонент
a) дважды ковариантного тензора из $V \otimes_F V$;
b) тензора из $V \otimes_F V^*$.

2. Описать преобразование компонент для тензоров, ковариантных по r индексам и контравариантных по s индексам.

§ 3. Бимодули

Если R и S — два кольца, то R-S-бимодуль A (обозначение ${}_RA_S$) — это абелева группа, являющаяся одновременно левым R-модулем и правым S-модулем, причем имеет место тождество $(ra)s = r(as)$. Например, любое кольцо R есть R-R-бимодуль; любой левый R-модуль можно рассматривать как R-Z-бимодуль; любой $\mathbf{K}$-модуль над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ есть $\mathbf{K}$-$\mathbf{K}$-бимодуль и т. д. Если A и B являются R-S-бимодулями, то мы обозначим через $\mathrm{Hom}_{R\text{-}S}(A, B)$ абелеву группу всех бимодульных гомоморфизмов $f\colon A \to B$, т. е. группу всех таких групповых гомоморфизмов f, для которых $r(fa)s = f(ras)$ тождественно. Бимодуль ${}_RA_S$ с помощью кольцевых гомоморфизмов $\rho\colon R' \to R$ и $\sigma\colon S' \to S$ превращается в R'-S'-бимодуль ${}_\rho A_\sigma$.

Функторы Hom и $\otimes$ переводят подходящие бимодули в бимодули. Для того чтобы показать, как это происходит, возьмем любые три кольца T, R и S. Тогда имеет место импликация

$$ {}_TG_R \,\&\, {}_RA_S \Rightarrow {}_T[G \otimes_R A]_S, \tag{3.1}$$

где бимодульная структура, указанная справа, определяется на образующих согласно теореме 1.1 следующим образом: $t(g \otimes a)s = tg \otimes as$. Заметим, что формула $t(g \otimes a) = tg \otimes a$, которая превращает $G \otimes A$ в левый модуль над T, по существу, совпадает с формулой $\gamma(g \otimes a) = (\gamma g) \otimes a$, которая превращает $G \otimes_R A$ в ковариантный функтор аргумента G. Аналогично имеется импликация

$$ {}_SC_R \,\&\, {}_TA_R \Rightarrow {}_T[\mathrm{Hom}_R(C, A)]_S, \tag{3.2}$$

где бимодульная структура справа определяется, если для каждого гомоморфизма $f\colon C \to A$ положить $(tfs)(c) = t[f(sc)]$. Читатель должен убедиться в том, что таким образом порождается T-S-бимодуль, заметив, что бимодульные тождества ассоциативности $s(cr) = (sc)r$ и $t(ar) = (ta)r$ используются при установлении гомоморфности отображения tfs правых R-модулей, если f — такой гомоморфизм. Следует отметить также, что контравариантность функтора Hom_R по аргументу C изменяет левые операторы из S в C на правые операторы из S в $\mathrm{Hom}_R(C, A)$. В случае $S = T$ группа $\mathrm{Hom}_{S\text{-}R}(C, A)$ бимодульных гомоморфизмов может быть описана как множество всех тех элементов f S-S-бимодуля $\mathrm{Hom}_R(C, A)$, для которых $sf = fs$. Для гомоморфизмов левых модулей аналогом (3.2) является импликация

$$ {}_RC_S \,\&\, {}_RA_T \Rightarrow {}_S[\mathrm{Hom}_R(C, A)]_T. \tag{3.3}$$

Эндоморфизмом правого R-модуля A по определению считается R-модульный гомоморфизм $f\colon A \to A$. Относительно сложения и умножения множество всех R-эндоморфизмов модуля A образует кольцо $\mathrm{End}_R(A) = \mathrm{Hom}_R(A, A)$ с единицей 1_A. Равенство $(fa)r = f(ar)$, которое утверждает, что f — гомоморфизм правых R-модулей, утверждает также, что A есть $\mathrm{End}_R(A)$-R-бимодуль. Если ${}_SA_R$ — бимодуль, то левое умножение l_s на элемент $s \in S$, определяемое как $l_sa = sa$, есть R-эндоморфизм модуля A, а соответствие $s \to l_s$ является кольцевым гомоморфизмом $S \to \mathrm{End}_R(A)$. Обратно, если дан модуль A_R и кольцевой гомоморфизм $S \to \mathrm{End}_R(A)$, «отступление» вдоль этого гомоморфизма определяет бимодуль ${}_SA_R$. При нашем изучении $\mathrm{Ext}_R(C, A)$ (гл. III) мы показали, как умножать элемент $S_0 \in \mathrm{Ext}^n_R(C, A)$ слева на гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ и справа на гомоморфизм $\gamma: C' \to C$; при этом мы доказали (лемма III.1.6) конгруэнтность $(\alpha S_0)\gamma \equiv \alpha(S_0\gamma)$. Для эндоморфизмов α и γ это означает, что $\mathrm{Ext}^n_R(C, A)$ есть $\mathrm{End}_R(A)$-$\mathrm{End}_R(C)$-бимодуль. Если мы «оттянем» эту бимодульную структуру вдоль $T \to \mathrm{End}_R C$ и $S \to \mathrm{End}_R A$, то мы получим импликацию

$$ {}_TC_R \,\&\, {}_SA_R \Rightarrow {}_S[\mathrm{Ext}^n_R(C, A)]_T, \tag{3.4}$$

такую же, как и в (3.2) при $n = 0$.

Функция от двух переменных $f(a, b)$ может быть превращена в функцию ηf первого переменного a, значениями которой являются функции второго переменного, в соответствии с формулой $[(\eta f)a]b = f(a, b)$. Эта замена двух аргументов, независимых друг от друга, последовательными аргументами появляется во многих случаях, например при изучении топологии пространств функций. В настоящем контексте она принимает следующую форму, которую мы назовем *сопряженной ассоциативностью* Hom и $\otimes$.

Теорема 3.1. *Если R и S — кольца, а A, B и C — модули, находящиеся в ситуации A_R, ${}_RB_S$, C_S, то существует естественный изоморфизм абелевых групп*

$$\eta: \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)), \tag{3.5}$$

определенный для каждого гомоморфизма $f\colon A \otimes_R B \to C$ посредством формулы

$$[(\eta f)a](b) = f(a \otimes b), \quad a \in A, \; b \in B. \tag{3.6}$$

Доказательство проводится непосредственно. Именно, сначала устанавливаем, что (3.6) сопоставляет каждому элементу $a \in A$ и каждому S-модульному гомоморфизму $f: A \otimes_R B \to C$ функцию $F = [(\eta f)a]$, которая как функция аргумента b является S-гомоморфизмом $[(\eta f)a]\colon B \to C$. Затем проверяем, что ηf как функция от a есть R-модульный гомоморфизм A в $\mathrm{Hom}_S(B, C)$. Наконец, устанавливаем, что $\eta(f_1 + f_2) = \eta f_1 + \eta f_2$, так что η — групповой гомоморфизм, что и утверждалось.

Для доказательства изоморфности η построим обратное отображение ζ. Для этой цели возьмем произвольный правый R-модульный гомоморфизм $g\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$ и рассмотрим функцию $(ga)\, b$, $a \in A$, $b \in B$. Любой элемент r из R действует на a справа, а на b слева, причем

$$[g(ar)](b) = [(ga)\, r]\, b = (ga)(rb).$$

Это равенство имеет место потому, что g есть R-модульный гомоморфизм и в силу определения действия r на гомоморфизм $ga\colon B \to C$. Это равенство есть свойство «внутренней ассоциативности» для функции $(ga)\, b$ от аргументов a и b. Следовательно, по теореме 1.1 отображение

$$(\zeta g)(a \otimes b) = (ga)\, b$$

определяет гомоморфизм $\zeta g : A \otimes_R B \to C$. Устанавливается, что $\zeta\colon \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \to \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)$ есть гомоморфизм и что оба произведения $\zeta\eta$ и $\eta\zeta$ равны тождественным отображениям. И область определения, и область значений ζ являются значениями функторов от аргументов A, B и C, ковариантных по C и контравариантных по A и B. Более того, ζ и η являются естественными гомоморфизмами этих функторов.

Следствие 3.2. *Если U, R, S и T — кольца, а ${}_UA_R$, ${}_RB_S$, ${}_TC_S$ — бимодули, то отображение η из* (3.5) *является изоморфизмом T-U-бимодулей. Если $U = T$, то η индуцирует естественный изоморфизм*

$$\eta' : \mathrm{Hom}_{T\text{-}S}(A \otimes {}_RB, C) \cong \mathrm{Hom}_{T\text{-}R}(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)). \qquad (3.7)$$

Доказательство. Описание правой U-модульной структуры на членах формулы (3.5) и описание этих же членов как функторов аргумента A даются идентичными формулами. Значит, из естественности η (по A и C) следует, что η есть T-U-модульный гомоморфизм. В случае $U = T$ из сказанного вытекает (3.7).

В качестве другого приложения мы докажем

Следствие 3.3. *Если модуль P_R проективен как R-модуль, а бимодуль ${}_RP'_S$ проективен как S-модуль, то тензорное произведение $P \otimes_R P'$ является проективным S-модулем.*

Доказательство. Высказывание о S-проективности P' означает, что для каждого эпиморфизма S-модулей $B \twoheadrightarrow C$ индуцированное отображение $\mathrm{Hom}_S(P', B) \to \mathrm{Hom}_S(P', C)$ является эпиморфизмом R-модулей. Поскольку P проективен как R-модуль, отображение

$$\mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_S(P', B)) \to \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_S(P', C))$$

есть эпиморфизм. Применение сопряженной ассоциативности к каждому члену этого отображения показывает, что $P \otimes_R P'$ — проективный S-модуль.

Упрощенным аналогом сопряженной ассоциативности является ассоциативность тензорного произведения. В ситуации A_R, ${}_RB_S$, ${}_SC$ соответствие $(a \otimes b) \otimes c \to a \otimes (b \otimes c)$ порождает естественный изоморфизм

$$(A \otimes {}_RB) \otimes_S C \cong A \otimes {}_R(B \otimes {}_SC). \qquad (3.8)$$

Если дополнительно имеем ${}_UA_R$ и ${}_SC_T$, то этот изоморфизм есть изоморфизм U-T-бимодулей. Мы обычно будем отождествлять оба члена из (3.8) при помощи указанного изоморфизма.

Для модулей A_R, ${}_RB$ мы также вводим отождествление

$$A \otimes {}_RR = A, \quad R \otimes {}_RB = B \qquad (3.9)$$

при помощи естественных изоморфизмов $a \otimes r \to ar$ и $r \otimes b \to rb$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если A и B — левые R-модули, то показать, что $\mathrm{Hom}_Z(A, B)$ является R-R-бимодулем и что подгруппа $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ состоит из тех групповых гомоморфизмов $f\colon A \to B$, для которых $rf = fr$.

2. Для модулей G_R и ${}_RA$ показать, что $G \otimes_R A$ есть $\mathrm{End}_R(G)$-$\mathrm{End}_R(A)$-бимодуль.

3. Для R-S-бимодулей C и A определить группу $\mathrm{Ext}_{R\text{-}S}(C, A)$ бимодульных расширений A при помощи C.

4. Установить «перестановочную» сопряженную ассоциативность

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Hom}(A, C)).$$

Вывести отсюда, что если ${}_UP_R$ — проективный U-модуль, а ${}_RP'$ — проективный R-модуль, то $P \otimes_R P'$ есть проективный U-модуль.

5. В ситуации $A_{\mathbf{K}}$, $B_{\mathbf{K}}$, $C_{\mathbf{K}}$, где $\mathbf{K}$ — коммутативное кольцо, установить естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(B, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(A, C))$ для $\mathbf{K}$-модулей.

§ 4. Сопряженные модули

Сопряженным или *дуальным* (*двойственным*) к левому R-модулю A называется правый R-модуль $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$. Таким образом, элемент из A^* — это R-модульное отображение $f\colon A \to R$, в то время как $fr : A \to R$ есть R-модульное отображение, определенное для каждого элемента $a \in A$ равенством $(fr)\, a = (fa)\, r$. Сопряженным к R-модульному гомоморфизму $\alpha : A \to A'$ является гомоморфизм $\alpha^* = \mathrm{Hom}(\alpha, 1)\colon A'^* \to A^*$, так что сопряженность — это контравариантный функтор из категории левых модулей в категорию правых модулей. Аналогично сопряженным к правому R-модулю G является левый R-модуль G^*.

Для левых модулей A и B имеется естественный изоморфизм

$$(A \oplus B)^* \cong A^* \oplus B^*. \tag{4.1}$$

Действительно, в диаграмме прямой суммы $A \rightleftarrows A \oplus B \leftrightarrows B$ возьмем вместо каждого объекта сопряженный объект, а вместо каждого отображения — сопряженное отображение; в результате мы опять получим диаграмму прямой суммы, при этом вложения $\iota_A : A \to A \oplus B$ и ι_B станут проекциями $\iota_A^* : (A \oplus B)^* \to A^*$ и ι_B^*.

Ввиду свойств функтора Hom короткая точная последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ индуцирует точную слева последовательность $C^* \rightarrowtail B^* \to A^*$. Другими словами, если $A \subset B$, то модуль $(B/A)^* \cong C^*$ изоморфен подмодулю модуля B^*, который состоит из всех гомоморфизмов $f : B \to R$, аннулирующих A. Назовем этот подмодуль *аннулятором* модуля A, обозначение: Annih A; значит,

$$(B/A)^* \cong \operatorname{Annih} A \subset B^*, \quad B^*/\operatorname{Annih} A \rightarrowtail A^*. \tag{4.2}$$

Для каждого левого R-модуля A существует естественный гомоморфизм

$$\varphi_A : A \to A^{**} = \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(A, R), R), \tag{4.3}$$

который сопоставляет каждому элементу $a \in A$ отображение $\varphi a : A^* \to R$, $(\varphi a) f = f(a)$. Другими словами, выражение $f(a)$ при фиксированном a рассматривается как линейная функция элемента $f \in A^*$.

Теорема 4.1. *Если L — конечно порожденный проективный левый R-модуль, то L^* — конечно порожденный проективный правый R-модуль. Для такого модуля L отображение $\varphi : L \to L^{**}$ является естественным изоморфизмом.*

Доказательство. Если F — свободный модуль с образующими $e_1, \ldots, e_n$, то мы можем определить элементы e^j в F^*, положив

$$e^j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Любой гомоморфизм $f : F \to R$ однозначно определяется элементами $fe_i = r_i \in R$, следовательно, $f = \Sigma\, e^j r_j$ и F^* — свободный модуль с образующими $e^1, \ldots, e^n$. Говорят, что они образуют базис, *сопряженный к базису* $e_1, \ldots, e_n$. Отображение φ_F переводит e_i в базисные элементы, сопряженные к e^j, и поэтому $\varphi_F : F \to F^{**}$ — изоморфизм.

Если L — конечно порожденный проективный модуль, то существует такой свободный модуль F с конечным числом образующих, что $F \twoheadrightarrow L$ и $F \cong L \oplus L'$; модуль L' также конечно порожден и проективен. Следовательно, $F^* \cong L^* \oplus L'^*$ и $L \oplus L' \cong F \cong F^{**} \cong L^{**} \oplus L'^{**}$; при этом изоморфизме L отображается на L^{**} с помощью φ_L, откуда и вытекает наше утверждение.

Например, если R — поле, то любой конечно порожденный модуль V (т. е. любое конечномерное векторное пространство) свободен. Для таких пространств $V^{**} \cong V$, а при $V \supset W$

$$(V/W)^* \cong \operatorname{Annih} W; \quad V^*/\operatorname{Annih} W \cong W^*.$$

Для левых модулей A и C существует естественный гомоморфизм

$$\zeta : A^* \otimes_R C \to \operatorname{Hom}_R(A, C), \tag{4.4}$$

определенный для каждого гомоморфизма $f : A \to R$ и каждого $c \in C$ равенством $[\zeta(f \otimes c)]\, a = f(a)\, c$ для всех a. Можно проверить, что $\zeta(f \otimes c)$ — модульный гомоморфизм $A \to C$ и что этот гомоморфизм является биаддитивной и внутренне ассоциативной функцией от f и c.

Предложение 4.2. *Если L — конечно порожденный проективный левый R-модуль, то ζ является естественным изоморфизмом $\zeta = \zeta_L : L^* \otimes_R C \cong \operatorname{Hom}_R(L, C)$.*

Например, если V и W — конечномерные векторные пространства, то положим $L = V^*$ и $C = W$. Тогда $L^* \cong V$, так что изоморфизм ζ устанавливает соответствие $V \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V^*, W)$. Значит, тензорное произведение векторных пространств конечной размерности может быть определено с помощью функтора Hom и сопряженных модулей. С другой стороны, $V \otimes W$ — пространство, сопряженное к пространству билинейных отображений прямого произведения $V \times W$ в основное поле.

Доказательство. Сначала предположим, что модуль $L = F$ свободен, а $e_1, \ldots, e_n$ — его образующие. Относительно сопряженного базиса $e^1, \ldots, e^n$ каждый элемент из $F^* \otimes C$ имеет единственное представление в виде $\Sigma\, e^i \otimes c_i$, где константы $c_i \in C$. Но $\zeta(\Sigma\, e^i \otimes c_i) = f$ — это такой гомоморфизм $f : F \to C$, что $f(e_j) = c_j$, $j = 1, \ldots, n$. Поскольку F — свободный модуль, любой гомоморфизм $f : F \to C$ однозначно определяется своими значениями $f(e_j)$ для всех j. Следовательно, ζ_F — изоморфизм. Случай конечно порожденного проективного модуля L рассматривается теперь так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.

Предложение 4.3. *Если L и B — модули над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ и если модуль L конечно порожден и проективен, то существует естественный изоморфизм $\psi : L^* \otimes B^* \cong (L \otimes B)^*$.*

Доказательство. Для любых двух $\mathbf{K}$-модулей A и B определим естественный гомоморфизм $\psi : A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$, положив для $f \in A^*$, $g \in B^*$

$$[\psi(f \otimes g)](a \otimes b) = f(a) g(b) \in \mathbf{K}.$$

Это отображение ψ является произведением

$$A^* \otimes B^* \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Hom}(A, B^*) = \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Hom}(B, \mathbf{K})) \cong \operatorname{Hom}(A \otimes B, \mathbf{K})$$

гомоморфизма ζ из (4.4) и изоморфизма сопряженной ассоциативности. Последний множитель всегда есть изоморфизм, а ζ — изоморфизм, если $A = L$ — конечно порожденный проективный модуль.

Замечание. Дальнейшее изучение сопряженности можно найти у Дьедонне [1958], Морита [1958], Басса [1960] или Дженса [1961].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для каждого модуля $_RA$ показать, что отображение $\theta(a \otimes f) = fa$ определяет бимодульный гомоморфизм $\theta: A \otimes_Z A^* \to R$.

2. Для модулей $_RA$, G_R бимодульный гомоморфизм $\psi : A \otimes_Z G \to R$ называется *спариванием*. Показать, что гомоморфизм ψ определяет такой гомоморфизм $\psi_G: G \to A^*$, что $\psi = \theta(1 \otimes \psi_G)$, где гомоморфизм θ определен в упражнении 1.

3. Для каждого R-модуля A показать, что произведение

$$A^* \xrightarrow{\varphi(A^*)} A^{***} \xrightarrow{(\varphi_A)^*} A^*$$

равно единице.

§ 5. Точность справа тензорных произведений

Тензорное умножение сохраняет точность коротких точных справа последовательностей.

Теорема 5.1. *Если G — правый R-модуль, а $D \xrightarrow{\beta} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C$ — точная последовательность левых R-модулей, то*

$$G \otimes_R D \xrightarrow{1 \otimes \beta} G \otimes_R B \xrightarrow{1 \otimes \sigma} G \otimes_R C \to 0 \tag{5.1}$$

является точной последовательностью (абелевых групп).

Доказательство. Построим точную последовательность

$$G \otimes_R D \xrightarrow{1 \otimes \beta} G \otimes_R B \xrightarrow{\eta} L \to 0,$$

в которой L — коядро $1 \otimes \beta$, и сравним ее с последовательностью (5.1). Произведение $(1 \otimes \sigma)(1 \otimes \beta) = 1 \otimes \sigma\beta$ равно нулю, поэтому гомоморфизм $1 \otimes \sigma$ представим в виде $\sigma'\eta$ для некоторого гомоморфизма $\sigma' : L \to G \otimes_R C$. Поскольку $\sigma(B) = C$, для каждого элемента c из C найдется такой элемент b, что $\sigma b = c$. В силу точности в B каждый элемент $\eta(g \otimes b)$ зависит только от $g \in G$ и $c \in C$, но не зависит от выбора b. Более того, функция $\eta(g \otimes b)$ биаддитивна и внутренне ассоциативна. Следовательно, по теореме 1.1 имеется гомоморфизм $\omega : G \otimes_R C \to L$, для которого $\omega(g \otimes c) = \eta(g \otimes b)$ и $\sigma'\omega = 1$, $\omega\sigma' = 1$. Поэтому изоморфизм $\omega : G \otimes_R C \cong L$ дает изоморфизм последовательности (5.1) с построенной последовательностью, и, следовательно, последовательность (5.1) точна.

Следствие 5.2. *Тензорное произведение двух эпиморфизмов является эпиморфизмом.*

Доказательство. Если τ и σ — эпиморфизмы, то по теореме $\tau \otimes 1$ и $1 \otimes \sigma$ также эпиморфизмы, а значит, и их произведение $(\tau \otimes 1)(1 \otimes \sigma) = \tau \otimes \sigma$ является эпиморфизмом. О ядре отображения $\tau \otimes \sigma$ см. лемму VIII.3.2 или упражнение 3 в конце параграфа.

Было бы неверным утверждать в теореме 5.1, что короткая точная последовательность $(\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ порождает короткую точную последовательность, подобную последовательности (5.1), так как если $\varkappa : A \to B$ — мономорфизм, то гомоморфизм $1 \otimes \varkappa : G \otimes_R A \to G \otimes_R B$ может не быть мономорфизмом. Чтобы показать это, положим $R = Z$, $A = 2Z$ (группа четных чисел), $B = Z$, $\varkappa$ — вложение, $G = Z_2(g)$ — циклическая группа порядка 2 с образующим g. Тогда, как подсчитано в (1.9), тензорное произведение $Z_2(g) \otimes (2Z)$ является циклической группой порядка 2 с образующим $g \otimes 2$, в то время как

$$(1 \otimes \varkappa)(g \otimes 2) = g \otimes 2 = 2g \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0,$$

так что элемент $g \otimes 2$ лежит в ядре $1 \otimes \varkappa$.

Этот пример можно переформулировать следующим образом. Для подмодуля $A \subset B$ нельзя предполагать, что $G \otimes A \subset G \otimes B$, потому что элемент $g \otimes a$ из $G \otimes A$ может быть отличен от нуля, в то время как «тот же» элемент $g \otimes a$ становится нулем в $G \otimes B$. По этой причине мы с самого начала настаивали на том, чтобы включение $A \subset B$ представлялось отображением $\varkappa: A \to B$.

В приведенном примере число 2 можно заменить любым целым числом m. Поэтому мы можем описать некоторые элементы в $\operatorname{Ker}(1 \otimes \varkappa)$ для $R = Z$ и короткой точной последовательности $(\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ абелевых групп. Эти элементы $g \otimes a$ появляются всякий раз, как существует такой элемент b и такое целое число m, что $\varkappa a = mb$ и $mg = 0$ одновременно, поскольку тогда

$$(1 \otimes \varkappa)(g \otimes a) = g \otimes \varkappa a = g \otimes mb = mg \otimes b = 0 \otimes b = 0.$$

В этом случае элемент $\varkappa a$, а значит, и сам элемент a определяются элементом b, в то время как элемент $g \otimes a$ зависит только от $\sigma b \in C$. Действительно, из равенства $\sigma b = \sigma b'$ в силу точности вытекает равенство $b' = b + \varkappa a_0$ для некоторого a_0; тогда $\varkappa(a + ma_0) = mb'$ и $g \otimes (a + ma_0) = g \otimes a + g \otimes ma_0 = g \otimes a$. Элемент ядра $g \otimes a$ зависит от g, $m \in Z$ и $\sigma b = c$; далее, ввиду точности $mc = m(\sigma b) = \sigma(mb) = \sigma\varkappa a = 0$. Введем обозначение

$$k(g, m, c) = g \otimes a \in \operatorname{Ker}(1 \otimes \varkappa), \quad mg = 0 = mc; \tag{5.2}$$

здесь a—некоторый элемент из A, для которого $\varkappa a = mb$, $\sigma b = c$ для некоторого b, т. е. элемент a получается при помощи «обращения», $a = \varkappa^{-1} m \sigma^{-1} c$. В следующем параграфе мы покажем, что элементы $k(g, m, c)$ из (5.2) порождают $\operatorname{Ker}(1 \otimes \varkappa)$.

Эти элементы $k(g, m, c)$ удовлетворяют некоторым тождествам. Они аддитивны по g и c; например, аддитивность по c означает, что

$$k(g, m, c_1 + c_2) = k(g, m, c_1) + k(g, m, c_2) \tag{5.3}$$

всякий раз, как $mc_1 = 0 = mc_2$. Для любых двух целых чисел m и n можно подсчитать, что

$$k(g, mn, c) = k(g, m, nc) \tag{5.4}$$

всякий раз, как $mg = 0$, $mnc = 0$, и что

$$k(g, mn, c) = k(gm, n, c) \tag{5.5}$$

всякий раз, как $gmn = 0$, $nc = 0$. Мы пишем здесь gm вместо mg, потому что мы можем рассматривать абелеву группу G как *правый* модуль над Z. Эти соотношения будут сейчас использованы для определения одной новой группы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для мономорфизма $A \rightarrowtail B$ показать, что каждый элемент из $\operatorname{Ker}(A \otimes Z_m \to B \otimes Z_m)$ имеет вид $k(c, m, 1)$, где 1 — образующий группы Z_m.

2. Если J — двусторонний идеал в кольце R, то показать, что отображение $a \otimes (r + J) \to ar$ для $a \in J$ порождает эпиморфизм $J \otimes_R (R/J) \twoheadrightarrow J/J^2$ для R-модулей. Доказать, что если $J^2 \neq J$, то вложение $J \to R$ индуцирует отображение $J \otimes_R (R/J) \to R \otimes_R (R/J)$, которое не является мономорфизмом.

3. Для точных последовательностей $(\gamma, \tau) : G \rightarrowtail H \twoheadrightarrow K$ и $(\beta, \sigma) : D \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ показать, что ядро отображения $\tau \otimes \sigma : H \otimes_R B \twoheadrightarrow K \otimes_R C$ равно $\gamma_*(G \otimes B) \cup \beta_*(H \otimes D)$.

§ 6. Периодические произведения групп

Для абелевых групп A и G мы определим периодическое произведение $\operatorname{Tor}(G, A)$ как такую абелеву группу, которая порождается всеми символами $\langle g, m, a\rangle$, причем $m \in Z$, $gm = 0$ в G, $ma = 0$ в A, подчиненными следующим условиям («аддитивность» и правила «скольжения» множителей m, n):

$$\langle g_1 + g_2, m, a\rangle = \langle g_1, m, a\rangle + \langle g_2, m, a\rangle, \quad g_i m = 0 = ma, \tag{6.1}$$

$$\langle g, m, a_1 + a_2\rangle = \langle g, m, a_1\rangle + \langle g, m, a_2\rangle, \quad gm = 0 = ma_i, \tag{6.2}$$

$$\langle g, mn, a\rangle = \langle gm, n, a\rangle, \quad gmn = 0 = na, \tag{6.3}$$

$$\langle g, mn, a\rangle = \langle g, m, na\rangle, \quad gm = 0 = mna. \tag{6.4}$$

Каждое условие накладывается в том случае, когда обе части имеют смысл; в каждом случае это эквивалентно требованию, чтобы имели смысл символы правой части. Из соотношений аддитивности (6.1) и (6.2) следует, что $\langle 0, m, a\rangle = 0 = \langle g, m, 0\rangle$. Следовательно, $\operatorname{Tor}(G, A) = 0$, если в группе A нет элементов конечного порядка (кроме нуля) и также $\operatorname{Tor}(A, G) \cong \operatorname{Tor}(G, A)$.

Если $\alpha : A \to A'$, то $\operatorname{Tor}(G, A)$ в силу определения $\alpha_*\langle g, m, a\rangle = \langle g, m, \alpha a\rangle$ превращается в ковариантный функтор аргумента A. Таким же образом $\operatorname{Tor}(G, A)$ превращают в ковариантный функтор аргумента G. Из (6.2) выводим, что $(\alpha + \beta)_* = \alpha_* + \beta_*$, и, следовательно, имеет место изоморфизм $\operatorname{Tor}(G, A_1 \oplus A_2) \cong \operatorname{Tor}(G, A_1) \oplus \operatorname{Tor}(G, A_2)$. Значит, для вычисления группы $\operatorname{Tor}(G, A)$ для конечно порожденных групп достаточно вычислить ее для конечной циклической группы G.

Для циклической группы $G = Z_q(g_0)$ порядка q с образующим g_0 существует изоморфизм

$$\zeta : {}_qA \cong \operatorname{Tor}(Z_q(g_0), A), \tag{6.5}$$

где ${}_qA$ обозначает подгруппу таких элементов $a \in A$, для которых $qa = 0$. Действительно, каждый элемент $a \in {}_qA$ порождает элемент $\zeta a = \langle g_0, q, a\rangle$ в $\operatorname{Tor}(Z_q, A)$; ввиду (6.2) отображение ζ является гомоморфизмом. Для отыскания гомоморфизма η в обратном направлении запишем каждый элемент из Z_q как $g_0 k$ для некоторого $k \in Z$; каждый образующий периодического произведения имеет вид $\langle g_0 k, m, a\rangle$, где $ma = 0$ и $mk \equiv 0 \pmod q$. Если $n = mk/q$, то из (6.3) и (6.4) получаем

$$\langle g_0 k, m, a\rangle = \langle g_0, km, a\rangle = \langle g_0, q, na\rangle.$$

Это наводит на мысль, что η нужно определить, положив $\eta\langle g_0 k, m, a\rangle = (mk/q)\, a$. Читатель должен проверить, что при этом определении η остаются в силе определяющие соотношения

(6.1)—(6.4) в том смысле, что элементы, равные по определению в Tor, переходят в равные элементы подгруппы ${}_qA$. Тем самым будет показано, что η порождает гомоморфизм η: $\operatorname{Tor}(Z_q, A) \to {}_qA$. Далее, $\eta\zeta a = a$, а подсчет, проведенный выше, показывает, что $\zeta\eta = 1$. Следовательно, η и ζ — взаимно обратные изоморфизмы, что и утверждалось.

При фиксированной циклической группе изоморфизм (6.5) естествен по аргументу A, но зависит от выбора образующего циклической группы Z_q.

Периодическое произведение, обусловленное неточностью функтора $\otimes$, измеряет эту неточность, как показывает следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если $E = (\varkappa, \sigma): A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ есть точная последовательность абелевых групп, то каждая абелева группа G порождает точную последовательность*

$$0 \to \operatorname{Tor}(G, A) \to \operatorname{Tor}(G, B) \xrightarrow{\sigma_*} \operatorname{Tor}(G, C) \xrightarrow{E_*} \\ \xrightarrow{E_*} G \otimes A \xrightarrow{1\otimes\varkappa} G \otimes B \to G \otimes C \to 0. \tag{6.6}$$

Отображения этой последовательности, кроме E_*, индуцированы $\varkappa$ и σ, а E_* определяется на образующих группы $\operatorname{Tor}(G, C)$ *следующей формулой:*

$$E_*\langle g, m, c\rangle = k(g, m, c), \tag{6.7}$$

где элементы k взяты из (5.2.). *Отображение E_* естественно, если его аргументы рассматривать как бифункторы от аргументов E и G.*

Доказательство. Отображение E_* является гомоморфизмом, потому что тождества, выписанные для элементов k в (5.3) — (5.5), в точности совпадают с определяющими соотношениями для Tor. Естественность отображения доказывается легко. Поскольку каждый элемент $k\langle g, m, c\rangle$ лежит в $\operatorname{Ker}(1 \otimes \varkappa)$, получаем $(1 \otimes \varkappa) E_* = 0$, а также проверяется, что $E_*\sigma_* = 0$. Как обычно, наиболее трудный пункт в доказательстве точности — это показать, что каждый элемент ядра содержится в соответствующем образе.

Мы утверждаем, что для доказательства этого достаточно рассмотреть случай, когда группа G имеет конечное число образующих. В качестве примера рассмотрим точность в члене $G \otimes A$. В элемент $u = \Sigma g_i \otimes a_i$ из $G \otimes A$ входит только конечное число элементов из G. Если его образ $(1 \otimes \varkappa)\, u = \Sigma\, g_i \otimes \varkappa a_i$ равен нулю в $G \otimes B$, то равенство нулю устанавливается с помощью конечного числа определяющих соотношений для $G \otimes B$; в эти соотношения вновь входит только конечное число элементов $h_1, \ldots, h_m$ группы G. Пусть G_0 — подгруппа группы G, порожденная всеми элементами $g_1, \ldots, g_n$ и $h_1, \ldots, h_m$, которые нам встретились, и пусть $\iota: G_0 \to G$ — вложение. Тогда $u_0 = \Sigma\, g_i \otimes a_i$ является элементом из $G_0 \otimes A$, причем $(\iota \otimes 1)\, u_0 = u$. Ввиду естественности отображений диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Tor}(G_0, C) & \xrightarrow{E_*} & G_0 \otimes A & \xrightarrow{\varkappa_* = 1\otimes\varkappa} & G_0 \otimes B \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_*} & & \downarrow{\scriptstyle \iota\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \iota\otimes 1} \\ \operatorname{Tor}(G, C) & \xrightarrow{E_*} & G \otimes A & \xrightarrow{\varkappa_* = 1\otimes\varkappa} & G \otimes B \end{array}$$

коммутативна, и мы можем предположить, что верхняя строка точна. Поскольку в G_0 содержатся все элементы $h_j \in G$, использованные при установлении равенства $\varkappa_* u = 0$, эти же самые элементы устанавливают, что $\varkappa_* u_0 = 0$ в $G_0 \otimes B$. В силу точности верхней строки существует такой элемент $t_0 \in \operatorname{Tor}(G_0, C)$, что $E_* t_0 = u_0$. Однако $E_* \iota_* t_0 = (\iota \otimes 1)\, E_* t_0 = (\iota \otimes 1)\, u_0 = u$, что и доказывает точность нижней строки в члене $G \otimes A$.

Это рассуждение не зависит от частного вида определений групп Tor и $\otimes$, а использует лишь то обстоятельство, что эти группы описываются с помощью образующих и определяющих соотношений.

Вернемся к доказательству точности. Пусть теперь группа G конечно порождена, и значит, представима как прямая сумма циклических групп. Поскольку оба функтора Tor и $\otimes$ переводят прямые суммы в прямые суммы, последовательность (6.6) является прямой суммой соответствующих последовательностей для циклических групп G. Если $G = Z$ — бесконечная циклическая группа, то все периодические произведения равны нулю, а сама последовательность изоморфна исходной последовательности E. Если $G = Z_q$ — конечная циклическая группа, то различные члены уже вычислены в (1.9) и (6.5); эти вычисления приводят к диаграмме, центральная часть которой имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to \operatorname{Tor}(Z_q, B) & \to & \operatorname{Tor}(Z_q, C) & \xrightarrow{E_*} & Z_q \otimes A & \to \cdots \\ \uparrow{\scriptstyle \zeta} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} & & \uparrow{\scriptstyle \eta} & \\ \cdots \longrightarrow {}_qB & \longrightarrow & {}_qC & \xrightarrow{E_\#} & A/qA & \to \cdots. \end{array}$$

В нижней строке отображение $E_\#$ определяется «обращающим» правилом $E_\# c = \varkappa^{-1} q \sigma^{-1} c + qA$; используя это определение, легко проверить коммутативность указанной диаграммы. Поскольку η из (1.9) и ζ из (6.5) — изоморфизмы, проверка точности верхней строки теперь сводится к установлению точности нижней строки, которая полностью выглядит так

$$0 \to {}_qA \to {}_qB \to {}_qC \xrightarrow{E_\#} A/qA \to B/qB \to C/qC \to 0.$$

Точность здесь проверяется с помощью определений членов и точности последовательности E. Например, если $\varkappa(a+qA)=0$ в B/qB, то $\varkappa a = qb$ для некоторого элемента $b \in B$. Значит, $\sigma(qb)=0$ и поэтому $\sigma b = c \in {}_qC$; то же самое определение обращения дает $E_{\#}c = a+qA$.

Мы предоставляем читателю доказательство следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Следующие условия для абелевой группы G эквивалентны:*

(i) *в G нет элементов конечного порядка, кроме* 0;

(ii) $\operatorname{Tor}(G, A)=0$ *для всякой абелевой группы* A;

(iii) *если* $\varkappa: A \to B$ *есть мономорфизм, то* $1\otimes\varkappa: G\otimes A \to G\otimes B$ *также мономорфизм:*

(iv) *любая короткая точная последовательность остается точной после тензорного умножения ее членов на* G;

(v) *любая точная последовательность остается точной после тензорного умножения на* G.

Говорят, что группа G *без кручения*, если в ней выполнено условие (i).

Для обобщения полезно иное описание образующих группы $\operatorname{Tor}(G,A)$. Тройка $\langle g, m, a\rangle$ определяет три гомоморфизма

$$G \xleftarrow{\mu} Z \xleftarrow{\partial} Z, \quad \nu\colon Z=Z^*\to A,$$

если положить $\mu 1 = g$, $\partial 1 = m$, $\nu 1 = a$. Будем считать $L: Z \leftarrow Z$ цепным комплексом с нулями во всех размерностях, кроме $L_0=Z=L_1$; поскольку $\mu\partial = 0$, $\mu: L\to G$ также цепной комплекс над G. И будем считать сопряженный комплекс L^* цепным комплексом $\partial^*: L_0^*\to L_1^*$ над A с гомоморфизмом $\nu: L_1^* \to A$. Тройка $\langle g, m, a\rangle$ превращается в тройку $\langle \mu, L, \nu\rangle$, где

$$L \text{ и } L^* \text{— сопряженные цепные комплексы («длины» 1),}$$

$$\mu\colon L\to G \text{ и } \nu\colon L^*\to A \text{— цепные преобразования.}$$

Правила скольжения (6.3) и (6.4) можно записать как одно правило

$$\langle g'n_0, m, a\rangle = \langle g', m', n_1 a\rangle; \quad n_0 m = m' n_1, \quad g'm' = 0 = ma. \tag{6.8}$$

Если m и m' определяют цепные комплексы L и L', то из равенства $n_0 m = m'n_1$ вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{cccc} L\colon & Z & \xleftarrow{m} & Z \\ \rho\downarrow & \downarrow n_0 & & \downarrow n_1 \\ L'\colon & Z & \xleftarrow{m'} & Z. \end{array}$$

значит, $\rho: L\to L'$ — цепное преобразование. Теперь элементы g' и a определяют гомоморфизмы $\mu': L_0' = Z\to G$ и $\nu: L_1^*\to A$ посредством равенств $\mu' 1 = g'$, $\nu 1 = a$ и $\mu'\rho 1 = g' n_0$, $\nu\rho^* 1 = n_1 a$. В этих обозначениях правило скольжения (6.8) принимает вид

$$(\mu'\rho,\ L,\ \nu) = (\mu',\ L',\ \nu\rho^*), \quad \rho\colon L\to L'.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что $\langle g, m_1+m_2, a\rangle = \langle g, m_1, a\rangle + \langle g, m_2, a\rangle$, если обе части равенства имеют смысл.

2. Пусть $Q\supset Z$ — аддитивная группа рациональных чисел, и пусть $T(A)$ («периодическая подгруппа»), т. е. подгруппа группы A, состоящая из всех элементов конечного порядка из A. Установить естественный изоморфизм $\operatorname{Tor}(Q/Z, A)\cong T(A)$.

3. Пусть Q_p — подгруппа группы Q, состоящая из всех рациональных чисел, знаменатель которых есть степень числа p. Описать группу $\operatorname{Tor}(Q_p/Z, A)$.

4. Исследовать группу $\operatorname{Tor}(G, A)$ в том случае, когда группы G и A являются бесконечными прямыми суммами.

5. Доказать, что $A\otimes B\cong \operatorname{Tor}(A, B)$, если A и B — конечные абелевы группы. (Изоморфизм не является естественным.)

6. Показать, что группа $\operatorname{Tor}(G, A)=0$, если для любого элемента a конечного порядка k из группы A и для любого элемента g конечного порядка l из группы G числа k и l всегда взаимно просты.

7. Для модулей G_R, ${}_RA$ обозначим через $T(G, A)$ абелеву группу, определенную образующими $\langle g, r, a\rangle$, где $gr=0=ra$, и соотношениями (6.1) — (6.4). Показать, что последовательность (6.6), в которую вместо Tor надо поставить T, может не быть точной в члене $G\otimes_R A$.

§ 7. Периодические произведения модулей

Рассмотрим цепной комплекс L длины n при фиксированном $n\geqq 0$,

$$L\colon L_0 \xleftarrow{\partial} L_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} L_{n-1} \xleftarrow{\partial} L_n,$$

в котором каждый модуль L_k является конечно порожденным проективным правым R-модулем. Сопряженный комплекс $L^* = \operatorname{Hom}_R(L, R)$ также можно рассматривать как цепной комплекс L^*, в котором L_k^* — это модуль цепей размерности $n-k$,

$$L^*\colon L_n^* \xleftarrow{\delta} L_{n-1}^* \xleftarrow{\delta} \cdots \xleftarrow{\delta} L_1^* \xleftarrow{\delta} L_0^*.$$

Каждый модуль L_k^* является конечно порожденным проективным левым модулем, а гомоморфизмы $\delta_k: L_k^*\to L_{k+1}^*$ определяются как $\delta_k = (-1)^{k+1}\partial_{k+1}^*$, где $\partial_{k+1}: L_{k+1}\to L_k$. Здесь и ниже мы можем с одинаковым успехом требовать, чтобы модули L_k были конечно порождены и свободны; тогда то же самое будет верно и для модулей L_k^*.

Если G — правый R-модуль, рассматриваемый как тривиальный цепной комплекс, то цепное преобразование $\mu : L \to G$ будет модульным гомоморфизмом $\mu_0 : L_0 \to G$, для которого $\mu_0 \partial = 0 : L_1 \to G$, а цепное преобразование $\nu : L^* \to {}_R C$ будет модульным гомоморфизмом $\nu : L_n^* \to C$, для которого $\nu\delta = 0$. Для данных модулей G_R и ${}_R C$ мы возьмем в качестве элементов группы $\operatorname{Tor}_n^R(G, C)$ все тройки

$$t = (\mu, L, \nu), \quad \mu: L \to G, \quad \nu: L^* \to C,$$

где комплекс L имеет длину n, а μ, ν — цепные преобразования, описанные выше. Если L' — другой такой комплекс и $\rho : L \to L'$ есть цепное преобразование, то цепным преобразованием является и сопряженное отображение $\rho^* : L'^* \to L^*$. Для данных преобразований μ': $L' \to G$ и ν: $L^* \to C$ мы считаем, что

$$(\mu'\rho, L, \nu) = (\mu', L', \nu\rho^*). \tag{7.1}$$

Эти отображения можно описать с помощью двух коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd} G & L_0 \arrow[l] \arrow[d, "\rho_0"] & \cdots \arrow[l] & L_n \arrow[l] \arrow[d, "\rho_n"] \\ G \arrow[u, equal] & L'_0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & L'_n \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L_0^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_n^* \arrow[r] & C \\ L_0'^* \arrow[r] \arrow[u, "\rho_0^*"] & \cdots \arrow[r] & L_n'^* \arrow[r] \arrow[u, "\rho_n^*"] & C, \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

похожих на определение отношения конгруэнтности в Ext^n с помощью длинных точных последовательностей. Формально отношение равенства в Tor_n должно быть наиболее слабым отношением эквивалентности, для которого выполняется (7.1); это означает, что две тройки из Tor_n равны, если вторая получается из первой конечной последовательностью применений правила (7.1). Тем самым Tor_n описывается как множество.

Это множество является функтором. Действительно, если даны отображения $\eta : G \to G'$, $\gamma : C \to C'$, то правила

$$\eta_*(\mu, L, \nu) = (\eta\mu, L, \nu), \quad \gamma_*(\mu, L, \nu) = (\mu, L, \gamma\nu) \tag{7.2}$$

сохраняют в силе равенство (7.1) и превращают Tor_n в ковариантный бифунктор.

Для двух троек t_1 и t_2 из $\operatorname{Tor}_n(G, C)$ тройка

$$(\mu_1, L^1, \nu_1) \oplus (\mu_2, L^2, \nu_2) = (\mu_1 \oplus \mu_2, L^1 \oplus L^2, \nu_1 \oplus \nu_2)$$

является их прямой суммой и содержится в $\operatorname{Tor}_n(G \oplus G, C \oplus C)$. Если $t_1 = t_1'$ и $t_2 = t_2'$ в соответствии с (7.1), то $t_1 \oplus t_2 = t_1' \oplus t_2'$. Если ω_G — автоморфизм группы $G \oplus G$, определенный равенством $\omega(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, то $(\omega_G)_*(t_1 \oplus t_2) = (\omega_C)_*(t_2 \oplus t_1)$, что можно проверить, применяя (7.1) к отображению $\rho : L^1 \oplus L^2 \to L^2 \oplus L^1$, переставляющему слагаемые.

Теперь $\operatorname{Tor}_n(G, C)$ можно сделать абелевой группой, если определить сложение формулой

$$t_1 + t_2 = (\nabla_G)_* (\nabla_C)_* (t_1 \oplus t_2) \in \operatorname{Tor}_n(G, C), \tag{7.3}$$

где $\nabla_G : G \oplus G \to G$ и ∇_C — кодиагональные отображения (III.2.1'). Доказательство выполнения групповых аксиом проводится непосредственно. Ассоциативный закон следует из ассоциативного закона для кодиагональных отображений. Закон коммутативности вытекает из равенств $(\omega_G)_*(t_1 \oplus t_2) = (\omega_C)_*(t_2 \oplus t_1)$ и $\nabla_G \omega_G = \nabla_G$. В качестве нуля для сложения мы можем взять тройку (0, 0, 0), в которой средний нуль обозначает нулевой комплекс длины n, а обратной к тройке $-(\mu, L, \nu)$ является тройка $(-\mu, L, \nu)$. Отображения η_* и γ_*, определенные в (7.2), являются гомоморфизмами относительно этого сложения, так что Tor_n превращается в бифунктор со значениями в категории абелевых групп. Те же формулы (7.2) показывают, что если модули G и C являются бимодулями ${}_T G_R$, ${}_R C_S$ над другими кольцами T и S, то Tor_n есть бимодуль ${}_T(\operatorname{Tor}_n)_S$, так же как и в (3.1).

Предложение 7.1. *Символы* (μ, L, ν) *в* Tor_n *аддитивны по* μ *и* ν; *например*,

$$(\mu_1 + \mu_2, L, \nu) = (\mu_1, L, \nu) + (\mu_2, L, \nu). \tag{7.4}$$

Доказательство. Напомним (III.2.2), что $\mu_1 + \mu_2 = \nabla_G(\mu_1 + \mu_2)\Delta_L$. Двойственным к диагональному отображению $\Delta_L : L \oplus L \oplus L$ является кодиагональ $\nabla_{L^*} : L^* \oplus L^* \to L^*$. Значит, (7.4) можно вывести из правила равенства (7.1) и определения (7.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}(\mu_1 + \mu_2, L, \nu) = (\nabla_G(\mu_1 \oplus \mu_2)\Delta_L, L, \nu) = (\nabla_G(\mu_1 \oplus \mu_2), L \oplus L, \nu\nabla_{L^*}) = \\ = (\nabla_G(\mu_1 \oplus \mu_2), L \oplus L, \nabla_C(\nu \oplus \nu)) = (\mu_1, L, \nu) + (\mu_2, L, \nu).\end{aligned}$$

Предложение 7.2. *Каждый элемент из* $\operatorname{Tor}_n(G, C)$ *имеет вид* (μ, F, ν), *где* $\mu: F \to G$, $\nu: F^* \to C$ *и* F *— цепной комплекс длины* n *конечно порожденных свободных правых модулей. Следовательно, функтор* Tor_n, *определенный с помощью комплексов конечно порожденных свободных модулей* F_i, *естественно изоморфен функтору* Tor_n, *определенному с помощью конечно порожденных проективных модулей* L_i.

Доказательство. Описанная выше конструкция, в которой используются только свободные модули вместо проективных, дает функтор $\operatorname{Torf}_n(G, C)$. Поскольку каждый свободный комплекс F длины n проективен, каждый элемент (μ, F, ν) из Torf_n является также элементом из Tor_n. Это отображение $\operatorname{Torf} \to \operatorname{Tor}$ имеет двустороннее обратное отображение. Чтобы показать это, возьмем любую тройку $(\mu, L, \nu) \in \operatorname{Tor}_n$. Каждый модуль L_k можно представить как прямое слагаемое некоторого конечно порожденного свободного модуля $F_k = L_k \oplus M_k$. Построим комплекс F с границей $\partial \oplus 0 \colon L_k \oplus M_k \to L_{k-1} \oplus M_{k-1}$. Вложение $\iota\colon L \to F$ и проекция $\pi\colon F \to L$ являются цепными преобразованиями, для которых $\pi\iota = 1$, $\iota^*\pi^* = 1$. В силу нашего правила равенства

$$(\mu,\ L,\ \nu) = (\mu,\ L,\ \nu\iota^*\pi^*) = (\mu\pi,\ F,\ \nu\iota^*),$$

это элемент из Torf, так как F — свободный комплекс длины n. При таком переходе тройки равные в смысле (7.1) переходят в равные тройки в Torf; отсюда вытекает естественный изоморфизм $\mathrm{Tor}_n \cong \mathrm{Torf}_n$.

При $n = 0$, Tor_0 можно отождествить с $\otimes$.

Теорема 7.3. *Существует естественный изоморфизм* $G \otimes_R C \cong \mathrm{Tor}_0^R(G,\ C)$.

Доказательство. Каждый элемент $g \in G$ определяет отображение $\mu_g\colon R \to G$ правых R-модулей равенством $\mu_g(r) = gr$; аналогично каждый элемент $c \in C$ определяет отображение $\nu_c\colon R = R^* \to C$ левых R-модулей равенством $\nu_c(1) = c$. Тройка $(\mu_g,\ R,\ \nu_c) \in \mathrm{Tor}_0(G,\ C)$ аддитивна по g и c и внутренне линейна, так что отображение $g \otimes c \to (\mu_g,\ R,\ \nu_c)$ определяет гомоморфизм абелевых групп $G \otimes C \to \mathrm{Tor}_0(G,\ C)$. Этот гомоморфизм естествен и превращает каждый элемент $\Sigma g_i \otimes c_i$ из $G \otimes C$ в тройку $(\mu,\ F,\ \nu)$, где F — свободный модуль с образующими e_i, $\mu e_i = g_i$ и $\nu e^i = c_i$.

Для построения обратного отображения Θ используем предложение 7.2 и запишем каждый элемент из $\mathrm{Tor}_0(G,\ C)$ как $(\mu,\ F,\ \nu)$, где $\mu\colon F \to G$, $\nu\colon F^* \to C$ и F — конечно порожденный свободный модуль. Выберем произвольную систему $e_1, \ldots, e_m$ свободных образующих модуля F, введем сопряженный базис $e^1, \ldots, e^m$ в F^* и положим

$$\Theta(\mu,\ F,\ \nu) = \sum_{i=1}^{m} \mu(e_i) \otimes \nu(e^i) \in G \otimes_R C.$$

Запишем гомоморфизм $\rho\colon F \to F'$ через базисы e_i и e'_j в виде $\rho e_i = \sum_j e'_j r_{ji}$, где $\{r_{ji}\}$ — матрица из элементов кольца R. Тогда $\rho^* e'^j = \sum_j r_{ji} e^i$ и

$$\Theta(\mu'\rho,\ F,\ \nu) = \sum_i \Big(\sum_j \mu'(e'_j r_{ji}) \otimes \nu e^i\Big) = \sum_j \Big(\mu' e'_j \otimes \sum_i \nu(r_{ji} e^i)\Big) = \Theta(\mu',\ F',\ \nu\rho^*).$$

Это равенство показывает, что отображение Θ корректно определено в смысле равенства в группе Tor; следовательно, если $F = F'$ и e'_j — другой базис в F, то тем самым показано, что определение Θ

не зависит от выбора базиса в F. Поскольку Θ — двусторонне обратное к предыдущему отображению, то доказательство закончено.

Следствие 7.4. *Для конечно порожденного проективного правого R-модуля L естественный изоморфизм $\xi\colon \mathrm{Hom}_R(L^*,\ C) \cong L \otimes_R C$ определяется равенством $\xi(\nu) = (1_L,\ L,\ \nu)$. Следовательно, каждый элемент t из $\mathrm{Tor}_0(L,\ C)$ имеет единственное представление в виде $t = (1_L,\ L,\ \nu)$ для некоторого гомоморфизма $\nu\colon L^* \to C$.*

Доказательство. По свойству аддитивности (предложение 7.1) ξ — естественный гомоморфизм. Чтобы показать, что ξ — изоморфизм, достаточно доказать, что произведение

$$L \otimes_R C \cong L^{**} \otimes_R C \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Hom}_R(L^*,\ C) \xrightarrow{\xi} \mathrm{Tor}_0(L,\ C)$$

равно тождественному отображению, где ζ — изоморфизм, определенный в предложении 4.2. Если $L = R$, то определения показывают, что произведение $\xi\zeta$ равно единице; поскольку все функторы аддитивны, это же справедливо для конечно порожденных свободных модулей L. Произвольный же проективный модуль L является прямым слагаемым свободного модуля F с конечным числом образующих. Поскольку отображения ξ и ζ естественны, их произведение отображает прямые слагаемые в прямые слагаемые; поэтому доказываемое равенство справедливо для любого L.

Периодические произведения симметричны относительно G и A. Для доказательства построим из кольца R *антиизоморфное* ему кольцо R^{op}: аддитивная группа кольца R^{op} изоморфна аддитивной группе кольца R, причем этот изоморфизм устанавливается соответствием $r \to r^{\mathrm{op}}$, а умножение в R^{op} определяется равенством $r^{\mathrm{op}} s^{\mathrm{op}} = (sr)^{\mathrm{op}}$. Каждый правый R-модуль G превращается в левый R^{op}-модуль, если положить $r^{\mathrm{op}} g = gr$; по симметрии каждый левый R-модуль A становится правым R^{op}-модулем.

Предложение 7.5. *Соответствие* $(\mu,\ L,\ \nu) \to (\nu,\ L^*,\ \mu)$ *является изоморфизмом*

$$\mathrm{Tor}_n^R(G,\ A) \cong \mathrm{Tor}_n^{R^{\mathrm{op}}}(A,\ G) \quad n = 0,\ 1,\ \ldots.$$

Доказательство. Комплекс L^* состоит из конечно порожденных проективных R^{op}-модулей. Следовательно, соответствие определено корректно и, очевидно, является изоморфизмом.

Для короткой точной последовательности $E = (\varkappa, \sigma)\colon A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ и элемента $t = (\mu,\ L,\ \nu) \in \mathrm{Tor}_n(G,\ C)$, где $n > 0$, можно определить произведение $Et \in \mathrm{Tor}_{n-1}(G,\ A)$. Пусть $\nu\colon L^* \to C$ и E — комплексы над C, первый из которых проективен, а второй точен. По теореме сравнения существует цепное преобразование φ, такое, что

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \longrightarrow L^*_{n-1} & \xrightarrow{\delta} & L^*_n & \xrightarrow{\nu} & C \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \| \\ E: 0 \longrightarrow A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0. \end{array} \qquad (7.5)$$

Пусть ${}^{n-1}_{\ \ 0}L$ обозначает цепной комплекс длины $n-1$, образованный выбрасыванием последнего модуля L_n из L; положим

$$E(\mu, L, \nu) = (\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \varphi_{n-1}). \qquad (7.6)$$

Теорема 7.6. *Для $E \in \operatorname{Ext}^1(C, A)$ и $t \in \operatorname{Tor}_n(G, C)$ произведение Et является корректно определенным элементом группы* $\operatorname{Tor}_{n-1}(G, A)$, *причем имеют место законы ассоциативности*

$$\alpha(Et) = (\alpha E)t, \quad (E\gamma)t' = E(\gamma_* t'), \quad E(\eta_* t) = \eta_*(Et), \qquad (7.7)$$

где $\alpha: A \to A'$, $\gamma: C' \to C$, $\eta: G \to G'$ и $t' \in \operatorname{Tor}_n(G, C')$. Это умножение порождает гомоморфизм

$$\operatorname{Ext}^1(C, A) \otimes_Z \operatorname{Tor}_n(G, C) \to \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (7.8)$$

Доказательство. При любом другом выборе φ' для цепного преобразования φ из (7.5) φ и φ' будут гомотопны, поэтому существует такой гомоморфизм $s: L^*_n \to A$, что $\varphi'_{n-1} = \varphi_{n-1} + s\delta$. Произведение Et, определенное с помощью φ', равно

$$(\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \varphi'_{n-1}) = (\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \varphi_{n-1}) + (\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, s\delta).$$

Пусть ${}^{n}_{1}L$ — комплекс, полученный из L выбрасыванием первого модуля L_0; тогда $\partial: {}^{n}_{1}L \to {}^{n-1}_{\ \ 0}L$ — цепное преобразование, и поэтому второй член написанного равенства есть $(\pm\mu\partial, {}^{n}_{1}L, s) = (0, {}^{n}_{1}L, s) = 0$. Значит, произведение Et не зависит от выбора φ. Если в группе Tor_n имеет место равенство $(\mu'\rho, L, \nu) = (\mu', L', \nu\rho^*)$ для некоторого $\rho: L \to L'$, то произведение $\varphi\rho^*$ является цепным преобразованием, и произведения

$$E(\mu'\rho, L, \nu) = (\mu'\rho, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \varphi_{n-1}) = (\mu', {}^{n-1}_{\ \ 0}L', \varphi_{n-1}\rho^*_{n-1}) = E(\mu', L', \nu\rho^*)$$

равны. Значит, произведение Et определено корректно.

Рассмотрим законы ассоциативности (7.7). При $\alpha: A \to A'$ присоединим морфизм $E \to \alpha E$ снизу к диаграмме (7.5). Тогда получим $(\alpha E)(\mu, L, \nu) = (\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \alpha\varphi_{n-1}) = \alpha(\mu, {}^{n-1}_{\ \ 0}L, \varphi_{n-1}) = \alpha[E(\mu, L, \nu)]$, что и доказывает первое из правил (7.7); с помощью аналогичной большой диаграммы для $\gamma: C' \to C$, $E\gamma \in \operatorname{Ext}^1(C', A)$ и $t' \in \operatorname{Tor}_n(G, C')$ устанавливается второе из правил (7.7); третье же вытекает непосредственно из определений.

Говоря, что отображение (7.8) является гомоморфизмом, мы тем самым утверждаем, что произведение Et аддитивно по каждому

множителю E и t в отдельности. Однако равенство $E(t + t') = Et + Et'$ немедленно вытекает из определения (7.3) сложения в группе Tor_n. Другое правило $(E_1 + E_2)t = E_1t + E_2t$ выводится из определения $E_1 + E_2 = \nabla_A(E_1 \oplus E_2)\Delta_C$ сложения расширений. Таким образом доказательство закончено.

Если дана последовательность E и модуль G, то отображение $E_*: \operatorname{Tor}_n(G, C) \to \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A)$ определяется как $E_*t = Et$; следовательно, возникает длинная последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_n(G, A) \to \operatorname{Tor}_n(G, B) \to \operatorname{Tor}_n(G, C) \xrightarrow{E_*} \\ \xrightarrow{E_*} \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A) \to \operatorname{Tor}_{n-1}(G, B) \to \cdots. \end{aligned} \qquad (7.9)$$

Точность этой последовательности будет доказана в следующем параграфе гомологическими средствами.

Элемент $S \in \sigma \in \operatorname{Ext}^m(C, A)$ является длинной точной последовательностью, которую можно записать в виде произведения $S = E_1E_2 \ldots E_m$ коротких точных последовательностей. По определению будем считать произведение σt равным $E_1(E_2 \ldots (E_m t))$. Ввиду (7.7) результат не меняется при конгруэнции $(E''\gamma) \circ E' \equiv E'' \circ (\gamma E')$ длинных точных последовательностей, и поэтому корректно определен «связывающий» гомоморфизм

$$\operatorname{Ext}^m(C, A) \otimes \operatorname{Tor}_n(G, C) \to \operatorname{Tor}_{n-m}(G, A), \quad n \geqslant m. \qquad (7.10)$$

Симметричные результаты получаются для точных последовательностей первого аргумента функтора Tor_n. Именно для последовательности $E' \in \operatorname{Ext}'(K, G)$ и элемента $t \in \operatorname{Tor}_n(K, A)$ определяется произведение $E't \in \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A)$, обладающее свойствами, аналогичными указанным в теореме 7.6, и порождающее связывающие гомоморфизмы

$$\operatorname{Ext}^m(K, G) \otimes \operatorname{Tor}_n(K, A) \to \operatorname{Tor}_{n-m}(G, A), \quad n \geqslant m. \qquad (7.11)$$

Умножения на E и E' коммутируют в следующем смысле:

Теорема 7.7. *Пусть $E = (\varkappa, \sigma): A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ и $E' = (\lambda, \tau): G \rightarrowtail H \twoheadrightarrow K$ являются короткими точными последовательностями левых и правых модулей соответственно, а $t \in \operatorname{Tor}_n(K, C)$. Если $n \geqslant 2$, то $EE't = -E'Et \in \operatorname{Tor}_{n-2}(G, A)$.*

Доказательство. Пусть $t = (\mu, L, \nu)$. Произведения Et и $E't$ вычисляются с помощью диаграмм

$$\begin{array}{ccccc} L^*_{n-1} & \xrightarrow{\delta} & L^*_n & \xrightarrow{\nu} & C \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \| \\ A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{\partial} & L_0 & \xrightarrow{\mu} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0} & & \| \\ G & \xrightarrow{\lambda} & H & \xrightarrow{\tau} & K \end{array}$$

и равны $Et = (\mu, {}^{n-1}_{0}L, \varphi_{n-1})$ и $E't = (\psi_1, {}^{n}_{1}L, \nu)$ соответственно. При $n \geqslant 2$ диаграммы не перекрываются, так что мы можем вычислить $EE't$ с помощью первой диаграммы, заметив, что операторы δ для L^* и δ для $({}^{n}_{1}L)^*$ имеют противоположные знаки. Изменение знака φ в диаграмме дает $EE't = (\psi_1, {}^{n-1}_{1}L, -\varphi_{n-1})$. Аналогично, но без затруднений со знаком получаем $E'Et = (\psi_1, {}^{n-1}_{1}L, \varphi_{n-1})$. Следовательно, $E'E = -EE'$, что и утверждалось.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Взяв свободный модуль L с заданным базисом, показать, что элементы из $\mathrm{Tor}_1(G, C)$ можно считать символами $((g_1, \ldots, g_m), x, (c_1, \ldots, c_n))$, где $g_i \in G$, $c_j \in C$ и x — такая матрица размера $m \times n$ элементов кольца R, что $(g_1, \ldots, g_m)\, x = 0 = x\,(c_1, \ldots, c_n)'$; штрих означает здесь транспонирование. Описать сложение таких символов и показать, что равенство этих символов задается скользящими матричными делителями матрицы x справа и слева.

2. Получить аналогичное определение $\mathrm{Tor}_n(G, C)$.

3. Доказать, что $\mathrm{Tor}_n(P, C) = 0$ для $n > 0$ и проективного модуля P. (Указание: покажите сначала, что это утверждение достаточно доказать для конечно порожденного модуля P.)

Точность последовательности (7.9) может быть доказана непосредственно (т. е. без гомологий) так, как указано в следующей цепочке упражнений.

4. Показать, что произведение двух последовательных отображений из (7.9) равно нулю и что из точности (7.9) для конечно порожденных модулей G вытекает точность для всех модулей G.

5. Для точной последовательности $E' = (\lambda, \tau) : G \rightarrowtail H \twoheadrightarrow K$ со свободным модулем H показать, что отображение $E'_* : \mathrm{Tor}_n(K, C) \to \mathrm{Tor}_{n-1}(G, C)$ является изоморфизмом при $n > 1$ и мономорфизмом с образом $\mathrm{Ker}(\lambda \otimes 1_C)$ при $n = 1$. (Указание: построить обратное отображение.) Показать, что E'_* изоморфно отображает указанную часть диаграммы (7.9) при $n = 1$ на Ker-Coker-последовательность 2×3 диаграммы со строками $G \otimes E$ и $H \otimes E$.

6. Индукцией по n доказать точность указанной части последовательности (7.9).

§ 8. Периодические произведения и резольвенты

Функтор $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ может быть вычислен с помощью проективной резольвенты X модуля C как $H^n(\mathrm{Hom}_R(X, A))$ (теорема III.6.4). Существует аналогичный способ вычисления для $\mathrm{Tor}_n(G, A)$. Если $\varepsilon: X \to G$ есть проективная резольвента правых R-модулей, то$X \otimes_R A$ — это комплекс абелевых групп с граничным гомоморфизмом $\partial \otimes 1_A : X_n \otimes A \to X_{n-1} \otimes A$. Из теоремы сравнения для резольвент ясно, что группа гомологий $H_n(X \otimes {}_R A)$ не зависит от выбора X и, следовательно, определяет функцию от аргумен-

тов G и A, которую мы временно обозначим как

$$\mathrm{Top}_n^R(G, A) = H_n(X \otimes_R A).$$

Очевидно, что это функтор от аргумента A, а также функтор и от аргумента G. Действительно, пусть задан гомоморфизм $\eta : G \to G'$. Выберем проективную резольвенту $\varepsilon' : X' \to G'$, накроем η цепным преобразованием $f : X \to X'$ и построим индуцированное отображение $f_* : H_n(X \otimes A) \to H_n(X' \otimes A)$. По теореме сравнения любые два из таких преобразований f гомотопны, так что f_* зависит только от η и дает отображение $\eta_* : \mathrm{Top}_n(G, A) \to \mathrm{Top}_n(G', A)$. Поэтому Top_n — ковариантный бифунктор, который мы отождествим теперь с Tor_n. (Часто Tor_n определяют так, как мы определили Top_n.)

Теорема 8.1. *Для резольвенты $\varepsilon : X \to G$ модуля G_R и для модуля ${}_RA$ существует гомоморфизм*

$$\omega: \mathrm{Tor}_n^R(G, A) \to H_n(X \otimes_R A), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{8.1}$$

естественный по A. Если X — проективная резольвента, то ω — изоморфизм, естественный по G и A.

Набросок доказательства. Каждый элемент (μ, L, ν) из Tor_n состоит из проективного комплекса $\mu : L \to G$ длины n над G и n-мерного цикла $(1, L_n, \nu) \in \mathrm{Tor}_0(L_n, A)$ комплекса $L \otimes A$; следовательно, он определяет гомологический класс в $H_n(L \otimes A)$. Сравнение $L \to X$ определяет элемент в $H_n(X \otimes A)$, т. е. элемент из Top_n.

Доказательство. Возьмем элемент $t = (\mu, L, \nu)$ из $\mathrm{Tor}_n(G, A)$. По теореме сравнения имеется цепное преобразование $h : L \to X$ проективного комплекса L над G (с отображением μ) в точный комплекс X над G (с отображением ε). Положим

$$\omega(\mu, L, \nu) = \mathrm{cls}(h_n, L_n, \nu) \in H_n(X \otimes A).$$

Это определение имеет смысл, так как $h_n : L_n \to X_n$, $\nu : L_n^* \to A$, и поэтому $(h_n, L_n, \nu) \in \mathrm{Tor}_0(X_n, A) = X_n \otimes A$. Кроме того, элемент (h_n, L_n, ν) является циклом в $X \otimes A$, так как

$$\begin{aligned}\partial(h_n, L_n, \nu) &= (\partial h_n, L_n, \nu) = (h_{n-1}\partial, L_n, \nu) = \\ &= (h_{n-1}, L_{n-1}, \nu\delta^*) = (h_{n-1}, L_{n-1}, 0) = 0.\end{aligned}$$

Гомологический класс этого цикла однозначно определяется элементом (μ, L, ν), так как если $h' : L \to X$ есть другое цепное преобразование, накрывающее 1_G, то существует гомотопия s, для которой $h'_n = h_n + \partial s_n + s_{n-1}\partial$. Тогда

$$\begin{aligned}(h'_n, L_n, \nu) &= (h_n, L_n, \nu) + (\partial s_n, L_n, \nu) + (s_{n-1}\partial, L_n, \nu) = \\ &= (h_n, L_n, \nu) + \partial(s_n, L_n, \nu) + (s_{n-1}, L_{n-1}, 0);\end{aligned}$$

т. е. цикл (h'_n, L_n, ν) равен исходному циклу (h_n, L_n, ν) плюс элемент границы. Далее, если $t = (\mu'\rho, L, \nu)$ и $t' = (\mu', L', \nu\rho^*)$ для некоторого $\rho : L \to L'$, элементы, равные согласно определению группы Tor_n, а $h' : L' \to X$, то $h'\rho : L \to X$ и $\omega t = \omega t'$ в Tor_0.

Для установления гомоморфности ω отметим, что два цепных преобразования $h^i : L^i \to X$ порождают преобразование $\nabla (h^1 \oplus h^2) : L^1 \oplus L^2 \to X$, и поэтому

$$\omega [(\mu_1, L^1, \nu_1) + (\mu_2, L^2, \nu_2)] = \omega [\nabla (\mu_1 \oplus \mu_2), L^1 \oplus L^2, \nabla (\nu_1 \oplus \nu_2)] =$$
$$= \mathrm{cls}\, [\nabla (h^1_n \oplus h^2_n), L^1_n \oplus L^2_n, \nabla (\nu_1 \oplus \nu_2)] = \omega (\mu_1, L^1, \nu_1) + \omega (\mu_2, L^2, \nu_2).$$

Естественность ω по аргументу A проверяется непосредственно, а указанная в теореме естественность по G вытекает из того замечания, что цепное преобразование $f : X \to X'$, накрывающее $\eta : G \to G'$, умноженное на $h : L \to X$, дает преобразование $fh : L \to X'$.

Достаточно показать, что ω — изоморфизм, для свободной резольвенты X. Любой гомологический класс в $X \otimes A$ является классом цикла из некоторого $X' \otimes A$, где X' — подходящий конечно порожденный подкомплекс комплекса X. По следствию 7.4 этот цикл можно записать в виде $(1, X'_n, \nu)$ для некоторого гомоморфизма $\nu : X'^*_n \to A$. Если в комплексе X' с отображением $\varepsilon' : X' \to G$ отбросить все размерности, бо́льшие n, то мы получим один из комплексов L, использованных при определении Tor_n, так что $t = (\varepsilon', X', \nu)$ — это элемент группы $\mathrm{Tor}_n (G, A)$. Вложение $\iota : X' \to X$ показывает, что $\omega t = \mathrm{cls}\, (\iota, X'_n, \nu)$. Следовательно, ω — эпиморфизм.

Остается доказать, что ω — мономорфизм. Предположим, что $\omega t = 0$ для некоторого t. Это значит, что цикл (h_n, L_n, ν) является границей в $X \otimes A$, следовательно, границей в комплексе $X' \otimes A$, где $X' \subset X$ — конечно порожденный свободный подкомплекс комплекса X. Выберем X' так, чтобы он содержал $h(L)$. Тогда преобразование $h : L \to X$ порождает преобразование $h' : L \to X'$, причем элемент $(h'_n, L_n, \nu) = (1, X'_n, \nu h'^*_n)$ является границей $(n+1)$-мерной цепи из $X' \otimes A$. Используя следствие 7.4, запишем эту цепь как $(1, X'_{n+1}, \zeta)$, где $\zeta : X'^*_{n+1} \to A$. Теперь

$$(1, X'_n, \nu h'^*_n) = \partial (1, X'_{n+1}, \zeta) = (1, X'_n, \zeta\partial^*),$$

откуда ввиду утверждения о единственности из того же следствия $\nu h'^*_n = \zeta\partial^*$. Пусть ${}^n_0X'$ — часть комплекса X' от X'_0 до X'_n включительно, а ${}^{n+1}_1X'$ — часть от X'_1 до X'_{n+1}; тогда отображения $h' : L \to {}^n_0X'$ и $\partial : {}^{n+1}_1X' \to {}^n_0X'$ являются цепными преобразованиями. Исходный элемент t из $\mathrm{Tor}_n (G, A)$ принимает вид

$$(\mu, L, \nu) = (\varepsilon' h', L, \nu) = (\varepsilon', {}^n_0X', \nu h'^*) =$$
$$= (\varepsilon', {}^n_0X', \zeta\partial^*) = (\varepsilon'\partial, {}^{n+1}_1X', \zeta) = (0, -, -) = 0,$$

т. е. $t = 0$, что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Удобно иметь гомоморфизм, обратный к ω.

Следствие 8.2. *Если $\eta : Y \to G$ — проективный комплекс над G, то существует гомоморфизм*

$$\tau : H_n (Y \otimes_R A) \to \mathrm{Tor}^R_n (G, A), \tag{8.2}$$

естественный по аргументу A. Если Y — резольвента, то $\tau = \omega^{-1}$.

Доказательство. Пусть X — проективная резольвента модуля G. По теореме сравнения 1_G накрывается цепным преобразованием $f : Y \to X$ так, что отображение $f_* : H_n (Y \otimes {}_RA) \to H_n (X \otimes {}_RA)$ не зависит от выбора f. Положим $\tau = \omega^{-1} f_*$.

Связывающие отображения $t \to Et$ можно также вычислить с помощью резольвент.

Предложение 8.3. *Пусть $\varepsilon : X \to G$ — проективная резольвента. Каждая короткая точная последовательность $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ левых R-модулей порождает точную последовательность $X \otimes E : X \otimes A \rightarrowtail X \otimes B \twoheadrightarrow X \otimes C$ комплексов со связывающим гомоморфизмом $\partial_{X\otimes E} : H_n (X \otimes C) \to H_{n-1} (X \otimes A)$. Для каждого $t \in \mathrm{Tor}_n (G, C)$*

$$\omega (Et) = (-1)^n \partial_{X \otimes E}\, \omega t,$$

т. е. изоморфизм ω теоремы 8.1 коммутирует со связывающими гомоморфизмами.

Доказательство заключается в непосредственном применении соответствующих определений и предоставляется читателю. Из точности гомологической последовательности для последовательности $X \otimes E$ комплексов вытекает

Теорема 8.4. *Короткая точная последовательность $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ левых R-модулей и правый R-модуль G порождают длинную точную последовательность*

$$\dots \to \mathrm{Tor}_n (G, A) \to \mathrm{Tor}_n (G, B) \to \mathrm{Tor}_n (G, C) \xrightarrow{E_*} \mathrm{Tor}_{n-1} (G, A) \to \dots, \tag{8.3}$$

оканчивающуюся членами $\mathrm{Tor}_0 (G, C) = G \otimes C \to 0$. Отображение E_* есть умножение слева на E.

Для проективного модуля $A = P$ в силу точности резольвенты X группы $H_n (X \otimes P)$ и, следовательно, $\mathrm{Tor}_n (G, P)$ обращаются в нуль при $n > 0$. Теперь мы можем аксиоматически охарактеризовать функторы Tor так же, как и функторы Ext (III.10).

Теорема 8.5. *Для фиксированного правого R-модуля G ковариантные функторы* $\operatorname{Tor}_n(G, A)$, $n = 0, 1, \ldots$, *аргумента* A, *взятые вместе с гомоморфизмами* $E_* : \operatorname{Tor}_n(G, C) \to \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A)$, *естественными для коротких точных последовательностей E модулей, характеризуются с точностью до естественного изоморфизма следующими свойствами:*

(i) $\operatorname{Tor}_0(G, A) = G \otimes_R A$ *для всех* A;
(ii) $\operatorname{Tor}_n(G, F) = 0$ *при* $n > 0$ *для всех свободных модулей* F;
(iii) *последовательность* (8.3) *точна для всех* E.

По симметрии (предложение 7.5) $\operatorname{Tor}_n(G, A)$ также порождают длинную точную последовательность, когда первый аргумент G замещается короткой точной последовательностью; отсюда получается соответствующая характеристика Tor_n как функторов аргумента G при фиксированном A. При $R = Z$ из теоремы вытекает, что Tor_1 для абелевых групп совпадает с функтором Tor, определенным в § 6 при помощи образующих и определяющих соотношений.

Теорема 8.6. *Следующие свойства правого R-модуля G эквивалентны:*

(i) *для каждого левого R-модуля C,* $\operatorname{Tor}_1(G, C) = 0$;
(ii) *всякий раз, когда отображение* $\varkappa : A \to B$ *является мономорфизмом, мономорфизмом является и отображение* $1 \otimes \varkappa : G \otimes A \to G \otimes B$;
(iii) *каждая точная последовательность левых R-модулей остается точной после тензорного умножения на модуль G;*
(iv) *если A — левый модуль, а* $G' \rightarrowtail G'' \twoheadrightarrow G$ *— точная последовательность, то последовательность* $G' \otimes A \rightarrowtail G'' \otimes A \twoheadrightarrow G \otimes A$ *точна;*
(v) *для каждого модуля $_RC$ и каждого* $n > 0$, $\operatorname{Tor}_n(G, C) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Обратно, пусть выполнено условие (ii). Тогда из теоремы 5.1 вытекает, что любая короткая точная последовательность остается точной после тензорного умножения на G; поскольку длинная точная последовательность есть произведение коротких, (iii) следует из (ii).

Если выполнено условие (i), то из длинной точной последовательности для Tor_n следуют условия (ii) и (iv). Обратно, пусть выполнено условие (ii). Представим C как фактормодуль $C \cong P/A$ проективного модуля P, так что последовательность

$$0 = \operatorname{Tor}_1(G, P) \to \operatorname{Tor}_1(G, C) \to G \otimes A \to G \otimes P$$

точна, причем $G \otimes A \to G \otimes P$ — мономорфизм ввиду (ii), и, значит, $\operatorname{Tor}_1(G, C) = 0$. Доказательство импликации (iv) $\Rightarrow$ (i) аналогично.

Наконец, (v) $\Rightarrow$ (i); обратно, $C \cong P/A$ и ввиду точности последовательности

$$0 = \operatorname{Tor}_n(G, P) \to \operatorname{Tor}_n(G, C) \to \operatorname{Tor}_{n-1}(G, A),$$

индукцией по n показываем, что (i) $\Rightarrow$ (v).

Модуль G, обладающий эквивалентными свойствами, перечисленными в теореме 8.6, называется *плоским*. Отметим аналогию: проективность модуля P означает, что функтор $\operatorname{Hom}(P, -)$ сохраняет точность последовательностей; плоскость модуля G означает, что функтор $G \otimes -$ сохраняет точность последовательностей. Каждый проективный модуль, очевидно, плоский. Если $R = Z$, то из теоремы 6.2 видно, что плоский Z-модуль — это в точности абелева группа без кручения. Следовательно, плоский модуль может не быть проективным.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\eta : Y \to A$ — проективная резольвента. Установить изоморфизм $\omega' : \operatorname{Tor}_n^R(G, A) \cong H_n(G \otimes_R Y)$. Для точной последовательности $E' : G \rightarrowtail H \twoheadrightarrow K$ доказать, что $\omega' E' = \partial_{E \otimes Y} \omega'$.

2. Для проективной резольвенты X модуля G пусть $S_n(G, X)$ есть n-кратная точная последовательность $0 \to \partial X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to G \to 0$. Показать, что изоморфизм ω из теоремы 8.1 определяется равенством $\omega t = \operatorname{cls} \partial^{-1}[S_n(G, X)\, t]$.

§ 9. Тензорное произведение комплексов

Если K_R и $_RL$ — цепные комплексы правых и левых R-модулей соответственно, то их *тензорное произведение* $K \otimes_R L$ — это цепной комплекс абелевых групп, у которого

$$(K \otimes_R L)_n = \sum_{p+q=n} K_p \otimes_R L_q, \tag{9.1}$$

а граничные гомоморфизмы определены на образующих $k \otimes l$ равенством

$$\partial(k \otimes l) = \partial k \otimes l + (-1)^{\deg k}\, k \otimes \partial l. \tag{9.2}$$

Если K и L — положительные комплексы, то таким же является и комплекс $K \otimes L$, а прямая сумма в (9.1) конечна, причем p меняется от 0 до n. Формула взятия границы (9.2) напоминает формулу для производной произведения двух функций; знак $(-1)^{\deg k}$ появляется в соответствии с правилом коммутирования: всякий раз, когда два символа u и v переставляются, появляется знак $(-1)^e$, где $e =$ (степень u) $\times$ (степень v). Так как во втором члене формулы

(9.2) гомоморфизм ∂ степени -1 переставляется за символ k, то появляется этот знак. Используя его, можно установить, что $\partial\partial = 0$.

Если $f: K \to K'$ и $g: L \to L'$ — цепные преобразования, то определение $(f \otimes g)(k \otimes l) = fk \otimes gl$ задает цепное преобразование $f \otimes g: K \otimes L \to K' \otimes L'$; этим путем тензорное произведение превращается в ковариантный бифунктор от комплексов. Для цепных гомотопий справедливо

Предложение 9.1. *Если $f_1 \simeq f_2: K \to K'$ и $g_1 \simeq g_2: L \to L'$, то $f_1 \otimes g_1 \simeq f_2 \otimes g_2$. Подробнее: цепные гомотопии $s: f_1 \simeq f_2$ и $t: g_1 \simeq g_2$ порождают гомотопию*

$$u: f_1 \otimes g_1 \simeq f_2 \otimes g_2 : K \otimes L \to K' \otimes L', \tag{9.3}$$

определяемую формулой $u = s \otimes g_1 + f_2 \otimes t$, т. е.

$$u(k \otimes l) = sk \otimes g_1 l + (-1)^{\deg k} f_2 k \otimes tl.$$

Последняя формула написана в соответствии с соглашением о знаке, поскольку символ t степени 1 переставлен за символ k.

Доказательство. Во-первых, s и t определяют гомотопии $s \otimes 1: f_1 \otimes 1 \simeq f_2 \otimes 1: K \otimes L \to K' \otimes L$ и $1 \otimes t: 1 \otimes g_1 \simeq 1 \otimes g_2$. Перемножение этих двух гомотопий (по предложению II.2.3) и дает нужный результат.

Следствие 9.2. *Если $f: K \to K'$ и $g: L \to L'$ — цепные эквивалентности, то и $f \otimes g: K \otimes L \to K' \otimes L'$ — цепная эквивалентность.*

В качестве первого применения тензорного произведения комплексов мы покажем, что периодические произведения могут быть вычислены с помощью резольвент обоих аргументов.

Теорема 9.3. *Если $\varepsilon: X \to G$ и $\eta: Y \to A$ — проективные резольвенты модулей G_R и ${}_RA$ соответственно, то преобразование $\varepsilon \otimes 1: X \otimes Y \to G \otimes Y$ индуцирует изоморфизм $H_n(X \otimes_R Y) \cong H_n(G \otimes_R Y)$ и, следовательно, изоморфизм*

$$H_n(X \otimes_R Y) \cong \operatorname{Tor}_n^R(G, A), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{9.4}$$

Доказательство. Пусть F^k, $k = 0, 1, \ldots,$ — подкомплекс комплекса $X \otimes Y$, составленный из всех групп $X_i \otimes Y_j$, где $j \leqslant k$, и пусть M^k — подкомплекс комплекса $G \otimes Y$, состоящий из всех групп $G \otimes Y_j$, $j \leqslant k$. Тогда

$$\begin{gathered} 0 = F^{-1} \subset F^0 \subset F^1 \subset \ldots \subset X \otimes Y, \\ 0 = M^{-1} \subset M^0 \subset M^1 \subset \ldots \subset G \otimes Y, \end{gathered} \tag{9.5}$$

а $\varepsilon \otimes 1$ отображает F^k в M^k. Поскольку $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y \pm x \otimes \partial y$ в $X \otimes Y$, факторкомплекс F^k/F^{k-1} изоморфен комплексу

$$X_0 \otimes Y_k \xleftarrow{\partial \otimes 1} X_1 \otimes Y_k \leftarrow X_2 \otimes Y_k \leftarrow \cdots .$$

Аналогично комплекс M^k/M^{k-1} состоит только из группы цепей $G \otimes Y_k$ размерности k. Так как каждый модуль Y_k проективен, а последовательность $0 \leftarrow G \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \ldots$ точна, то точна и последовательность

$$0 \leftarrow G \otimes Y_k \leftarrow X_0 \otimes Y_k \leftarrow X_1 \otimes Y_k \leftarrow \cdots .$$

Это равносильно утверждению, что преобразование $\varepsilon \otimes 1: F^k/F^{k-1} \to M^k/M^{k-1}$ индуцирует изоморфизм групп гомологий для всех k. С другой стороны, $\varepsilon \otimes 1$ отображает точную последовательность $F^{k-1} \rightarrowtail F^k \twoheadrightarrow F^k/F^{k-1}$ в соответствующую последовательность для комплексов M, что приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}(F^k/F^{k-1}) & \to & H_n(F^{k-1}) & \to & H_n(F^k) & \to & H_n(F^k/F^{k-1}) & \to & H_{n-1}(F^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(M^k/M^{k-1}) & \to & H_n(M^{k-1}) & \to & H_n(M^k) & \to & H_n(M^k/M^{k-1}) & \to & H_{n-1}(M^{k-1}). \end{array}$$

Мы утверждаем, что отображение $H_n(F^k) \to H_n(M^k)$ является изоморфизмом для всех n и k. Это верно для отрицательного k и всех n. Предположим по индукции, что это же верно для чисел, меньших k, и всех n. Значит, четыре внешних вертикальных отображения указанной диаграммы являются изоморфизмами, поэтому среднее вертикальное отображение является изоморфизмом в силу леммы о пяти гомоморфизмах. Этим заканчивается индукция.

Каждый цикл или граница размерности n из $X \otimes Y$ будет появляться из комплекса F^{n+1}. Следовательно, из изоморфизма $H_n(F^k) \cong H_n(M^k)$ для больших k (именно для $k \geqslant n+1$) вытекает искомый изоморфизм $H_n(X \otimes Y) \cong H_n(G \otimes Y)$. Но $H_n(G \otimes Y) \cong \operatorname{Tor}_n(G, A)$ в силу симметричного случая теоремы 8.1, чем и заканчивается доказательство.

Последовательность подкомплексов F^k комплекса $X \otimes Y$, упорядоченная, как в (9.5), называется *фильтрацией* комплекса $X \otimes Y$. Использованный здесь метод сравнения двух комплексов с помощью фильтрации каждого из них будет сформулирован в общем виде в гл. XI.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для комплексов K, L, M над коммутативным кольцом установить сопряженную ассоциативность $\operatorname{Hom}(K \otimes L, M) \cong \operatorname{Hom}(K, \operatorname{Hom}(L, M))$.

2. Пусть $f: K \to L$ — цепное преобразование, F^k — фильтрация K, M^k — фильтрация L и $f(F^k) \subset M^k$. Пусть $f_*: H_n(F^k/F^{k-1}) \to H_n(M^k/M^{k-1})$

— изоморфизм для всех n и k и для каждого n существует такое k, что вложения индуцируют изоморфизмы $H_n(F^k) \cong H_n(K)$, $H_n(M^k) \cong H_n(L)$. Показать, что $f_* : H_n(K) \to H_n(L)$ — изоморфизмы для всех n.

3. Доказать, что $\operatorname{Ext}^n(C,A) \cong H^n(\operatorname{Hom}(X,Y))$, где $\varepsilon : X \to C$ есть проективная резольвента, $\eta : A \to Y$ есть инъективная резольвента.

§ 10. Формула Кюннета

Тензорное произведение комплексов соответствует прямому произведению пространств X и Y в том смысле, что можно доказать (VIII.8) цепную эквивалентность сингулярного комплекса $S(X \times Y)$ комплексу $S(X) \otimes S(Y)$. Это обстоятельство определяет задачу настоящего параграфа: описать группы гомологий комплекса $K \otimes L$ в терминах групп гомологий комплексов K и L.

Формула взятия границы (9.2) показывает, что тензорное произведение $u \otimes v$ циклов является циклом в $K \otimes L$ и что тензорное произведение цикла и границы есть граница. Следовательно, для циклов u и v комплексов K и L соответственно формула

$$p(\operatorname{cls} u \otimes \operatorname{cls} v) = \operatorname{cls}(u \otimes v) \tag{10.1}$$

корректно определяет гомологический класс в $K \otimes L$, так что порождается гомоморфизм

$$p : H_m(K) \otimes_R H_q(L) \to H_{m+q}(K \otimes_R L)$$

абелевых групп, называемый (внешним) *гомологическим умножением*. Прямая сумма $\Sigma H_m \otimes H_q$ для $m + q = n$ при этом отображается в $H_n(K \otimes {}_R L)$, образ совпадает со всей группой $H_n(K \otimes L)$ при выполнении определенных условий для модулей $B_m(K)$, $C_m(K)$ и $H_m(K)$ границ, циклов и классов гомологий комплекса K соответственно.

Теорема 10.1. (*Тензорная формула Кюннета.*) *Если L — комплекс левых R-модулей, а K — комплекс правых R-модулей, удовлетворяющий условию*

(i) *$C_n(K)$ и $H_n(K)$ — проективные модули для всех n; тогда для всех n гомологическое умножение является изоморфизмом*

$$p : \sum_{m+q=n} H_m(K) \otimes_R H_q(L) \cong H_n(K \otimes_R L). \tag{10.2}$$

Этот результат является следствием более общей теоремы, которая, помимо других обстоятельств, показывает, что образ гомоморфизма p обычно не исчерпывает группу $H(K \otimes_R L)$.

Теорема 10.2. (*Формула Кюннета.*) *Если L — комплекс левых R-модулей, а K — комплекс правых R-модулей, удовлетворяющий условию*

(ii) *модули $C_n(K)$ и $B_n(K)$ являются плоскими для всех n; тогда для каждой размерности n существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \sum_{m+q=n} H_m(K) \otimes_R H_q(L) \xrightarrow{p} H_n(K \otimes_R L) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} \sum_{m+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_m(K), H_q(L)) \to 0, \tag{10.3}$$

в которой p — гомологическое умножение, а β — естественный гомоморфизм.

Ни один из комплексов K, L не обязан быть положительным.

Теорема 10.1 вытекает из последней теоремы. Действительно, поскольку $H_n(K) \cong C_n(K)/B_n(K)$, то из предположения (i) о проективности модуля $H_n(K)$ следует, что эпиморфизм $C_n \twoheadrightarrow H_n$ расщепляем, т. е. модуль $B_n(K)$ является прямым слагаемым проективного модуля C_n и поэтому сам проективен. Так как каждый проективный модуль плоский (теорема 8.6), то модули C_n и B_n плоские, что и требуется в условии (ii). Более того, $\operatorname{Tor}_1(H_m, H_q) = 0$ для плоских модулей H_m, так что (10.3) сводится к (10.2).

Прежде чем доказывать теорему 10.2, мы рассмотрим специальный случай, когда граница комплекса K равна нулю. Для этого достаточно положить $K = G$.

Лемма 10.3. *Если G — плоский правый R-модуль, то $p : G \otimes H_n(L) \cong H_n(G \otimes L)$.*

Доказательство. Положим $H_n = H_n(L)$, $C_n = C_n(L)$, $B_n = B_n(L)$. Высказывание о том, что H_n есть n-я группа гомологий комплекса L, равносильно высказыванию о точности строк и столбцов коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[u] \arrow[r] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & H_n \arrow[r] & 0. \\
 & L_{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & L_n \arrow[d, "\partial"] & & \\
 & & L_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

Действительно, точность длинного столбца означает, что C_n — ядро $\partial : L_n \to L_{n-1}$, а точность короткого столбца дает представление B_n в виде ∂L_{n+1}; точная строка определяет H_n как фактормодуль C_n/B_n. Возьмем тензорное произведение каждого члена этой диаграммы на модуль G. Поскольку G — плоский модуль, новая диаграмма точна, что и устанавливает изоморфизм группы $G \otimes H_n$ с группой гомологий $H_n\,(G \otimes L)$, причем этот изоморфизм задается отображением p. Значит, лемма доказана.

Для доказательства теоремы 10.2 мы рассмотрим семейства $C_n = C_n\,(K)$ и $D_n = K_n/C_n \cong B_{n-1}\,(K)$ как комплексы плоских модулей с нулевой границей, так что последовательность $C \rightarrowtail K \twoheadrightarrow D$ есть точная последовательность комплексов. Так как модуль $D_n \cong B_{n-1}\,(K)$ является плоским по условию, то $\operatorname{Tor}_1(D_n,\ L_q) = 0$, поэтому последовательность $E: C \otimes L \rightarrowtail K \otimes L \twoheadrightarrow D \otimes L$ также является точной последовательностью комплексов. Обычная точная гомологическая последовательность для последовательности E имеет вид

$$\begin{gathered}H_{n+1}(D \otimes L) \xrightarrow{E_{n+1}} H_n\,(C \otimes L) \longrightarrow H_n\,(K \otimes L) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_n\,(D \otimes L) \xrightarrow{E_n} H_{n-1}\,(C \otimes L),\end{gathered}$$

где E_n — связывающие гомоморфизмы. Другими словами, последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} E_{n+1} \longrightarrow H_n\,(K \otimes L) \longrightarrow \operatorname{Ker} E_n \longrightarrow 0 \tag{10.4}$$

является точной. Мы хотим сравнить ее с последовательностью (10.3), которая имеет тот же средний член $H_n\,(K \otimes L)$. Пусть ∂' обозначает отображение $D_{m+1} \to C_m$, индуцированное ∂.

Модуль гомологий $H_m\,(K)$ можно описать при помощи короткой точной последовательности $S: D_{m+1} \rightarrowtail C_m \twoheadrightarrow H_m\,(K)$. Возьмем тензорное произведение этой последовательности и модуля $H_q\,(L)$. Поскольку C_m — плоский модуль, $\operatorname{Tor}_1(C_m,\ H_q\,(L)) = 0$, так что длинная точная последовательность для периодического произведения, просуммированная по $m + q = n$, принимает вид

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \sum \operatorname{Tor}_1(H_m(K),\ H_q(L)) \arrow[r, tail, "S_*"] & \sum D_{m+1} \otimes H_q(L) \arrow[r, "\partial' \otimes 1"] \arrow[d, "p"] & \sum C_m \otimes H_q(L) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "p"] & \sum H_m(K) \otimes H_q(L) \\ & H_{n+1}(D \otimes L) \arrow[r, "E_{n+1}"] & H_n\,(C \otimes L). & \end{tikzcd} \tag{10.5}$$

Поскольку D_{m+1} и C_m — плоские модули, вертикальные отображения являются изоморфизмами по лемме. Если мы будем знать, что квадратная часть диаграммы (10.5) коммутативна, то мы получим описание $\operatorname{Ker}(E_{n+1})$ с помощью $\operatorname{Ker}(\partial' \otimes 1)$; более точно $\operatorname{Ker}(E_{n+1}) \cong \operatorname{Ker}(\partial' \otimes 1) \cong \Sigma \operatorname{Tor}_1(H\,(K),\ H\,(L))$ и $\operatorname{Coker} E_{n+1} \cong \operatorname{Coker}(\partial' \otimes 1) \cong \Sigma H\,(K) \otimes H\,(L)$. Таким образом, последовательность (10.4) превращается в искомую последовательность (10.3). Можно также проверить, что первое отображение из (10.3) действительно является гомологическим умножением, в то время как второе отображение β описывается при помощи коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} H_n\,(K \otimes L) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \sum\limits_{m+q=n} \operatorname{Tor}_1(H_{m-1}(K),\ H_q(L)) \arrow[d, "S_*"] \\ H_n\,((K/C) \otimes L) & \sum\limits_{m+q=n} (K/C)_m \otimes H_q(L), \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd} \tag{10.6}$$

в которой $K \to K/C$ — каноническая проекция, p — изоморфизм, S_m — короткая точная последовательность $S_m: K_m/C_m \rightarrowtail C_{m-1} \twoheadrightarrow H_{m-1}\,(K)$ и S_* — сумма соответствующих связывающих гомоморфизмов для Tor_1. Эта диаграмма показывает естественность гомоморфизма β, однако отметим, что его определение *не* симметрично относительно K и L; если предположить, что модули $C_n\,(L)$ и $B_n\,(L)$ также являются плоскими, то симметричные относительно L рассуждения устанавливают существование отображения β', возможно отличного от β'. Мы покажем ниже (предложение 10.6), что $\beta = \beta'$ для комплексов абелевых групп; мы предполагаем, что то же самое верно и в общем случае.

Осталось показать, что квадрат в диаграмме (10.5) коммутативен. Элемент $\Sigma d_i \otimes \operatorname{cls} v_i$ из $D_{m+1} \otimes H_q\,(L)$ переходит при отображении p в $\operatorname{cls}(\Sigma d_i \otimes v_i)$. По определению связывающий гомоморфизм E_{n+1} действует следующим образом: берется прообраз $\Sigma k_i \otimes v_i \in K \otimes L$ цикла $\Sigma d_i \otimes v_i$ из $D \otimes L$, затем берется прообраз в $C \otimes L$ границы $\Sigma \partial' d_i \otimes v_i$ этой цепи и, наконец, берется гомологический класс последнего прообраза. Отсюда следует, что $\operatorname{cls}(\Sigma \partial' d_i \otimes v_i) = p\,(\partial' \otimes 1)\,(\Sigma d_i \otimes \operatorname{cls} v_i)$, т. е. коммутативность указанного квадрата.

В случае комплексов абелевых групп мы можем сказать больше.

Теорема 10.4. (*Формула Кюннета для абелевых групп.*) *Если K и L — (не обязательно положительные) цепные комплексы абелевых групп и если в группах K_n нет элементов конечного порядка, кроме* 0, *то последовательность* (10.3) *точна и расщепляется гомоморфизмом, который не является естественным.*

Доказательство. Поскольку группы K_n без кручения, подгруппы C_n и B_n также являются группами без кручения и, значит, плоскими Z-модулями; поэтому предыдущая теорема дает точную последовательность (10.3). Остается показать, что она расщепляется. Предположим сначала, что K и L — комплексы свободных абелевых групп K_m и L_q. Тогда $D_m \cong \partial K_m \subset K_{m-1}$ — подгруппа свободной абелевой группы и, значит, сама свободна, так что группа K_m, как расширение C_m с помощью D_m, расщепляется: $K_m \cong C_m \oplus D_m$. Поэтому гомоморфизм $\operatorname{cls}: C_m \to H_m\,(K)$ можно продолжить до гомоморфизма $\varphi_m : K_m \to H_m(K)$, где $\varphi_m c = \operatorname{cls} c$ для каждого цикла c. Существует аналогичный гомоморфизм $\psi_q : L_q \to H_q(L)$ для свободного комплекса L. Тензорное произведение этих групповых гомоморфизмов порождает гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : (K \otimes L)_n \to \Sigma H_m(K) \otimes H_q(L)$; поскольку φ и ψ аннулируют группу границ, то эту же группу аннулирует и отображение $\varphi \otimes \psi$. Значит, существует индуцированное отображение $(\varphi \otimes \psi)_*: H_n(K \otimes L) \to \Sigma H_m(K) \otimes H_q(L)$. Для циклов u и v, $(\varphi \otimes \psi)_* p(\operatorname{cls} u \otimes \operatorname{cls} v) = (\varphi \otimes \psi)_* \operatorname{cls}(u \otimes v) = \varphi u \otimes \psi v = \operatorname{cls} u \otimes \operatorname{cls} v$, так что $(\varphi \otimes \psi)_* p = 1$ и $(\varphi \otimes \psi)_*$ — левый обратный к p, расщепляющий нашу последовательность.

Теперь рассмотрим любые комплексы K и L (причем комплекс K без кручения). Ниже мы покажем, что можно так выбрать свободный комплекс K' и цепное преобразование $f : K' \to K$, что каждое отображение $f_* : H_p(K') \to H_p(K)$ является изоморфизмом. При аналогичном выборе преобразования $g : L' \to L$ естественность p и β означает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \sum H(K') \otimes H(L') & \xrightarrow{p} & H(K' \otimes L') & \xrightarrow{\beta} & \sum \operatorname{Tor}(H(K'), H(L')) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f \otimes g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Tor}(f_*, g_*)} & \\ 0 \to & \sum H(K) \otimes H(L) & \xrightarrow{p} & H(K \otimes L) & \xrightarrow{\beta} & \sum \operatorname{Tor}(H(K), H(L)) & \to 0. \end{array}$$

В силу выбора f и g внешние вертикальные отображения — изоморфизмы. Следовательно, по короткой лемме о пяти гомоморфизмах среднее вертикальное отображение также является изоморфизмом. Таким образом, нижняя точная последовательность изоморфна верхней точной последовательности, которая, как только что было установлено, расщепляется. Значит, и нижняя последовательность расщепляется.

Это доказательство, принадлежащее А. Дольду, опирается на следующую лемму.

Лемма 10.5. *Если K — комплекс абелевых групп, то существует такой комплекс X свободных абелевых групп и такое цепное преобразование $f : X \to K$, что отображение $f_* : H_n(X) \to H_n(K)$ является изоморфизмом для всех размерностей n.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве X прямую сумму комплексов $X^{(n)}$ и цепных преобразований $f^{(n)} : X^{(n)} \to K$, для которых $(f^{(n)})_* : H_n(X^{(n)}) \cong H_n(K)$ и $H_q(X^{(n)}) = 0$ для $q \neq n$. При фиксированном n построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & R_{n+1} & \xrightarrow{j} & F_n & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & \\ & K_{n+1} & \to & K_n. & \end{array}$$

Для этого сначала представим группу C_n n-мерных циклов комплекса K как факторгруппу свободной группы F_n; тогда получим отображение $\xi : F_n \to C_n \subset K_n$. Затем положим $R_{n+1} = \xi^{-1} B_n$ и $j : R_{n+1} \to F_n$ — вложение. Поскольку группа R_{n+1} свободна и $\xi j R_{n+1} = \partial K_{n+1}$, то ξj можно поднять до отображения η, которое делает диаграмму коммутативной. Теперь верхнюю строку рассмотрим как комплекс $X^{(n)}$ с группой гомологий $F_n / R_{n+1} \cong C_n / B_n = H_n(K)$ в размерности n и нулевыми группами гомологий во всех остальных размерностях. Вертикальные отображения образуют цепное преобразование, индуцирующее изоморфизм групп гомологий в размерности n, что и требовалось.

Теорема 10.4 показывает, что гомологии комплекса $K \otimes L$ порождаются циклами двух типов. Тип I — это цикл $u \otimes v$, построенный из циклов $u \in K$, $v \in L$; по нашей теореме $\operatorname{Im} p$ порождается классами циклов типа I. Рассмотрим тройку $\langle \operatorname{cls} u, m, \operatorname{cls} v \rangle$ в $\operatorname{Tor}_1(H(K), H(L))$; тогда существуют такие цепи k и l, что $\partial k = mu$, $\partial l = mv$ для одного и того же целого числа m; значит, элемент

$$(1/m)\,\partial(k \otimes l) = u \otimes l + (-1)^{n+1} k \otimes v, \quad \dim u = n,$$

есть цикл (типа II). Можно проверить, что гомологический класс этого элемента определяется $\operatorname{cls} u$ и $\operatorname{cls} v$ по модулю $\operatorname{Im} p$. Отсюда возникает следующее выражение для гомоморфизма β в формуле Кюннета.

Предложение 10.6. *Для такого элемента $t = \langle \operatorname{cls} u, m, \operatorname{cls} v \rangle \in \operatorname{Tor}_1(H_n(K), H(L))$, что $\partial k = mu$, $\partial l = mv$, формула $\gamma t = (-1)^{n+1} \operatorname{cls}(1/m)\,\partial(k \otimes l)$ определяет гомоморфизм*

$$\gamma : \operatorname{Tor}_1(H(K), H(L)) \to H(K \otimes L)/p[H(K) \otimes H(L)].$$

При выполнении условий теоремы 10.4 γ является изоморфизмом, обратный к которому индуцирует β.

Доказательство. Поскольку $D = K/C$, отображение $H(K \otimes L) \to H(D \otimes L)$ переводит $\gamma t = \operatorname{cls}[(-1)^{n+1} u \otimes l + k \otimes v]$ в $\operatorname{cls}[(k + C) \otimes v]$. Отображение pS_* из (10.6) переводит t в $(k \oplus C) \otimes \operatorname{cls} v$, а затем в $\operatorname{cls}[(k + C) \otimes v]$. Совпадение этих двух результатов доказывает, что γ индуцирует β указанным способом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что теорема 10.1 остается верной, если условие (i) заменить или условием (iii), т. е. когда $C_n(K)$, $B_n(K)$ и $H_n(K)$ — плоские модули для всех n, или условием (iv), т. е. когда $C_n(K)$, $B_n(K)$ и $H_n(L)$ — плоские модули для всех n.

2. Для конечно порожденных комплексов K и L свободных абелевых групп вычислить числа Бетти и коэффициенты кручения комплекса $K \otimes L$, зная эти числа для комплексов K и L (см. II.6; эта формулировка дает первоначальную теорему Кюнета [1923, 1924]).

3. Доказать теорему 10.4 следующим образом. Достаточно взять в качестве K конечно порожденный комплекс, следовательно, можно считать K элементарным комплексом (упражнение II.2.2). В этом случае каждый цикл из $K \otimes L$ можно записать как сумму циклов типа I и II; установить, что p — мономорфизм, а γ из предложения 10.6— изоморфизм (Эйленберг — Маклейн [1954, § 12]).

4. Сформулировать формулу Кюннета для комплекса $K \otimes L \otimes M$.

5. Используя эту формулу, установить для абелевых групп изоморфизмы

$$\operatorname{Tor}(A, \operatorname{Tor}(B, C)) \cong \operatorname{Tor}(\operatorname{Tor}(A, B), C),$$
$$\operatorname{Ext}(A, \operatorname{Ext}(B, C)) \cong \operatorname{Ext}(\operatorname{Tor}(A, B), C).$$

§ 11. Теоремы об универсальных коэффициентах

Теперь мы можем перечислить различные группы гомологий комплекса. Если K — комплекс правых R-модулей, а $_RA$ и G_R — модули, то, рассматривая A как комплекс (с тривиальной градуировкой $A = A_0$ и границей $\partial = 0$), можно построить комплексы

$$K, \quad K \otimes_R A, \quad \operatorname{Hom}_R(K, R), \quad \operatorname{Hom}_R(K, G),$$

производные от комплекса K. Группы гомологий

$$H_n(K \otimes_R A), \quad H^n(K, G) = H^n(\operatorname{Hom}_R(K, G))$$

известны как n-мерная группа гомологий комплекса K с коэффициентами в модуле A и как n-мерная группа когомологий комплекса K с коэффициентами в G соответственно. Согласно нашим правилам о перемещении индексов вверх или вниз, $H^n(\operatorname{Hom}_R(K, G))$ — это $H_{-n}(\operatorname{Hom}_R(K, G))$. Когда K — положительный комплекс, $H_n(K \otimes_R A) = 0$ для $n < 0$, в то время как $H^n(K, G) = 0$ для $n < 0$; отсюда обычное написание индекса для групп гомологий внизу и для групп когомологий наверху. Для положительного комплекса K группа $H_n(K \otimes_R A)$ иногда записывается как $H_n(K, A)$. Предупреждение: не поднимать *этот* индекс, так как он приобрел бы иной смысл $H^{-n}(K, A) = H_n(\operatorname{Hom}(K, A))$.

Рассмотрим комплексы абелевых групп ($R = Z$). Если каждая группа K_n свободна, то теорема об универсальных коэффициентах (теорема III.4.1)— это точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(K), G) \to H^n(K, G) \to \operatorname{Hom}(H_n(K), G) \to 0.$$

Сейчас мы получим соответствующую теорему для групп гомологий.

Теорема 11.1. *Если K — (не обязательно положительный) комплекс абелевых групп без элементов конечного порядка и A — абелева группа, то для каждой размерности n существует расщепляющаяся точная последовательность групп*

$$0 \to H_n(K) \otimes A \xrightarrow{p} H_n(K \otimes A) \to \operatorname{Tor}(H_{n-1}(K), A) \to 0, \qquad (11.1)$$

в которой оба гомоморфизма естественны и действие гомоморфизма p определено на цикле u из K равенством $p(\operatorname{cls} u \otimes a) = \operatorname{cls}(u \otimes a)$. Если K — комплекс векторных пространств над некоторым полем и V — векторное пространство над тем же полем, то $p: H_n(K) \otimes V \cong H_n(K \otimes V)$.

Этот результат есть следствие предыдущей теоремы 10.4. Прямое доказательство просто в случае, когда комплекс K свободен. Будем писать ∂_n вместо $\partial \otimes 1: K_n \otimes A \to K_{n-1} \otimes A$. Точная последовательность

$$0 \to C_n \to K_n \to C_{n-1} \to H_{n-1} \to 0$$

является свободной резольвентой группы H_{n-1}; тензорное произведение этой последовательности и группы A имеет поэтому нулевую группу гомологий в размерности 2, $\operatorname{Tor}(H_{n-1}, A)$ в размерности 1 и $H_{n-1} \otimes A$ в размерности 0. Первое означает, что $C_n \otimes A$ можно рассматривать как подгруппу в $K_n \otimes A$; действительно,

$$\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset C_n \otimes A \subset \operatorname{Ker} \partial_n \subset K_n \otimes A.$$

Второе означает, что $\operatorname{Ker} \partial_n / C_n \otimes A \cong \operatorname{Tor}(H_{n-1}, A)$; третье (с заменой n на $n+1$), что $C_n \otimes A / \operatorname{Im} \partial_{n+1} \cong H_n \otimes A$. Следовательно, $H_n(K \otimes A) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ есть расширение группы $H_n \otimes A$ с помощью $\operatorname{Tor}(H_{n-1}, A)$, что и утверждается точной последовательностью (11.1).

Следствие 11.2. *Если K и K' — комплексы абелевых групп, каждый из которых не имеет элементов конечного порядка, и если $f: K \to K'$ — такое цепное преобразование, что $f_*: H_n(K) \cong H_n(K')$ — изоморфизм для каждого n, то $f_*: H_n(K \otimes A) \to H_n(K' \otimes A)$ — изоморфизм для каждой абелевой группы A и каждого n.*

Доказательство. Нужно написать последовательности (11.1) для комплексов K и K' и применить лемму о пяти гомоморфизмах, как в доказательстве следствия III.4.6.

Эти теоремы об универсальных коэффициентах выражают гомологию и когомологию комплекса K с любыми коэффициентами в терминах так называемой «целой» гомологии $H_n(K)$, по крайней мере в том случае, когда группы K_n свободны. Если K_n — свободные конечно порожденные абелевы группы, то существуют соответствующие выражения в терминах «целой» когомологии $H^n(K, Z)$ (см. ниже упражнение 2).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить для абелевых групп K и A естественные гомоморфизмы $\mathrm{Hom}(K, Z) \otimes A \to \mathrm{Hom}(K, A)$ и $K \otimes A \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(K, Z), A)$. Показать, что это изоморфизмы, если K — конечно порождённая свободная группа, и что они являются цепными преобразованиями, если K — комплекс.

2. Пусть K — конечно порожденный комплекс свободных абелевых групп. Обозначим $H^n(\mathrm{Hom}(K, Z))$ через $H^n(K)$. Используя упражнение 1 и теоремы об универсальных коэффициентах, построить естественные точные последовательности

$$0 \longrightarrow H^n(K) \otimes G \longrightarrow H^n(K, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H^{n+1}(K), G) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H^{n+1}(K), A) \longrightarrow H_n(K \otimes A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^n(K), A) \longrightarrow 0.$$

3. Если K — комплекс конечно порожденных свободных абелевых групп, то показать, что n-е число Бетти b_n комплекса K (II.2) равно размерности векторного пространства $H_n(K \otimes Q)$, где Q — поле рациональных чисел.

4. Для комплекса K из упражнения 3 и поля Z_p вычетов по модулю p вычислить размерность векторного пространства $H_n(K \otimes Z_p)$, зная числа Бетти и коэффициенты кручения комплекса K.

5. Для комплекса K векторных пространств над полем F обозначим через K^* сопряженный комплекс $\mathrm{Hom}(K, F)$. Установить естественные изоморфизмы $H^n(K^*) \cong [H_n(K)]^*$, если каждое пространство K_n конечномерно.

З а м е ч а н и я. Тензорные произведения долго использовались в неявном виде как $G \otimes_R \sum Re_i \cong \sum Ge_i$ или как $V \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V^*, W)$. Их центральное место в полилинейной алгебре было подчеркнуто в трактате Бурбаки [1948] на эту тему. Тензорные произведения абелевых групп впервые были явно определены Уитни [1938]. Теорема об универсальных коэффициентах 11.1 была доказана Чехом [1935], который, таким образом, ввел (но не назвал) периодическое умножение Tor_1. Картан и Эйленберг использовали резольвенты для определения более высоких периодических умножений. Описание (§ 6) Tor_1 для абелевых групп при помощи образующих и соотношений (Эйленберг — Маклейн [1954], § 12) полезно при изучении спектра Бокштейна комплекса K абелевых групп (о различных группах $H_n(K, Z_m)$ и их связи см. Бокштейн [1958], Палермо [1957]). Аналогичное описание (упражнения 7.1, 7.2) Tor_n с помощью образующих и соотношений (Маклейн [1955]) включает некоторые новые довольно таинственные функторы —«произведения скольжения» (например, T в упражнении 6.7) и приводит к абстрактной характеристике (§ 7) элементов из Tor_n как троек $\langle \mu, L, \nu \rangle$.

ГЛАВА VI

Типы алгебр

§ 1. Задание алгебр диаграммами

Эта глава посвящена изучению формальных свойств различных типов алгебр над фиксированным коммутативным кольцом $\mathbf{K}$. Употребляются следующие сокращения: $\otimes$ для $\otimes_{\mathbf{K}}$ и Hom для $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}$.

Далее, $\mathbf{K}$-алгебра Λ — это кольцо, которое является также $\mathbf{K}$-модулем, причем выполняется равенство

$$k(\lambda_1\lambda_2) = (k\lambda_1)\lambda_2 = \lambda_1(k\lambda_2)$$

для всех $k \in \mathbf{K}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Если 1_Λ — единичный элемент алгебры Λ, то равенство $I(k) = k1_\Lambda$ определяет кольцевой гомоморфизм $I : \mathbf{K} \to \Lambda$. В действительности $\mathbf{K}$-алгебру можно описать как кольцо Λ вместе с таким кольцевым гомоморфизмом $I : \mathbf{K} \to \Lambda$, что для всех k и λ выполняется $(Ik)\lambda = \lambda(Ik)$, т. е. $I\mathbf{K}$ лежит в центре кольца Λ.

Умножение $\lambda_1\lambda_2$ удовлетворяет обоим законам дистрибутивности и, значит, является $\mathbf{K}$-билинейной функцией. Следовательно, формула $\pi(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = \lambda_1\lambda_2$ определяет $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $\pi : \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$. В этих терминах $\mathbf{K}$-алгебру можно описать как $\mathbf{K}$-модуль Λ с такими двумя гомоморфизмами $\mathbf{K}$-модулей

$$\pi = \pi_\Lambda : \Lambda \otimes \Lambda \longrightarrow \Lambda, \quad I = I_\Lambda : \mathbf{K} \longrightarrow \Lambda, \tag{1.1}$$

что диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Lambda\otimes\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\pi"] & \Lambda\otimes\Lambda \arrow[d, "\pi"] \\ \Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\pi"] & \Lambda, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{K}\otimes\Lambda \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "I\otimes 1"] & \Lambda \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, equal] & \Lambda\otimes\mathbf{K} \arrow[d, "1\otimes I"] \\ \Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "\pi"] & \Lambda & \Lambda\otimes\Lambda \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

коммутативны. Действительно, первая диаграмма показывает, что умножение ассоциативно, а левая и правая половины второй диаграммы показывают, что $I(1_{\mathbf{K}})$ — правая и левая единицы относительно умножения в Λ и что $\pi(Ik \otimes \lambda) = k\lambda = \pi(\lambda \otimes Ik)$.

Если $\mathbf{K}$ совпадает с кольцом Z целых чисел, то Z-алгебра — это просто кольцо, так что тем самым дано диаграммное определение кольца с помощью тензорных произведений абелевых групп. Двойственные диаграммы определяют «кокольцо» или «коалгебру». Алгебра может быть градуирована степенями таким образом, что $\deg(\lambda_1\lambda_2) = \deg\lambda_1 + \deg\lambda_2$ или может иметь дифференциал ∂, для которого $\partial(\lambda_1\lambda_2) = (\partial\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1(\partial\lambda_2)$. В этой главе проводится единообразное исследование этих различных типов алгебр и модулей над ними. В качестве примера алгебр с дифференциалом рассмотрим сначала некоторые резольвенты над кольцом многочленов.

Пусть $P = F[x]$ — обычное кольцо многочленов от неизвестного x с коэффициентами из поля F; на самом деле P можно рассматривать как F-алгебру, но временно мы будем рассматривать P только как коммутативное кольцо. Поскольку $F = F[x]/(x)$ — факторкольцо P по главному идеалу (x), состоящему из всех кратных неизвестного x, мы можем считать FP-модулем, так что формула $\varepsilon(x) = 0$ определяет P-модульный гомоморфизм $\varepsilon: P \to F$. Построим последовательность

$$0 \leftarrow F \xleftarrow{\varepsilon} P \xleftarrow{\partial} Pu \leftarrow 0 \qquad (1.3)$$

P-модулей, где Pu — свободный P-модуль с одним образующим u, а ∂ есть P-модульный гомоморфизм, для которого $\partial u = x$. Эта последовательность точна и является свободной резольвентой модуля F. Для любого P-модуля A группа $\operatorname{Ext}^1_P(F, A)$ может быть вычислена при помощи этой резольвенты как первая группа когомологий комплекса

$$\operatorname{Hom}_P(P, A) \to \operatorname{Hom}_P(Pu, A) \to 0.$$

Ввиду изоморфизма $\operatorname{Hom}_P(P, A) \cong A$ это есть комплекс $\delta: A \to A$ с $\delta a = -xa$, так что $\operatorname{Ext}^1_P(F, A) \cong A/(x)A$. Взяв тензорное произведение резольвенты (1.3) с модулем B, мы определим $\operatorname{Tor}_1^P(F, B)$ как подмодуль модуля B, состоящий из всех таких элементов $b \in B$, что $xb = 0$. Например, $\operatorname{Ext}^1_P(F, F) \cong F$ и $\operatorname{Tor}_1^P(F, F) \cong$ $\cong F$.

Аналогично, пусть $P = F[x, y]$ — кольцо многочленов от двух неизвестных x и y над полем F. Если (x, y) обозначает идеал, порожденный x и y, то поле $F = P/(x, y)$ снова является P-модулем, а отображение $\varepsilon: P \to F$ является P-модульным гомоморфизмом, для которого $\varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(y)$. Ядро гомоморфизма ε можно записать как образ свободного P-модуля с двумя образующими u и v при модульном гомоморфизме $\partial_1: Pu \oplus Pv \to P$, $\partial_1 u = x$, $\partial_1 v = y$. Ядро этого отображения ∂_1 состоит из всех выражений $fu + gv$, где f, g — такие многочлены из P, что $fx + gy = 0$. В силу единственности разложения многочленов на множители должны быть выполнены соотношения $f = -hy$, $g = hx$ для некоторого многочлена h. Следовательно, это ядро является образом свободного модуля $P(uv)$ с одним образующим uv при гомоморфизме ∂_2, для которого $\partial_2(huv) = (hx)v - (hy)u = fu + gv$. Поскольку в P нет делителей нуля, ∂_2 — мономорфизм. Таким образом, мы показали, что последовательность

$$0 \leftarrow F \xleftarrow{\varepsilon} P \xleftarrow{\partial_1} Pu \oplus Pv \xleftarrow{\partial_2} P(uv) \leftarrow 0 \qquad (1.4)$$

точна. С помощью этой резольвенты можно вычислить, что $\operatorname{Ext}^1_P(F, F) \cong F \oplus F \cong \operatorname{Tor}_1^P(F, F)$ и что $\operatorname{Ext}^2_P(F, F) \cong F \cong$ $\cong \operatorname{Tor}_2^P(F, F)$.

В резольвенте (1.4) опустим F и запишем $E = P \oplus Pu \oplus Pv \oplus$ $\oplus P(uv)$. Теперь положим $vu = -uv$, $u^2 = 0$, $v^2 = 0$; тем самым превращаем E в кольцо, в котором 1_P действует как единица, а произведения задаются, например, равенствами $(fu)(gv) = (fg)(uv) =$ $= -(gv)(fu)$. Это кольцо называется «внешним» кольцом над P с двумя образующими u и v. Его элементы можно «градуировать», снабдив их размерностями следующим образом: $\dim 1_P = 0$, $\dim u = 1 = \dim v$ и $\dim(uv) = \dim u + \dim v = 2$, в соответствии с их обычными размерностями в резольвенте (1.4). Тогда размерность произведения есть сумма размерностей сомножителей. Далее, граничный гомоморфизм резольвенты теперь становится модульным гомоморфизмом $\partial: E \to E$ степени -1, причем $\partial u = x$, $\partial v = y$ и $\partial(uv) = (\partial u)v - u(\partial v)$. Отсюда вытекает формула для дифференциала произведения двух элементов e_1, e_2 кольца E:

$$\partial(e_1e_2) = (\partial e_1)e_2 + (-1)^{\dim e_1} e_1(\partial e_2). \qquad (1.5)$$

Эта «формула Лейбница» типична для кольца, которое есть одновременно комплекс. Другие примеры помещены в следующей главе, которую можно читать параллельно этой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать эквивалентность трех определений $\mathbf{K}$-алгебры, данных в тексте.

2. Показать, что если J — идеал кольца $\mathbf{K}$, то $\mathbf{K}/J$ есть $\mathbf{K}$-алгебра.

3. Для кольца $P = F[x, y]$ и произвольного P-модуля A показать, что $\operatorname{Ext}^2_P(F, A)$ — это фактормодуль $A/(xA \cup yA)$, а

$$\operatorname{Ext}^1_P(F, A) \cong [(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A,\ xa_2 = ya_1]/[(xa, ya) \mid a \in A].$$

4. Получить аналогичную формулу для $\operatorname{Tor}_1^P(F, F)$, где $P = F[x, y]$.

5. Построить свободную резольвенту для F как модуля над кольцом многочленов $F[x, y, z]$ от трех неизвестных.

§ 2. Градуированные модули

(Внешне) *Z-градуированным* **K**-*модулем* называется семейство $M=\{M_n,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\}$ **K**-модулей M_n; элемент m из M_n называют также элементом *степени* n в M (коротко, $\deg m = n$). *Градуированный подмодуль* $S \subset M$ — это семейство подмодулей $S_n \subset M_n$, по одному для каждого n. Для двух Z-градуированных модулей L и M *гомоморфизм* $f: L \to M$ степени d — это семейство $f=\{f_n : L_n \to M_{n+d};\quad n \in Z\}$ **K**-модульных гомоморфизмов f_n. Множество всех гомоморфизмов $f: L \to M$ фиксированной степени d является **K**-модулем $\operatorname{Hom}_d(L, M)$. Произведение гомоморфизмов степеней d и d' имеет степень $d+d'$. Можно Z-градуированный модуль M записывать также с верхними индексами, как $M^n = M_{-n}$; в частности, $\operatorname{Hom}^d(L, M) = \operatorname{Hom}_{-d}(L, M)$.

Градуированный **K**-модуль M — это Z-градуированный модуль, у которого $M_n = 0$ при $n<0$. Такие градуированные модули наиболее часто встречаются и будут ниже изучаться, причем читателю предоставляется формулировка соответствующих фактов для Z-градуированных модулей. Предупреждение: многие авторы называют «градуированными» Z-градуированные модули и «положительно градуированными» — градуированные модули в нашем смысле.

В *тривиально градуированном* модуле M $M_n = 0$ для $n \neq 0$.

Градуированные **K**-модули M с морфизмами $\operatorname{hom}(L, M) = \operatorname{Hom}_0(L, M)$ — гомоморфизмами степени 0 образуют категорию. Каждый гомоморфизм $f: L \to M$ степени 0 имеет ядро, образ, коядро и кообраз, определенные естественным образом (т. е. почленно для каждого n); они являются градуированными модулями с обычными свойствами. Для фиксированной степени d, $\operatorname{Hom}_d(L, M)$ — бифунктор, определенный в этой категории, контравариантный по L и ковариантный по M. Иначе говоря, семейство $\operatorname{Hom}(L, M) = \{\operatorname{Hom}_d(L, M)\}$ — это бифунктор из этой категории в категорию Z-градуированных **K**-модулей. Оба бифунктора точны слева в смысле теорем I.6.1 и I.6.2.

Тензорное произведение двух градуированных модулей L и M есть градуированный модуль, заданный формулой

$$(L \otimes M)_n = \sum_{p+q=n} L_p \otimes M_q; \tag{2.1}$$

кратко: градуировка в тензорном произведении определяется равенством $\deg(l \otimes m) = \deg l + \deg m$. Если $f: L \to L'$ и $g: M \to M'$ — гомоморфизмы степеней d и e соответственно, то гомоморфизм $f \otimes g: L \otimes M \to L' \otimes M'$ степени $d+e$ определяется формулой

$$(f \otimes g)(l \otimes m) = (-1)^{(\deg l)(\deg g)}(fl \otimes gm), \tag{2.2}$$

согласно соглашению о знаке (перестановка g и l). Если $\deg f = \deg g = 0$, то это определение превращает $L \otimes M$ в ковариантный бифунктор внутри категории градуированных модулей. Этот функтор точен справа, как и в теореме V.5.1.

Тензорное произведение градуированных модулей удовлетворяет тем же формальным тождествам, что и в неградуированном (= тривиально градуированном) случае, т. е. имеются естественные изоморфизмы степени 0

$$\alpha: L \otimes (M \otimes N) \cong (L \otimes M) \otimes N, \quad \alpha[l \otimes (m \otimes n)] = (l \otimes m) \otimes n, \tag{2.3}$$

$$\tau: L \otimes M \cong M \otimes L, \quad \tau[l \otimes m] = (-1)^{(\deg l)(\deg m)} m \otimes l, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{K} \otimes M \cong M \cong M \otimes \mathbf{K}, \quad k \otimes m \to km \leftarrow m \otimes k. \tag{2.5}$$

В этих формулах $\otimes = \otimes_{\mathbf{K}}$, а основное кольцо **K** рассматривается как тривиально градуированный модуль **K**, в котором $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$, $\mathbf{K}_n = 0$ при $n \neq 0$. Мы рассматриваем эти изоморфизмы как отождествления. Мы можем это сделать, так как они согласованы явным образом друг с другом; если даны два произвольных итерированных тензорных произведения одних и тех же модулей $M_1, \ldots, M_s$, то подходящая комбинация этих изоморфизмов порождает каноническое отображение первого тензорного произведения во второе. При этом, возможно, вычеркивается или добавляется множитель **K** и учитывается знак в соответствии с соглашением о знаке, как в (2.4).

Те же самые свойства $\operatorname{Hom}_{\mathbf{K}}$ и $\otimes_{\mathbf{K}}$ справедливы для Z-градуированных модулей и для множества других случаев, описываемых ниже.

Биградуированный **K**-модуль B есть семейство $B = \{B_{p,q} \mid p, q \in Z\}$ **K**-модулей $B_{p,q}$, причем $B_{p,q} = 0$, если $p<0$ или $q<0$; гомоморфизм $f: B \to B'$ *бистепени* (d, e) — это семейство $\{f_{p,q} : B_{p,q} \to B'_{p+d,q+e}\}$ **K**-модульных гомоморфизмов. Так, тензорное произведение двух градуированных модулей L и M первоначально является биградуированным модулем $\{L_p \otimes M_q\}$, который суммированием (2.1) превращается в просто градуированный модуль. Аналогично тензорное произведение двух биградуированных модулей B и C есть четырежды градуированный модуль, который порождает биградуированный модуль суммированием

$$(B \otimes C)_{m,n} = \sum_{p+q=m} \sum_{r+s=n} B_{p,r} \otimes C_{q,s}. \tag{2.6}$$

Говорят, что элемент из $B_{p,q}$ имеет *полную* степень $p+q$. Естественные изоморфизмы (2.3), (2.4) и (2.5) верны и для биградуированных модулей, если использовать полную степень в знаке при транспозиции τ.

Аналогично определяются *триградуированные*, Z-биградуированные модули и т. п.

Внутренне градуированный $\mathbf{K}$-модуль A — это $\mathbf{K}$-модуль с заданным разложением в прямую сумму $A = \Sigma A_n$; другими словами, заданы модуль A и его подмодули A_n, $n = 0, 1, \ldots$, причем каждый элемент $a \neq 0$ имеет единственное представление в виде конечной суммы ненулевых элементов из различных подмодулей A_n. Элементы из A_n называются *однородными* элементами модуля A степени n. Каждый внутренне градуированный модуль A определяет внешне градуированный модуль $\{A_n\}$. Обратно, каждый внешне градуированный модуль $M = \{M_n\}$ определяет ассоциированный внутренне градуированный модуль $M_* = \Sigma M_n$. Более того, $(L \otimes M)_* = L_* \otimes M_*$, однако $\mathrm{Hom}(L_*, M_*)$ больше, чем $[\mathrm{Hom}(L, M)]_*$, так как $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $f: L_* \to M_*$ может не быть суммой конечного числа однородных гомоморфизмов.

В большей части литературы «градуированный модуль» понимается как внутренне градуированный модуль. Следуя предложению Джона Мура, мы выбрали как рабочий аппарат внешнее градуирование. Этот выбор имеет то преимущество, что мы всегда оперируем только с однородными элементами, а не с суммами $m_0 + \cdots + m_n$ элементов различных степеней. Аналогично нам необходимы только однородные гомоморфизмы $L \to M$, а не произвольные гомоморфизмы $L_* \to M_*$. Более того, наш выбор дает возможность не использовать бесконечные прямые суммы, так что мы можем определить градуированный объект M над любой категорией $\mathscr{M}$ как семейство $\{M_n\}$ объектов из $\mathscr{M}$ с морфизмами различных степеней точно так же, как и для модулей. Например, *градуированное множество* S — это семейство множеств $\{S_n, n=0, 1, 2, \ldots\}$.

§ 3. Градуированные алгебры

Градуированная $\mathbf{K}$*-алгебра* Λ — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль, снабженный двумя $\mathbf{K}$-модульными гомоморфизмами $\pi = \pi_\Lambda: \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ и $I = I_\Lambda: \mathbf{K} \to \Lambda$, имеющими степень 0 и делающими коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\pi \otimes 1} & \Lambda \otimes \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\pi} & \Lambda, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{K} \otimes \Lambda & = & \Lambda & = & \Lambda \otimes \mathbf{K} \\ \downarrow{\scriptstyle I \otimes 1} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes I} \\ \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\pi} & \Lambda & \xleftarrow{\pi} & \Lambda \otimes \Lambda. \end{array} \tag{3.1}$$

В первой диаграмме утверждается, что «умножение» $\lambda\mu = \pi(\lambda \otimes \mu)$ ассоциативно, а во второй, что элемент $I_\Lambda(1_\mathbf{K}) = 1_\Lambda$ является двусторонней единицей для этого умножения. *Гомоморфизмом* $f: \Lambda \to \Lambda'$ двух градуированных алгебр над одним и тем же кольцом $\mathbf{K}$ называется такой гомоморфизм степени 0 градуированных $\mathbf{K}$-модулей, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\pi_\Lambda} & \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle f \otimes f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Lambda' \otimes \Lambda' & \xrightarrow{\pi_{\Lambda'}} & \Lambda', \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{I_\Lambda} & \Lambda \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{K} & \xrightarrow{I_{\Lambda'}} & \Lambda' \end{array} \tag{3.2}$$

коммутативны.

Эти определения можно сформулировать также в терминах элементов. Градуированная алгебра Λ — это семейство $\mathbf{K}$-модулей $\{\Lambda_n, n = 0, 1, \ldots\}$ вместе с выделенным элементом $1 \in \Lambda_0$ и функцией, которая сопоставляет каждой паре элементов λ, μ произведение $\lambda\mu$, $\mathbf{K}$-билинейное и удовлетворяющее соотношениям

$$\deg(\lambda\mu) = \deg\lambda + \deg\mu,$$
$$\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu, \quad 1\lambda = \lambda = \lambda 1.$$

Аналогично гомоморфизм $f: \Lambda \to \Lambda'$ двух алгебр — это функция, переводящая элементы из Λ в элементы той же степени из Λ' и сохраняющая структуру алгебры:

$$\begin{array}{lll} f(\lambda+\mu) = f\lambda + f\mu, \quad f(k\lambda) = k(f\lambda) & \text{(модульная структура)}, \\ \deg(f\lambda) = \deg\lambda & \text{(градуировка)}, \\ f(\lambda\mu) = (f\lambda)(f\mu), \quad f(1_\Lambda) = 1_{\Lambda'} & \text{(произведение)}. \end{array} \tag{3.3}$$

Мы подчеркиваем, что каждый гомоморфизм f переводит единицу в единицу. Для алгебр, как и для колец, предполагаем, что $1 \neq 0$.

Градуированная подалгебра $\Sigma \subset \Lambda$ является таким градуированным подмодулем модуля Λ, что $1_\Lambda \in \Sigma$ и что $\sigma\sigma' \in \Sigma$, если $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Значит, подмодуль Σ сам является градуированной алгеброй с той же единицей, что и в Λ, а вложение $i: \Sigma \to \Lambda$ является мономорфизмом градуированных $\mathbf{K}$-алгебр. Если $f: \Lambda \to \Lambda'$ есть гомоморфизм алгебр, то образ $f(\Sigma)$ есть градуированная подалгебра алгебры Λ'.

Градуированный *левый идеал* $L \subset \Lambda$ — это такой градуированный подмодуль алгебры Λ, что $\Lambda L \subset L$ (т. е. для любых $\lambda \in \Lambda$ и $l \in L$, $\lambda l \in L$). Следовательно, левый идеал L замкнут относительно умножения, но может не быть подалгеброй, поскольку может не содержать единицы 1_Λ. Если $a_1, \ldots, a_s$ — элементы алгебры Λ, то наименьший градуированный левый идеал, содержащий все элементы a_i, часто обозначается через $\Lambda(a_1, \ldots, a_s)$ или просто $(a_1, \ldots, a_s)$, где Λ подразумевается. Подмодуль элементов n-й степени этого идеала состоит из всех сумм $\Sigma\lambda_i a_i$, где элементы $\lambda_i \in \Lambda$ имеют степени $n - \deg a_i$. Градуированный правый идеал $R \subset \Lambda$ аналогично определяется условием $R\Lambda \subset R$.

Градуированный (двусторонний) *идеал* J алгебры Λ — это градуированный подмодуль, который одновременно является левым и правым градуированным идеалом Λ. Фактормодуль Λ/J есть градуированная алгебра с произведением, определенным тем условием, что проекция η: $\Lambda \to \Lambda/J$ является гомоморфизмом градуированных алгебр. Эта факторалгебра вместе с отображением η характеризуется с точностью до изоморфизма тем, что любой гомоморфизм $f: \Lambda \to \Lambda'$ градуированных алгебр, для которого $f(J) = 0$, представим единственным образом в виде произведения $f = g\eta$, где g — некоторый гомоморфизм алгебр g: $\Lambda/J \to \Lambda'$. Более того, ядро любого гомоморфизма f: $\Lambda \to \Lambda'$ градуированных алгебр является идеалом в Λ (замечание: в случае $J = \Lambda$ в «факторкольце» $\Lambda/J = 0$ получаем $1 = 0$ в противоречии с нашим соглашением о том, что $1 \neq 0$).

Градуированная алгебра Λ *коммутативна* (некоторые авторы говорят — *косокоммутативна* или *антикоммутативна*), если для любых элементов λ и μ

$$\lambda\mu = (-1)^{\deg \lambda \deg \mu} \mu\lambda, \tag{3.4}$$

т. е. если $\pi_\Lambda = \pi_\Lambda \tau$: $\Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$, где τ — транспозиция (2.4). Вследствие этого определения элементы четной степени перестановочны в обычном смысле. Если к тому же $\lambda^2 = 0$ для каждого элемента λ нечетной степени, то алгебра Λ называется *строго коммутативной*. Если основное кольцо $\mathbf{K}$ есть поле характеристики, не равной 2, то любая коммутативная градуированная $\mathbf{K}$-алгебра строго коммутативна, так как при нечетной $\deg \lambda$ в силу (3.4) $\lambda\lambda = -\lambda\lambda$, $2\lambda^2 = 0$, а так как 2^{-1} лежит в $\mathbf{K}$, то $\lambda^2 = 0$.

Например, *градуированная полиномиальная алгебра* $P = P_\mathbf{K}[x]$ может быть определена для любой степени $d \geqslant 0$ «неизвестного» x. Если $d = 0$, то P — это обычное кольцо многочленов от неизвестного x с коэффициентами из $\mathbf{K}$. Если $d > 0$, то P — градуированный модуль, у которого $P_n = 0$ для $n \not\equiv 0 \pmod d$, а P_{qd} для каждого $q \geqslant 0$ — свободный $\mathbf{K}$-модуль с одним образующим x^q; произведение определяется формулой $x^p x^q = x^{p+q}$. Если d четно, то эта полиномиальная алгебра коммутативна. Алгебра P характеризуется с точностью до изоморфизма тем фактом, что она свободна относительно x. А именно, для любой градуированной $\mathbf{K}$-алгебры Λ и любого выбранного элемента λ_d степени d существует такой единственный гомоморфизм f: $P \to \Lambda$ градуированных алгебр, что $fx = \lambda_d$.

Внешняя алгебра $E = E_\mathbf{K}[u]$ от одного символа u нечетной степени d строится с помощью свободного $\mathbf{K}$-модуля $\mathbf{K}u$ с одним образующим u как градуированная алгебра E, в которой $E_0 = \mathbf{K}$, $E_d = \mathbf{K}u$, $E_n = 0$ для $0 \neq n \neq d$, а умножение определено следующими равенствами: $1u = u = u1$, $u^2 = 0$. Она строго коммутативна. Мы можем также определить E как факторалгебру $P_\mathbf{K}[x]/(x^2)$, где x — неизвестное степени d, а (x^2) обозначает (двусторонний) идеал в P, порожденный x^2. Алгебра E может быть охарактеризована как строго коммутативная алгебра, свободная относительно u; для любой строго коммутативной алгебры Λ с выбранным элементом $\lambda_d \in \Lambda_d$ существует такой единственный гомоморфизм $f: E_\mathbf{K}[u] \to \Lambda$ градуированных алгебр, что $f(u) = \lambda_d$.

Тензорная алгебра $T(M)$ $\mathbf{K}$-модуля M является градуированным $\mathbf{K}$-модулем

$$T_0(M) = \mathbf{K}, \quad T_n(M) = M^n = M \otimes \ldots \otimes M \qquad (n \text{ сомножителей}),$$

умножение в котором задается отождествляющим отображением $\pi: M^p \otimes M^q \cong M^{p+q}$. Другими словами, произведение образуется «приписыванием» одного множителя к другому:

$$(m_1 \otimes \ldots \otimes m_p)(m_1' \otimes \ldots \otimes m_q') = m_1 \otimes \ldots \otimes m_p \otimes m_1' \otimes \ldots \otimes m_q'.$$

Ясно, что T — это ковариантный функтор из категории $\mathbf{K}$-модулей в категорию градуированных $\mathbf{K}$-алгебр. Вообще, если M — градуированный $\mathbf{K}$-модуль, то тензорная алгебра $T(M)$ определяется аналогично:

$$T_0(M) = \mathbf{K} \oplus \sum_{p=1}^{\infty} (M_0)^p, \quad T_n(M) = \sum M_{d_1} \otimes \ldots \otimes M_{d_t},$$

где вторая сумма берется по всем d_i, для которых $d_1 + \ldots + d_t = n$. При $M = M_1$ это определение включает в себя предыдущий случай. Градуированная алгебра $T(M)$ с очевидным $\mathbf{K}$-модульным включением $M \to T(M)$ (степени 0) характеризуется с точностью до изоморфизма следующим свойством «универсальности».

Предложение 3.1. *Если M — градуированный модуль, а Λ — градуированная алгебра над $\mathbf{K}$, то каждый гомоморфизм $g: M \to \Lambda$ градуированных модулей степени нуль продолжается до единственного гомоморфизма f: $T(M) \to \Lambda$ градуированных алгебр.*

Доказательство. Положим $f(m_1 \otimes \ldots \otimes m_p) = (gm_1) \ldots (gm_p)$.

В частности, если M — свободный градуированный $\mathbf{K}$-модуль F с n образующими $x_1, \ldots, x_n$, каждый из которых имеет определенную степень, то $T(F)$ является *свободной градуированной алгеброй* с этими образующими в том смысле, что всякое отображение множеств ξ: $\{x_1, \ldots, x_n\} \to \Lambda$ степени нуль продолжается единственным образом до гомоморфизма $T(F) \to \Lambda$ градуированных алгебр.

Если модуль F имеет только один образующий элемент x, то $T(F)$ является полиномиальной алгеброй от неизвестного x; если V — векторное пространство над полем $\mathbf{K}$, то $T(V)$— тензорная алгебра пространства V над полем $\mathbf{K}$, состоящая из всех ковариантных тензоров с некоторым числом индексов (сравните с V.2).

Основное кольцо $\mathbf{K}$ само есть градуированная $\mathbf{K}$-алгебра с тривиальной градуировкой. *Пополненной* градуированной алгеброй называется градуированная алгебра Λ, снабженная гомоморфизмом $\varepsilon\colon \Lambda \to \mathbf{K}$ градуированных алгебр. Полиномиальная, внешняя и тензорная алгебры обладают, очевидно, таким пополнением. Пополненная алгебра называлась также «дополненной» алгеброй (Картан — Эйленберг). В этой книге под «пополнением» объекта C в категории $\mathscr{C}$ всегда будет пониматься морфизм $\varepsilon\colon C \to B$ в некоторый фиксированный «базисный» объект B. Так, в категории $\mathbf{K}$-алгебр базисный объект — это алгебра $\mathbf{K}$, в категории цепных комплексов абелевых групп — это тривиальный комплекс Z и т. д.

Исходя из градуированных $\mathbf{K}$-модулей, мы определили градуированные $\mathbf{K}$-алгебры при помощи морфизма умножения π и морфизма единицы I, которые дают коммутативные диаграммы (3.1). Исходя из других типов модулей, мы получим соответствующие типы алгебр. Так, диаграммы (1.2) для (неградуированных) $\mathbf{K}$-модулей определяют $\mathbf{K}$-алгебры; мы будем называть их *неградуированными* $\mathbf{K}$-алгебрами, когда различение этих типов алгебр необходимо. Аналогично Z-градуированные модули порождают *Z-градуированные алгебры*, биградуированные модули — *биградуированные алгебры*, внутренне градуированные модули — *внутренне градуированные алгебры*. Как и раньше, внутренне и внешне градуированные алгебры эквивалентны: каждая градуированная алгебра Λ, определяет внутренне градуированную алгебру $\Lambda_* = \sum \Lambda_n$, в которой умножение определяется с помощью билинейного соотношения

$$(\lambda_0 + \ldots + \lambda_p)(\mu_0 + \ldots + \mu_q) = \sum \lambda_i \mu_j, \quad \lambda_i \in \Lambda_i,\ \mu_j \in \Lambda_j.$$

Заметим, что градуированная алгебра не является алгеброй, в то время как внутренне градуированная алгебра может рассматриваться просто как алгебра (без всякой градуировки). Внутренне градуированные идеалы, определенные, как и выше, обычно называются *однородными идеалами*; они находятся среди идеалов ассоциированной неградуированной алгебры.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать свободный градуированный $\mathbf{K}$-модуль с некоторым градуированным множеством образующих.

2. Описать биградуированную тензорную алгебру биградуированного модуля и доказать аналог предложения 3.1.

3. Пусть S — множество элементов градуированной алгебры Λ. Показать, что множество всех однородных сумм произведений $\lambda s \lambda'$, где $s \in S$, есть градуированный идеал в Λ, наименьший среди идеалов, содержащих S. Он называется *идеалом, порожденным* S (или *натянутым* на S).

4. Показать, что градуированная $\mathbf{K}$-алгебра может быть описана как грудированное кольцо R, снабженное таким гомоморфизмом $I:\mathbf{K} \to R$ градуированных колец, что $(Ik)\,r = r\,(Ik)$ для всех $k \in \mathbf{K}$, $r \in R$.

§ 4. Тензорные произведения алгебр

Тензорным произведением двух градуированных $\mathbf{K}$-алгебр Λ и Σ является их тензорное произведение $\Lambda \otimes \Sigma$ как градуированных модулей с гомоморфизмом умножения, определенным как последовательное выполнение отображений

$$(\Lambda\otimes\Sigma)\otimes(\Lambda\otimes\Sigma) \xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} \Lambda\otimes\Lambda\otimes\Sigma\otimes\Sigma \xrightarrow{\pi\otimes\pi} \Lambda\otimes\Sigma, \quad (4.1)$$

где τ — транспозиция (2.4) (со знаком) Σ и Λ, и с гомоморфизмом единицы, заданным отображением $I \otimes I:\mathbf{K} = \mathbf{K}\otimes\mathbf{K} \to \Lambda\otimes\Sigma$. В терминах элементов умножение определяется так:

$$(\lambda\otimes\sigma)(\lambda'\otimes\sigma') = (-1)^{\deg\sigma\deg\lambda'}\,\lambda\lambda'\otimes\sigma\sigma',$$

а тождественное отображение алгебры $\Lambda\otimes\Sigma$ равно $1_\Lambda \otimes 1_\Sigma$. При этом выполнены все аксиомы для градуированной алгебры. Если $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ и $g\colon \Sigma \to \Sigma'$ — гомоморфизмы градуированных алгебр, то и отображение $f\otimes g:\Lambda\otimes\Sigma \to \Lambda'\otimes\Sigma'$ является гомоморфизмом. Отображения $\lambda \to \lambda\otimes 1_\Sigma$, $\sigma \to 1_\Lambda\otimes\sigma$ определяют гомоморфизмы

$$\Lambda \to \Lambda\otimes\Sigma \leftarrow \Sigma$$

градуированных алгебр. Вместе с этими отображениями тензорное произведение $\Lambda\otimes\Sigma$ характеризуется с точностью до изоморфизма следующим свойством:

Предложение 4.1. *Если $f:\Lambda\to\Omega$ и $g:\Sigma\to\Omega$ — гомоморфизмы градуированных $\mathbf{K}$-алгебр, причем*

$$(f\lambda)(g\sigma) = (-1)^{\deg\lambda\deg\sigma}(g\sigma)(f\lambda) \quad (4.2)$$

для любых $\lambda\in\Lambda$, $\sigma\in\Sigma$, то существует единственный гомоморфизм $h:\Lambda\otimes\Sigma\to\Omega$ градуированных алгебр, для которого $h(\lambda\otimes 1) = f(\lambda)$, $h(1\otimes\sigma) = g(\sigma)$.

Доказательство предоставляется читателю (положить $h(\lambda\otimes\sigma) = f(\lambda)\,g(\sigma)$).

Если алгебра Ω коммутативна, то условие (4.2) выполняется автоматически. Значит, в категории коммутативных градуированных алгебр диаграмма $\Lambda \to \Lambda\otimes\Sigma \leftarrow \Sigma$ универсальна относительно концов Λ и Σ. В категории всех (не обязательно коммутативных) алгебр универсальная диаграмма определяет свободное произведение (Кон [1959]), а коуниверсальная диаграмма — прямое произведение $\Lambda \times \Sigma$, которое будет определено ниже в VII.(5.1).

Тензорное произведение алгебр вместе с приведенной характеристикой применяется во всех подходящих случаях: тензорного произведения $\mathbf{K}$-алгебр (тривиальная градуировка), колец ($\mathbf{K} = Z$), биградуированных алгебр. В каждом случае тензорное произведение алгебр коммутативно ($\tau: \Lambda \otimes \Sigma \cong \Sigma \otimes \Lambda$), ассоциативно и удовлетворяет соотношению $\mathbf{K} \otimes \Lambda \cong \Lambda$; другими словами, естественные изоморфизмы (2.3) — (2.5) верны и для алгебр. Тензорное произведение алгебр также называется их *кронекеровым произведением* или, в более ранней литературе, их «прямым» произведением.

Каждой градуированной алгебре Λ мы ставим в соответствие также градуированную *противоположную алгебру* Λ^{op}. Она определяется как градуированный $\mathbf{K}$-модуль Λ с той же единицей и новым умножением $\pi_\Lambda \tau$: $\Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ (берется произведение с соответствующим знаком тех же множителей, но в обратном порядке). Во избежание неудобства от записи двух различных произведений для одной и той же пары элементов мы также говорим, что градуированный модуль Λ^{op} является изоморфной копией градуированного модуля Λ относительно отображения $\lambda \to \lambda^{op}$, а произведение определяется формулой $\lambda^{op}\mu^{op} = (-1)^{\deg\lambda \deg\mu}(\mu\lambda)^{op}$. Очевидна ассоциативность этого умножения. Например, если Λ — тривиально градуированная алгебра квадратных матриц порядка n с элементами из кольца $\mathbf{K}$ с обычным матричным умножением «строка на столбец», то Λ^{op} — кольцо квадратных матриц с умножением «столбец на строку». То же построение противоположной алгебры применимо для построения противоположного кольца (как уже отмечалось в V.7), противоположной биградуированной алгебры и т. д., и в каждом случае существуют естественные изоморфизмы

$$(\Lambda^{op})^{op} \cong \Lambda, \quad (\Lambda \otimes \Sigma)^{op} \cong \Lambda^{op} \otimes \Sigma^{op}. \tag{4.3}$$

Тензорное произведение может быть использовано для построения различных примеров алгебр.

Пусть $P_\mathbf{K}[x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, — градуированная полиномиальная алгебра от неизвестного x_i четной степени $d_i \geqslant 0$ (§ 3). Коммутативная градуированная алгебра

$$P_\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n] = P_\mathbf{K}[x_1] \otimes \ldots \otimes P_\mathbf{K}[x_n] \tag{4.4}$$

называется *градуированной* полиномиальной алгеброй от неизвестных x_i. В каждой размерности m, $P_\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ будет свободным $\mathbf{K}$-модулем, свободными образующими которого будут все элементы вида

$$x_1^{e_1} \otimes \ldots \otimes x_n^{e_n}, \quad \text{причем } e_1 d_1 + \ldots + e_n d_n = m$$

(если $e_i = 0$, то x_i^0 обозначает $1_\mathbf{K}$); при перемножении двух таких образующих складываются соответствующие показатели степени. Эта полиномиальная алгебра является *свободной* коммутативной алгеброй с образующими x_i четной степени в смысле следующей характеристики.

Предложение 4.2. *Если Λ — коммутативная градуированная алгебра, то отображение множеств ξ: $\{x_1, \ldots, x_n\} \to \Lambda$, для которого $\deg(\xi x_i) = \deg x_i$ для всех i, однозначно продолжается до гомоморфизма $f: P_\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \Lambda$ градуированных алгебр.*

Доказательство. Поскольку $P_\mathbf{K}[x_i]$ — свободная алгебра с образующим x_i, соответствие $x_i \to \xi x_i$ продолжается до гомоморфизма алгебр f_i: $P_\mathbf{K}[x_i] \to \Lambda$. Поскольку алгебра Λ коммутативна, набор этих гомоморфизмов f_i по предложению 4.1 однозначно определяет гомоморфизм f: $P_\mathbf{K} \to \Lambda$.

Если все x_i имеют одну и ту же степень, то из этого свойства следует, что перестановка порядка неизвестных просто заменяет полиномиальную алгебру изоморфной ей алгеброй; значит, порядок неизвестных x_i не существен. Если все x_i имеют степень нуль, то алгебра $P_\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ тривиально градуирована. Мы можем рассматривать ее как неградуированную алгебру и обозначить через $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$; в этом случае она является обычной алгеброй многочленов от n неизвестных над кольцом $\mathbf{K}$. Для заданных n констант $k_i \in \mathbf{K}$ по предложению 4.2 существует такой единственный гомоморфизм f: $P_\mathbf{K} \to \mathbf{K}$, что $fx_i = k_i$, $i = 1, \ldots, n$. Это гомоморфизм, получаемый известным процессом «подстановки k_i вместо x_i, $i = 1, \ldots, n$».

Теперь мы построим аналогичную свободную строго коммутативную алгебру с образующими u_i нечетной степени (степень 1 будет достаточна). Для n букв $u_1, \ldots, u_n$, каждая из которых имеет степень 1, тензорное произведение (над $\mathbf{K}$)

$$E_\mathbf{K}[u_1, \ldots, u_n] = E_\mathbf{K}[u_1] \otimes \ldots \otimes E_\mathbf{K}[u_n]$$

есть строго коммутативная алгебра, называемая *внешней алгеброй* над $\mathbf{K}$ с образующими $u_1, \ldots, u_n$. Как и выше, имеет место

Предложение 4.3. *Внешняя алгебра $E = E_\mathbf{K}[u_1, \ldots, u_n]$ в степени 1 является свободным $\mathbf{K}$-модулем E_1 с образующими $u_1, \ldots, u_n$. Если Λ — любая строго коммутативная градуированная $\mathbf{K}$-алгебра, то каждый модульный гомоморфизм β: $E_1 \to \Lambda_1$ однозначно продолжается до гомоморфизма f: $E \to \Lambda$ градуированных алгебр.*

Произведение двух элементов e и e' внешней алгебры часто записывается как $e \wedge e'$. Очевидно, что E — свободный модуль, образующими которого служат все (упорядоченные) произведения образующих u_i; произведения степени $p > 0$ — это произведения

$$u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_p} = u_{i_1}\wedge u_{i_2}\wedge\dots\wedge u_{i_p},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n$. Число таких произведений равно $(p, n-p)$, где

$$(p, q) = (p+q)!/(p!\,q!) = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q} \tag{4.5}$$

— наше обозначение для биномиальных коэффициентов. Любая перестановка σ знаков $1, \dots, p$ может быть записана как произведение $\operatorname{sgn}\sigma$ транспозиций смежных знаков, где $\operatorname{sgn}\sigma \equiv 1$ или $0 \pmod 2$ в соответствии с четностью или нечетностью перестановки σ, так что из правила коммутативности вытекает равенство

$$u_{i_{\sigma 1}}u_{i_{\sigma 2}}\dots u_{i_{\sigma p}} = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_p}.$$

Тензорное произведение $\mathbf{K}\otimes_Z\mathbf{K}'$ двух коммутативных колец есть коммутативное кольцо, а из определения E следует, что

$$E_{\mathbf{K}}[u]\otimes_Z E_{\mathbf{K}'}[u'] = E_{\mathbf{K}\otimes\mathbf{K}'}[u, u']. \tag{4.6}$$

Имеются аналогичные изоморфизмы для большего числа букв u, большего числа множителей, а также при замене алгебры E алгеброй P. Многочлены от n коммутирующих неизвестных с коэффициентами из не обязательно коммутативной (неградуированной) $\mathbf{K}$-алгебры Λ можно определить так:

$$P_\Lambda[x_1, \dots, x_n] = \Lambda\otimes_{\mathbf{K}} P_{\mathbf{K}}[x_1, \dots, x_n]. \tag{4.7}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В произвольной градуированной алгебре Λ обозначим через $C = C(\Lambda)$ идеал, порожденный (см. упражнение 3.3) всеми разностями $\lambda\mu - (-1)^{mn}\mu\lambda$, где $m = \deg\lambda$, $n = \deg\mu$. Показать, что алгебра Λ/C коммутативна и что любой гомоморфизм алгебры Λ в коммутативную алгебру можно однозначно провести через проекцию $\Lambda \to \Lambda/C$.

2. *Симметричная алгебра* $S(M)$ определяется как факторалгебра $S(M) = T(M)/C\,(T(M))$ тензорной алгебры, где идеал C определен в упражнении 1. Показать, что предложение 3.1 остается в силе, если алгебра Λ коммутативна, а алгебра $T(M)$ заменена алгеброй $S(M)$, и что для свободного модуля M с конечным числом образующих четной степени алгебра $S(M)$ является полиномиальной.

3. Проделать аналогичное построение внешней алгебры над любым градуированным $\mathbf{K}$-модулем M, состоящим только из элементов степени 1.

4. При условиях упражнения 2 показать, что

$$S(M\oplus N) \cong S(M)\otimes S(N).$$

5. Показать, что свободная строго коммутативная градуированная алгебра с некоторым конечным градуированным множеством образующих может быть построена как тензорное произведение полиномиальной и внешней алгебр.

6. Показать, что если $P = \mathbf{K}[x]$ и $Q = P[y]$, то Q как (неградуированная) $\mathbf{K}$-алгебра изоморфна алгебре $\mathbf{K}[x, y]$. Распространить этот результат на градуированный случай с бо́льшим числом неизвестных.

§ 5. Модули над алгебрами

Пусть Λ — градуированная $\mathbf{K}$-алгебра. Градуированный $\mathbf{K}$-модуль A называется *левым Λ-модулем*, если задан такой гомоморфизм $\pi_A\colon \Lambda\otimes A \to A$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени нуль, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda\otimes A \arrow[r, "\pi_\Lambda\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\pi_A"] & \Lambda\otimes A \arrow[d, "\pi_A"] \\
\Lambda\otimes A \arrow[r, "\pi_A"] & A\ ,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{K}\otimes A \arrow[r, equal] \arrow[d, "I_\Lambda\otimes 1"'] & A \arrow[d, equal] \\
\Lambda\otimes A \arrow[r, "\pi_A"] & A.
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Другими словами: левый Λ-модуль — это градуированная абелева группа A вместе с функцией, которая сопоставляет каждому $\lambda\in\Lambda$ и каждому $a\in A$ элемент $\lambda a\in A$, причем $\deg(\lambda a) = \deg\lambda + \deg a$ и для любых элементов λ_1, λ_2 и a_1, a_2, таких, что $\deg\lambda_1 = \deg\lambda_2$, $\deg a_1 = \deg a_2$), имеют место равенства

$$(\lambda_1+\lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a,\quad \lambda(a_1+a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2, \tag{5.2}$$

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a),\qquad 1_\Lambda a = a. \tag{5.3}$$

Действительно, если выполнены эти условия, то по определению $ka = (k1_\Lambda)a$, A превращается в градуированный $\mathbf{K}$-модуль. Ввиду (5.3), $(k\lambda)a = k(\lambda a) = \lambda(ka)$. Вместе с (5.2) это равенство показывает, что функция λa $\mathbf{K}$-билинейна, и поэтому определен гомоморфизм π_A: $\pi_A(\lambda\otimes a) = \lambda a$. Наконец, (5.3) есть перефразировка коммутативности диаграмм (5.1).

Если C и A — левые Λ-модули, то *Λ-модульным гомоморфизмом* $f\colon C\to A$ степени d называется такой гомоморфизм градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени d, для которого

$$f\pi_C = \pi_A(1\otimes f)\colon \Lambda\otimes C \to A; \tag{5.4}$$

другими словами, это такой гомоморфизм, для которого

$$f(\lambda c) = (-1)^{(\deg f)(\deg\lambda)}\lambda(fc) \tag{5.4'}$$

для всех $\lambda\in\Lambda$ и $c\in C$; обычный знак появляется в силу определения (2.2) отображения $1\otimes f$. Множество всех таких гомоморфизмов f степени d является $\mathbf{K}$-модулем, который мы обозначим как $\mathrm{Hom}^{-d}(C, A)$.

Класс ${}_\Lambda\mathcal{M}$ всех левых Λ-модулей образует категорию с морфизмами $\mathrm{hom}_\Lambda(C, A) = \mathrm{Hom}^0_\Lambda(C, A)$ степени нуль. В категории ${}_\Lambda\mathcal{M}$ определены прямые суммы, подмодули и фактормодули, ядра, образы, кообразы и коядра с обычными свойствами. Для каждого n $\mathrm{Hom}^n(C, A)$ — аддитивный бифунктор из категории ${}_\Lambda\mathcal{M}$ в категорию $\mathbf{K}$-модулей, контравариантный по аргументу C и ковариантный по A. Семейство $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) = \{\mathrm{Hom}^n_\Lambda(C, A), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ является аналогичным бифунктором из ${}_\Lambda\mathcal{M}$ в категорию Z-градуированных $\mathbf{K}$-модулей. Согласно определению (5.4) Λ-модульного гомоморфизма, мы можем также описать $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A)$ как Z-градуированный $\mathbf{K}$-модуль, который является ядром естественного гомоморфизма

$$\psi : \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(\Lambda \otimes C, A), \quad \mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}} \tag{5.5}$$

Z-градуированных $\mathbf{K}$-модулей, определенного равенством

$$\psi f = \pi_A (1 \otimes f) - f\pi_C : \Lambda \otimes C \to A.$$

Предложение 5.1. *Функтор Hom_Λ точен слева, т. е. если $D \to B \to C \to 0$ — короткая точная справа последовательность из ${}_\Lambda\mathcal{M}$, то индуцированная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(D, A) \tag{5.6}$$

точна; соответствующий результат верен в том случае, когда A заменяется короткой точной слева последовательностью.

Доказательство. Построим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(D, A) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \mathrm{Hom}\ (C, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (B, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (D, A) \\
& \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
0 \to & \mathrm{Hom}\ (\Lambda \otimes C, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (\Lambda \otimes B, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\ (\Lambda \otimes D, A).
\end{array}$$

Ввиду точности справа тензорного произведения (теорема V.5.1) последовательность $\Lambda \otimes D \to \Lambda \otimes B \to \Lambda \otimes C \to 0$ точна справа. Ввиду точности слева функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}$ последние две строки точны слева; по определению (5.5) все три столбца точны слева (если их написать, начиная с $0 \to \cdots$). Лемма о девяти гомоморфизмах (в сильной форме упражнения II.5.4) показывает теперь, что первая строка точна слева, что и требовалось доказать.

Правые Λ-модули G вводятся аналогично. Гомоморфизм $\gamma: G \to G'$ правых Λ-модулей должен удовлетворять соотношению $\gamma(g\lambda) = (\gamma g)\lambda$; здесь не требуется никакого знака [в противоположность (5.4′)], потому что гомоморфизм и модульные операции действуют на элемент $g \in G$ с разных сторон. Правый Λ-модуль G можно также описать как левый Λ^{op}-модуль с «обращенными» операторами: $\lambda^{\mathrm{op}} g = (-1)^{(\deg \lambda)(\deg g)} g\lambda$; это определение гарантирует, что $\lambda^{\mathrm{op}}(\mu^{\mathrm{op}} g) = (\lambda^{\mathrm{op}}\mu^{\mathrm{op}}) g$.

Для данных модулей G_Λ и ${}_\Lambda A$ их *тензорное произведение* над Λ является градуированным $\mathbf{K}$-модулем. Он определяется как коядро отображения φ градуированных $\mathbf{K}$-модулей

$$G \otimes \Lambda \otimes A \xrightarrow{\varphi} G \otimes A \to G \otimes_\Lambda A \to 0, \tag{5.7}$$

определенного формулой $\varphi(g \otimes \lambda \otimes a) = g\lambda \otimes a - g \otimes \lambda a$. Это равносильно утверждению, что каждый модуль $(G \otimes_\Lambda A)_n$ является $\mathbf{K}$-фактормодулем $\mathbf{K}$-модуля $(G \otimes A)_n$ по подмодулю, порожденному всеми разностями $g\lambda \otimes a - g \otimes \lambda a$ в $(G \otimes A)_n$. Это тензорное произведение характеризуется с помощью внутренне линейных функций в градуированные $\mathbf{K}$-модули M точно так же, как и в теореме V.1.1.

Теорема 5.2. *Если f — семейство $\mathbf{K}$-билинейных функций $f_{p,q}: G_p \times A_q \to M_{p+q}$, внутренне Λ-ассоциативных в том смысле, что $f(g\lambda, a) = f(g, \lambda a)$ для всех g, λ, a, то существует такой единственный гомоморфизм $\omega: G \otimes_\Lambda A \to M$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени нуль, что $\omega(g \otimes a) = f(g, a)$.*

Доказательство. Каждая функция $f_{p,q}$ билинейна и, следовательно, определяет гомоморфизм $\omega'_{p,q} : G_p \otimes A_q \to M_{p+q}$, для которого $\omega'(g \otimes a) = f_{p,q}(g, a)$; внутренняя ассоциативность гарантирует, что ω' обращается в нуль на образе гомоморфизма φ последовательности (5.7) и, значит, ω' индуцирует отображение ω на коядре $G \otimes_\Lambda A$ гомоморфизма φ с нужными свойствами.

Из этого результата следует, что Λ-модульные гомоморфизмы $\gamma : G \to G'$ и $\alpha : A \to A'$ степеней d и e соответственно определяют гомоморфизм $\gamma \otimes \alpha : G \otimes_\Lambda A \to G' \otimes_\Lambda A'$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени $d + e$:

$$(\gamma \otimes \alpha)(g \otimes a) = (-1)^{(\deg \alpha)(\deg g)} \gamma g \otimes \alpha a; \tag{5.8}$$

при таком определении гомоморфизмы $(\gamma \otimes \alpha)$ и $(\gamma' \otimes \alpha')$ перемножаются естественным образом и со знаком $(-1)^{(\deg \alpha)(\deg \gamma')}$. В частности, $G \otimes_\Lambda A$ — это ковариантный и биаддитивный бифунктор из категорий $\mathcal{M}_\Lambda$ и ${}_\Lambda\mathcal{M}$ правых и левых Λ-модулей в категорию градуированных $\mathbf{K}$-модулей. Из определения (5.7) следует, как и в предложении 5.1, что этот функтор переводит точные справа последовательности (по G или A) в точные справа последовательности.

16—353

Модули над другими типами алгебр (Z-градуированные, биградуированные и т. д.) определяются соответственно. Заметим, что каждый Λ-модуль A автоматически несет структуру того же типа, что и Λ (например, градуирован, если алгебра Λ градуирована, биградуирован, если Λ биградуирована). Мы можем ввести модули с дополнительной структурой: так, градуированный модуль над неградуированной алгеброй Λ — это модуль над алгеброй Λ, рассматриваемой как тривиально градуированная — в точности так же, как мы рассматривали градуированные модули над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$.

Если Λ и Σ — две градуированные $\mathbf{K}$-алгебры, то Λ-Σ-бимодуль A (записываем, как ${}_\Lambda A_\Sigma$) — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль, который одновременно является левым Λ-модулем и правым Σ-модулем и в котором равенство $(\lambda a)\sigma = \lambda(a\sigma)$ имеет место для всех $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$, $\sigma \in \Sigma$. Это условие равносильно коммутативности подходящей диаграммы. Заметим, что $ka = (k1_\Lambda)a = a(k1_\Sigma)$, так что та же самая $\mathbf{K}$-модульная структура в A возникает из левой Λ-модульной структуры при «отступлении» вдоль $I : \mathbf{K} \to \Lambda$ или из правой Σ-модульной структуры при «отступлении» вдоль $I : \mathbf{K} \to \Sigma$. Например, любая градуированная алгебра Λ является Λ-Λ-бимодулем. Поскольку Λ — левый Λ-модуль, а Σ — правый Σ-модуль, тензорное произведение $\Lambda \otimes_{\mathbf{K}} \Sigma$ есть Λ-Σ-бимодуль, а именно свободный бимодуль с одним образующим $1 \otimes 1$. Аналогично тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ модулей ${}_\Lambda A$ и B_Σ каноническим образом превращается в Λ-Σ-бимодуль: $\lambda(a \otimes b)\sigma = \lambda a \otimes b\sigma$.

То случайное обстоятельство, что у буквы две боковые стороны, совсем не означает, что бывают лишь односторонние модули и бимодули. Действительно, мы естественным образом приходим к тримодулям; например, тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ модулей ${}_\Lambda A$ и ${}_\Sigma B_\Omega$ канонически становится правым Ω-модулем и левым Λ-Σ-модулем. Здесь мы называем C левым Λ-Σ-модулем, если он одновременно и левый Λ-модуль и левый Σ-модуль, причем

$$\lambda(\sigma c) = (-1)^{(\deg \lambda)(\deg \sigma)} \sigma(\lambda c)$$

для всех $\lambda \in \Lambda$, $\sigma \in \Sigma$, $c \in C$.

К счастью, мы можем свести тримодули к бимодулям и даже к левым модулям над единственной алгеброй. Если положить $(\lambda \otimes \sigma)c = \lambda(\sigma c)$, то тогда каждый левый Λ-Σ-модуль можно рассматривать как левый $(\Lambda \otimes \Sigma)$-модуль или обратно. Аналогично имеются логические эквивалентности

$$B_\Sigma \Leftrightarrow {}_{\Sigma^{\mathrm{op}}}B, \quad {}_\Lambda A_\Sigma \Leftrightarrow {}_{(\Lambda \otimes \Sigma^{\mathrm{op}})}A, \tag{5.9}$$

которые устанавливаются формулами $\sigma^{\mathrm{op}} b = (-1)^{(\deg \sigma)(\deg b)} b\sigma$, $(\lambda \otimes \sigma^{\mathrm{op}}) a = (-1)^{(\deg \sigma)(\deg a)} \lambda a \sigma$. Это сведение дает возможность определить Hom и $\otimes$ для бимодулей. Так, для бимодулей ${}_\Sigma G_\Lambda$ и ${}_\Lambda A_\Sigma$ *бимодульное тензорное произведение*

$$G \otimes_{\Lambda-\Sigma} A = G \otimes_{(\Lambda \otimes \Sigma^{\mathrm{op}})} A \tag{5.10}$$

является по (5.7) фактормодулем $\mathbf{K}$-модуля $G \otimes_{\mathbf{K}} A$ по градуированному $\mathbf{K}$-подмодулю, порожденному всеми элементами вида

$$g\lambda \otimes a - g \otimes \lambda a, \quad \sigma g \otimes a - (-1)^{(\deg \sigma)(\deg g + \deg a)} g \otimes a\sigma.$$

Равенство нулю первых выражений означает внутреннюю Λ-ассоциативность; то же равенство для вторых выражений означает *внешнюю Σ-ассоциативность*. Аналогично, градуированный $\mathbf{K}$-модуль бимодульных гомоморфизмов из ${}_\Lambda C_\Sigma$ в ${}_\Lambda A_\Sigma$ записывается как $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Sigma}(C, A) = \mathrm{Hom}_{(\Lambda \otimes \Sigma^{\mathrm{op}})}(C, A)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Неградуированная $\mathbf{K}$-алгебра Λ — это кольцо R, снабженное кольцевым гомоморфизмом $I : \mathbf{K} \to R$, образ которого $I(\mathbf{K})$ лежит в центре кольца R. Показать, что левый Λ-модуль A — это в точности левый R-модуль, в котором $\mathbf{K}$-модульная структура определяется «отступлением» вдоль I. Показать также, что $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A) = \mathrm{Hom}_R(C, A)$ и $G \otimes_\Lambda A = G \otimes_R A$.

2. Как и в упражнении 1, свести модули над градуированной алгеброй Λ к модулям над алгеброй Λ, рассматриваемой как градуированное кольцо (см. упражнение 3.4).

§ 6. Когомология свободных абелевых групп

В качестве приложения тензорных произведений алгебр мы вычислим группы когомологий свободных абелевых групп.

Для группового кольца $Z(\Pi_1 \times \Pi_2)$ прямого произведения двух мультипликативных групп Π_1 и Π_2 существует естественный изоморфизм

$$Z(\Pi_1 \times \Pi_2) \cong Z(\Pi_1) \otimes Z(\Pi_2). \tag{6.1}$$

Действительно, кольцо $Z(\Pi_i)$ характеризуется (предложение IV.1.1) тем, что любое мультипликативное отображение μ_i группы Π_i в кольцо S, при котором $\mu_i(1) = 1_S$, продолжается до кольцевого гомоморфизма $Z(\Pi_i) \to S$. По предложению 4.1 мультипликативное отображение $\mu: \Pi_1 \times \Pi_2 \to S$, при котором $\mu(1) = 1$, продолжается тогда до единственного кольцевого гомоморфизма $Z(\Pi_1) \otimes Z(\Pi_2) \to S$, так что кольцо $Z(\Pi_1) \otimes Z(\Pi_2)$ удовлетворяет характеристике группового кольца $Z(\Pi_1 \times \Pi_2)$.

Пусть C_∞ — бесконечная (мультипликативная) циклическая группа с образующим t, а $R = Z(C_\infty)$ — ее групповое кольцо. Любой элемент из R является многочленом от положительных, отрицательных и нулевой степеней t и, значит, может быть записан как $t^m p(t)$, где p — (обычный) многочлен с положительными степенями t и целыми коэффициентами. Ядро пополнения $\varepsilon\colon R \to Z$ — это множество всех кратных элемента $t-1$; следовательно, имеет место точная последовательность

$$0 \leftarrow Z \xleftarrow{\varepsilon} R \xleftarrow{\partial} Ru \leftarrow 0, \tag{6.2}$$

в которой Ru — свободный R-модуль с одним образующим u и $\partial u = t-1$. Значит, $\partial : R \leftarrow Ru$ — свободная R-модульная резольвента для ${}_{\varepsilon}Z$; она является частным случаем резольвенты, найденной в (IV.7.3) для произвольной свободной группы, и аналогом резольвенты (1.3) для кольца многочленов. Для любого R-модуля A можно найти с помощью этой резольвенты группу $H^1(C_\infty, A)$; она совпадает с факторгруппой $A/[ta-a \mid a \in A]$, в то время как $H^n(C_\infty, A) = 0$ при $n > 1$.

Свободная абелева группа Π с n образующими $t_1, \ldots, t_n$ является прямой суммой n бесконечных циклических групп. По (6.1) групповое кольцо $Z(\Pi)$ равно $R^1 \otimes \ldots \otimes R^n$, где каждое R^i есть групповое кольцо $Z(C_\infty(t_i))$, а пополнение $\varepsilon : Z(\Pi) \to Z$ равно тензорному произведению $\varepsilon^1 \otimes \ldots \otimes \varepsilon^n$ пополнений $\varepsilon^i : R^i \to Z$. Для каждого индекса i построим R^i-проективную резольвенту X^i: $R^i \to R^i u_i$ типа (6.2). Построим комплекс тензорного произведения

$$X = X^1 \otimes_Z X^2 \otimes_Z \ldots \otimes_Z X^n;$$

он является цепным комплексом свободных $R^1 \otimes \ldots \otimes R^n = Z(\Pi)$-модулей.

С одной стороны, каждая резольвента X^i — это комплекс свободных абелевых групп. Итерированная тензорная формула Кюннета (теорема V.10.1) показывает, что гомологическое умножение

$$\sum H_{m_1}(X^1) \otimes \ldots \otimes H_{m_n}(X^n) \to H_m(X^1 \otimes \ldots \otimes X^n)$$

является изоморфизмом в размерности $m = m_1 + \ldots + m_n$. Однако $H_{m_i}(X^i) = 0$, если $m_i \neq 0$, а $\varepsilon_i\colon H_0(X^i) \cong Z$, так что $H_m(X) = 0$ при положительных m, а при $m = 0$ $\varepsilon_0\colon H_0(X) \cong Z$. Этим доказано, что комплекс X является свободной резольвентой Z как Π-модуля.

С другой стороны, каждая резольвента X^i является внешней алгеброй $E_{R^i}[u^i]$; ввиду (4.6) комплекс X — это внешняя алгебра $E_{Z(\Pi)}[u_1, \ldots, u_n]$ и поэтому имеет вид точной последовательности

$$0 \leftarrow Z \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow 0$$

Π-модулей, в которой каждый модуль X_p свободно порождается элементами $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$. Поскольку $\partial u_i = t_i - 1$, граничная формула (V.9.2) для тензорного произведения дает

$$\partial(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_p}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1}(t_{i_k} - 1)\, u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \hat{u}_{i_k} \otimes \ldots \otimes u_{i_p}; \tag{6.3}$$

крышка означает пропуск. Группы когомологий группы Π можно вычислить с помощью этой резольвенты. Для любого Π-модуля A

$$\operatorname{Ext}^p_\Pi(Z, A) \cong H^p(\Pi, A) = 0, \quad p > n. \tag{6.4}$$

Если $p \leqslant n$, то p-мерная коцепь $f\colon X_p \to A$ как модульный гомоморфизм определяется $(p, n-p)$ произвольными элементами $f(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_p}) \in A$ и

$$\delta f(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_{p+1}}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1}(t_{i_k} - 1) f(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \hat{u}_{i_k} \otimes \ldots \otimes u_{i_{p+1}}).$$

В частности, если A — абелева группа, рассматриваемая как тривиальный Π-модуль ($t_i a = a$ для всех i), то δf всегда есть нуль, так что $H^p(\Pi, A)$ является просто прямой суммой $(p, n-p)$ копий группы A.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если Π, как и выше,— свободная абелева группа, то группа $H^1(\Pi, A)$ изоморфна факторгруппе L/M, где L — подгруппа группы $A \oplus \ldots \oplus A$ (n слагаемых), состоящая из всех элементов $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых $t_i a_j - t_j a_i = a_j - a_i$ для всех i, j, а M — подгруппа всех элементов вида $(t_1 a - a, \ldots, t_n a - a)$ для $a \in A$. Интерпретировать этот результат в терминах классов скрещенных гомоморфизмов.

2. Получить аналогичную формулу для $H^2(\Pi, A)$ и сравнить ее с результатом, полученным для двух образующих в IV.3.7.

3. Определить группу $H^n(\Pi, A)$ для свободной абелевой группы Π с n образующими.

§ 7. Дифференциальные градуированные алгебры

Резольвента X из предыдущего параграфа является одновременно комплексом и алгеброй, в которой граница произведения определяется формулой Лейбница (1.5). Такие алгебры мы называем DG-алгебрами. Другие примеры DG-алгебр появятся в следующей главе; они будут широко использоваться в гл. X, для которой и проводится следующее систематическое исследование.

Положительный комплекс **K**-модулей $X = (X, \partial)$ — это градуированный **K**-модуль $X = \{X_n\}$, снабженный таким **K**-модульным гомоморфизмом $\partial = \partial_X : X \to X$ степени -1, что $\partial^2 = 0$. Положительный комплекс можно поэтому назвать также *дифференциальным градуированным модулем* (коротко: DG-модуль); гомология комплекса X — это градуированный **K**-модуль $H(X) = \{H_n(X)\}$. Цепное преобразование (другими словами, DG-модульный гомоморфизм) $f: X \to X'$ — это такой гомоморфизм градуированных модулей степени 0, для которого $\partial_{X'} f = f\partial_X$. Множество всех таких гомоморфизмов f является абелевой группой $\mathrm{hom}(X, X')$; вместе с этими морфизмами DG-модули образуют категорию. Аналогично произвольный комплекс **K**-модулей является дифференциальным Z-градуированным модулем (DG_Z-модуль).

Тензорное произведение $X \otimes Y$ двух DG-модулей — это тензорное произведение над **K** градуированных модулей X и Y, снабженное дифференциалом $\partial = \partial_X \otimes 1 + 1 \otimes \partial_Y$. Согласно определению (2.2) отображения $1 \otimes \partial_Y$, получаем

$$\partial (x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes \partial y, \tag{7.1}$$

что соответствует предшествующему определению (V.9.2) тензорного произведения цепных комплексов. Это тензорное произведение DG-модулей удовлетворяет стандартным естественным изоморфизмам (2.3), (2.4) и (2.5); в последнем случае основное кольцо **K** рассматривается как DG-модуль с тривиальной градуировкой и $\partial = 0$.

Для DG-модулей X и Y наш Z-градуированный модуль $\mathrm{Hom}(X, Y) = \{\mathrm{Hom}^n(X, Y)\}$ имеет дифференциал, определенный для каждого $f \in \mathrm{Hom}^n$ формулой $\partial_H f = \partial_Y f + (-1)^{n+1} f \partial_X$, как и в (III.4.4). Значит, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ будет DG_Z-модулем. Подчеркнем, что символ $\mathrm{Hom}(X, Y)$, написанный с заглавной буквы «H», обозначает множество всех гомоморфизмов градуированных модулей всех степеней, а символ $\mathrm{hom}(X, Y)$ с маленькой буквой «h» обозначает только множество всех гомоморфизмов DG-модулей степени 0.

Далее, *DG-алгебра* $U = (U, \partial)$ над **K** — это градуированная алгебра U, снабженная градуированным **K**-модульным гомоморфизмом $\partial: U \to U$ степени -1, для которого $\partial^2 = 0$, причем справедлива формула Лейбница

$$\partial (u_1 u_2) = (\partial u_1) u_2 + (-1)^{\deg u_1} u_1 (\partial u_2). \tag{7.2}$$

Аналогично гомоморфизм $f : U \to U'$ для DG-алгебр — это такой гомоморфизм градуированных алгебр (условие (3.3)), что $\partial f = f\partial$. Вместе с этими гомоморфизмами DG-алгебры образуют категорию.

Ввиду формулы Лейбница произведение двух циклов есть цикл, а произведение границы ∂u_1 на цикл u_2 равно границе $\partial(u_1 u_2)$. Следовательно, произведение гомологических классов из $H(U)$ можно определить как $(\mathrm{cls}\, u_1)(\mathrm{cls}\, u_2) = \mathrm{cls}(u_1 u_2)$; это определение превращает $H(U)$ в градуированную алгебру. Любой гомоморфизм DG-алгебр $f: U \to U'$ индуцирует гомоморфизм $f_*: H(U) \to H(U')$ градуированных алгебр.

Тензорное произведение $U \otimes U'$ двух DG-алгебр — это их тензорное произведение как градуированных алгебр, в котором дифференциал задается формулой (7.1). Имеет место аналог предложения 4.1. Алгебра U^{op}, *противоположная* к DG-алгебре U,— это противоположная к U градуированная алгебра с тем же дифференциалом.

Левый U-модуль $X = (X, \partial)$ — это левый модуль над градуированной алгеброй U, снабженный таким градуированным **K**-модульным гомоморфизмом $\partial: X \to X$ степени -1, что $\partial^2 = 0$, причем имеет место формула

$$\partial (ux) = (\partial u) x + (-1)^{\deg u} u (\partial x) \tag{7.3}$$

для всех u и x. Точно так же левый U-модуль X — это DG-модуль над **K**, снабженный гомоморфизмом DG-модулей $U \otimes_{\mathbf{K}} X \to X$ степени 0 (записывается, как $u \otimes x \to ux$), для которого выполнены стандартные условия

$$(u_1 + u_2) x = u_1 x + u_2 x, \quad u(x_1 + x_2) = ux_1 + ux_2,$$
$$(u_1 u_2) x = u_1 (u_2 x), \quad 1x = x,$$

для всех u и x, подобные условиям диаграммы (5.1). Если X и Y являются U-модулями, то морфизм $\xi : X \to Y$ — это гомоморфизм всей структуры, т. е. гомоморфизм DG-модулей степени 0, который также является гомоморфизмом модулей над градуированной алгеброй U; другими словами, ξ — аддитивная функция и

$$\xi(kx) = k(\xi x), \quad \xi(\partial x) = \partial(\xi x), \quad \xi(ux) = u(\xi x), \quad \deg(\xi x) = \deg x. \tag{7.4}$$

K-модуль всех таких отображений ξ записывается как $\mathrm{hom}_U(X, Y)$. Вместе с этими морфизмами левые U-модули образуют категорию, в которой подмодули и фактормодули, ядра, образы, кообразы и коядра определяются как обычно. Правые U-модули рассматриваются аналогично.

В этой категории мы определим бифункторы Hom_U и $\otimes_U$. Для U-модулей X и Y *градуированный* U-модульный гомоморфизм $f: X \to Y$ степени $-n$ есть гомоморфизм X и Y, причем последние рассматриваются только как модули над градуированной алгеброй U; другими словами, функция f аддитивна и

$$f(kx) = k(fx), \quad f(ux) = u(fx), \quad \deg(fx) = \deg x - n, \tag{7.5}$$

но f может не коммутировать с ∂. Множество всех таких функций f является $\mathbf{K}$-модулем $\mathrm{Hom}^n_U(X, Y)$. Семейство $\mathrm{Hom}_U(X, Y) = \{\mathrm{Hom}^n_U(X, Y)\}$ становится DG_Z-модулем над $\mathbf{K}$, если определить дифференциал ∂_H: $\mathrm{Hom}^n \to \mathrm{Hom}^{n+1}$ обычной формулой

$$\partial_H f = \partial_Y f + (-1)^{n+1} f \partial_X. \tag{7.6}$$

Таким образом Hom_U с заглавной буквы «H» отличается от hom_U с маленькой буквы «h»: а именно

$\mathrm{Hom}_U(X, Y)$ есть DG_Z-модуль над $\mathbf{K}$; элементы — все $f: X \to Y$;

$\mathrm{hom}_U(X, Y)$ есть (неградуированный) $\mathbf{K}$-модуль;

элементами его являются — все $\xi: X \to Y$.

Более того, hom_U есть $\mathbf{K}$-модуль циклов степени 0 в комплексе Hom_U.

Пусть X есть правый U-модуль, Y — левый U-модуль. Рассматриваемые только как модули над градуированной алгеброй, они определяют градуированный $\mathbf{K}$-модуль $X \otimes_U Y$, который становится DG-модулем над $\mathbf{K}$, если дифференциал определить формулой (7.1); тогда в силу этой формулы $\partial(xu \otimes y) = \partial(x \otimes uy)$ (внутренняя U-ассоциативность). Значит, *элементы* в Hom_U и $\otimes_U$ определяются градуировкой и модульной структурой X и Y; *дифференциалы в* Hom_U и $\otimes_U$ возникают из дифференциалов в X и Y.

Для двух DG-алгебр U и U' их U-U'-бимодуль (X, ∂) имеет *один* дифференциал ∂, для которого выполнено соотношение (7.3) для $\partial(ux)$ и соответствующее правило для $\partial(xu')$ — точно так же, как бимодуль имеет только одну $\mathbf{K}$-модульную структуру, индуцированную или U, или U'.

Для дальнейшего необходим также пополненный случай. *Дифференциальная градуированная пополненная* алгебра U (коротко: DGA-алгебра) — это DG-алгебра вместе с пополняющим отображением $\varepsilon: U \to \mathbf{K}$, которое является гомоморфизмом DG-алгебр. Здесь основное кольцо $\mathbf{K}$ рассматривается как DG-алгебра с тривиальными градуировкой ($\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$) и дифференциалом ($\partial = 0$). Такое пополнение полностью определяется своей компонентой степени 0, которая является гомоморфизмом $\varepsilon_0: U_0 \to \mathbf{K}$ (не градуированных) $\mathbf{K}$-модулей и

$$\varepsilon_0 1 = 1, \quad \varepsilon_0(u_0 u_0') = (\varepsilon_0 u_0)(\varepsilon_0 u_0'), \quad \varepsilon_0 \partial = 0: U_1 \to \mathbf{K}.$$

Такая DG-алгебра U называется *связной*, если $U_0 = \mathbf{K}$ и $\partial: U_1 \to U_0$ есть нуль; отсюда следует, что $H_0(U) \cong \mathbf{K}$ (этим объясняется выбор термина «связная»: топологическое пространство X связно тогда и только тогда, когда $H_0(X) \cong Z$). Связная DG-алгебра имеет каноническое пополнение $\varepsilon_0 = 1: U_0 \to \mathbf{K}$.

Дадим теперь несколько примеров DG-алгебр. Возьмем полиномиальную алгебру $P_{\mathbf{K}}[x]$ от неизвестного x степени 1, выберем некоторое $k_0 \in \mathbf{K}$ и положим $\partial x = k_0$; тогда $\partial x^{2m} = 0$, $\partial x^{2m+1} = k_0 x^{2m}$, и P превращается в DG-алгебру. Аналогично внешняя алгебра $E_{\mathbf{K}}[u]$ с образующими степени 1 имеет единственный дифференциал, для которого $\partial u = k_0$, и является DG-алгеброй.

Если X есть DG-модуль над $\mathbf{K}$, то тензорная алгебра $T(X)$ имеет единственную структуру DG-алгебры, при которой вложение $X \to T(X)$ является цепным преобразованием; требуемый дифференциал в $T(X)$ задается формулой

$$\partial(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{\eta_i} x_1 \otimes \ldots \otimes \partial x_i \otimes \ldots \otimes x_p,$$

где $\eta_i = \deg x_1 + \cdots + \deg x_{i-1}$ в соответствии с соглашением о знаке. Аналог предложения 3.1 верен для этой алгебры $T(X)$.

Можно построить универсальные DG-алгебры с данными образующими. Так, если x имеет степень 2, а u — степень 1, то существует только одна структура DG-алгебры в алгебре $V = P[x] \otimes E[u]$, при которой $\partial x = u$, поскольку по правилу Лейбница (7.2) дифференциал на свободных $\mathbf{K}$-модульных образующих алгебры V задается формулами

$$\partial(x^m \otimes 1) = m x^{m-1} \otimes u, \quad \partial(x^m \otimes u) = 0. \tag{7.7}$$

Если u_2 — отмеченный элемент степени 2 в некоторой строго коммутативной DG-алгебре U, то существует единственный гомоморфизм DG-алгебр $f: V \to U$ со свойством $fx = u_2$ (и, значит, $fu = du_2$).

Путем аналогичных рассмотрений определяются дифференциальные внутренне градуированные и дифференциальные Z-градуированные алгебры.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать для DG-модулей над $\mathbf{K}$, что точная гомологическая последовательность (теорема II.4.1) для короткой точной последовательности E: $W \rightarrowtail X \twoheadrightarrow Y$ DG-гомоморфизмов $\varkappa$ и σ принимает вид *точного треугольника*

$$\begin{tikzcd} H(W) \arrow[rr, "\varkappa_*"] & & H(X) \arrow[dl, "\sigma_*"] \\ & H(Y) \arrow[ul, "\partial_E"] & \end{tikzcd}$$

(ядро=образу в каждой вершине), где $\varkappa_*$ и σ_* — гомоморфизмы градуированных модулей степени 0, а связывающий гомоморфизм ∂_E имеет степень -1.

(Обычная длинная точная последовательность закручивается вокруг этого треугольника, опускаясь с одного уровня на другой с помощью ∂_E.)

2. Доказать, что DG-алгебра U — это DG-модуль над $\mathbf{K}$, снабженный гомоморфизмами $\pi: U \otimes U \to U$ и $I: \mathbf{K} \to U$ для DG-модулей степени 0, удовлетворяющими условиям (3.1). Дать аналогичное описание U-модулей при помощи (5.1) и показать, что Hom_U и $\otimes_U$ можно получить из $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}$ и $\otimes_{\mathbf{K}}$ для DG-модулей, используя аналоги для (5.5) и (5.7).

3. Для алгебры V, определенной в (7.7), определить градуированную алгебру гомологий $H(V)$, если $\mathbf{K} = Z$ или если $\mathbf{K} = Z_p$ (поле вычетов по модулю p).

4. Построить универсальную строго коммутативную DG-алгебру с данным конечным числом образующих (четных и нечетных степеней).

5. Если $\deg x_i = 2$, $\deg u_i = 1$, то любая градуированная алгебра $P[x_1, \ldots, x_n] \otimes E[u_1, \ldots, u_n]$, изоморфна тензорному произведению n алгебр $V_i = P[x_i] \otimes E[u_i]$ аналогичных рассмотренным в тексте, и имеет единственный дифференциал, для которого $\partial x_i = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для любого многочлена p от x_i показать, что $\partial p = \sum \frac{\partial p}{\partial x_i} \otimes u_i$, где $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ обозначает обычную частную производную. Показать непосредственно, что $\partial^2 p = 0$. Заметить, что ∂p превращается в обычный дифференциал функции p от n переменных, если u_i заменить символом dx_i.

§ 8. Тождества для Hom и ⊗

Рассмотрим модули и бимодули над различными градуированными $\mathbf{K}$-алгебрами Λ, Σ и Ω, которые с равным успехом могут быть DG-алгебрами. Функторы Hom_Λ и $\otimes_\Lambda$ имеют унаследованные модульные структуры

$$ {}_\Sigma C_\Lambda \,\&\, {}_\Omega A_\Lambda \Rightarrow {}_\Omega[\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A)]_\Sigma, $$

$$ {}_\Sigma G_\Lambda \,\&\, {}_\Lambda A_\Omega \Rightarrow {}_\Sigma(G \otimes_\Lambda A)_\Omega, $$

которые определяются для $f: C \to A$ равенством $(\omega f \sigma)(c) = \omega[f(\sigma c)]$, а для $g \otimes a$ равенством $\sigma(g \otimes a)\omega = \sigma g \otimes a\omega$, так же как в (V.3.2) и (V.3.1).

Имеется несколько естественных изоморфизмов для итерированных тензорных произведений. Так, изоморфизм

$$ \Lambda \otimes_\Lambda A \cong A, \qquad ({}_\Lambda A) \tag{8.1} $$

задается отображением $\lambda \otimes a \to \lambda a$. Закон коммутативности

$$ G \otimes_\Lambda A \cong A \otimes_{\Lambda^{\mathrm{op}}} G, \quad (G_\Lambda, {}_\Lambda A) \tag{8.2} $$

задается отображением $g \otimes a \to (-1)^{(\deg g)(\deg a)} a \otimes g$. Закон ассоциативности

$$ \alpha : A \otimes_{\Lambda \otimes \Omega} (B \otimes_\Sigma C) \cong (A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Sigma \otimes \Omega} C, \ (A_{\Lambda-\Omega}, \ {}_\Lambda B_\Sigma, \ {}_{\Sigma-\Omega}C) \tag{8.3} $$

задается отображением $\alpha[a \otimes (b \otimes c)] = (a \otimes b) \otimes c$; здесь $B \otimes_\Sigma C$ рассматривается как левый Ω-модуль с операторами $\omega(b \otimes c) = (-1)^{(\deg b)(\deg \omega)} b \otimes \omega c$. Для того чтобы показать, что отображение α определено корректно, заметим сначала, что при фиксированном a функция $(a \otimes b) \otimes c$ билинейна и внутренне Σ-ассоциативна по b и c. По теореме 5.2 для каждого a существует единственный гомоморфизм $F(a): B \otimes_\Sigma C \to (A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Sigma \otimes \Omega} C$, при котором $F(a)(b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$. Функция $F(a)(b \otimes c)$ также билинейна и внутренне $(\Lambda \otimes \Omega)$-ассоциативна по своим аргументам в A и $B \otimes_\Sigma C$. Также в силу теоремы 5.2 существует единственный гомоморфизм α, при котором $\alpha[a \otimes (b \otimes c)] = (a \otimes b) \otimes c$. Отображение, обратное к α, строится аналогично. Ассоциативный закон верен и в более простых случаях, например, если опустить Ω (в этом случае в (8.3) нужно положить $\Omega = \mathbf{K}$). Общая формулировка закона коммутативности заключается в возможности производить *внутреннюю четверную перестановку*

$$ \tau: (A \otimes_\Lambda B) \otimes_{\Lambda' \otimes \Sigma'} (C \otimes_\Sigma D) \cong (A \otimes_{\Lambda'} C) \otimes_{\Lambda \otimes \Sigma} (B \otimes_{\Sigma'} D), \tag{8.4} $$

где изоморфизм τ определяется для модулей $A_{\Lambda-\Lambda'}$, ${}_\Lambda B_{\Sigma'}$, ${}_{\Lambda'}C_\Sigma$ и ${}_{\Sigma-\Sigma'}D$ следующим образом:

$$ \tau[(a \otimes b) \otimes (c \otimes d)] = (-1)^{(\deg b)(\deg c)} (a \otimes c) \otimes (b \otimes d). $$

Для DG-модулей все эти естественные изоморфизмы являются изоморфизмами DG-модулей над $\mathbf{K}$, что можно проверить, показав, что каждый из указанных изоморфизмов коммутирует с дифференциалом, который мы определили в $\otimes_U$.

Для функтора Hom_Λ мы имеем естественный изоморфизм

$$ \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A) \cong A, \quad ({}_\Lambda A), \tag{8.5} $$

задаваемый отображением $f \to f(1)$, и естественный гомоморфизм

$$ \mathbf{K} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, A), \quad ({}_\Lambda A), \tag{8.6} $$

задаваемый отображением $1_{\mathbf{K}}$, в тождественный гомоморфизм $1_A: A \to A$.

Сопряженная ассоциативность — это естественный изоморфизм

$$ \eta: \mathrm{Hom}_{\Omega-\Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\Omega-\Lambda}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)) \tag{8.7} $$

для модулей ${}_\Omega A_\Lambda$, ${}_\Lambda B_\Sigma$ и ${}_\Omega C_\Sigma$, заданный для $f: A \otimes_\Lambda B \to C$ формулой $[(\eta f)a]b = f(a \otimes b)$, совпадающей с формулой V (3.5) для случая колец. Для DG-модулей можно установить, что η коммутирует с дифференциалами, заданными в области определения и в области значений; значит, η — изоморфизм DG_Z-модулей над $\mathbf{K}$. В частности, выбирая циклы степени нуль в обеих частях (8.7), получаем естественный изоморфизм

$$\mathrm{hom}_{\Omega-\Sigma}(A\otimes_\Lambda B, C)\cong \mathrm{hom}_{\Omega-\Lambda}(A, \mathrm{Hom}_\Sigma(B, C)),\qquad (8.8)$$

где, как и выше, hom с малой буквой «h» обозначает гомоморфизмы степени нуль всей DG_Z-структуры. В этом случае, поскольку в A нет элементов отрицательных степеней, Z-градуированный модуль Hom (B, C) из правой половины (8.7) может быть заменен градуированным модулем $\{\mathrm{Hom}^{-n}(B, C);\ n=0, 1, \ldots\}$.

Произведение гомоморфизмов порождает отображение

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)\otimes_\Omega \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C),\ (A_\Lambda, {}_\Omega B_\Lambda, C_\Lambda),\qquad (8.9)$$

естественное по аргументам A и C. Другой полезный естественный гомоморфизм задается Hom-$\otimes$-*перестановкой* для модулей ${}_\Lambda B$, ${}_\Lambda A$, ${}_{\Lambda'}B'$, ${}_{\Lambda'}A'$:

$$\zeta:\mathrm{Hom}_\Lambda(B, A)\otimes \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(B', A')\to \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Lambda'}(B\otimes B', A\otimes A').\qquad (8.10)$$

Этот изоморфизм определяется для $f\colon B\to A$ и $f'\colon B'\to A'$ формулой

$$[\zeta(f\otimes f')](b\otimes b')=(-1)^{(\deg f')(\deg b)}fb\otimes f'b'.$$

В случае DG-модулей указанные гомоморфизмы будут гомоморфизмами DG-модулей.

Отметим некоторые особенности наших обозначений. В этом определении $f\otimes f'$ обозначает типичный элемент тензорного произведения, указанного слева в (8.10). Раньше, в (2.2), мы использовали символ $f\otimes f'$ для обозначения гомоморфизма $B\otimes B'\to A\otimes A'$, записанного здесь как $\zeta(f\otimes f')$. Смысл обоих символов $f\otimes f'$ не одинаков, потому что ζ может иметь ненулевое ядро. Это противоречие не существенно; мы уже давно заметили, что тензорное произведение $a\otimes b$ двух элементов имеет смысл только тогда, когда указаны модули, в которых лежат эти элементы, и может обратиться в нуль, если расширить один из этих модулей.

Перемножением указанных гомоморфизмов можно определить различные другие естественные гомоморфизмы. Например, вычислительный гомоморфизм

$$e:\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)\otimes A\to B,\quad ({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)\qquad (8.11)$$

задается для $f\colon A\to B$ формулой $e(f\otimes a)=f(a)$, т. е. вычислением значения функции f в a. Его можно записать как произведение

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)\otimes A\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)\otimes \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, A)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, B)\to B$$

отображений (8.5), (8.9) и (8.5). Было бы интересно узнать все различные тождества, справедливые для произведений естественных гомоморфизмов (8.1) — (8.10), описанных выше.

Как приложение рассмотрим свободные и проективные Λ-модули над градуированной алгеброй Λ. Как обычно, левый Λ-модуль P проективен, если каждый эпиморфизм $\sigma\colon B\twoheadrightarrow C$ левых Λ-модулей степени 0 индуцирует эпиморфизм $\mathrm{hom}_\Lambda(P, B)\twoheadrightarrow \mathrm{hom}_\Lambda(P, C)$. *Свободный* Λ-модуль с градуированным множеством S образующих — это Λ-модуль C, содержащий S и характеризующийся с точностью до изоморфизма обычным свойством (предложение I.5.1); каждое отображение множеств $S\to {}_\Lambda A$ степени нуль однозначно продолжается до Λ-модульного гомоморфизма $C\to A$; как всегда, свободный модуль проективен. Сама алгебра Λ является свободным Λ-модулем с одним образующим 1 степени 0; свободный Λ-модуль с произвольным множеством S образующих может быть построен как прямая сумма $\Lambda S=\sum\Lambda_s$, где $s\in S$. Здесь Λs обозначает левый Λ-модуль с элементами λs степени $\deg(\lambda s)=\deg\lambda+\deg s$. Заметим, что $\Lambda S=\Lambda\otimes \mathbf{K}S$, где $\mathbf{K}S=\sum \mathbf{K}s$ — свободный градуированный $\mathbf{K}$-модуль с множеством образующих S. Другими словами, каждый свободный градуированный $\mathbf{K}$-модуль F порождает свободный Λ-модуль $\Lambda\otimes F$. Аналогично, имеет место

Предложение 8.1. *Если M — проективный градуированный $\mathbf{K}$-модуль, а Λ — градуированная $\mathbf{K}$-алгебра, то $\Lambda\otimes M$ является проективным Λ-модулем.*

Доказательство, как и для следствия V.3.3, вытекает из сопряженной ассоциативности

$$\mathrm{hom}_\Lambda(\Lambda\otimes M, B)\cong \mathrm{hom}(M, \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, B))=\mathrm{hom}(M, B).$$

Исходя из той же ассоциативности, докажем более общее

Предложение 8.2. *Определим для каждого градуированного $\mathbf{K}$-модуля M гомоморфизм $e\colon M\to\Lambda\otimes M$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей, положив $e(m)=1\otimes m$. Этот гомоморфизм e универсален: для каждого левого Λ-модуля A каждый гомоморфизм $g\colon M\to A$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени 0 можно представить единственным образом в виде $g=\gamma e$, где $\gamma\colon\Lambda\otimes M\to A$ есть Λ-модульный гомоморфизм степени 0.*

Доказательство. Заметим, что для γ должно быть выполнено равенство $\gamma(\lambda\otimes m)=\lambda g(m)\in A$; правая часть этой формулы $\mathbf{K}$-билинейна по λ и m и, значит, однозначно определяет γ.

Для «универсального» в смысле этого предложения гомоморфизма e мы будем также говорить, что $\Lambda\otimes M$ — *относительно свободный* Λ-модуль, порожденный градуированным $\mathbf{K}$-модулем M, или что $\Lambda\otimes M$ $(\Lambda, \mathbf{K})$-свободен. Аналогично для двух градуированных алгебр Λ и Σ каждый модуль $\Lambda\otimes M\otimes\Sigma$ будет $(\Lambda\text{-}\Sigma, \mathbf{K})$-относительно свободным бимодулем; если модуль M

будет $\mathbf{K}$-проективным, то этот бимодуль будет Λ-Σ-проективным; если M будет $\mathbf{K}$-свободным, то бимодуль будет Λ-Σ-свободным.

В теореме X.7.4 мы используем

Предложение 8.3. *Если B и B' — свободные левые Λ- и Λ'-модули конечного типа, то* Hom-$\otimes$ *-перестановка является естественным изоморфизмом*

$$\zeta : \mathrm{Hom}_\Lambda(B, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(B', A') \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Lambda'}(B \otimes B', A \otimes A'), \qquad ({}_\Lambda A, {}_{\Lambda'}A').$$

Доказательство. С помощью прямых сумм все сводится к случаю $B = \Lambda, B' = \Lambda'$; в этом случае отображение ζ является тождественным: $A \otimes A' \cong A \otimes A'$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дать прямое доказательство внутренней четверной перестановки, т. е. показать, что отображение τ, указанное в тексте, корректно определено и обратимо.

2. Вывести внутреннюю четверную перестановку путем повторных применений ассоциативности (8.3) и изоморфизма $A \otimes_{\mathbf{K}} B \cong B \otimes_{\mathbf{K}} A$.

3. Для модулей ${}_\Lambda C_\Sigma$ и ${}_\Lambda A_\Omega$ описать бимодульную структуру в $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A)$. (Обратить внимание на знаки!)

4. Описать поведение произведения (8.9) при отображении $B \to B'$.

5. Показать, что гомоморфизм ζ из (8.10) может иметь ненулевое ядро. (Указание: использовать конечные циклические группы.)

6. Построить естественный гомоморфизм
$$A \otimes_\Omega \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Omega(A, B), C).$$

§ 9. Коалгебры и алгебры Хопфа

Формальная дуализация понятия алгебры приводит к понятию коалгебры. Коалгебры недавно приобрели большое значение в связи с множеством топологических приложений; например, сингулярный комплекс топологического пространства оказывается коалгеброй.

Градуированная коалгебра W над коммутативным основным кольцом $\mathbf{K}$ — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль W с такими двумя гомоморфизмами $\psi: W \to W \otimes W$ и $\varepsilon: W \to \mathbf{K}$ степени 0 градуированных $\mathbf{K}$-модулей, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi"] & W \otimes W \arrow[d, "1\otimes\psi"] \\ W \otimes W \arrow[r, "\psi\otimes 1"] & W \otimes W \otimes W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \otimes W \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] & W \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & W \otimes W \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\ \mathbf{K} \otimes W \arrow[r, equal] & W \arrow[r, equal] & W \otimes \mathbf{K} \end{tikzcd} \quad (9.1)$$

коммутативны. Первая диаграмма задает *ассоциативный закон* для *диагонального отображения* (или коумножения) ψ; во второй диаграмме утверждается, что ε — *коединица*. Коалгебры, не являющиеся ассоциативными или не имеющие коединицы, иногда полезны, но в этой книге они не встретятся. *Гомоморфизм* $\mu : W \to W'$ коалгебр — это такой $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм степени 0, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mu"] & W \otimes W \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\ W' \arrow[r, "\psi'"] & W' \otimes W', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mu"] & \mathbf{K} \arrow[d, equal] \\ W' \arrow[r, "\varepsilon'"] & \mathbf{K} \end{tikzcd} \quad (9.2)$$

коммутативны. Если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & W \otimes W \arrow[d, "\tau"] \\ W \arrow[r, "\psi"] & W \otimes W, \end{tikzcd} \qquad \tau(w_1 \otimes w_2) = (-1)^{\deg w_1 \deg w_2} w_2 \otimes w_1, \quad (9.3)$$

то мы назовем градуированную коалгебру W *коммутативной*. Как обычно, наше определение включает частные случаи коалгебр (W тривиально градуирована) и градуированных колец ($\mathbf{K} = Z$). Можно также определить DG-коалгебры с помощью диаграммы (9.1) для DG-$\mathbf{K}$-модулей W. В частности, основное кольцо $\mathbf{K}$ является (тривиально градуированной) $\mathbf{K}$-коалгеброй с диагональным отображением $\mathbf{K} \to \mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$ в качестве канонического изоморфизма и коединицей $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ в качестве тождественного изоморфизма.

Если W и W' — градуированные коалгебры, то их тензорное произведение $W \otimes W'$ (как градуированных модулей) является градуированной коалгеброй с диагональным отображением, равным произведению

$$W \otimes W' \xrightarrow{\psi\otimes\psi'} W \otimes W \otimes W' \otimes W' \xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} (W \otimes W') \otimes (W \otimes W'), \quad (9.4)$$

где τ определяется как в (9.3), и с коединицей $\varepsilon \otimes \varepsilon' : W \otimes W' \to \mathbf{K} \otimes \mathbf{K} = \mathbf{K}$.

Для полноты определим также комодули, дуализируя диаграммное определение (5.1) модуля над алгеброй. Градуированный левый *W-комодуль* над градуированной коалгеброй W — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль C, снабженный таким гомоморфизмом $\varphi: C \to W \otimes C$ степени нуль, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & W \otimes C \arrow[d, "1\otimes\varphi"] \\ W \otimes C \arrow[r, "\psi\otimes 1"] & W \otimes W \otimes C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{K} \otimes C \arrow[d, equal] \\ W \otimes C \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathbf{K} \otimes C \end{tikzcd} \quad (9.5)$$

коммутативны.

Градуированная алгебра Хопфа V — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль $V = \{V_n\}$, который относительно этой градуировки является *одновременно* градуированной алгеброй с отображением умножения $\pi\colon V \otimes V \to V$, единицей $I : \mathbf{K} \to V$ и градуированной коалгеброй для диагонали ψ и коединицы ε, причем выполнены условия:

(i) $I : \mathbf{K} \to V$ — гомоморфизм градуированных коалгебр;

(ii) $\varepsilon : V \to \mathbf{K}$ — гомоморфизм градуированных алгебр;

(iii) $\pi : V \otimes V \to V$ — гомоморфизм градуированных коалгебр.

В условии (i) утверждается, что $\psi(1) = 1 \otimes 1$ и что $\varepsilon I : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ равняется тождественному гомоморфизму. В условии (ii) утверждается, что V — пополненная алгебра с коединицей в качестве пополняющего отображения. В условии (iii) утверждается ввиду определения (9.4), что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V \arrow[r, "\psi\otimes\psi"] \arrow[d, "\pi"] & V \otimes V \otimes V \otimes V \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] & V \otimes V \otimes V \otimes V \arrow[d, "\pi\otimes\pi"] \\
V \arrow[rr, "\psi"] & & V \otimes V,
\end{tikzcd} \tag{9.6}$$

τ здесь определяется, как в (9.3). Но $(\pi \otimes \pi)(1 \otimes \tau \otimes 1)$ — это отображение умножения в тензорном произведении $V \otimes V$ алгебр, так что эта диаграмма равносильна условию

(iii′) $\psi\colon V \to V \otimes V$ есть гомоморфизм градуированных алгебр.

Значит, условия (iii) и (iii′) эквивалентны.

Гомоморфизмом $\nu : V \to V'$ алгебр Хопфа называется $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм, который одновременно является гомоморфизмом алгебр и коалгебр.

Пусть V и V' — градуированные алгебры Хопфа над $\mathbf{K}$. Можно показать формальными рассуждениями, использующими лишь определения, что $V \otimes V'$ — это градуированная алгебра Хопфа над $\mathbf{K}$, градуировка которой задается, как в тензорном произведении градуированных модулей, с умножением и единицей, определенными для тензорного произведения алгебр, и с коумножением и коединицей, определенными в (9.4) для тензорного произведения коалгебр.

Теперь приведем несколько примеров алгебр Хопфа.

Основное кольцо $\mathbf{K}$ — это (тривиально) градуированная алгебра Хопфа.

Пусть $E = E_{\mathbf{K}}[u]$ — внешняя алгебра с одним символом u степени 1. Поскольку E — свободная строго коммутативная алгебра с одним образующим u, существуют однозначно определенные гомоморфизмы $\varepsilon : E \to \mathbf{K}$, $\psi : E \to E \otimes E$ алгебр, для которых

$$\varepsilon(u) = 0 \quad \psi(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u. \tag{9.7}$$

Мы утверждаем, что алгебра E, наделенная этой структурой, есть алгебра Хопфа. Для того чтобы доказать, что E — коалгебра, отметим следующее: оба гомоморфизма, $(\psi\otimes 1)\psi$ и $(1 \otimes \psi)\psi$, могут быть охарактеризованы как единственный гомоморфизм алгебр $\eta\colon E \to E \otimes E \otimes E$, для которого $\eta(u) = u \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes u \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes u$; аналогично доказывается, что $(\varepsilon \otimes 1)\psi = 1 = (1 \otimes \varepsilon)\psi$. Условие (i) для алгебры Хопфа выполняется тривиальным образом, а выполнение условий (ii) и (iii′) следует из определений ε и ψ.

Пусть $P = P_{\mathbf{K}}[x]$ — полиномиальная алгебра с одним символом x четной степени. Таким же образом, как и раньше, доказывается, что P — алгебра Хопфа относительно отображений

$$\varepsilon(x) = 0, \quad \psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x. \tag{9.8}$$

Поскольку ψ — гомоморфизм алгебр, $\psi(x^n) = (\psi x)^n$, так что

$$\psi(x^n) = \sum_{p+q=n} (p, q)\, x^p \otimes x^q, \quad (p, q) = (p+q)!/(p!q!). \tag{9.9}$$

Используя тензорные произведения алгебр Хопфа, получаем, что внешняя алгебра $E_{\mathbf{K}}[u_1, \ldots, u_n]$ с образующими u_i степени 1 и полиномиальная алгебра $P_{\mathbf{K}}[x_1, \ldots, x_n]$ с образующими x_i четных степеней являются алгебрами Хопфа.

Групповое кольцо $Z(\Pi)$ произвольной мультипликативной группы является тривиально градуированной алгеброй Хопфа над Z, так как если $x \in \Pi$, то отображение $\psi(x) = x \otimes x$ группы Π в $Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)$ переводит 1 в 1 и произведение в произведение и, значит, (предложение IV.1.1) продолжается до кольцевого гомоморфизма $\psi\colon Z(\Pi) \to Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)$. Вместе с обычным пополнением $\varepsilon\colon Z(\Pi) \to Z$ этот гомоморфизм превращает $Z(\Pi)$ в коалгебру [условие (9.1)] и алгебру Хопфа с единицей $I\colon Z \to Z(\Pi)$, являющейся вложением. Любой гомоморфизм групп $\zeta\colon \Pi \to \Pi'$ индуцирует гомоморфизм $Z(\zeta) : Z(\Pi) \to Z(\Pi')$ алгебр Хопфа.

Для произвольного коммутативного кольца $\mathbf{K}$ *групповая алгебра* $\mathbf{K}(\Pi)$ определяется как $\mathbf{K}$-алгебра $\mathbf{K} \otimes_Z Z(\Pi)$; эквивалентно, групповая алгебра — это свободный $\mathbf{K}$-модуль, свободными образующими которого являются элементы группы Π, а умножение определяется умножением в Π. Она является алгеброй Хопфа с коумножением $\psi(x) = x \otimes x$.

Теперь рассмотрим левые модули A, B и C над градуированной алгеброй Хопфа V, т. е. модули над градуированной алгеброй V. Тензорное произведение $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ является левым $(V \otimes V)$-модулем, но становится левым V-модулем при «отступлении» вдоль диагонали $\psi : V \to V \otimes V$; мы запишем этот модуль так: $A \otimes B = {}_{\psi}(A \otimes_{\mathbf{K}} B)$. Закон ассоциативности (9.1) для ψ устанавливает обычный закон ассоциативности $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ для этого тензорного произведения. Более того, основное кольцо $\mathbf{K}$ становится левым V-модулем ${}_{\varepsilon}\mathbf{K}$ при отступлении вдоль $\varepsilon : V \to \mathbf{K}$, а правило $(\varepsilon \otimes 1)\psi = 1 = (1 \otimes \varepsilon)\psi$ устанавливает изоморфизм $\mathbf{K} \otimes A \cong A \cong A \otimes \mathbf{K}$. Используя эти два изоморфизма, параллельные изоморфизмам (2.3) и (2.5), можно определить *алгебру над градуированной алгеброй Хопфа* V в точности тем же путем, как определялись алгебры над самим кольцом $\mathbf{K}$. Если коумножение ψ коммутативно (9.3), то можно получить изоморфизм $\tau: A \otimes B \cong B \otimes A$ для V-модулей и определить в этом случае тензорное произведение алгебр над V.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать для $\mathbf{K}$-модуля M, что тензорная алгебра $T(M)$ имеет единственную структуру алгебры Хопфа, при которой $\psi(m) = m \otimes 1 + 1 \otimes m$.

2. Пусть Λ — градуированная $\mathbf{K}$-алгебра, в которой каждый модуль Λ_q конечно порожден и проективен как $\mathbf{K}$-модуль. Показать, что дуальная алгебра Λ^* является коалгеброй с диагональным отображением, индуцированным π^* (использовать предложение V.4.3). При аналогичных условиях показать, что алгебра, дуальная к алгебре Хопфа, есть алгебра Хопфа.

3. Охарактеризовать групповую алгебру $\mathbf{K}(\Pi)$ с помощью аналога предложения IV.1.1.

Замечания. Первоначально слова «линейная ассоциативная алгебра» обозначали алгебру над полем $\mathbf{K}$, имеющую конечную размерность как векторное пространство над этим полем, и классическая теория описывала структуру таких алгебр (например, основная теорема Веддербарна X.3.2). В анализе алгебры непрерывных функций были векторными пространствами бесконечной размерности. В топологии с произведением Колмогорова — Александера в когомологиях (гл. VIII) вводятся градуированные алгебры над коммутативным кольцом, не являющимся полем. Бурбаки и Шевалле [1956] указали современное определение градуированной алгебры и подчеркнули принцип, принадлежащий Муру: формулировать теоремы в максимально полезной общности, например, для градуированных алгебр, а не только для колец. Алгебры Хопфа впервые встретились при изучении Хопфом когомологий групп Ли. Их алгебраическая структура исследовалась различными авторами (например, Борель [1953], Гальперн [1958]), систематическое изложение дано Милнором и Муром. Алгебры над алгебрами Хопфа были недавно рассмотрены Стинродом [1962].

ГЛАВА VII

Размерность

Эта глава является кратким введением в область широкого применения гомологической алгебры к теории колец и алгебраической геометрии. Мы определим различные размерности и используем их для колец многочленов, для сепарабельных алгебр и в теореме Гильберта о сизигиях. Последующие главы не зависят от этого материала. Исключение составляют описание (§ 3) функторов Ext и Tor для алгебр, прямое произведение и расширения основного кольца для алгебр.

§ 1. Гомологическая размерность

Для абелевых групп C и A группа $\mathrm{Ext}_Z^2(C, A)$ всегда равна нулю; мы говорим, что C как модуль над кольцом Z целых чисел имеет гомологическую размерность, не бóльшую 1. Проективный модуль P над произвольным кольцом R характеризуется тем, что все группы $\mathrm{Ext}_R^1(P, G)$ тривиальны; мы говорим, что P имеет гомологическую размерность 0. Общая ситуация может быть описана следующим образом.

Теорема 1.1. *Для каждого неотрицательного n и каждого левого R-модуля C следующие условия эквивалентны:*

(i) *для всех левых R-модулей B,* $\mathrm{Ext}^{n+1}(C, B) = 0$;

(ii) *в любой точной последовательности модулей*

$$S: 0 \to C_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to C \to 0,$$

в которой все X_i проективны, первый член C_n проективен;

(iii) *модуль C имеет проективную резольвенту длины n*

$$0 \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to C \to 0.$$

Здесь и ниже мы будем писать Ext *вместо* Ext_R.

Доказательство. Разложим последовательность S из пункта (ii) в произведение коротких точных последовательностей

E_i: $C_{i+1} \rightarrowtail X_i \twoheadrightarrow C_i$. Каждая из последовательностей определяет стандартную длинную точную последовательность

$$\operatorname{Ext}^k(X_i, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^k(C_{i+1}, B) \xrightarrow{E_i^*} \operatorname{Ext}^{k+1}(C_i, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{k+1}(X_i, B)$$

из III (9.1). Поскольку модули X_i проективны, внешние члены $\operatorname{Ext}^k(X_i, B)$ равны нулю, если $k>0$, так что связывающий гомоморфизм E_i^* является изоморфизмом. Итерированный связывающий гомоморфизм S^* равен произведению $E_0^* \ldots E_{n-1}^*$ и, значит, является изоморфизмом

$$S^*\colon \operatorname{Ext}^1(C_n, B) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}(C, B).$$

Если теперь $\operatorname{Ext}^{n+1}(C,B) = 0$ по условию (i), то этот изоморфизм показывает, что $\operatorname{Ext}^1(C_n, B) = 0$ для всех B, и, значит, модуль C_n проективен, что дает (ii). Поскольку C имеет хотя бы одну проективную резольвенту, из (ii) следует (iii). Если же имеется резольвента вида (iii), то группа $\operatorname{Ext}^{n+1}(C,B)$, вычисленная с ее помощью, равна нулю, откуда вытекает (i).

Гомологическая размерность R-модуля C определяется так: $\mathrm{h.}\dim_R C \leqslant n$, если выполнено одно из эквивалентных условий теоремы 1.1. Другими словами, $\mathrm{h.}\dim_R C = n$ означает, что все группы $\operatorname{Ext}^{n+1}(C, B) = 0$, но $\operatorname{Ext}^n(C, B) \neq 0$ по крайней мере для одного модуля B.

Следствие 1.2. *Если* $\mathrm{h.}\dim_R C = n$, *то для всех модулей* ${}_RB$ *и* G_R

$$\operatorname{Ext}^{n+k}(C, B)=0, \quad \operatorname{Tor}_{n+k}(G, C)=0, \quad k>0,$$

в то время как для каждого $m \leqslant n$ *существует такой левый модуль* B_m, *что*

$$\operatorname{Ext}^m(C, B_m) \neq 0.$$

Доказательство. Первый результат следует из (iii). Если $\operatorname{Ext}^n(C,B) \neq 0$ для $n>0$, то мы построим короткую точную последовательность $B \rightarrowtail J \twoheadrightarrow B'$ с инъективным модулем J. Соответствующая точная последовательность

$$\operatorname{Ext}^{n-1}(C, B') \longrightarrow \operatorname{Ext}^n(C, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n(C, J)=0$$

показывает, что $\operatorname{Ext}^{n-1}(C,B') \neq 0$.

Аналогично $\mathrm{h.}\dim C = \infty$ означает, что для каждого положительного n существует такой модуль B_n, что $\operatorname{Ext}^n(C,B_n) \neq 0$. Гомологическая размерность модуля C может быть вычислена из произвольной проективной резольвенты $0 \leftarrow C \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots$ как первое n, для которого модуль $\operatorname{Im}(X_n \to X_{n-1})$ проективен (для $n=0$ под X_{-1} понимается C), или как ∞, если ни один из этих образов не является проективным.

Например, выкладки из VI.6 показывают, что тривиальный модуль Z над групповым кольцом $Z(\Pi)$ свободной абелевой группы Π с n образующими имеет гомологическую размерность n.

Левая глобальная размерность кольца R определяется как

$$\mathrm{l.\,gl.}\dim R = \sup(\mathrm{h.}\dim C),$$

где верхняя грань берется по всем левым R-модулям C. Например, $\mathrm{l.\,gl.}\dim Z = 1$. Над полем F каждый модуль является векторным пространством, т. е. свободен, так что $\mathrm{l.\,gl.}\dim F = 0$. Вообще имеет место

Предложение 1.3. *Каждое из следующих условий эквивалентно условию* $\mathrm{l.\,gl.}\dim R = 0$:

(i) *каждый левый R-модуль проективен;*

(ii) *каждая короткая точная последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ левых R-модулей расщепляется;*

(iii) *каждый левый R-модуль инъективен;*

(iv) *каждый левый идеал в R инъективен как левый R-модуль;*

(v) *каждый левый идеал в R есть прямое слагаемое R как левого R-модуля.*

Доказательство. Условие (i) — это определение $\mathrm{l.\,gl.}\dim R = 0$. Если выполнено условие (i), то в каждой короткой точной последовательности (ii) модуль C проективен; следовательно, она расщепляется. Поскольку любая такая последовательность, начинающаяся с модуля A, расщепляется, каждый модуль A инъективен по предложению III.7.1. Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), а обратное рассуждение показывает, что (iii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Очевидно, что (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v). Если выполнено (v) и если L — левый идеал, то короткая точная последовательность $L \rightarrowtail R \twoheadrightarrow R/L$ расщепляется, и отображение $\operatorname{Hom}(R, A) \to \operatorname{Hom}(L, A)$ является эпиморфизмом для каждого модуля A. По предложению III. 7.2. модуль A инъективен. Значит, (v) $\Rightarrow$ (iii), и, следовательно, доказательство закончено.

Теорема 1.4. *Для каждого кольца R и каждого $n \geqslant 0$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{l.\,lg.}\dim R \leqslant n$;

(ii) *каждый левый R-модуль имеет гомологическую размерность $\leqslant n$;*

(iii) $\operatorname{Ext}^{n+1} = 0$ *как функтор левых R-модулей;*

(iv) $\operatorname{Ext}^k = 0$ *для всех* $k > n$;

(v) *в любой точной последовательности*

$$S\colon 0 \longrightarrow A \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow A_n \longrightarrow 0,$$

в которой все промежуточные модули Y_k инъективны, модуль A_n инъективен.

Доказательство. Первые четыре условия эквивалентны в силу теоремы 1.1. Последовательность S из (v) определяет связывающий гомоморфизм, который является изоморфизмом S_*: $\operatorname{Ext}^1(C, A_n) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}(C, A)$ для каждого модуля C. Но равенство $\operatorname{Ext}^1(C, A_n) = 0$ для всех C в точности означает, что модуль A_n инъективен; отсюда вытекает эквивалентность условий (iii) и (v).

Следствие 1.5. (Ауслендер [1955].) *Для любого кольца* R

$$\text{l.gl.dim}\, R = \sup\{\text{h.dim}\, R/L \mid L \text{— левый идеал в } R\}.$$

Доказательство. (Матлис [1959].) Если эта верхняя грань бесконечна, то $\text{l. gl. dim}\, R = \infty$. Поэтому предположим, что она равна $n < \infty$, так что $\operatorname{Ext}^{n+1}(R/L, A) = 0$ для всех левых идеалов L и всех левых R-модулей A. Для каждой последовательности S вида, указанного в (v), $S_*: \operatorname{Ext}^1(R/L, A_n) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}(R/L, A) = 0$. По предложению III.7.2 модуль A_n инъективен; по теореме $\text{l.gl.dim}\, R \leqslant n$.

Условие $\text{l. gl. dim}\, R = 0$ эквивалентно тому требованию, что кольцо полупросто, и связано, таким образом, с классической теорией представлений. Действительно, левый R-модуль A можно рассматривать как абелеву группу A вместе с кольцевым гомоморфизмом $\varphi: R \to \operatorname{End}_Z A$, который определяет левые операторы из R в A. Этот гомоморфизм φ называется *представлением* R, а A — соответствующий *модуль представления*. Модуль A называется *простым* (а соответствующее представление *неприводимым*), если $A \neq 0$ и в A нет других подмодулей, кроме 0 и A. Модуль A *полупрост*, если он является прямой суммой простых модулей; кольцо $R \neq 0$ *полупросто*, если оно является полупростым левым R-модулем. Используя лемму Цорна, можно доказать (см., например, Картан — Эйленберг, предложение I.4.1), что модуль полупрост тогда и только тогда, когда каждый подмодуль модуля A является прямым слагаемым в A. В силу условия (v) предложения 1.3 отсюда следует, что кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда $\text{l. gl. dim}\, R = 0$, а ввиду (ii) каждый левый модуль над полупростым кольцом R сам полупрост. Можно также доказать, что левая полупростота кольца R (определенная здесь) эквивалентна правой полупростоте.

Могут быть введены различные другие размерности. Например, *левая инъективная размерность* модуля определяется с помощью аналога теоремы 1.1 с использованием инъективных резольвент, так что эквивалентность (v)$\Leftrightarrow$(iii) в последней теореме означает, что левая глобальная размерность кольца R совпадает с его левой глобальной инъективной размерностью. *Правые размерности* определяются с помощью правых R-модулей; Капланский [1958] построил пример кольца, левая и правая глобальные размерности которого отличаются на единицу. Ауслендер доказал, что если кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей левых и правых идеалов, то его левая и правая глобальные размерности совпадают (доказательство см. у Норскотта [1960], теорема 7.20). *Ограниченная левая глобальная размерность* кольца R — это верхняя грань гомологических размерностей всех левых R-модулей C, у которых $\text{h. dim}\, C < \infty$. *Слабая размерность* модуля C определяется с помощью замены условия $\operatorname{Ext}^{n+1}(C, A) = 0$ для всех модулей A более слабым условием $\operatorname{Tor}_{n+1}(G, C) = 0$ для всех модулей G_R. Например, модуль C тогда и только тогда является плоским, когда его слабая гомологическая размерность равна 0. О развитии этих идей см. работу Басса [1960].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулировать и доказать аналог теоремы 1.1 для левых инъективных размерностей.
2. Если $\text{l. gl. dim}\, R \geqslant 1$, то

$$\text{l. gl. dim}\, R = 1 + \sup\{\text{h. dim}\, L \mid L \text{— левый идеал в } R\}.$$

3. Если $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — короткая точная последовательность R-модулей и если любые два из этих модулей имеют конечную гомологическую размерность, то и третий модуль имеет конечную размерность.

4. В условиях упражнения 3 показать, что из $\text{h. dim}\, A < \text{h. dim}\, B$ следует $\text{h.dim}\, C = \text{h. dim}\, B$, из $\text{h. dim}\, A = \text{h. dim}\, B$ следует $\text{h. dim}\, C \leqslant 1 + \text{h. dim}\, B$ и из $\text{h. dim}\, A > \text{h. dim}\, B$ следует $\text{h. dim}\, C = 1 + \text{h. dim}\, A$.

§ 2. Размерности в полиномиальных кольцах

В (VI.1.4) внешнее кольцо порождало точную резольвенту для поля F, рассматриваемого как модуль над кольцом многочленов от двух переменных $F[x, y]$. Тот же механизм работает и тогда, когда поле F заменяется коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ или два неизвестных заменяются n неизвестными.

Подробнее, пусть $P = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — полиномиальное кольцо от n неизвестных x_i, каждое из которых имеет степень 0. Тогда равенство $\varepsilon(x_i) = 0$ определяет пополнение $\varepsilon = \varepsilon_P : P \to \mathbf{K}$, а «отступление» вдоль ε превращает $\mathbf{K}$ в P-модуль ${}_\varepsilon\mathbf{K}$. Такой подход равносилен изучению $\mathbf{K}$ как фактормодуля $P/(x_1, \ldots, x_n)$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает идеал в P, порожденный всеми x_i.

Пусть $E = E_P[u_1, \ldots, u_n]$ — внешняя алгебра над P с n образующими u_i, имеющими степень 1. Значит, E_M в каждой степени m является свободным P-модулем со всеми внешними произведениями m упорядоченных букв u_i в качестве образующих. Дифференциал, задаваемый равенствами $\partial u_i = x_i$, превращает E в DG-алгебру над P, причем $\partial E_{m+1} \subset E_m$, а отображение ε_P дает пополнение $E_0 \to \mathbf{K}$. Все эти модули и гомоморфизмы порождают последовательность P-модулей и P-модульных гомоморфизмов

$$0 \leftarrow {}_\varepsilon\mathbf{K} \xleftarrow{\varepsilon} P = E_0 \xleftarrow{\partial} E_1 \leftarrow \cdots \leftarrow E_n \leftarrow 0. \tag{2.1}$$

Предложение 2.1. *Если P — кольцо многочленов от n неизвестных над $\mathbf{K}$, то внешняя алгебра E с n образующими над P порождает указанную в* (2.1) *свободную P-модульную резольвенту модуля ${}_\varepsilon\mathbf{K}$.*

Для доказательства будут построены такие $\mathbf{K}$-модульные гомоморфизмы $\eta: \mathbf{K} \to E$ и $s: E \to E$ степеней 0 и 1 соответственно, что η — это цепное преобразование и $\varepsilon\eta = 1$, а s — цепная гомотопия $s: 1 \simeq \eta\varepsilon: E \to E$. С помощью этой стягивающей гомотопии устанавливается, что последовательность (2.1) точна как последовательность $\mathbf{K}$-модулей и, следовательно, точна как последовательность P-модулей, а потому является резольвентой.

Цепное преобразование η определяется формулой $\eta k = k1$; очевидно, что $\varepsilon\eta = 1$. Гомотопия s строится индукцией по n. Положим

$$P'' = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}], \qquad P' = \mathbf{K}[x_n],$$
$$E'' = E_{P''}[u_1, \ldots, u_{n-1}], \qquad E' = E_{P'}[u_n].$$

Тогда $P = P'' \otimes P'$, E'' и E' являются DG-алгебрами над P'' и P' соответственно, тензорное произведение $E'' \otimes E'$ которых есть $P'' \otimes P'$-алгебра, и в силу (VI.4.6) имеется изоморфизм $E \cong E'' \otimes E'$ для DG-алгебр над P. Кроме того, $\varepsilon = \varepsilon'' \otimes \varepsilon'$ и $\eta = \eta'' \otimes \eta'$. Для $n = 1$ результат стягивающей гомотопии $s': E'_0 \to E'_1$ на многочлене $f = \Sigma a_i x^i$ степени k от $x = x_n$, $a_i \in \mathbf{K}$, может быть определен следующим образом:

$$s'(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) = (a_1 + a_2 x + \ldots + a_k x^{k-1})\, u;$$

тогда $\partial s' f = f - a_0 = f - \eta'\varepsilon' f$ и $s'\partial f u = fu$, так что $s': 1 \simeq \eta'\varepsilon'$. Отметим, в частности, что s', будучи гомоморфизмом $\mathbf{K}$-модулей, не является гомоморфизмом P-модулей.

Теперь предположим по индукции, что существует $\mathbf{K}$-цепная гомотопия $s'': 1 \simeq \eta''\varepsilon'': E'' \to E''$. Поскольку мы уже имеем s', предложение V.9.1 дает $\mathbf{K}$-цепную гомотопию s на $E = E'' \otimes E'$, и индукция тем самым закончена.

Резольвента (2.1) известна как *резольвента Косуля*; она впервые встретилась в явном виде у Косуля [1950] при изучении алгебр Ли.

Теорема 2.2. *Если $P = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — неградуированная полиномиальная алгебра над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ с n неизвестными x_i, $I: \mathbf{K} \to P$ — вложение и кольцо $\mathbf{K}$ каким-то образом превращено в P-модуль, причем ${}_I\mathbf{K} = \mathbf{K}$, то*

$$\mathrm{h.dim}_P \mathbf{K} = n, \qquad \mathrm{h.dim}_P (x_1, \ldots, x_n) = n - 1, \tag{2.2}$$

$\mathrm{Ext}_P^m(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ — прямая сумма $\binom{n}{m}$ копий кольца $\mathbf{K}$, а $\mathrm{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \{\mathrm{Tor}_m^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})\}$ — внешняя алгебра над $\mathbf{K}$, имеющая n образующих в $\mathrm{Tor}_1(\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbf{K}$ — это P-модуль ${}_\varepsilon\mathbf{K}$. Резольвента Косуля (2.1) останавливается на степени n. Следовательно, гомологическая размерность не больше n.

Мы можем вычислить $\mathrm{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ с помощью резольвенты (2.1) как гомологию комплекса

$$\mathbf{K} \otimes_P E_P = \mathbf{K} \otimes_P (P \otimes E_\mathbf{K}[u_1, \ldots, u_n]) =$$
$$= (\mathbf{K} \otimes_P P) \otimes E_\mathbf{K} \cong \mathbf{K} \otimes E_\mathbf{K} = E_\mathbf{K}[u_1, \ldots, u_n]$$

с граничным гомоморфизмом $\partial(k \otimes u_i) = k \otimes x_i$. Однако при указанных изоморфизмах $k \otimes x_i \to (k \otimes {}_P x_i) \otimes 1 \to k\varepsilon(x_i) \otimes 1 = 0$, поскольку по определению $\varepsilon(x_i) = 0$. Следовательно, дифференциал комплекса равен нулю, так что $\mathrm{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ является внешней алгеброй над $\mathbf{K}$ с n образующими. В частности, $\mathrm{Tor}_n^P(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \cong \mathbf{K} \neq 0$, и поэтому $\mathrm{h.\,dim}_P \mathbf{K}$ равно в точности n. Аналогично $\mathrm{Exp}_P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ вычисляется с помощью резольвенты как когомология комплекса

$$\mathrm{Hom}_P(E_P, \mathbf{K}) \cong \mathrm{Hom}_P(P \otimes E_\mathbf{K}, \mathbf{K}) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_\mathbf{K}(E_\mathbf{K}, \mathrm{Hom}_P(P, \mathbf{K}) \cong \mathrm{Hom}_\mathbf{K}(E_\mathbf{K}, \mathbf{K})).$$

Кограница этого комплекса опять равна нулю, так что $\mathrm{Ext}_P^m(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \cong \mathrm{Hom}_\mathbf{K}(E_m, \mathbf{K})$ является прямой суммой $\binom{n}{m}$ копий $\mathbf{K}$, как и утверждалось в теореме.

Теперь рассмотрим идеал $J = (x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$. Поскольку образ отображения $\partial: E_1 \to E_0 = P$ в точности равен J, резольвента Косуля (2.1) порождает резольвенту

$$0 \leftarrow J \leftarrow E_1 \leftarrow \cdots \leftarrow E_n \leftarrow 0$$

идеала J с модулем E_{m+1} в «размерности» m. Следовательно, $\mathrm{Ext}_P^m(J, \mathbf{K}) \cong \mathrm{Hom}_\mathbf{K}(E_{m+1}, \mathbf{K})$ при $m > 0$, так что $\mathrm{Ext}_P^{n-1}(J, \mathbf{K}) = \mathbf{K} \neq 0$ и J имеет размерность точно $n - 1$, как и утверждалось.

Пусть теперь $\mathbf{K}$ имеет какую-то другую P-модульную структуру, задаваемую операторами $p \circ k$, $p \in P$. Условие ${}_I\mathbf{K} = \mathbf{K}$ означает, что эта P-модульная структура при «отступлении» вдоль вложения $I: \mathbf{K} \to P$, $I(k) = k1_P$, становится исходной $\mathbf{K}$-модульной структурой в $\mathbf{K}$; другими словами, $k' \circ k = k'k$. Отображение

$\rho(p) = p \circ 1_{\mathbf{K}}$ определяет гомоморфизм алгебр $\rho: P \to \mathbf{K}$, потому что $p \circ k = p \circ (1_{\mathbf{K}} k) = \rho(p) \circ k = \rho(p) k$. Другими словами, $\mathbf{K}$ становится P-модулем ${}_\rho\mathbf{K}$ при «отступлении» вдоль ρ. Но положим $a_i = \rho x_i \in \mathbf{K}$ и $x_i' = x_i - a_i$. Тогда P можно рассматривать как полиномиальную алгебру $\mathbf{K}[x_1', \ldots, x_n']$ и $\rho x_i' = 0$, так что ρ — соответствующее пополнение, и применимы предыдущие рассуждения.

В заключение отметим, что $\mathrm{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = E_{\mathbf{K}}[u_1, \ldots, u_n]$ оказывается не только градуированным P-модулем, как это должно быть в силу общих положений, но на самом деле является градуированной алгеброй, а именно внешней алгеброй, построенной на n циклах (гомологических классах) u_i из Tor_1. В появлении этой структуры алгебры есть нечто таинственное. Ведь в силу наших основных результатов мы можем и на самом деле вычисляем $\mathrm{Tor}_m^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ с помощью любой удобной резольвенты. «Случайно» DG-модуль E, который мы использовали как резольвенту, оказался в действительности DG-алгеброй, так что $\mathrm{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ унаследовал «случайно» структуру алгебры. В гл. VIII мы покажем, что эта структура появляется, по существу, из того обстоятельства, что $\mathbf{K}$ (как P-модуль) есть P-алгебра; действительно, периодическое произведение двух алгебр есть алгебра.

Упражнения

1. Вычислить $\mathrm{Tor}^P(J, \mathbf{K})$ и $\mathrm{Ext}_P(J, \mathbf{K})$ для $J = (x_1, \ldots, x_n)$.
2. Показать, что $\mathrm{h.\,dim}_P\,(x_1, \ldots, x_k) = k - 1$.
3. Исследовать теорему 2.2 в том случае, когда $\mathbf{K}$ — тело.

§ 3. Ext и Tor для алгебр

Если Λ — (неградуированная!) $\mathbf{K}$-алгебра, то обычные функторы Ext_Λ и Tor^Λ можно рассматривать как функторы, значениями которых являются $\mathbf{K}$-модули. Для этой цели мы, как в VI.1, рассмотрим $\mathbf{K}$-алгебру Λ как сложный объект $\Lambda = (R, I)$, состоящий из кольца R и кольцевого гомоморфизма $I: \mathbf{K} \to R$, для которого $(Ik)r = r(Ik)$, т. е. $I(\mathbf{K})$ лежит в центре R. Левый Λ-модуль [определенный, скажем, как в (VI.5.2) и (VI.5.3)] — это как раз левый R-модуль A; при «отступлении» вдоль $I: \mathbf{K} \to R$ он становится $\mathbf{K}$-модулем и, значит, R-$\mathbf{K}$-бимодулем ${}_RA_{\mathbf{K}}$. Гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ левых Λ-модулей определяется как гомоморфизм левых R-модулей и автоматически является гомоморфизмом R-$\mathbf{K}$-бимодулей.

Предложение 3.1. *Если $\Lambda = (R, I)$ есть $\mathbf{K}$-алгебра, C, A — левые Λ-модули, то абелева группа $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ имеет две $\mathbf{K}$-модульные структуры, индуцированные $\mathbf{K}$-модульными структурами в C и A соответственно. Эти две $\mathbf{K}$-модульные структуры совпадают; если результирующий $\mathbf{K}$-модуль обозначить $\mathrm{Ext}_\Lambda^n(C, A)$, то Ext_Λ^n становится бифунктором из категории Λ-модулей в категорию $\mathbf{K}$-модулей, удовлетворяющим аксиомам, сформулированным в теореме* III.10.1. *Если D — третий Λ-модуль, то умножение является гомоморфизмом $\mathbf{K}$-модулей*

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^k(A, D) \otimes_{\mathbf{K}} \mathrm{Ext}_\Lambda^m(C, A) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{k+m}(C, D). \tag{3.1}$$

Доказательство. Первая $\mathbf{K}$-модульная структура индуцируется в $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ как функторе аргумента C R-модульными эндоморфизмами $\rho_k: C \to C$, определенными для каждого $k \in \mathbf{K}$ равенством $\rho_k(c) = kc$; вторая структура индуцируется подобным же образом модулем A. Таким же образом можно C и A рассматривать как R-$\mathbf{K}$-бимодули; тогда $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ есть $\mathbf{K}$-$\mathbf{K}$-бимодуль, как показано в V.3.4. Основное заключается в доказательстве совпадения этих двух $\mathbf{K}$-модульных структур.

Для $n = 0$ и $f \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$ первая $\mathbf{K}$-модульная структура определяет kf как $(kf)c = f(kc)$, а вторая — как $(fk)c = k(fc)$. Поскольку f является $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом, результаты совпадают.

При $n > 0$ возьмем длинную точную последовательность $S \in \mathrm{Ext}_R^n(C, A)$. Умножение на k — это морфизм $\rho_k: S \to S$ последовательностей R-модулей, который совпадает в левом конце с умножением в A на k, а в правом конце — с умножением в C на k. По предложению III.5.1 $\rho_k S \equiv S\rho_k$, и поэтому структуры совпадают. Иначе говоря: если X — проективная резольвента модуля C и $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ вычисляется как $H^n(\mathrm{Hom}_R(X, A))$, то $\mathbf{K}$-модульная структура, подобная функторной структуре, подсчитывается из структур в X или в A, а последние структуры, как известно, совпадают в $\mathrm{Hom}_R(X, A)$.

Любой R-модульный гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ коммутирует с эндоморфизмом ρ_k, так что индуцированное отображение $\alpha_*: \mathrm{Ext}_R^n(C, A) \to \mathrm{Ext}_R^n(C, A')$ является $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом и $\mathrm{Ext}^n(C, A)$ есть бифунктор в категорию $\mathbf{K}$-модулей. Связывающие гомоморфизмы также являются $\mathbf{K}$-модульными гомоморфизмами, а умножение Ионеды $\mathbf{K}$-билинейно, откуда вытекает (3.1).

Рассмотрение периодических произведений проводится аналогично.

Предложение 3.2. *Если $\Lambda = (R, I)$ и G_Λ, ${}_\Lambda C$ являются Λ-модулями, то для каждого $n \geqslant 0$ абелева группа $\mathrm{Tor}_n^R(G, C)$ имеет две $\mathbf{K}$-модульные структуры, индуцированные $\mathbf{K}$-модульными* *структурами в G и C соответственно. Эти две $\mathbf{K}$-модульные структуры совпадают; если результирующий $\mathbf{K}$-модуль обозначить $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(G, C)$, то Tor_n^Λ — ковариантный бифунктор из категории Λ-модулей в категорию $\mathbf{K}$-модулей, удовлетворяющий аксиомам, сформулированным в теореме* V.8.5.

Доказательство. При $n=0$, $kg\otimes c = g\otimes kc$, так что две $\mathbf{K}$-модульные структуры совпадают. Мы оставляем читателю проведение доказательства для $n>0$ (использовать V.7.1).

Пусть теперь Λ и Σ — две $\mathbf{K}$-алгебры (пока неградуированные). В этом случае Λ-Σ-бимодуль ${}_\Lambda A_\Sigma$ — это такой бимодуль над кольцами Λ, Σ, что две индуцированные $\mathbf{K}$-модульные структуры совпадают. Они индуцируют идентичные $\mathbf{K}$-модульные структуры в $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Sigma}(C, A)$. Соответствующие $\mathbf{K}$-модули $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Sigma}(C, A)$ для $n>0$ можно было бы определить как классы конгруэнтности длинных точных последовательностей бимодулей, идущих от A к C через n промежуточных шагов, как и раньше. Те же функторы можно получить, превратив A и C в левые $\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}}$-модули и определив $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Sigma}$ как $\mathrm{Ext}^n_{(\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}})}$. Аналогично бимодули ${}_\Sigma B_\Lambda$, ${}_\Lambda C_\Sigma$ являются односторонними модулями $B_{(\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}})}$, ${}_{(\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}})}C$, и поэтому существует тензорное произведение $B\otimes_{(\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}})}C$ и периодические произведения $\mathrm{Tor}^{(\Lambda\otimes\Sigma^{\mathrm{op}})}(B, C)$, являющиеся $\mathbf{K}$-модулями. Мы также будем записывать эти произведения как $\mathrm{Tor}^{\Lambda-\Sigma}(B, C)$. Теперь покажем, что Ext для левых Λ-модулей иногда сводится к Λ-бимодульному Ext.

Теорема 3.3. *Пусть Λ является $\mathbf{K}$-алгеброй, и пусть C и A являются левыми Λ-модулями. Предположим, что Λ и C — проективные $\mathbf{K}$-модули (например, это условие автоматически выполняется в том случае, когда $\mathbf{K}$ — поле). Тогда сопряженная ассоциативность индуцирует естественный изоморфизм $\mathbf{K}$-модулей*

$$\eta_*:\mathrm{Ext}^n_\Lambda(C, A)\cong \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)),\quad n=0, 1, \ldots. \tag{3.2}$$

При $n=0$, $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(C, A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(C, A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes_\Lambda C, A)$ *и η есть обычная сопряженная ассоциативность.*

В (3.2) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)$ — это левый Λ-модуль со структурой, унаследованной от левой Λ-модульной структуры модуля A, и правый Λ-модуль со структурой, унаследованной от левой Λ-модульной структуры контравариантного аргумента C.

Доказательство. Возьмем свободную резольвенту Λ-Λ-бимодуля $\varepsilon: X\to\Lambda$. Как свободный бимодуль каждый X_n имеет вид $X_n=\Lambda\otimes F_n\otimes\Lambda$ для некоторого свободного $\mathbf{K}$-модуля F_n. Далее, проективный модуль является прямым слагаемым свободного модуля, поэтому тензорное произведение двух проективных $\mathbf{K}$-модулей есть проективный $\mathbf{K}$-модуль. Поскольку мы предположили, что Λ и C — проективные $\mathbf{K}$-модули, $\Lambda\otimes F_n$ и $F_n\otimes C$ — проективные $\mathbf{K}$-модули, так что по предложению VI.8.1 $X_n=(\Lambda\otimes F_n)\otimes\Lambda$ — проективный правый Λ-модуль и $X_n\otimes_\Lambda C\cong\Lambda\otimes(F_n\otimes C)$ — проективный левый Λ-модуль.

Сопряженная ассоциативность естественна и поэтому порождает изоморфизм комплексов

$$\eta:\mathrm{Hom}_\Lambda(X\otimes_\Lambda C, A)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)). \tag{3.3}$$

Группы когомологий правого комплекса — это

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)).$$

Рассмотрим группы когомологий левого комплекса. Поскольку $\varepsilon: X\to\Lambda$ есть проективная резольвента для Λ как правого Λ-модуля, гомология комплекса $X\otimes_\Lambda C$ есть $\mathrm{Tor}^\Lambda(\Lambda, C)$. Но алгебра Λ сама по себе есть свободный правый Λ-модуль, так что все группы $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(\Lambda, C)=0$ при $n>0$ и поэтому комплекс $X\otimes_\Lambda C$ вместе с $\varepsilon\otimes 1: X_0\otimes_\Lambda C\to\Lambda\otimes_\Lambda C=C$ образует проективную резольвенту модуля ${}_\Lambda C$. Следовательно, когомология этого комплекса над A, как показано в левой части (3.3), есть $\mathrm{Ext}_\Lambda(C, A)$. Значит, η индуцирует изоморфизм этих групп когомологий, что и утверждалось.

Этот изоморфизм может быть описан следующим образом в терминах длинных точных последовательностей.

Следствие 3.4. *Для произвольной длинной точной последовательности $S\in\in\mathrm{Ext}^n_\Lambda(C, A)$, где $n>0$, изоморфизм η из* (3.2) *переводит класс последовательности S в класс последовательности*

$$[\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, S)]\,\eta(1_C)\in\in\mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)).$$

Доказательство. Сначала проанализируем выражение $[\mathrm{Hom}(C, S)]\,\eta(1_C)$. Поскольку $1_C\in\mathrm{Hom}_\Lambda(C, C)$ и $\eta:\mathrm{Hom}_\Lambda(C, C)=\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes_\Lambda C, C)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}(C, C))$, $\eta(1_C)$ есть отображение $u:\Lambda\to\mathrm{Hom}(C, C)$ (фактически $(u\lambda)c=\lambda c$). Если последовательность

$$S: 0\to A\to B_{n-1}\to\cdots\to B_0\to C\to 0$$

точна и Hom — сокращение для $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}$, то $\mathrm{Hom}(C, S)$ — это последовательность

$$0\to\mathrm{Hom}(C, A)\to\mathrm{Hom}(C, B_{n-1})\to\ldots$$
$$\ldots\to\mathrm{Hom}(C, B_0)\to\mathrm{Hom}(C, C)\to 0;$$

поскольку модуль C $\mathbf{K}$-проективен, она является точной последовательностью Λ-Λ-бимодулей. Подействовав на эту последовательность справа отображением $\eta(1_C)$, мы получим длинную точную последовательность бимодулей, идущую от $\operatorname{Hom}(C, A)$ к Λ, указанную в следствии.

Для применения канонического изоморфизма $\zeta: \operatorname{Ext}^n_\Lambda(C,A) \cong H^n(X \otimes_\Lambda C, A)$ из (III.6.3) мы рассматриваем S как резольвенту модуля C, далее накрываем 1_C цепным преобразованием $f: X \otimes_\Lambda C \to S$ и получаем $\zeta(\operatorname{cls} S)$ как класс коцикла f_n. Применим сопряженную ассоциативность; $\eta f: X \to \operatorname{Hom}(C,S)$ накрывает $\eta(1_C)$: $\Lambda \to \operatorname{Hom}(C, C)$, так что ηf «проходит» через цепное преобразование $g: X \to [\operatorname{Hom}(C, S)]\, \eta(1_C)$, накрывающее 1_Λ, причем $\eta f_n = g_n$. Значит, $\eta_* \operatorname{cls} f_n = \operatorname{cls} g_n$, $\zeta(\operatorname{cls} S) = \operatorname{cls} f_n$, и (вновь по определению ζ) получаем $\zeta \operatorname{cls}[\operatorname{Hom}(C, S)\, \eta(1_C)] = \operatorname{cls} g_n$, откуда вытекает наше утверждение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Λ — алгебра над полем, P — проективный Λ-Λ-бимодуль и B — левый Λ-модуль. Показать, что $P \otimes_\Lambda B$ — проективный левый Λ-модуль.

2. Пусть как в следствии 3.4 $T \in\in \operatorname{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \operatorname{Hom}(C, A))$ есть точная последовательность
$$T: \operatorname{Hom}(C, A) \rightarrowtail B_{n-1} \to X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \twoheadrightarrow A,$$
в которой все X_i — проективные модули. Показать, что $\eta^{-1} \operatorname{cls} T = \operatorname{cls}(e(T \otimes_\Lambda C))$, где e — вычислительное отображение $e: \operatorname{Hom}(C, A) \otimes C \to A$.

3. Для алгебры Λ над полем F, для $\Omega = \Lambda \otimes \Lambda^{op}$ и для модулей C_Λ, ${}_\Lambda A$ доказать, что $\operatorname{Tor}^\Lambda_n(C, A) \cong \operatorname{Tor}^\Omega_n(\Lambda, A \otimes_{\mathbf{K}} C)$.

4. Для $\mathbf{K}$-алгебры Λ и Σ, модулей G_Λ и ${}_\Lambda A_\Sigma$ и инъективного правого Σ-модуля J установить следующий изоморфизм («двойственность»; Картан — Эйленберг [1956] VI.5), используя упражнение III.7.3:
$$\operatorname{Ext}^n_\Lambda(G, \operatorname{Hom}_\Sigma(A, J)) \cong \operatorname{Hom}_\Sigma(\operatorname{Tor}^\Lambda_n(G, A), J).$$

§ 4. Глобальные размерности колец многочленов

Мы можем теперь вычислить глобальные размерности колец многочленов над полем.

Предложение 4.1. *Если модули C и A над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$ рассматриваются как модули над кольцом многочленов $P = \mathbf{K}[x]$, превращенные в P-модули отступлением вдоль $\varepsilon: P \to \mathbf{K}$, где $\varepsilon(x) = 0$, то $\operatorname{Hom}_P(C, A) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}}(C, A)$ и при $n > 0$ существует изоморфизм P-модулей*
$$\operatorname{Ext}^n_P(C, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{K}}(C, A) \oplus \operatorname{Ext}^{n-1}_{\mathbf{K}}(C, A). \tag{4.1}$$

Здесь $\operatorname{Ext}_{\mathbf{K}}$ справа являются $\mathbf{K}$-модулями и, следовательно, P-модулями относительно отступления.

Доказательство. Возьмем $\mathbf{K}$-проективную резольвенту $\eta: X \to C$. Внешняя алгебра $E = E_P[u]$ определяет резольвенту $\varepsilon: E \to \mathbf{K}$ кольца $\mathbf{K}$, состоящую из свободных P-модулей $E_0 \cong E_1 \cong P$, с граничным гомоморфизмом $\partial: E_1 \to E_0$, определяемым умножением на x. Теперь P — свободный $\mathbf{K}$-модуль, следовательно, таковыми являются E_1, E_0, $H(E)$ и модуль циклов в E. В тензорной формуле Кюннета (теорема V.10.1) утверждается, что $H(E \otimes X) \cong H(E) \otimes H(X)$, так что $H_n(E \otimes X) = 0$ при $n > 0$ и $\varepsilon \otimes \eta: H_0(E \otimes X) \cong \mathbf{K} \otimes C = C$. Значит, $\varepsilon \otimes \eta$: $E \otimes X \to C$ есть резольвента модуля C, состоящая из проективных P-модулей. Следовательно, $\operatorname{Ext}_P(C,A)$ — когомология комплекса $\operatorname{Hom}_P(E \otimes X, A)$.

Теперь $(E \otimes X)_n = E_0 \otimes X_n \oplus E_1 \otimes X_{n-1} \cong P \otimes X_n \oplus P \otimes X_{n-1}$, так что в силу сопряженной ассоциативности
$$\operatorname{Hom}_P((E \otimes X)_n, A) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_P(P, \operatorname{Hom}(X_n, A)) \oplus \operatorname{Hom}_P(P, \operatorname{Hom}(X_{n-1}, A)) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}(X_n, A) \oplus \operatorname{Hom}(X_{n-1}, A).$$

Поскольку дифференциал $\partial: E_1 \to E_0$ есть умножение на x, а A и X_n суть P-модули относительно отступления вдоль ε, причем $\varepsilon(x) = 0$, то эти изоморфизмы переводят кограницу из левой части в кограницу правой (индуцированную ∂ в X). Этот изоморфизм коцепных комплексов устанавливает указанный изоморфизм (4.1).

Теорема 4.2. *Если коммутативное кольцо $\mathbf{K}$ имеет глобальную размерность $r \leqslant \infty$, то кольцо многочленов $P = \mathbf{K}[x]$ имеет глобальную размерность $r + 1$ (или ∞, если $r = \infty$).*

Поскольку кольца $\mathbf{K}$ и P коммутативны, мы можем опустить слово «левый» в l.gl.dim.

Доказательство. Пусть G — произвольный P-модуль. Первые r членов свободной резольвенты G как P-модуля дают точную последовательность $S: G_r \rightarrowtail Y_{r-1} \to \cdots \to Y_0 \twoheadrightarrow G$. Само кольцо P и, значит, каждый модуль Y_i являются также свободными $\mathbf{K}$-модулями, поэтому из $\operatorname{h.dim}_{\mathbf{K}} G \leqslant \operatorname{gl.dim} \mathbf{K} = r$ следует, что $\mathbf{K}$-модуль G_r проективен. Для любого P-модуля H мы имеем изоморфизмы
$$\operatorname{Ext}^{r+2}_P(G, H) \cong \operatorname{Ext}^2_P(G_r, H) \cong \operatorname{Ext}^2_{P-P}(P, \operatorname{Hom}(G_r, H));$$
первый из них получен с помощью итерированного связывающего гомоморфизма последовательности S, а второй — с помощью сопря-

женной ассоциативности (теорема 3.3). Рассмотрим P-бимодули крайнего правого члена как $P\otimes P^{\mathrm{op}}$-левые модули. Так как $P^{\mathrm{op}}\cong P$, то кольцо $P\otimes P^{\mathrm{op}}\cong P\otimes \mathbf{K}[y]$ изоморфно кольцу многочленов $P[y]$ от неизвестного y над P. В частности, P-P-бимодуль P становится $P[y]$-модулем, а вложение $I\colon P\to P[y]$ удовлетворяет соотношению $(Ip)\,p'=pp'$. Следовательно, из теоремы 2.2 (в которой $\mathbf{K}$ нужно заменить на P и P на $P[y]$) следует, что $\mathrm{h.dim}_{P[y]}P=1$; это значит, что $\mathrm{Ext}^2_{P\text{-}P}(P,-)=0$ и, следовательно, $\mathrm{Ext}_P^{r+2}=0$, т. е. $\mathrm{gl.dim}\,P\leqslant r+1$. С другой стороны, равенство $\mathrm{gl.dim}\,\mathbf{K}=r$ означает, что существуют $\mathbf{K}$-модули C и A, для которых $\mathrm{Ext}^r_{\mathbf{K}}(C,A)\neq 0$. По предложению 4.1 $\mathrm{Ext}^{r+1}_P(C,A)\cong \mathrm{Ext}^r_{\mathbf{K}}(C,A)\neq 0$, так что $\mathrm{gl.dim}\,P$ не меньше $r+1$. Последнее рассуждение устанавливает также результат, сформулированный для $r=\infty$.

Следствие. 4.3. *Глобальная размерность $Z[x_1,\ldots,x_n]$ равна $n+1$.*

Следствие 4.4. *Глобальная размерность кольца многочленов $P=P_F[x_1,\ldots,x_n]$ от n неизвестных над полем F равна n. Если J — произвольный идеал в P, то $\mathrm{h.\,dim}_P J\leqslant n-1$.*

Доказательства требует лишь утверждение об идеале J. Любая проективная резольвента идеала J порождает точную последовательность

$$0\to C_{n-1}\to X_{n-2}\to\cdots\to X_0\to J\to 0$$

P-модулей, в которой модули X_i проективны. Перемножение этой последовательности и последовательности $J\rightarrowtail P\twoheadrightarrow P/J$ дает точную последовательность с n промежуточными модулями, оканчивающуюся членом P/J. Поскольку n — глобальная размерность кольца P, $\mathrm{h.dim}_P P/J\leqslant n$, так что в силу характеристики гомологической размерности (теорема 1.1) модуль C_{n-1} проективен. Этим доказано, что $\mathrm{h.dim}_P\,J\leqslant n-1$.

§ 5. Сепарабельные алгебры

Рассмотрим теперь приложения (неградуированных) алгебр Λ в классической теории. Напомним, что 1_Λ обозначает единичный элемент алгебры Λ.

Предложение 5.1. *Следующие условия для алгебры Λ эквивалентны:*

(i) $\mathrm{h.\,dim}_{(\Lambda\otimes\Lambda^{\mathrm{op}})}\Lambda=0$;

(ii) Λ *есть проективный Λ-бимодуль;*

(iii) *отображение умножения $\pi\colon\Lambda\otimes\Lambda\to\Lambda$ имеет бимодульное обратное справа отображение;*

(iv) *существует такой элемент $e\in\Lambda\otimes\Lambda$, что $\pi e=1_\Lambda$ и $\lambda e=e\lambda$ для всех λ.*

В этом параграфе мы будем отмечать выполнение этих эквивалентных свойств записью $\mathrm{bidim}\,\Lambda=0$ (т. е. словами: «гомологическая размерность алгебры Λ как Λ-бимодуля равна нулю»).

Доказательство. Свойства (i) и (ii) эквивалентны по определению гомологической размерности. В (iii) отображение умножения $\pi(\lambda\otimes\mu)=\lambda\mu$ является эпиморфизмом Λ-бимодулей. Если Λ — проективный бимодуль, то это отображение расщепляется бимодульным гомоморфизмом $\alpha\colon\Lambda\to\Lambda\otimes\Lambda$, где $\pi\alpha=1$; этим доказано, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Обратно, если $\pi\alpha=1$, то Λ есть бимодульное прямое слагаемое свободного бимодуля $\Lambda\otimes\Lambda$ и, следовательно, проективный Λ-бимодуль. Если $\pi\alpha=1$, то для элемента $\alpha 1_\Lambda=e\in\Lambda\otimes\Lambda$ получаем $\pi e=1_\Lambda$, поскольку α — бимодульный гомоморфизм, $\alpha\lambda=\lambda e=e\lambda$. Обратно, элемент e с этими свойствами определяет подобный гомоморфизм α.

Теперь мы исследуем вопрос о сохранении свойства $\mathrm{bidim}\,\Lambda=0$ относительно трех стандартных конструкций для алгебр: прямых произведений, расширения основного кольца и образования полных матричных алгебр.

Прямое произведение двух $\mathbf{K}$-алгебр Γ и Σ является $\mathbf{K}$-алгеброй $\Lambda=\Gamma\times\Sigma$; как $\mathbf{K}$-модуль она является прямой суммой $\Gamma\oplus\Sigma$, причем ее элементы — это все пары (γ,σ); перемножаются эти пары по правилу

$$(\gamma,\sigma)(\gamma',\sigma')=(\gamma\gamma',\sigma\sigma');\tag{5.1}$$

единичный элемент этой алгебры — это пара $(1_\Gamma,1_\Sigma)$. Проекции $\pi_1(\gamma,\sigma)=\gamma$ и $\pi_2(\gamma,\sigma)=\sigma$ являются гомоморфизмами алгебр

$$\Gamma\xleftarrow{\pi_1}\Gamma\times\Sigma\xrightarrow{\pi_2}\Sigma\tag{5.2}$$

(вложения ι_1,ι_2 не будут гомоморфизмами алгебр, так как они не отображают единицу в единицу). Относительно этих отображений алгебра $\Gamma\times\Sigma$ коуниверсальна для Γ и Σ в категории алгебр. В этом причина того, что мы называем $\Gamma\times\Sigma$ прямым «произведением», хотя эта алгебра часто называется прямой «суммой» Γ и Σ.

Любой Γ-бимодуль становится $(\Gamma\times\Sigma)$-бимодулем при отступлении вдоль π_1 (с обеих сторон); аналогично любой Σ-бимодуль или любой (Γ-Σ)-бимодуль становится $(\Gamma\times\Sigma)$-бимодулем. В частности, определение (5.1) показывает, что алгебра $\Lambda=\Gamma\times\Sigma$, рассматриваемая как Λ-бимодуль, есть прямая сумма $\Gamma\oplus\Sigma$ Λ-бимодулей Γ и Σ. Поскольку тензорное умножение аддитивно,

$\Lambda \otimes \Lambda = (\Gamma \oplus \Sigma) \oplus (\Gamma \oplus \Sigma)$ есть прямая сумма четырех Λ-бимодулей

$$\Lambda \otimes \Lambda \cong (\Gamma \otimes \Gamma) \oplus (\Gamma \otimes \Sigma) \oplus (\Sigma \otimes \Gamma) \oplus (\Sigma \otimes \Sigma). \qquad (5.3)$$

Предложение 5.2. *Если для алгебр* Γ *и* Σ, $\operatorname{bidim} \Gamma = 0 = \operatorname{bidim} \Sigma$, *то* $\operatorname{bidim} (\Gamma \times \Sigma) = 0$.

Доказательство. При выполнении условий в силу предложения 5.1 (iii) имеются такие бимодульные отображения $\alpha_\Gamma : \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ и $\alpha_\Sigma : \Sigma \to \Sigma \otimes \Sigma$, что $\pi\alpha_\Gamma = 1$ и $\pi\alpha_\Sigma = 1$. Они являются также отображениями Λ-бимодулей и, следовательно, дают комбинированный гомоморфизм $\alpha_\Gamma \oplus \alpha_\Sigma : \Gamma \oplus \Sigma \to (\Gamma \otimes \Gamma) \oplus (\Sigma \otimes \Sigma)$, умножение которого на вложение из (5.3) порождает Λ-бимодульное отображение $\alpha : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$. Поскольку вложения $\Gamma \otimes \Gamma \to \Lambda \otimes \Lambda$ и $\Sigma \otimes \Sigma \to \Lambda \otimes \Lambda$ сохраняют произведение, $\pi\alpha = 1$, что и требуется для равенства $\operatorname{bidim} \Lambda = 0$.

Расширение основного кольца — это процесс перехода от алгебр над коммутативным основным кольцом $\mathbf{K}$ к алгебрам над новым основным кольцом R, причем предполагается, что R — *коммутативная* алгебра над $\mathbf{K}$. Если Λ есть $\mathbf{K}$-алгебра, то $R \otimes \Lambda$ есть кольцо (как тензорное произведение колец) и R-модуль (структура которого унаследована от левого множителя); поскольку алгебра R коммутативна, $R \otimes \Lambda$ есть алгебра над R. Эту алгебру мы обозначим Λ^R (обычное обозначение Λ_R; однако оно противоречит нашему предшествующему обозначению для R-модулей).

Предложение 5.3. *Если* $\operatorname{bidim} \Lambda = 0$, *то* $\operatorname{bidim} \Lambda^R = 0$.

Доказательство. Наш Λ^R-бимодуль $\Lambda^R \otimes_R \Lambda^R = (R \otimes \Lambda) \otimes_R (R \otimes \Lambda)$ изоморфен $R \otimes \Lambda \otimes \Lambda$, и этот изоморфизм можно задать соответствием $(r \otimes \lambda) \otimes (s \otimes \mu) \to rs \otimes \lambda \otimes \mu$. Если элемент $e = \Sigma \mu_i \otimes \nu_i \in \Lambda \otimes \Lambda$ обладает свойством (iv) из предложения 5.1, примененного к алгебре Λ, то можно проверить, что элемент $e' = \Sigma\, 1 \otimes \mu_i \otimes \nu_i$ имеет соответствующие свойства для Λ^R.

Расширение основного кольца полезно в классическом случае алгебр Λ конечной размерности (как векторных пространств) над полем F. Любое поле $L \supset F$ можно рассматривать как коммутативную алгебру над F, так что Λ^L — алгебра над L. Если Λ имеет F-базис $u_1, \ldots, u_n$, то умножение в Λ определяется равенством $u_i u_j = \Sigma_k f_k^{ij} u_k$ при помощи n^3 констант $f_k^{ij} \in F$. Расширенная алгебра Λ^L является векторным пространством над L с базисом $1 \otimes u_i$, $i = 1, \ldots, n$, и с теми же структурными константами f_k^{ij}. В этом случае мы имеем обращение последнего предложения.

Предложение 5.4. *Если* Λ — *алгебра над полем* F *и если* R — *коммутативная алгебра над* F, *то из того, что* $\operatorname{bidim} \Lambda^R = 0$, *следует, что* $\operatorname{bidim} \Lambda = 0$.

Доказательство. Если $\otimes$ обозначает $\otimes_F$, то отображение умножения для Λ^R эквивалентно эпиморфизму $(1 \otimes \pi) : R \otimes \Lambda \otimes \Lambda \to R \otimes \Lambda$ для Λ^R-бимодулей; по условию он имеет правый обратный α, который является отображением Λ^R-бимодулей. Поскольку имеется гомоморфизм F-алгебр $j : \Lambda \to \Lambda^R$, определяемый равенством $j(\lambda) = 1 \otimes \lambda$, каждый Λ^R-бимодуль отступлением вдоль j превращается в Λ-бимодуль; в частности, мы можем рассматривать α: $R \otimes \Lambda \to R \otimes \Lambda \otimes \Lambda$ как отображение Λ-бимодулей.

Далее, R — это векторное пространство над полем F; выберем в R базис с первым элементом 1_R. Если η отображает 1_R в 1_F, а остальные базисные элементы в нуль, то η: $R \to F$ является F-модульным гомоморфизмом, произведение которого с вложением ι: $F \to R$ равно единице. Теперь построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F \otimes \Lambda \arrow[r, "\iota\otimes 1"] \arrow[d, equal] & R \otimes \Lambda \arrow[r, "\alpha"] & R \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\eta\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\pi"] & F \otimes \Lambda \otimes \Lambda \arrow[d, "1\otimes\pi"] \arrow[r, equal] & \Lambda \otimes \Lambda \arrow[d, "\pi"] \\
\Lambda & & R \otimes \Lambda \arrow[r, "\eta\otimes 1"] & F \otimes \Lambda \arrow[r, equal] & \Lambda.
\end{tikzcd}$$

Квадраты этой диаграммы коммутативны; произведение отображений верхней строки — это произведение Λ-бимодульных отображений и, следовательно, это бимодульное отображение $\alpha' : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$. Поскольку $(1 \otimes \pi)\,\alpha = 1$ и $\eta\iota = 1$, диаграмма показывает, что $\pi\alpha' = 1$, так что $\operatorname{bidim} \Lambda = 0$ в силу (iii) из предложения 5.1.

Процесс расширений основного кольца включает также процесс «редукции по модулю простого числа p». Действительно, кольцо Z_p вычетов по модулю p можно рассматривать как коммутативную алгебру R над Z. Для произвольной Z-алгебры Λ Λ^{Z_p} — это алгебра Λ, «редуцированная по модулю p».

Полная матричная алгебра $M_n(F)$ над полем F состоит из всех $n \times n$ матриц из элементов поля F с обычным произведением; как векторное пространство над F она имеет базис, состоящий из матриц e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь e_{ij} — это матрица с 1 на пересечении i-й строки и j-го столбца и с нулями на остальных местах. Умножение определяется равенствами $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$ и $e_{ir}e_{sk} = 0$ при $r \neq s$. Если $L \supset F$ — большее поле, то $[M_n(F)]^L \cong M_n(L)$.

Предложение 5.5. *Для любого поля* F *имеем* $\operatorname{bidim} M_n(F) = 0$.

Доказательство. Для элемента $e = \Sigma e_{i1} \otimes e_{1i}$ из $M_n(F) \otimes M_n(F)$ имеем $\pi e = \Sigma e_{ii} = 1_M$ и $e_{rs} e = e_{r1} \otimes e_{1s} = ee_{rs}$, так что он удовлетворяет условиям (iv) предложения 5.1.

Алгебра Λ над полем F полупроста (см. § 1), если каждый левый Λ-модуль проективен. Если bidim $\Lambda = 0$, то алгебра Λ полупроста: для любых левых Λ-модулей C и A теорема 3.3 дает изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}(C, A)),$$

так что модуль $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, -)$ равен нулю и C — проективный левый Λ-модуль.

Алгебра Λ над полем F называется *сепарабельной*, если для каждого поля расширения $L \supset F$ алгебра Λ^L полупроста. По предложению 5.5 каждая полная матричная алгебра сепарабельна. Легко видеть, что прямое произведение сепарабельных алгебр сепарабельно. Обратно, структурная теорема Веддербарна утверждает, что для каждой сепарабельной алгебры Λ конечной размерности над полем F существует такое поле расширения L поля F (имеющее фактически конечную размерность как векторное пространство над F), что Λ^L есть прямое произведение конечного числа полных матричных алгебр. Предполагая известным этот результат, мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.6 [1]). *Если алгебра Λ над полем F имеет конечную размерность как векторное пространство над F, то Λ сепарабельна тогда и только тогда, когда* bidim $\Lambda = 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что алгебра Λ сепарабельна. В силу структурной теоремы существует такое поле L, что $\Lambda^L = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_m$, где каждая Σ_i — полная матричная алгебра над L. По предложению 5.5, bidim $\Sigma_i = 0$, следовательно, по предложению 5.2 bidim $\Lambda^L = 0$, откуда по предложению 5.4 bidim $\Lambda = 0$.

Обратно, предположим, что bidim $\Lambda = 0$. Для каждого поля расширения $L \supset F$ мы хотим доказать, что каждый левый Λ^L-модуль C проективен. Пусть B — другой левый Λ^L-модуль. В силу сопряженной ассоциативности (теорема 3.3)

$$\mathrm{Ext}^1_{\Lambda^L}(C, B) \cong \mathrm{Ext}^1_{\Lambda^L-\Lambda^L}(\Lambda^L, \mathrm{Hom}_L(C, B)).$$

Но из bidim $\Lambda = 0$ следует bidim $\Lambda^L = 0$ по предложению 5.3, так что Λ^L — проективный бимодуль, и Ext справа исчезает. Значит, $\mathrm{Ext}^1(C, B) = 0$ для любого B, что означает проективность модуля C.

1) Розенберг и Зелинский [1956] показали, что можно отбросить предположение о конечномерности Λ над полем F. — *Прим. перев.*

Заметим, что доказательство было в общем элементарно, за исключением использования Ext^1 через сопряженную ассоциативность для перехода от бимодуля Λ^L к левым модулям.

Действие операций прямого произведения и расширения основного кольца на функтор Ext $(\Lambda, -)$ в более общем случае, когда bidim $\Lambda \neq 0$, будет изучаться в гл. X.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить прямое произведение двух DG-алгебр (над одним и тем же **K**) так, чтобы оно было коуниверсально.

2. Доказать для алгебр Γ и Σ над **K**, что $(\Gamma \otimes \Sigma)^R \cong \Gamma^R \otimes_R \Sigma^R$, $(\Gamma \times \Sigma)^R \cong \Gamma^R \times \Sigma^R$ и $(\Gamma \times \Sigma)^{op} \cong \Gamma^{op} \times \Sigma^{op}$.

3. (При расширении основного кольца алгебра может не остаться полупростой.) Пусть p — простое число, Z_p — поле вычетов по модулю p, $L = Z_p(x)$ — поле всех рациональных функций над Z_p от одного неизвестного x и F — подполе $Z_p(x^p)$. Тогда L — коммутативная алгебра над F; пусть Λ есть F-алгебра, изоморфная алгебре L относительно соответствия $x \to u \in \Lambda$. Показать, что алгебра Λ полупроста, а алгебра Λ^L не полупроста. (Если M — идеал в Λ^L, порожденный элементом $u - x$, то эпиморфизм $\Lambda^L \to M$, при котором $1 \to u - x$, не расщепляется.)

§ 6. Градуированные сизигии

Пусть $P = F[x_1, \ldots, x_n]$ — полиномиальная алгебра над полем F с n неизвестными x_i, каждое из которых имеет степень 1. Следствие 4.4 показывает, что любой P-модуль A имеет проективную резольвенту

$$0 \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow 0,$$

которая останавливается на члене X_n. В теореме Гильберта о сизигиях утверждается, что градуированный P-модуль A имеет такую резольвенту, в которой X_k — *свободные градуированные* модули, оканчивающуюся на том же месте. Мы не можем вывести теорему о сизигиях из нашего тесно связанного с ней предыдущего результата, так как мы не знаем, какой проективный модуль должен быть свободным.

В этом параграфе мы рассматриваем P как *внутренне* градуированную алгебру над F; однородные элементы степени m являются, таким образом, обычными однородными многочленами этой степени. Мы будем иметь дело с категорией всех внутренне градуированных P-модулей, морфизмами которой служат все P-модульные гомоморфизмы степени 0; ядра и коядра таких гомоморфизмов снова являются внутренне градуированными P-модулями. Каждый внутренне градуированный P-модуль $A = \Sigma A_n$ есть также неградуированный модуль над неградуированной алгеброй P. Если G — второй такой модуль, то мы используем символы $G\otimes_P A$ и $\mathrm{Tor}_1^P(G, A)$ для обозначения обычных тензорного и периодического произведений, построенных без учета градуировки. Внутренняя градуировка имеет те преимущества, что она приспособлена к классическому понятию кольца многочленов и делает возможным использование обычного периодического умножения. Градуировка периодического произведения будет введена в X.8, где она становится естественной.

Поле коэффициентов F — это градуированный (тривиально) P-модуль относительно обычного действия $x_i f = 0$ для $f \in F$.

Лемма 6.1. *Если A — градуированный P-модуль, для которого $A\otimes_P F = 0$, то $A = 0$.*

Доказательство. Пусть $J = (x_1, \ldots, x_n)$ — идеал всех многочленов из P со свободным членом 0. Точная последовательность P-модулей $J \rightarrowtail P \twoheadrightarrow F$ порождает точную последовательность $A\otimes_P J \to A\otimes_P P \twoheadrightarrow A\otimes_P F = 0$, так что $A \otimes {}_P J \twoheadrightarrow A \otimes {}_P P = A$. Это означает, что каждый элемент $a \in A$ лежит в AJ. Если $A \neq 0$, то выберем ненулевой элемент a наименьшей возможной степени k. Каждое произведение в $AJ = A$ тогда имеет степень по крайней мере на единицу больше, в противоречии с предположением $A \neq 0$.

Заметим, что это доказательство не годится для Z-градуированных модулей, где могли бы быть элементы произвольной отрицательной степени.

Лемма 6.2. *Градуированный P-модуль A, для которого $\mathrm{Tor}_1^P(A,F) = 0$, свободен.*

Доказательство. Поскольку модуль A градуирован, $A\otimes_P F$ — градуированное векторное пространство над F, порожденное однородными элементами $a \otimes 1$. Выберем множество S таких однородных элементов, что элементы $s \otimes 1$ образуют базис этого векторного пространства, и построим свободный градуированный P-модуль M на множестве S. Тождественное отображение $S \to S \subset A$ определяет гомоморфизм $\eta\colon M \to A$ степени нуль; в силу выбора S отображение

$$\eta \otimes 1 : M \otimes_P F \cong A \otimes_P F \tag{6.1}$$

— изоморфизм. Ядро B и коядро C гомоморфизма η составляют точную последовательность градуированных P-модулей

$$0 \to B \to M \xrightarrow{\eta} A \to C \to 0$$

с однородными гомоморфизмами степени 0 (хотя это обстоятельство нам не понадобится). Применение $\otimes {}_P F$ к правой части этой последовательности дает точную последовательность

$$M \otimes_P F \to A \otimes_P F \twoheadrightarrow C \otimes_P F.$$

По (6.1) $C\otimes_P F = 0$, так что $C = 0$ в силу предыдущей леммы. К оставшейся короткой точной последовательности $B \rightarrowtail M \twoheadrightarrow A$ применим фундаментальную точную последовательность для периодического умножения (на F)

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^P(A,F) \to B \otimes_P F \to M \otimes_P F \xrightarrow{\eta\otimes 1} A \otimes_P F \to 0,$$

где нуль слева стоит вместо группы $\mathrm{Tor}_1(M,F)$, тривиальной, поскольку модуль M свободен. Опять-таки в силу (6.1), $B\otimes_P F \cong \mathrm{Tor}_1^P(A, F)$ и по предположению равно нулю. Следовательно, $B \otimes {}_P F = 0$, так что $B = 0$ в силу повторного применения предыдущей леммы. Наша точная последовательность свелась к последовательности $0 \to M \to A \to 0$, устанавливающей изоморфность A свободному модулю M.

Предложение 6.3. *Для каждого градуированного P-модуля A существует такой свободный градуированный P-модуль M и такой эпиморфизм $\eta\colon M \to A$ степени 0, что для каждого эпиморфизма $\varepsilon : X_0 \to A$ свободного модуля X_0 существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с мономорфизмом β. Ядро η содержится в JM; этими свойствами пара (M, η) определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Построим η так, чтобы $\eta\otimes 1$ было изоморфизмом, указанным в (6.1); первая часть предшествующего доказательства показывает, что $\eta(M) = A$. Обычное сравнение дает гомоморфизм β; пусть B — ядро β. Построим диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B\otimes_P F \arrow[r] & M\otimes_P F \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & X_0\otimes_P F \arrow[d] \\ & & & A\otimes_P F \end{tikzcd},$$

где нуль слева обозначает группу $\mathrm{Tor}_1^P(X_0, F)$, равную нулю, так как модуль X_0 свободен. Строка этой диаграммы точна, а произведение, отмеченное пунктирной стрелкой,— это изоморфизм (6.1); следовательно, $B\otimes_P F = 0$, откуда $B = 0$ по лемме 6.1. Единственность устанавливается аналогично.

Ядро A_1 эпиморфизма $\eta: M \to A$ можно снова записать как образ $M_1 \to A_1$; итерация приводит к однозначно определенной свободной резольвенте $\cdots \to M_2 \to M_1 \to M \to A \to 0$, называемой *минимальной резольвентой*. О ее применениях см. работу Адамса ([1960], стр. 28); общее рассмотрение у Эйленберга [1956].

Теорема 6.4. (*Теорема Гильберта о сизигиях.*) *Если A — градуированный модуль над градуированным полиномиальным кольцом $P = F[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных степени 1 над полем F, то в любой точной последовательности*

$$T: 0 \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow \cdots \leftarrow X_{n-1} \leftarrow A_n \leftarrow 0$$

градуированных P-модулей, в которой модули X_i свободны, n-й модуль A_n также свободен.

Подобная последовательность может быть всегда построена, если в качестве X_0 взять свободный модуль на множестве однородных элементов из A, в качестве X_1 взять аналогичный модуль с образующими из $\operatorname{Ker}[X_0 \to A]$ и т. д. При этом $\mathrm{h.dim}_P A \leqslant n$.

Доказательство. Поскольку модули X_i свободны, связывающий гомоморфизм данной точной последовательности T устанавливает изоморфизм $\operatorname{Tor}_{n+1}^P(A,F) \cong \operatorname{Tor}_1^P(A_n,F)$. Но резольвента Косуля для F показывает, что $\mathrm{h.dim}_P F \leqslant n$, так что $\operatorname{Tor}_{n+1}^P(A, F) = 0$. Тогда по лемме 6.2 модуль A_n свободен, что и утверждалось. Любой идеал J кольца P является подмодулем модуля P; как в VI.3, он называется *однородным идеалом*, если это градуированный подмодуль, т. е. если J порождается своими однородными элементами.

Следствие 6.5. *Если J — однородный идеал в P, то в любой точной последовательности $0 \leftarrow J \leftarrow X_0 \leftarrow \cdots \leftarrow X_{n-2} \leftarrow A_{n-1} \leftarrow$ $\leftarrow 0$ градуированных P-модулей со свободными модулями X_i модуль A_{n-1} также свободен.*

Доказательство. Из этого следствия вытекает наш предыдущий результат о том, что $\mathrm{h.dim}_P J \leqslant n-1$. Как и в том случае, следствие доказывается перемножением заданной последовательности и короткой точной последовательности $P/J \twoheadleftarrow P \leftarrowtail J$ и применением теоремы о сизигиях к градуированному фактормодулю P/J.

Замечание. Теорема Гильберта была доказана (Гильберт [1890]) для теории инвариантов, специально для модулей форм, инвариантных относительно некоторой группы линейных преобразований; в работе Гильберта (стр. 504—508) содержится вычисление, равносильное резольвенте Косуля поля F. Его доказательство было упрощено Грёбнером [1949]; в нашем доказательстве мы следовали Картану [1952], который первый применил гомологические методы и установил гораздо более общую теорему, верную также для локальных колец (см. ниже § 7).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для кольца $P = F[x, y, z]$ построить неградуированный P-модуль, который не имеет внутренней градуировки, совместимой с заданной P-модульной структурой.

2. Показать, что теорема Гильберта о сизигиях справедлива при замене P на любое внутренне градуированное кольцо G, для которого G_0 есть поле.

3. (Общая резольвента Косуля.) Если A — правый R-модуль, то элемент $x \neq 0 \in R$ называется *делителем нуля* для A, если $ax = 0$ для некоторого $a \neq 0$ из A. Таким образом, x не является делителем нуля тогда и только тогда, когда отображение $a \to ax$ есть мономорфизм $A \rightarrowtail A$. Если $x_1, \ldots, x_n \in R$, то обозначим через J_k правый идеал в R, порожденный элементами $x_1, \ldots, x_k$. Пусть x_k не является делителем нуля для A/AJ_{k-1} при каждом $k = 1, \ldots, n$. Доказать, что комплекс $A \otimes_R E_R[u_1, \ldots, u_n]$ с дифференциалом $\partial u_i = x_i$ и пополнением $\varepsilon: A \otimes E_0 = A \otimes R \to A/AJ_n$, определенным формулой $\varepsilon(a \otimes r) = ar + aJ_n$, дает нам резольвенту R-модуля A/AJ_n длины n. (Указание: использовать индукцию по n и применить точную гомологическую последовательность к факторкомплексу комплекса $A \otimes E$ по соответствующему комплексу без u_n.)

Замечание. Этот результат для $A = R = F[x_1, \ldots, x_n]$ дает предыдущую резольвенту Косуля поля F как P-модуля. Более общий случай полезен в теории идеалов, где последовательность элементов $x_1, \ldots, x_n$ при условии, что x_k не является делителем нуля для A/AJ_{k-1} и $A/AJ_n \neq 0$, называется *A-последовательностью* для A (Ауслендер — Буксбаум [1957]; вместо нашего A там E), в то время как наименьшая верхняя грань всех n для таких A-последовательностей есть *коразмерность* модуля A.

§ 7. Локальные кольца

В этом параграфе мы приводим без доказательства некоторые из достижений гомологической алгебры в изучении локальных колец. Все рассматриваемые кольца считаются коммутативными.

Простой идеал P кольца $\mathbf{K}$ — это такой идеал, что из $rs \in P$ следует $r \in P$ или $s \in P$; это условие эквивалентно требованию отсутствия делителей нуля в факторкольце $\mathbf{K}/P$. Каждое кольцо $\mathbf{K}$ в качестве идеалов имеет множество (0), состоящее только из 0, и все множество $\mathbf{K}$; *собственный идеал* $J \subset \mathbf{K}$ — это идеал, для которого $(0) \neq J \neq \mathbf{K}$. *Обратимый элемент* u — это элемент, имеющий в $\mathbf{K}$ обратный элемент v $(vu = 1)$. Ясно, что ни один собственный идеал не может содержать обратимых элементов.

Локальное кольцо L — это коммутативное кольцо, в котором все необратимые элементы образуют идеал M; в этом случае идеал M должен содержать все собственные идеалы кольца L. Если L не есть поле, то M — максимальный собственный идеал в L. В любом случае M — простой идеал. Более того, L/M есть поле, *поле вычетов* кольца L. Для рационального простого числа p кольцо p-адических чисел есть локальное кольцо, поле вычетов которого — это поле Z_p вычетов по модулю p. Другим локальным кольцом является множество всех формальных степенных рядов с неотрицательными степенями от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля F; степенной ряд имеет (формальный) обратный тогда и только тогда, когда его свободный член не равен нулю, поэтому максимальный идеал состоит из всех формальных степенных рядов с нулевым свободным членом, а поле вычетов есть F.

Если P — простой идеал области целостности D, то *кольцо частных* D_P — это множество всех формальных частных a/b, где $a, b \in D$ и b не лежит в P, с обычным равенством $a/b = a'/b'$ тогда и только тогда, когда $ab' = a'b$. Эти частные образуют кольцо относительно обычных операций $a/b + a'/b' = (ab' + a'b)/bb'$, $(a/b)(a'/b') = aa'/bb'$. Такое частное a/b имеет обратный элемент b/a в D_P тогда и только тогда, когда $a \notin P$, следовательно, D_P — это локальное кольцо, максимальный идеал которого состоит из всех частных a/b, $a \in P$; если мы рассмотрим D_P как D-модуль, то этот максимальный идеал можно записать как PD_P. Например, если D — кольцо всех многочленов от n неизвестных над алгебраически замкнутым полем C, то множество всех нулей идеала P, т. е. множество всех таких точек $(c_1, \ldots, c_n)$, что $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$ для каждого $f \in P$, является неприводимым (аффинным) алгебраическим многообразием V. Соответствующее локальное кольцо D_P известно как кольцо рациональных функций на многообразии V; действительно, для каждого формального частного $f/g \in D_P$ можно определить значение частного f/g в каждой точке $(c_1, \ldots, c_n)$, лежащей в V, положив его равным $f(c_1, \ldots, c_n)/g(c_1, \ldots, c_n)$. Аналогично точка многообразия V ассоциируется с простым идеалом, содержащим P, а кольцо рациональных функций в этой точке является локальным кольцом. Этот пример объясняет слово «локальный».

$\mathbf{K}$-модуль C называется *нётеровым*, если каждый подмодуль модуля C конечного типа; это эквивалентно условию, что C удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек подмодулей: для каждой последовательности $C_1 \subset \ldots \subset C_k \subset C_{k+1} \subset \ldots$ подмодулей модуля C есть такой номер n, что $C_n = C_{n+1} = \ldots$. Само кольцо $\mathbf{K}$ называется нётеровым, если оно является нётеровым $\mathbf{K}$-модулем. В теореме Гильберта о базисе утверждается, что кольцо многочленов от n неизвестных над полем является нётеровым. Модуль конечного типа над нётеровым кольцом сам нётеров.

Над нётеровым кольцом естественно рассматривать категорию всех нётеровых модулей; каждый подмодуль или фактормодуль такого модуля снова есть нётеров модуль. Приняв это соглашение, можно доказать теорему Гильберта о сизигиях для нётеровых локальных колец: в формулировке теоремы 6.4 нужно заменить полиномиальное кольцо локальным кольцом L, поле коэффицентов полем вычетом L/M и «градуированный модуль» «конечно порожденным модулем». Основная трудность доказательства состоит

в установлении аналога леммы 6.1, в котором идеал J заменяется идеалом M: когда $A = AM$, то $A = AM^n$ для каждого n и пересечение всех M^n равно нулю. Поучительное изложение этого доказательства можно найти у Эйленберга [1956].

Размерность Крулля k нётерова кольца $\mathbf{K}$ — это наибольшее целое число, для которого существует собственная возрастающая цепочка простых идеалов $P_0 < P_1 < \ldots < P_k < \mathbf{K}$; можно показать, что эта размерность всегда конечна. В локальном кольце L с максимальным идеалом M факторкольцо M/M^2 является векторным пространством над полем вычетов L/M; поскольку M — конечно порожденный идеал, то размерность этого пространства $n = \dim_{L/M} M/M^2$ конечна. Можно показать, что размерность Крулля кольца L не больше n. Говорят, что локальное кольцо *регулярно*, если его размерность Крулля в точности равна $n = \dim_{L/M} M/M^2$. Эти локальные кольца представляют наибольший интерес для геометрии. Используя гомологические методы, Серр [1956], а позднее Ауслендер — Буксбаум [1956] доказали (см. также Асмус [1959]) следующий факт:

Теорема. *Локальное кольцо L с максимальным идеалом M регулярно тогда и только тогда, когда* $\text{h.dim}_L L/M < \infty$, *или, равносильное условие: тогда и только тогда, когда* $\text{gl.dim}\, L < \infty$.

В частности, эта характеристика регулярности позволяет дать простое доказательство того, что если P — простой идеал регулярного локального кольца L, то кольцо (локальное) частных L_P регулярно. До применения гомологических методов эта теорема была известна лишь для некоторых геометрически важных случаев.

Совсем недавно Ауслендер и Буксбаум [1959] доказали предположение Крулля.

Теорема. *Любое регулярное локальное кольцо является кольцом с однозначным разложением на множители.*

В доказательстве существенно использована редукция Нагаты [1958] этого предположения к случаю гомологической размерности 3. Эта теорема содержит, например, классический результат однозначности разложения в кольцах степенных рядов.

Замечание. Периодическое умножение в локальных кольцах приводит к эффективному рассмотрению кратности пересечения подмногообразий алгебраического многообразия (Серр [1958]). Среди многочисленных недавних работ по гомологической размерности нётеровых колец мы отметим работы Тэйта [1957], Ауслендера — Буксбаума [1958], Матлиса [1960], Дженса [1961]. Одно из ранних использований гомологической размерности принадлежит Хохшильду [1945, 1946], открывшему связь (§ 5) между биразмерностью Λ и сепарабельностью. Гомологическая теория алгебр Фробениуса аналогична теории гомологий групп (Накаяма [1957]; Накаяма — Цудзуку [1960, 1961]; Каш [1961]).

ГЛАВА VIII

Умножения

§ 1. Гомологические умножения

При изучении умножений постоянно проявляется связь между «внешними» и «внутренними» умножениями. Эта связь может быть проиллюстрирована на примере гомологических умножений. Если X_R и $_RY$ — цепные комплексы R-модулей, то *внешнее гомологическое умножение* — это гомоморфизм абелевых групп

$$p: H_k(X) \otimes_R H_m(Y) \to H_{k+m}(X \otimes_R Y), \tag{1.1}$$

действующий на циклах $u \in X$ и $v \in Y$ по формуле

$$p(\operatorname{cls} u \otimes \operatorname{cls} v) = \operatorname{cls}(u \otimes v).$$

Отображение p естественно по X и Y; оно уже встречалось в формуле Кюннета. Это умножение ассоциативно: для колец R и S и комплексов X_R, $_RY_S$ и $_SW$ произведения отображений

$$p(1 \otimes p) = p(p \otimes 1): H_k(X) \otimes_R H_l(Y) \otimes_S H_m(W) \to$$
$$\to H_n(X \otimes_R Y \otimes_S W),$$

где $n = k + l + m$, равны.

С другой стороны, пусть U есть некоторая DG-алгебра над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$. Тогда $H(U)$ является градуированной $\mathbf{K}$-алгеброй относительно умножения

$$\pi: H(U) \otimes H(U) \to H(U),$$

уже определенного в (VI.7) как

$$\pi(\operatorname{cls} u \otimes \operatorname{cls} v) = \operatorname{cls}(uv);$$

мы назовем это умножение *внутренним гомологическим умножением*. Внутреннее умножение можно получить из внешнего умножения с помощью отображения умножения $\pi_U: U \otimes U \to U$ как произведение отображений

$$\pi = (\pi_U)_* p: H(U) \otimes H(U) \to H(U \otimes U) \to H(U).$$

Внешнее гомологическое умножение может быть определено с модулями коэффициентов. Возьмем (неградуированные) $\mathbf{K}$-алгебры Λ и Λ', комплексы $\mathbf{K}$-модулей $_\Lambda X$ и $_{\Lambda'}X'$, правые модули G_Λ, $G'_{\Lambda'}$ и положим $\Omega = \Lambda \otimes \Lambda'$. *Внешним гомологическим умножением* называется отображение $p_H = \tau p$ из диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_k(G \otimes_\Lambda X) \otimes H_m(G' \otimes_{\Lambda'} X') \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p_H"'] & H_{k+m}((G \otimes_\Lambda X) \otimes (G' \otimes_{\Lambda'} X')) \arrow[d, "\tau"] \\ & H_{k+m}((G \otimes G') \otimes_\Omega (X \otimes X')), \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

где p — гомологическое умножение (1.1) с $R = \mathbf{K}$, а τ — сокращение для $H_{k+m}(\tau)$, т. е. для отображения групп гомологий, индуцированного внутренней четверной перестановкой VI (8.4). Это умножение p_H естественно и ассоциативно; последнее означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} H(X) \otimes H(X') \otimes H(X'') \arrow[r, "p_H \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes p_H"] & H(X \otimes X') \otimes H(X'') \arrow[d, "p_H"] \\ H(X) \otimes H(X' \otimes X'') \arrow[r, "p_H"] & H(X \otimes X' \otimes X''), \end{tikzcd}$$

в которой G и Λ всюду опущены.

Теорема 1.1. *Для алгебр Λ и Λ' над полем гомологическое умножение является изоморфизмом*

$$p_H: \sum_{k+m=n} H_k(G \otimes_\Lambda X) \otimes H_m(G' \otimes_{\Lambda'} X') \cong$$
$$\cong H_n((G \otimes G') \otimes_\Omega (X \otimes X')).$$

Доказательство. Все модули над полем свободны, так что по тензорной формуле Кюннета p становится изоморфизмом, а τ является изоморфизмом всегда.

Для левых модулей $_\Lambda A$ и $_{\Lambda'}A'$ *внешним когомологическим умножением* называется отображение $p^H = \zeta p$ из диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^k(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, A)) \otimes H^m(\operatorname{Hom}_{\Lambda'}(X', A')) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p_H"'] & H^{k+m}(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, A) \otimes \operatorname{Hom}_{\Lambda'}(X', A')) \arrow[d, "\zeta"] \\ & H^{k+m}(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', A \otimes A')). \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Здесь p — гомологическое умножение из (1.1), записанное с верхними индексами, а ζ — цепное преобразование, определенное Hom-$\otimes$-перестановкой VI (8.10). Это умножение естественно и ассоциативно. Его определение можно переписать в терминах коцепей $h: X_k \to A$, $h': X'_m \to A'$. Рассмотрим h и h' как гомоморфизмы градуированных модулей. По определению, $\zeta(h \otimes h')$ — это гомоморфизм

$$h \otimes h' : (X \otimes X')_n = \sum_{p+q=n} X_p \otimes X'_q \to A \otimes A',$$

действующий следующим образом: если $x \in X_p$, $x' \in X'_q$, $n = k + m$, то

$$(h \otimes h')(x \otimes x') = \begin{cases} hx \otimes h'x', & p = k, \quad q = m, \\ 0\ , & p \neq k. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Тогда $\delta(h \otimes h') = \delta h \otimes h' + (-1)^k h \otimes \delta h'$, и p^H определяется для когомологических классов следующей формулой:

$$p^H(\operatorname{cls} h \otimes \operatorname{cls} h') = \operatorname{cls}(h \otimes h').$$

Теорема 1.2. *Для алгебр Λ и Λ' над полем и положительных комплексов X и X', в которых модули X_k и X'_m являются свободными Λ- или Λ'-модулями с конечным числом образующих, когомологическое умножение является изоморфизмом*

$$p^H: \sum_{k+m=n} H^k(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, A)) \otimes H^m(\operatorname{Hom}_{\Lambda'}(X', A')) \cong$$
$$\cong H^{k+m}(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', A \otimes A')).$$

Доказательство. Поскольку комплексы X и X' положительны, каждый модуль $(X \otimes X')_n$ является конечной прямой суммой $\sum X_p \otimes X'_q$, а функтор $\operatorname{Hom}(X, -)$ перестановочен с конечными прямыми суммами (=прямыми произведениями) в силу аддитивности. Предположение о конечности числа образующих позволяет применить предложение VI.8.3 и тем самым обеспечивает изоморфность комплексов при Hom-$\otimes$-перестановке, а p является изоморфизмом по тензорной формуле Кюннета для поля.

Теорема 1.3. *Связывающие гомоморфизмы, если они определены, перестановочны с гомологическим умножением p.*

Доказательство. Заменим в (1.1) комплекс X короткой точной последовательностью

$$E: 0 \to K \to L \to M \to 0$$

комплексов правых R-модулей. Связывающие гомоморфизмы для групп гомологий имеют вид

$$\partial_E = E_*: H_{k+1}(M) \to H_k(K).$$

Последовательность тензорных произведений комплексов

$$E \otimes_R Y: 0 \to K \otimes_R Y \to L \otimes_R Y \to M \otimes_R Y \to 0 \qquad (1.5)$$

в *случае ее точности* также определяет связывающие гомоморфизмы, указанные в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(M) \otimes_R H_m(Y) & \xrightarrow{p} & H_{k+m+1}(M \otimes_R Y) \\ \downarrow{\scriptstyle E_*\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle (E\otimes_R Y)_*} \\ H_k(K) \otimes_R H_m(Y) & \xrightarrow{p} & H_{k+m}(K \otimes_R Y). \end{array} \qquad (1.6)$$

В нашей теореме утверждается, что эта диаграмма коммутативна; доказательство заключается в непосредственном применении описания связывающих гомоморфизмов через «обращение». Соответствующий результат верен и в том случае, когда комплекс Y заменяется короткой точной последовательностью комплексов.

Этот результат применим всякий раз, когда последовательность $E \otimes_R Y$ точна. Однако этого может не быть; для того чтобы получить точность, мы должны заменить левый нуль в (1.5) на $\sum \operatorname{Tor}_1^R(M_p, Y_q)$. Последовательность будет точной в одном из следующих случаев:

случай 1: каждый модуль Y_n является плоским левым R-модулем;
случай 2: каждый модуль M_n является плоским правым R-модулем;
случай 3: последовательность E расщепляется как последовательность правых R-модулей.

Третье условие означает, что каждая последовательность $K_n \rightarrowtail L_n \twoheadrightarrow M_n$ расщепляется.

Следствие 1.4. *Связывающие гомоморфизмы, если они определены, коммутируют с гомологическим и когомологическим умножениями p_H и p^H.*

Доказательство. Этот результат получается сразу, поскольку $p_H = \tau p$ и $p^H = \zeta p$, а естественные отображения τ и ζ коммутируют со связывающими гомоморфизмами. В утверждении содержатся случаи, когда один из аргументов G, X, G' или X' для p_H заменяется подходящей короткой точной последовательностью. Например, заменим G короткой точной последовательностью E правых Λ-модулей. Предположим, что

(i) X — комплекс плоских левых Λ-модулей X_n;
(ii) E расщепляется как последовательность $\mathbf{K}$-модулей;
(iii) X' — комплекс плоских левых Λ'-модулей X'_n.

(Эти условия выполняются довольно часто; они выполнены, если X и X' — проективные резольвенты, а $\mathbf{K}$ — поле.) Такие условия гарантируют, что $E \otimes_\Lambda X$ — короткая точная последовательность комплексов $\mathbf{K}$-модулей, что $E \otimes_{\mathbf{K}} G'$ — короткая точная последовательность $\Omega = \Lambda \otimes \Lambda'$-модулей и что произведение $(E \otimes G') \otimes_\Omega (X \otimes X')$ — короткая точная последовательность комплексов **K**-модулей. Значит, все связывающие гомоморфизмы определены, и диаграмма, подобная диаграмме (1.6), коммутативна.

§ 2. Периодическое произведение алгебр

Если X и X' — резольвенты, то (ко)гомологические умножения p_H в p^H будут определять соответствующие умножения для Tor и Ext.

Для **K**-модулей B, A, B', A' внутренняя четверная перестановка

$$\tau : (B \otimes A) \otimes (B' \otimes A') \cong (B \otimes B') \otimes (A \otimes A') \qquad (2.1)$$

из VI (8.4) может рассматриваться как внешнее умножение для функтора $\otimes$. Напомним, что теорема V.7.3 устанавливает изоморфизм η: $\mathrm{Tor}_0(B, A) \cong B \otimes A$; элементы из Tor_0 записаны как тройки $t = (\mu, F, \nu)$, где F — конечно порожденный свободный модуль с дуальным модулем F^*, а μ: $F \to B$, ν: $F^* \to A$ суть гомоморфизмы. Используя этот изоморфизм η, внутренней четверной перестановке можно придать вид

$$\tau[(\mu, F, \nu) \otimes (\mu', F', \nu')] = (\mu \otimes \mu', F \otimes F', \nu \otimes \nu'). \qquad (2.2)$$

Здесь $\nu \otimes \nu'$ $F^* \otimes F'^* \to A \otimes A'$, но мы можем рассматривать $\nu \otimes \nu'$ как отображение, определенное на $(F \otimes F')^*$, используя отождествление $F^* \otimes F'^* = (F \otimes F')^*$, устанавливаемое изоморфизмом из предложения V.4.3 [случайно это отождествление оказывается совместным с отождествлением $(F \otimes F') \otimes F'' = F \otimes (F' \otimes F'')$]. Формула (2.2) будет распространена на более высокие периодические произведения.

Элемент из $\mathrm{Tor}_k(B, A)$ записывался как тройка $t = (\mu, L, \nu)$, где L — конечно порожденный свободный комплекс длины k, а $\mu : L \to B$, $\nu : L^* \to A$ являются цепными преобразованиями. Если дан второй элемент $t' \in \mathrm{Tor}_m(B', A')$, то можно определить произведение

$$(\mu, L, \nu)(\mu', L', \nu') = (\mu \otimes \mu', L \otimes L', \nu \otimes \nu'). \qquad (2.3)$$

Здесь $L \otimes L'$ — конечно порожденный свободный комплекс длины $k + m$, а $\nu \otimes \nu'$ — цепное преобразование $L^* \otimes L'^* = (L \otimes L')^* \to A \otimes A'$. Это произведение корректно определено относительно соотношений, использованных при определении элементов Tor_n, и естественно по своим четырем аргументам. Это произведение tt' билинейно; мы избежим прямого доказательства с помощью сложения, определенного в Tor, используя резольвенты так, как показано в следующей теореме:

Теорема 2.1. *Для четырех* **K**-*модулей* B, A, B', A' *умножение, определенное формулой* (2.3), *является гомоморфизмом*

$$p_T: \mathrm{Tor}_k(B, A) \otimes \mathrm{Tor}_m(B', A') \to \mathrm{Tor}_{k+m}(B \otimes B', A \otimes A'). \qquad (2.4)$$

Он может быть вычислен с помощью проективных резольвент ε: $X \to B$, ε': $X' \to B'$ *и* ε'' : $Y \to B \otimes B'$ *как произведение отображений*

$$H(X \otimes A) \otimes H(X' \otimes A') \xrightarrow{p_H} H(X \otimes X' \otimes A \otimes A') \xrightarrow{f_*} H(Y \otimes A \otimes A'),$$

где p_H — *внешнее гомологическое умножение* (1.2), *причем* X *играет роль* G, *а* f: $X \otimes X' \to Y$ *есть цепное преобразование, накрывающее* $1_{B \otimes B'}$.

Доказательство. Тензорное произведение свободных или проективных **K**-модулей свободно или проективно соответственно, так что $\varepsilon \otimes \varepsilon'$: $X \otimes X' \to B \otimes B'$ — проективный комплекс над $B \otimes B'$. По теореме сравнения существует отображение f, накрывающее 1, а индуцированное отображение f_* групп гомологий единственно. Вычисление $\mathrm{Tor}(B, A)$ через резольвенту X проводится с помощью изоморфизма ω: $\mathrm{Tor}(B, A) \cong H(X \otimes A)$ из теоремы V.8.1. Пусть ω' и ω'' — изоморфизмы, аналогичные ω. Утверждение, что p_T можно вычислить как произведение $f_* p_H$, означает, что

$$\omega''(tt') = f_* p_H(\omega t \otimes \omega' t'). \qquad (2.5)$$

Поскольку ω'': $\mathrm{Tor}(B \otimes B', A \otimes A') \cong H(Y \otimes A \otimes A')$ есть изоморфизм, это равенство также показывает билинейность произведения tt' и, следовательно, доказывает, что p_T из (2.4) также гомоморфизм.

Для доказательства (2.5) напомним, что ω определяется следующим образом: тройку $t = (\mu, L, \nu)$ рассматриваем как свободный комплекс μ: $L \to B$ длины k над B и цикл $(1, L_k, \nu) \in L_k \otimes A$, 1_B накрываем цепным преобразованием h: $L \to X$ и полагаем $\omega t = (h \otimes 1)_* \operatorname{cls}(1, L_k, \nu)$. Но tt' записывается соответственно как свободный комплекс $\mu \otimes \mu'$: $L \otimes L' \to B \otimes B'$ и цикл $(1, L_k \otimes L'_m, \nu \otimes \nu')$. Этот цикл является гомологическим произведением $\tau p\,[(1, L_k, \nu) \otimes (1, L'_m, \nu')]$, а преобразование $f(h \otimes h') : L \otimes L' \to Y$ накрывает $1_{B \otimes B'}$. Следовательно,

$$\omega''(tt') = f_*(h \otimes h' \otimes 1 \otimes 1)_* p_H\{\operatorname{cls}(1, L_k, \nu) \otimes \operatorname{cls}(1, L'_m, \nu')\},$$

так что (2.5) есть следствие естественности гомологического умножения p_H относительно цепных преобразований h и h'.

Пусть Λ и Γ — две $\mathbf{K}$-алгебры; $\pi: \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ и $\rho: \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma$ являются их отображениями умножения. Гомоморфизм

$$(\Lambda \otimes \Gamma) \otimes (\Lambda \otimes \Gamma) \xrightarrow{\tau} (\Lambda \otimes \Lambda) \otimes (\Gamma \otimes \Gamma) \xrightarrow{\pi \otimes \rho} \Lambda \otimes \Gamma$$

задает умножение в алгебре $\Lambda \otimes \Gamma$. Другими словами, внутреннее умножение в тензорном произведении $\Delta \otimes \Gamma$ алгебр получается из внешнего умножения τ модулей.

Это внутреннее умножение будет теперь определено для $\operatorname{Tor}(\Lambda, \Gamma)$.

Теорема 2.2. *Для $\mathbf{K}$-алгебр Λ и Γ семейство* $\{\operatorname{Tor}_n^{\mathbf{K}}(\Lambda, \Gamma)\}$ *является градуированной $\mathbf{K}$-алгеброй* $\operatorname{Tor}^{\mathbf{K}}(\Lambda, \Gamma)$, *в которой элементы степени нуль образуют тензорное произведение $\Lambda \otimes \Gamma$ алгебр. Произведение двух элементов $t = (\mu, L, \nu)$ и $t' = (\mu', L', \nu')$ определяется формулой*

$$(\mu, L, \nu)(\mu', L', \nu') = (\pi(\mu \otimes \mu'),\ L \otimes L',\ \rho(\nu \otimes \nu')), \tag{2.6}$$

в которой π и ρ — отображения умножения алгебр Λ и Γ.

Доказательство. Внутреннее умножение (2.6) равно произведению $[\operatorname{Tor}(\pi, \rho)]\, p_T$, где p_T — внешнее умножение. По теореме 2.1 произведение tt' билинейно; оно, очевидно, ассоциативно. Единичные элементы алгебр Λ и Γ представляются $\mathbf{K}$-модульными гомоморфизмами $I: \mathbf{K} \to \Lambda$, $I': \mathbf{K} \to \Gamma$, а единичный элемент $1_\Lambda \otimes 1_\Gamma$ алгебры $\Lambda \otimes \Gamma$ появляется при изоморфизме $\eta: \operatorname{Tor}_0(\Lambda, \Gamma) \cong \Lambda \otimes \Gamma$ в виде тройки $1_T = (I, \mathbf{K}, I')$ из Tor_0, где $\mathbf{K}$ рассматривается как свободный $\mathbf{K}$-модуль с одним образующим. Формула (2.6) показывает, что $1_T t = t = t 1_T$. Следовательно, $\operatorname{Tor}(\Lambda, \Gamma)$ — это градуированная алгебра, что и утверждалось.

Мы установим, как можно вычислить это умножение с помощью подходящей резольвенты алгебры Λ.

Следствие 2.3. *Если U есть DG-алгебра, а $\varepsilon: U \to \Lambda$ такой гомоморфизм DG-алгебр, что алгебра U, рассматриваемая как комплекс, является проективной резольвентой $\mathbf{K}$-модуля Λ, то канонический модульный изоморфизм* ω: $\operatorname{Tor}(\Lambda, \Gamma) \cong H(U \otimes \Gamma)$, *который определяет периодические произведения с помощью этой резольвенты, есть также изоморфизм градуированных алгебр.*

Доказательство. В нашем случае $U \otimes \Gamma$, будучи тензорным произведением DG-алгебры U и тривиальной DG-алгебры Γ, является DG-алгеброй, так что $H(U \otimes \Gamma)$ действительно есть градуированная алгебра. Положим $B = B' = \Lambda$ в теореме 2.1. Тогда обе резольвенты X и X' мы можем положить равными резольвенте U, в качестве Y взять произвольную проективную резольвенту для $\Lambda \otimes \Lambda$. Накроем 1 и π цепными преобразованиями f и g, как показано в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes U & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda \otimes \Lambda & = & \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\pi} & \Lambda. \end{array}$$

Тогда $\operatorname{Tor}(\pi, \rho)$ — отображение групп гомологий, индуцированное гомоморфизмом $g \otimes \rho: Y \otimes \Gamma \otimes \Gamma \to U \otimes \Gamma$. Поэтому умножение в $\operatorname{Tor}(\Lambda, \Gamma)$ равно $(g \otimes \rho)_* f_* p_H$, как показывает диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H(U \otimes \Gamma) \otimes H(U \otimes \Gamma) & \xrightarrow{p_H} & H(U \otimes U \otimes \Gamma \otimes \Gamma) & \xrightarrow{f_*} & H(Y \otimes \Gamma \otimes \Gamma) \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_U)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (g \otimes \rho)_*} \\ & & H(U \otimes \Gamma \otimes \Gamma) & \xrightarrow{(1 \otimes \rho)_*} & H(U \otimes \Gamma). \end{array}$$

Но умножения $\pi_U: U \otimes U \to U$ и $gf: U \otimes U \to U$ являются цепными преобразованиями резольвент, накрывающими отображение $\pi: \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ и, следовательно, гомотопны по теореме сравнения. Поэтому приведенная выше диаграмма групп гомологий коммутативна, так что умножение в $\operatorname{Tor}(\Lambda, \Gamma)$ определяется как $(\pi_U \otimes \rho)_* p_H$. Но это выражение в точности совпадает с внутренним умножением в градуированной алгебре $H(U \otimes \Gamma)$.

Для полиномиальной алгебры P мы уже отмечали в теореме VII.2.2, что градуированная алгебра $\operatorname{Tor}^P(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ является внешней алгеброй над P; в доказательстве использовался тот факт, что резольвента Косуля для $\mathbf{K}$ есть DG-алгебра. В действительности любая алгебра Λ имеет проективную резольвенту, являющуюся DG-алгеброй U (упражнение 2).

Наше определение произведения (2.3) является новым, но внешнее умножение p_T, которое оно определяет, совпадает с умножением $\pitchfork$, определенным Картаном и Эйленбергом (гл. XI.4). Их определение использует резольвенты A и A', но это не необходимо (упражнение 3).

Упражнения

1. Пусть U — DG-алгебра, A — $\mathbf{K}$-модуль и $\varphi: A \to U_n$ — такой модульный гомоморфизм, что $\partial_n \varphi = 0$. Показать, что градуированная алгебра $U \otimes T(A)$ имеет единственную DG-структуру, при которой $\partial \mid U = \partial_U$, $\partial \mid A = \varphi$ и A степени $n + 1$.

2. Для произвольной $\mathbf{K}$-алгебры Λ построить DG-алгебру U и такой гомоморфизм $\varepsilon: U \to \Lambda$ градуированных алгебр, чтобы, как и в следствии 2.3, U была проективной резольвентой Λ как $\mathbf{K}$-модуля. Указание: используя упражнение 1, построить DG-алгебру $U^{(n)}$ рекурсивно по n так, чтобы она была проективной резольвентой до размерности n.

3. Описать внешнее умножение в $\operatorname{Tor}(B, A)$, используя резольвенты для B и A или только для A.

4. Показать, что формула (2.3) определяет для $\mathbf{K}$-алгебр Λ и Λ' и модулей B_Λ, $B'_{\Lambda'}$, ${}_\Lambda A$, ${}_{\Lambda'}A'$ внешнее умножение

$$\operatorname{Tor}^\Lambda(B, A) \otimes \operatorname{Tor}^{\Lambda'}(B', A') \to \operatorname{Tor}^{\Lambda\otimes\Lambda'}(B\otimes B', A\otimes A').$$

Описать его свойства и показать, что оно коммутирует со всеми четырьмя связывающими гомоморфизмами. Это умножение есть умножение T Картана и Эйленберга, XI.1.

§ 3. Диаграммная лемма

В следующем параграфе нам понадобится следующее антикоммутативное правило сплетения точных последовательностей.

Лемма 3.1. (3×3 *сплетение.*) *Если в коммутативной* 3×3 *диаграмме модулей столбцами являются короткие точные последовательности* E', E, *и* E'', *а строками — короткие точные последовательности* E_A, E_B *и* E_C, *то*

$$E_A \circ E'' \equiv -E' \circ E_C.$$

Доказательство. Данная 3×3 диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} E_A: A' & \to & A & \to & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_B: B' & \to & B & \xrightarrow{\beta} & B'' \\ \downarrow & & \downarrow\sigma & & \downarrow\tau \\ E_C: C' & \to & C & \xrightarrow{\gamma} & C'' \end{array} \tag{3.1}$$

(нули на концах не указаны). Построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & A' & \to & A & \to & B'' & \to & C'' & \to 0 \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow\iota_2 & & \|{-1} & \\ 0 \to & A' & \to & B & \xrightarrow{\varphi} & C\oplus B'' & \xrightarrow{\psi} & C'' & \to 0 \\ & \| & & \uparrow & & \uparrow\iota_1 & & \| & \\ 0 \to & A' & \to & B' & \to & C & \to & C'' & \to 0, \end{array} \tag{3.2}$$

в которой $\varphi b = (\sigma b, \beta b)$ и $\psi(c, b'') = \gamma c - \tau b''$ (обратить внимание на знак), а стрелки без обозначений соответствуют отображениям или произведениям отображений из диаграммы (3.1). Построенная диаграмма коммутативна; диаграммный поиск показывает, что средняя строка точна. Верхняя строка есть произведение $E_A \circ E''$; вертикальные отображения, включая $-1_{C''}: C'' \to C''$ справа, устанавливают конгруэнтность этого произведения со строкой, противоположной средней строке, которая в свою очередь оказывается конгруэнтной нижней строке $E' \circ E_C$. Тем самым установлен нужный результат.

Близким и часто используемым результатом является

Лемма 3.2. *Для правых* R-*модулей* $A \subset B$, *левых* R-*модулей* $A' \subset B'$

$$(B/A)\otimes_R (B'/A') \cong [B\otimes_R B']/[\operatorname{im}(A\otimes_R B') \cup \operatorname{im}(B\otimes_R A')]. \tag{3.3}$$

Доказательство. Первым здесь указан образ отображения $A\otimes B' \to B\otimes B'$. Это отображение вместе с симметричным отображением порождает точную последовательность

$$A\otimes_R B' \oplus B\otimes_R A' \to B\otimes_R B' \to (B/A)\otimes_R (B'/A') \to 0.$$

Эта последовательность может быть получена также из диаграммы, сходной с диаграммой (3.1) (см. ниже упражнение 2) с первой строкой $A\otimes A'$, $A\otimes B'$, $A\otimes(B'/A')$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Предположив только, что в (3.1) строки и столбцы являются точными справа последовательностями, а третья строка и третий столбец — короткими точными последовательностями, доказать, что диаграмма (3.2) коммутативна и имеет точные строки, если нули слева опустить.

2. Доказать лемму 3.1 с помощью диаграммы, подобной диаграмме (3.2), в которой направления вертикальных стрелок заменены на противоположные, а средней строкой служит последовательность $A' \rightarrowtail B' \oplus A \to B \twoheadrightarrow C''$.

§ 4. Внешние умножения для Ext

Умножение длинных точных последовательностей порождает внешнее умножение в Ext. Для одного Λ-модуля A умножение является гомоморфизмом

$$\operatorname{Ext}^k_\Lambda(A, A)\otimes \operatorname{Ext}^m_\Lambda(A, A) \to \operatorname{Ext}^{k+m}_\Lambda(A, A).$$

По теореме III.5.3 оно превращает $\operatorname{Ext}_\Lambda(A, A)$ в градуированное кольцо; на самом деле (в силу теоремы VII.3.1) оно оказывается градуированной $\mathbf{K}$-алгеброй. В этой алгебре элементы степени нуль образуют $\mathbf{K}$-алгебру Λ-модульных эндоморфизмов модуля A. Далее мы опишем, как это умножение можно иногда получить из когомологического умножения для резольвент.

Пусть Λ и Λ' — алгебры над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$, C и A — левые Λ-модули, C' и A' — левые Λ'-модули. Обозначим через Ω тензорное произведение $\Lambda\otimes\Lambda'$, где $\otimes$ — сокращение для $\otimes_{\mathbf{K}}$. Заметим, что $C\otimes C'$ и $A\otimes A'$ — левые Ω-модули. Мы хотим определить $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм

$$\vee: \operatorname{Ext}^k_\Lambda(C, A)\otimes \operatorname{Ext}^m_{\Lambda'}(C', A') \to \operatorname{Ext}^{k+m}_\Omega(C\otimes C', A\otimes A'), \tag{4.1}$$

называемый внешним или $\vee$-умножением; если $\sigma \in \operatorname{Ext}_\Lambda$ и $\sigma' \in \operatorname{Ext}_{\Lambda'}$, то мы будем писать $\sigma \vee \sigma'$ вместо $\vee(\sigma \otimes \sigma')$. Возьмем свободные резольвенты Λ- и Λ'-модулей $\varepsilon: X \to C$ и $\varepsilon': X' \to C'$ соответственно. Когомологическое умножение (1.3) — это отображение

$$p^H: H^k(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, A)) \otimes H^m(\operatorname{Hom}_{\Lambda'}(X', A')) \to$$
$$\to H^{k+m}(\operatorname{Hom}_\Omega(X \otimes X', A \otimes A')).$$

Вместе с каноническими изоморфизмами $\operatorname{Ext}^k_\Lambda(C, A) \cong H^k(\operatorname{Hom}_\Lambda(X, A))$ оно будет определять нужное внешнее умножение (4.1) при условии, что $(\varepsilon \otimes \varepsilon'): X \otimes X' \to C \otimes C'$ есть свободная Ω-модульная резольвента, поскольку стереотипные рассуждения, использующие теорему сравнения, показывают, что результат не зависит от выбора резольвент. Во всяком случае, каждый модуль $X_k \otimes X'_m$ является свободным левым Ω-модулем. То условие, что $X \otimes X'$ — резольвента, выполняется в двух случаях.

Случай 1. $\mathbf{K}$ — поле. По тензорной формуле Кюннета, справедливой для поля $\mathbf{K}$, $H_n(X \otimes X') = 0$ при всех $n > 0$ и $\varepsilon \otimes \varepsilon': H_0(X \otimes X') \cong C \otimes C'$, так что $X \otimes X'$ — резольвента.

Случай 2. Λ и Λ' свободны как $\mathbf{K}$-модули, а C — плоский $\mathbf{K}$-модуль. В этом случае каждый свободный Λ-модуль X_n является прямой суммой копий свободного $\mathbf{K}$-модуля Λ, так что X_n — свободный $\mathbf{K}$-модуль. Тогда $X \to C$ есть также свободная $\mathbf{K}$-модульная резольвента модуля C, и поэтому $\operatorname{Tor}^{\mathbf{K}}_n(C, C')$ можно вычислить (по теореме V.9.3) с помощью X и X' как $H_n(X \otimes X')$. Но модуль C плоский, и поэтому $\operatorname{Tor}_n(C, -) = 0$ при $n > 0$ и, значит, $X \otimes X' \to C \otimes C'$ есть резольвента.

Другие случаи встретятся в упражнениях и в последующем изучении относительных функторов Ext (гл. X). Из определения следует, что $\vee$-умножение перестановочно со связывающими гомоморфизмами и ассоциативно; при $k = m = 0$ оно сводится к Hom-$\otimes$-перестановке.

В случае 1 $\vee$-умножение можно выразить через умножение Ионеды.

Теорема 4.1. (*Ионеда* [1958].) *Для алгебр Λ и Λ' над полем и для элементов $\sigma \in \operatorname{Ext}^k_\Lambda(C, A)$, $\sigma' \in \operatorname{Ext}^m_{\Lambda'}(C', A')$, $\vee$-произведение определяется формулой*

$$\sigma \vee \sigma' = (\sigma \otimes A') \circ (C \otimes \sigma') = (-1)^{km}[(A \otimes \sigma') \circ (\sigma \otimes C')]. \quad (4.2)$$

В этом выражении $\sigma \otimes A'$ имеет следующий смысл. Если $k = 0$, то σ — гомоморфизм $C \to A$; пусть $\sigma \otimes A'$ означает $\sigma \otimes 1_{A'}: C \otimes A' \to A \otimes A'$. При $k > 0$ и $m > 0$, σ и σ' — классы конгруэнтности длинных точных последовательностей

$$S: 0 \to A \to B_{k-1} \to \cdots \to B_0 \to C \to 0,$$
$$S': 0 \to A' \to B'_{m-1} \to \cdots \to B'_0 \to C' \to 0.$$

Поскольку $\mathbf{K}$ — поле, функтор $\otimes_{\mathbf{K}}$ сохраняет точность, и поэтому имеются длинные точные последовательности

$$S \otimes A': 0 \to A \otimes A' \to B_{k-1} \otimes A' \to \cdots \to C \otimes A' \to 0;$$
$$C \otimes S': 0 \to C \otimes A' \to C \otimes B'_{m-1} \to \cdots \to C \otimes C' \to 0.$$

Положим $\sigma \otimes A' = \operatorname{cls}(S \otimes A')$ и $C \otimes \sigma' = \operatorname{cls}(C \otimes S')$; тогда произведение Ионеды $(\sigma \otimes A') \circ (C \otimes \sigma')$ определено; при $k = 0$ или $m = 0$ это будет обычное произведение гомоморфизма и длинной точной последовательности.

Доказательство. Сначала предположим, что $k > 0$ и $m > 0$. Рассмотрим S как резольвенту модуля C; по теореме сравнения можно накрыть 1_C цепным преобразованием $f: X \to S$. Аналогично $1_{C'}$ накрывается $f': X' \to S'$; в частности, $f'_m: X'_m \to A'$ является коциклом в $\operatorname{Hom}(X', A')$ и его класс представляет $\operatorname{cls} S'$ при изоморфизме $H^m(X', A') \cong \operatorname{Ext}^m(C', A')$ теоремы III.6.4. Комплекс $X \otimes X'$ является первой строкой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes X')_{m+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & (X \otimes X')_m \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & (X \otimes X')_{m-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & (X \otimes X')_{m-2} \arrow[d] \\
X_1 \otimes X'_m \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \otimes f'_m"] & X_0 \otimes X'_m \arrow[r] \arrow[d, "f_0 \otimes f'_m"] & X_0 \otimes X'_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon \otimes f'_{m-1}"] & X_0 \otimes X'_{m-2} \arrow[d, "\varepsilon \otimes f'_{m-2}"] \\
B_1 \otimes A' \arrow[r] & B_0 \otimes A' \arrow[r] \arrow[dr] & C \otimes B'_{m-1} \arrow[r] & C \otimes B'_{m-2}, \\
& & C \otimes A' \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

которая тем же способом распространяется вправо и влево и оканчивается справа столбцом $C \otimes C'$. Верхний ряд вертикальных отображений проектирует каждый модуль $(X \otimes X')_n$ на его отмеченное прямое слагаемое. Нижняя строка есть произведение $T = (S \otimes A') \circ (C \otimes S')$ длинных последовательностей, причем отмечено их соединение в $C \otimes A'$. Верхние квадраты не коммутативны, но если стереть среднюю строку, то получающаяся диаграмма становится коммутативной даже в месте соединения. Следовательно, сквозное вертикальное отображение — это цепное преобразование $h: X \otimes X' \to T$, которое накрывает единицу модуля $C \otimes C'$. Для нахождения класса когомологий в $X \otimes X'$, соответствующего T, возьмем преобразование h в размерности $k + m$.

Здесь h равно произведению

$$(X\otimes X')_{k+m}\longrightarrow X_k\otimes X'_m\xrightarrow{f_k\otimes f'_m}A\otimes A';$$

когомологический класс этого коцикла совпадает с когомологическим классом, отвечающим $\mathrm{cls}\,f_k\otimes\mathrm{cls}\,f'_m$ при когомологическом умножении p^H. Поскольку классы $\mathrm{cls}\,f_k$ и $\mathrm{cls}\,f'_m$ представляют S и S' соответственно, то тем самым доказано первое равенство теоремы при $k>0$ и $m>0$. В доказательстве для $k=0$ (или $m=0$) используется аналогичная диаграмма, в которой соединение последовательностей заменено действием гомоморфизма $\sigma\colon C\to A$ на последовательность.

Второе равенство в (4.2) — это правило (анти)коммутативности. Оно непосредственно следует из определений, если $k=0$ или $m=0$.

Поскольку любая длинная точная последовательность является произведением коротких, достаточно дать доказательство для случая $k=m=1$, т. е. для коротких точных последовательностей E и E'. Но в этом случае имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes E'\colon A\otimes A' & \longrightarrow & A\otimes B' & \longrightarrow & A\otimes C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B\otimes E'\colon B\otimes A' & \longrightarrow & B\otimes B' & \longrightarrow & B\otimes C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C\otimes E'\colon C\otimes A' & \longrightarrow & C\otimes B' & \longrightarrow & C\otimes C', \end{array}\qquad(4.3)$$

и в силу леммы 3.1, $(A\otimes E')\circ(E\otimes C')\equiv-(E\otimes A')\circ(C\otimes E')$. А это и есть требуемое равенство.

Из этой теоремы снова вытекает, что $\vee$-умножение ассоциативно.

Теорема 4.2. *Если $\mathbf{K}$-алгебры Λ и Λ' свободны как $\mathbf{K}$-модули, а Λ- (Λ')-модули C, A, C', A' являются плоскими $\mathbf{K}$-модулями, то определено $\vee$-умножение* (4.1). *Оно может быть выражено формулой* (4.2).

Доказательство. Предположения теоремы дают нам условия указанного выше случая 2. Можно применить предыдущее доказательство, так как $X\otimes X'$ есть резольвента, а тензорное произведение $S\otimes_{\mathbf K}A'$ длинной точной последовательности S и $\mathbf{K}$-плоского модуля A' является по-прежнему точной последовательностью.

Следствие 4.3. *Если Λ и Λ' — пополненные $\mathbf{K}$-алгебры, которые являются свободными $\mathbf{K}$-модулями, то $\vee$-произведение элементов $\sigma\in\mathrm{Ext}^k_\Lambda(\mathbf K,\mathbf K)$ и $\sigma'\in\mathrm{Ext}^m_{\Lambda'}(\mathbf K,\mathbf K)$ задается формулой*

$$\sigma\vee\sigma'={}_{\varepsilon'}\sigma\circ{}_{\varepsilon}\sigma'=(-1)^{km}\,{}_{\varepsilon}\sigma'\circ{}_{\varepsilon'}\sigma\in\mathrm{Ext}^{k+m}_{\Omega}(\mathbf K,\mathbf K).\qquad(4.4)$$

Здесь $\mathbf{K}$ рассматривается как Λ- или Λ'-модуль, полученный отступлением вдоль пополнений $\varepsilon\colon\Lambda\to\mathbf K$ и ε', а ${}_{\varepsilon'}\sigma$ есть сокращение для $(1\otimes\varepsilon')^*\sigma$, т. е. это короткая точная последовательность из σ, члены которой превращены в $\Lambda\otimes\Lambda'$-модули отступлением вдоль $1\otimes\varepsilon'\colon\Lambda\otimes\Lambda'\to\Lambda\otimes\mathbf K=\Lambda$.

Пусть теперь V есть алгебра Хопфа с коединицей $\varepsilon\colon V\to\mathbf K$ и диагональным отображением $\psi\colon V\to V\otimes V$. Отступление вдоль ψ превращает $(V\otimes V)$-модули в V-модули, переводит точные последовательности в точные последовательности и определяет таким образом отображение замены колец $\psi^\#\colon\mathrm{Ext}_{V\otimes V}\to\mathrm{Ext}_V$. Если C, A, C' и A' — левые V-модули, то V-модулями являются также модули ${}_\psi(C\otimes C')$ и ${}_\psi(A\otimes A')$, а произведение $\psi^\#\vee$ отступления и $\vee$-умножения является $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом

$$\psi^\#\vee\colon\mathrm{Ext}^k_V(C,A)\otimes\mathrm{Ext}^m_V(C',A')\longrightarrow\mathrm{Ext}^{k+m}_V({}_\psi(C\otimes C'),{}_\psi(A\otimes A')),\qquad(4.5)$$

называемым *$\vee$-умножением Хопфа.* Оно определено, если $\mathbf{K}$ — поле или если C — плоский $\mathbf{K}$-модуль, а V — свободный $\mathbf{K}$-модуль. При этом справедливы аналоги теорем 4.1 и 4.2. Поскольку ψ ассоциативно, ассоциативно и это умножение.

Путем отступления каждый $\mathbf{K}$-модуль становится V-модулем ${}_\varepsilon M$.

Лемма 4.4. *Для $\mathbf{K}$-модуля M и модуля C над алгеброй Хопфа V изоморфизмы*

$${}_\psi({}_\varepsilon M\otimes C)\cong M\otimes C,\qquad{}_\psi(C\otimes{}_\varepsilon M)\cong C\otimes M\qquad(4.6)$$

являются изоморфизмами V-модулей, причем V-модульная структура в $M\otimes C$ и $C\otimes M$ индуцируется V-модульной структурой в C.

Доказательство. Алгебра Хопфа, будучи коалгеброй, удовлетворяет тождеству $(\varepsilon\otimes1)\psi=1$ из VI (9.1). Поэтому

$${}_\psi[{}_\varepsilon M\otimes C]={}_\psi[{}_{(\varepsilon\otimes1)}(M\otimes C)]={}_{(\varepsilon\otimes1)\psi}(M\otimes C)=M\otimes C,$$

и с другой стороны получается аналогично. Отсюда вытекает любопытный результат.

Предложение 4.5. *Если V — алгебра Хопфа над полем $\mathbf{K}$, M и N являются $\mathbf{K}$-модулями, а C, A являются V-модулями, то $\vee$-умножения Хопфа*

$$\mathrm{Ext}_V({}_\varepsilon M,A)\otimes\mathrm{Ext}_V(C',{}_\varepsilon N')\longrightarrow\mathrm{Ext}_V(M\otimes C',A\otimes N'),$$
$$\mathrm{Ext}_V(C,{}_\varepsilon N)\otimes\mathrm{Ext}_V({}_\varepsilon M',A')\longrightarrow\mathrm{Ext}_V(C\otimes M',N\otimes A')$$

не зависят от диагонального отображения ψ, т. е. зависят только от V как пополненной алгебры $\varepsilon\colon V\to\mathbf K$.

Доказательство. Указанные $\vee$-умножения по-прежнему определяются в терминах умножения длинных точных последовательностей формулами (4.2), причем модули в этих длинных точных последовательностях превращены в V-модули отступлением вдоль ψ. В предыдущей лемме утверждается, что результирующая V-модульная структура не зависит от ψ.

Пусть, в частности, все рассматриваемые модули совпадают с $\varepsilon\mathbf{K}$; тогда $\mathbf{K} \otimes \mathbf{K} = \mathbf{K}$ и внешнее $\vee$-умножение становится *внутренним умножением*

$$\operatorname{Ext}_V(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \otimes \operatorname{Ext}_V(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_V(\mathbf{K}, \mathbf{K}), \tag{4.7}$$

которое превращает $\operatorname{Ext}_V(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ в градуированную $\mathbf{K}$-алгебру. Поскольку $\sigma \otimes \mathbf{K} = \sigma$, формула (4.4) показывает, что эта алгебра коммутативна.

Замечание. Внешнее умножение для Tor возникает из внутренней четверной перестановки и совпадает с этим отображением для $\operatorname{Tor}_0 = \otimes$; оно может быть получено, как в (2.5), с помощью замены подходящих аргументов резольвентами, перемножением с гомологическим умножением и сравнением резольвент. Внешнее умножение для Ext возникает аналогичным образом из Hom-$\otimes$-перестановки. Различные другие «умножения», включающие Tor и Ext, получаются при помощи того же механизма из тождеств для Hom и $\otimes$; например, существует умножение, появляющееся из смешанной сопряженной ассоциативности

$$\operatorname{Hom}(A \otimes A', \operatorname{Hom}(C, C')) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C \otimes A, \operatorname{Hom}(A', C')).$$

Эти умножения детально описаны с помощью резольвент Картаном и Эйленбергом, гл. XI. Было бы интересно получить их описание в терминах инвариантного определения Tor и Ext. Другие типы умножений появятся позднее в гл. X.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать, как внешнее умножение в Ext коммутирует со связывающими гомоморфизмами.

В следующих упражнениях $\mathbf{K}$ — коммутативное кольцо, но не обязательно поле.

2. Пусть P и P' — проективные Λ- и Λ'-модули соответственно. Показать, что $P \otimes P'$ — проективный $(\Lambda \otimes \Lambda')$-модуль. Показать, что если Λ и Λ' проективны как $\mathbf{K}$-модули, то $P \otimes P'$ — проективный $\mathbf{K}$-модуль.

3. Показать, что $\vee$-умножение для кольца $\mathbf{K}$ можно определить, используя проективные резольвенты, при условии, что алгебры Λ и Λ' проективны как $\mathbf{K}$-модули и $\operatorname{Tor}_n^{\mathbf{K}}(C, C') = 0$ для $n > 0$. Если дополнительно A и A — плоские $\mathbf{K}$-модули, то показать также, что теорема 4.1 все еще остается верной.

§ 5. Симплициальные объекты

Когомология $H(X, Z)$ топологического пространства X с коэффициентами в Z образует градуированное кольцо относительно умножения, известного как умножение Колмогорова — Александера или $\cup$-умножение. Это умножение может быть определено не только для пространств, но и для других комплексов с «симплициальной» структурой. Поэтому мы теперь проанализируем комбинаторную структуру симплекса или, точнее, p-мерного симплекса Δ^p с упорядоченными вершинами.

Пусть для каждого неотрицательного целого числа p символ $[p]$ обозначает множество $\{0, 1, \ldots, p\}$ целых чисел с их обычным порядком. (Слабо) монотонное отображение $\mu\colon [q] \to [p]$ является такой функцией из $[q]$ в $[p]$, что из $i \leqslant j$ следует $\mu i \leqslant \mu j$. Объекты $[p]$ вместе со всеми слабо монотонными отображениями μ в качестве морфизмов образуют категорию $\mathscr{M}$ (от слова «монотонный»). Отметим, что монотонная функция μ определяется последовательностью из $q+1$ чисел $\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_q$ из $[p]$, где $\mu_0 = \mu 0, \ldots$; следовательно, мы можем рассматривать μ как аффинный симплекс $(\mu_0, \ldots, \mu_q)$, определенный вершинами μ_i на стандартном p-мерном симплексе Δ^p.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория. Контравариантный функтор $S\colon \mathscr{M} \to \mathscr{C}$ будет называться симплициальным объектом в $\mathscr{C}$. В нашем случае это значит, что S ставит в соответствие каждому неотрицательному целому числу q (каждому объекту из $\mathscr{M}$) объект S_q из $\mathscr{C}$ и каждому монотонному отображению $\mu\colon [q] \to [p]$ морфизм $\mu^* = S(\mu)\colon S_p \to S_q$ из $\mathscr{C}$, причем $S(1) = 1$ и $S(\mu\nu) = S(\nu) S(\mu)$. Под *симплициальным множеством* будет пониматься симплициальный объект в категории множеств; под *симплициальным Λ-модулем* будет пониматься симплициальный объект в категории всех Λ-модулей.

Если $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ есть ковариантный функтор, то каждый симплициальный объект S из $\mathscr{C}$ определяет симплициальный объект FS в $\mathscr{D}$, причем $(FS)_q = F(S_q)$, $FS(\mu) = F(S\mu)$. В частности, если Λ — алгебра, а F_Λ — функтор, который сопоставляет каждому множеству Y свободный (левый) Λ-модуль с образующими Y, то каждое симплициальное множество S определяет симплициальный Λ-модуль $F_\Lambda S$.

Сингулярные симплексы (II.7) топологического пространства X образуют симплициальное множество $\widetilde{S}(X)$. Подробнее, пусть $\widetilde{S}_p(X)$ — множество всех сингулярных p-мерных симплексов T пространства X; каждый симплекс T — это непрерывное отображение $T\colon \Delta^p \to X$, заданное на стандартном аффинном p-мерном симплексе Δ^p. Тогда каждое монотонное отображение $\mu\colon [q] \to [p]$ определяет единственное аффинное отображение $\mu\colon \Delta^q \to \Delta^p$, переводящее вершину i симплекса Δ^q в вершину μ_i симплекса Δ^p; произведение $\mu^* T = T\mu\colon \Delta^q \to X$ определяет отображение $\mu^* = \widetilde{S}(\mu)\colon \widetilde{S}_p(X) \to \widetilde{S}_q(X)$, которое превращает $\widetilde{S}$ в функтор на категории $\mathscr{M}$ и, значит, в симплициальное множество. Для кольца целых чисел $S' = F_Z\tilde{S}$ есть симплициальная абелева группа, причем S'_p — свободная абелева группа, порожденная всеми сингулярными p-мерными симплексами пространства X. Другими словами, S'_p — это обычная группа сингулярных p-мерных цепей пространства X. Мы вскоре увидим, что обычная граница для сингулярных p-мерных цепей также определяется симплициальной структурой $S'(X)$.

Удобно использовать два специальных семейства монотонных отображений

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i_q : [q-1] \to [q], \quad \eta^i = \eta^i_q : [q+1] \to [q], \tag{5.1}$$

определенных для $i = 0, \ldots, q$ (и для $q > 0$ в случае ε^i) равенствами

$$\varepsilon^i(j) = \begin{cases} j & \text{для } j < i, \\ j+1 & \text{для } j \geqslant i, \end{cases} \qquad \eta^i(j) = \begin{cases} j & \text{для } j \leqslant i, \\ j-1 & \text{для } j > i. \end{cases}$$

Другими словами, ε^i можно описать как $(q-1)$-мерную грань симплекса Δ^q с вершинами $(0, 1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, q)$, причем индекс i опущен, а η^i есть $(q+1)$-мерная грань с вершинами $(0, 1, \ldots, i, i, \ldots, q)$ с дважды повторенной вершиной i. Справедливость следующих равенств устанавливается из определений:

$$\varepsilon^j_{q+1}\varepsilon^i_q = \varepsilon^i_{q+1}\varepsilon^{j-1}_q, \qquad i < j, \tag{5.2}$$

$$\eta^j_q\eta^i_{q+1} = \eta^i_q\eta^{j+1}_{q+1}, \qquad i \leqslant j, \tag{5.3}$$

$$\eta^j_{q-1}\varepsilon^i_q = \begin{cases} \varepsilon^i_{q-1}\eta^{j-1}_{q-2}, & i < j, \\ 1, & i = j,\ i = j+1, \\ \varepsilon^{i-1}_{q-1}\eta^j_{q-2}, & i > j+1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Мы будем обычно опускать индекс q у ε и η.

Лемма 5.1. *Каждая монотонная функция $\mu: [q] \to [p]$ представима единственным образом в виде произведения*

$$\mu = \varepsilon^{i_1} \ldots \varepsilon^{i_s}\eta^{j_1} \ldots \eta^{j_t}, \tag{5.5}$$

где $p \geqslant i_1 > \cdots > i_s \geqslant 0$, $0 \leqslant j_1 < \cdots < j_t < q$, $q - t + s = p$.

Доказательство. Пусть элементами из $[p]$, не лежащими в $\mu[q]$, являются числа $i_1, \ldots, i_s$, расположенные по убыванию, в то время как $j_1, \ldots, j_t$ — элементы из $[q]$, для которых $\mu(j) = \mu(j+1)$, расположенные по возрастанию. Тогда имеет место (5.5) и μ представляется как произведение монотонного эпиморфизма (произведение всех η) и монотонного мономорфизма (произведение всех ε).

Эта лемма позволяет нам дать альтернативное определение симплициального объекта.

Теорема 5.2. *Симплициальный объект S в категории $\mathscr{C}$ — это семейство $\{S_q\}$ объектов из $\mathscr{C}$ вместе с двумя семействами морфизмов из $\mathscr{C}$*

$$d_i: S_q \to S_{q-1}, \quad s_i: S_q \to S_{q+1}, \quad i = 0, \ldots, q$$

(и $q > 0$ в случае d_i), которые удовлетворяют равенствам

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i, \qquad i < j, \tag{5.6}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i, \qquad i \leqslant j, \tag{5.7}$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j, \\ 1, & i = j,\ i = j+1, \\ s_j d_{i-1}, & i > j+1. \end{cases} \tag{5.8}$$

Доказательство. Поскольку функтор S контравариантен, морфизмы $d_i = S(\varepsilon^i)$, $s_i = S(\eta^i)$ удовлетворяют равенствам (5.6) — (5.8), двойственным равенствам (5.2) — (5.4). Обратно, пусть заданы отображения d_i и s_i; запишем каждое монотонное отображение μ однозначным образом в виде (5.5) и положим

$$S(\mu) = s_{jt} \ldots s_{j_1} d_{i_s} \ldots d_{i_1} : S_p \to S_q.$$

Равенств (5.6) — (5.8) достаточно для перестановки любых двух отображений d_i, s_j и, значит, для определения разложения произведения $\mu\nu$ по известным разложениям μ и ν, а поэтому их достаточно для доказательства равенства $S(\mu\nu) = S(\nu) S(\mu)$. Тем самым $S: \mathscr{M} \to \mathscr{C}$ превращается в контравариантный функтор.

Мы назовем d_i и s_j соответственно i-м *граничным оператором* и j-м *оператором вырождения* симплициального объекта S. Отметим, что из (5.6) и (5.7) вытекают равенства

$$d_i d_j = d_j d_{i+1}, \qquad i \geqslant j, \tag{5.9}$$

$$s_i s_j = s_j s_{i-1}, \qquad i > j. \tag{5.10}$$

Например, пусть V — произвольное частично упорядоченное множество (I.8); назовем *q-симплексом* в V упорядоченный относительно частичного порядка набор $(v_0, \ldots, v_q)$ из $(q+1)$ элемента $v_0 \leqslant \ldots \leqslant v_q$. Пусть $S_q(V)$ — множество всех q-симплексов из V. Тогда $S(V)$ является симплициальным множеством относительно граничных операторов и операторов вырождения, определенных формулами

$$d_i(v_0, \ldots, v_q) = (v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q) \quad \text{(опущен элемент } v_i\text{)}, \tag{5.11}$$

$$s_i(v_0, \ldots, v_q) = (v_0, \ldots, v_i, v_i, \ldots, v_q) \quad \text{(повторен элемент } v_i\text{)}. \tag{5.12}$$

Геометрически V можно рассматривать как схематическое описание полиэдра с частично упорядоченными вершинами v_i.

Если S и S' — симплициальные объекты категории $\mathscr{C}$, то *симплициальное отображение* $\sigma: S \to S'$ является естественным преобразованием контравариантных функторов $S, S' : \mathscr{M} \to \mathscr{C}$. Другими словами, симплициальное отображение σ — это такое семейство морфизмов $\sigma_q : S_q \to S'_q$ из $\mathscr{C}$, что $\sigma_q S(\mu) = S'(\mu)\sigma_p$ для каждого монотонного отображения $\mu: [q] \to [p]$ или, эквивалентно, $\sigma d_i = d_i\sigma$ и $\sigma s_i = s_i\sigma$ для каждого i. Симплициальные объекты категории $\mathscr{C}$ образуют категорию, морфизмами которой служат симплициальные отображения.

Каждый симплициальный модуль S определяет (положительный) цепной комплекс $K = K(S)$, в котором $K_q = S_q$, а граничный гомоморфизм $\partial: K_q \to K_{q-1}$ есть альтернированная сумма граничных гомоморфизмов:

$$\partial = d_0 - d_1 + \ldots + (-1)^q d_q : K_q \longrightarrow K_{q-1}. \tag{5.13}$$

Из равенства (5.6) для $d_i d_j$ следует, что $\partial\partial = 0$. Это позволяет говорить о модулях гомологий и когомологий симплициального модуля S, понимая под этим соответствующие модули ассоциированного цепного комплекса $K(S)$. Для топологического пространства X формула (5.13) дает обычный дифференциал ∂ в сингулярном комплексе $S(X)$. Более формально, X определяет симплициальное множество $\widetilde{S}(X)$, описанное выше, значит, определяет симплициальную абелеву группу $F_Z\widetilde{S}(X)$ и, следовательно, цепной комплекс $KF_Z\widetilde{S}(X)$ с граничным гомоморфизмом ∂; этот комплекс есть обычный сингулярный комплекс $S(X)$.

Симплициальный модуль S над кольцом R называется *пополненным*, если существует такой модульный гомоморфизм $\varepsilon: S_0 \to R$, что $\varepsilon d_0 = \varepsilon d_1: S_1 \to R$; ассоциированный цепной комплекс оказывается тогда пополненным отображением ε.

Замечания. Симплициальные множества под названием *полных полусимплициальных комплексов* появились в исследованиях Эйленберга и Зильбера [1950, 1953] о сингулярных гомологиях пространств и их декартовых произведений. Симплициальные абелевы группы под названием FD-комплексов (F — от слова «face», D — от «degeneracy») появились одновременно в анализе Эйленберга и Маклейна [1953] пространств $K(\Pi, n)$ с одной нетривиальной гомотопической группой Π в размерности n. Симплициальные множества, удовлетворяющие дополнительному «условию Кана», и симплициальные (мультипликативные) группы, как было показано впоследствии, дают возможность для алгебраической формулировки теории гомотопии, см. Кан [1958b]. Теорема о нормализации из следующего параграфа и ее доказательство принадлежат Эйленбергу и Маклейну [1947]. Каждый симплициальный модуль определяется своим нормализованным цепным комплексом; этим устанавливается эквивалентность между категориями симплициальных модулей и (положительных) цепных комплексов модулей (Дольд [1958]).

§ 6. Нормализация

Пусть S — симплициальный модуль. Для каждой размерности n определим $(DS)_n$ как подмодуль модуля S_n, порожденный всеми вырожденными элементами, т. е. $(DS)_0 = 0$ и

$$(DS)_n = s_0 S_{n-1} \cup \ldots \cup s_{n-1} S_{n-1}, \quad n > 0.$$

В силу равенств (5.8) для $d_i s_j$, DS замкнут относительно ∂, так что определен подкомплекс ассоциированного цепного комплекса KS объекта S. Факторкомплекс $KS/DS = K_N S$ известен как *нормализованный* цепной комплекс симплициального модуля S.

Теорема 6.1. (*Теорема о нормализации.*) *Для каждого симплициального модуля S каноническая проекция $\pi: KS \to K_N S = KS/DS$ является цепной эквивалентностью.*

Для доказательства мы интерпретируем операторы вырождения s_i как гомотопию. Пусть для каждого неотрицательного k $D_k S$ — градуированный подмодуль модуля S, порожденный всеми вырожденными элементами $s_i a$ при $i \leqslant k$, т. е. положим

$$(D_k S)_n = \begin{cases} s_0 S_{n-1} \cup \ldots \cup s_{n-1} S_{n-1}, & n-1 \leqslant k, \\ s_0 S_{n-1} \cup \ldots \cup s_k S_{n-1}, & n-1 > k. \end{cases}$$

Ввиду (5.8) каждый подмодуль $D_k S$ является подкомплексом, а DS есть объединение всех $D_k S$. Определим отображение $t_k : S \to S$ степени 1 равенствами

$$t_k a = \begin{cases} (-1)^k s_k a, & k \leqslant \dim a, \ a \in S, \\ 0, & k > \dim a, \ a \in S, \end{cases}$$

и положим $h_k = 1 - \partial t_k - t_k \partial$. В силу определения $h_k : K(S) \to K(S)$ есть цепное преобразование, а $t_k: 1 \simeq h_k$ — цепная гомотопия. Поскольку $t_k S \subset D$ и $\partial D_k \subset D_k$, то

$$h_k a \equiv a \,(\operatorname{mod} DS), \quad a \in S. \tag{6.1}$$

Более того, мы утверждаем, что

$$h_k D_k S \subset D_{k-1} S, \quad h_k D_j S \subset D_j S, \quad j < k. \tag{6.2}$$

Поскольку $s_k s_j = s_j s_{k-1}$ по (5.10), второе включение очевидно. Что же касается первого включения, то равенства (5.8) для $k \leqslant \dim a$, $a \in S$ дают

$$d_i t_k s_k a = \begin{cases} (-1)^k s_{k-1} s_{k-1} d_i a, & i < k, \\ (-1)^k s_k a, & i = k, \ k+1, \ k+2, \\ (-1)^k s_k s_k d_{i-2} a, & i > k+2, \end{cases}$$

в то время как при $k \geqslant \dim a$ (5.8) и (5.10) дают

$$t_k d_i s_k a = \begin{cases} (-1)^k s_{k-1} s_{k-1} d_i a, & i < k, \\ (-1)^k s_k a, & i = k, \ k+1, \\ (-1)^k s_k s_k d_{i-1} a, & i > k+1. \end{cases}$$

Эти соотношения показывают, что $(\partial t_k + t_k \partial) s_k a \equiv s_k a \pmod{D_{k-1} S}$ при $k \leqslant \dim a$, где $\partial = \Sigma (-1)^i d_i$, откуда вытекает первое из включений (6.2). В частности, $h_0 D_0 S = 0$.

Теперь положим $h = h_0 h_1 \ldots h_k \ldots$. Поскольку $h_k a = a$ при $k > \dim a$, это произведение является конечным в каждой размерности и определяет цепное преобразование $h\colon KS \to KS$. Ввиду (6.1), $h_k DS \subset DS$, а итерация сравнения (6.1) показывает, что

$$ha \equiv a \pmod{DS}. \tag{6.3}$$

По (6.2), $hDS = 0$. Так как каждое отображение h_k цепно гомотопно 1, то существует производная гомотопия $t : 1 \simeq h$. Ввиду того что $hD = 0$, формула $g(a + DS) = ha$ определяет цепное преобразование $g\colon KS/DS \to KS$; по (6.3), $\pi g = 1$, где π — проекция $KS \to KS/DS$. Более того, произведение $g\pi = h\colon KS \to KS$ цепно гомотопно 1 по построению, так что π — цепная эквивалентность, что и утверждалось.

§ 7. Ацикличные модели

В следующем параграфе при изучении умножений в симплициальных модулях будут использованы ацикличные модели; сейчас мы проведем необходимую подготовку для симплициальных модулей над некоторым фиксированным кольцом R.

Для каждого неотрицательного целого n симплициальный R-модуль M^n определяется следующим образом: в качестве M^n_p берется свободный модуль, образующими которого служат все монотонные отображения $\lambda\colon [p] \to [n]$, а отображение $\mu^* = M^n(\mu)\colon M^n_p \to M^n_q$ определяется для каждого монотонного отображения $\mu\colon [q] \to [p]$ равенством $\mu^* \lambda = \lambda\mu$. Тем самым задается контравариантный функтор M^n. Заметим, что образующие λ модуля M^n_p — это все p-мерные грани $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$, вырожденные или нет, обычного n-мерного симплекса и что M^n пополняется отображением $\varepsilon(\lambda_0) = 1$; часто M^n обозначают как Δ^n. Мы назовем M^n n-мерной *моделью* симплициального модуля, а тождественное отображение $\varkappa^n = 1 : [n] \to [n]$ — *базисной цепью* этой модели, $\varkappa^n \in M^n$.

Как и в случае пространств (II.7), пополненный цепной комплекс $\varepsilon : K \to R$ называется *ацикличным*, если $H_n(K) = 0$ при $n > 0$ и $\varepsilon\colon H_0(K) \cong R$.

Предложение 7.1. *Для каждого неотрицательного n комплекс $K(M^n)$ ацикличен.*

Доказательство. Достаточно построить стягивающую гомотопию. Определим гомоморфизм $s\colon M^n_p \to M^n_{p+1}$ равенством $s(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) = (0, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)$. Ввиду (5.11) и (5.12)

$$d_0 s = 1, \quad d_i s = s d_{i-1}, \quad i > 0, \tag{7.1}$$

и $ss_i = s_{i+1} s$. Следовательно, s индуцирует цепную гомотопию в ассоциированном цепном комплексе $s\colon 1 \simeq f\varepsilon$, где отображение $f\colon R \to S$ определяется равенством $f 1_R = (0)$.

Предложение 7.2. *Для каждого симплициального модуля S и каждого $a \in S_n$ существует единственное симплициальное отображение $\alpha : M^n \to S$, для которого $\alpha\varkappa^n = a$.*

Доказательство. Каждый свободный образующий λ модуля M^n_p может быть единственным образом записан с помощью базисной цепи $\varkappa^n$ в виде $\lambda^* \varkappa^n = \varkappa^n \lambda$. Следовательно, равенство $\alpha(\lambda^* \varkappa^n) = \lambda^* a$ определяет симплициальное отображение $\alpha\colon M^n \to S$; очевидно, что это отображение единственное, обладающее свойством $\alpha\varkappa^n = a$.

Резюмируем: модели ацикличны и представляют каждый элемент $a \in S_n$. Подобно этому в доказательстве (II.8) аксиомы гомотопии для сингулярного комплекса $S(X)$ топологического пространства модели $S(\Delta^n)$ и $S(\Delta^n \times I)$ являются ацикличными и представляют каждый сингулярный симплекс T как $T : \Delta^n \to X$. Эта ситуация повторяется во многих случаях как средство построения цепных преобразований и цепных гомотопий. Она может быть описана в категорных терминах (Эйленберг — Маклейн [1953], Гугенгейм — Мур [1957]); весьма полезно применять ее сразу в каждом случае, как это сделано в доказательствах следующего параграфа.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Если V — произвольное множество, частично упорядоченное отношением $v \leqslant v'$ для любых $v, v' \in V$, то комплекс $K(F_Z SV)$ ацикличен.

§ 8. Теорема Эйленберга — Зильбера

Если U и V — симплициальные множества, то их декартовым произведением $U \times V$ называется симплициальное множество, у которого $(U \times V)_n = U_n \times V_n$ (декартово произведение множеств) и

$$d_i(u, v) = (d_i u, d_i v), \quad s_i(u, v) = (s_i u, s_i v), \quad i = 0, \ldots, n, \tag{8.1}$$

где $u \in U_n, v \in V_n$ и $n > 0$ для d_i. Это определение подсказано случаем топологических пространств. Если $X \times Y$ — декартово произведение двух пространств X и Y с проекциями π_1 и π_2 на X и Y соответственно, то каждый сингулярный симплекс $T: \Delta^n \to X \times Y$ определяется его проекциями $\pi_1 T$ и $\pi_2 T$, в то время как $d_i \pi_j T = \pi_j d_i T$, $s_i \pi_j T = \pi_j s_i T$. Следовательно, отображение $T \to (\pi_1 T, \pi_2 T)$ устанавливает изоморфизм $S(X \times Y) \cong S(X) \times S(Y)$ симплициальных множеств. Вычисление сингулярной гомологии пространства $X \times Y$ тем самым сводится к вычислению гомологии декартова произведения симплициальных множеств.

Существует параллельное произведение для симплициальных модулей A и B над коммутативным кольцом. *Декартово произведение* $A \times B$ определяется как симплициальный модуль, у которого $(A \times B)_n = A_n \otimes B_n$ и

$$d_i(a \otimes b) = d_i a \otimes d_i b, \quad s_i(a \otimes b) = s_i a \otimes s_i b, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{8.2}$$

где $a \in A_n$, $b \in B_n$ и $n > 0$ для d_i. Для того чтобы не спутать его с тензорным произведением комплексов, мы будем писать $a \times b$ для элемента $a \otimes b$ из $A_n \otimes B_n$.

Для симплициальных множеств U и V из определения вытекает, что существует естественный изоморфизм симплициальных модулей

$$F(U \times V) \cong FU \times FV, \tag{8.3}$$

поскольку $F(U \times V)$ в размерности n является свободным модулем, порожденным множеством $U_n \times V_n$, а этот свободный модуль естественно изоморфен тензорному произведению $(FU_n) \otimes (FV_n)$.

Ассоциированный цепной комплекс $K(A \times B)$ приводится теперь к тензорному произведению цепных комплексов $K(A)$ и $K(B)$.

Теорема 8.1. (*Эйленберг — Зильбер.*) *Для симплициальных модулей A и B над коммутативным кольцом существует естественная цепная эквивалентность*

$$K(A \times B) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} K(A) \otimes K(B). \tag{8.4}$$

В силу теоремы о нормализации $K(A) \to K_N(A)$ — также цепная эквивалентность, так что существует также естественная цепная эквивалентность

$$K_N(A \times B) \rightleftarrows K_N(A) \otimes K_N(B). \tag{8.5}$$

В доказательстве, как показано в следующих леммах, будет использован метод ацикличных моделей. Отметим, что верно

$K_0(A \times B) = A_0 \otimes B_0 = K_0(A) \otimes K_0(B)$, и мы можем взять в качестве отображений f и g из (8.4) тождественное отображение в размерности нуль.

Лемма 8.2. *Для симплициальных модулей A и B существует естественное цепное преобразование $f: K(A \times B) \to K(A) \otimes K(B)$, которое является тождественным в размерности нуль. Любые два таких естественных отображения f цепно гомотопны, причем гомотопия естественна.*

Доказательство. Поскольку отображение f_0 дано, предположим по индукции, что отображения f_q уже определены для всех $q < n$, естественны на $K_q(A \times B)$ и $\partial f_q = f_{q-1}\partial$. Мы хотим определить f_n так, чтобы $\partial f_n = f_{n-1}\partial$; сначала мы сделаем это для произведения $\varkappa^n \times \varkappa^n$ двух базисных цепей модели $A = M^n = B$. При этом требуется, чтобы $\partial f_n(\varkappa^n \times \varkappa^n) = f_{n-1}\partial(\varkappa^n \times \varkappa^n)$. Однако элемент e, стоящий справа, уже определен, причем $\partial e = 0$ (или $\varepsilon e = 0$, если $n = 1$); значит, он является циклом в комплексе $K(M^n) \otimes K(M^n)$, который ацикличен как тензорное произведение двух ацикличных комплексов (предложение 7.1). Следовательно, в этом комплексе имеется цепь c размерности n, для которой $\partial c = e$. Мы полагаем $f_n(\varkappa^n \times \varkappa^n) = c$, так что

$$\partial f_n(\varkappa^n \times \varkappa^n) = \partial c = f_{n-1}\partial(\varkappa^n \times \varkappa^n). \tag{8.6}$$

Теперь рассмотрим элементы $a \in A_n$, $b \in B_n$. По предложению 7.2 существуют симплициальные отображения $\alpha: M^n \to A$, $\beta: M^n \to B$, для которых $\alpha\varkappa^n = a$, $\beta\varkappa^n = b$. Тогда $K(\alpha): K(M^n) \to K(A)$ является цепным преобразованием, которое мы также обозначим через α, и $\alpha \otimes \beta: K(M^n) \otimes K(M^n) \to K(A) \otimes K(B)$ также является цепным преобразованием. Положим $f_n(a \times b) = (\alpha \otimes \beta)c$, где c — тот же элемент, что и в (8.6). Поскольку симплициальные отображения α и β единственны, левая часть этого равенства билинейна по a и b и поэтому определено отображение $f_n: K_n(A \times B) \to [K(A) \otimes K(B)]_n$. Более того,

$$\partial f_n(a \times b) = \partial(\alpha \otimes \beta)c = (\alpha \otimes \beta)\partial c = (\alpha \otimes \beta)f_{n-1}\partial(\varkappa^n \times \varkappa^n).$$

Так как отображение f_{n-1} естественно, то

$$\partial f_n(a \times b) = f_{n-1}\partial(\alpha\varkappa^n \times \beta\varkappa^n) = f_{n-1}\partial(a \times b).$$

Таким образом, f является цепным преобразованием до размерности n.

Чтобы подготовить следующий индуктивный шаг, остается показать, что f_n естественно. Пусть $\eta: A \to A'$, $\zeta: B \to B'$ — произвольные симплициальные отображения, и пусть $\eta a = a'$, $\zeta b = b'$. Тогда $\eta\alpha\varkappa^n = \eta a = a'$ для $\eta\alpha: M^n \to A'$ и, значит, $\eta\alpha$ — единственное симплициальное отображение, переводящее $\varkappa^n$

в' a'. Следовательно,

$$(\eta\otimes\zeta) f_n(a\times b)=(\eta\otimes\zeta)(\alpha\otimes\beta)c=(\eta\alpha\otimes\zeta\beta)c=f_n(a'\times b')$$

и f_n естественно.

Пусть теперь f и f' — два цепных преобразования, удовлетворяющих нашему условию. По индукции мы можем предположить, что $t_q: K_q(A\times B)\to(K(A)\otimes K(B))_{q+1}$ будут отображения, определенные для $q=0,\dots,n-1$, причем $\partial t+t\partial=f-f'$ в размерностях $q<n$. (Для $q=0$, $f_0=f'_0$, так что выберем $t_0=0$.) Мы вновь определим t_n сначала на $\varkappa^n\times\varkappa^n$. Потребуем, чтобы

$$\partial t_n(\varkappa^n\times\varkappa^n)=f(\varkappa^n\times\varkappa^n)-f'(\varkappa^n\times\varkappa^n)-t_{n-1}\partial(\varkappa^n\times\varkappa^n).$$

По индуктивному предположению $\partial(f-f'-t\partial)=0$, так что правая часть является циклом в ацикличном комплексе, и, следовательно, есть граница некоторой цепи d. Положим далее $t_n(\varkappa^n\times\varkappa^n)=d$, $t_n(a\times b)=(\alpha\otimes\beta)d$, α и β таковы, что $\alpha\varkappa^n=a$, $\beta\varkappa^n=b$. Рассуждениями, подобными предыдущим, устанавливаются естественность t_n и равенство $\partial t_n+t_{n-1}\partial=f-f'$ для всех $a\times b$.

Лемма 8.3. *Для симплициальных модулей A и B существует естественное цепное преобразование $g: K(A)\otimes K(B)\to K(A\times B)$, которое в размерности нуль является тождеством. Любые два таких преобразования g гомотопны, причем цепная гомотопия естественна по A и B.*

Доказательство аналогично. Типичная цепь размерности n из $K(A)\otimes K(B)$ имеет вид $a\otimes b$, где $a\in K_p(A)$, $b\in K_q(B)$ и $p+q=n$. Используем модели M^p и M^q и отображения $\alpha: M^p\to A$, $\beta: M^q\to B$, для которых $\alpha\varkappa^p=a$, $\beta\varkappa^q=b$. Теперь комплекс $K(M^p\times M^q)$ ацикличен, так как гомотопии s из (7.1) для M^p и M^q порождают стягивающую гомотопию $s(a\times b)=sa\times sb$ в $K(M^p\times M^q)$. С использованием этой ацикличности построение g проводится так же, как и выше.

Таким образом мы получили цепные преобразования f и g, указанные в теореме; остается установить гомотопии $1\simeq fg$, $1\simeq gf$. Они строятся в точности тем же методом; например, гомотопия $1\simeq gf$ в $K(A\times B)$ получается путем сравнения $h=1$ с $h'=gf$, с использованием ацикличности комплекса $K(M^p\times M^p)$, как показано в следующей лемме:

Лемма 8.4. *Если h, $h': K(A\times B)\to K(A\times B)$ суть два естественных цепных преобразования, равных тождественному отображению в размерности нуль, то существует естественная цепная гомотопия $t: h\simeq h'$.*

Эти доказательства на самом деле конструктивны: явные формулы для f и g могут быть найдены путем определения цепи c, использованной на каждом шаге индукции [например, в (8.6)] из точных формул для стягивающих гомотопий, данных в доказательстве предложения 7.1 для моделей. Нам не потребуются явные выражения для гомотопий $1\simeq fg$, $1\simeq gf$, однако явные формулы, полученные таким способом для f и g, полезны. Для того чтобы выписать их, обозначим «последнюю» грань в симплициальном объекте S через $\tilde d$, т. е. для a из S_n положим $\tilde d a=d_n a$. Значит, для любого показателя $n-i$ имеем $\tilde d^{n-i}a=d_{i+1}\dots d_n a$.

Теорема 8.5. *Для произвольных симплициальных модулей A и B естественное цепное преобразование $f: K(A\times B)\to K(A)\otimes K(B)$ из теоремы Эйленберга — Зильбера задается формулой*

$$f(a\times b)=\sum_{i=0}^{n}\tilde d^{n-i}a\otimes d_0^i b,\quad a\in A_n,\quad b\in B_n. \tag{8.7}$$

Доказательство. Поскольку отображение f определяется операторами граней, оно естественно и сводится к тождественному в размерности нуль. Остается доказать, что $\partial f(a\times b)=f\partial(a\times b)$; ввиду естественности это достаточно доказать для элементов $a=\varkappa^n=b$ модели M^n. Но $\varkappa^n=(0,1,\dots,n)$, $\tilde d^{n-i}\varkappa^n$ — это симплекс $(0,1,\dots,i)$ и

$$f(\varkappa^n\times\varkappa^n)=\sum_{i=0}^{n}(0,\dots,i)\otimes(i,i+1,\dots,n). \tag{8.8}$$

В выражении для $\partial f(\varkappa^n\times\varkappa^n)$ последняя грань каждого первого множителя сокращается с членом, появляющимся из начальной грани второго множителя, а остальные члены в совокупности дают $f\partial(\varkappa^n\times\varkappa^n)$, что и требовалось.

Цепное преобразование f из (8.7) известно как отображение Александера — Уитни, поскольку оно появилось в топологии при одновременном и независимом определении этими авторами $\cup$-умножения. Явное выражение для отображения f, вычисленное из нашей стягивающей гомотопии, отличается от отображения Александера — Уитни только вырожденными членами. Кроме того, имеет место

Следствие 8.6. *Отображение Александера — Уитни f индуцирует цепное преобразование ассоциированных нормализованных цепных комплексов*

$$f_N: K_N(A\times B)\to K_N A\otimes K_N B.$$

Доказательство. По определению $K_N A = KA/DA$; рассмотрим $K_N A \otimes K_N B$, используя (3.3) как факторкомплекс комплекса $KA \otimes KB$ по подкомплексу, порожденному образами $DA \otimes KB$ и $KA \otimes DB$. Предположим, что элемент $a \times b \in K(A \times B)$ из (8.7) вырожден, т. е. имеет вид $s_k a' \times s_k b'$ для некоторого k. В каждом члене правой части равенства (8.7) один из множителей вырожден. А именно если $i \leqslant k$, то (5.8) показывает вырожденность $d_0^i s_k b'$, а если $i > k$, то вырожден множитель $\tilde{d}^{n-i} s_k a'$, откуда и вытекает доказываемый результат.

С геометрической точки зрения f является «аппроксимацией диагонали». Рассмотрим, например, декартово произведение $\Delta^1 \times \Delta^1$ двух одномерных симплексов (= интервалов); оно является квадратом с четырьмя вершинами. Алгебраически Δ^1 представляется комплексом $K(M^1)$; в $K_N(M^1) \otimes K_N(M^1)$ группа одномерных цепей является свободной группой с четырьмя образующими, соответствующими четырем сторонам квадрата. Диагональ квадрата непосредственно как цепь не появляется. Однако элемент

$$f(\varkappa^1 \times \varkappa^1) = (0) \otimes (01) + (01) \otimes (1)$$

является цепью, представляемой суммой левой и верхней сторон квадрата. Эта цепь «гомотопна» диагонали и, следовательно, есть «аппроксимация» диагонали. Заметим, что сумма нижней и правой сторон квадрата дает другую аппроксимацию, которая могла бы быть получена алгебраически путем изменения ролей начальной и конечной граней в формуле (8.7). Сравнение этих двух различных аппроксимаций диагонали приводит к операциям Стинрода второй степени (Стинрод [1953], Милнор [1958], Дольд [1961], Стинрод — Эпштейн [1962]).

Для трех симплициальных модулей A, B и C любое естественное отображение Эйленберга — Зильбера f можно итерировать так, как указано в последовательности

$$K(A \times B \times C) \xrightarrow{f} K(A) \otimes K(B \times C) \xrightarrow{1 \otimes f} K(A) \otimes K(B) \otimes K(C).$$

Предложение 8.7. *Любое естественное отображение f ассоциативно с точностью до гомотопии в том смысле, что существует естественная цепная гомотопия $(1 \otimes f) f \simeq (f \otimes 1) f$. Отображение Александера — Уитни ассоциативно.*

Доказательство. Поскольку и отображение $(1 \otimes f) f$, и отображение $(f \otimes 1) f$ тождественны в размерности нуль, естественная гомотопия между ними может быть построена методом ацикличных моделей. Ассоциативность (без необходимой гомотопии) отображения Александера — Уитни может быть установлена непосредственно с использованием, например (8.8).

Для описания второго отображения g из теоремы Эйленберга — Зильбера мы введем некоторые «перетасовки». Если p и q — неотрицательные целые числа, то *(p, q)-перетасовка* (μ, ν) — это разбиение множества $[p+q-1]$ целых чисел на два непересекающихся подмножества $\mu_1 < \ldots < \mu_p$ и $\nu_1 < \ldots < \nu_q$ из p и q чисел соответственно. Такое разбиение описывает возможный способ размещения колоды из p карт в колоде из q карт, при котором карты первой колоды кладутся по порядку на места $\mu_1, \ldots, \mu_p$, а карты второй колоды кладутся по порядку на места $\nu_1, \ldots, \nu_q$. Перетасовка может быть также описана как последовательность движений в структуре точек (m, n) плоскости с целыми координатами: в момент времени 0 начнем с точки $(0, 0)$, во время k передвинемся направо, если k — одно из чисел $\mu_1, \ldots, \mu_p$, и вверх, если k есть одно из чисел $\nu_1, \ldots, \nu_q$; в результате получается «лестница», идущая от $(0, 0)$ до (p, q). Можно определить (p, q)-перетасовку как такую перестановку t множества целых чисел $\{1, \ldots, p+q\}$, что $t(i) < t(j)$ всякий раз, как $i < j \leqslant p$ или $p < i < j$; действительно, каждая такая перестановка t определяет μ_i как $t(i) - 1$ и ν_j как $t(p+j) - 1$, и обратно. *Сигнатура* $\varepsilon(\mu)$ перетасовки (μ, ν) — это целое число $\varepsilon(\mu) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i - (i-1)$; тогда $(-1)^{\varepsilon(\mu)}$ есть знак ассоциированной перестановки t.

Теорема 8.8. *Для любых симплициальных модулей A и B естественное цепное преобразование g из теоремы Эйленберга — Зильбера определяется формулой*

$$g(a \otimes b) = \sum_{(\mu, \nu)} (-1)^{\varepsilon(\mu)} (s_{\nu_q} \ldots s_{\nu_1} a \times s_{\mu_p} \ldots s_{\mu_1} b), \tag{8.9}$$

где $a \in A_p$, $b \in B_q$, а сумма берется по всем (p, q)-перетасовкам (μ, ν).

Очевидно, что отображение g естественно, элемент $a \otimes b$ имеет размерность $p+q$ и что элемент, определяемый $s_{\nu_q} \ldots s_{\nu_1} a$ и $s_{\mu_p} \ldots s_{\mu_1} b$, имеет ту же размерность. Доказательство того, что g есть цепное преобразование, заключается в непосредственной проверке, которую мы опускаем (детали можно найти у Эйленберга и Маклейна [1953b § 5], где впервые были введены перетасовки).

С геометрической точки зрения указанная функция g порождает «триангуляцию» декартова произведения $\Delta^p \times \Delta^q$ двух симплексов. В частности, положим $a = \varkappa^p \in M^p$ и $b = \varkappa^q \in M^q$, так что $\varkappa^p$ имеет вершины $(0, 1, \ldots, p)$. В этих обозначениях

$$s_{\nu_q} \ldots s_{\nu_1} \varkappa^p = (i_0, i_1, \ldots, i_{p+q}),$$

где $0 = i_0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{p+q} = p$ и $i_k = i_{k+1}$ в точности тогда, когда k — одно из чисел $\nu_1, \ldots, \nu_q$. Аналогично $s_{\mu_p} \ldots s_{\mu_1} \varkappa^q = (j_0, \ldots, j_{p+q})$, причем $j_k = j_{k+1}$ тогда и только тогда, когда k есть одно из чисел $\mu_1, \ldots, \mu_p$. Симплекс, стоящий в правой части формулы (8.9), имеет в нашем случае вид

$$(i_0, \ldots, i_{p+q}) \times (j_0, \ldots, j_{p+q}),$$

где первый множитель вырожден по тем индексам k, по которым второй не вырожден. Этот символ может быть истолкован как $(p+q)$-мерный аффинный симплекс с вершинами (i_k, j_k) в произведении $\Delta^p \times \Delta^q$. Эти симплексы, взятые для всех (p, q)-перетасовок, порождают симплициальное подразбиение $\Delta^p \times \Delta^q$. Например, если $p = 2$, $q = 1$, то $\Delta^2 \times \Delta^1$ — это треугольная призма, и три возможные (2,1)-перетасовки разбивают эту призму на три симплекса

$$(0122) \times (0001), \ (0112) \times (0011), \ (0012) \times (0111),$$

каждый из которых имеет размерность три.

Это описание показывает также, что если один из множителей a или b вырожден, то и каждый член из правой части формулы (8.9) вырожден. Тем самым доказывается справедливость следствия 8.9.

Следствие 8.9. *Перетасовочное отображение g из* (8.9) *индуцирует цепное преобразование нормализованных цепных комплексов*

$$g_N : K_N(A) \otimes K_N(B) \to K_N(A \times B).$$

Для этих нормализованных комплексов можно показать, что произведение $f_N g_N$ равно единице (не требуется никакой гомотопии $1 \simeq f_N g_N$).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Указать вторую явную формулу для f, переставив в (8.7) первую и последнюю грани.

2. Установить ассоциативность перетасовочного отображения g.

3. Доказать теорему § 6 о нормализации методом ацикличных моделей.

4. Показать, что теорема Эйленберга — Зильбера верна для симплициального правого R-модуля A и симплициального левого R-модуля B над любым кольцом R.

5. Вычислить целочисленную гомологию тора $S^1 \times S^1$, зная гомологию окружности S^1 (теоремы Эйленберга — Зильбера и Кюннета).

§ 9. $\cup$-умножения

Для любого симплициального множества U равенство $\Delta u = u \times u$ определяет симплициальное отображение $\Delta : U \to U \times U$, называемое *симплициальным диагональным отображением*. Множество U определяет симплициальную абелеву группу $F_Z U$ и, следовательно, цепной комплекс $K(F_Z U)$, который мы будем записывать просто как $K(U)$; каждая группа $K_n(U)$ есть свободная абелева группа, порожденная множеством U_n, а дифференциал $\partial = \Sigma (-1)^i d_i$. Диагональ индуцирует цепное преобразование $K(U) \to K(U \times U)$, которое также обозначим через Δ. Если f — одно из естественных отображений из теоремы Эйленберга — Зильбера, то произведение

$$\omega = f\Delta : K(U) \to K(U \times U) \to K(U) \otimes K(U) \tag{9.1}$$

называется *диагональным отображением* в $K(U)$. Поскольку f определено с точностью до естественной цепной гомотопии, то же самое верно и для ω. Поскольку Δ ассоциативно, т. е. $(\Delta \times 1)\Delta = (1 \times \Delta)\Delta$, а f ассоциативно с точностью до гомотопии (предложение 8.7), существует гомотопия $(\omega \otimes 1)\omega \simeq (1 \otimes \omega)\omega$. Комплекс $K(U)$ пополняется отображением $\varepsilon(u) = 1$ для $u \in U_0$. Мы утверждаем, что существуют гомотопии

$$(\varepsilon \otimes 1)\omega \simeq 1 \simeq (1 \otimes \varepsilon)\omega : K(U) \to K(U). \tag{9.2}$$

Действительно, каждое из отображений $(\varepsilon \otimes 1)\omega$ и $(1 \otimes \varepsilon)\omega$ естественно и совпадает с тождественным в размерности 0, поэтому естественные гомотопии можно построить, используя ацикличные модели M^n (рассматриваемые в этот момент как симплициальные множества U). Далее, равенства в (9.2) и в ассоциативности — это в точности условия VI (9.1), необходимые для того, чтобы сделать ω коумножением с коединицей ε, так что можно сказать, что $K(U)$ с диагональю ω есть дифференциальная градуированная коалгебра «с точностью до гомотопий».

Если в качестве f мы выберем отображение Александера — Уитни, то ω станет ассоциативным и легко проверить, что $(\varepsilon \otimes 1)\omega = (1 \otimes \varepsilon)\omega$. То есть при этом выборе $K(U)$ становится дифференциальной градуированной коалгеброй и, значит, таковым является и нормализованный комплекс $K_N(U)$.

Пусть теперь A и A' — абелевы группы, $H^k(U, A)$ — группа когомологий $H^k(\mathrm{Hom}(K(U), A))$. Произведение $\cup = \omega^* p^H$,

$$\begin{tikzcd} H^k(U, A) \otimes H^m(U, A') \arrow[d, "p^H"] \arrow[dr, "\cup"] & \\ H^{k+m}(K(U) \otimes K(U), A \otimes A') \arrow[r, "\omega^*"] & H^{k+m}(U, A \otimes A'), \end{tikzcd} \tag{9.3}$$

где p^H — когомологическое умножение из (1.3), называется (внешним) *симплициальным* $\cup$*-умножением*. Для коцепей h и h' это определение прочитывается как (cls h) $\cup$ (cls h') = cls ($h \cup h'$), где

$$(h \cup h')\,u = (h \otimes h')\,f\Delta u, \tag{9.4}$$

а $h \otimes h'$ имеет тот же смысл, что и в (1.4).

В частности, если $U = S(V)$ есть симплициальное множество, ассоциированное с частично упорядоченным множеством вершин V и f — отображение Александера — Уитни, то

$$(h \cup h')(v_0, \ldots, v_n) = h(v_0, \ldots, v_k) \otimes h'(v_k, \ldots, v_n), \tag{9.5}$$

где $h \in H^k$, $h' \in H^{n-k}$.

Если $A = A'$ есть аддитивная группа коммутативного кольца R с умножением π: $R \otimes R \to R$, то произведение $\pi_* \cup$ является отображением

$$H^k(U, R) \otimes H^m(U, R) \to H^{k+m}(U, R), \tag{9.6}$$

называемым *внутренним* симплициальным $\cup$-умножением.

Теорема 9.1. *Для каждого симплициального множества U и каждого кольца коэффициентов R модули когомологий $H^k(\mathrm{Hom}(K(U), R)) = H^k(U, R)$ образуют градуированное кольцо относительно внутреннего симплициального $\cup$-умножения. Если кольцо R коммутативно, то и это кольцо когомологий коммутативно.*

Доказательство. Ассоциативность умножения известна. Пополнение ε: $K(U) \to Z$, умноженное на отображение I: $Z \to R$, дает нульмерный коцикл $I\varepsilon$ из $K(U)$. Тогда $(h \cup I\varepsilon)\,u = \pi(h \otimes I)(1 \otimes \varepsilon)\,\omega u$, где $\pi(h \otimes I) : K \otimes Z \to R$ совпадает с h, если $K \otimes Z$ отождествить с K, а $(1 \otimes \varepsilon)\,\omega \simeq 1$.

Следовательно, когомологический класс e коцикла $I\varepsilon$ играет роль единицы для $\cup$-умножения. Аналогично для того, чтобы показать, что $\cup$-умножение коммутативно, достаточно установить цепную гомотопию $f \simeq \tau f$ для обычной перестановки $\tau : K_k \otimes K_m \cong K_m \otimes K_k$. Отображения f и τf тождественны в размерности нуль, и эта гомотопия строится с использованием ациклических моделей.

Если f — отображение Александера — Уитни, то коцепи сами по себе образуют градуированное кольцо, но это кольцо не коммутативно: коммутативность выполняется только для классов когомологий.

Эта теорема показывает, что сингулярная когомология топологического пространства X с коэффициентами из Z образует коммутативное кольцо относительно $\cup$-умножения.

Симплициальное $\cup$-умножение применяется также при изучении когомологии группы Π. Под Π-*множеством* S подразумевается множество S вместе с действием группы Π на S, более формально, это действие задается гомоморфизмом $\varphi : \Pi \to \mathrm{Aut}(S)$ группы Π в группу взаимно однозначных отображений множества S на себя. Π-множества образуют категорию. Например, возьмем множество $\tilde{B}_n(\Pi)$ всех $(n+1)$-наборов $(x_0, \ldots, x_n)$, в котором группа Π действует следующим образом: $x(x_0, \ldots, x_n) = (xx_0, \ldots, xx_n)$. Обычные операторы грани и вырождения

$$d_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n), \quad 0 \leqslant i \leqslant n,\ n > 0,$$

$$s_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n), \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

являются Π-отображениями, так что $\tilde{B}(\Pi)$ есть симплициальное Π-множество. Ассоциированная симплициальная абелева группа $F_Z(\tilde{B}, (\Pi))$ является симплициальным Π-модулем, а $K = KF_Z(\tilde{B}(\Pi))$ является комплексом Π-модулей, в котором K_n — свободная абелева группа, порожденная наборами $(x_0, \ldots, x_n)$; его граница определяется формулой

$$\partial(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).$$

Мы снова получили однородное описание IV (5.13) ненормализованной B-резольвенты $\beta(\Pi) = KF_Z(\tilde{B}(\Pi))$, в то время как $K_N F_Z(\tilde{B}(\Pi))$ есть нормализованная B-резольвента $B(\Pi)$.

Напомним теперь, что групповое кольцо $Z(\Pi)$ есть алгебра Хопфа с коумножением

$$\psi : Z(\Pi) \to Z(\Pi) \otimes Z(\Pi), \quad \psi(x) = x \otimes x.$$

При отступлении вдоль соответствующего диагонального отображения $\Pi \to \Pi \times \Pi$ декартово произведение $\tilde{B}(\Pi) \times \tilde{B}(\Pi)$ двух Π-множеств превращается в Π-множество. Диагональное отображение ω для $\beta(\Pi) = K\tilde{B}(\Pi)$ является произведением отображений

$$\omega : \beta(\Pi) \xrightarrow{\Delta} K(\tilde{B}(\Pi) \times \tilde{B}(\Pi)) \xrightarrow{f} {}_{\psi}[\beta(\Pi) \otimes \beta(\Pi)],$$

где Δ есть Π-отображение, f — естественное отображение, перестановочное в силу естественности с действием группы Π, так что ω есть Π-отображение. Следовательно, ω является цепным преобразованием комплексов Π-модулей. Отсюда следует, что симплициальное $\cup$-умножение определяется для двух Π-модулей A

и A' как гомоморфизм

$$\cup : H^k(\Pi, A) \otimes H^m(\Pi, A') \to H^{k+m}(\Pi, {}_\psi(A \otimes A')). \qquad (9.7)$$

Это умножение ассоциативно.

Гомоморфизм $\alpha: {}_\psi(A \otimes A') \to A''$ для П-модулей называется *спариванием* A и A' в A''. Наше $\cup$-умножение, помноженное на гомоморфизм, индуцированный спариванием α, порождает «внутреннее» $\cup$-умножение, являющееся гомоморфизмом $H(\Pi, A) \otimes \otimes H(\Pi, A') \to H(\Pi, A'')$.

Определение $\cup$-умножения можно сделать короче, не используя П-множеств, а непосредственно описывая действие этой операции на коцепях. Если h и h' — коцепи размерностей k и m соответственно, рассматриваемые как функции от однородных образующих $(x_0, \ldots, x_k)$ и $(x_0, \ldots, x_m)$ из $\beta(\Pi)$, то их $\cup$-произведение есть коцепь, которая определяется с помощью отображения Александера — Уитни следующей формулой:

$$(h \cup h')(x_0, \ldots, x_n) = h(x_0, \ldots, x_k) \otimes h'(x_k, \ldots, x_n), \quad n = k+m. \qquad (9.8)$$

Эта функция $h \cup h'$, очевидно, является П-модульным гомоморфизмом в модуль $A \otimes A'$ с диагональными операторами, т. е. в модуль ${}_\psi(A \otimes A')$.

В частности, если и A, и A' совпадают с кольцом Z с тривиальными операторами ($Z = {}_\varepsilon Z$), то ${}_\psi({}_\varepsilon Z \otimes {}_\varepsilon Z)$ совпадает с ${}_\varepsilon Z$. Отсюда следует, что $H^k(\Pi, {}_\varepsilon Z)$ — это коммутативное градуированное кольцо относительно симплициального $\cup$-умножения.

Теорема 9.2. *При изоморфизме $H^n(\Pi, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z, A)$, где A — произвольный* П-*модуль, симплициальное $\cup$-умножение переходит в $\vee$-умножение Хопфа, определенное в* Ext.

Доказательство основано на замечании, что диагональное отображение

$$\omega : \beta(\Pi) \to {}_\psi[\beta(\Pi) \otimes \beta(\Pi)]$$

комплексов П-модулей перестановочно с пополнением и, следовательно, является сравнением резольвенты $\varepsilon : B(\Pi) \to Z$ с резольвентой, определяемой отображением ${}_\psi[\beta(\Pi) \otimes \beta(\Pi)] \to Z$. Обе группы H^n и Ext^n совпадают с $H^n(\beta(\Pi), A)$. Далее $\vee$-умножение Хопфа из (4.5) равно $\psi^\# p^H$, где p^H — когомологическое умножение, а $\psi^\#$ — замена колец, индуцированная отображением ψ: $Z(\Pi) \to Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)$. По теореме III.6.7 эта замена колец может быть представлена как произведение $\psi^\# = f^*\psi^*$, где ψ^* отображает $\operatorname{Hom}_{Z(\Pi)\otimes Z(\Pi)}$ в $\operatorname{Hom}_{Z(\Pi)}$, а f: $\beta(\Pi) \to {}_\psi[\beta(\Pi) \otimes \beta(\Pi)]$ — сравнение. Возьмем в качестве f сравнение ω; тогда $\psi^\# p^H$ превращается в $\omega^*\psi^* p^H$, т. е. в симплициальное $\cup$-умножение.

Таким образом, $\cup$-умножение в кольце когомологий $H^*(\Pi, Z)$ можно определить тремя эквивалентными способами:

(i) как симплициальное $\cup$-умножение;

(ii) как $\vee$-умножение, индуцированное диагональным отображением ψ;

(iii) как умножение Ионеды длинных точных последовательностей.

Еще одно, четвертое, определение будет дано в гл. XII и облегчит вычисления в примерах.

Одним из приложений является «теорема редукции для $\cup$-умножения». Предположим, что $\Pi = F/R$, где F — свободная мультипликативная группа. Пусть $[R, R]$ — коммутант группы R; положим $F_0 = F/[R, R]$, $R_0 = R/[R, R]$. Тогда R_0 — абелева группа и $\Pi \cong F_0/R_0$, так что F_0 есть расширение группы R_0 при помощи группы П с системой факторов f_0 — двумерным коциклом из П в П-модуль R_0. Для любого П-модуля A, $\operatorname{Hom}_Z(R_0, A)$ есть П-модуль, операторы в котором действуют по следующему правилу: если α: $R_0 \to A$, то $(x\alpha)r = x[\alpha(x^{-1}r)]$, в то время как отображение $\alpha \otimes r \to \alpha r$ есть спаривание $\operatorname{Hom}(R_0, A) \otimes R_0 \to A$. Внутреннее $\cup$-произведение n-мерного коцикла и f_0 определяет гомоморфизм

$$H^n(\Pi, \operatorname{Hom}(R_0, A)) \to H^{n+2}(\Pi, A).$$

Теорема редукции для $\cup$-умножения утверждает, что это есть изоморфизм для $n > 0$. Эта теорема принадлежит Эйленбергу и Маклейну [1947]; изящное доказательство, использующее относительные когомологии и характеристический класс (IV.6) расширения, дано Суоном [1960] и приводится ниже в IX.7, упражнения 7—10.

Как было показано в IV.11, группы когомологий $H^n(\Pi, Z)$ являются сингулярными группами гомологий пространства X/Π, если П действует собственным образом на ациклическом пространстве X. В этом случае сравнение, очевидно, сохраняет симплициальную структуру и, следовательно, $\cup$-умножение, так что $H(\Pi, Z) \cong H(X/\Pi, Z)$ есть изоморфизм колец когомологий.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Показать, что для резольвенты $\beta(\Pi)$ с неоднородными образующими IV (5.11) операторы вырождения и граней определяются равенствами

$$s_i(x[x_1, \ldots, x_n]) = x[x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n], \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$d_i(x[x_1, \ldots, x_n]) = \begin{cases} xx_1[x_2, \ldots, x_n], & i=0, \\ x[x_1, \ldots, x_ix_{i+1}, \ldots, x_n], & 0<i<n, \\ x[x_1, \ldots, x_{n-1}], & i=n, \end{cases}$$

и что отображение ω для отображения Александера — Уитни f определяется формулой

$$\omega(x[x_1|\ldots|x_n]) = \sum_{i=0}^{n} x[x_1|\ldots|x_i] \otimes xx_1\ldots x_i[x_{i+1}|\ldots|x_n].$$

Замечания. Топологическое рассмотрение $\cup$-умножения (в иной терминологии) см. в книге Хилтона и Уайли [1960]. Об $\cup$-умножении для групп см. работы Эйленберга — Маклейна [1947], Экмана [1945—1946], [1954]. Расслоенное пространство можно рассматривать как разновидность «закрученного» декартова произведения; имеется соответствующая «закрученная» формулировка теоремы Эйленберга — Зильбера (Браун [1960], Гугенгейм [1960], Щарба [1961]). Симплициальные расслоенные пучки рассматривались Барратом — Гугенгеймом — Муром [1959].

ГЛАВА IX

Относительная гомологическая алгебра

Введение. Когда мы описывали элементы из $\operatorname{Ext}^n(C, A)$ как длинные точные последовательности, идущие от A к C, то мы предполагали, что A и C являются левыми модулями над кольцом. С тем же успехом можно было бы предположить, что они являются правыми модулями, бимодулями или градуированными модулями. Эффективное описание этой ситуации достигается предположением, что A и C являются объектами некоторой категории с соответствующими свойствами: а именно категории, в которой можно складывать морфизмы и могут быть построены ядра и коядра. Первые три параграфа этой главы посвящены описанию таких «абелевых» категорий.

Если Π — группа, то каждый Π-модуль также является абелевой группой; этим способом задается гомоморфизм категории всех Π-модулей в категорию всех абелевых групп. Если Λ является алгеброй над основным кольцом $\mathbf{K}$, то каждый Λ-модуль является также $\mathbf{K}$-модулем, а каждый Λ-бимодуль есть также правый Λ-модуль. Если R и S — кольца и $R \supset S$, то каждый R-модуль является и S-модулем. В каждом таком случае мы имеем гомоморфизм одной абелевой категории в другую, который естественно приводит к определению «относительных» функторов Ext и Tor; дальнейшие вводные объяснения даны в § 8. В этой главе описывается общий метод, который будет применен в следующей главе к изучению когомологий различных типов алгебраических систем.

§ 1. Аддитивные категории

Сначала рассмотрим категории, в которых некоторые пары морфизмов можно складывать. *Аддитивной категорией* $\mathscr{C}$ называется класс объектов A, B, C, ... вместе

(i) с семейством попарно непересекающихся абелевых групп $\hom(A, B)$, однозначно сопоставленных каждой упорядоченной паре объектов. Элемент $\alpha \in \hom(A, B)$ мы будем записывать как $\alpha: A \to B$ и называть *морфизмом* категории $\mathscr{C}$;

(ii) с гомоморфизмами абелевых групп

$$\hom(B, C) \otimes \hom(A, B) \to \hom(A, C), \qquad (1.1)$$

сопоставленными каждой упорядоченной тройке объектов A, B, C. Образ $\beta \otimes \alpha$ при этом гомоморфизме записывается как $\beta\alpha$ и называется *произведением* β и α;

(iii) с морфизмами $1_A : A \to A$, заданными для каждого объекта A и называемыми *единицами* соответствующих объектов.

При этом должны быть выполнены следующие четыре аксиомы.

Аксиома ассоциативности. Если $\alpha : A \to B$, $\beta: B \to C$ и $\gamma: C \to D$, то

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha. \qquad (1.2)$$

Аксиома единицы. Если $\alpha : A \to B$, то

$$\alpha 1_A = \alpha = 1_B\alpha. \qquad (1.3)$$

Аксиома нуля. Существует такой объект $0'$, что $\hom(0', 0')$ является нулевой группой.

Конечные прямые суммы. Для каждой пары объектов A_1 и A_2 существует такой объект B и такие четыре гомоморфизма, образующие диаграмму

$$A_1 \underset{\pi_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} B \underset{\pi_2}{\overset{\iota_2}{\leftrightarrows}} A_2,$$

что

$$\pi_1\iota_1 = 1_{A_1}, \quad \pi_2\iota_2 = 1_{A_2}, \quad \iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1_B. \qquad (1.4)$$

Для преодоления затруднений, связанных с основаниями математики, требуются еще две аксиомы теоретико-множественного характера; они будут сформулированы в конце этого параграфа.

Наши аксиомы аналогичны аксиомам категории (I.7). Действительно, аддитивная категория может быть определена как категория с нулем и прямыми суммами, как и выше, в которой каждое множество $\hom(A, B)$ имеет структуру абелевой группы, причем дистрибутивные законы

$$\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\alpha_1 + \beta\alpha_2, \quad (\beta_1 + \beta_2)\alpha = \beta_1\alpha + \beta_2\alpha \qquad (1.5)$$

выполнены всякий раз, как обе части равенств определены. (Это означает, что умножение билинейно, что и требуется в (1.1).)

Если не требуется существования прямых сумм, то говорят о *предаддитивной категории*. Как и в случае категорий, мы можем отбросить объекты и иметь дело только с морфизмами, используя единицы 1_A вместо объектов. Тогда аксиомы становятся похожими на аксиомы кольца, в котором операции $\alpha_1 + \alpha_2$ и $\beta\alpha$ не всегда определены, но, будучи определенными, удовлетворяют

обычным кольцевым аксиомам типа (1.2), (1.3) и (1.5). Так, Хилтон и Ледерман [1958] называют предаддитивную категорию *кольцоидом*, следуя терминологии Баррата [1954].

Через 0 мы обозначим нулевой элемент любой группы $\hom(A, B)$; тогда $0\alpha = 0 = \beta 0$ всякий раз, когда указанные произведения определены (доказательство: $0\alpha = (0 + 0)\alpha$; далее использовать закон дистрибутивности). Объект $0'$, у которого группа $\hom(0', 0')$ нулевая, называется *нулевым объектом*. В этом случае $1_{0'} = 0$, и, следовательно, каковы бы ни были объекты A и B, группы $\hom(A, 0')$ и $\hom(0', B)$ являются нулевыми, а любые два нулевых объекта эквивалентны.

Теперь получим некоторые следствия из аксиомы о конечных прямых суммах. По (1.4)

$$\pi_1\iota_2 = \pi_1(\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2)\iota_2 = 1\pi_1\iota_2 + \pi_1\iota_2 1 = \pi_1\iota_2 + \pi_1\iota_2,$$

следовательно, $\pi_1\iota_2 = 0$ и $\pi_2\iota_1 = 0$, как обычно. Отсюда вытекают предложения 4.1 — 4.5 гл. I; в частности, диаграмма (1.4) определяет объект B с точностью до эквивалентности, и мы обычно такой объект B будем обозначать $A_1 \oplus A_2$. Каждый морфизм $\gamma : A_1 \oplus A_2 \to C$ определяет пару морфизмов $\gamma_j = \gamma\iota_j : A_j \to C$; соответствие $\varphi(\gamma) = (\gamma_1, \gamma_2)$ является изоморфизмом

$$\varphi : \hom(A_1 \oplus A_2, C) \cong \hom(A_1, C) \oplus \hom(A_2, C)$$

абелевых групп. Обратное отображение задается формулой

$$\varphi^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1\pi_1 + \gamma_2\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \to C.$$

Значит, $\gamma = \gamma_1\pi_1 + \gamma_2\pi_2$ — единственный морфизм $A_1 \oplus A_2 \to C$, удовлетворяющий равенствам $\gamma\iota_j = \gamma_j$, $j = 1, 2$, так что вложения $\iota_j : A_j \to A_1 \oplus A_2$ прямой суммы образуют универсальную диаграмму. При этом диаграмма $\{\alpha_t : A_t \to B \mid t \in T\}$ морфизмов α_t с общим концом, где T — произвольное множество индексов, называется *универсальной*, если для каждой диаграммы $\{\gamma_t : A_t \to C \mid t \in T\}$ существует единственный морфизм $\gamma : B \to C$, такой, что $\gamma\alpha_t = \gamma_t$ для каждого t. Двойственно, существует изоморфизм

$$\psi : \hom(C, A_1 \oplus A_2) \cong \hom(C, A_1) \oplus \hom(C, A_2),$$

где $\psi\gamma = (\pi_1\gamma, \pi_2\gamma)$ и $\psi^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) = \iota_1\gamma_1 + \iota_2\gamma_2$. Следовательно, диаграмма $\{\pi_j : A_1 \oplus A_2 \to A_j \mid j = 1, 2\}$ коуниверсальна. Обычные диагональный и кодиагональный морфизмы

$$\Delta_A = \iota_1 + \iota_2 : A \to A \oplus A, \quad \nabla_A = \pi_1 + \pi_2 : A \oplus A \to A \qquad (1.6)$$

характеризуются соответствующими свойствами

$$\pi_1\Delta_A = 1_A = \pi_2\Delta_A, \quad \nabla_A\iota_1 = 1_A = \nabla_A\iota_2. \qquad (1.7)$$

Если даны две прямые суммы $A_1 \oplus A_2$ и $A'_1 \oplus A'_2$ и морфизмы $\alpha_j : A_j \to A'_j$, то существует такой единственный морфизм $\alpha_1 \oplus \alpha_2 : A_1 \oplus A_2 \to A'_1 \oplus A'_2$, что

$$\pi_1(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \alpha_1\pi_1, \quad \pi_2(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \alpha_2\pi_2. \tag{1.8}$$

Тот же самый морфизм характеризуется двойственными свойствами

$$(\alpha_1 \oplus \alpha_2)\iota_1 = \iota_1\alpha_1, \quad (\alpha_1 \oplus \alpha_2)\iota_2 = \iota_2\alpha_2. \tag{1.9}$$

Итерированная прямая сумма $A_1 \oplus (A_2 \oplus \ldots \oplus A_n)$ с соответствующими вложениями является универсальной диаграммой, и любая универсальная диаграмма для $A_1, \ldots, A_n$ эквивалентна этой итерированной прямой сумме. Двойственно, проекции π_j (итерированной) прямой суммы порождают коуниверсальную диаграмму. Аксиома, требующая существования конечных прямых сумм, может быть заменена или предположением о существовании универсальной диаграммы для любых двух объектов A_1 и A_2, или же двойственным предположением. Во всяком случае, аксиомы аддитивной категории самодвойственны.

Для аддитивной категории $\mathscr{C}$, $\hom(A, B)$ есть бифунктор из категории $\mathscr{C}$ в категорию абелевых групп.

Для подготовки к изучению ядер мы сформулируем определения «мономорфности» и «эпиморфности», согласующиеся со стандартными примерами мономорфизмов и эпиморфизмов. В категории множеств функция f, определенная на X со значениями в Y, *проективна*, если $f(X) = Y$ (f есть отображение «на»), и *инъективна*, если из $f(x) = f(x')$ всегда следует $x = x'$ (f — взаимно однозначное отображение «в» Y). В произвольной категории морфизм $\varkappa: A \to B$ называют *мономорфизмом*, если каждое индуцированное им отображение $\varkappa_* : \hom(C, A) \to \hom(C, B)$ инъективно. Таким образом, мономорфность морфизма $\varkappa$ означает, что из $\varkappa\alpha = \varkappa\alpha'$ следует $\alpha = \alpha'$ для всех $\alpha, \alpha' : C \to A$, следовательно, на $\varkappa$ можно *сокращать слева*. В аддитивной категории $\varkappa$ — мономорфизм тогда и только тогда, когда из $\varkappa\alpha = 0$ следует $\alpha = 0$ всякий раз, как определено произведение $\varkappa\alpha$. Двойственно, морфизм $\sigma: B \to C$ в произвольной категории называют *эпиморфизмом*, если каждое индуцированное отображение $\sigma^*: \hom(C, G) \to \hom(B, G)$ инъективно. Таким образом, эпиморфность σ означает, что из $\alpha\sigma = \alpha'\sigma$ всегда следует $\alpha = \alpha'$, следовательно, на σ можно *сокращать справа*. В аддитивной категории σ — эпиморфизм тогда и только тогда, когда из $\alpha\sigma = 0$ всегда следует $\alpha = 0$. В этой главе мы систематически обозначаем морфизмы, являющиеся мономорфизмами, буквами $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, а морфизмы, являющиеся эпиморфизмами, буквами ρ, σ, τ. Если $\varkappa$ и λ — мономорфизмы, то и $\varkappa\lambda$ — мономорфизм, если произведение определено, и двойственно.

Предостережение: в некоторых аддитивных категориях модулей «мономорфизмы» (в теоретико-категорном смысле.— *Прим. перев.*) могут не совпадать с мономорфизмами (см. упражнение 5), хотя это совпадение имеет место в категории всех модулей со всеми гомоморфизмами в качестве морфизмов.

Эквивалентность — это морфизм θ, обладающий двусторонним обратным ψ ($\psi\theta = 1$, $\theta\psi = 1$). Два морфизма $\alpha : S \to A$ и $\alpha' : S' \to A$ с общей областью значений называются *эквивалентными справа*, если существует такая эквивалентность $\theta : S \to S'$, что $\alpha'\theta = \alpha$; это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что допустимо говорить о классах правой эквивалентности морфизмов с областью значений A. Если $\varkappa$ — мономорфизм, то и каждый морфизм, эквивалентный справа $\varkappa$, есть мономорфизм. В аддитивной категории всех модулей два мономорфизма с областью значения A эквивалентны справа тогда и только тогда, когда их образы как подмодули модуля A совпадают. Поэтому в произвольной аддитивной категории мы будем говорить, что класс эквивалентности справа мономорфизма $\varkappa : S \to A$ есть *подобъект* объекта A. Удобно говорить, что сам мономорфизм $\varkappa$ есть подобъект объекта A, понимая под этим класс эквивалентности справа, $\operatorname{cls}\varkappa$ морфизма $\varkappa$. Заметим, что так определенный «подобъект» *не* является объектом категории; например, мы не можем рассматривать объект A как подобъект объекта A, а должны вместо этого использовать $\operatorname{cls} 1_A$, который состоит из всех эквивалентностей с областью значений A.

Двойственные определения таковы: $\alpha : A \to T$ и $\alpha' : A \to T'$ *эквивалентны слева*, если $\theta\alpha' = \alpha$ для некоторой эквивалентности θ. Класс эквивалентности слева эпиморфизма $\sigma : A \to T$ состоит из эпиморфизмов и называется *факторобъектом* объекта A.

В случае модулей ядро K гомоморфизма $\alpha: A \to B$ является наибольшим подмодулем модуля A, который отображается в 0 при α, и характеризуется тем свойством, что каждый морфизм β, для которого $\alpha\beta = 0$, представим единственным образом в виде произведения $\beta = \varkappa\beta'$, где $\varkappa : K \to A$ есть вложение. Эта характеристика может быть использована в любой аддитивной категории $\mathscr{C}$: *ядро* морфизма $\alpha : A \to B$ будет таким мономорфизмом $\varkappa$ с областью значений A, что

$$\alpha\varkappa = 0 \quad \text{и из } \alpha\beta = 0 \quad \text{следует } \beta = \varkappa\beta' \tag{1.10}$$

для некоторого β', обязательно единственного. Другими словами, правые аннуляторы морфизма α являются в точности правыми кратными его ядра $\varkappa$. Следовательно, любые два ядра $\varkappa$ и $\varkappa'$ морфизма α эквивалентны справа, так что класс всех ядер α, если он не пуст, есть подобъект объекта A, который мы обозначим как $\ker\alpha$. Двойственно, *коядро* морфизма $\alpha : A \to B$ является таким эпиморфизмом σ с областью определения B, что

$$\sigma\alpha=0 \quad \text{и из} \quad \gamma\alpha=0 \quad \text{следует} \quad \gamma=\gamma'\sigma \tag{1.11}$$

для некоторого γ', необходимо единственного. Левые аннуляторы α являются поэтому левыми кратными коядра σ морфизма α. Любые два коядра α эквивалентны слева; если α имеет коядро, то класс всех коядер α есть факторобъект объекта B, так что $\sigma \in \operatorname{coker}\alpha$ означает, что σ — одно из коядер α. В категории модулей проекция $B \twoheadrightarrow B/\alpha A$ есть коядро морфизма α.

Непосредственным следствием соответствующих определений является

Лемма 1.1. *Если произведения $\alpha\beta$, $\varkappa\alpha$ и $\alpha\sigma$ определены, то справедливы следующие импликации:*

$$\alpha\beta = \text{мономорфизм} \Rightarrow \beta = \text{мономорфизм},$$
$$\alpha\beta = \text{эпиморфизм} \Rightarrow \alpha = \text{эпиморфизм},$$
$$\varkappa = \text{мономорфизм} \Rightarrow \ker(\varkappa\alpha) = \ker\alpha,$$
$$\sigma = \text{эпиморфизм} \Rightarrow \operatorname{coker}(\alpha\sigma) = \operatorname{coker}\alpha.$$

Кроме того, $\ker 1_A = 0$, $\operatorname{coker} 1_A = 0$ *и для* $0\colon A \to B$, $1_A \in \ker 0$ *и* $1_B \in \operatorname{coker} 0$ *(запись* $\ker 1 = 0$ *есть сокращение для* $0 \in \ker 1$).

Наконец мы вводим обозначение для короткой точной последовательности, полагая

$$\alpha \,\|\, \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \ker\beta \;\&\; \beta \in \operatorname{coker}\alpha; \tag{1.12}$$

отсюда следует, что α — мономорфизм, а β — эпиморфизм, так что можно прочесть «$\varkappa \,\|\, \sigma$» как «$\varkappa$ и σ есть морфизмы короткой точной последовательности».

Для того чтобы не вступать в противоречие с основаниями математики, мы хотим, чтобы собрание всех подобъектов объекта A и собрание всех расширений A с помощью C были множествами, а не классами. Поэтому для аддитивных категорий мы предполагаем выполненными две дополнительные аксиомы.

Множества подобъектов и факторобъектов. Для каждого объекта A существует множество морфизмов $\varkappa$, являющихся мономорфизмами с областью значений A, которое содержит представителя каждого подобъекта объекта A и двойственно для факторобъектов.

Множество расширений. Для каждой пары объектов C и A и каждого $n \geqslant 1$ существует множество n-кратных точных последовательностей из A в C, которое содержит представителя каждого класса конгруэнтности таких последовательностей (причем «конгруэнтность» определяется, как в III.5).

Обе аксиомы выполнены во всех интересующих нас примерах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать: если $0: A \to B$ есть мономорфизм, то A — нулевой объект, и обратно.

2. Для указанного выше изоморфизма φ показать, что $\varphi^{-1}(\gamma_1, \gamma_2) = \nabla_C(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$.

3. Для $\alpha, \beta: A \to B$ доказать, что $\alpha + \beta = \nabla_B(\alpha \oplus \beta)\Delta_A$.

4. Показать, что прямая сумма двух коротких точных последовательностей точна.

5. Построить аддитивную категорию (некоторых) абелевых групп, в которой мономорфизм в теоретико-категорном смысле может не быть взаимно однозначным отображением. (Указание: опустить несколько подгрупп.)

6. Построить аддитивную категорию некоторых абелевых групп, в которой некоторые морфизмы не имеют ядер или коядер.

7. В категориях множеств, модулей и (не обязательно абелевых) групп показать, что морфизм тогда и только тогда является мономорфизмом, когда он инъективен, и является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда он проективен (как отображение множеств).

§ 2. Абелевы категории

Для эффективного использования только что введенных понятий ядра и коядра нам нужны условия, обеспечивающие непустоту этих классов. Далее, каждый мономорфизм должен быть ядром своего коядра, и обратно. Для модулей образ гомоморфизма $\alpha: A \to B$ появляется в разложении $A \twoheadrightarrow \alpha A \rightarrowtail B$, в котором первый множитель $A \twoheadrightarrow \alpha A$ является эпиморфизмом, а второй множитель $\alpha A \rightarrowtail B$ есть вложение и, значит, мономорфизм. Соответствующими свойствами обладают и другие знакомые нам категории: категории всех комплексов модулей над фиксированным кольцом с цепными преобразованиями в качестве морфизмов; категория всех модулей над данной градуированной алгеброй с морфизмами степени нуль; категория всех модулей над данной DG-алгеброй. Поэтому аддитивная категория $\mathscr{A}$ называется *абелевой*, если выполнены следующие дополнительные аксиомы.

(Abel-1). Для всякого морфизма α из $\mathscr{A}$ существуют морфизмы $\varkappa \in \ker\alpha$ и $\sigma \in \operatorname{coker}\alpha$.

(Abel-2). Для мономорфизма $\varkappa$ и эпиморфизма σ, $\varkappa \in \ker\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \operatorname{coker}\varkappa$.

(Abel-3). Каждый морфизм из $\mathscr{A}$ можно разложить в произведение $\alpha = \lambda\sigma$, где λ — мономорфизм и σ — эпиморфизм.

Аксиому (Abel-2) можно перефразировать так: если σ-эпиморфизм и $\varkappa \in \ker\sigma$, то $\varkappa \parallel \sigma$ и двойственно. Эти три аксиомы объединены в следующей теореме:

Теорема 2.1. *Для каждого морфизма α существуют морфизмы $\varkappa$, σ, λ, τ, образующие следующую диаграмму и обладающие указанными свойствами:*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\varkappa"] & \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \bullet \arrow[r, "\lambda"] & \bullet \arrow[r, "\tau"] & \bullet \end{tikzcd}, \quad \alpha = \lambda\sigma, \quad \varkappa \parallel \sigma, \ \lambda \parallel \tau. \tag{2.1}$$

Здесь и ниже *точки* отмечают объекты, не обозначенные буквами.

Доказательство. Используя (Abel-3), запишем α в виде $\alpha = \lambda\sigma$; по (Abel-1) существуют морфизмы $\varkappa \in \ker\alpha = \ker\sigma$ и $\tau \in \operatorname{coker}\alpha = \operatorname{coker}\lambda$; по (Abel-2), $\varkappa \parallel \sigma$ и $\lambda \parallel \tau$. Доказательство обратного утверждения о том, что из этой теоремы вытекают все три аксиомы, оставляется читателю.

Диаграмма (2.1) называется *анализом* морфизма α, а $\alpha = \lambda\sigma$ — *стандартным разложением* этого морфизма.

Предложение 2.2. *Анализ морфизма $\alpha \in \mathscr{A}$ является функтором.*

Здесь мы рассматриваем анализ (2.1) морфизма α как функтор, определенный в категории $\mathscr{M} = \operatorname{Morph}(\mathscr{A})$ морфизмов из $\mathscr{A}$: объектами $\mathscr{M}$ являются морфизмы $\alpha: A \to B$ из $\mathscr{A}$; отображениями $\Xi: \alpha \to \alpha'$ — пары $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ морфизмов категории $\mathscr{A}$, для которых $\alpha'\xi_1 = \xi_2\alpha$. Значения этого функтора принадлежат аналогичной категории диаграмм над $\mathscr{A}$. Так как анализ не определен однозначно, наше утверждение более точно означает, что любой выбор анализов, по одному для каждого α, порождает функтор подобного типа.

Значит, если дано $\Xi = (\xi_1, \xi_2): \alpha \to \alpha'$ и анализы α и α', то мы утверждаем, что в категории $\mathscr{A}$ существуют единственные морфизмы η_1, η_2, η_3, превращающие диаграмму

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\eta_1"] & \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\xi_1"] & \bullet \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta_2"] & \bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\xi_2"] & \bullet \arrow[d, "\eta_3"] \\ \bullet \arrow[r, "\varkappa'"] & \bullet \arrow[r, "\sigma'"] & \bullet \arrow[r, "\lambda'"] & \bullet \arrow[r, "\tau'"] & \bullet \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \alpha = \lambda\sigma \\ \\ \alpha' = \lambda'\sigma' \end{matrix} \tag{2.2}$$

в коммутативную. (В обычной терминологии η_1 — отображение, *индуцированное* ξ_1 на ядрах и т. д.) Действительно, из $\alpha'(\xi_1\varkappa) = \xi_2\alpha\varkappa = 0$ следует, что $\xi_1\varkappa$ разлагается в произведение $\xi_1\varkappa = \varkappa'\eta_1$, где $\varkappa' \in \ker\alpha'$; поскольку на $\varkappa'$ можно сокращать слева, морфизм η_1 определен однозначно. Двойственно; $\tau'\xi_2 = \eta_3\tau$ для

единственного η_3. Далее, $\lambda'\sigma'\xi_1\varkappa = \xi_2\alpha\varkappa = 0$; поскольку на λ' можно сокращать слева, $\sigma'\xi_1\varkappa = 0$ и $\sigma'\xi_1$ разлагается в произведение $\sigma'\xi_1 = \eta_2\sigma$, $\sigma \in \operatorname{coker}\varkappa$, и морфизм η_2 определен однозначно. Теперь $\xi_2\lambda\sigma = \lambda'\sigma'\xi_1 = \lambda'\eta_2\sigma$; сокращая на σ, получаем $\xi_2\lambda = \lambda'\eta_2$.

Этим доказана коммутативность диаграммы и ее единственность. Примененное к $1: \alpha \to \alpha$ и к двум анализам морфизма α, это доказательство дает эквивалентности η_1, η_2, η_3. Отсюда

Следствие 2.3. *Анализ (2.1) морфизма α определен однозначно с точностью до эквивалентности трех объектов: область определения $\varkappa$, область значений σ = область определения λ и область значений τ.*

В анализе (2.1) однозначно определенный класс морфизмов, эквивалентных справа λ, называется *образом* α, а однозначно определенный класс морфизмов, эквивалентных слева σ, называется *кообразом* α. Образ α является подобъектом области значений α, кообраз — факторобъектом области определения. Анализ морфизма $\alpha: A \to B$ имеет вид коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\ker\alpha"] & A \arrow[r, "\operatorname{coim}\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "\operatorname{im}\alpha"] \\ & & B \arrow[d, "\operatorname{coker}\alpha"] \\ & & \bullet \end{tikzcd}, \tag{2.3}$$

строка и столбец которой — короткие точные последовательности. Конечно, «$\ker\alpha$» обозначает здесь любой морфизм из класса $\ker\alpha$. При том же соглашении мы можем выписать следующие соотношения:

$$(\ker\alpha) \parallel (\operatorname{coim}\alpha), \quad (\operatorname{im}\alpha) \parallel (\operatorname{coker}\alpha), \tag{2.4}$$

$$\operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}(\ker\alpha), \quad \operatorname{im}\alpha = \ker(\operatorname{coker}\alpha), \tag{2.5}$$

$$\ker\alpha = \ker(\operatorname{coim}\alpha), \quad \operatorname{coker}\alpha = \operatorname{coker}(\operatorname{im}\alpha). \tag{2.6}$$

Следовательно, также $\ker(\operatorname{coker}(\ker\alpha)) = \ker\alpha$ и двойственно.

Предложение 2.4. *Морфизм α является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\ker\alpha = 0$, эпиморфизмом — тогда и только тогда, когда $\operatorname{coker}\alpha = 0$, и эквивалентностью — тогда и только тогда, когда и $\ker\alpha$ и $\operatorname{coker}\alpha$ равны нулю. В частности, морфизм, являющийся одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, есть эквивалентность.*

Запись $\ker\alpha = 0$ есть сокращение $0 \in \ker\alpha$; она означает, что каждый элемент класса $\ker\alpha$ является нулевым морфизмом.

Доказательство. В определении мономорфизма содержится утверждение, что правыми аннуляторами мономорфизма α

являются только нули, значит, необходимо, чтобы $\ker \alpha = 0$. Обратно, если $0 \in \ker \alpha$, то каждый правый аннулятор α имеет 0 множителем и поэтому сам равен нулю, так что α — мономорфизм по определению. Доказательство для эпиморфизма α двойственно, оба доказательства используют только аксиомы аддитивной категории. Наконец, эквивалентность α одновременно есть и мономорфизм, и эпиморфизм, так что $\ker \alpha = 0 = \operatorname{coker} \alpha$. Обратно, если $\ker \alpha = 0 = \operatorname{coker} \alpha$, то $1 \in \ker 0 = \ker (\operatorname{coker} \alpha) = \operatorname{im} \alpha$ по (2.5), так что $\operatorname{im} \alpha$ эквивалентен 1 и, значит, есть эквивалентность. Двойственно, $\operatorname{coim} \alpha$ есть эквивалентность, а поэтому $\alpha = (\operatorname{im} \alpha)(\operatorname{coim} \alpha)$ также есть эквивалентность.

Точные последовательности действуют, как обычно, и могут быть определены двумя (двойственными) способами.

Предложение 2.5. *Если произведение $\beta\alpha$ определено, то $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{coim} \beta = \operatorname{coker} \alpha$.*

Если эти условия выполнены, то мы скажем, что пара (α, β) *точна*. В частности, из $\varkappa \| \sigma$ следует, что пара $(\varkappa, \sigma)$ точна.

Доказательство. Если $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$, то $\operatorname{coim} \beta = \operatorname{coker} (\ker \beta) = \operatorname{coker} (\operatorname{im} \alpha) = \operatorname{coker} \alpha$ по (2.5) и (2.6), и двойственно.

Предложение 2.6. *Короткая лемма о пяти гомоморфизмах справедлива в любой абелевой категории.*

Доказательство. Для коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\ \bullet \arrow[r, "\varkappa'"] & \bullet \arrow[r, "\sigma'"] & \bullet \end{tikzcd},$$

в которой $\varkappa \| \sigma$, $\varkappa' \| \sigma'$, нужно доказать, что из мономорфности α и γ следует мономорфность β, и двойственно. Возьмем $\mu \in \ker \beta$. Тогда из $\beta\mu = 0$ следует $0 = \sigma'\beta\mu = \gamma\sigma\mu$; поскольку γ — мономорфизм, $\sigma\mu = 0$. Поэтому μ разлагается в произведение $\mu = \varkappa\nu$, $\varkappa \in \ker \sigma$, причем ν необходимо будет мономорфизмом. Отсюда $\varkappa'\alpha\nu = \beta\varkappa\nu = \beta\mu = 0$. Но $\varkappa'$ и α — мономорфизмы, так что $\nu = 0$ и, значит, $\ker \beta = \mu = \varkappa\nu = 0$, т. е. β — мономорфизм, что и утверждалось.

Лемма о пяти гомоморфизмах, лемма о четырех гомоморфизмах и 3×3 лемма также верны в любой абелевой категории. Доказательства, которые основаны на некоторой дополнительной технике, будут даны в гл. XII.

Назовем абелеву категорию *отмеченной*, если

(Выбор 1.) существует функция, ставящая в соответствие каждой паре объектов A_1 и A_2 диаграмму прямой суммы в форме, указанной в (1.4);

(Выбор 2.) существует функция, отмечающая единственного представителя $\varkappa$ для каждого подобъекта и единственного представителя σ для каждого факторобъекта.

В отмеченной абелевой категории мы можем сопоставить объект K как Ядро для каждого морфизма α: выберем в качестве K область определения отмеченного представителя $\varkappa$: $K \to A$ класса эквивалентных справа морфизмов $\ker \alpha$. (Заметим, что слово «Ядро» с большой буквы обозначает объект, а с маленькой буквы — морфизм.) Аналогично мы можем сопоставить Коядра и образовать факторобъекты подобъектов; при этом мы действуем так, как будто имеем дело с категорией всех R-модулей. Различные упомянутые примеры абелевых категорий являются отмеченными; по аксиоме выбора каждая малая абелева категория отмечена.

Замечания о терминологии. Возможность абстрактного построения гомологической алгебры в подходящей категории впервые была показана Маклейном [1950], рассматривавшим «абелеву бикатегорию», которая по существу есть абелева категория с каноническим выбором представителей подобъектов и факторобъектов. При этом канонический выбор оказался излишним и опущен в изложенной в этом тексте переработке, при которой подобъекты не являются объектами. Буксбаум [1955] использовал в своих формулировках точные категории, которые являются абелевыми в нашем смысле без аксиомы о прямых суммах, а в содержательном исследовании Гротендика [1957] введен термин «абелева категория» в смысле, использованном здесь. Другие авторы вкладывают другой смысл в этот термин. Атия [1956] установил теорему Крулля — Шмидта о единственности разложения в прямую сумму с неразложимыми объектами для абелевых категорий, удовлетворяющих условиям обрыва цепей. Теоретико-множественные вопросы, связанные с абелевыми категориями, рассмотрены Маклейном [1961b]. Различные другие типы категорий могут быть построены путем наложения дополнительной структуры на множества $\operatorname{hom}(A, B)$. Так, в градуированных категориях (см. XII.4) каждое множество $\operatorname{hom}(A, B)$ является градуированной группой, в дифференциальных категориях (Эйленберг — Мур, не опубликовано) каждое множество $\operatorname{hom}(A, B)$ является положительным комплексом K-модулей. Можно было бы определить категории с функтором тензорного умножения, удовлетворяющим соответствующим аксиомам, например как при нашем рассмотрении (гл. VI) типов алгебр. Нётеровы категории изучались Габриэлем [1962].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что при выполнении аксиом (Abel-2) и (Abel-3) аксиома (Abel-1) может быть заменена более слабым утверждением о существовании ядра у каждого эпиморфизма и существовании коядра у каждого мономорфизма.

2. В (2.2) показать, что из мономорфности ξ_1 следует мономорфность η_1 и из мономорфности ξ_2 следует мономорфность η_2.

§ 3. Категории диаграмм

Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, и пусть $\mathcal{C}$ — малая категория (т. е. класс объектов в $\mathcal{C}$ есть множество). Через $\mathrm{Dgram}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ обозначим категорию, объектами которой являются ковариантные функторы $T: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, а морфизмами — естественные преобразования функторов $f: T \to S$. Сумма двух естественных преобразований $f, g: T \to S$ определяется для каждого объекта $C \in \mathcal{C}$ равенством $(f+g)(C) = f(C) + g(C)$. В $\mathrm{Dgram}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ выполняются аксиомы аддитивной категории; в частности, прямая сумма двух диаграмм T_1 и T_2 определяется как $(T_1 \oplus T_2)(C) = T_1(C) \oplus T_2(C)$, т. е. нужно в каждой вершине диаграммы прямой суммы взять указанную прямую сумму. Здесь, как и в I.8, можно рассматривать каждый функтор $T: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ как «диаграмму» в $\mathcal{A}$ с «моделью» $\mathcal{C}$. Например, если $\mathcal{C}_0$ — категория с двумя объектами C, C' и тремя морфизмами 1_C, $1_{C'}$ и $\gamma: C \to C'$, то каждый функтор $T: \mathcal{C}_0 \to \mathcal{A}$ определяется морфизмом $T(\gamma)$ из $\mathcal{A}$, так что категория $\mathrm{Dgram}(\mathcal{C}_0, \mathcal{A})$ является по существу категорией $\mathrm{Morph}(\mathcal{A})$ из § 2, объекты которой — морфизмы категории.

Предложение 3.1. (*Гротендик* [1957].) *Если категория $\mathcal{C}$ — малая, а категория $\mathcal{A}$ — абелева, то категория $\mathcal{D} = \mathrm{Dgram}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ является абелевой. Если f и g — морфизмы из $\mathcal{D}$, то $f \| g$ в $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для каждого объекта C, $f(C) \| g(C)$ в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $f: T \to S$ есть естественное преобразование. Поскольку категория $\mathcal{C}$ мала, то можно выбрать для каждого объекта C мономорфизм $k(C) \in \ker f(C)$ с областью определения $K(C)$. Значит, $k(C): K(C) \to T(C)$ есть морфизм из $\mathcal{A}$. Поскольку f естественно, каждый морфизм $\gamma: C \to C'$ определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K(C) \arrow[r, "k(C)"] \arrow[d, dashed] & T(C) \arrow[r, "f(C)"] \arrow[d, "T(\gamma)"] & S(C) \arrow[d, "S(\gamma)"] \\ 0 \arrow[r] & K(C') \arrow[r, "k(C')"] & T(C') \arrow[r, "f(C')"] & S(C') \end{tikzcd}$$

с точными строками. Так как $f(C')[T(\gamma)k(C)] = 0$ и $k(C')$ является ядром $f(C')$, то существует единственный морфизм $K(\gamma)$ (указанный пунктирной стрелкой), для которого $T(\gamma)k(C) = k(C')K(\gamma)$. Отсюда следует, что $K: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ как функция, заданная на объектах и на отображениях $K(\gamma)$, является функтором, и $k: K \to T$ есть естественное преобразование. Как морфизм из $\mathcal{D}$ преобразование k является мономорфизмом, так как если $kh = 0$, то $(kh)(C) = k(C)h(C) = 0$ для каждого объекта C; поскольку $k(C)$ — мономорфизм в A, то $h(C) = 0$. Далее, если $g: R \to T$

есть такое естественное преобразование, что $fg = 0$, то каждый морфизм $g(C)$ единственным образом представим в виде произведения $g(C) = k(C)h(C)$, $h: R \to K$ — естественное преобразование и $g = kh$. Следовательно, $k \in \ker_{\mathcal{D}} f$. Эти рассуждения вместе с двойственными им доказывают выполнение аксиомы (Abel-1) в $\mathcal{D}$ и доказывают также, что

$$f \text{ — мономорфизм в } \mathcal{D} \Longleftrightarrow \text{каждый морфизм } f(C) \text{ — мономорфизм в } \mathcal{A};$$

$$k \in \ker_{\mathcal{D}} f \Longleftrightarrow \text{каждый морфизм } k(C) \in \ker_{\mathcal{A}} f(C).$$

Эти утверждения вместе с двойственными доказывают выполнение аксиомы (Abel-2).

Для получения стандартного разложения (Abel-3) для $f: T \to S$ выберем для каждого объекта C стандартное разложение $f(C) = l(C)t(C)$; области значений $R(C)$ морфизмов $t(C)$ порождают функтор $R: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, причем $t: T \to R$ является эпиморфизмом, $l: R \to S$ является мономорфизмом в $\mathcal{D}$ и $f = lt$. Поскольку категория $\mathcal{C}$ мала, можно выбрать для каждого функтора T *множество* представителей подобъектов T и для каждой пары функторов S и T *множество* представителей расширений S с помощью T, доказав тем самым, что категория $\mathcal{D}$ удовлетворяет дополнительным теоретико-множественным аксиомам (§ 1) для аддитивной категории.

Теперь рассмотрим диаграммы, включающие нулевые объекты. Объект N произвольной категории $\mathcal{C}$ назовем *нулевым* объектом, если для каждого объекта C и $\mathcal{C}$ существуют ровно один морфизм $C \to N$ и ровно один морфизм $N \to C$; обозначим эти морфизмы как $0_C: C \to N$ и $0^C: N \to C$. Любые два нулевых объекта в $\mathcal{C}$ эквивалентны, и любой объект, эквивалентный нулевому, сам является нулевым.

Для данных объектов C и D произведение $0^D 0_C: C \to N \to D$ не зависит от выбора промежуточного нулевого объекта N; оно может быть названо *нулевым морфизмом* $0_C^D: C \to D$. Новый нулевой объект может быть присоединен к любой категории. В аддитивной категории нулевые объекты — это в точности нулевые объекты в прежнем смысле, а нулевые морфизмы $0: C \to D$ совпадают с нулями групп $\mathrm{hom}(C, D)$.

Если в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$ имеются нулевые объекты, то *нормализованный* функтор $T: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ — это функтор, для которого $T(N)$ — нулевой объект для некоторого (и, следовательно, для любого) нулевого объекта N из $\mathcal{C}$. Отсюда следует, что T переводит нулевые морфизмы в нулевые морфизмы. Категорию всех нормализованных функторов будем обозначать $\mathrm{Dgram}_N(\mathcal{C}, A)$. Предложение 3.1 по-прежнему остается в силе.

Примером служит категория комплексов. Чтобы убедиться в этом, в качестве $\mathscr{C}$ возьмем следующую малую категорию:

$$N; \ldots \leftarrow -2 \overset{\partial_{-1}}{\leftarrow} -1 \overset{\partial_0}{\leftarrow} 0 \overset{\partial_1}{\leftarrow} 1 \leftarrow \ldots;$$

объектами этой категории являются все целые числа n и нулевой объект N; морфизмами — все единицы, нулевые морфизмы $n \to N$, $N \to n$, $n \to m$ и морфизмы $\partial_n : n \to (n-1)$. Умножение морфизмов определяется требованием, чтобы произведение $\partial_{n-1}\partial_n$ равнялось нулю.

Возьмем произвольную абелеву категорию $\mathscr{A}$. Нормализованный ковариантный функтор $T : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ задается последовательностью $\ldots \leftarrow T_{n-1} \leftarrow T_n \leftarrow \ldots$ объектов и морфизмов из $\mathscr{A}$, причем $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, так что это в точности цепной комплекс объектов из $\mathscr{A}$ (сокращенно $\mathscr{A}$-комплекс). Естественное преобразование $f : T \to S$ является цепным преобразованием. Следовательно, $\mathrm{Dgram}_N(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ — категория всех $\mathscr{A}$-комплексов; по предложению 3.1 она абелева. Если категория $\mathscr{A}$ отмеченная, то объекты гомологий $H_n(T) = \mathrm{Ker}\, \partial_n / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$ можно определить обычным способом; читатель должен показать, что каждое отображение $f: T \to S$ индуцирует $f_* : H_n(T) \to H_n(S)$, так что H_n — ковариантный функтор, определенный в категории $\mathrm{Dgram}_N(\mathscr{C}, \mathscr{A})$, и что гомотопии имеют обычные свойства.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что категория градуированных объектов абелевой категории $\mathscr{A}$ является абелевой.

2. Описать абелеву категорию, объектами которой являются анализы (2.1).

3. Показать, что категория положительных комплексов объектов из абелевой категории $\mathscr{A}$ абелева.

4. (Маклейн [1950].) Пусть $\mathscr{C}$ — категория с нулевым объектом. Предположим, что для каждой пары объектов A_1 и A_2 существует диаграмма $A_1 \rightleftarrows B \rightleftarrows A_2$, универсальная относительно пары морфизмов с областью значений B и коуниверсальная относительно пары морфизмов с областью определения B. В каждом множестве $\hom(A, C)$ ввести бинарную операцию сложения, как в упражнении 1.3, и показать, что это сложение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно умножения.

5. В условиях упражнения 4 предположим дополнительно, что существует такое естественное преобразование $V_A : A \to A$, что $\nabla_A (V_A \oplus 1_A)\Delta_A = 0$ для всех A. Используя V, определить $-\alpha$ для каждого морфизма α и доказать, что $\mathscr{C}$ превращается в аддитивную категорию.

§ 4. Сравнение допустимых резольвент

Если Λ — алгебра над фиксированным основным коммутативным кольцом $\mathbf{K}$, то многие понятия рассматриваются также «относительно $\mathbf{K}$». Каждый левый Λ-модуль A есть также $\mathbf{K}$-модуль и каждый Λ-модульный гомоморфизм $\alpha: A \to B$ является также $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом, обратное не всегда верно. Назовем гомоморфизм этого вида «допустимым» относительно $(\Lambda, \mathbf{K})$, если существует такой $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $t : B \dashrightarrow A$ (в обратном направлении!), что $\alpha t \alpha = \alpha$. В частности, мономорфизм α допустим, если существует такой гомоморфизм t, что $t\alpha = 1_A$, т. е. если α обладает левым обратным $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом t, который может не быть гомоморфизмом Λ-модулей. Аналогично Λ-модульный эпиморфизм допустим тогда и только тогда, когда он обладает $\mathbf{K}$-модульным правым обратным t. Следовательно, короткая точная последовательность $\varkappa \| \sigma$ Λ-модульных гомоморфизмов допустима, если $\varkappa$ обладает левым $\mathbf{K}$-обратным, а σ обладает правым $\mathbf{K}$-обратным. Эти свойства означают, что последовательность $(\varkappa, \sigma)$ превращается в последовательность прямой суммы, если ее рассматривать только как последовательность $\mathbf{K}$-модулей. Более коротко говорят, что эта последовательность Λ-модулей $\mathbf{K}$-*расщепляема* (некоторые авторы говорят: *слабо расщепляема*). Использование такого класса «$\mathbf{K}$-расщепляемых» или «допустимых» коротких точных последовательностей типично для относительной гомологической алгебры. Далее мы покажем, как теорема сравнения для резольвент применяется в любой подобной ситуации.

В произвольной абелевой категории $\mathscr{A}$ класс $\mathscr{E}$ коротких точных последовательностей из $\mathscr{A}$ будет называться *допустимым*, если $\mathscr{E}$ вместе с некоторой короткой точной последовательностью $(\varkappa, \sigma)$ содержит все изоморфные ей короткие точные последовательности и если $\mathscr{E}$ также содержит для каждого объекта $\mathscr{A}$ короткие точные последовательности $(0, 1_A)$ и $(1_A, 0)$.

Будем писать $\varkappa\mathscr{E}\sigma$, если $(\varkappa, \sigma)$ — одна из последовательностей из $\mathscr{E}$, и называть эту последовательность $\mathscr{E}$-допустимой. Назовем мономорфизм $\varkappa$ из $\mathscr{A}$ *допустимым* и будем писать $\varkappa \in \mathscr{E}_m$, если $\varkappa\mathscr{E}\sigma$ для некоторого σ; $\varkappa$ допустим тогда и только тогда, когда $\varkappa\mathscr{E}(\mathrm{coker}\,\varkappa)$. Двойственно назовем эпиморфизм σ *допустимым* и будем писать $\sigma \in \mathscr{E}_e$ тогда и только тогда, когда $(\ker\sigma)\mathscr{E}\sigma$. Поскольку $\varkappa\mathscr{E}\sigma$ тогда и только тогда, когда $\varkappa \in \mathscr{E}_m$ и $\varkappa \| \sigma$, класс $\mathscr{E}$ определяется классом $\mathscr{E}_m$ допустимых мономорфизмов или классом $\mathscr{E}_e$ допустимых эпиморфизмов. Значит, $\mathscr{E}_e$ определяет $\mathscr{E}_m$; так как мономорфизм $\varkappa \in \mathscr{E}_m$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{coker}\,\varkappa \in \mathscr{E}_e$. Если $\varkappa \in \mathscr{E}_m$, то любой морфизм, эквивалентный $\varkappa$ слева или справа, также принадлежит $\mathscr{E}_m$.

Непосредственно из свойств анализа морфизма α выводим

Предложение 4.1. *Если дан допустимый класс $\mathscr{E}$, то следующие условия, налагаемые на морфизм α, эквивалентны:*

(i) $\mathrm{im}\,\alpha \in \mathscr{E}_m$ *и* $\mathrm{coim}\,\alpha \in \mathscr{E}_e$;
(ii) $\ker\alpha \in \mathscr{E}_m$ *и* $\mathrm{coker}\,\alpha \in \mathscr{E}_e$;

(iii) *в стандартном разложении* $\alpha = \lambda\sigma$, $\lambda \in \mathscr{E}_m$ *и* $\sigma \in \mathscr{E}_e$;

(iv) *каждый анализ* α *состоит из допустимых мономорфизмов и эпиморфизмов.*

Морфизм α называется *допустимым*, если он удовлетворяет этим условиям. Если α вдобавок мономорфизм, то $\operatorname{coim} \alpha = 1_A$, так что α допустим и является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathscr{E}_m$. Аналогично допустимые морфизмы, являющиеся эпиморфизмами, принадлежат $\mathscr{E}_e$. Произведение допустимых морфизмов может не быть допустимым.

Например, в категории всех левых Λ-модулей $\mathbf{K}$-расщепляющиеся короткие точные последовательности образуют допустимый класс и можно показать, что допустимы те морфизмы α, для которых $\alpha t \alpha = \alpha$ для некоторого t в соответствии с данным выше определением. Дополнительные свойства, которые имеются в этом случае, будут изучаться в гл. XII.

Пусть $\mathscr{E}$ — произвольный допустимый класс из $\mathscr{A}$. $\mathscr{E}$-проективным объектом P (или *допустимым проективным объектом*) называется такой объект $P \in \mathscr{A}$, что для любого допустимого эпиморфизма $\sigma: B \twoheadrightarrow C$ каждый морфизм $\gamma: P \to C$ из $\mathscr{A}$ можно провести через σ: $\gamma = \sigma\gamma'$ для некоторого $\gamma': P \to B$. Как и прежде, это условие можно сформулировать несколькими эквивалентными способами.

Предложение 4.2. *Для заданного допустимого класса* $\mathscr{E}$ *коротких точных последовательностей следующие условия, налагаемые на объект* P, *эквивалентны*:

(i) P — *допустимый проективный объект*,

(ii) *каждый морфизм* $\sigma: B \twoheadrightarrow C$ *из* $\mathscr{E}_e$ *индуцирует эпиморфизм* $\hom(P, B) \twoheadrightarrow \hom(P, \widetilde{C})$,

(iii) *для каждой допустимой короткой точной последовательности* $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *индуцированная последовательность* $\hom(P, A) \rightarrowtail \hom(P, B) \twoheadrightarrow \hom(P, C)$ *абелевых групп является точной.*

Мы будем говорить, что имеется *достаточно допустимых проективных объектов*, если для каждого объекта C из $\mathscr{A}$ существует хотя бы один морфизм $\rho: P \twoheadrightarrow C$, являющийся допустимым эпиморфизмом, область определения которого — допустимый проективный объект. Понятием, двойственным этому, будет наличие достаточного числа допустимых инъективных объектов.

Любая длинная точная последовательность в абелевой категории может быть записана как произведение Ионеды коротких точных последовательностей; мы назовем длинную точную последовательность допустимой тогда и только тогда, когда каждая из этих коротких точных последовательностей допустима.

Рассмотрим комплекс $\cdots \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to C \to 0$ над объектом C из A. Назовем его *допустимой резольвентой*, если он является допустимой длинной точной последовательностью, и назовем его *допустимым проективным комплексом* над C, если каждый объект X_n допустимый проективный. Если выполнены оба эти условия, то комплекс называется *допустимой проективной резольвентой* объекта C.

Теорема 4.3. (Теорема сравнения.) *Пусть* $\mathscr{E}$ — *допустимый класс коротких точных последовательностей в абелевой категории* $\mathscr{A}$. *Если* $\gamma: C \to C'$ *есть морфизм из* $\mathscr{A}$, $\varepsilon: X \to C$ *есть допустимый проективный комплекс над* C *и* $\varepsilon': X' \to C'$ — *допустимая резольвента объекта* C', *то существует цепное преобразование* $f: X \to X'$ *морфизмов из* $\mathscr{A}$, *причем* $\delta' f = \gamma\varepsilon$. *Любые два таких цепных преобразования цепно гомотопны.*

Доказательство по существу является повторением доказательства для случая модулей (теорема III.6.1). Поскольку X_0 — допустимый проективный объект и $\varepsilon': X'_0 \twoheadrightarrow C'$ — допустимый эпиморфизм, $\gamma\varepsilon: X_0 \to C$ разлагается в произведение $\varepsilon' f_0$ для некоторого f_0. Теперь мы хотим построить такой морфизм f_1, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & C \arrow[d, "\gamma"] & \\
X'_1 \arrow[rr, "\partial'"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C' \arrow[r] & 0 \\
& \bullet \arrow[ur, "\lambda"'] & & &
\end{tikzcd}$$

была коммутативной. Возьмем стандартное разложение $\partial' = \lambda\sigma$, указанное в диаграмме; поскольку X' — допустимая резольвента, то $\lambda \mathscr{E} \varepsilon'$. Но $\varepsilon' f_0 \partial = \gamma\varepsilon\partial = 0$, так что $f_0\partial$ представляется в виде произведения $f_0\partial = \lambda\beta$ для некоторого β, $\lambda \in \ker \varepsilon'$. Так как σ — допустимый эпиморфизм, а X_1 — допустимый проективный объект, то $\beta = \sigma f_1$ для некоторого f_1 и $\partial' f_1 = \lambda\sigma f_1 = \lambda\beta = f_0\partial$, что и требовалось. Построение морфизмов $f_2, f_3, \ldots$ и гомотопии проводится аналогично.

Замечание об инъективных оболочках. Семейство $\{a_t\}$ подобъектов объекта A *направлено* по включению, если каждая пара подобъектов a_s, a_t этого семейства содержится в третьем подобъекте семейства (в очевидном смысле слова «содержится», разъяснеином дальше в гл. XII). Абелева категория $\mathscr{A}$ удовлетворяет аксиоме Гротендика AB-5, если для каждого объекта A, каждого его подобъекта b и любого направленного по включению семейства подобъектов a_t равенство $b \cap (\bigcup_t a_t) = \bigcup_t (b \cap a_t)$ выполнено в структуре подобъектов и если, кроме того, в $\mathscr{A}$ имеются бесконечные прямые суммы. Объект U называется *образующим*, если для всякого неулевого морфизма $\alpha: A \to B$ найдется такой морфизм $\xi: U \to A$, что $\alpha\xi \neq 0$. Оба условия выполнеиы в категории всех Λ-модулей, причем Λ является образующим. Гротеидик [1957, теорема 1.10.1] показал, что в абелевой категории, обладающей образующим и удовлетворяющей аксиоме AB-5, достаточно инъективных объектов; Митчелл [1962] при этих же предположениях построил инъективную оболочку Экмана — Шопфа. В частности, этим установлено, что в категории пучков над фиксированным топологическим пространством достаточно инъективных объектов. (Хотя в этом случае нет достаточного числа проективных объектов, см. Гротендик [1957], Годеман [1958].)

УПРАЖНЕНИЕ

1. (Характеристика допустимых коротких точных последовательностей с помощью допустимых проективных объектов, см. Хеллер [1958].) Если $\mathcal{E}$ — допустимый класс коротких точных последовательностей, удовлетворяющий условию $\alpha\beta \in \mathcal{E}_e \Rightarrow \alpha \in \mathcal{E}_e$, и если существует достаточно допустимых проективных объектов, то можно показать, что эпиморфизм $\sigma\colon B \to C$ допустим тогда и только тогда, когда отображение $\hom(P, B) \to \hom(P, C)$ является эпиморфизмом для всех допустимых проективных объектов P.

§ 5. Относительные абелевы категории

Пусть S — подкольцо кольца R, имеющее ту же единицу, что и R. Некоторые короткие точные последовательности R-модулей будут расщепляться, если их рассматривать как последовательности S-модулей. Каждый R-модуль A превращеется в S-модуль ${}_\iota A$ при отступлении вдоль вложения $\iota\colon S \to R$, а отображения, являющиеся R-модульными гомоморфизмами $\alpha : A \to B$, также являются S-модульными гомоморфизмами ${}_\iota\alpha : {}_\iota A \to {}_\iota B$. Значит, $\square(A) = {}_\iota A$, $\square(\alpha) = {}_\iota\alpha$ есть функтор $\square$ из категории $\mathcal{A}$ всех левых R-модулей в категорию $\mathcal{M}$ всех левых S-модулей; этот функтор «забывает» или «пренебрегает» частью R-модульной структуры. Имеется много других примеров, таких, как модули над алгеброй Λ и модули над основным кольцом $\mathbf{K}$, как указано во введении к § 4. В каждом из этих примеров имеется аналогичный функтор $\square$. Сформулируем соответствующие общие свойства таких функторов.

Под *относительной абелевой категорией* $\square$ будем понимать пару отмеченных абелевых категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ вместе с ковариантным функтором $\square : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ (будем писать $\square A = A_\square$, $\square\alpha = \alpha_\square$), который предполагается аддитивным, точным и полным.

Аддитивность означает, что из $\alpha, \beta \in \hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ следует $(\alpha + \beta)_\square = \alpha_\square + \beta_\square$ в $\hom_{\mathcal{M}}(A_\square, B_\square)$. Отсюда следует, что $0_\square = 0$ и что $(A \oplus B)_\square \cong A_\square \oplus B_\square$.

Точность означает, что из $\alpha \parallel \beta$ в $\mathcal{A}$ следует $\alpha_\square \parallel \beta_\square$ в $\mathcal{M}$. Отсюда следует, что если $\varkappa$ — мономорфизм, а σ — эпиморфизм в $\mathcal{A}$, то $\varkappa_\square$ — мономорфизм, а $\sigma_\square$ — эпиморфизм в $\mathcal{M}$, функтор $\square$ переводит каждый анализ (2.1) морфизма α из $\mathcal{A}$ в анализ морфизма $\alpha_\square$ и, следовательно, из $\varkappa \in \ker\beta$ следует $\varkappa_\square \in \ker\beta_\square$ и аналогично для coker, im и coim. Более того, $\square$ переводит точные последовательности в точные последовательности.

Полнота означает, что из $\alpha_\square = 0$ вытекает $\alpha = 0$. Отсюда следует, что если $A_\square = 0'$, то $A = 0'$, однако из равенства $A_\square = B_\square$ может не вытекать равенство $A = B$. Однако если $\alpha_\square$ — эпиморфизм (или мономорфизм) в $\mathcal{M}$, то α — эпиморфизм (или мономорфизм) в $\mathcal{A}$. Будем обозначать объекты категории $\mathcal{A}$ буквами $A, B, C, \ldots$, а морфизмы $\alpha\colon A \to B$ греческими буквами и отмечать сплошными стрелками. Объекты категории $\mathcal{M}$ будем обозначать буквами $L, M, N, \ldots$, морфизмы $t\colon L \dashrightarrow M$ — малыми латинскими буквами и отмечать штрихованными стрелками.

Говорят, что короткая точная последовательность $\varkappa \parallel \sigma$ из $\mathcal{A}$ *относительно расщепляется* (или $\square$-расщепляется), если точная последовательность $\varkappa_\square \parallel \sigma_\square$ расщепляется в $\mathcal{M}$, т. е. если $\sigma_\square$ имеет правый обратный k или (эквивалентно) $\varkappa_\square$ имеет левый обратный t в $\mathcal{M}$. Эта ситуация описывается двумя диаграммами

$$A \overset{\varkappa}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C, \qquad A_\square \underset{t}{\overset{\varkappa_\square}{\rightleftarrows}} B_\square \underset{k}{\overset{\sigma_\square}{\rightleftarrows}} C_\square, \tag{5.1}$$

первая из которых точна в $\mathcal{A}$, а вторая является диаграммой прямой суммы в $\mathcal{M}$. Для простоты мы часто будем заменять их *схемой*

$$A \underset{t}{\overset{\varkappa}{\rightleftarrows}} B \underset{\sigma}{\overset{k}{\leftrightarrows}} C, \tag{5.2}$$

в которой сплошные стрелки относятся к $\mathcal{A}$, сплошные и штрихованные стрелки относятся к $\mathcal{M}$. Аналогично равенства

$$t\varkappa_\square = 1_{A_\square}, \quad \sigma\varkappa = 0, \quad \varkappa_\square t + k\sigma_\square = 1_{B_\square}, \ \ldots,$$

справедливые для диаграммы прямой суммы (5.1), схематично будут записываться как

$$t\varkappa = 1_A, \quad \sigma\varkappa = 0, \quad \varkappa t + k\sigma = 1_B, \ \ldots,$$

без знака $\square$, так что символ $t\varkappa$ есть сокращенная запись произведения $t\varkappa_\square$ в $\mathcal{M}$.

Класс $\square$-расщепляющихся коротких точных последовательностей допустим в смысле § 4; в этом случае условия предложения 4.1 описывают некоторые морфизмы α из $\mathcal{A}$ как допустимые (называемые *$\square$-допустимыми*). Подробности указаны в следующем предложении:

Предложение 5.1. *Морфизм $\alpha\colon A \to B$, обладающий стандартным разложением $\alpha = \lambda\sigma$, $\square$-допустим в относительной абелевой категории $\square$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:*

(i) *$\lambda_\square$ имеет левый обратный и $\sigma_\square$ имеет правый обратный в $\mathcal{M}$;*

(ii) *$(\mathrm{im}\,\alpha)_\square$ и $(\ker\alpha)_\square$ имеют левые обратные в $\mathcal{M}$;*

(iii) *существует такой морфизм* $u: B \dashrightarrow A$ *в* $\mathcal{M}$, *что* $\alpha_\square u \alpha_\square = \alpha_\square$;

(iv) *существует такой морфизм* $v: B \dashrightarrow A$ *в* $\mathcal{M}$, *что одновременно выполнены равенства*

$$\alpha_\square v \alpha_\square = \alpha_\square, \quad v \alpha_\square v = v.$$

Условие (ii) можно прочесть так: образ α является $\mathcal{M}$-прямым слагаемым для $B_\square$, а ядро α есть $\mathcal{M}$-прямое слагаемое для $A_\square$, или двойственно.

Доказательство. Эквивалентность условий (i), (ii) и допустимость α вытекают непосредственно из предложения 4.1. Если $t\lambda = 1$ и $\sigma k = 1$, как показано в схеме

$$A \underset{k}{\overset{\sigma}{\underset{\dashleftarrow}{\longrightarrow}}} \bullet \underset{t}{\overset{\lambda}{\underset{\dashleftarrow}{\longrightarrow}}} B, \qquad \alpha = \lambda\sigma,$$

то для $v = kt : B \dashrightarrow A$ имеем $\alpha v \alpha = \lambda\sigma k t \lambda\sigma = \lambda\sigma = \alpha$ и $v\alpha v = kt\lambda\sigma kt = kt = v$; этим доказано, что (i) $\Rightarrow$ (iv). Импликация (iv) $\Rightarrow$ (iii) тривиальна. Наконец, для установления импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) предположим, что $\alpha u \alpha = \alpha$, и положим $\alpha = \lambda\sigma$. Тогда из равенства $\lambda\sigma u \lambda\sigma = \lambda\sigma$ следует, что $\sigma u \lambda = 1$, так как λ — мономорфизм (в $\mathcal{M}$!), а σ — эпиморфизм, т. е. λ имеет в $\mathcal{M}$ левый обратный σu, а σ — правый обратный $u\lambda$.

Если X является $\mathcal{A}$-комплексом в смысле § 3 (с объектами X_n и морфизмами ∂_n из $\mathcal{A}$), то $\square X$ будет $\mathcal{M}$-комплексом; поскольку функтор $\square$ точен, отсюда следует, что $\square [H_n(X)] \cong H_n(\square X)$.

Теорема 5.2. *Если X является $\mathcal{A}$-комплексом (не обязательно положительным), то комплекс $\square X$ тогда и только тогда имеет стягивающую гомотопию s, такую, что $\partial s + s\partial = 1$ и каждый морфизм $s_n : X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ принадлежит $\mathcal{M}$, когда все объекты $H_n(X)$ тривиальны и все граничные морфизмы ∂ допустимы. Если эти условия выполнены, то s можно выбрать так, что $s^2 = 0$.*

Доказательство. Если гомотопия s существует, то мы знаем, что все объекты $\square H_n(X) \cong H_n(\square X) = 0$. Но функтор $\square$ полон, так что $H_n(X) = 0$. Более того, $\partial = \partial s \partial + s\partial\partial = \partial s \partial$, так что каждый морфизм ∂ допустим в силу условия (iii) предыдущего предложения.

Обратно, предположим, что последовательность $\cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots$ точна и все морфизмы ∂ допустимы. Возьмем для каждого ∂_n стандартное разложение $\partial = \lambda\sigma$. Тогда комплекс X разлагается в произведение $\square$-расщепляющихся коротких точных последовательностей $D_n \rightarrowtail X_n \twoheadrightarrow D_{n-1}$, а каждый объект X_n становится $\mathcal{M}$-прямой суммой относительно морфизмов $t = t_n$, $k = k_n$, как показано в схеме

$$X_{n+1} \underset{\sigma}{\overset{k}{\underset{\longrightarrow}{\dashleftarrow}}} D_n \underset{t}{\overset{\lambda}{\underset{\dashleftarrow}{\longrightarrow}}} X_n \underset{\sigma}{\overset{k}{\underset{\longleftarrow}{\dashrightarrow}}} D_{n-1} \underset{t}{\overset{\lambda}{\underset{\dashleftarrow}{\longrightarrow}}} X_{n-1}$$

с обычными равенствами в $\mathcal{M}$ для прямой суммы:

$$1_{X_n} = \lambda t + k\sigma, \quad t\lambda = 1, \quad \sigma k = 1, \quad tk = 0, \quad \sigma\lambda = 0.$$

Теперь определим морфизмы $s_n : X_n \dashrightarrow X_{n+1}$, положив $s_n = kt$, так что $s^2 = 0$ и

$$\partial s + s\partial = \lambda(\sigma k) t + k(t\lambda)\sigma = \lambda t + k\sigma = 1_{X_n}.$$

Комплекс $\varepsilon: X \to C$ допустим, если $\varepsilon: X_0 \to C$ и все $\partial_n: X_n \to X_{n-1}$ допустимы, и является резольвентой, если $\varepsilon : H_0(X) \cong C$ и $H_n(X) = 0$ при $n > 0$.

Следствие 5.3. *Комплекс $\varepsilon : X \to C$ из $\mathcal{A}$ над C является $\square$-допустимой резольвентой C в том и только в том случае, когда комплекс $\varepsilon_\square : X_\square \dashrightarrow C_\square$ в $\mathcal{M}$ над $C_\square$ имеет стягивающую гомотопию. Если это условие выполнено, то существует такая гомотопия s, что $s^2 = 0$.*

Как обычно, s состоит из морфизмов $s_{-1} : C \dashrightarrow X_0$, $s_n : X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ из $\mathcal{M}$, причем

$$\varepsilon s_{-1} = 1_C, \quad \partial s_0 + s_{-1}\varepsilon = f_{X_0}, \quad \partial s + s\partial = 1_{X_n}, \quad n > 0.$$

Условие $s^2 = 0$ означает, что $s_n s_{n-1} = 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Доказательство очевидно.

Проективный $\square$-допустимый объект P из $\mathcal{A}$ будет называться также *относительно проективным* объектом для $\square$.

Любой проективный объект P в A является a fortiori относительно проективным, но это не означает, что имеется достаточно относительно проективных объектов: если мы представим объект как образ $P \to A$ проективного объекта, то отсюда вовсе не следует, что $P \to A$ допустимый эпиморфизм.

УПРАЖНЕНИЯ

(Первые три упражнения касаются абсолютного случая $\mathcal{A} = \mathcal{M}$.)

1. Комплекс X абелевой категории $\mathcal{A}$ обладает стягивающей гомотопией s тогда и только тогда, когда каждая последовательность $(\operatorname{im} \partial_{n+1}, \operatorname{coim} \partial_n)$: $\bullet \to X_n \to \bullet$ дает представление объекта X_n в виде прямой суммы. Если эти условия выполнены, то существует такая гомотопия s, что $s^2 = 0$.

2. Комплекс X модулей имеет стягивающую гомотопию тогда и только тогда, когда для каждого n модуль n-мерных циклов является прямым слагаемым X_n.

3. Комплекс X (не обязательно положительный) свободных абелевых групп обладает гомоморфизмами $s : X_n \to X_{n+1}$, для которых $\partial s + s\partial = 1$, тогда и только тогда, когда все группы $H_n(X)$ тривиальны.

4. Вывести теорему 5.2 из результата упражнения 1.

§ 6. Относительные резольвенты

Для построения достаточного количества относительных проективных объектов мы выделяем специальный класс относительных абелевых категорий. Под *резольвентной парой* $\mathscr{R}$ категорий будем понимать относительную абелеву категорию $\square : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ вместе

(i) с ковариантным функтором $F : \mathscr{M} \to \mathscr{A}$,

(ii) с таким естественным преобразованием $e : I_{\mathscr{M}} \dashrightarrow \square F$, где $I_{\mathscr{M}}$ — тождественный функтор, что каждый морфизм $u : M \dashrightarrow A_\square$ из $\mathscr{M}$ можно представить в виде $u = \alpha_\square e_M$ для единственного морфизма $\alpha : F(M) \to A$ из $\mathscr{A}$.

Таким образом, каждый объект M определяет объект $FM \in \mathscr{A}$ и морфизм $e_M : M \dashrightarrow \square FM$, причем каждый морфизм u однозначно накрывается морфизмом $FM \dashrightarrow A$, как показано в схеме

$$\begin{tikzcd} FM \arrow[r] & A \\ M \arrow[u, dashed, "e_M"] \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd} ;$$

другими словами, FM есть «относительно свободный» объект в $\mathscr{A}$ по отношению к данному объекту M из $\mathscr{M}$. Накрывающее свойство означает, что формула $e^*\alpha = \alpha_\square e$ определяет естественный изоморфизм

$$e^* : \hom_{\mathscr{A}}(FM, A) \cong \hom_{\mathscr{M}}(M, \square A);$$

последнее свойство означает, что функтор $F : \mathscr{M} \to \mathscr{A}$ является *левым сопряженным* (Кан [1958]) к функтору $\square : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ (см. замечание в конце параграфа).

Обратно, условия (i) и (ii) из определения резольвентной пары можно заменить требованием того, чтобы функтор $\square$ обладал левым сопряженным F. Действительно, это требование означает, что существует естественный изоморфизм

$$\varphi : \hom_{\mathscr{A}}(FM, A) \cong \hom_{\mathscr{M}}(M, \square A)$$

(абелевых групп). Положим в этом изоморфизме $A = FM$; тогда морфизм 1_{FM} из группы, стоящей слева, определяет морфизм $\varphi(1_{FM}) = e_M : M \dashrightarrow \square FM$. То, что отображение $e : I_{\mathscr{M}} \dashrightarrow \square F$

естественно, устанавливается применением φ к диаграмме

$$\hom_{\mathscr{A}}(FM, FM) \xrightarrow{\mu_*} \hom_{\mathscr{A}}(FM, FM') \xleftarrow{\mu^*} \hom_{\mathscr{A}}(FM', FM'),$$

где $\mu : M \to M'$ — некоторый произвольный морфизм. Теперь возьмем произвольный объект A и морфизм $\alpha : FM \to A$. Поскольку преобразование φ естественно, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathscr{A}}(FM, FM) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \hom_{\mathscr{M}}(M, \square FM) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ \hom_{\mathscr{A}}(FM, A) \arrow[r, "\varphi"] & \hom_{\mathscr{M}}(M, \square A) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Возьмем морфизм 1_{FM} из группы, стоящей в верхнем левом углу; левым вертикальным отображением он переводится в α, а верхним отображением — в e_M; коммутативность диаграммы показывает, что $\varphi\alpha = \alpha_\square e_M$. Поскольку φ — изоморфизм, то тем самым доказано, что каждый морфизм $u : M \dashrightarrow \square A$ из группы, стоящей в правом нижнем углу, имеет вид $u = \alpha_\square e_M$, причем морфизм α единствен, что и требуется в условии (ii).

Например, два кольца $R \supset S$ порождают резольвентную пару, обозначаемую $\mathscr{R}(R, S)$ или просто (R, S): в качестве $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$ берутся категории R- и S-модулей соответственно, $\square$ — обычный «пренебрегающий» функтор и

$$F(M) = R \otimes_S M, \quad e_M(m) = 1 \otimes m \in F(M).$$

Аналогично для любой $\mathbf{K}$-алгебры Λ существует резольвентная пара с категорией левых Λ-модулей в качестве $\mathscr{A}$ и категорией $\mathbf{K}$-модулей в качестве $\mathscr{M}$, $F(M) = \Lambda \otimes_{\mathbf{K}} M$ (предложение VI.8.2). Другие примеры резольвентных пар указаны в упражнении 2.

Теорема 6.1. *В резольвентной паре категорий каждый объект $F(M)$ относительно проективен в $\mathscr{A}$. Для каждого объекта A разложение $1_A = \alpha e_{A_\square}$ определяет $\square$-допустимый эпиморфизм $\alpha : F(A_\square) \to A$. Следовательно, существует достаточно много относительных проективных объектов.*

Доказательство того что объект $F(M)$ относительно проективен, состоит в повторении знакомого доказательства (лемма I.5.4) проективности каждого свободного модуля.

Действительно, пусть $\gamma : F(M) \to C$ является морфизмом, а $\sigma : B \to C$ допустимым эпиморфизмом из $\mathscr{A}$, так что $\sigma_\square$ имеет правый обратный k. Построим схему

$$k\gamma_{\square}e_M = k\gamma e_M \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "e_M"] \arrow[d] & FM \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, shift left, dashed, "\sigma"] & C \arrow[l, shift left, dashed, "k"] \end{tikzcd}, \qquad \sigma_{\square}k = 1.$$

Произведение $k\gamma e_M$ по условию однозначно представимо в виде $k\gamma e_M = \beta e_M$ для некоторого $\beta\colon FM \to B$ из $\mathscr{A}$. Следовательно, $\sigma\beta e_M = \gamma e_M$, но морфизм γe_M однозначно представим в виде произведения с правым множителем e_M, поэтому $\sigma\beta = \gamma$. Это означает, что объект FM относительно проективен.

Обычная теорема сравнения отображает проективный комплекс в резольвенту. Сравнение относительно свободного комплекса с допустимой резольвентой может быть проведено каноническим способом. *Относительно свободный комплекс* $\varepsilon_X : X \to A$ над A в категории $\mathscr{A}$ — это комплекс, у которого каждый объект X_n имеет вид $F(M_n)$ для некоторого M_n из $\mathscr{M}$; мы будем писать e_n вместо $e_{M_n} : M_n \dashrightarrow X_n$. Допустимая резольвента $\varepsilon_Y : Y \to B$ имеет $\mathscr{M}$-стягивающую гомотопию s, причем $s^2 = 0$, как показано в следствии 5.3 (в частности, $s_{-1} : B \dashrightarrow Y_0$).

Теорема 6.2. *Пусть $\varepsilon_X : X \to A$ есть относительно свободный комплекс над A в $\mathscr{A}$ и $\varepsilon_Y : Y \to B$ — допустимая резольвента. Каждый морфизм $\alpha : A \to B$ из $\mathscr{A}$ накрывается таким единственным цепным преобразованием $\mathscr{A}$-комплексов $\varphi\colon X \to Y$, что каждый морфизм $\varphi_n e_n : M_n \dashrightarrow Y_n$ «проходит» через s_{n-1}. Это преобразование φ определяется рекурсивными формулами*

$$\varphi_0 e_0 = s_{-1}\alpha\varepsilon_X e_0, \qquad \varphi_{n+1}s_{n+1} = s_n\varphi_n\partial e_{n+1}.$$

Мы назовем φ *каноническим* сравнением для данного представления $X_n = F(M_n)$ и данной гомотопии s в Y. В случае когда $\mathscr{M}$ — категория модулей, условие, что каждый морфизм $\varphi_n e_n$ «проходит» через s_{n-1}, можно переписать в виде

$$\varphi_0 e_0 M_0 \subset s_{-1}B, \qquad \varphi_{n+1}e_{n+1}M_{n+1} \subset s_n Y_n. \tag{6.1}$$

Это же мы будем записывать более коротко как $\varphi e M \subset sY$.

Доказательство. Построим морфизмы $\varphi_n\colon X_n \to Y_n$, удовлетворяющие соотношениям $\varepsilon_Y\varphi_0 = \alpha\varepsilon_X$, $\partial\varphi_{n+1} = \varphi_n\partial$, и покажем их единственность индукцией по n. Если $\varphi_0 e_0$ проходит через s_{-1}, то из $s^2 = 0$ следует $s_0\varphi_0 e_0 = 0$ и

$$\varphi_0 e_0 = 1\varphi_0 e_0 = (\partial s_0 + s_{-1}\varepsilon_Y)\,\varphi_0 e_0 = s_{-1}\varepsilon_Y\varphi_0 e_0 = s_{-1}\alpha\varepsilon_X e_0.$$

В силу накрывающего свойства существует единственный такой морфизм φ_0; этот морфизм удовлетворяет равенству $\varepsilon_Y\varphi_0 = \alpha\varepsilon_X$.

Пусть уже построены однозначно определенные морфизмы $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$. Для каждого морфизма $\varphi_n e_n$, который «проходит» через s_{n-1}, $s_n\varphi_n e_n = 0$; значит,

$$\varphi_n e_n = 1\varphi_n e_n = (\partial s + s\partial)\,\varphi_n e_n = s\partial\varphi_n e_n = s\varphi_{n-1}\partial e_n.$$

Это соотношение однозначно определяет φ_n, причем выполняется равенство $\partial\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial$. Доказательство закончено.

Теперь каждый объект C из $\mathscr{A}$ получает каноническую $\square$-расщепляющуюся резольвенту. Обозначим объект $F\square C \in \mathscr{A}$ как $\widetilde{F}C$, и пусть $\widetilde{F}^n$ обозначает n-кратную итерацию $\widetilde{F}$; построим объекты

$$\beta_n(C) = \beta_n(\mathscr{R}, C) = \widetilde{F}^n\widetilde{F}C, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

из $\mathscr{A}$. Определим морфизмы $s \in \mathscr{M}$ между соответствующими объектами

$$\square C \overset{s_{-1}}{\dashrightarrow} \square\beta_0 C \overset{s_0}{\dashrightarrow} \square\beta_1 C \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow \square\beta_n C \overset{s_n}{\dashrightarrow} \square\beta_{n+1}C \dashrightarrow \ldots, \tag{6.2}$$

положив $s_{-1} = e(\square C)$ и $s_n = e(\square\beta_n C)$.

Теорема 6.3. *Существуют однозначно определенные морфизмы*

$$\varepsilon : \beta_0(C) \to C, \quad \partial_n : \beta_n(C) \to \beta_{n-1}(C), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

из $\mathscr{A}$, которые превращают $\beta(\mathscr{R}, C) = \{\beta_n(\mathscr{R}, C)\}$ в относительно свободную допустимую резольвенту объекта C со стягивающей гомотопией s из $\mathscr{M}$. Эта резольвента вместе со стягивающей гомотопией является ковариантным функтором аргумента C.

При этом мы не утверждаем, что $s^2 = 0$. Обычно это не так.

Доказательство. Нашей задачей является построение морфизмов из $\mathscr{A}$, указанных в следующей схеме

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift right, dashed, "s_{-1}"'] & \beta_0 C \arrow[l, shift right, "\varepsilon"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_0"'] & \beta_1 C \arrow[l, shift right, "\partial_1"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_1"'] & \beta_2 \arrow[l, shift right, "\partial_2"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_2"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "\partial_3"'] \end{tikzcd}$$

сплошными стрелками и превращающих s в стягивающую гомотопию. По свойству морфизма e, 1_C можно представить в виде $1_C = \varepsilon e_C$; это равенство однозначно определяет ε и показывает, что ε — допустимый морфизм. Граничные морфизмы теперь определяются рекурсивно так, чтобы морфизмами s определялась стягивающая гомотопия; при известном ε морфизм $1 - s_{-1}\varepsilon$ однозначно разлагается в произведение $\partial_1 s_0 = 1 - s_{-1}\varepsilon$ для некоторого $\partial_1 : \beta_1 \to \beta_0$, и аналогично соотношение $\partial_{n+1}s_n = 1 - s_{n-1}\partial_n : \beta_n \dashrightarrow \beta_n$ определяет ∂_{n+1} при заданном ∂_n. Используя эти равенства, получаем

$$\partial_n\partial_{n+1}s_n = \partial_n - \partial_n s_{n-1}\partial_n = \partial_n - (1 - s_{n-2}\partial_{n-1})\,\partial_n = s_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n,$$

так что, используя единственность разложения и проводя индукцию, имеем $\varepsilon\partial = 0$ и $\partial^2 = 0$. Более того, $\partial_{n+1}s_n\partial_{n+1} = \partial_{n+1}$, так что морфизм ∂_{n+1} допустим.

Эта резольвента $\beta(\mathscr{R}, C)$, очевидно, имеет функторный характер; она называется (ненормализованной) *B-резольвентой*. Конкретные примеры даны в § 8.

«Относительный» бифунктор ext можно теперь определить формулой

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{R}}(C, A) = H^n(\hom_{\mathscr{A}}(\beta(\mathscr{R}, C), A)). \tag{6.3}$$

Теорема сравнения показывает, что мы с тем же правом могли использовать любую $\square$-расщепляющуюся относительно проективную резольвенту $\varepsilon: X \to C$ для вычисления $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{R}} = \operatorname{Ext}^n_{\square}$, как показывает изоморфизм

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{R}}(C, A) \cong H^n(\hom_{\mathscr{A}}(X, A)); \tag{6.4}$$

отметим, что в каждой размерности n символ $\hom_{\mathscr{A}}(X_n, A)$ обозначает группу *всех* морфизмов $\xi: X_n \to A \in \mathscr{A}$, а не только допустимых морфизмов. В частности, $\operatorname{Ext}^0_{\mathscr{R}}(C, A) = \hom_{\mathscr{A}}(C, A)$. Замещение C короткой точной последовательностью E приводит к обычной длинной точной последовательности для Ext^n, указанной в теореме III.9.1, при условии, что последовательность E $\square$-расщепляется. Аналогичный результат получается, если A заменить $\square$-расщепляющейся короткой точной последовательностью; в доказательстве используется или точная последовательность резольвент (упражнение III.9.1), или предположение о существовании достаточного количества инъективных объектов. Эти длинные точные последовательности сохраняют смысл в любой относительной абелевой категории без предположения о существовании достаточного числа проективных или инъективных объектов. Доказательство, данное в гл. XII, основано на интерпретации $\operatorname{Ext}^n_{\square}(C, A)$ как классов конгруэнтности n-кратных, $\square$-расщепляющихся точных последовательностей из A в C. В частности, $\operatorname{Ext}^1_{\square}$ в отличие от $\operatorname{Ext}^0_{\square}$ зависит от $\square$.

Замечание о сопряженных функторах. Если $\mathscr{C}$ и $\mathscr{A}$ — категории, то функтор $T: \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ называется *правым сопряженным* функтора $S: \mathscr{A} \to \mathscr{C}$, если существует естественная эквивалентность

$$\hom_{\mathscr{A}}(A, T(C)) \cong \hom_{\mathscr{C}}(S(A), C).$$

Здесь оба выражения являются бифункторами, определенными в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$ и принимающими значения в категории множеств (или, если категории $\mathscr{C}$ и $\mathscr{A}$ аддитивны, в категории абелевых групп). Например, сопряженная ассоциативность

$$\operatorname{Hom}(A \otimes B, C) \cong \operatorname{Hom}(A, \operatorname{Hom}(B, C))$$

утверждает, что при фиксированном B функтор $T(C) = \operatorname{Hom}(B, C)$ является правым сопряженным для $S(A) = A \otimes B$. Имеется ряд других примеров (Кан [1958]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если относительная абелева категория $\square$ является резольвентной парой категорий для двух функторов F и F', то существует единственный естественный изоморфизм $\eta: F \to F'$, для которого $\eta e = e'$.

2. Построить резольвентные пары категорий в следующих случаях:
a) $R \supset S$ — градуированные кольца; $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$ определены выше;
b) $\rho: R' \to R$ является произвольным кольцевым гомоморфизмом; $\mathscr{A}$=левые R-модули, $\mathscr{M}$=левые R'-модули, $\square A = {}_\rho A$ есть превращение R-модуля A в R'-модуль путем отступления вдоль ρ;
c) Λ, Σ — две К-алгебры, $\mathscr{A} = \Lambda$-Σ-бимодули, $\mathscr{M}$ = К-модули.

3. Показать, что в случае b) упражнения 2 допустимые точные последовательности и относительный функтор Ext совпадают с функтором Ext для резольвентной пары $\mathscr{R} = (R, S)$, где $S = \rho R'$.

§ 7. Категорная *B*-резольвента

Нормализованная B-резольвента $\varepsilon: B(Z(\Pi)) \to Z$ для группового кольца $Z(\Pi)$, как показано в гл. IV, дает стандартную Z-расщепляющуюся резольвенту тривиального Π-модуля Z. Для каждого Π-модуля A когомология A определяется с помощью B-резольвенты как $H^n(\operatorname{Hom}_{\Pi}(B(Z(\Pi)), A))$. Следовательно,

$$H^n(\Pi, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{(Z(\Pi), Z)}(Z, A).$$

Другими словами, когомология группы дает одновременно пример абсолютного и относительного функторов Ext. Та же самая (нормализованная) резольвента будет использована в следующей главе во многих других случаях. Она может быть определена для любой резольвентной пары

$$\mathscr{R}; \quad \square: \mathscr{A} \to \mathscr{M}, \quad F: \mathscr{M} \to \mathscr{A}, \quad e_M: M \dashrightarrow \square FM$$

категорий. Для каждого объекта $M \in \mathscr{M}$ выберем морфизм $p_M \in \operatorname{coker} e_M$ и объект $\bar F(M) = \operatorname{Coker} e_M$. Тогда последовательность

$$M \overset{e_M}{\dashrightarrow} \square FM \overset{p_M}{\dashrightarrow} \bar F M \dashrightarrow 0 \tag{7.1}$$

точна в M, $\bar F: \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ является ковариантным функтором, а $p: \square F \to \bar F$ — естественным преобразованием. Применив функтор $\square F$ к $\overline{F}M$, построим диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "e_M"] & \square FM \arrow[r, dashed, "p_M"] \arrow[dr, dashed, "s_M"'] & \overline{F}M \arrow[r, dashed] \arrow[d, "e_{\overline{F}M}=e'"] & 0 \\ & & \square F\overline{F}M; & \end{tikzcd} \tag{7.2}$$

произведение $s_M = e'p$ есть естественное преобразование $\square F \dashrightarrow \square F\overline{F}$. Характеристическое свойство этого преобразования дается следующей леммой:

Л е м м а 7.1. *Морфизмы $e = e_M$ и $s = s_M$ индуцируют для каждого объекта A точную слева последовательность абелевых групп*

$$0 \longrightarrow \hom_{\mathscr{A}}(F\overline{F}M, A) \xrightarrow{s^*} \hom_{\mathscr{M}}(\square FM, \square A) \xrightarrow{e^*} \hom_{\mathscr{M}}(M, \square A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждый морфизм $\alpha\colon F\overline{F}M \to A$ из $\mathscr{A}$ определяет морфизм $\alpha_\square : \square F\overline{F}M \dashrightarrow \square A$, и $s^*\alpha$ равняется произведению $\alpha_\square s : \square FM \dashrightarrow \square A$, являющемуся морфизмом категории $\mathscr{M}$. Очевидно, что $e^*s^*\alpha = \alpha_\square s$: $e = \alpha_\square 0 = 0$. Если $0 = \alpha_\square s = \alpha_\square e'p$, то $\alpha_\square e' = 0$, так как p — эпиморфизм. Но 0 единственным способом «проходит» через e', так что $\alpha = 0$. Пусть теперь для некоторого $v : \square FM \dashrightarrow \square A$ будет $e^*v = 0$; построим коммутативную диаграмму следующим образом:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "e"] & \square FM \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[d, dashed, "v"] & \overline{F}M \arrow[r, dashed, "e'"] \arrow[d, dashed, "u"] & \square F\overline{F}M \arrow[d, dashed, "\alpha_\square"] \\ & \square A = & \square A = & \square A. \end{tikzcd}$$

Поскольку $ve = 0$ и $p = \operatorname{coker} e_M$, то v проходит через $p : v = up$. По определению морфизма e', u можно представить в виде $u = \alpha_\square e'$ для некоторого α. Поэтому $v = \alpha_\square e'p = \alpha_\square s$, что и доказывает точность последовательности.

Каждый объект C из $\mathscr{A}$ порождает последовательность объектов $M_n = \overline{F}^n \square C \in \mathscr{M}$. Здесь B-резольвента состоит из ассоциированных относительно свободных объектов

$$B_n(C) = B_n(\mathscr{R}, C) = F\overline{F}^n \square C, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.3}$$

категории $\mathscr{A}$. Определим морфизмы между соответствующими образами этих объектов в категории $\mathscr{M}$:

$$\square C \xrightarrow{s_{-1}} \square B_0C \xrightarrow{s_0} \square B_1C \xrightarrow{s_1} \square B_2C \dashrightarrow \ldots, \tag{7.4}$$

положив $s_{-1} = e(\square C)$ и

$$s_n = s(M_n) : \square FM_n \dashrightarrow \square F\overline{F}M_n = \square B_{n+1}C. \tag{7.5}$$

Из этих определений немедленно вытекает, что $s^2 = 0$.

Т е о р е м а 7.2. *Существуют однозначно определенные морфизмы*

$$\varepsilon : B_0(C) \to C, \quad \partial_n : B_n(C) \to B_{n-1}(C), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

категории $\mathscr{A}$, которые превращают $B(\mathscr{R}, C) = \{B_n(\mathscr{R}, C)\}$ в $\mathscr{A}$-комплекс и относительно свободную допустимую резольвенту объекта C со стягивающей гомотопией s, квадрат которой равен нулю. Эта резольвента вместе с ее стягивающей гомотопией является ковариантным функтором аргумента C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам требуется вставить в следующую схему

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift right, dashed, "s_{-1}"'] & B_0C \arrow[l, shift right, "\varepsilon"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_0"'] & B_1C \arrow[l, shift right, "\partial_1"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_1"'] & B_2C \arrow[l, shift right, "\partial_2"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_2"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "\partial_3"'] \end{tikzcd} \tag{7.6}$$

такие морфизмы (категории $\mathscr{A}$), указанные сплошными стрелками чтобы выполнялись условия

$$\varepsilon s_{-1} = 1, \quad \partial_1 s_0 = 1 - s_{-1}\varepsilon, \quad \partial_{n+1}s_n = 1 - s_{n-1}\partial_n, \quad n > 0 \tag{7.7}$$

для стягивающей гомотопии. Морфизм $1 : C \to C$ можно представить в виде $1 = \varepsilon s_{-1}$, где $s_{-1} = e_{\square C}$, откуда появляется ε. Морфизмы ∂_n теперь строятся рекурсивно. Если уже известны морфизмы $\partial_1, \ldots, \partial_n$, удовлетворяющие (7.7), то

$$(1 - s_{n-1}\partial_n) s_{n-1} = s_{n-1} - s_{n-1}(1 - s_{n-2}\partial_{n-1}) = 0 + s_{n-1}s_{n-2}\partial_{n-1} = 0;$$

поскольку $s_{n-1} = ep$ и p — эпиморфизмы, $(1 - s_{n-1}\partial_n)e = 0$. По лемме 7.1 морфизм $1 - s_{n-1}\partial_n$ разлагается в произведение $(1 - s_{n-1}\partial_n) = \alpha s_n$; это равенство определяет морфизм $\partial_{n+1} = \alpha$, удовлетворяющий условиям (7.7). В силу той же леммы 7.1 эти морфизмы ε и ∂_n однозначно определены. Более того, из (7.7) следует, что

$$\partial_n\partial_{n+1}s_n = \partial_n - \partial_n s_{n-1}\partial_n = \partial_n - \partial_n - s_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n = -s_{n-2}\partial_{n-1}\partial_n;$$

индукция, основанная на лемме 7.1, показывает, что $\varepsilon\partial_1 = 0$ и $\partial^2 = 0$. Значит, $B(\mathscr{R}, C)$ — комплекс над C, чем и заканчивается доказательство.

Мы назовем *B-резольвентой* объекта C комплекс $B(\mathscr{R}, C)$. По теореме сравнения она цепно эквивалентна построенной ранее «ненормализованной» B-резольвенте $\beta(\mathscr{R}, C)$ (см. упражнение 3).

Чтобы показать, что это описание B-резольвенты согласуется с предшествующим описанием для группы П, возьмем в качестве $\mathscr{A}$ категорию левых П-модулей, в качестве $\mathscr{M}$ — категорию абелевых групп и положим $F(M) = Z(\Pi) \otimes M$ и $e_M(m) = 1 \otimes m$ для каждого $m \in M$. Этим определяется резольвентная пара категорий. Так как последовательность свободных абелевых групп $Z \rightarrowtail Z(\Pi) \twoheadrightarrow Z(\Pi)/Z$ точна, то точна и последовательность их тензорных произведений с M:

$$0 \to M = Z \otimes M \to F(M) = Z(\Pi) \otimes M \to [Z(\Pi)/Z] \otimes M \to 0.$$

Следовательно, $\bar{F}(M) \cong [Z(\Pi)/Z] \otimes M$. Возьмем в качестве C тривиальный П-модуль Z. Тогда

$$\bar{F}^n Z = [Z(\Pi)/Z] \otimes \ldots \otimes [Z(\Pi)/Z], \; n \text{ множителей}.$$

Но $Z(\Pi)/Z$ есть свободная абелева группа, образующими которой служат все элементы $x \neq 1$ группы П. Значит, $\bar{F}^n(Z)$ можно отождествить со свободной абелевой группой, порожденной всеми символами $[x_1 | \ldots | x_n]$, где ни один элемент x_i из П не равен 1. Тогда $B_n(\mathscr{R}, Z) = Z(\Pi) \otimes \bar{F}^n(Z)$ есть свободная абелева группа с образующими $x[x_1 | \ldots | x_n]$, где $x \in \Pi$, а морфизм $s = ep : B_n \dashrightarrow B_{n+1}$, определенный выше, превращается в отображение

$$s(x[x_1 | \ldots | x_n]) = [x | x_1 | \ldots | x_n],$$

причем элемент $[x | x_1 | \ldots | x_n]$ равен нулю при $x = 1$. Это отображение в точности совпадает со стягивающей гомотопией s, использованной для B-резольвенты $B(Z(\Pi))$ в (IV.5.2). Граничные морфизмы однозначно определяются гомотопией s (как в гл. IV, так и здесь) и поэтому должны совпадать. Короче говоря, мы доказали, что для этой резольвентной пары категорий

$$B(\mathscr{R}, Z) = B(Z(\Pi)).$$

В следующей главе будут указаны точные формулы для других случаев.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что длинная последовательность (7.4) точна в $\mathscr{M}$.

2. Показать, что каноническое сравнение $\beta(\mathscr{R}, C) \to B(\mathscr{R}, C)$ является эпиморфизмом.

3. Показать, что в случае групп β есть ненормализованная B-резольвента.

В следующих трех упражнениях рассматривается относительный функтор ext для колец $Z(\Pi)$ и Z.

4. Пусть A, B, C — левые П-модули. Превратить группы $B \otimes_Z C$ и $\mathrm{Hom}_Z(C, A)$ в левые П-модули с операторами $x(b \otimes c) = xb \otimes xc$ и $(x\alpha)c = x[\alpha(x^{-1}c)]$, $\alpha: C \to A$ соответственно и установить естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_\Pi(B, \mathrm{Hom}_Z(C, A)) \cong \mathrm{Hom}_\Pi(B \otimes_Z C, A).$$

5. Показать, что если A — относительно инъективный или C — относительно проективный объекты, то модуль $\mathrm{Hom}_Z(C, A)$ с операторами, определенными в упражнении 4, относительно инъективен.

6. Используя аксиомы для относительного функтора ext, установить естественный изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^n_{Z(\Pi), Z}(C, A) \cong \mathrm{Ext}^n_{Z(\Pi), Z}(Z, \mathrm{Hom}_Z(C, A)).$$

Вместе с этим результатом следующие упражнения, предложенные автору Шмидом, дают доказательство теоремы редукции для $\cup$-умножения, как это отмечалось в VIII.9 (ср. Шмид [1963]).

7. Из представления $\Pi = F/R$ группы П как факторгруппы свободной группы F получить групповое расширение $E: R_0 \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow \Pi$, где $[R, R]$ — коммутант группы R, $R_0 = R/[R,R]$ и $B' = F/[R,R]$.

8. Характеристический класс χ расширения E, описанный в IV.6, является двукратным Z-расщепляющимся расширением R_0 с помощью Z. Показать, что промежуточный модуль M из χ свободен; именно пусть F — свободная группа с образующими g, S — свободный П-модуль с соответствующими образующими g'; показать, что отображение $g' \to [\mathrm{cls}\, g] \in M$ является изоморфизмом $S \cong M$. (Указание: использовать лемму IV.7.2 для построения обратного отображения.)

9. Пусть A является П-модулем. Показать, что итерированный связывающий гомоморфизм для X порождает изоморфизм $\mathrm{Ext}^n(R_0 A) \cong \mathrm{Ext}^{n+2}(Z, A)$ для относительного функтора ext, $n > 0$, и, следовательно, в силу упражнения 6, изоморфизмы

$$H^{n+2}(\Pi, A) \cong H^n(\Pi, \mathrm{Hom}_Z(R_0, A)), \; n > 0,$$

$$H^2(\Pi, A) \cong \mathrm{Coker}\,[\mathrm{Hom}_\Pi(M, A) \to \mathrm{Hom}_\Pi(R_0, A)].$$

10. При $n > 0$ для правого П-модуля G получить «дуальную» теорему редукции

$$H_{n+2}(\Pi, G) \cong H_n(\Pi, G \otimes_Z R_0).$$

§ 8. Относительные периодические произведения

Пусть S — подкольцо кольца R с той же единицей. Тогда возникает резольвентная пара $\mathscr{R} = (R, S)$ категорий, в которой $\mathscr{A}$ — категория левых R-модулей, $\mathscr{M}$ — категория левых S-модулей, $\square(A)$ — функтор, сохраняющий только S-модульную структуру $F(M) = R \otimes_S M$ и $e(m) = 1 \otimes m$. В этом случае $\square$-расщепляющаяся короткая точная последовательность — это точная последовательность R-модулей, расщепляющаяся, если ее рассматривать как последовательность S-модулей; назовем такую последовательность *S-расщепляющейся*. Соответствующие допустимые гомоморфизмы назовем *(R, S)-допустимыми*, а относительно проективные объекты — *(R, S)-проективными*.

Определим комплекс R-модулей $\beta(R)$ над R,

$$R \xleftarrow{\varepsilon} \beta_0(R) \leftarrow \beta_1(R) \leftarrow \beta_2(R) \leftarrow \cdots,$$

положив $\beta_n(R) = R \otimes R^n \otimes R = R^{n+2}$, здесь $n+2$ множителя, $\varepsilon(r_0 \otimes r_1) = r_0 r_1$, где $\otimes$ есть сокращение для $\otimes_S$, и

$$\partial(r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i r_0 \otimes \ldots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_{n+1}. \quad (8.1)$$

Теорема 8.1. *Для колец $R \supset S$ комплекс $\varepsilon: \beta(R) \to R$ является комплексом R-бимодулей над R со стягивающей гомотопией $s: R^{n+2} \to R^{n+3}$, определенной для $n \geqslant 1$ формулой*

$$s(r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}) = 1 \otimes r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}. \quad (8.2)$$

Эта гомотопия есть гомоморфизм S-R-бимодулей, причем S действует слева, а R справа.

Доказательство. Прежде всего $\varepsilon s r_0 = \varepsilon(1 \otimes r_0) = r_0$, так что $\varepsilon s = 1$. Пусть $u = r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}$ и $n \geqslant 0$. Первый член выражения $\partial s u$ равен u, остальные члены дают $-s\partial u$, следовательно $\partial s + s\partial = 1$, что и требовалось. Из определения следует, что $\varepsilon\partial = 0$, $\partial\partial = 0$. По симметрии существует также стягивающая гомотопия

$$t(r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}) = r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1} \otimes 1,$$

которая есть R-S -бимодульный гомоморфизм.

Следствие 8.2. *Для левого R-модуля C, $\beta(R) \otimes_R C$ есть B-резольвента $\beta(C)$ для резольвентной пары (R, S). Симметрично для каждого правого R-модуля G, $G \otimes_R \beta(R)$ вместе со стягивающей гомотопией t есть (правая) B-резольвента $\beta(G)$.*

Доказательство. Поскольку $R \otimes_R C \cong C$, можно построить $\beta(R) \otimes_R C$, просто заменив последний аргумент r_{n+1} в (8.1) и (8.2) элементом $c \in C$. Тогда $\beta_n(R) \otimes_R C = F^n F(C)$, стягивающая гомотопия s из (8.2) совпадает с гомотопией (6.2) и ∂ — единственный граничный гомоморфизм со стягивающей гомотопией s из теоремы 6.3. В частности, $\beta(R)$ является резольвентой (левой или правой) R-модуля R.

Заметим, что граничный гомоморфизм (8.1) в $\beta(R)$ является альтернированной суммой граничных операторов $d_i: \beta_n \to \beta_{n-1}$, определенных формулами

$$d_i(r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}) = r_0 \otimes \ldots \otimes r_{i-1} \otimes r_i r_{i+1} \otimes r_{i+2} \otimes \ldots \otimes r_{n+1}, \quad (8.3)$$

$i = 0, 1, \ldots, n$. Соответствующие операторы вырождения $s_i: \beta_n \to \beta_{n+1}$ равны

$$s_i(r_0 \otimes \ldots \otimes r_{n+1}) = r_0 \otimes \ldots \otimes r_i \otimes 1 \otimes r_{i+1} \otimes \ldots \otimes r_{n+1}. \quad (8.4)$$

При этом выполняются обычные соотношения между d_i и s_j, так что $\beta(R)$ есть симплициальный R-бимодуль в смысле VIII.5. Читатель может показать, что симплициальная нормализация $\beta(R)$ порождает нормализованную B-резольвенту $B(R)$.

Возьмем R-модули G_R и ${}_RC$. Абсолютные периодические произведения $\mathrm{Tor}_n^R(G, C)$ вычисляются с помощью проективной резольвенты $\varepsilon: X \to C$ как $H_n(G \otimes_R X)$. В нашем относительном случае $\beta(R) \otimes_R C$ дает каноническую и функторную резольвенту, так что мы определяем *n-е относительное периодическое произведение* как

$$\mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, C) = H_n(G \otimes {}_R\beta(R) \otimes {}_RC). \quad (8.5)$$

Этим задается ковариантный бифунктор от аргументов G и C, на самом деле симметричный по G и C. Поскольку $G \otimes_R R = G$ и $R \otimes_R C = C$, группа n-мерных цепей комплекса $G \otimes_R \beta(R) \otimes_R C$ равна $G \otimes_S R^n \otimes_S C$. Граничная формула получается из (8.1) заменой r_0 на $g \in G$ и r_{n+1} на $c \in C$; комплекс можно рассматривать как симплициальную абелеву группу.

Если $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ есть S-расщепляющаяся короткая точная последовательность левых R-модулей, то тензорные произведения (над S) ее членов с $G \otimes_S R^n$ образуют S-расщепляющуюся и, значит, точную последовательность. Поэтому мы получаем точную последовательность комплексов

$$G \otimes {}_R\beta(R) \otimes {}_RA \rightarrowtail G \otimes {}_R\beta(R) \otimes {}_RB \twoheadrightarrow G \otimes {}_R\beta(R) \otimes {}_RC.$$

Результирующие связывающие гомоморфизмы

$$E_n: \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, C) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{(R,S)}(G, A), \quad n > 0,$$

естественны по G и E и обеспечивают точность соответствующей длинной последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, A) \to \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, B) \to$$
$$\to \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, C) \xrightarrow{E_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^{(R,S)}(G, A) \to \cdots \quad (8.6)$$

точно так же, как и для абсолютного периодического произведения, с тем изменением, что последовательность E должна быть S-расщепляющейся. Если $E': G \rightarrowtail K \twoheadrightarrow L$ является S-расщепляющейся короткой точной последовательностью правых R-модулей, то, повторяя те же рассуждения (с перестановкой слов «левый» и «правый»), получим естественные связывающие гомоморфизмы

$$E'_n: \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(L, C) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^{(R,S)}(G, C), \quad n > 0,$$

и соответствующую длинную точную последовательность для первого аргумента.

Теорема 8.3. *Для колец* $R \supset S$ *и модулей* G_R, ${}_RC$, $\mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, C)$ — *ковариантный бифунктор аргументов* G *и* C *для каждого* n, *причем*

$$\mathrm{Tor}_0^{(R,S)}(G, C) \cong G \otimes {}_RC \text{ (естественный изоморфизм)}, \quad (8.7)$$

$$\mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(P', C) = 0 = \mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, P), \quad n > 0, \quad (8.8)$$

если P' *и* P *суть* (R, S)*-проективные правый и левый модули соответственно. Если* E' *и* E *являются* S*-расщепляющимися короткими точными последовательностями правых и левых* R*-модулей соответственно, то соответствующие связывающие гомоморфизмы естественны и порождают длинную точную последовательность* (8.6) *и симметричную ей.*

В частности, эта теорема приводит к характеристике относительных периодических умножений как функторов второго аргумента с помощью свойств (8.7), (8.8) и (8.6), в точности так же, как и в теореме V.8.5; для этой цели мы можем заменить в (8.8) (R, S)-проективные модули (R, S)-свободными модулями.

Мы должны доказать только (8.7) и (8.8). Прежде всего последовательность $\beta_1(R) \to \beta_0(R) \to R \to 0$ точна: поскольку тензорное умножение переводит точные справа последовательности в точные справа последовательности, то точна последовательность

$$G \otimes {}_R\beta_1(R) \otimes {}_RC \to G \otimes {}_R\beta_0(R) \otimes {}_RC \to G \otimes {}_RR \otimes {}_RC \to 0.$$

Ее последний член есть $G \otimes_R C$, что и доказывает (8.7). Для доказательства (8.8) используем следующую лемму:

Лемма 8.4. *Для колец* $R \supset S$, *если* P *есть* (R, S)*-проективный правый* R*-модуль и* $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *есть* S*-расщепляющаяся точная последовательность левых* R*-модулей, то последовательность* $0 \to P \otimes_R A \to P \otimes_R B \to P \otimes_R C \to 0$ *является точной последовательностью абелевых групп.*

Доказательство. Поскольку имеется достаточно много относительно свободных правых модулей $M \otimes_S R$, каждый модуль P является S-расщепляющимся фактормодулем и, значит, R-прямым слагаемым некоторого модуля $M \otimes_S R$. Следовательно, достаточно доказать лемму для модулей вида $P = M \otimes_S R$. В этом случае $P \otimes_R A = M \otimes_S R \otimes_R A = M \otimes_S A$, так что рассматриваемая последовательность изоморфна последовательности $M \otimes_S A \to M \otimes_S B \to M \otimes_S C$, которая S-расщепляется в силу расщепляемости E и поэтому является точной.

Теперь докажем (8.8). Комплекс $\beta(R) \otimes_R C$ над C имеет левую S-модульную стягивающую гомотопию s типа (8.2). Следовательно,

по нашей лемме комплекс $P' \otimes_R (\beta(R) \otimes_R C)$ точен над $P' \otimes_R C$ и имеет нулевые группы гомологий размерностей $n > 0$.

Относительные периодические произведения могут вычисляться также с помощью других резольвент.

Теорема 8.5. *Если* $\varepsilon: Y \to G$ *есть* S*-расщепляющаяся резольвента правого* R*-модуля* G, *состоящая из* (R,S)*-проективных модулей* Y_n, *то существует канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Tor}_n^{(R,S)}(G, C) \cong H_n(Y \otimes {}_RC), \quad (8.9)$$

естественный по аргументу C. *Если* E — *произвольная* S*-расщепляющаяся короткая точная последовательность левых* R*-модулей, то связывающие гомоморфизмы* E_n *из* (8.6) *переходят при изоморфизме* (8.9) *в связывающие гомоморфизмы групп гомологий точной последовательности комплексов* $Y \otimes_R A \rightarrowtail Y \otimes_R B \twoheadrightarrow Y \otimes_R C$. *По симметрии* Tor_n *можно вычислить с помощью* S*-расщепляющейся,* (R, S)*-проективной резольвенты левого* R*-модуля* C.

Доказательство. В силу теоремы сравнения для относительного случая существует единственное с точностью до гомотопии цепное преобразование $\varphi: G \otimes_R \beta(R) \to Y$, которое индуцирует изоморфизм (8.9). Поскольку (R, S)-проективен каждый модуль Y_n, то каждая последовательность $Y_n \otimes_R A \rightarrowtail Y_n \otimes_R B \twoheadrightarrow Y_n \otimes {}_RC$ точна по лемме 8.4. Цепное преобразование φ отображает предыдущую точную последовательность комплексов на эту точную последовательность; следовательно, в силу естественности связывающего гомоморфизма последовательности комплексов получается сформулированный в теореме метод вычисления связывающих гомоморфизмов E_n.

Поскольку (R, S)-проективный объект P' обладает резольвентой $0 \to P' \to P' \to 0$, то эта теорема дает прямое доказательство (8.8). Мы оставляем читателю проверку остальных свойств относительного периодического умножения: аддитивности по каждому аргументу, антикоммутативности E_n и E'_{n-1} $(E'_{n-1}E_n = -E_{n-1}E'_n$, как в теореме V.7.7) и аддитивности E_n в E.

Относительное периодическое умножение можно рассматривать как функтор от пары колец $R \supset S$. Более подробно: рассмотрим объекты $(R, S; G, C, A)$, состоящие из колец $R \supset S$ и модулей G_R, ${}_RC$, ${}_RA$. *Заменой колец* (+ в G и C, — в A) является четверка

$$\chi = (\rho, \zeta, \gamma, \alpha): (R, S; G, C, A) \to (R', S'; G', C', A'), \quad (8.10)$$

где $\rho: R \to R'$ есть кольцевой гомоморфизм, причем $\rho(S) \subset S'$, а

$$\zeta: G \to G'_\rho, \quad \gamma: C \to {}_\rho C', \quad \alpha: {}_\rho A' \to A$$

гомоморфизмы R-модулей (отметим, что направления гомоморфизмов α и γ противоположны). Эти объекты и морфизмы χ вместе с умножением $(\rho, \zeta, \gamma, \alpha)(\rho', \zeta', \gamma', \alpha') = (\rho\rho', \zeta\zeta', \gamma\gamma', \alpha'\alpha)$ составляют категорию *замены колец* $\mathscr{R}^{++-}$; если опустить A и α, то получим «ковариантную» категорию замен колец $\mathscr{R}^{++}$. Каждый морфизм χ индуцирует цепное преобразование

$$\zeta \otimes \rho^n \otimes \gamma : G \otimes_R \beta_n(R) \otimes_R C \to G' \otimes_{R'} \beta_n(R') \otimes_{R'} C'$$

и, значит, по определению (8.5) — отображение

$$\chi_* : \operatorname{Tor}_n^{(R, S)}(G, C) \to \operatorname{Tor}_n^{(R', S')}(G', C'),$$

которое превращает относительное периодическое умножение Tor_n в ковариантный функтор из категории $\mathscr{R}^{++}$ в категорию абелевых групп. Гомоморфизм χ_* можно вычислить также с помощью S-расщепляющихся относительно свободных резольвент $\varepsilon : Y \to G$, $\varepsilon' : Y' \to G'$; действительно, «отступление» превращает $\varepsilon' : Y'_\rho \to G'_\rho$ в отображение комплексов R-модулей с S-модульной расщепляющей гомотопией, так что по теореме сравнения (относительно проективные комплексы и расщепляющиеся резольвенты) гомоморфизм $\zeta : G \to G'_\rho$ накрывается цепным преобразованием $\varphi : Y \to Y'_\rho$. Индуцированное отображение групп гомологий, умноженное на отображение $Y'_\rho \otimes_{R\rho} C'' \to Y'' \otimes_{R'} C'$, определяет гомоморфизм χ_* как произведение отображения

$$H_n(Y \otimes_R C) \xrightarrow{(\varphi\otimes\gamma)_*} H_n(Y'_\rho \otimes_{R_\rho} C') \to H_n(Y' \otimes_{R'} C')$$

и изоморфизмов (8.9).

Мы пишем $\operatorname{Ext}^n_{(R, S)}$ по аналогии с $\operatorname{Tor}_n^{(R, S)}$ для соответствующего относительного функтора ext. Так, по (6.3)

$$\operatorname{Ext}^n_{(R, S)}(C, A) = H^n(\operatorname{Hom}_R(\beta(R) \otimes_R C, A)) \cong$$
$$\cong H^n(\operatorname{Hom}_{R\text{-}R}(\beta(R), \operatorname{Hom}_Z(C, A))),$$

где изоморфизм справа есть сопряженная ассоциативность, а $\operatorname{Hom}_Z(C, A)$ есть R-бимодуль. Этот функтор Ext является контравариантным функтором из категории замен колец $\mathscr{R}^{+-}$ (опустить G и ζ в (8.10)). Если фиксировать R и положить $\rho = 1$, то получается обычное описание $\operatorname{Ext}^n_{(R, S)}(C, A)$ как бифунктора, контравариантного по C и ковариантного по A.

УПРАЖНЕНИЯ

Первые шесть упражнений взяты из работы Хохшильда [1956].

1. Каждый (R, S)-проективный модуль P является R-прямым слагаемым некоторого модуля $R \otimes_S A$.

2. Для каждого модуля $_SM$ модуль $\operatorname{Hom}_S(R, M)$ является (R, S)-относительно инъективным.

3. Доказать, что имеется достаточно (R, S)-инъективных объектов.

4. Если P есть (R, S)-проективный модуль, а $\alpha : A \to B$ такой гомоморфизм R-модулей, что $\operatorname{Hom}_S(P, A) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_S(P, B)$, то $\operatorname{Hom}_R(P, A) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_R(P, B)$.

5. Для того же объекта P и гомоморфизма α правых R-модулей из мономорфизма $A \otimes_S P \rightarrowtail B \otimes_S P$ следует мономорфизм $A \otimes_R P \rightarrowtail B \otimes_R P$.

6. Для S-расщепляющихся (R, S)-проективных резольвент $X \to C$ и $Y \to G$ доказать, что $\operatorname{Tor}_n^{(R, S)}(G, C) \cong H_n(Y \otimes_R X)$.

7. Дать описание элементов $\operatorname{Tor}^{(R, S)}(G, A)$, аналогичное описанию элементов (μ, L, ν), использованному в V.7.

8. Показать на примере, что $\operatorname{Ext}^1_{(R, S)} \neq \operatorname{Ext}^1_R$.

9. Показать, что $\beta(R)$ есть (ненормализованная) B-резольвента для резольвентной пары $\mathscr{R}'$, где $\mathscr{A} = R$-бимодули, $\mathscr{M} = S$-R-бимодули, $F(M) = R \otimes_S M$ и $e(m) = 1 \otimes m$.

10. Для резольвентной пары $\mathscr{R}'$ из упражнения 9 показать, что $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{R}'(R, S)}(C, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{R}'}(R, \operatorname{Hom}_Z(C, A))$, $\operatorname{Tor}_n^{(R, S)}(G, C) \cong \operatorname{Tor}_n(R, C \otimes_Z G)$. Здесь $C \otimes_Z G$—бимодуль с операторами $r(c \otimes g) = rc \otimes g$, $(c \otimes g) r = c \otimes gr$.

§ 9. Прямые произведения колец

Прямое произведение $R = R' \times R''$ двух колец является кольцом с аддитивной группой $R' \oplus R''$ и умножением $(r'_1, r''_1)(r'_2, r''_2) = (r'_1 r'_2, r''_1 r''_2)$. [Это — в точности прямое произведение R' и R'' как Z-алгебр (VII.5.1).] Каждый левый R'-модуль A' превращается в R-модуль $_{\pi_1}A'$ отступлением вдоль проекции $\pi_1 : R' \times R'' \to R'$, и аналогично для R''-модулей. В частности, R' и R'' суть левые R-модули, а поэлементное определение умножения в R показывает, что $R \cong R' \oplus R''$ есть изоморфизм R-модулей и, значит, R' и R'' суть проективные R-модули.

Лемма 9.1. *Если R'-модули C' и G' и R''-модуль A'' рассматриваются как $R = R' \times R''$-модули, то*

$$G' \otimes_R A'' = 0, \quad \operatorname{Hom}_R(C', A'') = 0. \tag{9.1}$$

Доказательство. Возьмем элемент $(1', 0) \in R$. Тогда

$$g' \otimes a'' = g'(1', 0) \otimes a'' = g' \otimes (1', 0) a'' = g' \otimes 0 = 0.$$

Аналогично если $f : C' \to A''$, то

$$f(c') = f[(1', 0) c'] = (1', 0) f(c') = 0.$$

Соответствие $A \to A' = R' \otimes_R A$, $\alpha \to \alpha' = 1_{R'} \otimes \alpha$ определяет ковариантный функтор из категории R-модулей в категорию R'-модулей. Этот функтор точен: из $\alpha \parallel \beta$ следует $\alpha' \parallel \beta'$. Более того, имеет место

Предложение 9.2. *Каждый левый $(R'\times R'')$-модуль A представим в виде прямой суммы $A\cong(_{\pi_1}A')\oplus(_{\pi_2}A'')$ двух R-модулей, первый из которых получен отступлением из R'-модуля A', а второй — из R''-модуля A''. Эти модули A' и A'' определены с точностью до изоморфизма $A'\cong R'\otimes_R A$, $A''\cong R''\otimes_R A$. При заданном разложении модулей A и B каждый R-модульный гомоморфизм $\alpha: A\to B$ имеет единственное представление в виде $\alpha=\alpha'\oplus\alpha''$, где $\alpha': A'\to B'$ и $\alpha'': A''\to B''$ — это R'- и R''-модульные гомоморфизмы соответственно.*

Доказательство. Используя изоморфизм $R\cong R'\oplus R''$, получаем разложение

$$A=R\otimes_R A\cong(R'\oplus R'')\otimes_R A\cong(R'\otimes_R A)\oplus(R''\otimes_R A).$$

Если $A=A'\oplus A''$ — разложение указанного вида, то из (9.1) имеем $R'\otimes_R A=R'\otimes_R A'=R'\otimes_{R'}A'\cong A'$. Для гомоморфизмов $\alpha: A\to B$, $\alpha'=1_{R'}\otimes\alpha: R'\otimes_R A\to R'\otimes_R B$ и $\alpha''=1_{R''}\otimes\alpha$ имеем $\alpha\cong\alpha'\oplus\alpha''$.

Следствие 9.3. *Для левых R-модулей A и C и правого R-модуля G, каждый из которых разложен так, как указано в предложении 9.2, существуют естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_R(C, A)\cong\mathrm{Hom}_{R'}(C', A')\oplus\mathrm{Hom}_{R''}(C'', A''), \tag{9.2}$$

$$G\otimes_R A\cong G'\otimes_{R'}A'\oplus G''\otimes_{R''}A''. \tag{9.3}$$

Доказательство. Функтор $\mathrm{Hom}_R(C,A)$ аддитивен по своим аргументам C и A, $\mathrm{Hom}_R(C', A')\cong\mathrm{Hom}_{R'}(C', A')$ и $\mathrm{Hom}_R(C', A'')=0$ по (9.1).

Изоморфизмы, аналогичные изоморфизмам (9.2) и (9.3), справедливы для относительных функторов Ext и Tor. Например, если даны подкольца $S'\subset R'$ и $S''\subset R''$, то $S=S'\times S''$ есть подкольцо кольца $R'\times R''$, причем $\pi_1 S=S'$, $\pi_2 S=S''$. Мы рассмотрим более общий случай произвольного подкольца кольца $R'\times R''$.

Теорема 9.4. *Если S — подкольцо кольца $R'\times R''$, то положим $S'=\pi_1 S\subset R'$, $S''=\pi_2 S\subset R''$. Для левых R-модулей A и C и правого R-модуля G, каждый из которых разложен, как в предложении 9.2, для любого n существуют естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Ext}^n_{(R,S)}(C, A)\cong\mathrm{Ext}^n_{(R',S')}(C', A')\oplus\mathrm{Ext}^n_{(R'',S'')}(C'', A''), \tag{9.4}$$

$$\mathrm{Tor}^{(R,S)}_n(G, C)\cong\mathrm{Tor}^{(R',S')}_n(G', C')\oplus\mathrm{Tor}^{(R'',S'')}_n(G'', C''). \tag{9.5}$$

Те же изоморфизмы верны, если опустить S, S' и S''.

Доказательство. Сначала заметим, что (R', S')-свободный модуль $R'\otimes_{S'}M'$ также (R, S)-проективен (хотя не обязательно (R, S)-свободен). В самом деле, левый S'-модуль M' становится левым S-модулем при отступлении, и, используя лемму об отступлении, получаем:

$$R\otimes_S M'\cong R'\otimes_S M'\oplus R''\otimes_S M'\cong R'\otimes_{S'}M'\oplus R''\otimes_{S''}M'.$$

Поскольку (R, S)-проективен модуль $R\otimes_S M'$, то проективно и его прямое слагаемое $R'\otimes_{S'}M'$.

Теперь выберем относительно свободные расщепляющиеся резольвенты $\varepsilon': X'\to C'$ и $\varepsilon'': X''\to C''$ компонент модуля C. Тогда $\varepsilon'\oplus\varepsilon'': X'\oplus X''\to C'\oplus C''$ есть резольвента R-модуля $C'\oplus C''$, которая S-расщепляется прямой суммой S'- и S''-стягивающих гомотопий комплексов X' и X''. В силу первого замечания каждый член $X'_n\oplus X''_n$ здесь (R, S)-проективен. Применяя (9.2) и (9.3) для $X=X'\oplus X''$, имеем

$$\mathrm{Hom}_R(X, A)\cong\mathrm{Hom}_{R'}(X', A')\oplus\mathrm{Hom}_{R''}(X'', A''),$$

$$G\otimes_R X\cong G'\otimes_{R'}X'\oplus G''\otimes_{R''}X''.$$

Переход к группам гомологий и когомологий дает требуемые изоморфизмы (9.4) и (9.5).

В изоморфизме (9.5) каждая проекция $\mathrm{Tor}_n(G, C)\to\mathrm{Tor}_n(G', C')$ может быть описана как отображение χ_*, индуцированное заменой колец $\chi: (R, S; G, C)\to(R', S'; G', C')$, которая получается проектированиями $R=R'\times R''\to R'$, $G=G'\oplus G''\to G'$ и т. д. Действительно, для вычисления χ_* надо накрыть $C\to C'$ цепным преобразованием $\varphi: X\to X'$; такое φ есть проекция $X=X'\oplus X''\to X'$, использованная при выводе (9.5).

Доказательство тех же результатов в случае, когда нет кольца S, еще проще; если X'_n — свободный R'-модуль, то он является прямой суммой копий R и, значит, R-проективен.

Эта теорема будет использована в следующей главе для алгебр (§ 6).

ГЛАВА X

Когомология алгебраических систем

§ 1. Введение

Гомология алгебраических систем является объектом изучения относительной гомологической алгебры.

Для группы Π используются точные последовательности Π-модулей, которые расщепляются как последовательности абелевых групп. Группы когомологий группы Π с коэффициентами в модуле ${}_{\Pi}A$ определяются следующим образом (см. IX.7):

$$H^n(\Pi, A) = \operatorname{Ext}^n_{Z(\Pi)}(Z, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{(Z(\Pi), Z)}(Z, A). \tag{1.1}$$

Соответственно группы гомологий группы Π с коэффициентами в модуле G_{Π} будут определены так:

$$H_n(\Pi, G) = \operatorname{Tor}_n^{Z(\Pi)}(G, Z) \cong \operatorname{Tor}_n^{(Z(\Pi), Z)}(G, Z). \tag{1.2}$$

Для $\mathbf{K}$-алгебры Λ используются точные последовательности Λ-бимодулей, которые расщепляются как последовательности правых Λ-модулей, или последовательности, которые расщепляются только как последовательности $\mathbf{K}$-модулей. Для Λ-бимодуля A когомология и гомология алгебры Λ определяются следующим образом:

$$H^n(\Lambda, A) = \operatorname{Ext}^n_{(\Lambda\text{-}\Lambda,\, \mathbf{K}\text{-}\Lambda)}(\Lambda, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{(\Lambda\text{-}\Lambda,\, \mathbf{K})}(\Lambda, A), \tag{1.3}$$

$$H_n(\Lambda, A) = \operatorname{Tor}_n^{(\Lambda\text{-}\Lambda,\, \mathbf{K}\text{-}\Lambda)}(A, \Lambda) \cong \operatorname{Tor}_n^{(\Lambda\text{-}\Lambda,\, \mathbf{K})}(A, \Lambda). \tag{1.4}$$

Эти эквивалентные описания даны в терминах B-резольвенты для алгебр, которая дана в явном виде в § 2 и является специальным случаем B-резольвенты (IX.7) для резольвентной пары категорий. В этой главе исследуются свойства групп H_n и H^n и рассматриваются подобные группы (ко)гомологий для градуированных и дифференциальных градуированных алгебр, а также для моноидов и для абелевых групп.

§ 2. *B*-резольвента для алгебр

Пусть Λ является алгеброй над кольцом $\mathbf{K}$. Единица 1_Λ определяет $\mathbf{K}$-модульное отображение $I : \mathbf{K} \dashrightarrow \Lambda$; коядро этого отоб-

ражения $\Lambda/I(\mathbf{K}) = \Lambda/(\mathbf{K}1_\Lambda)$ будет обозначаться через $\Lambda/\mathbf{K}$, а элементы коядра будут записываться как смежные классы $\lambda + \mathbf{K}$.

Для каждого левого Λ-модуля C построим относительно свободный Λ-модуль ($\otimes = \otimes_{\mathbf{K}}$)

$$B_n(\Lambda, C) = \Lambda \otimes (\Lambda/\mathbf{K}) \otimes \ldots \otimes (\Lambda/\mathbf{K}) \otimes C \quad (n \text{ множителей } \Lambda/\mathbf{K}). \tag{2.1}$$

Как $\mathbf{K}$-модуль он порождается элементами, которые мы запишем, заменив символ $\otimes$ вертикальными черточками:

$$\lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c = \lambda \otimes [(\lambda_1 + \mathbf{K}) \otimes \ldots \otimes (\lambda_n + \mathbf{K})] \otimes c; \tag{2.2}$$

в частности, элементы B_0 запишутся как $\lambda[\ ]c$. Левый множитель λ определяет левую Λ-модульную структуру в B_n; здесь символ $[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c$ без оператора λ обозначает соответствующий элемент из $(\Lambda/\mathbf{K})^n \otimes C$. Эти элементы *нормализованы* в том смысле, что

$$[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c = 0, \tag{2.3}$$

если один из элементов $\lambda_i \in \mathbf{K}$.

Теперь построим отображения, указанные в диаграмме

$$C \underset{s_{-1}}{\overset{\varepsilon}{\leftrightarrows}} B_0(\Lambda, C) \underset{s_0}{\overset{\partial}{\leftrightarrows}} B_1(\Lambda, C) \leftrightarrows \ldots .$$

Определим $\mathbf{K}$-модульные гомоморфизмы $s_{-1} : C \to B_0$ и $s_n : B_n \dashrightarrow B_{n+1}$, положив $s_{-1}c = 1[\ ]c$ и

$$s_n(\lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c) = 1[\lambda | \lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c, \quad n \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Ввиду нормализации $s_{n+1}s_n = 0$. Определим гомоморфизмы левых Λ-модулей $\varepsilon : B_0 \to C$ и $\partial_n : B_n \to B_{n-1}$ при $n > 0$, положив $\varepsilon(\lambda[\ ]c) = \lambda c$ и

$$\partial_n(\lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c) = \lambda\lambda_1[\lambda_2 | \ldots | \lambda_n] c + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_i\lambda_{i+1} | \ldots | \lambda_n] c + (-1)^n \lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_{n-1}](\lambda_n c). \tag{2.5}$$

Это определение законно, поскольку правая часть формулы $\mathbf{K}$-полилинейна и нормализована: если некоторое $\lambda_i = 1$, то члены с номерами $i - 1$ и i взаимно уничтожаются, а остальные члены равны нулю.

Теорема 2.1. *Для каждого левого Λ-модуля C гомоморфизм $\varepsilon : B(\Lambda, C) \to C$ есть резольвента, состоящая из $(\Lambda, \mathbf{K})$-относительно свободных левых Λ-модулей, которая $\mathbf{K}$-расщепляется стя-*

гивающей гомотопией s, причем $s^2 = 0$. Кроме того, $B(\Lambda, C)$ — ковариантный функтор аргумента C.

Эту теорему можно доказать непосредственно, исходя из написанных выше формул. С другой стороны, используем резольвенту из IX.7 для резольвентной пары $\mathscr{R}$ с $\mathscr{A}$=левые Λ-модули, $\mathscr{M}$ = = $\mathbf{K}$-модули, $F(M) = \Lambda \otimes M$, $e(m) = 1 \otimes m$. Поскольку последовательность $\mathbf{K} \dashrightarrow \Lambda \dashrightarrow \Lambda/\mathbf{K} \dashrightarrow 0$ точна справа как последовательность $\mathbf{K}$-модулей, каждый $\mathbf{K}$-модуль M порождает точную справа последовательность

$$M = \mathbf{K} \otimes M \dashrightarrow F(M) = \Lambda \otimes M \dashrightarrow (\Lambda/\mathbf{K}) \otimes M \dashrightarrow 0,$$

так что $\overline{F}(M) \cong (\Lambda/\mathbf{K}) \otimes M$. Далее, отображение $s_M : F(M) \dashrightarrow F\overline{F}(M)$ определяется формулой $s(\lambda \otimes m) = 1 \otimes (\lambda + \mathbf{K}) \otimes m$. Следовательно,

$$B_n(\mathscr{R}, C) = F\overline{F}^n \square C = \Lambda \otimes (\Lambda/\mathbf{K})^n \otimes C = B_n(\Lambda, C),$$

где $B(\mathscr{R}, C)$ обозначает то же, что и в IX (7.3), а s определяется формулой (2.4). Формулы для ε и ∂_n определяют единственный граничный гомоморфизм, для которого s есть стягивающая гомотопия. Следовательно, $B(\mathscr{R}, C) = B(\Lambda, C)$.

Существует несколько вариантов B-резольвенты, что будет сейчас показано.

Для *ненормализованной B-резольвенты* $\beta(\mathscr{R}, C) = \beta(\Lambda, C)$ (см. IX.6)

$$\beta_n(\Lambda, C) = \widetilde{F}\widetilde{F}^n C = \Lambda \otimes \Lambda^n \otimes C, \tag{2.6}$$

где $\Lambda^n = \Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda$ (n множителей). Гомотопия s, ε и граничный гомоморфизм задаются формулами (2.4) и (2.5), в которых каждый символ $\lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c$ заменяется элементом $\lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes c$. В этом случае граничный гомоморфизм можно переписать, как и для сингулярного комплекса пространства, в виде $\partial_n = \sum (-1)^i d_i$, где $d_i : \beta_n \to \beta_{n-1}$ являются Λ-модульными гомоморфизмами, определенными формулой

$$d_i(\lambda_0 \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes c) = \lambda_0 \otimes \ldots \otimes \lambda_i\lambda_{i+1} \otimes \ldots \otimes c, \quad i = 0, \ldots, n \tag{2.7}$$

(при $i = n$ правая часть равна $\lambda_0 \otimes \ldots \otimes \lambda_n c$). Теорема 2.1 справедлива и при замене резольвенты $B(\Lambda, C)$ резольвентой $\beta(\Lambda, C)$, за исключением того, что s^2 не обязательно равняется нулю в $\beta(\Lambda, C)$.

Далее, Λ-модульное отображение $\eta : \beta_n \to B_n$, определенное равенством $\eta(\lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes c) = \lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c$, является Λ-модульным цепным преобразованием, накрывающим $1_C : C \to C$; действительно, оно является каноническим отображением

сравнения резольвент β_n и B_n. Значит, по теореме сравнения имеет место

Следствие 2.2. («*Теорема о нормализации*».) *Проекция $\eta: \beta(\Lambda, C) \to B(\Lambda, C)$ является цепной эквивалентностью комплексов Λ-модулей.*

Ядро η является Λ-модулем, порожденным объединением образов Λ-модульных гомоморфизмов $s_i^n : \beta_n \to \beta_{n+1}$:

$$s_i^n(\lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes c) = \\ = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda_i \otimes 1 \otimes \lambda_{i+1} \otimes \ldots \otimes \lambda_n \otimes c \tag{2.8}$$

для $i = 0, \ldots, n$. Эти гомоморфизмы s_i и гомоморфизмы d_i из (2.7) превращают $\beta(\Lambda, C)$ в ассоциированный цепной комплекс симплициального Λ-модуля, а η есть симплициальная нормализация из теоремы VIII.6.1.

Для построения *бимодульной B-резольвенты* $B(\Lambda, \Lambda)$ возьмем в качестве C алгебру Λ. Тогда каждый модуль B_n становится Λ-бимодулем; формула (2.5), в которой элемент c нужно заменить элементом $\lambda' \in \Lambda$, показывает, что отображения ε и ∂_n для всех n являются Λ-бимодульными гомоморфизмами. Аналогично s из (2.4) становится гомоморфизмом правых Λ-модулей; тем самым получено

Следствие 2.3. *Если Λ есть $\mathbf{K}$-алгебра, то $\varepsilon : B(\Lambda, \Lambda) \to \Lambda$ есть резольвента бимодуля Λ, состоящая из (Λ-Λ, Λ справа)-свободных бимодулей, расщепляющаяся как последовательность правых Λ-модулей, и в то же время $\mathbf{K}$-расщепляющаяся резольвента Λ, состоящая из (Λ-Λ, $\mathbf{K}$)-свободных бимодулей.*

В последнем предложении *не утверждается*, что $B(\Lambda, \Lambda)$ — категорная резольвента для резольвентной пары (Λ-бимодули, $\mathbf{K}$-модули). Заметим также, что $B(\Lambda, C) \cong B(\Lambda, \Lambda) \otimes_\Lambda C$.

Левая B-резольвента применяется для пополненных алгебр $\varepsilon: \Lambda \to \mathbf{K}$ и равна $B(\Lambda) = B(\Lambda, {}_\varepsilon\mathbf{K})$, где ${}_\varepsilon\mathbf{K}$ — кольцо $\mathbf{K}$, рассматриваемое как левый Λ-модуль, полученный отступлением вдоль ε. В этом случае $B_n(\Lambda) = \Lambda \otimes (\Lambda/\mathbf{K})^n$ порождается элементами $\lambda[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n]$, а s и ∂ определяются формулами (2.4) и (2.5), в которых нужно опустить c, а «внешний» множитель $\lambda_n c$ в последнем члене из (2.5) заменить на $\varepsilon(\lambda_n)$. Тогда $B(\Lambda) \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$ — это $\mathbf{K}$-расщепляющаяся, ($\Lambda, \mathbf{K}$)-свободная резольвента левого Λ-модуля ${}_\varepsilon\mathbf{K}$. В частности, когда $\mathbf{K} = Z$ и $\Lambda = Z(\Pi)$, она превращается в B-резольвенту из IV.5.

Редуцированная B-резольвента для пополненной алгебры Λ — это комплекс $\overline{B}(\Lambda) = \mathbf{K}_\varepsilon \otimes_\Lambda B(\Lambda)$, так что $\overline{B}_0(\Lambda) = \mathbf{K}$ и $\overline{B}_n(\Lambda) = (\Lambda/\mathbf{K})^n$ при $n > 0$. Формула для стягивающей гомотопии уже не применима к $\overline{B}$, но формула для граничного гомоморфизма по-прежнему применима: нужно опустить c и левый оператор λ и в (2.5) заменить оператор λ_1 на $\varepsilon(\lambda_1)$ и $\lambda_n c$ на $\varepsilon(\lambda_n)$. «Редуцированная B-резольвента» *не есть* резольвента, но оказывается полезной при подсчетах. Левая и редуцированная B-резольвенты могут быть построены также без нормализации.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Λ — пополненная алгебра, и пусть X — произвольная относительно свободная $\mathbf{K}$-расщепляющаяся резольвента модуля ${}_\varepsilon\mathbf{K}$, состоящая из левых Λ-модулей. Показать, что канонические сравнения (теорема IX.6.2) $\varphi: B(\Lambda) \to X$, $\psi: X \to B(\Lambda)$, накрывающие единицу, удовлетворяют равенству $\varphi\psi = 1$.

2. (Картан.) Если Λ — пополненная алгебра, то показать, что левая B-резольвента $B(\Lambda)$ характеризуется с точностью до изоморфизма как $\mathbf{K}$-расщепляющаяся резольвента X модуля ${}_\varepsilon\mathbf{K}$ с такой стягивающей гомотопией s, что $s^2 = 0$ и $X_n \cong \Lambda \otimes sX_{n-1}$.

3. Теорему о нормализации можно доказать непосредственно. Показать, что бимодульное цепное преобразование $\zeta: B(\Lambda, C) \to \beta(\Lambda, C)$, для которого $\varepsilon\zeta = \varepsilon$, можно определить рекурсивно, положив $\zeta_0 = 1$, $\zeta_n e_n = s\zeta_{n-1}\partial e_n$, где $e_n = e(\overline{F}^n \square C)$. Доказать, что $\eta\zeta = 1$ и с помощью аналогичных средств построить цепную гомотопию $\zeta\eta \simeq 1$; η — отображение из следствия 2.2.

4. Показать, что для левых Λ-модулей C и A одномерные коциклы коцепного комплекса $\mathrm{Hom}_\Lambda(B(\Lambda, C), A)$ можно рассматривать как системы факторов для $\mathbf{K}$-расщепляющихся Λ-модульных расширений A с помощью C.

§ 3. Когомология алгебры

Очевидно, что n-м модулем когомологий $\mathbf{K}$-алгебры Λ с коэффициентами в Λ-бимодуле A является $\mathbf{K}$-модуль

$$H^n(\Lambda, A) = H^n(\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B(\Lambda, \Lambda), A)), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

ковариантный функтор аргумента A. Здесь $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}$ обозначает модуль бимодульных гомоморфизмов. В соответствии с теоремой о нормализации мы можем заменить бимодульную B-резольвенту $B(\Lambda, \Lambda)$ ненормализованной B-резольвентой $\beta(\Lambda, \Lambda)$. Обе резольвенты $B(\Lambda, \Lambda)$ и $\beta(\Lambda, \Lambda)$ являются $(\Lambda\text{-}\Lambda, \mathbf{K}\text{-}\Lambda)$-относительно проективными резольвентами бимодуля Λ, расщепляющимися как последовательности правых Λ-модулей, а также $\mathbf{K}$-расщепляющимися, $(\Lambda\text{-}\Lambda, \mathbf{K})$-относительно проективными резольвентами Λ, так что $H^n(\Lambda, A)$ во всяком случае есть n-й относительный функтор Ext, как указано в (1.3).

Мы назовем $H^n(\Lambda, A)$ модулями *когомологий Хохшильда* модуля A, поскольку они впервые были определены Хохшильдом [1945],

использовавшим формулы, данные для B-резольвенты, в случае когда $\mathbf{K}$ есть поле.

Комплекс $\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B(\Lambda, \Lambda), A)$, использованный в (3.1), можно описать более непосредственно. Рассмотрим $\mathbf{K}$-полилинейные функции f, определенные на n-кратном прямом произведении $\Lambda \times \ldots \times \Lambda$ со значениями в A; назовем функцию f *нормализованной*, если $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ всякий раз, когда один из элементов λ_i равен 1. Например, функция $[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c$ из (2.3) $\mathbf{K}$-полилинейна и нормализована. Универсальное свойство тензорного произведения $B_n(\Lambda, \Lambda) = \Lambda \otimes (\Lambda/\mathbf{K})^n \otimes \Lambda$ означает, что каждая $\mathbf{K}$-полилинейная нормализованная функция f определяет единственный бимодульный гомоморфизм $\hat{f}: B_n(\Lambda, \Lambda) \to A$, для которого

$$\hat{f}(1 \otimes [\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] \otimes 1) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Следовательно, модуль $\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B(\Lambda, \Lambda), A)$ изоморфен $\mathbf{K}$-модулю всех $\mathbf{K}$-полилинейных нормализованных функций, заданных на n-кратном прямом произведении. Кограничный гомоморфизм δf является функцией, определенной согласно правилу знака формулой

$$\delta f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = (-1)^{n+1}\{\lambda_1 f(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(\lambda_1, \ldots, \lambda_i\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\lambda_{n+1}\}. \tag{3.2}$$

В частности, нульмерная коцепь — это константа $a \in A$; ее кограница — это функция $f: \Lambda \to A$, причем $f(\lambda) = a\lambda - \lambda a$. Назовем элемент $a \in A$ *инвариантным*, если $\lambda a = a\lambda$ для всех λ, и пусть A^Λ обозначает $\mathbf{K}$-подмодуль всех инвариантных элементов из A; тогда

$$H^0(\Lambda, A) \cong A^\Lambda = \{a \mid \lambda a = a\lambda \quad \text{для всех } \lambda \in \Lambda\}. \tag{3.3}$$

Аналогично одномерный коцикл — это $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $f: \Lambda \to A$, удовлетворяющий тождеству

$$f(\lambda_1\lambda_2) = \lambda_1 f(\lambda_2) + f(\lambda_1)\lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda; \tag{3.4}$$

такая функция f называется *скрещенным гомоморфизмом* алгебры Λ в модуль A. Он является кограницей, если имеет вид $f_a(\lambda) = a\lambda - \lambda a$ для некоторого фиксированного a; назовем f_a *главным скрещенным гомоморфизмом*. Следовательно, $H^1(\Lambda, A)$ есть $\mathbf{K}$-фактормодуль $\mathbf{K}$-модуля всех скрещенных гомоморфизмов по подмодулю главных скрещенных гомоморфизмов, в точности так же, как в случае когомологий групп (IV.2).

Как и для случая групп, $H^2(\Lambda, A)$ можно интерпретировать в терминах расширений с помощью алгебры Λ. *Расширением* с помощью алгебры Λ называется эпиморфизм $\sigma : \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$ алгебр. Ядро J этого эпиморфизма является двусторонним идеалом в Γ и, следовательно, Γ-бимодулем. Для каждого n пусть J^n обозначает $\mathbf{K}$-подмодуль алгебры Γ, порожденный всеми произведениями $j_1j_2 \ldots j_n$ из n множителей $j_i \in J$. Тогда $J = J^1 \supset J^2 \supset J^3 \supset \ldots$ и всякое J^n — двусторонний идеал в Γ. Расширение σ называют *рассеченным*, если σ обладает правым обратным гомоморфизмом алгебр $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ ($\sigma\varphi = 1_\Lambda$), т. е. если Γ содержит подалгебру, изоморфно отображающуюся при гомоморфизме σ на Λ. Расширение σ называют *сингулярным*, если идеал $J = \operatorname{Ker} \sigma$ удовлетворяет условию $J^2 = 0$. В каждом сингулярном расширении Γ-бимодуль J можно рассматривать как Λ-бимодуль, так как из $\sigma\gamma = \sigma\gamma'$ следует $(\gamma - \gamma') \in J$, откуда $\gamma j = \gamma' j$ для каждого $j \in J$, поскольку $J^2 = 0$. Тем самым определяется действие слева каждого элемента $\lambda = \sigma(\gamma)$ на j.

Обратно, если дан произвольный Λ-бимодуль A, то сингулярным расширением A с помощью Λ называется короткая точная последовательность $(\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$, где Γ — алгебра, σ — гомоморфизм алгебр, A рассматривается как Γ-бимодуль, получающийся при отступлении вдоль σ, и $\varkappa : A \rightarrowtail \Gamma$ есть мономорфизм Γ-бимодулей. Для фиксированных A и Λ два таких расширения $(\varkappa, \sigma)$ и $(\varkappa', \sigma')$ называются *конгруэнтными*, если существует такой гомоморфизм $\rho : \Gamma \to \Gamma'$ алгебр, что $\varkappa' = \rho\varkappa$, $\sigma = \sigma'\rho$. Это условие приводит к уже знакомой нам коммутативной диаграмме, из которой следует, что ρ — изоморфизм. Примером расширения A с помощью Λ является *полупрямая сумма*, определенная как $\mathbf{K}$-модуль $A \oplus \Lambda$ с умножением $(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2) = (a_1\lambda_2 + \lambda_1 a_2, \lambda_1\lambda_2)$; вместе с отображениями $\varkappa a = (a, 0)$ и $\sigma(a, \lambda) = \lambda$ она является сингулярным расширением A с помощью Λ, рассеченным отображением φ, $\varphi\lambda = (0, \lambda)$. Любое рассеченное сингулярное расширение конгруэнтно полупрямой сумме.

Рассмотрим те сингулярные расширения $(\varkappa, \sigma)$, которые $\mathbf{K}$-расщепляются в том смысле, что существует $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $u : \Lambda \dashrightarrow \Gamma$, обратный справа к σ. (Любое рассеченное расширение $\mathbf{K}$-расщепляется; если $\mathbf{K}$ — поле, то любое расширение $\mathbf{K}$-расщепляется.) Отождествим каждый элемент $a \in A$ с элементом $\varkappa a \in \Gamma$, так что $\varkappa : A \to \Gamma$ есть тождественное вложение. Правое обратное отображение u можно выбрать так, чтобы выполнялось «нормализационное» условие $u(1_\Lambda) = 1_\Gamma$, если u не удовлетворяет этому условию, то положим $a_0 = u(1_\Lambda) - 1_\Gamma \in A$; тогда $u'(\lambda) = u(\lambda) - \lambda a_0$ является новым правым нормализованным обратным. Кроме того, $\sigma[u(\lambda_1\lambda_2)] = \lambda_1\lambda_2 = \sigma[u(\lambda_1) u(\lambda_2)]$, так что существуют такие однозначно определенные элементы $f(\lambda_1, \lambda_2) \in A$, что

$$u(\lambda_1) u(\lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2) + u(\lambda_1\lambda_2). \tag{3.5}$$

Назовем элементы f *системой факторов* расширения, соответствующей представителям u.

Теорема 3.1. *Если Λ есть $\mathbf{K}$-алгебра и A есть Λ-бимодуль, то каждая система факторов $\mathbf{K}$-расщепляющегося сингулярного расширения бимодуля A с помощью алгебры Λ является двумерным коциклом комплекса $\operatorname{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B(\Lambda, \Lambda), A)$. Сопоставление каждому расширению когомологического класса любой из его систем факторов определяет взаимно однозначное соответствие между множеством классов конгруэнтности $\mathbf{K}$-расщепляющихся сингулярных расширений A с помощью Λ и модулем $H^2(\Lambda, A)$. При этом соответствии рассеченные расширения (в частности, полупрямая сумма) переходят в нуль.*

Доказательство. Будем рассматривать элемент $u(\lambda)$ как представитель элемента λ в расширении Γ. Γ-бимодульную структуру в A можно следующим образом описать с помощью элементов u:

$$u(\lambda) a = \lambda a, \qquad a u(\lambda) = a\lambda, \tag{3.6}$$

где $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ произвольны. Поскольку u есть $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм,

$$u(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) = k_1 u(\lambda_1) + k_2 u(\lambda_2), \qquad k_i \in \mathbf{K}. \tag{3.7}$$

Для системы факторов из (3.5) правило (3.6) дает

$$[u(\lambda_1) u(\lambda_2)] u(\lambda_3) = f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3 + f(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + u(\lambda_1\lambda_2\lambda_3),$$
$$u(\lambda_1)[u(\lambda_2) u(\lambda_3)] = \lambda_1 f(\lambda_2, \lambda_3) + f(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) + u(\lambda_1\lambda_2\lambda_3).$$

Так как умножение в Γ ассоциативно, то

$$\lambda_1 f(\lambda_2, \lambda_3) - f(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + f(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3 = 0. \tag{3.8}$$

Это есть в точности условие $\delta f = 0$, означающее, что система факторов является двумерным коциклом; более того, из равенства $u(1) = 1$ следует, что функция f нормализована. Замена представителей u представителями u', $u'(\lambda) = g(\lambda) + u(\lambda)$, где $g : \Lambda \to A$ есть некоторая $\mathbf{K}$-линейная функция с нормализационным условием $g(1) = 0$, приводит к новой (нормализованной) системе факторов $f + \delta g$. Значит, расширение однозначно определяет когомологический класс функции f.

Любой элемент алгебры Γ можно единственным образом записать в виде $a + u(\lambda)$. Здесь $\mathbf{K}$-модульная структура в Γ, сумма и произведение двух таких элементов определяются равенствами (3.5) — (3.7). Для данных A, Λ и некоторого двумерного коцикла f с помощью этих равенств строится расширение Γ: в частности, условие $\delta f = 0$ достаточно для того, чтобы сделать умножение ассоциативным. Если $f=0$, то это построение приводит к полупрямой сумме, чем доказательство и завершается.

Двусторонний идеал J называется *нильпотентным*, если $J^n = 0$ для некоторого n.

Теорема 3.2. (*Уайтхед — Хохшильд.*) *Если* $\mathbf{K}$ — *поле и если для* $\mathbf{K}$-*алгебры* Λ *выполняется равенство* $H^2(\Lambda, A) = 0$ *для каждого* Λ-*бимодуля* A, *то любое расширение алгебры* Λ *с нильпотентным ядром является рассеченным.*

Пусть $J^n = 0$ для ядра J расширения $\sigma\colon \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$. Доказательство проведем индукцией по n. Если $n = 2$, то расширение сингулярно и $\mathbf{K}$-расщепляемо; поскольку $H^2(\Lambda, J) = 0$, расширение рассечено по теореме 3.1.

Предположим, что результат верен для ядер экспоненты $n-1$, и возьмем расширение σ с ядром $J \neq 0$, $J^n = 0$. Тогда J^2 строго содержится в J, поскольку из $J^2 = J$ следует $J^n = J \neq 0$. Для факторалгебры Γ/J^2 построим коммутативную диаграмму (указана слева)

$$\begin{array}{ccccc} J & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Lambda \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| \\ J/J^2 & \longrightarrow & \Gamma/J^2 & \underset{\varphi}{\overset{\sigma'}{\rightleftarrows}} & \Lambda, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{\iota} & \Gamma \\ {\scriptstyle \varphi'}\uparrow\downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \varphi\Lambda & \subset & \Gamma/J^2. \end{array}$$

Ядром проекции p является J^2, а ядром σ' — J/J^2, и, следовательно, σ' есть сингулярное расширение Λ. В силу рассмотренного уже случая $n=2$, σ' рассекается некоторым φ. Теперь $p^{-1}(\varphi\Lambda) = \Gamma'$ есть подалгебра алгебры Γ и p индуцирует гомоморфизм $p'\colon \Gamma' \twoheadrightarrow \varphi\Lambda \cong \Lambda$ с ядром J^2. Поскольку $(J^2)^{n-1} \subset J^n = 0$, из индуктивного предположения вытекает, что p' рассекается некоторым отображением φ', и поэтому σ рассекается отображением $\iota\varphi'\varphi$.

В этом результате содержится основная теорема Веддербарна для алгебры Γ конечной размерности (как векторного пространства) над полем. Каждая такая алгебра имеет такой двусторонний нильпотентный идеал R, называемый радикалом, что факторалгебра Γ/R полупроста. Теорема Веддербарна утверждает, что если алгебра Γ/R сепарабельна, то расширение $\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/R$ рассечено. Это следует из теоремы 3.2, так как из сепарабельности алгебры Γ/R следует (теорема VII.5.6), что bidim $\Gamma/R = 0$, следовательно, bidim $\Gamma/R \leqslant 1$ и $H^2(\Gamma/R, A) = 0$ для всех (Γ/R)-бимодулей A. Поэтому расширение $\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/R$ рассечено.

Замечание. Для алгебр конечной размерности над полем теорема 3.2 верна также и без предположения о нильпотентности ядра (Хохшильд [1945], предложение 6.1); (Розенберг — Зелинский [1956]). Проблема препятствий для построения несингулярных $\mathbf{K}$-расщепляющихся расширений с данным ядром приводит (Хохшильд [1947]) к интерпретации модулей $H^3(\Lambda, A)$, параллельной интерпретации для случая групп (IV.8). Для расширений, которые не $\mathbf{K}$-расщепляются, требуется вторая, аддитивная, система факторов вместо линейности u в (3.7); мы вернемся к этому вопросу в § 13.

Группы когомологий фиксированной $\mathbf{K}$-алгебры Λ, как показывает следующая теорема, характеризуются аксиомами, подобными аксиомам для функтора Ext.

Теорема 3.3. *Для каждого* $n \geqslant 0$, $H^n(\Lambda, A)$ *есть ковариантный функтор из категории* Λ-*бимодулей* A *в категорию* $\mathbf{K}$-*модулей. Модуль* H^0 *определяется формулой* (3.3), $H^n(\Lambda, A) = 0$, *если* $n > 0$ *и* A — *бимодуль вида* $A = \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda, M)$, *где* M *есть* $\mathbf{K}$-*модуль. Для каждой* $\mathbf{K}$-*расщепляющейся короткой точной последовательности* $E\colon A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *бимодулей и для каждого* $n \geqslant 0$ *существует связывающий гомоморфизм* $E_*\colon H^n(\Lambda, C) \to H^{n+1}(\Lambda, A)$, *естественный по аргументу* E, *такой, что длинная последовательность*

$$\cdots \longrightarrow H^n(\Lambda, A) \longrightarrow H^n(\Lambda, B) \longrightarrow H^n(\Lambda, C) \xrightarrow{E_*} H^{n+1}(\Lambda, A) \longrightarrow \cdots$$

точна. Эти свойства определяют модули H^n *и связывающие гомоморфизмы* E_* *с точностью до естественных изоморфизмов* H^n.

Доказательство оставляется читателю; заметим, что $\operatorname{Hom}_{\mathbf{K}}(\Lambda, M)$ —«относительно инъективный» бимодуль.

Если $\varepsilon\colon \Lambda \to \mathbf{K}$ — пополненная алгебра, то каждый левый Λ-модуль D становится Λ-бимодулем D_ε, если правую модульную структуру в D задать отступлением вдоль ε.

Предложение 3.4. *Для левого модуля* D *над пополненной алгеброй* (Λ, ε) *когомологию Хохшильда бимодуля* D_ε *можно вычислить с помощью левой* B-*резольвенты, используя естественный изоморфизм*

$$H^n(\Lambda, D_\varepsilon) \cong H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(B(\Lambda), D)). \tag{3.9}$$

Доказательство. Канонический изоморфизм $\operatorname{Hom}(\mathbf{K}, D) \cong D$ левых Λ-модулей является также изоморфизмом Λ-бимодулей $\operatorname{Hom}({}_\varepsilon\mathbf{K}, D) \cong D_\varepsilon$. Поэтому для любого бимодуля B сопряженная ассоциативность устанавливает естественный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(B \otimes_\Lambda ({}_\varepsilon\mathbf{K}), D) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B, \operatorname{Hom}({}_\varepsilon\mathbf{K}, D)) \cong \operatorname{Hom}_{\Lambda\text{-}\Lambda}(B, D_\varepsilon).$$

Если B — двусторонняя B-резольвента, то $B \otimes_\Lambda ({}_\varepsilon\mathbf{K})$ — левая B-резольвента; отсюда вытекает требуемый результат (3.9).

Замечание. Предположим, что $\mathbf{K}$-алгебра Λ проективна как $\mathbf{K}$-модуль. Тогда и Λ^n будет $\mathbf{K}$-проективна (следствие V.3.3); следовательно, $\beta_n(\Lambda, \Lambda)$ — проективный Λ-бимодуль (предложение VI.8.1). Значит,

ε: $\beta(\Lambda, \Lambda) \to \Lambda$ есть проективная бимодульная резольвента алгебры Λ. В этом случае модуль H^n из (3.1) определяется как «абсолютный» функтор Ext:

$$H^n(\Lambda, A) \cong \operatorname{Ext}^n_{\Lambda\text{-}\Lambda}(\Lambda, A) \text{ (если } \Lambda \text{ } \mathbf{K}\text{-проективна).}$$

Если вместо β использовать B, то этот же результат справедлив для алгебры $\Lambda/\mathbf{K}$, если она проективна как $\mathbf{K}$-модуль. Картан и Эйленберг определяют когомологию Хохшильда с помощью абсолютного функтора Ext во *всех* случаях, так что их определение не всегда совпадает с нашим.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что A^Λ есть Λ-подбимодуль бимодуля A, если алгебра Λ коммутативна.

2. Построить «сумму Бэра» для расширений бимодуля A' с помощью алгебры Λ таким образом, чтобы соответствие, указанное в теореме 3.1, было изоморфизмом абелевых групп.

3. Показать, что $H^1(\Lambda, A)$ есть группа классов конгруэнтности тех бимодульных расширений $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow \Lambda$, которые $\mathbf{K}$-расщепляются.

4. Показать в явном виде, что каждая короткая точная последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow \Lambda$ бимодулей, которая $\mathbf{K}$-расщепляется, расщепляется также как последовательность правых Λ-модулей.

5. Если Λ — пополненная алгебра и M есть $\mathbf{K}$-модуль, то когомологию модуля M, превращенного в бимодуль отступлением, можно вычислить с помощью редуцированной B-резольвенты, используя изоморфизм $H^n(\Lambda, {}_\varepsilon M_\varepsilon) \cong H^n(\operatorname{Hom}(\overline{B}(\Lambda), M))$.

§ 4. Гомология алгебры

Для двух Λ-бимодулей A и B имеется «бимодульное» тензорное произведение $A \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} B$ оно получается из тензорного произведения $A \otimes_{\mathbf{K}} B$ путем отождествлений

$$a\lambda \otimes b = a \otimes \lambda b, \qquad \lambda a \otimes b = a \otimes b\lambda$$

[внутренняя ассоциативность и внешняя ассоциативность, как и в VI(5.10)]. Канонический изоморфизм $A \otimes_\Lambda \Lambda \cong A$ имеет аналог для бимодулей. Действительно, если A — бимодуль, а M есть $\mathbf{K}$-модуль, то естественный изоморфизм

$$\theta: A \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} (\Lambda \otimes M \otimes \Lambda) \cong A \otimes M, \qquad \otimes = \otimes_{\mathbf{K}}, \tag{4.1}$$

можно определить формулой $\theta[a \otimes (\lambda \otimes m \otimes \lambda')] = \lambda' a \lambda \otimes m$, так как правая часть этой формулы $\mathbf{K}$-полилинейна и удовлетворяет требованиям внешней и внутренней ассоциативности. Обратное отображение задается формулой $\theta^{-1}(a \otimes m) = a \otimes (1 \otimes m \otimes 1)$.

Модули *гомологий Хохшильда* $\mathbf{K}$-алгебры Λ с коэффициентами в Λ-бимодуле A определяются с помощью B-резольвенты как $\mathbf{K}$-модули

$$H_n(\Lambda, A) = H_n(A \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} B(\Lambda, \Lambda)), \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{4.2}$$

Как и для когомологий, это есть случай (1.4) относительного периодического функтора, так как последовательности Λ-бимодулей должны расщепляться как последовательности правых Λ-модулей или как последовательности $\mathbf{K}$-модулей.

В определении (4.2) мы можем заменить B ненормализованной B-резольвентой $\beta(\Lambda, \Lambda)$, где $\beta_n(\Lambda, \Lambda) = \Lambda \otimes \Lambda^n \otimes \Lambda$. По (4.1) $A \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} \beta_n(\Lambda, \Lambda) \cong A \otimes \Lambda^n$. Следовательно, $H_n(\Lambda, A)$ есть n-й модуль гомологий комплекса $\mathbf{K}$-модулей $A \otimes \Lambda^n$ с граничным гомоморфизмом $\partial = d_0 - d_1 + \ldots + (-1)^n d_n$, где d_i — «симплициальные» граничные операторы:

$$d_i(a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n) =$$
$$= \begin{cases} a\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \ldots \otimes \lambda_n, & i = 0, \\ a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_i\lambda_{i+1} \otimes \ldots \otimes \lambda_n, & 0 < i < n, \\ \lambda_n a \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_{n-1}, & i = n; \end{cases} \tag{4.3}$$

в последнем члене λ_n появляется вначале благодаря «внешней» ассоциативности. В частности, $\partial(a \otimes \lambda) = a\lambda - \lambda a$, так что H_0 — это фактормодуль модуля A по $\mathbf{K}$-подмодулю, порожденному всеми разностями $\lambda a - a\lambda$

$$H_0(\Lambda, A) \cong A/\{\lambda a - a\lambda \mid \lambda \in \Lambda, \ a \in A\}. \tag{4.4}$$

Подобно теореме 3.3, справедлива

Теорема 4.1. *Для фиксированной* $\mathbf{K}$-*алгебры* Λ *каждый* $H_n(\Lambda, A)$ — *ковариантный функтор из категории* Λ-*бимодулей* A *в категорию* $\mathbf{K}$-*модулей, причем* H_0 *определяется формулой* (4.4) *и*

$$H_n(\Lambda, \Lambda \otimes L \otimes \Lambda) = 0, n > 0, \ L \text{ есть } \mathbf{K}\text{-модуль}.$$

Если $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *есть* $\mathbf{K}$-*расщепляющаяся короткая точная последовательность бимодулей, то существует для каждого* $n > 0$ *«связывающий» гомоморфизм* $E_n: H_n(\Lambda, C) \to H_{n-1}(\Lambda, H)$, *естественный по аргументу* E, *такой, что длинная последовательность*

$$\ldots \to H_{n+1}(\Lambda, C) \xrightarrow{E_{n+1}} H_n(\Lambda, A) \to H_n(\Lambda, B) \to H_n(\Lambda, C) \to \ldots$$

является точной. Эти свойства характеризуют H_n *и* E_n *с точностью до естественного изоморфизма.*

Функторное поведение модулей гомологий алгебр аналогично функторному поведению групп гомологий групп (IV.2.6). Рассмотрим четверку $(\mathbf{K}, \Lambda, A, C)$, где $\mathbf{K}$ — коммутативное кольцо, Λ есть $\mathbf{K}$-алгебра, а A и C суть Λ-бимодули. *Замена алгебр* (с + у аргумента A и — у аргумента C) — это четверка

$$\zeta = (\varkappa, \rho, \alpha, \gamma): (\mathbf{K}, \Lambda, A, C) \to (\mathbf{K}', \Lambda', A', C'), \tag{4.5}$$

где $\varkappa : \mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ и $\rho : \Lambda \to \Lambda'$ суть такие кольцевые гомоморфизмы, что $\rho(k\lambda) = (\varkappa k)(\rho\lambda)$ для всех k и λ, и $\alpha : A \to {}_\rho A'_\rho$ и $\gamma : {}_\rho C'_\rho \to C$ (противоположное направление!) суть гомоморфизмы Λ-бимодулей, т. е. $\alpha(\lambda a) = (\rho\lambda)(\alpha a)$ и $\alpha(a\lambda) = (\alpha a)(\rho\lambda)$. Категория с этими морфизмами ζ обозначается $\mathscr{B}^{+-}$; здесь показатели $+$ и $-$ указывают, что замена ковариантна по первому бимодулю A и контравариантна по C. Опускание C и γ дает категорию $\mathscr{B}^{+}$. Мы также используем категорию $\mathscr{B}^{+}_{\mathbf{K}}$, где кольцо $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$ фиксировано и $\varkappa = 1$.

Комплекс $A \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} B(\Lambda, \Lambda)$ из (4.2), а поэтому и $H_n(\Lambda, A)$, является ковариантным функтором из $\mathscr{B}^{+}$; в частности, отсюда следует предыдущий результат о ковариантности функтора $H_n(\Lambda, A)$ по A при фиксированных Λ и $\mathbf{K}$. Аналогично функтор $H^n(\Lambda, C)$ контравариантен в категории $\mathscr{B}^{-}$. Действие замены ζ (с пропущенным α) на нормализованную коцепь f для Λ' вида (3.2) определяется формулой $(\zeta^* f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \gamma f(\rho\lambda_1, \ldots, \rho\lambda_n)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что изоморфизм (1.1) естествен над категорией $\mathscr{B}^{-}$.

2. Пусть $\varepsilon : \Lambda \to \mathbf{K}$ есть пополненная алгебра. Для правого $\mathbf{K}$-модуля M и $\mathbf{K}$-модуля G доказать, что

$$H_n(\Lambda, {}_\varepsilon M) = H_n(M \otimes_\Lambda B(\Lambda)),$$
$$H_n(\Lambda, {}_\varepsilon G_\varepsilon) = H_n(G \otimes B(\Lambda)).$$

§ 5. Гомология групп и моноидов

Когомология группы Π изучалась в гл. IV, где использовался функтор Hom_Π для $Z(\Pi)$-модулей. Теперь, когда у нас имеется тензорное умножение $\otimes_\Pi = \otimes_{Z(\Pi)}$, мы можем определить и изучить гомологию группы Π. Столь же легко сделать это для моноида M, хотя дополнительная общность не имеет в данном случае большого значения.

Моноид — это множество M с отмеченным элементом $1 = 1_M$ и функцией, сопоставляющей каждой паре $x, y \in M$ «произведение» $xy \in M$ таким способом, что для всех x, y и z справедливо $(xy)z = x(yz)$ и $1x = x = x1$. *Моноидное кольцо* $Z(M)$, подобно групповому кольцу, состоит из всех конечных сумм $\sum k_i x_i$, где $k_i \in Z$, $x_i \in M$, с очевидным умножением и с пополняющим кольцевым гомоморфизмом $\varepsilon : Z(M) \to Z$, определенным посредством формулы $\varepsilon(\sum k_i x_i) = \sum k_i$. Это кольцо $Z(M)$ может рассматриваться как свободное кольцо, порожденное моноидом M, в смысле предложения IV.1.1. Под левым M-модулем мы будем понимать левый $Z(M)$-модуль и будем писать $\otimes_M$ вместо $\otimes_{Z(M)}$. Если M — свободный коммутативный моноид с n образующими, то $Z(M)$ есть кольцо многочленов от n неизвестных.

Гомология моноида M с коэффициентами в правом модуле G_M определяется теперь с помощью левой B-резольвенты $B(Z(M))$ следующим образом:

$$H_n(M, G) = H_n(G \otimes_M B(Z(M))), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{5.1}$$

Поскольку $B(Z(M))$ есть Z-расщепляющаяся проективная резольвента левого M-модуля $Z = {}_\varepsilon Z$, мы можем записать это определение в терминах относительного периодического умножения:

$$H_n(M, G) = \mathrm{Tor}_n^{(Z(M), Z)}(G, Z) \cong \mathrm{Tor}_n^{Z(M)}(G, Z). \tag{5.2}$$

В частности, $H_0(M, G) = G \otimes_M Z$. Мы оставляем читателю описание когомологии моноида.

Для свободного модуля высшие периодические произведения тривиальны, поэтому имеем

Предложение 5.1. *Для группы* Π *и свободного* Π-*модуля* F

$$H_0(\Pi, F) \cong F \otimes_\Pi Z, \quad H_n(\Pi, F) = 0, \quad n > 0.$$

Заметим, что если F — свободный Π-модуль с образующими $\{t\}$, то $F \otimes_\Pi Z$ — свободная абелева группа с образующими $\{t \otimes 1\}$.

Коммутант $[\Pi, \Pi]$ — это подгруппа группы Π, порожденная всеми коммутаторами $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in \Pi$. Коммутант является нормальным делителем Π; факторгруппа $\Pi/[\Pi, \Pi]$ абелева, а ядро любого гомоморфизма группы Π в произвольную абелеву группу содержит коммутант $[\Pi, \Pi]$.

Предложение 5.2. *Для группы* Π *и тривиального* Π-*модуля* Z

$$H_0(\Pi, Z) \cong Z, \qquad H_1(\Pi, Z) \cong \Pi/[\Pi, \Pi]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Группы гомологий модуля Z — это группы гомологий комплекса $Z \otimes_\Pi B(Z(\Pi))$, который является редуцированной B-резольвентой $\overline{B}(Z(\Pi))$ из § 2, причем $\overline{B}_0 = Z$, $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ — свободные абелевы группы с образующими $[x]$ и $[x|y]$, $x \neq 1 \neq y$ соответственно и с граничным гомоморфизмом $\partial[x] = 0$, $\partial[x|y] = [y] - [xy] + [x]$. Отсюда $H_0 \cong Z$, а каждый $[x]$ есть цикл. По формуле взятия границы имеет место соотношение $\mathrm{cls}[x|y] = \mathrm{cls}[x] + \mathrm{cls}[y]$. Значит, отображение $\varphi x = \mathrm{cls}[x]$ определяет гомоморфизм $\varphi : \Pi/[\Pi, \Pi] \to H_1(\Pi, Z)$. Поскольку $\overline{B}_1$ — свободная абелева группа, отображение $[x] \to x[\Pi, \Pi]$ продолжается до гомоморфизма $\overline{B}_1 \to \Pi/[\Pi, \Pi]$, который аннулирует все границы. Поэтому можно определить гомоморфизм, обратный φ, положив $\varphi^{-1}\mathrm{cls}[x] = x[\Pi, \Pi]$, так что φ — изоморфизм, что и требовалось для доказательства второго соотношения (5.3).

Гомология группы (или моноида) является специальным случаем гомологии Хохшильда ее группового кольца.

Предложение 5.3. *Для правого модуля G над моноидом M существует изоморфизм $H_n(M, G) \cong H_n(Z(M), {}_\varepsilon G)$ гомологии моноида и гомологии алгебры $Z(M)$. Этот изоморфизм естествен по аргументу G.*

Доказательство. Возьмем Z-алгебру $\Lambda = Z(M)$. Для любого Λ-бимодуля B изоморфизм ${}_\varepsilon G \otimes_{\Lambda\text{-}\Lambda} B \cong G \otimes_\Lambda (B \otimes_{\Lambda^\varepsilon} Z)$ задается сопоставлением $g \otimes b \to g \otimes (b \otimes 1)$. Применим его к случаю $B = B(\Lambda, \Lambda)$; это показывает, что комплекс, использованный в определении гомологии алгебры Λ с коэффициентами в ${}_\varepsilon G$, изоморфен комплексу, использованному в определении гомологии моноида M над G.

Для когомологий имеется соответствующий результат.

Предложение 5.4. *Для левых Π-модулей A существует естественный изоморфизм*

$$H^n(\Pi, A) \cong H^n(Z(\Pi), A_\varepsilon).$$

Доказательство. Этот результат есть следствие предложения 3.4, так как когомология группы Π, стоящей слева, определена с помощью резольвенты $B(Z(\Pi))$, а когомология алгебры $Z(\Pi)$ — с помощью резольвенты $B(Z(\Pi), Z(\Pi))$.

Эти предложения сводят (ко)гомологию групп к (ко)гомологии алгебр. Обратно, (ко)гомология Z-алгебры $Z(\Pi)$ сводится к (ко)гомологии группы Π. Эта редукция основана на двух специальных свойствах группового кольца $Z(\Pi)$. Во-первых, формула $\psi x = x \otimes x$ определяет кольцевой гомоморфизм $\psi : Z(\Pi) \to Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)$; действительно, ψ — это коумножение, которое превращает алгебру $Z(\Pi)$ в алгебру Хопфа (VI.9). Во-вторых, алгебра $Z(\Pi)$ канонически изоморфна своему антиизоморфному кольцу. Действительно, если антиизоморфное кольцо $Z(\Pi)^{\mathrm{op}}$ состоит, как обычно, из элементов r^{op}, где $r \in Z(\Pi)$, с умножением $r^{\mathrm{op}}s^{\mathrm{op}} = (sr)^{\mathrm{op}}$, то функция $\xi(x) = (x^{-1})^{\mathrm{op}}$, заданная в группе Π со значениями в $Z(\Pi)^{\mathrm{op}}$, имеет свойства: $\xi(1) = 1$, $\xi(xy) = \xi(x)\,\xi(y)$ и, следовательно (предложение IV.1.1), продолжается до кольцевого гомоморфизма $\xi : Z(\Pi) \to Z(\Pi)^{\mathrm{op}}$, являющегося, очевидно, изоморфизмом. Произведение отображения $1 \otimes \xi$ и коумножения дает кольцевой гомоморфизм

$$\chi : Z(\Pi) \xrightarrow{\varphi} Z(\Pi) \otimes Z(\Pi) \xrightarrow{1 \otimes \xi} Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)^{\mathrm{op}}; \tag{5.4}$$

этот кольцевой гомоморфизм χ продолжает мультипликативное отображение $\chi(x) = x \otimes (x^{-1})^{\mathrm{op}}$.

Отображение χ позволяет провести редукцию (бимодульной) когомологии алгебры $Z(\Pi)$ к когомологии группы Π. Каждый бимодуль ${}_\Pi C_\Pi$ является левым $Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)^{\mathrm{op}}$ — модулем и, значит, левым Π-модулем ${}_\chi C$, где структура определяется отступлением вдоль χ. Эти новые левые операторы из Π в C будут обозначаться $x \circ c$, $x \in \Pi$; они не совпадают с исходными левыми операторами, но могут быть определены в терминах бимодульных операторов так: $x \circ c = xcx^{-1}$. Аналогично C_χ обозначает правый Π-модуль с операторами $c \circ x = x^{-1}cx$.

Теорема 5.5. *Для группы Π и Π-бимодуля C существуют естественные изоморфизмы*

$$H^n(Z(\Pi), C) \cong H^n(\Pi, {}_\chi C), \quad H_n(\Pi, C_\chi) \cong H_n(Z(\Pi), C), \tag{5.5}$$

индуцированные цепным преобразованием $h : B(Z(\Pi)) \to B(Z(\Pi), Z(\Pi))$, определенным следующей формулой:

$$h_n(x[x_1 | \ldots | x_n]) = x[x_1 | \ldots | x_n](xx_1 \ldots x_n)^{-1}, \quad x_i \in \Pi.$$

Коротко говоря, «двусторонние» операторы в когомологиях групп сводятся к «односторонним» операторам (Эйленберг, Маклейн [1947], § 5).

В доказательстве мы будем обозначать через B^L левую B-резольвенту $B(Z(\Pi))$ и через B — бимодульную B-резольвенту $B(Z(\Pi), Z(\Pi))$. Поскольку B_n^L — свободная абелева группа с образующими $x[x_1 | \ldots | x_n]$, данная выше формула определяет гомоморфизм $h_n : B_n^L \to B_n$ абелевых групп. Для левого оператора $y \in \Pi$

$$h_n(yx[x_1 | \ldots | x_n]) = y\{x[x_1 | \ldots | x_n](xx_1 \ldots x_n)^{-1}\}y^{-1};$$

это равенство показывает, что $h : B^L \to {}_\chi B$ есть гомоморфизм левых Π-модулей. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "I"'] \arrow[r, shift right, dashed, "s_{-1}"'] & B_0^L \arrow[l, shift right, "\varepsilon^L"'] \arrow[d, "h_0"] \arrow[r, shift right, dashed, "s_0"'] & B_1^L \arrow[l, shift right, "\partial"'] \arrow[d, "h_1"] \arrow[r, shift right, dashed, "s_1"'] & B_2^L \arrow[l, shift right] \arrow[d, "h_2"] \ldots \\
Z(\Pi) \arrow[r, shift right, dashed, "s_{-1}"'] & B_0 \arrow[l, shift right, "\varepsilon"'] \arrow[r, shift right, dashed] & B_1 \arrow[l, shift right, "\partial"'] \arrow[r, shift right, dashed] & B_2 \arrow[l, shift right] \ldots,
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

в которой $I : Z \to Z(\Pi)$ есть вложение. Стягивающие гомотопии s наверху и внизу определяются посредством «перемещения первого аргумента внутрь», откуда вытекает коммутативность $hs = sh$ (причем $h_{-1} = I$). Теперь ε и ∂ наверху и внизу однозначно определяются с помощью рекурсии тем фактом, что s — стягивающая гомотопия; отсюда следует, что $h\partial = \partial h$, $I\varepsilon^L = \varepsilon h_0$. Эти соотношения коммутативности можно, с другой стороны, установить непосредственной проверкой; при этом нужно обращать внимание только на первый и последний члены формулы для взятия границы. Значит, $h: B^L \to B$ есть цепное преобразование.

Пусть теперь h^* — индуцированное отображение коцепных комплексов Hom (B, C). Произведение h^* и отступления $\mathrm{Hom}_{\Pi\text{-}\Pi} \to \mathrm{Hom}_\Pi$ дает коцепное преобразование

$$\varphi: \mathrm{Hom}_{\Pi\text{-}\Pi}(B, C) \to \mathrm{Hom}_\Pi({}_\chi B, {}_\chi C) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Hom}_\Pi(B^L, {}_\chi C).$$

Именно для n-мерной коцепи f слева

$$(\varphi f)(x_1, \ldots, x_n) = f(h[x_1|\ldots|x_n]) = [f(x_1, \ldots, x_n)](x_1 \ldots x_n)^{-1}.$$

Но для n-мерной коцепи g из B^L обратное отображение к φ определяется формулой

$$(\varphi^{-1}g)(x_1, \ldots, x_n) = [g(x_1, \ldots, x_n)](x_1 \ldots x_n).$$

Значит, φ — это изоморфизм групп коцепей и, следовательно, групп когомологий. Доказательство для гомологий аналогично.

Изоморфизм, установленный в этой теореме, можно описать в более инвариантных терминах как результат замены колец. Для случая гомологий рассмотрим $H_n(Z(\Pi), C)$ как относительное периодическое произведение $\mathrm{Tor}_n(C, Z(\Pi))$ (см. 1.4) для пары колец $(Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)^{op}, Z)$, а $H_n(\Pi, C_\chi)$ как относительное периодическое произведение $\mathrm{Tor}_n(C_\chi, {}_\varepsilon Z)$ (см. 5.2) для пары колец $Z(\Pi)$ и Z. Отображения χ и $I: Z \to Z(\Pi)$ порождают морфизм

$$(\chi, 1_C, I): (Z(\Pi), Z; C_\chi, {}_\varepsilon Z) \to (Z(\Pi) \otimes Z(\Pi)^{op}, Z; C, Z(\Pi))$$

из категории $\mathscr{R}^{++}$ «замен колец» (IX.8.10). Диаграмма (5.6) описывает h как цепное преобразование, найденное в IX.8 с помощью теоремы сравнения, так что изоморфизм, указанный в теореме,— это в точности индуцированнное отображение $(\chi, 1_C, I)_*$ для относительного периодического произведения при замене колец.

Замечание. Среди работ, относящихся к точному вычислению групп когомологий и гомологий групп, укажем работы Линдона [1950] для групп с одним определяющим соотношением, Грюнберга [1960] для резольвенты, построенной из свободного представления П, Уолла [1961] для «сплетенной» резольвенты для группового расширения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Картан — Эйленберг, стр. 201.) Гомологию и когомологию абелевой группы G, рассматриваемой как тривиальный П-модуль, можно вычислить с помощью редуцированной B-резольвенты. Установить точность последовательностей

$$0 \to H_n(\Pi, Z) \otimes G \to H_n(\Pi, G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\Pi, Z), G) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Ext}(H^{n-1}(\Pi, Z), G) \to H^n(\Pi, G) \to \mathrm{Hom}(H^n(\Pi, Z), G) \to 0.$$

2. Для абелевой группы G показать, что $H_1(\Pi, G) \cong G \otimes (\Pi/[\Pi, \Pi])$.

3. Исследовать результат сопряжения на $H_n(\Pi, G)$ (см. предложение IV.5.6).

4. (Картан — Эйленберг, следствие X.4.2.) Если абелева группа П содержит моноид M, который порождает П как группу, то каждый П-модуль A или G является также M-модулем. Показать, что вложение $M \to \Pi$ индуцирует изоморфизмы

$$H^n(\Pi, A) \cong H^n(M, A), \quad H_n(M, G) \cong H_n(\Pi, G).$$

§ 6. Расширения основного кольца и прямые произведения

В этом параграфе будет изучаться действие на гомологию и когомологию Хохшильда некоторых стандартных конструкций на алгебрах: расширений основного кольца и прямых произведений. Тензорные произведения будут рассмотрены в § 7.

Рассмотрим расширение основного кольца $\mathbf{K}$ до коммутативной $\mathbf{K}$-алгебры R. Каждая $\mathbf{K}$-алгебра Λ порождает R-алгебру $\Lambda^R = R \otimes \Lambda$; имеются кольцевые гомоморфизмы $j_\mathbf{K}: \mathbf{K} \to R$ и $j_\Lambda: \Lambda \to \Lambda^R$, определяемые формулами $j_\mathbf{K}(k) = k1_R$ и $j_\Lambda(\lambda) = 1_R \otimes \lambda$, так что $(j_\mathbf{K}, j_\Lambda): (\mathbf{K}, \Lambda) \to (R, \Lambda^R)$ есть замена алгебр. Каждый Λ^R-модуль или бимодуль превращается при отступлении вдоль j_Λ в Λ-модуль или бимодуль. Имеется также возможность обратного перехода. Каждый $\mathbf{K}$-модуль M определяет R-модуль $M^R = R \otimes M$ и гомоморфизм $\mathbf{K}$-модулей $j_M: M \to M^R$, задаваемый формулой $j_M(m) = 1 \otimes m$. Каждый $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $\mu: M \to N$ определяет R-модульный гомоморфизм $\mu^R: M^R \to N^R$ равенством $\mu^R(r \otimes m) = r \otimes \mu m$, так что $\mu^R j_M = j_N \mu$. Поэтому функции $T^R(M) = M^R$, $T^R(\mu) = \mu^R$ определяют ковариантный функтор из категории $\mathbf{K}$-модулей в категорию R-модулей. Этот функтор сохраняет тензорные произведения ($\otimes$, как всегда, означает $\otimes_\mathbf{K}$), поскольку отображения j_M и j_N порождают естественный изоморфизм

$$\varphi: (M \otimes N)^R \cong M^R \otimes_R N^R, \quad \varphi(r \otimes (m \otimes n)) = r j_M m \otimes j_N n, \tag{6.1}$$

обратный к которому определяется формулой

$$\varphi^{-1}[(r \otimes m) \otimes_R (r' \otimes n)] = rr' \otimes m \otimes n.$$

Мы будем рассматривать φ как отождествление.

Для любого R-модуля U и любого $\mathbf{K}$-модуля M имеется естественный изоморфизм

$$\psi: U \otimes M \cong U \otimes_R M^R, \quad \psi(u \otimes m) = u \otimes_R j_M m \tag{6.2}$$

R-модулей, причем R-модульная структура в $U \otimes M$ задается с помощью R-модульной структуры в U. Обратное к ψ отображение дается формулой $\psi^{-1}(u \otimes_R (r \otimes m)) = ur \otimes m$. Существует аналогичный естественный изоморфизм R-модулей

$$\chi : \mathrm{Hom}(M, U) \cong \mathrm{Hom}_R(M^R, U), \quad (\chi f)(r \otimes m) = rf(m), \tag{6.3}$$

причем обратный изоморфизм действует на каждый R-модульный гомоморфизм $g : M^R \to U$ так: $(\chi^{-1}g)(m) = g(1 \otimes m)$.

Группы гомологий и когомологий расширенной алгебры Λ^R с коэффициентами в любом Λ^R-бимодуле A, по существу, определяются гомологией и когомологией алгебры Λ с коэффициентами в A, превращенном в Λ-бимодуль отступлением вдоль $j_\Lambda : \Lambda \to \Lambda^R$.

Теорема 6.1. *Для* **K**-*алгебры* Λ, *для коммутативной* **K**-*алгебры* R *и для каждого* Λ^R-*бимодуля* A *существуют естественные изоморфизмы*

$$\tau_* : H_n(\Lambda, {}_jA_j) \cong H_n(\Lambda^R, A), \quad \sigma^* : H^n(\Lambda^R, A) \cong H^n(\Lambda, {}_jA_j)$$

R-*модулей, где* $H(\Lambda, {}_jA_j)$ *превращается в* R-*модуль при помощи* R-*модульной структуры в* A. *Здесь* τ_* *индуцируется заменой алгебр* $\tau = (j_{\mathbf{K}}, j_\Lambda, 1_A) : (\mathbf{K}, \Lambda, {}_jA_j) \to (R, \Lambda^R, A)$ *в категории* $\mathscr{B}^+$, *а* σ^* — *заменой* $\sigma = (j_{\mathbf{K}}, j_\Lambda, 1_A)$ *в категории* $\mathscr{B}^-$ (*см.* § 4).

Доказательство. Отображение $\tau_* : A \otimes \Lambda^n \to A \otimes_R (\Lambda^R)^n$ как отображение соответствующих ненормализованных комплексов является произведением отображений $\psi : A \otimes \Lambda^n \cong A \otimes_R (\Lambda^n)^R$ и $\varphi : (\Lambda^n)^R \cong (\Lambda^R)^n$. Оба эти отображения в силу (6.1) и (6.2) являются изоморфизмами, следовательно, τ_* — изоморфизм комплексов и, значит, изоморфизм их модулей гомологий $H_n(\Lambda, {}_jA_j)$ и $H_n(\Lambda^R, A)$.

Доказательство для модулей когомологий проводится аналогично с использованием χ вместо ψ.

Прямое произведение $\Lambda = \Gamma \times \Sigma$ двух **K**-алгебр можно рассматривать как частный случай прямого произведения колец (IX.9). Когомология Хохшильда $H^n(\Lambda, A)$ — это $\mathrm{Ext}^n_{(R,S)}(\Lambda, A)$, где $R = \Lambda \otimes \Lambda^{\mathrm{op}}$, причем

$$(\Gamma \times \Sigma) \otimes (\Gamma \times \Sigma)^{\mathrm{op}} \cong (\Gamma \otimes \Gamma^{\mathrm{op}}) \times (\Gamma \otimes \Sigma^{\mathrm{op}}) \times (\Sigma \otimes \Gamma^{\mathrm{op}}) \times (\Sigma \otimes \Sigma^{\mathrm{op}}),$$

а S — образ отображения $I : \mathbf{K} \to \Lambda \otimes \Lambda^{\mathrm{op}}_{\mathbf{K}}$; проекция этого образа на любой из четырех прямых множителей алгебры $\Lambda \otimes \Lambda^{\mathrm{op}}$ совпадает с соотвествующим образом **K** в этом множителе. Предложение IX.9.2 утверждает, что каждый Λ-бимодуль A имеет каноническое разложение

$$A = {}'A' \oplus {}'A'' \oplus {}''A' \oplus {}''A'', \quad {}_\Gamma' A'_\Gamma, \; {}_\Gamma' A''_\Sigma, \; {}_\Sigma'' A'_\Gamma, \; {}_\Sigma'' A''_\Sigma \tag{6.4}$$

в прямую сумму указанных бимодулей; более подробно, ${}'A' = \Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma$ и т. д. В частности, Λ-бимодуль Λ представляется как прямая сумма $\Lambda = \Gamma \oplus \Sigma$ только двух ненулевых компонент:

Γ-бимодуля Γ и Σ-бимодуля Σ. Из теоремы IX.9.4 для случая четырех множителей вытекает

Теорема 6.2. *Для каждого* $(\Gamma \times \Sigma)$-*бимодуля* A *имеются естественные изоморфизмы*

$$H^n(\Gamma \times \Sigma, A) \cong H^n(\Gamma, \Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma) \oplus H^n(\Sigma, \Sigma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Sigma), \tag{6.5}$$

$$H_n(\Gamma \times \Sigma, A) \cong H_n(\Gamma, \Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma) \oplus H_n(\Sigma, \Sigma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Sigma). \tag{6.6}$$

Действительно, проекции $\Gamma \times \Sigma \to \Gamma$ и $A \to \Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma$ порождают морфизм ζ' в категории $\mathscr{B}^+_{\mathbf{K}}$ замен алгебр из § 4 и, следовательно, морфизм $\zeta'_* : H_n(\Gamma \times \Sigma, A) \to H_n(\Gamma, \Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma)$. Замена Γ на Σ дает отображение ζ''_*; изоморфизм (6.6) является сопоставлением $h \to (\zeta'_* h, \zeta''_* h)$. Аналогично изоморфизм (6.5) в противоположном направлении индуцируется проекцией $\Gamma \times \Sigma \to \Gamma$ и вложением $\Gamma \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \Gamma \to A$ в категории $\mathscr{B}^-_{\mathbf{K}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для группы Π и коммутативного кольца **K** дать прямое описание пополненной **K**-алгебры $Z(\Pi)^{\mathbf{K}}$ (она называется *групповой алгеброй* группы Π над **K**).

2. Для Λ-бимодуля A показать, что существует единственная Λ^R-бимодульная структура в A^R, такая, что $(j_{\mathbf{K}}, j_\Lambda, j_A) : (\mathbf{K}, \Lambda, A) \to (R, \Lambda^R, A^R)$ есть замена колец из $\mathscr{B}^+$. Получить естественный гомоморфизм $H_n(\Lambda, A) \to H_n(\Lambda^R, A^R)$ и показать на примерах, что он может не быть изоморфизмом. Отметить также, что модуль A^R, превращенный в Λ-бимодуль отступлением вдоль j_Λ, не совпадает с A.

§ 7. Гомология тензорных произведений

Рассмотрим тензорное произведение $\Lambda \otimes \Lambda'$ двух **K**-алгебр Λ и Λ'. Если A и A' — бимодули над Λ и Λ' соответственно, то $A \otimes A'$ есть $\Lambda \otimes \Lambda'$-бимодуль, причем левые операторы действуют так: $(\lambda \otimes \lambda')(a \otimes a') = \lambda a \otimes \lambda' a'$, правые операторы действуют аналогично. В некоторых случаях мы можем вычислить гомологию модуля $A \otimes A'$, зная гомологию A и A'.

Предложение 7.1. *Если* $\varepsilon : X \to A$ *и* $\varepsilon' : X' \to A'$ *есть* **K**-*расщепляющиеся резольвенты левых* Λ- *и* Λ'-*модулей соответственно, то* $\varepsilon \otimes \varepsilon' : X \otimes X' \to A \otimes A'$ *есть* **K**-*расщепляющаяся резольвента левого* $(\Lambda \otimes \Lambda')$-*модуля* $A \otimes A'$. *Если* X *и* X' *относительно свободны, то относительно свободна и резольвента* $X \otimes X'$.

Доказательство. Предположение о **K**-расщепляемости резольвенты X означает, как показано в следствии IX.5.3, что существует **K**-модульная стягивающая гомотопия s, квадрат которой равен нулю. Эти гомотопии для резольвент X и X' вместе дают $\mathbf{K}$-модульную стягивающую гомотопию (V.9.3) для резольвенты $\varepsilon \otimes \varepsilon' : X \otimes X' \to A \otimes A'$, квадрат которой тоже равен нулю.

Если резольвенты X и X' относительно свободны, то $X_p = \Lambda \otimes M_p$ и $X'_q = \Lambda' \otimes M'_q$ для некоторых $\mathbf{K}$-модулей M_p и M'_q, так что $(X \otimes X')_n \cong \sum (\Lambda \otimes \Lambda') \otimes (M_p \otimes M'_q)$, где прямая сумма берется по всем $p + q = n$, есть относительно свободный модуль.

Применяя этот результат к B-резольвенте, получаем

Следствие 7.2. *Для модулей ${}_\Lambda A$, ${}_{\Lambda'} A'$ существует цепная эквивалентность*

$$B(\Lambda, A) \otimes B(\Lambda', A') \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A'), \tag{7.1}$$

отображения которой являются цепными преобразованиями комплексов левых $\Lambda \otimes \Lambda'$-модулей, коммутирующими с ε и ε'.

Доказательство. В силу предложения 7.1 обе части соотношения (7.1) являются $\mathbf{K}$-расщепляющимися относительно свободными резольвентами левого $\Lambda \otimes \Lambda'$-модуля $A \otimes A'$; теперь остается применить теорему сравнения.

Точное выражение для цепного преобразования дается следующим естественным отображением:

$$f\{\lambda \otimes \lambda' [\lambda_1 \otimes \lambda'_1 | \dots | \lambda_n \otimes \lambda'_n] a \otimes a'\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \lambda [\lambda_1 | \dots | \lambda_i] \lambda_{i+1} \dots \lambda_n a \otimes \lambda' \lambda'_1 \dots \lambda'_i [\lambda'_{i+1} | \dots | \lambda'_n] a'; \tag{7.2}$$

действительно, читатель может проверить, что это отображение есть каноническое сравнение. То же самое можно установить, убедившись в том, что f — это отображение Александера — Уитни (VIII.8.7), определяемое на $B(\Lambda, A) = \beta_N(\Lambda, A)$ симплициальной структурой в $\beta(\Lambda, A)$.

Для случая $A = \Lambda$, $A' = \Lambda'$ это следствие устанавливает цепную эквивалентность

$$B(\Lambda, \Lambda) \otimes B(\Lambda', \Lambda') \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B(\Lambda \otimes \Lambda', \Lambda \otimes \Lambda') \tag{7.3}$$

$\Lambda \otimes \Lambda'$-бимодулей; отображение f снова задается формулой, аналогичной (7.2).

Теорема 7.3. *Гомологическое и когомологическое умножения индуцируют гомоморфизмы*

$$p_\Lambda : H_k(\Lambda, A) \otimes H_m(\Lambda', A') \to H_{k+m}(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A'), \tag{7.4}$$

$$p^\Lambda : H^k(\Lambda, A) \otimes H^m(\Lambda', A') \to H^{k+m}(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A') \tag{7.5}$$

$\mathbf{K}$-модулей, естественные относительно бимодулей A и A' и коммутирующие со связывающими гомоморфизмами для $\mathbf{K}$-расщепляющихся коротких точных последовательностей бимодулей A или A'. Для $k = m = 0$ эти умножения индуцируются тождественным отображением в $A \otimes A'$. Эти умножения ассоциативны.

Доказательство. Модули гомологий $H_k(\Lambda, A)$ определяются как модули $H_k(A \otimes_\Omega B)$, где Ω обозначает алгебру $\Lambda \otimes \Lambda^{op}$, а B есть сокращение для $B(\Lambda, \Lambda)$. Гомологическое умножение из (VIII.1.2) — это естественное отображение

$$p_H : H_k(A \otimes_\Omega B) \otimes H_m(A' \otimes_{\Omega'} B') \to H_{k+m}[(A \otimes A') \otimes_{\Omega \otimes \Omega'} (B \otimes B')].$$

Область значений отображения изоморфна $H_{k+m}(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A')$, причем этот изоморфизм устанавливается эквивалентностью g_* из (7.3), так что умножение p_Λ из (7.4) определяется как произведение $g_* p_H$; в размерности нуль [ср. с (4.4)] оно переводит $\operatorname{cls} a \otimes \operatorname{cls} a'$ в $\operatorname{cls}(a \otimes a')$. Если E есть $\mathbf{K}$-расщепляющаяся короткая точная последовательность Λ-бимодулей, то тензорное произведение $E \otimes_{\mathbf{K}} A'$ тоже является короткой точной последовательностью Λ-бимодулей, поэтому определены соответствующие связывающие гомоморфизмы. Они коммутируют с p_H по теореме VIII.1.3 и с естественным отображением g_* и, значит, с умножением p_Λ.

В данном выше определении этого гомологического умножения B-резольвента $B = B(\Lambda, \Lambda)$ может быть заменена любой $\mathbf{K}$-расщепляющейся резольвентой Λ из относительно проективных Λ-бимодулей.

Случай когомологий рассматривается аналогично. Запишем $H^k(\Lambda, A)$ как $H^k(\operatorname{Hom}_\Omega(B, A))$ и используем когомологическое умножение

$$p^H : H^k(\operatorname{Hom}_\Omega(B, A)) \otimes H^m(\operatorname{Hom}_{\Omega'}(B', A')) \to$$
$$\to H^{k+m}(\operatorname{Hom}_{\Omega \otimes \Omega'}(B \otimes B', A \otimes A'))$$

из (VIII.1.3); для определения p^Λ умножим p^H на изоморфизм f^*, индуцированный цепной эквивалентностью f из (7.3): $p^\Lambda = f^* p^H$. Поскольку f — отображение Александера — Уитни, p^Λ можно рассматривать как симплициальное $\cup$-умножение. Если $k = m = 0$, то $H^0(\Lambda, A)$ — это $\mathbf{K}$-подмодуль A^Λ модуля A, состоящий из инвариантных элементов из A, как показано в (3.3). Теперь из $a \in A^\Lambda$ и $a' \in A'^{\Lambda'}$ следует, что $a \otimes a' \in (A \otimes A')^{\Lambda \otimes \Lambda'}$, поэтому тождественное отображение индуцирует $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм

$$A^\Lambda \otimes A'^{\Lambda'} \to (A \otimes A')^{\Lambda \otimes \Lambda'} \cong H^0(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A').$$

Приведенная выше формула для f в размерности нуль показывает, что это отображение совпадает с p^Λ.

Теорема 7.4. *Если Λ и Λ' — алгебры над одним и тем же полем, то гомологическое умножение для бимодулей A и A' порождает для каждого n естественный изоморфизм*

$$p_\Lambda: \sum_{k+m=n} H_k(\Lambda, A) \otimes H_m(\Lambda', A') \cong H_n(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A').$$

Если дополнительно Λ и Λ' суть **K**-*модули конечного типа, то когомологическое умножение является естественным изоморфизмом*

$$p_\Lambda: \sum_{k+m=n} H^k(\Lambda, A) \otimes H_m(\Lambda', A') \cong H^n(\Lambda \otimes \Lambda', A \otimes A').$$

Доказательство. Первый изоморфизм есть непосредственное применение тензорной формулы Кюннета, указанной в теореме VIII.1.1. Если алгебра Λ конечного типа, то каждый модуль $B_n(\Lambda, \Lambda)$ является свободным Λ-бимодулем конечного типа, поэтому Hom-$\otimes$-перестановка есть изоморфизм и можно применить теорему VIII.1.2.

Эта теорема впервые была доказана Розе [1952] до того, как стала известной техника резольвент, поэтому его доказательство существенно зависит от прямого построения цепной эквивалентности (7.3), использующего перетасовки для описания отображения g.

Для алгебр над полем $H^n(\Lambda, A) = \operatorname{Ext}^n_{\Lambda\text{-}\Lambda}(\Lambda, A)$.

Используем символ bidim Λ для обозначения гомологической размерности алгебры Λ как бимодуля. Тогда эта теорема показывает, что для алгебр конечного типа над полем $\operatorname{bidim}(\Lambda \otimes \Lambda') \geqslant \operatorname{bidim} \Lambda + \operatorname{bidim} \Lambda'$. Аналогично теорема 6.2 показывает, что

$$\operatorname{bidim}(\Gamma \times \Sigma) = \operatorname{Max}(\operatorname{bidim} \Gamma, \operatorname{bidim} \Sigma).$$

Отсюда следует еще одно, более причудливое, доказательство результата предложения VII.5.2 о том, что из $\operatorname{bidim} \Gamma = 0 = \operatorname{bidim} \Sigma$ следует $\operatorname{bidim}(\Gamma \times \Sigma) = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для правого модуля G и левого модуля A над Λ k-е относительное периодическое произведение определяется как $H_k(G \otimes_\Lambda B \otimes_\Lambda A)$, где B обозначает $B(\Lambda, \Lambda)$. Внешнее умножение для относительного периодического функтора — это отображение

$$p_T: \operatorname{Tor}_k^{(\Lambda, K)}(G, A) \otimes \operatorname{Tor}_m^{(\Lambda', K)}(G', A') \to \operatorname{Tor}_{k+m}^{(\Lambda\otimes\Lambda', K)}(G \otimes G', A \otimes A'),$$

определенное как произведение гомологического умножения для комплексов, цепного преобразования

$$(G \otimes_\Lambda B \otimes_\Lambda A) \otimes (G' \otimes_{\Lambda'} B' \otimes_{\Lambda'} A') \cong (G \otimes G') \otimes_{\Lambda\otimes\Lambda'} (B \otimes B') \otimes_{\Lambda\otimes\Lambda'} (A \otimes A'),$$

получающегося путем двойного применения внутренней четверной перестановки, и цепной эквивалентности g из (7.3). Показать, что умножение p_T естественно, коммутирует со связывающими гомоморфизмами по всем четырем аргументам и сводится в случае $k = m = 0$ к внутренней четверной перестановке.

2. Для поля **K** показать, что относительное периодическое умножение из упражнения 1 дает изоморфизм

$$\sum_{k+m=n} \operatorname{Tor}_k(G, A) \otimes \operatorname{Tor}_m(G', A') \cong \operatorname{Tor}_n(G \otimes G', A \otimes A').$$

3. Показать, что умножение p_Λ из текста является [в силу (1.4)] специальным случаем внешнего умножения для относительного периодического умножения.

4. Построить аналогичное внешнее умножение для относительного функтора Ext.

§ 8. Случай градуированных алгебр

Если G_Λ и ${}_\Lambda A$ — модули над градуированной **K**-алгеброй Λ, то их тензорное произведение $G \otimes_\Lambda A$, описанное в (VI.5.7), является градуированным **K**-модулем. Кроме того, функтор $G \otimes_\Lambda A$ точен справа: каждая **K**-расщепляющаяся короткая точная последовательность $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ левых Λ-модулей дает точную справа последовательность

$$G \otimes_\Lambda A \to G \otimes_\Lambda B \to G \otimes_\Lambda C \to 0$$

градуированных **K**-модулей. Для продолжения этой точной последовательности влево необходимы $(\Lambda, \mathbf{K})$-относительные периодические произведения $\operatorname{Tor}_n(G, C)$, каждое из которых, подобно $G \otimes_\Lambda A$, должно быть градуированным **K**-модулем $\operatorname{Tor}_n = \{\operatorname{Tor}_{n,p} \mid p = 0, 1, \ldots\}$. Мы сейчас опишем, как это происходит.

Можно построить B-резольвенту для любой градуированной **K**-алгебры Λ, используя общую конструкцию из IX.7 для следующей резольвентной пары категорий: $\mathcal{A}$ — категория (автоматически градуированных) левых Λ-модулей C, $\mathcal{M}$ — категория градуированных **K**-модулей M, $F(M) = \Lambda \otimes M$, $e(m) = 1 \otimes m$, причем в этих категориях в качестве морфизмов берутся морфизмы степени 0. Заметим, что $\Lambda = \{\Lambda_p\}$, $C = \{C_p\}$ и $M = \{M_p\}$ — градуированные **K**-модули. Явные формулы для B-резольвенты из § 2 по-прежнему остаются в силе, если считать, что каждый Λ-модуль $B_n(\Lambda, C)$ градуирован; действительно, *степень* образующего из B_n можно определить так:

$$\deg \lambda [\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c = \deg \lambda + \deg \lambda_1 + \ldots + \deg \lambda_n + \deg c. \tag{8.1}$$

Этот элемент имеет в то же время *размерность* n как элемент $B_n(\Lambda, C)$; другими словами, комплекс $B(\Lambda, C)$ биградуирован подмодулями $B_{n,p}(\Lambda, C)$ размерности n и степени p в смысле (8.1).

Вследствие этого относительный периодический функтор $\operatorname{Tor}^{(\Lambda, \mathbf{K})}$ биградуирован. Действительно, если G — правый Λ-модуль, то периодический функтор вычисляется как гомология комплекса $X = G \otimes_\Lambda B(\Lambda, C)$, где каждый модуль $X_n = G \otimes_\Lambda B_n$ является градуированным $\mathbf{K}$-модулем. Именно X_n порождается элементами $g[\lambda_1 | \ldots | \lambda_n] c$, степень которых определяется равенством (8.1) (причем λ заменяется на g). Граничный гомоморфизм $\partial: X_n \to X_{n-1}$ имеет степень 0 относительно этой градуировки. Поэтому для каждой размерности n модуль гомологий $\operatorname{Tor}_n(G, C) = H_n(X)$ является градуированным $\mathbf{K}$-модулем и его можно записать как семейство $\{H_{n,p}(X)\}$ $\mathbf{K}$-модулей, так что относительный периодический функтор — это биградуированный $\mathbf{K}$-модуль

$$\operatorname{Tor}_{n,p}^{(\Lambda, \mathbf{K})}(G, C) = H_{n,p}(G \otimes_\Lambda B(\Lambda, C)). \tag{8.2}$$

Первая степень n — это резольвентная размерность, вторая степень p — это «внутренняя» степень, появившаяся из градуировки модулей G и C. В стандартных длинных точных последовательностях для Tor_n отображения имеют степень 0 относительно внутренней градуировки p, и поэтому эти последовательности можно рассматривать как семейство длинных точных последовательностей из модулей $\operatorname{Tor}_{n,p}$, по одной для каждого p с переменным n.

Аналогичные замечания можно сделать об относительном функторе $\operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}$. Он является когомологией комплекса $\operatorname{Hom}_\Lambda(B(\Lambda, C), A)$, который является комплексом Z-градуированных $\mathbf{K}$-модулей, т. е. семейством комплексов $\{\operatorname{Hom}_\Lambda^p(B, A)\}$, по одному для каждого целого p. Значит,

$$\operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}^{n, p}(C, A) = H^n(\operatorname{Hom}_\Lambda^p(B(\Lambda, C), A))$$

есть биградуированный $\mathbf{K}$-модуль, вторая градуировка (по p) которого есть Z-градуировка.

Достаточно знать значения этого функтора для всех модулей C и A и для $p = 0$. Мы докажем это путем замены степеней. Для каждого градуированного $\mathbf{K}$-модуля M мы обозначим через $L(M)$ тот же самый модуль, все степени которого увеличены на 1, т. е. $L(M)_{n+1} = M_n$. Тогда тождественное отображение индуцирует изоморфизм $l: M \to L(M)$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени 1 с обратным изоморфизмом $l^{-1}: L(M) \to M$. Гомоморфизм $\mu: M \to M'$ степени d — это семейство $\mathbf{K}$-модульных гомоморфизмов $\mu_n: M_n \to M'_{n+d}$; соответствующий гомоморфизм $L(\mu): L(M) \to L(M')$ той же степени d определяется следующим образом: $L(\mu)_{n+1} = (-1)^d \mu_n: L(M)_{n+1} \to L(M')_{n+d+1}$, другими словами,

$$L(\mu)\, lm = (-1)^{\deg \mu}\, l\mu m, \quad m \in M_n, \quad lm \in L(M)_{n+1}. \tag{8.3}$$

Знак появляется в силу обычного правила перестановки морфизмов $L(\mu)$ и l степеней d и 1. Поскольку $L(\mu'\mu) = L(\mu') L(\mu)$, то L — ковариантный функтор в категории градуированных $\mathbf{K}$-модулей с морфизмами степени 0, а $l: M \to L(M)$ — естественное преобразование. Левый Λ-модуль A является градуированным $\mathbf{K}$-модулем с операторами $\Lambda \otimes A \to A$, так что $L(A)$ также является левым Λ-модулем с операторами

$$\lambda(la) = (-1)^{\deg \lambda}\, l(\lambda a), \quad a \in A_n, \quad la \in L(A)_{n+1}, \tag{8.4}$$

L — ковариантный функтор в категории Λ-модулей, $l: A \to LA$ есть гомоморфизм Λ-модулей степени 1 являющийся естественным преобразованием тождественного функтора в L. Знак в (8.4) будет в точности знаком, который требуется правилом перестановки $l(\lambda a) = (-1)^{\deg l \deg \lambda} \lambda(la)$ для гомоморфизма степени 1.

Умножение на l дает естественный изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_\Lambda^p(C, A) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda^{p-1}(C, LA),$$

итерирование которого приводит к естественному изоморфизму

$$\operatorname{Hom}_\Lambda^p(C, A) \cong \operatorname{Hom}_\Lambda^0(C, L^p A).$$

Если C заменить комплексом $B(\Lambda, C)$, то отсюда вытекает естественный изоморфизм

$$\operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}^{n, p}(C, A) \cong \operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}^{n, 0}(C, L^p A), \tag{8.5}$$

который при $n = 0$ дает предшествующий изоморфизм. Аналогично

$$\operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}^{n, -p}(C, A) \cong \operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}^{n, 0}(L^p C, A). \tag{8.6}$$

Эти функторы Ext оказались полезными при изучении алгебры Стинрода для фиксированного простого числа p; это алгебра над полем Z_p вычетов по модулю p, состоящая из всех примарных (по p) когомологических операций (Адамс [1960], Лиулевичус [1960]).

УПРАЖНЕНИЕ

1. Для градуированной алгебры Λ рассмотреть соответствующую внутренне градуированную алгебру $\Lambda_* = \sum \Lambda_n$ просто как неградуированную $\mathbf{K}$-алгебру. Аналогичным образом Λ-модули G и C определяют Λ_*-модули G_* и C_*. Доказать, что

$$\operatorname{Tor}_n^{(\Lambda_*, \mathbf{K})}(G_*, C_*) \cong \sum_p \operatorname{Tor}_{n,p}^{(\Lambda, \mathbf{K})}(G, C).$$

§ 9. Комплексы комплексов

В любой абелевой категории можно построить комплексы; в частности, можно построить комплексы в категории, объекты которой сами являются комплексами, а морфизмами служат цепные преобразования. Эта ситуация встретится в следующем параграфе при изучении нами DG-алгебр.

Комплекс X комплексов может быть представлен в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} X_p: & \cdots \longrightarrow & X_{p,q+1} & \xrightarrow{d} & X_{p,q} & \xrightarrow{d} & X_{p,q-1} & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial' & & \\ X_{p-1}: & \cdots \longrightarrow & X_{p-1,q+1} & \xrightarrow{d} & X_{p-1,q} & \xrightarrow{d} & X_{p-1,q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

с дополнительными строками сверху и снизу. Каждая строка X_p — это комплекс с дифференциалом d, а последовательность строк образует комплекс с другим дифференциалом ∂', который является цепным преобразованием $\partial': X_p \to X_{p-1}$. Следовательно, $\partial' d = d\partial'$. Изменим знак у d, положив $\partial'' x_{p,q} = (-1)^p dx_{p,q}$. Это дает два семейства граничных гомоморфизмов

$$\partial' : X_{p,q} \longrightarrow X_{p-1,q}, \quad \partial'' : X_{p,q} \longrightarrow X_{p,q-1},$$

для которых $\partial'\partial' = 0$, $\partial''\partial'' = 0$, $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$. Формально отсюда следует, что $(\partial' + \partial'')(\partial' + \partial'') = 0$. Поэтому семейство X^*, ∂^*, определенное посредством равенств

$$(X^*)_n = \sum_{p+q=n} X_{p,q}, \quad \partial^* = \partial' + \partial'',$$

является (простым) комплексом. Мы будем говорить, что X^* получен из X *конденсацией*; степень этого комплекса является суммой двух данных степеней; его граничный гомоморфизм ∂^* есть сумма двух данных дифференциалов с измененным знаком. Это изменение знака можно было бы оправдать при более систематическом рассмотрении.

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая абелева категория. Напомним, что (положительный) $\mathscr{A}$-комплекс X — это семейство $\{X_p\}$ объектов из $\mathscr{A}$, причем $X_p = 0$ при $p < 0$, вместе с такими морфизмами $\partial : X_p \to X_{p-1}$ из $\mathscr{A}$, что $\partial^2 = 0$. Эти комплексы X являются объектами категории $\mathscr{A}$-комплексов $\mathscr{X}(\mathscr{A})$. Морфизмы из $\mathscr{X}(\mathscr{A})$ — это цепные *преобразования* $f : X \to Y$; они являются семействами $\mathscr{A}$-морфизмов $\{f_p : X_p \to Y_p\}$, причем $\partial f_p = f_{p-1}\partial$ для всех p. Цепная гомотопия $s : f \simeq f' : X \to Y$ является семейством $s_p : X_p \to Y_{p+1}$ таких $\mathscr{A}$-морфизмов, что $\partial s + s\partial = f - f'$. Мы будем использовать также цепные *отображения* $h : X \to Y$ степени d, т. е. семейства $\{h_p : X_p \to Y_{p+d}\}$ таких $\mathscr{A}$-морфизмов, что $\partial h = (-1)^d h\partial$. Мы не вводим явно категорию со всеми такими цепными «отображениями» в качестве морфизмов, так как наше рассмотрение абелевых категорий приспособлено только для случая морфизмов степени 0.

Поднимающий функтор L из § 8 дает ковариантный функтор из $\mathscr{X}(\mathscr{A})$ в $\mathscr{X}(\mathscr{A})$, который сопоставляет каждому комплексу X комплекс $L(X)$ с $L(X)_{n+1} = X_n$ и дифференциалом $L(\partial)$. Единица индуцирует цепное отображение l: $X \to L(X)$ степени 1; как и в (8.3), $L(\partial)\, l = -l\partial$. Короче, L увеличивает все степени на 1 и изменяет знак у граничного морфизма.

Теорема 9.1. *Конденсация является ковариантным функтором* $\mathscr{X}(\mathscr{X}(\mathscr{A})) \to \mathscr{X}(\mathscr{A})$.

Доказательство. Пусть X — положительный комплекс положительных комплексов вида

$$0 \longleftarrow X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} X_p \longleftarrow \cdots .$$

Здесь X_p — комплекс, ∂_p — цепное преобразование комплексов. Заменим этот комплекс диаграммой X':

$$0 \longleftarrow X'_0 \longleftarrow X'_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X'_{p-1} \xleftarrow{\partial'_p} X'_p \longleftarrow \cdots,$$

где каждое ∂'_p — это цепное *отображение* степени -1. Более точно, положим $X'_p = L^p(X_p)$. Цепные отображения

$$X'_p = LL^{p-1}(X_p) \xrightarrow{l^{-1}} L^{p-1}(X_p) \xrightarrow{L^{p-1}(\partial_p)} L^{p-1}(X_{p-1}) = X'_{p-1}$$

определяют ∂'_p как $l^{-1}L^p(\partial_p) = L^{p-1}(\partial_p)\, l^{-1}$. Тогда $\partial'_p\partial'_{p+1} = 0$. Каждый X'_p — это $\mathscr{A}$-комплекс с дифференциалом, который мы обозначим как ∂''. Следовательно, $X^* = \sum X'_p$ является $\mathscr{A}$-комплексом с дифференциалом ∂''. С другой стороны, $\partial'_p : X'_p \to X'_{p-1}$ имеет степень -1, и, значит, определяет второй граничный морфизм в X^*. Кроме того, ∂' — это цепное отображение степени -1 для дифференциала ∂'', так что $\partial''\partial' = -\partial'\partial''$. Поэтому морфизм $\partial^* = \partial' + \partial''$ удовлетворяет соотношению $\partial^*\partial^* = 0$, так что (X^*, ∂^*) — это $\mathscr{A}$-комплекс, называемый *конденсацией* X. Это описание X^* согласуется с первоначальным описанием, поскольку дифференциал ∂'' в X'_p отличается от дифференциала в X_p лишь p изменениями знака, вызванными применением p раз функтора L. Поскольку $X'_{p,n} = 0$ при $p > n$, при построении X^* используются только конечные прямые суммы.

Пусть теперь f: $X \to Y$ есть цепное преобразование. Оно является семейством цепных преобразований $\{f_p : X_p \to Y_p\}$ и определяет f': $X' \to Y'$ как семейство $f'_p = L^p(f_p) : X'_p \to Y'_p$. Значит, $f'_p\partial'' = \partial'' f'_p$ и $\partial' f'_p = f'_{p-1}\partial'$. Тогда для $f^* = \sum f'_p$, $\partial^* f^* = f^*\partial^*$, и поэтому

f^* является цепным преобразованием $f^*: X^* \to Y^*$. Это показывает, что конденсация есть функтор, как и утверждалось.

П р е д л о ж е н и е 9.2. *Каждая цепная гомотопия $s: f \simeq g: X \to Y$ из $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ определяет цепную гомотопию $s^*: f^* \simeq g^*: X^* \to Y^*$ конденсированных комплексов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам дано семейство $\{s_p: X_p \to Y_{p+1}\}$ морфизмов из $\mathcal{X}(\mathcal{A})$, причем $\partial_{p+1}s_p + s_{p-1}\partial_p = f_p - g_p$. Каждый морфизм s_p является цепным преобразованием, определяющим цепное отображение $s'_p: X'_p \to Y'_{p+1}$ степени 1. Именно $s' = L^{p+1}(s_p)\, l = lL^p(s_p): L^p(X_p) \to L^{p+1}(Y_{p+1})$. Поскольку s'_p имеет степень 1, $\partial'' s'_p = -s'_p\partial''$. С другой стороны, $\partial' s' + s'\partial' = f' - g'$. Складывая, получаем морфизм $s^* = \sum s'_p: X^* \to Y^*$ степени 1 и $\partial^* s^* + s^*\partial^* = f^* - g^*$; следовательно, s^* — цепная гомотопия, что и утверждалось.

Мы рассмотрим также влияние конденсации на тензорные произведения комплексов. Предположим, что в исходной категории $\mathcal{A}$ определено тензорное умножение, которое является ковариантным бифунктором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$. Тензорное умножение вводится в категории $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}$-комплексов X, Y обычными формулами $(X \otimes Y)_n = \sum_{p+q=n} X_p \otimes Y_q$ и

$$\partial = (\partial_X \otimes 1) + (-1)^p\, 1 \otimes \partial_Y: X_p \otimes Y_q \to (X \otimes Y)_{p+q-1}. \qquad (9.1)$$

В частности, если $\mathcal{M}$ — категория модулей над некоторым коммутативным основным кольцом, то этими формулами вводится тензорное умножение в категории $\mathcal{X}(\mathcal{X}(\mathcal{M}))$ комплексов комплексов.

П р е д л о ж е н и е 9.3. *Существует естественный изоморфизм $\psi: (X \otimes Y)^* \cong X^* \otimes Y^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для обычных комплексов K и K' из $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ и любых p, q существует цепной изоморфизм $\psi_{p,q}: L^{p+q}(K \otimes K') \cong L^pK \otimes L^qK'$, определяемый формулой

$$\psi_{p,q}\, l^{p+q}(k \otimes k') = (-1)^{q \deg k}\, l^p k \otimes l^q k'.$$

Пусть теперь X и Y — комплексы комплексов (т. е. объекты категории $\mathcal{X}(\mathcal{X}(\mathcal{A}))$. В комплексе комплексов $X \otimes Y$ будет $(X \otimes Y)_n = \sum X_p \otimes Y_q$, так что изоморфизмы $\psi_{p,q}$ для $p + q = n$ устанавливают цепной изоморфизм обычных комплексов

$$\psi_n: L^n((X \otimes Y)_n) \cong \sum_{p+q=n} L^p(X_p) \otimes L^q(X_q).$$

Комплекс $(X \otimes Y)^*$ есть прямая сумма комплексов $L^n((X \otimes Y)_n)$ с граничным морфизмом $\partial' + \partial''$. Комплекс $X^* \otimes Y^*$ равен $(\sum L^pX_p) \otimes (\sum L^qY^q)$ с дифференциалом, определенным обычной формулой (9.1) для тензорного произведения, исходя из дифференциалов $\partial^* = \partial' + \partial''$ для X^* и Y^*. По построению ψ_n коммутирует с ∂''; прямой подсчет показывает, что ψ_n коммутирует с ∂' и, следовательно, со всем дифференциалом ∂^*.

З а м е ч а н и е. Понятие комплекса комплексов обычно не отличают от тесно связанного с ним понятия «бикомплекса», которое будет рассмотрено в XI.6. Внешнее различие заключается в знаке в формуле $\partial'' x_{p,q} = (-1)^p\, dx_{p,q}$.

§ 10. Резольвенты и конструкции

От алгебр Λ мы теперь переходим к DGA-алгебрам U. Когда U-модуль A снабжается резольвентой, то появляются два граничных дифференциала: один из дифференциала в A, другой из резольвенты. Подходящая комбинация этих дифференциалов превращает резольвенту в некоторый определенный U-модуль, называемый «конструкцией»; в частности, каноническая резольвента основного кольца порождает «B-конструкцию» $B(U)$. Она может быть описана непосредственно последовательностью формул (10.4) — (10.8), из которых вытекают основные свойства $B(U)$, сформулированные в теореме 10.4, так же, как и ее связь с «редуцированной» B-конструкцией из следствия 10.5. Вместо этого сначала опишем B-конструкцию аксиоматическим образом путем конденсации канонической резольвенты для подходящей относительной категории.

Пусть U есть DGA-алгебра (дифференциальная градуированная пополненная алгебра) над коммутативным кольцом $\mathbf{K}$. Каждый левый U-модуль A (определенный, как в (VI.7.3)) можно считать DG-модулем (т. е. положительным комплексом $\mathbf{K}$-модулей), пренебрегая частью структуры в A. Отсюда следует, что алгебра U определяет резольвентную пару категорий:

$\mathcal{A}$ = все левые U-модули A с морфизмами степени 0;

$\mathcal{M}$ = все DG-модули M с морфизмами степени 0;

$F(M) = U \otimes M$ и $e(m) = 1 \otimes m \in F(M)$. Обозначим через $\varepsilon: U \to \mathbf{K}$ пополнение алгебры U; при отступлении $\mathbf{K}$ превращается в левый U-модуль ${}_\varepsilon\mathbf{K}$. *Пополнение A или M* — это морфизмы

$$\varepsilon_A: A \to {}_\varepsilon\mathbf{K}, \quad \varepsilon_M: M \to \mathbf{K}.$$

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Каждый левый U-модуль A определяет DG-модуль*

$$\overline{A} = \mathbf{K} \otimes_U A \cong A/JA,$$

где J — ядро $\varepsilon: U \to \mathbf{K}$. Если модуль A пополнен, то и $\overline{A}$ пополнен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним (VI.7), что тензорное произведение U-модулей является DG-модулем. Поскольку $J \rightarrowtail U \twoheadrightarrow \mathbf{K}$ есть точная последовательность правых U-модулей, последовательность

$$J \otimes_U A \to U \otimes_U A \to \mathbf{K} \otimes_U A \to 0$$

точна справа как последовательность DG-модулей. Но $U \otimes {}_U A \cong \cong A$, так что модуль $\overline{A}$, стоящий справа, изоморфен фактормодулю модуля A по образу JA модуля $J \otimes {}_U A$. Если ε_A — пополнение A, то определим пополнение $\overline{A}$ формулой $\varepsilon_{\overline{A}}(k \otimes a) = k\varepsilon_A(a)$.

Назовем $\overline{A}$ *редуцированным модулем* для A, а p: $A \to \overline{A} = A/JA$ его *проекцией*. U-модуль A подобен «расслоенному пространству» с «группой» U, действующей на A, и «базой» $\overline{A}$, полученной «отделением» действия U. Соответствующим аналогом ацикличного расслоенного пространства является «конструкция». (Предостережение: эта терминология не согласуется с терминологией Картана [1955].)

Конструкция для U — это пополненный левый U-модуль ε_C: $C \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$, который имеет DG-модульную стягивающую гомотопию с квадратом, равным нулю. Эту гомотопию можно записать в виде

$$t_{-1} : \mathbf{K} \dashrightarrow C, \quad t_n : C_n \dashrightarrow C_{n+1}, \quad n \geq 0;$$

здесь t_{-1} — морфизм DG-модулей, $t = \{t_n \mid n \geqslant 0\}$ есть гомоморфизм градуированных $\mathbf{K}$-модулей степени 1 и

$$\varepsilon_C t_{-1} = 1, \quad \partial t + t\partial = 1 - t_{-1}\varepsilon_C, \quad tt_{-1} = 0 = tt. \tag{10.1}$$

Конструкция C *относительно свободна*, если существует градуированный $\mathbf{K}$-модуль D и изоморфизм $U \otimes D \cong C$ модулей над *градуированной* алгеброй U. Определение редуцированного модуля $\overline{C}$ принимает вид

$$\overline{C} \cong \mathbf{K}_\varepsilon \otimes_U (U \otimes D) = (\mathbf{K}_\varepsilon \otimes_U U) \otimes D = \mathbf{K} \otimes D = D;$$

следовательно, D можно отождествить с $\overline{C}$, так что конструкция относительно свободна, если существует изоморфизм

$$\varphi : U \otimes \overline{C} \cong C \text{ (модулей над градуированной алгеброй } U).$$

Повторим: φ коммутирует с операторами $u \in U$, но не обязательно коммутирует с дифференциалом. Кроме того, проекция $p : C \to \overline{C} = C/JC$ из предложения 10.1 дается формулой $p\varphi(u \otimes \overline{c}) = \varepsilon(u)\overline{c}$. Следовательно, отображение $i(\overline{c}) = \varphi(1 \otimes \overline{c})$ является мономорфизмом $i : \overline{C} \to C$ градуированных $\mathbf{K}$-модулей, а произведение pi равно единице $\overline{C} \to \overline{C}$. Мы можем и будем использовать i для отождествления $\overline{C}$ как градуированного $\mathbf{K}$-модуля (*но не как* DG-модуля) с подмодулем модуля C.

Теорема 10.2. *Конденсация является ковариантным функтором из категории $\mathscr{M}$-расщепляющихся резольвент X модуля ${}_\varepsilon\mathbf{K}$, состоящих из U-модулей, в категорию конструкций X^* для U. Если резольвента X относительно свободна, то относительно свободна конструкция X^*.*

Доказательство. Пусть ε_X: $X \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$ является резольвентой, состоящей из U-модулей X_p. Если пренебречь частью структуры, то каждый U-модуль X_p можно считать DG-модулем, т. е. положительным комплексом. При этом же условии X можно рассматривать как комплекс комплексов, имеющий конденсацию $X^* = \sum L^p(X_p)$, которая является DG-модулем относительно граничных гомоморфизмов ∂', ∂'' и $\partial^* = \partial' + \partial''$. Но если A есть U-модуль, то и $L(A)$ есть U-модуль с операторами u $(lm) = (-1)^{\deg u} l(um)$. Следовательно, $L^p(X_p)$ есть U-модуль с дифференциалом ∂'', а ∂': $L^p(X_p) \to L^{p-1}(X_{p-1})$ есть отображение U-модулей степени -1, так что, записывая как ∂u, $u \in U$, результат дифференцирования в U, имеем

$$\begin{aligned} \partial''(ux) &= (\partial u)x + (-1)^{\deg u} u(\partial'' x), \\ \partial'(ux) &= (-1)^{\deg u} u(\partial' x). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Пополнение ε_X резольвенты X конденсируется в пополнение ε^*: $X^* \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$. Стягивающая гомотопия в X (существующая, так как резольвента X $\mathscr{M}$-расщепляется) конденсируется по предложению 9.2 в стягивающую гомотопию s^* в X^*, квадрат которой равен нулю. Эта гомотопия s^* удовлетворяет соотношениям, аналогичным (10.1); в частности,

$$\partial' s^* + s^* \partial' = 1 - s^*_{-1}\varepsilon^*, \quad \partial'' s^* + s^* \partial'' = 0. \tag{10.3}$$

Если резольвента X относительно свободна, то каждый комплекс X_n имеет вид $U \otimes M_n$ для некоторого DG-модуля M_n. Поэтому $L^p(X_p) \cong U \otimes L^p(M_p)$, так что $X^* \cong U \otimes \sum L^p(M_p)$, что показывает относительную свободу X^*.

Теперь мы конденсируем каноническое сравнение (теорема IX.6.2).

Теорема 10.3. (*Теорема сравнения.*) *Если $X \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$ есть относительно свободная резольвента, а $Y \to {}_\varepsilon\mathbf{K}$ есть $\mathscr{M}$-расщепляющаяся резольвента, обе состоящие из U-модулей, то существует единственный гомоморфизм φ: $X^* \to Y^*$ пополненных U-модулей, для которого*

$$\varphi \overline{X}^* \subset s^*_{-1}\mathbf{K} \cup s^* Y^*,$$

где s^* — стягивающая гомотопия в Y^*.

Доказательство проводится, как в (IX.6.1); роль подмодуля eM из X здесь играет $\overline{X}^* \subset X^*$.

Левая B-резольвента $B(U)$ является $\mathscr{M}$-расщепляющейся резольвентой ${}_\varepsilon\mathbf{K}$, состоящей из относительно свободных левых U-модулей, так что конденсация $B^*(U)$ есть конструкция, называемая *B-конструкцией*. Именно, $B^*(U)$ — это градуированный $\mathbf{K}$-модуль $\sum U \otimes L^p((U/\mathbf{K})^p)$; будучи тензорным произведением, этот модуль порождается элементами, которые мы запишем в обычной форме как

$$u[u_1|\ldots|u_p]^* = u \otimes (u_1+\mathbf{K}) \otimes \ldots \otimes (u_p+\mathbf{K}),$$

где u и $u_i \in U$. Ввиду нормализации этот элемент равен нулю, если один из элементов u_i принадлежит $\mathbf{K}$. Степень такого элемента определяется равенством

$$\deg(u[u_1|\ldots|u_p]^*) = p + \deg u + \deg u_1 + \cdots + \deg u_p; \quad (10.4)$$

элемент умножается на $u' \in U$ путем умножения на u' его первого множителя. Пополнение задается формулой

$$\varepsilon_B^*(u[\ ]^*) = \varepsilon(u), \quad (10.5)$$

а стягивающая гомотопия действует так: $s_{-1}(1) = 1[\ ]^*$ и

$$s^*(u[u_1|\ldots|u_p]^*) = 1[u|u_1|\ldots|u_p]^*, \quad p \geq 0. \quad (10.6)$$

Из условия нормализации следует, что $s^*s^* = 0$. Формулы для двух граничных гомоморфизмов ∂' и ∂'' очень легко находятся из формул для s^* рекурсией по p с использованием (10.3) и (10.2); они таковы:

$$\partial''(u[u_1|\ldots|u_p]^*) = \partial u[u_1|\ldots|u_p]^* - \sum_{i=1}^{p}(-1)^{e_{i-1}} u[u_1|\ldots|\partial u_i|\ldots|u_p]^*, \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned}\partial'(u[u_1|\ldots|u_p]^*) = (-1)^{e_0} uu_1[u_2|\ldots|u_p]^* &+ \\ + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{e_i} u[u_1|\ldots|u_iu_{i+1}|\ldots|u_p]^* &+ \quad (10.8) \\ + (-1)^{e_p} u[u_1|\ldots|u_{p-1}]^*\varepsilon(u_p),&\end{aligned}$$

где показатели e_i у -1 определяются для $i = 0, \ldots, p$ равенством

$$e_i = i + \deg u + \deg u_1 + \cdots + \deg u_i = \deg(u[u_1|\ldots|u_i]). \quad (10.9)$$

Исключая знак, ∂'' совпадает с дифференциалом тензорного произведения, а ∂' похож на дифференциал B-резольвенты. Между прочим, знаки в (10.7) и (10.8) могут рассматриваться как результат нашего обычного соглашения о знаке.

Из теоремы 10.2 следует

Теорема 10.4. *Для каждой DGA-алгебры U конденсированная левая B-конструкция $B^*(U) = \sum{}_pU \otimes (U/\mathbf{K})^p$ является пополненным левым U-модулем с пополнением ε_B^*, градуировкой* (10.4), *дифференциалом $\partial^* = \partial' + \partial''$, где ∂' и ∂'' из* (10.7) *и* (10.8), *и стягивающей гомотопией* (10.6).

Эту теорему можно доказать и непосредственно с помощью указанных выше формул, проверив по пути формулы (10.2), (10.3) и соотношение $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$.

В дальнейшем мы используем только конденсированную B-конструкцию для DGA-алгебр, и поэтому мы будем опускать лишнюю с этого момента звездочку. Внимательный читатель может заметить, что знаки, встречающиеся в формуле для взятия границы, не совпадают со знаками, появляющимися в B-резольвенте из §2 для алгебр. Изменение знаков может быть получено с помощью операции L^p. Мы обошли этот мелочный контроль за изменением, получив знаки из (10.2) и (10.3).

Как и для любого U-модуля, редуцированная B-конструкция $\overline{B}(U)$ имеет вид $\mathbf{K}_\varepsilon \otimes_U B(U)$, и $\overline{B}(U)$ рассматривается как градуированный $\mathbf{K}$-подмодуль модуля $B(U)$.

Следствие 10.5. *Для каждой DGA-алгебры U редуцированная B-конструкция $\overline{B}(U)$ является DG-модулем над $\mathbf{K}$, причем $\overline{B}(U) = \sum L^p((U/\mathbf{K})^p)$. Если элементы этого модуля обозначить $[u_1|\ldots|u_p]$, $u_i \in U$, то степень этих элементов определяется формулой* (10.4), *в которой нужно опустить u, а дифференциал $\partial = \partial' + \partial''$ определяется формулами* (10.7) *и* (10.8), *в которых $u = 1$ и u_1 нужно заменить на $\varepsilon(u_1)$ в первом члене правой части формулы* (10.8).

Отметим также, что проекция $p: B(U) \to \overline{B}(U) \cong B(U)/JB(U)$ задается формулой $p(u[u_1|\ldots|u_p]) = \varepsilon(u)[u_1|\ldots|u_p]$ и является морфизмом DG-модулей степени нуль. Изоморфизм $\varphi: B(U) \cong U \otimes \overline{B}(U)$ задается формулой $\varphi(u[u_1|\ldots|u_p]) = u \otimes [u_1|\ldots|u_p]$; он является изоморфизмом модулей над градуированной алгеброй U, но не относительно дифференциала, так как $\varphi\partial' \neq \partial'\varphi$.

B-конструкция обладает хорошим свойством:

$$s_{-1}\mathbf{K} \cup sB(U) = \overline{B}(U); \quad (10.10)$$

что можно выразить следующим образом словами: образ стягивающей гомотопии в точности равен редуцированной B-конструкции, рассматриваемой как градуированный подмодуль модуля B.

Следствие 10.6. *И $\overline{B}(U)$, и $B(U)$, причем $B(U)$ вместе со стягивающей гомотопией, являются ковариантными функто-*

рами из категории DGA-алгебр U в категорию DG-модулей над $\mathbf{K}$. *Кроме того,* $p\colon B \to \overline{B}$ *и* $i\colon \overline{B} \to B$ *являются естественными преобразованиями этих функторов.*

Доказательство. Если $\mu\colon U \to V$ есть гомоморфизм DGA-алгебр, то $B(V)$ отступлением вдоль μ превращается в U-модуль, по-прежнему имеющий $\mathbf{K}$-модульную стягивающую гомотопию. Следовательно, каноническое сравнение из теоремы 10.3 определяет единственный гомоморфизм

$$B(\mu) : B(U) \to {}_{\mu}B(V) \tag{10.11}$$

U-модулей, для которого $\varepsilon' B(\mu) = \varepsilon$. Кроме того, $JB(U)$ отображается в $\mu(J)B(V)$, так что $B(\mu)$ индуцирует такой гомоморфизм $\overline{B}(\mu)$, что $pB(\mu) = \overline{B}(\mu)\,p$. Эти отображения превращают B и $\overline{B}$ в функторы, что и утверждалось.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Описать в явном виде B-конструкцию в случае, когда $\mathbf{K} = Z_p$ есть кольцо вычетов по модулю p и $U = E(x)$ — внешняя алгебра с образующим нечетной степени.

2. Получить резольвеиту для ${}_{\varepsilon}\mathbf{K}$, когда $\mathbf{K} = Z_p$, $U = P[x]/(x^p)$ является факторкольцом кольца многочленов от неизвестного x четной степени по идеалу, порожденному x^p.

3. (Единствеиность сравиения.) Если $X \to {}_{\varepsilon}\mathbf{K}$ — отиосительио свободная резольвента, а C — любая конструкция для U со стягивающей гомотопией t, то существует не более одного гомоморфизма $\varphi : X^* \to C$ пополненных U-модулей, для которого $\varphi(\overline{X^*}) \subset t_{-1}\mathbf{K} \cup tC$.

§ 11. Двухступенная когомология DGA-алгебр

Когомологию DGA-алгебры U с коэффициентами в (тривиально градуированном) $\mathbf{K}$-модуле G можно определить в два этапа. На нулевом этапе U рассматриваем как комплекс ($= DG$-модуль), пренебрегая частью структуры; тогда $H_{\mathbf{K}}(U, G)$ и $G \otimes_{\mathbf{K}} U$ — это комплексы, (ко)гомология которых состоит из $\mathbf{K}$-модулей

$$H^k(U, 0; G) = H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(U, G)),$$

$$H_k(U, 0; G) = H_k(G \otimes_{\mathbf{K}} U), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

На первом этапе G с помощью отступления превращается в U-модуль, а левая B-конструкция $B(U)$ вместе с полным дифференциалом ∂^* является левым U-модулем. Поэтому $\mathrm{Hom}_U(B(U), {}_{\varepsilon}G)$ и $G_{\varepsilon} \otimes_U B(U)$ будут DG-модулями с (ко)гомологией, состоящей из

$\mathbf{K}$-модулей

$$H^k(U, 1; G) = H^k(\mathrm{Hom}_U(B(U), {}_{\varepsilon}G)), \tag{11.1}$$

$$H_k(U, 1; G) = H_k(G_{\varepsilon} \otimes_U B(U)), \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{11.2}$$

Поскольку отображение $B(U) \to {}_{\varepsilon}\mathbf{K}$ определяется резольвентой, определение модуля $H_k(U, 1; G)$ напоминает определение $(U, \mathbf{K})$-относительного периодического произведения $\mathrm{Tor}_k(G_{\varepsilon}, {}_{\varepsilon}\mathbf{K})$, но этот модуль не есть относительное периодическое произведение, так как в определении используется полный дифференциал ∂^* для $B(U)$, а не только дифференциал ∂', порожденный резольвентой.

Гомоморфизм $\mu\colon (U, \varepsilon) \to (V, \varepsilon')$ двух DGA-алгебр над фиксированным кольцом $\mathbf{K}$ — это такой гомоморфизм DG-алгебр, что $\varepsilon'\mu = \varepsilon\colon U \to \mathbf{K}$. Поэтому $B(V)$ превращается при отступлении в пополненный U-модуль, а μ индуцирует гомоморфизм $B(\mu)\colon B(U) \to {}_{\mu}B(V)$ пополненных U-модулей, коммутирующий со стягивающей гомотопией. Отсюда следует, что $H_k(U, 1; G)$ — ковариантный бифунктор аргументов U и G и что $H^k(U, 1; G)$ — бифунктор, контравариантный по U и ковариантный по G. Редуцированная (конденсированная) B-конструкция также является ковариантным функтором из категории DGA-алгебр в категорию DG-модулей.

Модули (ко)гомологий алгебры U можно выразить через редуцированную B-конструкцию. Действительно, поскольку G есть $\mathbf{K}$-модуль, каждый U-модульный гомоморфизм $B(U) \to {}_{\varepsilon}G$ должен отображать $JB(U)$ в нуль, где J — ядро пополнения $\varepsilon : U \to \mathbf{K}$, и, следовательно, индуцировать $\mathbf{K}$-модульный гомоморфизм $\overline{B}(U) = B(U)/JB(U) \to G$. Этим устанавливается естественный изоморфизм

$$H^k(U, 1; G) \cong H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\overline{B}(U), G)). \tag{11.3}$$

Аналогично $G_{\varepsilon} \otimes_U B(U) = (G \otimes \mathbf{K}_{\varepsilon}) \otimes_U B(U) \cong G \otimes_{\mathbf{K}} \overline{B}(U)$, так что

$$H_k(U, 1; G) \cong H_k(G \otimes_{\mathbf{K}} \overline{B}(U)). \tag{11.4}$$

Если $X \to {}_{\varepsilon}\mathbf{K}$ есть произвольная $\mathcal{M}$-расщепляющаяся резольвента, состоящая из относительно свободных U-модулей, то стандартными для сравнения рассуждениями устанавливаются изоморфизмы

$$H^k(U, 1; G) \cong H^k(\mathrm{Hom}_U(X^*, {}_{\varepsilon}G)) \cong H^k(\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\overline{X}^*, G));$$

аналогичные утверждения верны относительно функторного поведения, а также для гомологий.

«Надстройка» отображает гомологию нулевого этапа в гомологию первого этапа. Пусть отображение $S\colon U \to \overline{B}(U)$ определяется формулой $S(u) = [u]$; заметим, что S — это в точности стягивающая гомотопия, ограниченная подкомплексом U комплекса $B(U)$. Значит, S является гомоморфизмом степени 1 градуированных $\mathbf{K}$-модулей, причем $\partial S = -S\partial$; следовательно, он индуцирует аналогичные отображения $G \otimes U \to G \otimes \bar{B}(U)$ и $\operatorname{Hom}(\bar{B}(U), G) \to \operatorname{Hom}(U, G)$ и тем самым гомоморфизмы

$$S_*: H_k(U, 0; G) \to H_{k+1}(U, 1; G), \tag{11.5}$$

$$S^*: H^{k+1}(U, 1; G) \to H^k(U, 0; G), \tag{11.6}$$

называемые *надстройкой*; они будут использованы в следующем параграфе.

Для изучения зависимости $H(\bar{B}(U))$ от $H(U)$ используем фильтрацию комплекса (DG-модуля) $\bar{B}$. Пусть $F_p = F_p(\bar{B}(U))$ обозначает подмодуль модуля $\bar{B}$, порожденный всеми элементами $w = [u_1 | \ldots | u_k]$, где $k \leqslant p$; мы будем говорить, что такой элемент w имеет *фильтрацию*, не превосходящую p.

Предложение 11.1. *Для каждой DGA-алгебры U ассоциированный комплекс $\bar{B}(U)$ имеет каноническое семейство подкомплексов F_p, $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_p \subset \ldots \subset \bigcup F_p = \bar{B}(U)$. Элементы из $\bar{B}(U)$ общей степени n лежат в F_n. При $p = 0$, $F_0 \cong \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ рассматривается с тривиальными градуировкой и дифференциалом), а при $p > 0$ существует изоморфизм цепных комплексов*

$$F_p/F_{p-1} \cong L(U/\mathbf{K}) \otimes \ldots \otimes L(U/\mathbf{K}) \quad (p \text{ множителей}). \tag{11.7}$$

В проверке нуждается только последнее утверждение. «Внутренний» дифференциальный оператор ∂'' из $\bar{B}$ переводит элементы фильтрации p в элементы той же фильтрации, а «внешний» дифференциальный оператор ∂' отображает элементы фильтрации p в элементы фильтрации $p-1$, поэтому F_p действительно замкнут относительно полного дифференциала $\partial = \partial' + \partial''$. Более того, при построении факторкомплекса F_p/F_{p-1} из полной границы исчезают члены, отвечающие ∂', так что взятие границы в F_p/F_{p-1} определяется ∂'' в согласии с формулой (10.7) при $u = 1$. Но это в точности формула для взятия границы в тензорном произведении p экземпляров комплекса $L(U/\mathbf{K})$, так как знак, определяемый показателем e_i, совпадает со знаком в формуле для взятия границы в тензорном произведении, а знак минус, стоящий перед суммой, введен в $L(U/\mathbf{K})$ по определению $L(\partial)\, lu = -l\partial u$.

Цепное преобразование $\mu: X \to Y$ комплексов называется *гомологическим изоморфизмом*, если $H_n(\mu): H_n(X) \cong H_n(Y)$ для каждой размерности n.

Теорема 11.2. (*Эйленберг — Маклейн* [1953 b].) *Пусть $\mu: U \to V$ есть гомоморфизм DGA-алгебр над $\mathbf{K}$, являющийся гомологическим изоморфизмом. Кроме того, предположим, что $\mathbf{K}$ — поле, или что $\mathbf{K} = Z$, и U_n и V_n — свободные абелевы группы для каждого n (т. е. свободные $\mathbf{K}$-модули). Тогда индуцированное отображение $\bar{B}(\mu): \bar{B}(U) \to \bar{B}(V)$ является гомологическим изоморфизмом и для каждого $\mathbf{K}$-модуля G*

$$\begin{aligned} \mu_*&: H_k(U, 1; G) \cong H_k(V, 1; G);\\ \mu^*&: H^k(V, 1; G) \cong H^k(U, 1; G). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Доказательство есть упражнение в использовании фильтрации и леммы о пяти гомоморфизмах.

Во-первых, μ переводит 1_U в 1_V и, следовательно, индуцирует цепное преобразование $U/\mathbf{K} \to V/\mathbf{K}$. Мы утверждаем, что это преобразование — гомологический изоморфизм. Действительно, дополнительные предположения ($\mathbf{K}$ — поле или $\mathbf{K} = Z$, U_0 — свободная группа) показывают, что $I: \mathbf{K} \to U$ есть мономорфизм, поэтому $\mathbf{K} \rightarrowtail U \twoheadrightarrow U/\mathbf{K}$ есть точная последовательность комплексов, которая отображается посредством μ в соответствующую точную последовательность для V. Следовательно, μ отображает точную гомологическую последовательность первой точной последовательности в точную гомологическую последовательность второй. Для $n \geqslant 2$ $H_{n-1}(\mathbf{K}) = 0$ и точная гомологическая последовательность сводится к изоморфизму $H_n(U) \cong H_n(U/\mathbf{K})$. При $n = 1$ она принимает вид

$$0 \to H_1(U) \to H_1(U/\mathbf{K}) \to H_0(\mathbf{K}) \to H_0(U) \to H_0(U/\mathbf{K}) \to 0,$$

где $H_0(\mathbf{K}) \cong \mathbf{K}$. Эта последовательность отображается посредством μ в соответствующую последовательность для V. Двумя применениями леммы о пяти гомоморфизмах устанавливаются изоморфизмы $H_1(U/\mathbf{K}) \cong H_1(V/\mathbf{K})$, $H_0(U/\mathbf{K}) \cong H_0(V/\mathbf{K})$, так что $\mu: U/\mathbf{K} \to V/\mathbf{K}$ действительно гомологический изоморфизм.

Теперь рассмотрим отображение $\bar{B}(\mu): \bar{B}(U) \to \bar{B}(V)$, точное выражение которого таково:

$$\bar{B}(\mu)[u_1 | \ldots | u_n] = [\mu u_1 | \ldots | \mu u_n].$$

Это отображение сохраняет фильтрацию, т. е. переводит $F_p = F_p(\bar{B}(U))$ в $F'_p = F_p(\bar{B}(V))$. Мы утверждаем, что индуцированное отображение $F_p/F_{p-1} \to F'_p/F'_{p-1}$ есть гомологический изоморфизм. Действительно, факторкомплекс F_p/F_{p-1} — это в точности n-кратное тензорное произведение (11.7), и индуцированное отображение равно $\mu \otimes \ldots \otimes \mu$ (n множителей). Если $\mathbf{K}$ — поле, то это отображение является гомологическим изоморфизмом по тензорной формуле Кюннета (теореме V.10.1). Если $\mathbf{K} = Z$ и все группы U_n и V_n свободны, то оно является гомологическим изоморфизмом по следствию из формулы Кюннета для этого случая (следствие V.11.2).

Наконец, мы утверждаем, что $\mu : F_p \to F'_p$ — гомологический изоморфизм. Доказательство проводится индукцией по p. Для $p = 0$ это очевидно, поскольку $F_0 = \mathbf{K} = F'_0$. Для больших p μ отображает точную последовательность $F_{p-1} \rightarrowtail F_p \twoheadrightarrow F_p/F_{p-1}$ комплексов в соответствующую точную последовательность для F'_p. Тогда длинные точные гомологические последовательности образуют коммутативную диаграмму с первой строкой

$$H_{k+1}(F_p/F_{p-1}) \to H_k(F_{p-1}) \to H_k(F_p) \to$$
$$\to H_k(F_p/F_{p-1}) \to H_{k-1}(F_{p-1})$$

и вертикальными отображениями, индуцированными μ. По индуктивному предположению и в силу предыдущего результата для F_p/F_{p-1} четыре крайних вертикальных отображения являются изоморфизмами, так что лемма о пяти гомоморфизмах доказывает изоморфность отображения $H_k(F_p) \to H_k(F'_p)$ для любого k.

Поскольку для каждой полной размерности n, $F_p\overline{B}$ при большом p содержит все элементы из $\overline{B}$ этой размерности, из доказанного следует, что $\overline{B}(\mu) : \overline{B}(U) \to \overline{B}(V)$ есть гомологический изоморфизм. Изоморфизмы (11.8) теперь следуют из подходящей теоремы об универсальных коэффициентах ($\mathbf{K}$ — поле или $\mathbf{K} = Z$ и $\overline{B}$ — комплексы свободных абелевых групп).

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Теорема о стягивании. Эйленберг — Маклейн [1953b, теорема 12.1].) Если $\mu : U \to V$, $\nu : V \to U$ суть гомоморфизмы DGA-алгебр, причем $\mu\nu = 1$, и если существует такая гомотопия t, что $t\partial + \partial t = \nu\mu - 1$, $\mu t = 0$, $t\nu = 0$, то можно доказать существование такой гомотопии $\bar{t}$, что $\partial\bar{t} + \bar{t}\partial = \overline{B}(\nu)\,\overline{B}(\mu) - 1$, $\overline{B}(\mu)\,\bar{t} = 0$, $\bar{t}\,\overline{B}(\nu) = 0$.

2. Получить фильтрацию из предложения 11.1 для произвольной $\mathcal{M}$-расщепляющейся относительно свободной резольвенты для ${}_\varepsilon\mathbf{K}$, состоящей из U-модулей.

§ 12. Когомология коммутативных DGA-алгебр

Пусть U и V — две DGA-алгебры над $\mathbf{K}$. Их тензорное произведение $U \otimes V$ также является DGA-алгеброй, в то время как тензорное произведение U-модуля и V-модуля является $(U \otimes V)$-модулем. В частности, B-конструкции $B(U)$ и $B(V)$ порождают пополненный $(U \otimes V)$-модуль $B(U) \otimes B(V)$. Этот модуль является конструкцией со стягивающей гомотопией t, определенной в размерности -1 формулой $s_{-1} \otimes s_{-1} : \mathbf{K} \to B \otimes B$ и в положительных размерностях обычной формулой $t = s \otimes 1 + s_{-1}\varepsilon \otimes s$ для тензорного произведения гомотопий. Кроме того, модуль $B(U) \otimes B(V)$ относительно свободен. Действительно, изоморфизм $B(U) \cong U \otimes \overline{B}(U)$ это изоморфизм модулей над градуированной (но не дифференциальной) алгеброй U, так что

$$B(U) \otimes B(V) \cong U \otimes \overline{B}(U) \otimes V \otimes \overline{B}(V) \cong U \otimes V \otimes \overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)$$

есть изоморфизм модулей над градуированной алгеброй $U \otimes V$ (без дифференциала) и $B(U) \otimes B(V)$ — относительно свободный модуль. Можно показать, что его редуцированный DG-модуль есть в точности тензорное произведение $\overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)$| DG-модулей $\overline{B}(U)$ и $\overline{B}(V)$. Наконец, по предложению 9.3 конструкция $B(U) \otimes B(V)$ могла бы быть получена как конденсация, именно как конденсация тензорного произведения исходных B-резольвент. Следовательно, мы можем применить теорему сравнения для получения гомоморфизмов пополненных $(U \otimes V)$-модулей

$$B(U \otimes V) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B(U) \otimes B(V). \tag{12.1}$$

Выберем для f и g канонические сравнения (теорема 10.3):

$$f\overline{B}(U \otimes V) \subset t_{-1}\mathbf{K} \cup t(B(U) \otimes B(V)),$$
$$g[\overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)] \subset s_{-1}\mathbf{K} \cup sB(U \otimes V).$$

Опять-таки в силу теоремы сравнения существует гомотопия $1 \simeq gf$. С другой стороны, по (10.10), $s_{-1}\mathbf{K} \cup sB(U \otimes V) = \overline{B}(U \otimes V)$, так что

$$fg[\overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)] \subset t_{-1}\mathbf{K} \cup t(B(U) \otimes B(V)).$$

Это включение показывает, что fg есть каноническое сравнение комплекса $B(U) \otimes B(V)$ с самим собой, поэтому $fg = 1$. Поскольку f и g, являясь каноническими сравнениями, определены однозначно, они естественны относительно U и V.

DGA-алгебра U коммутативна, если для $u_p \in U_p$ и $u_q \in U_q$ $u_pu_q = (-1)^{pq}u_qu_p$, т. е. если $\pi\tau = \pi : U \otimes U \to U$, причем $\tau : U \otimes V \to V \otimes U$ — обычная перестановка, π — отображение умножения для U. В этом случае тензорное произведение $U \otimes U$ также является DGA-алгеброй; диаграмма показывает, что когда U коммутативна, отображение умножения $\pi : U \otimes U \to U$ есть гомоморфизм DGA-алгебр. Следовательно, «внешнее» умножение g из (12.1) в этом случае определяет внутреннее умножение в $B(U)$:

$$\pi_B : B(U) \otimes B(U) \xrightarrow{g} B(U \otimes U) \xrightarrow{B(\pi)} B(U). \tag{12.2}$$

Здесь $B(U)$ рассматривается как $U\otimes U$-модуль, полученный отступлением вдоль $\pi: U\otimes U \to U$, а $B(\pi)$ — каноническое отображение, описанное в (10.11). Следовательно, умножение π_B из (12.2) можно описать как каноническое сравнение.

Теорема 12.1. *Если U — коммутативная DGA-алгебра, то $B(U)$ — коммутативная DGA-алгебра с единицей [ ] и умножением π_B, при этом π_B является также гомоморфизмом пополненных модулей над $U\otimes U$. Это умножение индуцирует такое умножение $\overline{B}(U)\otimes\overline{B}(U)\to\overline{B}(U)$, что $\overline{B}(U)$ становится коммутативной DGA-алгеброй, а проекция $B(U)\to\overline{B}(U)$ — гомоморфизмом DGA-алгебр, в то время как включение $\overline{B}(U)\to B(U)$ становится гомоморфизмом градуированных* **K***-алгебр.*

Доказательство. Единичный элемент алгебры U представляется отображением $I: \mathbf{K}\to U$. Учитывая, что $B(\mathbf{K})=\mathbf{K}$, построим произведение отображений U-модулей

$$B(U)=B(\mathbf{K})\otimes B(U)\xrightarrow{B(I)\otimes 1} B(U)\otimes B(U)\xrightarrow{\pi_B} B(U).$$

Здесь $B\otimes B$ снабжается U-модульной структурой отступлением вдоль $I\otimes 1: \mathbf{K}\otimes U\to U\otimes U$, а $B(U)$ — такой же структурой отступлением вдоль $\pi_U(I\otimes 1)=1$. Следовательно, указанное произведение есть каноническое сравнение $B(U)$ с самим собой и поэтому равно единице. Этим показано, что $B(I)\,1_{\mathbf{K}}=[\ ]$ есть единичный элемент в $B(U)$ для умножения π_B. Аналогично устанавливается, что отображения

$$\pi_B(1\otimes\pi_B),\ \pi_B(\pi_B\otimes 1): B(U)\otimes B(U)\otimes B(U)\to B(U)$$

являются каноническими сравнениями и поэтому должны быть равными. Тем самым установлена ассоциативность, и $B(U)$ превращается в DGA-алгебру. Имеется аналогичное доказательство коммутативности умножения.

По определению $\overline{B}=B/JB$, где J — ядро пополнения $\varepsilon: U\to\mathbf{K}$; следовательно, по лемме VIII.3.2 ядро гомоморфизма $p\otimes p: B\otimes B\to\overline{B}\otimes\overline{B}$ есть объединение образов $JB\otimes B$ и $B\otimes JB$. Поскольку π_B — гомоморфизм $(U\otimes U)$-модулей, он переводит это объединение в JB и тем самым индуцирует единственное отображение $\overline{\pi}: \overline{B}\otimes\overline{B}\to\overline{B}$, для которого $\overline{\pi}(p\otimes p)=p\pi_B$. Из единственности этого разложения немедленно следует, что $\overline{B}$ является DG-алгеброй относительно умножения $\overline{\pi}$ с пополнением, определяемым изоморфизмом $\overline{B}_0\cong\mathbf{K}$, и что p — гомоморфизм пополненных алгебр.

Остается показать, что $i:\overline{B}\to B$ есть гомоморфизм, т. е. что

$$\pi_B(i\otimes i)=i\overline{\pi}:\overline{B}(U)\otimes\overline{B}(U)\to B(U).$$

Так как π_B — каноническое сравнение, то образ отображения $\pi_B(i\otimes i)$ лежит в $\overline{B}\subset B$; на этом подмодуле ip действует тождественным образом и поэтому

$$ip\pi_B(i\otimes i)=i\overline{\pi}(p\otimes p)(i\otimes i)=i\overline{\pi}(pi\otimes pi)=i\overline{\pi},$$

что и требовалось доказать. Этим доказательство закончено. Заметим, что умножения, определенные в $\overline{B}$ и U, определяют умножение в B; действительно, поскольку π_B — гомоморфизм $(U\otimes U)$-модулей, мы имеем

$$\pi_B[(u_1\otimes\overline{b}_1)\otimes(u_2\otimes\overline{b}_2)]=(-1)^{(\deg u_2)(\deg\overline{b}_1)}u_1u_2\pi_B(\overline{b}_1\otimes\overline{b}_2) \tag{12.3}$$

для любых двух элементов $\overline{b}_1, \overline{b}_2\in\overline{B}(U)$.

Поскольку g — каноническое сравнение, его можно описать точной формулой; эта формула (исключая знаки) в точности совпадает с выражением для отображения g из теоремы Эйленберга — Зильбера, так как она вытекает из симплициальной структуры $\overline{B}(U)$. Как и раньше (VIII.8), пусть t есть (p, q)-перетасовка, рассматриваемая как подходящая перестановка чисел $\{1, \ldots, p+q\}$. Для элементов

$$\overline{b}_1=[u_1|\ldots|u_p],\quad \overline{b}_2=[v_1|\ldots|v_q]\in\overline{B}(V)$$

определим билинейное отображение (перетасовочное умножение) $*: \overline{B}(U)\otimes\overline{B}(V)\to\overline{B}(U\otimes V)$: для этого обозначим элементы $u_1\otimes 1, \ldots, u_p\otimes 1, 1\otimes v_1, \ldots, 1\otimes v_q$ из $U\otimes V$ в указанном порядке через $w_1, \ldots, w_{p+q}$ и положим

$$[u_1|\ldots|u_p]*[v_1|\ldots|v_q]=\sum_t(-1)^{e(t)}[w_{t^{-1}(1)}|\ldots|w_{t^{-1}(p+q)}], \tag{12.4}$$

где сумма берется по всем (p, q)-перетасовкам t, а показатель степени $e(t)$ определяется в терминах полных степеней как

$$e(t)=\sum(\deg[u_i])(\deg[v_j]),\quad t(i)>t(p+j),\quad i\leqslant p,\ j\leqslant q. \tag{12.5}$$

Этот знак в точности регулируется правилом коммутирования, поскольку сумма берется по всем таким парам индексов (i, j), для которых элемент u_i степени $\deg[u_i]$ ставится после элемента v_j степени $\deg[v_j]$.

Теорема 12.2. *Каноническое сравнение g (12.1) определяется для элементов $\overline{b}_1$ и $\overline{b}_2$ из $\overline{B}(U)$ и $\overline{B}(V)$ соответственно формулой*

$$g[(u\overline{b}_1)\otimes(v\overline{b}_2)]=(-1)^{(\deg v)(\deg\overline{b}_1)}(u\otimes v)(\overline{b}_1*\overline{b}_2).$$

Доказательство. Эта формула подсказана равенством (12.3). Ею, очевидно, задается гомоморфизм модулей над градуированной алгеброй $U \otimes V$, который переводит $\overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)$ в $\overline{B}(U \otimes V)$ и поэтому является каноническим сравнением. Доказательство завершается проверкой того, что $\partial g = g\partial$. Это можно сделать непосредственно, используя определения g и $\partial = \partial^* = \partial' + \partial''$ для B-конструкции. Мы оставляем детали читателю или отсылаем к работе Эйленберга и Маклейна [1953 b], где доказательство сформулировано в терминах рекурсивного описания перетасовочного умножения $*$.

Заметим, что формула (12.4) вместе с равенством (12.3), записанным в виде

$$(u_1\overline{b}_1) * (u_2\overline{b}_2) = (-1)^{(\deg u_2)(\deg b_1)} u_1 u_2 (\overline{b}_1 * \overline{b}_2),$$

полностью определяет умножение в $B(U)$. Например,

$$[u] * [v] = [u \mid v] + (-1)^{(1+\deg u)(1+\deg v)} [v \mid u],$$

а также

$$[u] * [v \mid w] = [u \mid v \mid w] + [v \mid u \mid w] \pm [v \mid w \mid u]$$

при очевидной «перетасовке».

Следствие 12.3. *Если алгебра U коммутативна, то алгебра $\overline{B}(U)$ строго коммутативна.*

Доказательство. Пусть $\overline{b} = [u_1 \mid \ldots \mid u_p]$. Каждый член в произведении $\overline{b} * \overline{b}$ встречается дважды для двух перетасовок t и t', где

$$e(t) + e(t') = \sum_{i,j} (\deg [u_i])(\deg [u_j]) = (\deg \overline{b})^2.$$

Когда $\deg \overline{b}$ — нечетное число, то знаки противоположны, так что $\overline{b} * \overline{b} = 0$, что и требуется для строгой коммутативности.

Существенное замечание состоит в том, что каждая *коммутативная* DGA-алгебра U порождает коммутативную DGA-алгебру $\overline{B}(U)$, что позволяет итерированием образовать коммутативную DGA-алгебру $\overline{B}^n(U)$ для каждого положительного n. Это приводит к n-степенной когомологии (или гомологии) алгебры U с коэффициентами в $\mathbf{K}$-модуле G:

$$H^k(U, n; G) = H^k(\operatorname{Hom}(\overline{B}^n(U), G)).$$

В частности, описанное построение применимо в том случае, когда $U = Z(\Pi)$ — групповое кольцо коммутативной мультипликативной группы Π. Причем n-степенные группы гомологий и когомологий этой группы Π с коэффициентами в абелевой группе G таковы:

$$H_k(\Pi, n; G) = H_k(G \otimes \overline{B}^n(Z(\Pi))), \tag{12.6}$$

$$H^k(\Pi, n; G) = H^k(\operatorname{Hom}(\overline{B}^n(Z(\Pi)), G)); \tag{12.7}$$

при $n = 1$ они совпадают с группами гомологий и когомологий группы Π, рассмотренными в гл. IV. Заметим, что надстройка $S: \overline{B}^n \to \overline{B}^{n+1}$ из (11.5) дает гомоморфизмы

$$S_*: H_{n+p}(\Pi, n; G) \to H_{n+1+p}(\Pi, n+1; G), \tag{12.8}$$

$$S^*: H^{n+1+p}(\Pi, n+1; G) \to H^{n+p}(\Pi, n; G). \tag{12.9}$$

Прямой предел групп $H_{n+p}(\Pi, n; G)$ относительно отображений S_* определяет другое множество «стабильных» групп гомологий $H_p(\Pi; G)$ для абелевой группы Π. Они были изучены Эйленбергом и Маклейном [1951, 1955].

Для произвольного n группы $H^k(\Pi, n; G)$ имеют топологическую интерпретацию в терминах так называемых пространств Эйленберга — Маклейна $K(\Pi, n)$. Здесь $K(\Pi, n)$ — это топологическое пространство, единственной ненулевой группой гомотопий которого является группа $\pi_n = \Pi$ в размерности n. Можно доказать (Эйленберг — Маклейн [1953 b]), что существует естественный изоморфизм

$$H^k(K(\Pi, n), G) \cong H^k(\Pi, n; G);$$

имеется соответствующий результат для гомологии.

Точные вычисления этих групп можно эффективно провести, используя итерированные альтернативные резольвенты X, выбранные так, чтобы в $\overline{X}$ имелась структура алгебры (Картан [1955])

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что образ стягивающей гомотопии в $B(U) \otimes B(V)$ строго содержит $\overline{B}(U) \otimes \overline{B}(V)$.

2. Доказать теорему 12.1 с помощью явной формулы для умножения $*$.

3. Показать, что $\overline{B}^n(Z(\Pi))$ есть нуль в размерностях, заключенных между 0 и n, и, значит, $H^p(\Pi, n; G) = 0 = H_p(\Pi, n; G)$ для $0 < p < n$.

4. Показать, что $H^n(\Pi, n; G) \cong \operatorname{Hom}(\Pi, G)$ при $n \geq 1$ и что $H^{n+1}(\Pi, n; G) \cong \operatorname{Ext}^1_Z(\Pi, G)$ при $n \geq 2$.

5. (Теорема о надстройке. Эйленберг — Маклейн, [1953 b, теорема 20.4].) Для $p < n$ показать, что S^* и S_* из (12.8) и (12.9) — изоморфизмы, в то время как S^* — мономорфизм, а S_* — эпиморфизм для $p = n$. (Указание: сравнить комплексы $\overline{B}^{n+1}(U)$ и $\overline{B}^n(U)$ в указанных размерностях.)

6. Пусть $X \to_{\varepsilon} \mathbf{K}$ — любая $\mathbf{K}$-расщепляющаяся относительно свободная резольвента, записанная как $X = U \otimes \overline{X}$ в согласии с теоремой 10.2,

и пусть отображение $j: U \to X$ задано формулой $j(u) = u \otimes 1$ (в предположении, что $1 \in U = X_0$). Показать, что произведение $psj: U \to \overline{X}$, где s — стягивающая гомотопия, дает надстройку.

7. Для любой резольвенты X из упражнения 6 найти умножение $\overline{X} \otimes \overline{X} \to \overline{X}$, ассоциативное с точностью до гомотопии.

§ 13. Гомология алгебраических систем

Для групп, моноидов, абелевых групп, алгебр и градуированных алгебр мы уже определили подходящие группы гомологий и когомологий. В каждом случае руководящей идеей служило то, что вторая группа когомологий представляет группу расширений (с данными операторами) для рассматриваемого типа алгебраических систем: см. теорему IV.4.1 для групп, упражнение 12.4 для абелевых групп и теорему 3.1 для алгебр. Элементы третьей группы когомологий представляют препятствия для соответствующей задачи расширения: см. теорему IV.8.7 для групп и работу Хохшильда [1947] для алгебр. Типичные комплексы, используемые для построения таких гомологических теорий, были описаны с помощью понятия «общей ацикличности» (Эйленберг — Маклейн [1951]). Здесь мы упомянем о различных других алгебраических системах, для которых были развиты соответствующие гомологические теории.

Двумерная теория когомологий для *колец* оперирует с двумя системами факторов: одна система для сложения, другая — для умножения. Пусть A — абелева группа, рассматриваемая как кольцо (без единицы), в котором произведение любых двух элементов равно нулю. Пусть R — кольцо. Сингулярным расширением A с помощью R называется короткая точная последовательность $A \rightarrowtail S \twoheadrightarrow R$ кольцевых гомоморфизмов $\varkappa$ и σ, в которой S — кольцо с единицей 1_S и $\sigma 1_S = 1_R$. Будем считать A таким двусторонним идеалом в S, что $S/A = R$. Для каждого $x \in R$ выберем представитель $u(x) \in S: \sigma u(x) = x$. Тогда A превращается в R-бимодуль с операторами $xa = u(x)a$, $ax = au(x)$, не зависящими от выбора представителей u. Сложение и умножение в S определяются двумя такими системами факторов f и g, что

$$u(x) + u(y) = f(x, y) + u(x+y), \tag{13.1}$$

$$u(x)u(y) = g(x, y) + u(xy). \tag{13.2}$$

Эти функции f и g удовлетворяют различным тождествам, которые отражают ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы для S (Эверетт [1942], Редеи [1952], Сендреи [1952]). Теперь можно построить (Маклейн [1956]) такую теорию когомологий для кольца R, что в группе $H^2(R, A)$ указанные пары функций f и g являются коциклами, а когомологические классы представляют расширения A с помощью R. Часть соответствующей трехмерной группы когомологий $H^3(R, A)$ в точности отвечает препятствиям для задачи о расширении кольца T (без единицы, но не обязательно с нулевым умножением) с помощью кольца R. Эти результаты можно приложить также к пучкам колец (Грей [1961a, b]).

Шукла [1961] распространил эту когомологическую теорию со случая колец (Z-алгебр) на случай алгебр Λ над произвольным коммутативным кольцом $\mathbf{K}$. Получающаяся теория когомологий алгебр более тонка, чем теория когомологий Хохшильда, так как в теории Хохшильда систематически используются только $\mathbf{K}$-расщепляющиеся расширения, в то время как в рассматриваемом случае использование системы факторов (13.1) для сложения отражает именно тот факт, что исследуемые расширения не расщепляются аддитивно. Теория Шуклы построена так, что каждый элемент из H^3 соответствует препятствию. Харрисон [1962] начал развивать теорию когомологий для коммутативных алгебр над полем.

Алгебра Ли L над кольцом $\mathbf{K}$ — это $\mathbf{K}$-модуль вместе с таким $\mathbf{K}$-модульным гомоморфизмом $x \otimes y \to [x, y]$ из $L \otimes L$ в L, что выполнены тождества

$$[x, x] = 0, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

типичный пример можно построить, введя в ассоциативной алгебре Λ новое умножение $[x, y] = xy - yx$. Обратно, каждая алгебра Ли L определяет пополненную ассоциативную алгебру L^e, как факторалгебру тензорной алгебры $T(L)$ модуля L по идеалу, порожденному в $T(L)$ всеми элементами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, $x, y \in L$. Алгебра L^e называется *обертывающей* (ассоциативной) алгеброй алгебры L. Гомология и когомология алгебры L теперь определяются для модулей G_{L^e} и ${}_{L^e}C$ следующим образом:

$$H_n(L, G) = \operatorname{Tor}_n^{L^e}(G, \mathbf{K}), \quad H^n(L, C) = \operatorname{Ext}_{L^e}^n(\mathbf{K}, C),$$

хотя, как и в случае алгебр, возможно, более подходило бы использование относительных функторов Tor и Ext для пары $(L^e, \mathbf{K})$. Эта теория развита Картаном и Эйленбергом в гл. XIII; см. также Джекобсон [1962]. В случае, когда $\mathbf{K}$ — поле, теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта может быть использована для альтернативного описания этих групп когомологий и гомологий в терминах стандартного комплекса, строящегося прямо с помощью лиева умножения в L. В действительности этот подход был первоначально использован в первых исследованиях по когомологии алгебр Ли (Шевалле — Эйленберг [1948], Косуль [1950b]). Двумерная группа когомологий $H^2(L, C)$ соответствует $\mathbf{K}$-расщепляющимся расширениям алгебр Ли (Картан — Эйленберг, XIV.5). В некоторых случаях элементы трехмерной группы когомологий $H^3(L,C)$ являются препятствиями для задачи о расширении (Хохшильд [1954]).

Аналогичные результаты применимы в случае аналитических групп Ли (Маколей [1960]) и тройных систем Ли [Ямагути]1960], Харрис [1961]). Ри [1958] применил перестановочные умножения для алгебр Ли.

Когомология колец имеет дело с системами факторов для сложения и умножения. Возможно точно так же построить когомологию колец Ли; группа H^2 будет включать системы факторов для сложения и лиева умножения. Подобная теория была начата Диксмье [1957]; нужно надеяться, что дальнейшие исследования смогут упростить его формулировку.

С топологической точки зрения в основе B-конструкции лежит «слой» U, с помощью которого строится косое произведение $B(U)$ с группой U и соответствующая база $\overline{B}(U)$. Обратная задача построения (гомологии) слоя, исходя из заданной базы, геометрически очень важна. Для ее решения Адамс ввел двойственную B-конструкции конструкцию $F(W)$, где W — градуированная коалгебра над $\mathbf{K}$. Детали см. в работах Адамса [1956], [1960, стр. 33].

Замечания. Редуцированная B-конструкция $\breve{B}(U)$ принадлежит Эйленбергу и Маклейну [1950b]. Картан [1954] сделал важное заключение о том, что $\breve{B}$ можно было бы получить из ацикличной B-конструкции B, и указал эффективный метод проведения вычислений с помощью «конструкций».

ГЛАВА XI

Спектральные последовательности

Если Γ — нормальный делитель группы Π, то гомология группы Π может быть вычислена путем последовательных аппроксимаций из гомологий групп Γ и Π/Γ. Эти последовательные аппроксимации отражены в понятии спектральной последовательности. В этой главе мы сначала опишем механизм спектральных последовательностей, а затем дадим несколько приложений, закончив одной общей теоремой (теоремой сравнения). Другие применения будут указаны в следующей главе.

В этой главе под словом «модуль» будет пониматься левый модуль A над фиксированным кольцом R, хотя во многих случаях с одинаковым успехом можно понимать под этим словом Λ-модуль или объект данной абелевой категории. Мы постоянно будем иметь дело с подфакторами S/K модуля A, где $K \subset S \subset A$. Напомним (II.6.3): каждый модульный гомоморфизм $\alpha : A \to A'$ индуцирует аддитивное отношение $\alpha_{\#} : S/K \to S'/K'$ данных подфакторов S/K и S'/K', состоящее из всех таких пар смежных классов $(s+K,\ \alpha s + K')$, что $s \in S$, $\alpha s \in S'$. Если S, T и U — подмодули модуля A, то *модулярный* закон утверждает, что $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup U$ всякий раз, как $S \supset U$. Отсюда следует, что 1_A индуцирует изоморфизм (*модулярный изоморфизм Нётер*)

$$1_* : S/[U \cup (S \cap T)] \cong (S \cup T)/(U \cup T), \quad S \supset U.$$

Действительно, $S/[U \cup (S \cap T)] = S/[S \cap (T \cup U)]$; в силу изоморфизма Нётер (I.2.5) правый модуль изоморфен модулю $(S \cup T \cup U)/(T \cup U) = (S \cup T)/(U \cup T)$.

§ 1. Спектральные последовательности

Z-биградуированный бимодуль — это семейство $E = \{E_{p,q}\}$ модулей, по одному для каждой пары индексов $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Дифференциал* $d : E \to E$ бистепени $(-r, r-1)$ есть семейство гомоморфизмов $\{d : E_{p,q} \to E_{p-r},\ E_{q+r-1}\}$, по одному для каждой пары p, q, причем $d^2 = 0$. Гомология $H(E) = H(E, d)$ бимодуля E относительно этого дифференциала является биградуированным модулем $\{H_{p,q}(E)\}$, определенным обычным способом:

$$H_{p,q}(E) = \operatorname{Ker}[d: E_{p,q} \longrightarrow E_{p-r,\, q+r-1}]/dE_{p+r,\, q-r+1}. \tag{1.1}$$

Если E превращен в (обычный) Z-градуированный модуль $E = \{E_n\}$ с полной степенью n, полученной обычным путем $E_n = \sum_{p+q=n} E_{p,q}$, то дифференциал d индуцирует дифференциал $d: E_n \to E_{n-1}$ с обычной степенью -1, и $H(\{E_n\}, d)$ есть обычный градуированный модуль, полученный из биградуированного модуля $H_{p,q}(E)$, $H_n = \sum_{p+q=n} H_{p,q}$.

Спектральной последовательностью $E = \{E^r, d^r\}$ называется последовательность $E^2, E^3, \ldots$ Z-биградуированных модулей, обладающих дифференциалами

$$d^r: E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,\, q+r-1}, \quad r = 2, 3, \ldots, \tag{1.2}$$

бистепени $(-r, r-1)$, причем имеют место изоморфизмы

$$H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}, \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{1.3}$$

Более коротко, каждый бимодуль E^{r+1} является биградуированным модулем гомологий предшествующего модуля (E^r, d^r). Таким образом, E^r и d^r определяют E^{r+1}, но не определяют d^{r+1}. Биградуированный модуль E^2 является *первым* (*начальным*) членом спектральной последовательности (иногда удобно начинать спектральную последовательность с $r = 1$ и с начального члена E^1).

Если E' — вторая спектральная последовательность, то гомоморфизм $f: E \to E'$ — это такое семейство гомоморфизмов

$$f^r: E^r \longrightarrow E'^r, \quad r = 2, 3, \ldots,$$

биградуированных модулей, каждый бистепени $(0, 0)$, что $d^r f^r = f^r d^r$ и каждый гомоморфизм f^{r+1} является отображением, индуцированным f^r на модулях гомологий [используя изоморфизм (1.3)].

Поучительно описать спектральную последовательность в терминах подмодулей модуля E^2 (или E^1, если рассматривается этот случай). Сначала отождествим бимодуль E^{r+1} с $H(E^r, d^r)$ с помощью заданных изоморфизмов (1.3). Тогда $E^3 = H(E^2, d^2)$ становится подфактором C^2/B^2 модуля E^2, где $C^2 = \operatorname{Ker} d^2$ и $B^2 = \operatorname{Im} d^2$. Далее, $E^4 = H(E^3, d^3)$ — подфактор модуля C^2/B^2, изоморфный C^3/B^3, где $C^3/B^2 = \operatorname{Ker} d^3$, $B^3/B^2 = \operatorname{Im} d^3$ и $B^3 \subset C^3$. С помощью итерации спектральная последовательность представляется как башня

$$0 = B^1 \subset B^2 \subset B^3 \subset \ldots \subset C^3 \subset C^2 \subset C^1 = E^2 \tag{1.4}$$

биградуированных подмодулей модуля E^2 с $E^{r+1} = C^r/B^r$, причем гомоморфизм

$$d^r: C^{r-1}/B^{r-1} \longrightarrow C^{r-1}/B^{r-1}, \quad r = 2, 3, \ldots,$$

имеет ядро C^r/B^{r-1} и образ B^r/B^{r-1}. Говоря неформально,

C^{r-1} — это модуль элементов, которые *«остаются в живых» до r-го шага*;

B^{r-1} — это модуль элементов, которые *ограничиваются при r-м шаге*.

Модуль элементов, «живущих вечно»,— это

$$C^\infty = \text{пересечение всех подмодулей } C^r, r = 2, 3, \ldots,$$

а модуль элементов, которые «когда-либо ограничивают»,— это

$$B^\infty = \text{объединение всех подмодулей } B^r, \ r = 2, 3, \ldots.$$

При этом $B^\infty \subset C^\infty$, так что спектральная последовательность определяет биградуированный модуль

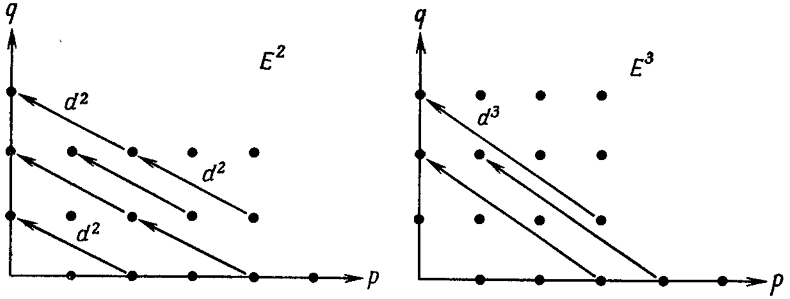
$$E^\infty_{p,q} = C^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}, \quad E^\infty = \{E^\infty_{p,q}\}. \tag{1.5}$$

Мы рассматриваем члены E^r спектральной последовательности как последовательные приближения (посредством последовательного образования подфакторов) к E^∞. При представлении (1.4) гомоморфизм $f: E \to E'$ спектральных последовательностей — это такой гомоморфизм $f: E^2 \to E'^2$ биградуированных модулей бистепени $(0, 0)$, что $f(C^r) \subset C'^r$, $f(B^r) \subset B'^r$ и что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C^{r-1}/B^{r-1} & \xrightarrow{d^r} & C^{r-1}/B^{r-1} \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ C'^{r-1}/B'^{r-1} & \xrightarrow{d^r} & C'^{r-1}/B'^{r-1} \end{array}$$

коммутативны. Таким образом, $f: E \to E'$ индуцирует гомоморфизм $f^\infty: E^\infty \to E'^\infty$.

Спектральная последовательность E называется последовательностью *первой четверти*, если $E^r_{p,q} = 0$ при $p < 0$ или $q < 0$. (Из выполнения этого условия для $r = 2$ следует его выполнение для больших r.) Удобно изображать модули $E^r_{p\,q}$ целочисленными точками в первой четверти плоскости (p, q):



(1.6)

Тогда дифференциал d^r указывается стрелкой. Все члены полной степени n лежат на прямой $p+q=n$, идущей под углом 45°; последовательные дифференциалы выходят из целочисленной точки подобной прямой и направлены в целочисленную точку следующей прямой, лежащей ниже. В каждой целочисленной точке комплекса $E^r_{p,q}$ следующая аппроксимация $E^{r+1}_{p,q}$ образуется взятием фактор-модуля ядра дифференциала, выходящего из этой точки, по образу дифференциала, оканчивающегося в этой точке; эти отображения указаны в последовательности

$$E^r_{p+r,\,q-r+1} \xrightarrow{d^r} E^r_{p,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{p-r,\,q+r-1}.$$

Выходящий дифференциал d^r оканчивается вне первой четверти, если $r>p$; приходящий дифференциал d^r начинается вне этой четверти, если $r>q+1$, поэтому

$$E^{r+1}_{p,q}=E^r_{p,q}, \quad \infty > r > \operatorname{Max}(p, q+1). \tag{1.7}$$

То есть для фиксированных степеней p и q модули $E^r_{p,q}$ постоянны для всех r, за исключением конечного числа членов.

Члены $E_{p,q}$, лежащие на оси p, называются членами *базы*. Каждая стрелка d^r, оканчивающаяся в базе, приходит снизу и, значит, из 0, поэтому каждый член $E^{r+1}_{p,0}$ является подмодулем модуля $E^r_{p,0}$, а именно ядром d^r: $E^r_{p,0} \to E^r_{p-r,\,r-1}$. Это обстоятельство приводит к последовательности мономорфизмов

$$E^\infty_{p,0}=E^{p+1}_{p,0} \to \cdots \to E^4_{p,0} \to E^3_{p,0} \to E^2_{p,0}. \tag{1.8}$$

Члены $E_{0,q}$, лежащие на оси q, называются членами *расслоения* (или *слоями*). Каждая стрелка, выходящая из слоя, оканчивается слева в нуле, следовательно, $E^r_{0,q}$ состоит из циклов и следующий член расслоения является фактормодулем модуля $E^r_{0,q}$ (по образу

дифференциала d^r). Это приводит к последовательности эпиморфизмов

$$E^2_{0,q} \to E^3_{0,q} \to E^4_{0,q} \to \ldots \to E^{q+2}_{0,q}=E^\infty_{0,q}. \tag{1.9}$$

Отображения (1.8) и (1.9) известны под названием *краевых гомоморфизмов* (мономорфизмов на базе, эпиморфизмов на слое).

Говорят, что спектральная последовательность E *ограничена снизу*, если для каждой степени n существует такое целое число $s=s(n)$, что $E^2_{p,q}=0$, когда $p<s$ и $p+q=n$. Это эквивалентно требованию, что на каждой наклоненной под углом 45° прямой $(p+q=n)$ с убыванием p все члены становились равными нулю; таким образом, спектральные последовательности первой или «третьей» четверти ограничены снизу.

Теорема 1.1. (*Теорема об отображении.*) *Если $f: E \to E'$ — гомоморфизм спектральных последовательностей и если $f^t: E^t \cong E'^t$ — изоморфизм для некоторого t, то и $f^r: E^r \cong E'^r$ — изоморфизм при $r \geqslant t$. Если, кроме того, последовательности E и E' ограничены снизу, то и $f^\infty: E^\infty \cong E'^\infty$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку f^t — цепной изоморфизм и $E^{t+1}=H(E^t, d^t)$, то первое утверждение доказывается по индукции. Если последовательности E и E' ограничены снизу и пара чисел (p, q) фиксирована, то дифференциал $d^r: E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,\,q+r-1}$ имеет образ 0 для достаточно больших r. Следовательно, $C^r_{p,q}=C^\infty_{p,q}$ и $C'^r_{p,q}=C'^\infty_{p,q}$ для больших r. Значит, всякий элемент $a' \in C'^\infty_{p,q}$ лежит в $C'^r_{p,q}$, так что из эпиморфности f^r следует эпиморфность f^∞. Если $fa \in B'^\infty = \bigcup B'^r$ для $a \in C^\infty$, то $fa \in B'^r$ для некоторого r. Следовательно, если f^r — мономорфизм для всех r, то f^∞ — мономорфизм.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что башня (1.4) вместе с последовательностью изоморфизмов θ^r: $C^{r-1}/C^r \cong B^r/B^{r-1}$ бистепени $(-r, r-1)$ для $r=2, 3, \ldots$ определяет спектральную последовательность, в которой $E^r=C^{r-1}/B^{r-1}$ и d^r равняется произведению $C^{r-1}/B^{r-1} \to C^{r-1}/C^r \to B^r/B^{r-1} \to C^{r-1}/B^{r-1}$, и что каждая спектральная последовательность изоморфна последовательности, полученной указанным способом.

2. Для спектральных последовательностей E' и E'' векторных пространств над полем построить спектральную последовательность $E=E' \otimes E''$ с $E^r_{p,q}=\sum E'^r_{p',q'} \otimes E''^r_{p'',q''}$, где сумма берется по всем $p'+p''=p$, $q'+q''=q$, а d^r определяется с помощью обычной формулы для дифференциала тензорного произведения.

3. Для спектральной последовательности E проективных левых R-модулей, левого R-модуля C и правого R-модуля G построить спектральные последовательности $\operatorname{Hom}_R(E, C)$ и $G \otimes_R E$ и вычислить члены E^∞.

§ 2. Расслоенные пространства

До изучения различных алгебраических примеров спектральных последовательностей полезно указать некоторые следствия, которые можно вывести непосредственно из определения спектральной последовательности. Для этой цели мы отметим без доказательства важный топологический пример спектральной последовательности расслоения.

Пусть I обозначает единичный интервал, и пусть P — некоторый конечный полиэдр; напомним, что гомотопия — это непрерывное отображение $H: P \times I \to B$. Непрерывное отображение $f: E \to B$ топологических пространств, при котором $f(E) = B$, называется *послойным отображением*, если любая коммутативная диаграмма следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow{\scriptstyle i} & \nearrow{\scriptstyle L} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ P \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array} \qquad i(x) = (x, 0) \qquad x \in P,$$

(все отображения непрерывны) может быть всегда дополнена отображением L, сохраняющим коммутативность. Это есть свойство «накрывающей гомотопии» для f: любая гомотопия H пространства P в B, начальные значения которой $H(x, 0)$ могут быть «подняты» до такого отображения $h: P \to E$, что $fh(x) = H(x, 0)$, может быть сама накрыта гомотопией L пространства P в E, причем $fL = H$ и $h(x) = L(x, 0)$. Если b — любая точка из B, то ее полный прообраз $F = f^{-1}b$ называется *слоем* отображения f над b. Если пространство B линейно связно, то можно показать, что любые два слоя (над различными точками b) имеют изоморфные группы (сингулярных) гомологий. Следовательно, можно образовать группы сингулярных гомологий $H_p(B, H_q(F))$ пространства B с коэффициентами в группах гомологий $H_q(F)$ «слоя». Строго говоря, мы должны использовать «локальные коэффициенты», которые объясняют действие фундаментальной группы пространства B на $H_q(F)$; этого мы добьемся, предположив, что пространство B односвязно. Поскольку B линейно связно, его нульмерная сингулярная гомология такова:

$$H_0(B) = Z, \quad H_0(B, H_q(F)) \cong H_q(F).$$

Следующая спектральная последовательность была построена Серром [1951], следуя конструкции Лерэ [1946, 1950] для случая когомологии.

Теорема (*Лерэ — Серр*). *Если $f: E \to B$ есть послойное отображение с линейно связной и односвязной базой B и с линейно связным слоем F, то существует для каждого n «сгнездившееся» семейство подгрупп группы сингулярных гомологий $H_n(E)$*

$$0 = H_{-1, n+1} \subset H_{0, n} \subset H_{1, n-1} \subset \ldots \subset H_{n-1, 1} \subset H_{n, 0} = H_n(E) \quad (2.1)$$

и такая спектральная последовательность первой четверти, что

$$E^2_{p, q} \cong H_p(B, H_q(F)), \quad E^\infty_{p, q} \cong H_{p, q}/H_{p-1, q+1}. \quad (2.2)$$

Если e_B — итерированный краевой гомоморфизм базы, то произведение

$$H_p(E) \to H_{p, 0}/H_{p-1, 1} \cong E^\infty_{p, 0} \xrightarrow{e_B} E^2_{p, 0} \cong H_p(B, H_0(F)) \cong H_p(B)$$

является гомоморфизмом, индуцированным на гомологии послойным отображением $f: E \to B$. Если e_F — итерированный краевой гомоморфизм на слое, то произведение

$$H_q(F) \cong H_0(B, H_q(F)) \cong E^2_{0, q} \xrightarrow{e_F} E^\infty_{0, q} \to H_q(E)$$

является гомоморфизмом, индуцированным на гомологии включением $F \subset E$.

Эта спектральная последовательность связывает (сингулярную) гомологию базы и слоя с помощью E^2 с гомологией «полного пространства» E, причем E^∞ определяется последовательными фактор-группами «фильтрации» (2.1) гомологии пространства E.

Теорема об универсальных коэффициентах (теорема V.11.1) выражает первый член из (2.2) в виде точной последовательности

$$0 \to H_p(B) \otimes H_q(F) \to E^2_{p, q} \to \operatorname{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F)) \to 0. \quad (2.3)$$

В частности, если все группы $H_{p-1}(B)$ без кручения, то $E^2_{p, q} = H_p(B) \otimes H_q(F)$.

Предполагая известным этот результат, мы выведем некоторые следствия для иллюстрации того, какая информация может быть получена из спектральной последовательности.

Теорема Лерэ — Серра остается в силе, если все группы гомологий (пространств B, F и E) интерпретировать как группы гомологий над полем Q рациональных чисел. Будем обозначать символом $\dim V$ размерность Q-векторного пространства V над Q. Для любого пространства X n-е *число Бетти* $b_n(X)$ и *характеристика Эйлера* $\chi(X)$ определяются следующим образом:

$$b_n(X) = \dim H_n(X, Q), \quad \chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(X);$$

более точно, число $\chi(X)$ определено, если каждое из чисел $b_n(X)$ конечно и если существует такое m, что $b_n(X) = 0$ для $n > m$. Если X — конечный полиэдр, число $\chi(X)$ определено.

Следствие. 2.1. *Если $f\colon E \to B$ — расслоенное пространство со слоем F и если пространства B и F удовлетворяют условиям теоремы Лерэ — Серра, то число $\chi(E)$ определено, если определены числа $\chi(B)$ и $\chi(F)$ и $\chi(E) = \chi(B)\,\chi(F)$.*

Доказательство. Для любого биградуированного векторного пространства E^r определим характеристику как число $\chi(E^r) = \sum\limits_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E^r_{p,q}$. В силу (2.3) для векторных пространств

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B) \otimes H_q(F), \quad \dim E^2_{p,q} = b_p(B)\, b_q(F) < \infty$$

и $\chi(E^2) = \chi(B)\,\chi(F)$. Обозначим через $C^r_{p,q}$ и $B^r_{p,q}$ группы циклов и группы границ пространства $E^r_{p,q}$ относительно d^r. Короткие точные последовательности

$$C^r_{p,q} \rightarrowtail E^r_{p,q} \twoheadrightarrow B^r_{p-r,\,q+r-1}, \qquad B^r_{p,q} \rightarrowtail C^r_{p,q} \twoheadrightarrow E^{r+1}_{p,q}$$

определяют C^r, B^r и $E^{r+1} = H(E^r)$. В каждой последовательности размерность среднего члена есть сумма размерностей крайних членов, так что

$$\dim E^{r+1}_{p,q} = \dim E^r_{p,q} - \dim B^r_{p,q} - \dim B^r_{p-r,\,q+r-1}.$$

Здесь последний член имеет полную степень $p - r + q + r - 1 = (p + q) - 1$, так что $\chi(E^{r+1}) = \chi(E^r)$; по индукции получаем $\chi(E^r) = \chi(E^2)$. Поскольку пространства $E^r_{p,q}$ тривиальны для больших p и q, $E^\infty = E^r$ для больших r и $\chi(E^\infty) = \chi(E^2)$. Теперь по (2.1) и (2.2)

$$\dim H_n(E) = \sum_{p+q=n} \dim (H_{p,q}/H_{p-1,\,q+1}) = \sum_{p+q=n} \dim E^\infty_{p,q},$$

так что $\chi(E) = \chi(E^\infty) = \chi(E^2) = \chi(B)\,\chi(F)$, что и утверждалось.

Теорема 2.2. (*Последовательность Вана.*) *Если $f\colon E \to S^k$ — расслоенное пространство с k-мерной сферой S^k ($k \geqslant 2$) в качестве базы и линейно связным слоем F, то существует точная последовательность*

$$\cdots \longrightarrow H_n(E) \longrightarrow H_{n-k}(F) \xrightarrow{d^k} H_{n-1}(F) \longrightarrow H_{n-1}(E) \longrightarrow \cdots.$$

Доказательство. База S^k односвязна, и ее группы гомологий $H_0(S^k) \cong Z \cong H_k(S^k)$ и $H_p(S^k) = 0$ для $p \neq 0,\ k$; следовательно, по (2.3)

$$E^2_{k,q} \cong H_q(F), \quad E^2_{0,q} \cong H_q(F), \quad E^2_{p,q} = 0, \quad p \neq 0,\ k.$$

Ненулевые члены из $E^2_{p,q}$ все лежат на вертикальных прямых $p = 0$ и $p = k$, так что у единственного дифференциала d^r, $r \geqslant 2$, отличного от нуля, $r = k$. Следовательно, $E^2 = E^3 = \cdots = E^k$, $E^{k+1} = E^{k+2} = \cdots = E^\infty$.

Описание $E^{k+1} = E^\infty$ как гомологии бимодуля (E^k, d^k) эквивалентно точности последовательности

$$0 \longrightarrow E^\infty_{k,q} \longrightarrow E^2_{k,q} \xrightarrow{d^k} E^2_{0,\,q+k-1} \longrightarrow E^\infty_{0,\,q+k-1} \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

С другой стороны, в башне (2.1) только два фактормодуля отличны от нуля, поэтому она сводится к последовательности $0 \subset H_{0,n} = H_{k-1,\,n-k+1} \subset H_{k,\,n-k} = H_n$. Вместе с изоморфизмами для E^∞ из (2.2) это равносильно короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow E^\infty_{0,n} \longrightarrow H_n(E) \longrightarrow E^\infty_{k,\,n-k} \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

со средним членом $H_n(E)$. Теперь положим в (2.4) $q = n - k$, выразим члены из E^2 через $H(F)$ и соединим последовательности (2.4) и (2.5):

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(E) \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E^\infty_{k,\,n-k} \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-k}(F) \arrow[r] & H_{n-1}(F) \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & E^\infty_{0,\,n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & & H_{n-1}(E). &
\end{tikzcd}$$

В результате получается требуемая длинная точная последовательность. По теореме Лерэ — Серра гомоморфизм $H_{n-1}(F) \to H_{n-1}(E)$ индуцирован включением $F \subset E$.

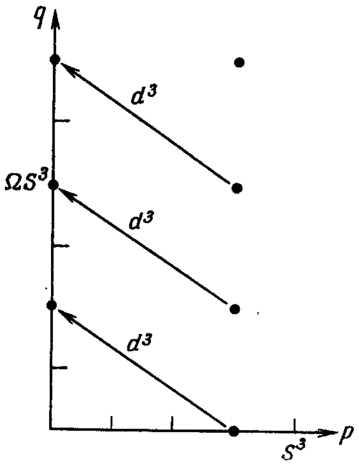
Спектральные последовательности могут быть использованы для вычисления гомологии некоторых пространств петель, полезных в теории гомотопий. Пусть b_0 — фиксированная точка линейно связного пространства B. Пространство $L(B)$ путей в B имеет своими точками непрерывные отображения $t\colon I \to B$ с $t(0) = b_0$; здесь I — единичный интервал, а $L(B)$ снабжается «компактно открытой» топологией. Отображение $p\colon L(B) \to B$, определяемое формулой $p(t) = t(1)$, проектирует каждый путь в его конечную точку в B; можно показать, что p — послойное отображение. Слой $\Omega(B) = p^{-1}(b_0)$ состоит из замкнутых путей t [с $t(0) = b_0 = t(1)$]; он известен как *пространство петель* пространства B.

Следствие 2.3. *Пространство петель ΩS^k k-мерной сферы, $k \geqslant 2$, имеет следующие группы гомологий*:

$$H_n(\Omega S^k) \cong Z, \quad n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, k-1),$$
$$H_n(\Omega S^k) = 0, \quad n \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, k-1), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Поскольку $k > 1$, сфера S^k односвязна; поэтому каждая петля может быть стянута в нуль. Отсюда следует, что пространство $\Omega(S^k)$ линейно связно, так что

$H_0(\Omega S^k) = Z$. Пространство $E = L(B)$ путей стягиваемо, в чем можно убедиться «сжатием» каждого пути вдоль самого себя к началу. Следовательно, пространство E ациклично (упражнения II.8.1). Значит, каждый третий член $H_n(E)$ в последовательности Вана равен нулю, кроме $H_0(E)$, так что эта последовательность устанавливает изоморфизмы $H_{n-k}(\Omega S^k) \cong H_{n-1}(\Omega S^k)$. Вместе с данным начальным значением $H_0 = Z$ они устанавливают требуемый результат.



Поучительно изобразить диаграмму этой спектральной последовательности для $k = 3$ (см. диаграмму). Жирные точки обозначают в этой диаграмме члены $E_{p,q} \cong Z$, а все остальные члены равны нулю. Единственный ненулевой дифференциал — это d^3; эти дифференциалы, примененные к элементам, лежащим на прямой $p = 3$, «убивают» последовательные элементы в гомологии слоя. Эта диаграмма может быть построена непосредственно без использования последовательности Вана. Мы зададим базу образующими $1 \in E^2_{0,0}$ и $x \in E^2_{3,0}$; все элементы лежат на вертикальных прямых $p = 0$ и $p = 3$. Поскольку $E^\infty = 0$, каждый элемент должен быть «убит» (т. е. стать границей или иметь ненулевую границу) некоторым дифференциалом. Но d^3 — единственный ненулевой дифференциал. Следовательно, $d^3 x = y \neq 0$ в $E^2_{0,2}$ на слое. Элемент $x \otimes y \in E^2_{3,2}$ должен также иметь ненулевую границу $d^3(x \otimes y) = y'$ в $E^2_{0,4}$ на слое и т. д.

Теорема 2.4. (*Последовательность Гизина.*) *Если $f: E \to B$ — расслоенное пространство с односвязной базой B и слоем F, являющимся k-мерной сферой S^k с $k \geqslant 1$, то существует точная последовательность*

$$\cdots \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{d^{k+1}} H_{n-k-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(E) \longrightarrow \cdots.$$

Доказательство. Поскольку $H_q(F) = H_q(S^k) = 0$ для $q \neq 0$, k, член E^2 таков:

$$E^2_{p,q} = H_p(B), \quad q = 0, \quad q = k; \quad E^2_{p,q} = 0, \quad q \neq 0, k.$$

Спектральная последовательность лежит в этом случае на двух горизонтальных прямых $q = 0$ и $q = k$; единственный ненулевой

дифференциал — это d^{k+1}, и мы получаем две точные последовательности

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n,0} \longrightarrow E^2_{n,0} \xrightarrow{d^{k+1}} E^2_{n-k-1,k} \longrightarrow E^\infty_{n-k-1,k} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow E^\infty_{n-k-1,k+1} \longrightarrow H_n(E) \longrightarrow E^\infty_{n,0} \longrightarrow 0,$$

соединение которых и дает последовательность, указанную в теореме.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если $f: S^m \to S^k$ есть послойное отображение, $k \geqslant 2$, и слой есть сфера S^l, то доказать, что должно быть $m = 2k - 1$ и $l = k - 1$ (для $k = 2$, 4 и 8 действительно существуют такие послойные отображения; они являются *расслоениями Хопфа*; Хопф [1931, 1935], Стинрод [1951], Ху Сы-Цзян [1959, стр. 66]).

В следующих трех упражнениях $f: E \to B$ — расслоенное пространство с линейно связной и односвязной базой B и с линейно связным слоем F.

2. Пусть $H_j(F) = 0$ для $0 < j < t$ и $H_i(B) = 0$ для $0 < i < s$. Получить точную последовательность

$$H_{s+t-1}(F) \longrightarrow H_{s+t-1}(E) \longrightarrow H_{s+t-1}(B) \longrightarrow H_{s+t-2}(F) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow H_2(B) \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow H_1(E) \longrightarrow H_1(B) \longrightarrow 0.$$

3. Если $H_i(B) = 0$ для всех $i > 0$, то доказать, что $H_n(F) \cong H_n(E)$ для всех n.

4. Пусть $H_j(F) = 0$ для всех $j > 0$. Доказать, что $H_n(E) \cong H_n(B)$ для всех n.

5. Для спектральной последовательности Лерэ — Серра E и поля Q рациональных чисел определить спектральную последовательность $E' = Q \otimes E$ векторных пространств над Q и показать, что $E'^2_{p,q} = H_p(B, Q) \otimes H_q(F, Q)$ и $E'^\infty_{p,q} = H'_{p,q}/H'_{p-1,q+1}$, где H' появляются в башне, подобной башне (2.1), но $H_n(E)$ заменено на $H_n(E, Q)$.

§ 3. Фильтрованные модули

Фильтрацией F модуля A называется такое семейство подмодулей F_pA, по одному для каждого $p \in Z$, что

$$\dots \subset F_{p-1}A \subset F_pA \subset F_{p+1}A \subset \dots. \tag{3.1}$$

Каждая фильтрация F модуля A определяет *ассоциированный градуированный модуль* $G^F A = \{(G^F A)_p = F_pA/F_{p-1}A\}$, состоящий из последовательных фактормодулей башни (3.1). Если F и F' — фильтрации модулей A и A' соответственно, то гомоморфизм $\alpha: A \to A'$ фильтрованных модулей — это модульный гомоморфизм, обладающий тем свойством, что $\alpha(F_pA) \subset F'_pA'$. Фильтрация F дифференциального Z-градуированного модуля A — это семейство DG_Z-подмодулей F_pA, подобное семейству (3.1), а гомоморфизм определяется соответствующим образом. Эта фильтрация индуцирует фильтрацию в Z-градуированном модуле гомологий $H(A)$, где $F_p(H(A))$ определяется как образ $H(F_pA)$ при вложении $F_pA \to A$. Поскольку модуль A сам Z-градуирован степенями n, фильтрация F модуля определяет фильтрацию F_pA_n каждого модуля A_n, а дифференциал модуля A индуцирует гомоморфизмы $\partial : F_pA_n \to F_pA_{n-1}$ для каждого p и каждого n. Семейство $\{F_pA_n\}$ — это Z-биградуированный модуль. Привычно и удобно записывать индексы градуировки как (p, q), где p — *степень фильтрации* и $q = n - p$ — *дополнительная степень*; тогда наш Z-биградуированный модуль принимает вид $\{F_pA_{p+q}\}$. Мы будем использовать запись «FDG_Z-модуль» для сокращения термина «фильтрованный дифференциальный Z-градуированный модуль».

Говорят, что фильтрация FDG_Z-модуля A *ограничена*, если для каждой степени n существуют такие целые числа $s = s(n) < t = t(n)$, что $F_sA_n = 0$ и $F_tA_n = A_n$. Это условие равносильно требованию о «конечности длины» n фильтрации для каждого A_n:

$$0 = F_sA_n \subset F_{s+1}A_n \subset \ldots \subset F_tA_n = A_n.$$

Говорят, что спектральная последовательность $\{E^r_p, d^r\}$ *сходится* к градуированному модулю H (обозначение: $E^2_p \underset{p}{\Rightarrow} H$), если существует такая фильтрация F модуля H, что для каждого p имеет место изоморфизм $E^\infty_p \cong F_pH/F_{p-1}H$ градуированных модулей. Здесь E^r_p при заданных r и p обозначает Z-градуированный модуль $E^r_p = \{E^r_{p,q},\ q = 0 \pm 1, \ldots\}$ (градуированный дополнительной степенью q).

Теперь можно определить ассоциированную спектральную последовательность фильтрации.

Теорема 3.1. *Каждая фильтрация F дифференциального Z-градуированного модуля A определяет спектральную последовательность (E^r, d^r), $r = 1, 2, \ldots$, которая является ковариантным функтором пары (F, A), вместе с естественными изоморфизмами*

$$E^1_p \cong H(F_pA/F_{p-1}A);\ \text{т. е.}\ E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(F_pA/F_{p-1}A). \tag{3.2}$$

Если фильтрация F ограничена, то $E^2_p \Rightarrow H(A)$; более точно, имеют место естественные изоморфизмы

$$E^\infty_p \cong F_p(HA)/F_{p-1}(HA),\ \text{т. е.}\ E^\infty_{p,q} \cong F_p(H_{p+q}A)/F_{p-1}(H_{p+q}A). \tag{3.3}$$

Для доказательства введем подмодули

$$Z^r_p = [a \mid a \in F_pA,\quad \partial a \in F_{p-r}A],\quad r = 0, 1, \ldots, \tag{3.4}$$

модуля F_pA. Элемент из Z^r_p можно рассматривать как «приближенный цикл уровня r»: его граница может не быть нулевой, но лежит на r шагов ниже в фильтрации. В частности, $Z^0_p = F_pA$. Каждый подмодуль Z^r_p Z-градуирован степенями из A, так что мы можем рассматривать Z^r как биградуированный модуль, у которого

$$Z^r_{p,q} = [a \mid a \in F_pA_{p+q},\ \partial a \in F_{p-r}A_{p+q-1}]. \tag{3.5}$$

С помощью этих обозначений спектральная последовательность фильтрации F модуля A определяется следующим образом:

$$E^r_p = (Z^r_p \cup F_{p-1}A)/(\partial Z^{r-1}_{p+r-1} \cup F_{p-1}A),\quad r = 1, 2, \ldots,$$

а дифференциал $d^r : E^r_p \to E^r_{p-r}$ есть гомоморфизм, индуцированный на указанных подфакторах дифференциалом $\partial: A \to A$. После этих определений доказательство становится непосредственным, но все же достаточно трудоемким. Проведем его в деталях.

Положим $E^0_p = F_pA/F_{p-1}A$, и пусть $\eta_p: F_pA \to E^0_p$ — каноническая проекция. Рассмотрим аддитивные отношения

$$E^0_{p+r} \xrightarrow{\partial_1} E^0_p \xrightarrow{\partial_2} E^0_{p-r},$$

индуцированные на указанных подфакторах дифференциалом $\partial: A \to A$. Так, ∂_2 состоит из пар $(\eta_p a, \eta_{p-r}\partial a)$ с $a \in Z^r_p$ (в действительности это и есть причина, побудившая ввести подмодули Z^r_p). Кроме того, элемент $\eta_p a$ лежит в ядре ∂_2, если $\partial a \in F_{p-r-1}A$; поэтому (Def означает «область определения»)

$$\operatorname{Def} \partial_2 = \eta_p Z^r_p,\qquad \operatorname{Ker} \partial_2 = \eta_p Z^{r+1}_p.$$

Далее, ∂_1 состоит из пар $(\eta_{p+r}b, \eta_p\partial b)$ с $b \in Z^r_{p+r}$, причем $\eta_{p+r} b = 0$, если $b \in F_{p+r-1}A$, т. е. если $b \in Z^{r-1}_{p+r-1}$. Следовательно («Ind» означает «неопределенность»),

$$\operatorname{Im} \partial_1 = \eta_p(\partial Z^r_{p+r}),\qquad \operatorname{Ind} \partial_1 = \eta_p(\partial Z^{r-1}_{p+r-1}).$$

Принимая во внимание включения $\partial Z^{r-1}_{p+r-1} \subset \partial Z^r_{p+r} \subset Z^{r+1}_p \subset Z^r_p$, мы можем ввести для каждого p и каждого r подфактор E^r_p модуля E^0_p:

$$E^r_p = (\eta_p Z^r_p)/\eta_p(\partial Z^{r-1}_{p+r-1}),\quad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

приведенные выше формулы показывают, что ∂ индуцирует гомоморфизмы

$$E^r_{p+r} \xrightarrow{d^r_1} E^r_p \xrightarrow{d^r_2} E^r_{p-r}.$$

Образ d^r_1 равен

$$\operatorname{Im} d^r_1 = \eta_p(\partial Z^r_{p+r})/\eta_p(\partial Z^{r-1}_{p+r-1}),$$

а ядро d_2^r равно

$$\operatorname{Ker} d_2^r = \eta_p (Z_p^{r+1})/\eta_p (\partial Z_{p+r-1}^{r-1}).$$

Следовательно (опуская индексы 1 и 2), $d^r d^r = 0$, и

$$H_p(E^r,\ d^r) \cong \eta_p (Z_p^{r+1})/\eta_p (\partial Z_{p+r}^{r}) = E_p^{r+1}.$$

Таким образом, мы имеем спектральную последовательность. Когда $r = 0$, $Z_p^0 = F_pA$, а $d^0\colon E_p^0 \to E_p^0$ это в точности дифференциал факторкомплекса $E_p^0 = F_pA/F_{p-1}A$. Этим доказано (3.2).

Эта спектральная последовательность может быть также получена из башен

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\partial Z_{p-1}^{-1} & \subset & \partial Z_p^0 & \subset & \partial Z_{p+1}^1 & \subset \cdots \subset & Z_p^2 & \subset & Z_p^1 & \subset & Z_p^0 & = & F_pA \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_p} \\
B_p^0 & \subset & B_p^1 & \subset & B_p^2 & \subset \cdots \subset & C_p^2 & \subset & C_p^1 & \subset & C_p^0 & = & E_p^0.
\end{array}$$

Башня из пе́рвой строки, взятая по модулю $F_{p-1}A$, дает башню из второй строки: $B_p^r = \eta_p \partial Z_{p+r-1}^{r-1}$ и $C_p^r = \eta_p Z_p^r$. По II.6 аддитивное отношение $\partial_2 : F_pA/F_{p-1}A \rightharpoonup F_{p-r}A/F_{p-r-1}A$ равносильно изоморфизму

$$\operatorname{Def} \partial_2/\operatorname{Ker} \partial_2 \cong \operatorname{Im} \partial_2/\operatorname{Ind} \partial_2.$$

Однако этот изоморфизм — это в точности изоморфизм $C_p^r/C_p^{r+1} \cong$ $\cong B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^r$. Тем самым d^r определяется как произведение

$$E_p^r = C_p^r/B_p^r \xrightarrow{\pi} C_p^r/C_p^{r+1} \cong B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^r \xrightarrow{\iota} C_{p-r}^r/B_{p-r}^r = E_{p-r}^r,$$

где π — проекция, ι — вложение. Этим порождается спектральная последовательность способом, описанным в упражнении 1.1 (за исключением того, что C^r здесь обозначается как C^{r+1}).

Для описания $F_pH/F_{p-1}H$ введем обозначения $C = \operatorname{Ker} \partial$ и $B =$ $= \partial A$ соответственно для модулей циклов и границ модуля A. Тогда F индуцирует в C и B фильтрации $F_pC = C \cap F_pA$, $F_pB =$ $= B \cap F_pA$. По определению $F_p(HA) = (F_pC \cup B)/B$. Следовательно,

$$F_p(HA)/F_{p-1}(HA) \cong (F_pC \cup B)/(F_{p-1}C \cup B) \cong F_pC/(F_{p-1}C \cup F_pB)$$

в силу модулярного изоморфизма Нётер. Другой изоморфизм подобного типа

$$F_p(HA)/F_{p-1}(HA) \cong (F_pC \cup F_{p-1}A)/(F_pB \cup F_{p-1}A) \tag{3.7}$$

представляет $F_pH/F_{p-1}H$ как подфактор модуля $F_pA/F_{p-1}A$.

В определении (3.6) модуля E_p^r верхний член равен $(Z_p^r \cup F_{p-1}A)/F_{p-1}A \subset F_pA/F_{p-1}A$, а нижний член равен $(\partial Z_{p+r-1}^{r-1} \cup F_{p-1}A)/F_{p-1}A$; поэтому

$$E_p^r = (Z_p^r \cup F_{p-1}A)/(\partial Z_{p+r-1}^{r-1} \cup F_{p-1}A),$$

$$E_{p,q}^r = (Z_{p,q}^r \cup F_{p-1}A_{p+q})/(\partial Z_{p+r-1,\,q-r+2}^{r-1} \cup F_{p-1}A_{p+q}). \tag{3.8}$$

Теперь предположим, что фильтрация F ограничена, и рассмотрим фиксированную бистепень $(p,\ q)$, соответствующую полной степени $n = p + q$. Для элемента $a \in Z_{p,q}^r$ из верхнего члена выражения для $E_{p,q}^r$, при большом r, $\partial a \in F_{p-r}A_{p+q-1} = 0$, следовательно, $a \in F_pC_{p+q}$. С этого момента верхние члены становятся равными $F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$. Что же касается нижнего члена, то, при большом r, каждый элемент из F_pB_{p+q} является границей элемента из $F_{p+r-1}A$, т. е. элементов из Z_{p+r-1}^{r-1}. С этого момента нижние члены равны $F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}$. Но E^∞ определяется как фактормодуль пересечения верхних членов по объединению нижних, поэтому

$$E_{p,q}^\infty = (F_pC_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q})/(F_pB_{p+q} \cup F_{p-1}A_{p+q}), \tag{3.9}$$

что в точности совпадает с $F_pH/F_{p-1}H$, как показывает изоморфизм (3.7). Тем самым (3.3) доказано. В литературе E^∞ обычно *определяется* через $H(A)$ формулой (3.9), так что изоморфизм «сходимости» (3.3) утверждает, что это определение согласуется с нашим.

Сходимость (3.3) имеет место при более слабых условиях, чем ограниченность (для полного изучения см. работу Эйленберга и Мура [1962]). Например, назовем фильтрацию F DG_Z-модуля A *сходящейся сверху*, если A есть объединение всех подмодулей F_pA, и *ограниченной снизу*, если для каждой степени n существует такое целое число $s = s(n)$, что $F_sA_n = 0$.

Предложение 3.2. *Если фильтрация F ограничена снизу и сходится сверху, то имеет место изоморфизм* (3.3), *и спектральная последовательность фильтрации F ограничена снизу.*

Доказательство. Поскольку F ограничена снизу, пересечение верхних членов из выражений для E_p^r равно $F_pC \cup F_{p-1}A$. Каждый элемент из F_pB является границей ∂a некоторого элемента $a \in A = \bigcup F_tA$; значит, $a \in F_tA$ для некоторого t. Тогда $a \in Z_{p+r-1}^{r-1}$ для $r = t - p + 1$, так что $F_pB \cup F_{p-1}A$ снова равняется объединению подмодулей $\partial Z_{p+r-1}^{r-1} \cup F_{p-1}A$, и поэтому мы имеем изоморфизм (3.3).

В формуле (3.8) один из верхних членов Z_p^r дает «приближенные циклы» уровня r, в то время как нижний член ∂Z_{p+r-1}^{r-1} является подмодулем границ (границы элементов, лежащих на r уровней выше).

В доказательстве эти приближения выбраны таким образом, что следующее представляет собой гомологию предыдущего. Иная формула (для той же самой спектральной последовательности) появится в упражнении 1.

Фильтрация F DG-модуля A *канонически ограничена*, если $F_{-1}A = 0$ и $F_nA_n = A_n$ для каждой степени n.

Теорема 3.3. *Если F — канонически ограниченная фильтрация (положительно градуированного) DG-модуля A, то спектральная последовательность фильтрации F лежит в первой четверти, а индуцированная фильтрация модуля HA конечна и имеет вид*

$$0 = F_{-1}H_nA \subset F_0H_nA \subset F_1H_nA \subset \ldots \subset F_nH_nA = H_nA,$$

причем последовательные факторы $F_pH_n/F_{p-1}H_n \cong E^{\infty}_{p,n-p}$ и изоморфизмы индуцируются 1_A. Например, последовательность из теоремы Лерэ — Серра появляется из канонически ограниченной фильтрации модуля сингулярных цепей расслоенного пространства.

Доказательство. Поскольку $F_{-1}A = 0$, $E^1_p = H(F_pA/F_{p-1}A) = 0$ для $p < 0$. Поскольку $F_nA_n = A_n$, из $q < 0$ следует $F_pA_{p+q} = F_{p-1}A_{p+q}$ и, следовательно, $E^1_{p,q} = 0$ для $q < 0$. Поэтому все ненулевые члены $E^r_{p,q}$ лежат в первой четверти плоскости (p, q), и индуцированная фильтрация в $H_n(A)$ конечна, что и утверждалось.

При $n = 1$ фильтрация H_1 равносильна описанию H_1 как среднего члена короткой точной последовательности

$$0 \to E^{\infty}_{0,1} \xrightarrow{\lambda} H_1 \xrightarrow{\sigma} E^{\infty}_{1,0} \to 0.$$

Для каждого n фильтрация H_n порождает мономорфизм $E^{\infty}_{0,n} \to H_n(A)$ и эпиморфизм $H_n(A) \to E^{\infty}_{n,0}$. Комбинируя их с краевыми гомоморфизмами, мы получаем отображения

$$E^1_{0,n} \to H_n(A), \quad H_n(A) \to E^2_{n,0}, \tag{3.10}$$

каждое из которых индуцировано 1_A. Вообще спектральная последовательность фильтрации F определяет не $H(A)$, а подфакторы $F_pH/F_{p-1}H$, утверждая в то же время, что каждый из них является в свою очередь подфактором модуля $E^1_p = H(F_pA/F_{p-1}A)$.

Теорема 3.4. (*Теорема об отображении.*) *Пусть A, A' являются DG_Z-модулями с фильтрациями F и F', ограниченными снизу и сходящимися сверху. Если α: $(F, A) \to (F', A')$ — такой гомоморфизм, что для некоторого t индуцированное отображение*

$$\alpha^t : E^t(F, A) \cong E'^t(F', A')$$

является изоморфизмом, то и отображения α^r являются изоморфизмами при $\infty \geqslant r \geqslant t$ и, кроме того, $\alpha_* : H(A) \to H(A')$ — изоморфизм.

Доказательство. Поскольку обе спектральные последовательности ограничены снизу, предыдущая теорема об отображении (теорема 1.1) показывает, что α^r и $\alpha^{\infty} : E^{\infty} \to E'^{\infty}$ суть изоморфизмы. Рассмотрим индуцированное отображение $\alpha_n : H_n(A) \to H_n(A')$ на гомологии для фиксированной степени n и соответствующие отображения $\alpha_{p,n} : F_pH_n \to F'_pH'_n$. Поскольку обе фильтрации ограничены снизу, существует такое s, что $F_sH_n = 0 = F'_sH'_n$. Изоморфизмы сходимости (3.3) дают горизонтальные последовательности коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{p-1}H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{p-1,n}"] & F_pH_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{p,n}"] & E^{\infty}_{p,n-p} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^{\infty}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F'_{p-1}H_n(A') \arrow[r] & F'_pH_n(A') \arrow[r] & E'^{\infty}_{p,n-p} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Поскольку α^{∞} — изоморфизм, индукция по p и лемма о пяти гомоморфизмах показывают, что $\alpha_{p,n}$ — изоморфизм. Фильтрация F сходится сверху, поэтому $H_n(A) = \bigcup F_pH_n(A)$; отсюда следует, что α_n — изоморфизм, что и требовалось.

При $t = 1$ из условий этой теоремы вытекает, что индуцированное отображение $H_n(F_pA/F_{p-1}A) \to H_n(F'_pA'/F'_{p-1}A')$ является изоморфизмом для всех n и p. Этот специальный случай теоремы был уже доказан в теореме V.9.3 и вновь в теореме X.11.2.

Пусть α, $\beta : (F, A) \to (F', A')$ — гомоморфизмы FDG_Z-модулей. Говорят, что цепная гомотопия $s : \alpha \simeq \beta$ имеет *порядок* $\leqslant t$, если $s(F_pA) \subset F'_{p+t}A'$ для всех p.

Предложение 3.5. *Если $s : \alpha \simeq \beta$ — гомотопия порядка $\leqslant t$, то*

$$\alpha^r = \beta^r : E^r(F, A) \to E'^r(F', A'),$$

для $r > t$ и $\alpha_* = \beta_* : H(A) \to H(A')$.

Доказательство. Утверждение $\alpha_* = \beta_*$ вытекает из существования гомотопии (независимо от ее «порядка»). Для доказательства остального достаточно рассмотреть отображение $\gamma = \alpha - \beta$, гомотопию $s : \gamma \simeq 0$ и доказать, что $\gamma^r = 0$. Запишем $E^r_{p,q}$ как подфактор (3.8). Если $a \in Z^r_p$, то $\gamma a = \partial sa + s\partial a$, где $\partial a \in F_{p-r}A$, так что $s\partial a \in F'_{p-1}A'$, поскольку $t < r$, в то время как $sa \in F'_{p+r-1}A'$, $\partial sa = \gamma a - s\partial a \in F'_pA'$ и $sa \in Z^{r-1}_{p+r-1}(A')$. Значит, элемент $\gamma a \in \partial Z^{r-1}_{p+r-1} \cup F'_{p-1}A'$ принадлежит нижнему члену выражения для E'^r_p и поэтому определяет нуль.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что формулы $E^r_p = Z^r_p/(\partial Z^{r-1}_{p+r-1} \cup Z^{r-1}_{p-1})$ вместе с отображениями $d^r : E^r_p \to E^r_{p-r}$, индуцированными $\partial : A \to A$, определяют спек-

тральную последовательность, изоморфную последовательности теоремы 3.1. (Эти формулы часто используются в качестве определения.)

2. Если фильтрация F дифференциального градуированного модуля A канонически ограничена, то показать, что ее спектральная последовательность порождает точную последовательность

$$H_2(A) \xrightarrow{e_B} E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2} E^2_{0,1} \xrightarrow{e_F} H_1(A) \xrightarrow{e_B} E^2_{1,0} \longrightarrow 0.$$

Если $E^2_{p,q}=0$ для $0<q<t$ и всех p, то показать, что $e_B: H_p(A) \cong E^2_{p,0}$ для $0 \leqslant p < t$, и установить точность последовательности

$$H_{t+1}(A) \xrightarrow{e_B} E^2_{t+1,0} \xrightarrow{d^{n+1}} E^2_{0,t} \xrightarrow{e_F} H_t(A) \xrightarrow{e_B} E^2_{t,0} \longrightarrow 0.$$

3. (Точная последовательность «членов малой степени»; ср. с упражнением 2.2.) В условиях упражнения 2 предположим, что $E^2_{p,q}=0$, когда или $0<q<t$, или $0<p<s$. Установить точность последовательности

$$H_{s+t} \xrightarrow{e_B} E^2_{s+t,0} \xrightarrow{d^{s+t}} E^2_{0,s+t-1} \xrightarrow{e_F} H_{s+t-1} \xrightarrow{e_B} E^2_{s+t-1,0} \longrightarrow \ldots,$$

где H_i — сокращение для $H_i(A)$.

4. (Двурядная точная последовательность.) В условиях теоремы 3.3 предположим, что имеется два таких индекса $0 \leqslant a < b$, что $E^2_{p,q}=0$ для $q \neq a, b$ и всех p. Получить точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow E^2_{n-b,b} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{n-a,a} \xrightarrow{d^r} E^2_{n-b-1,b} \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

с $r=b-a+1$. (Указание: сравнить с последовательностью Вана из теоремы 2.1.)

5. Получить «двустолбцовую» точную последовательность, аналогичную последовательности из упражнения 4.

6. Если A' и A'' будут FDG-векторными пространствами над полем и если фильтрация в $A' \otimes A''$ определена формулой $F_p(A' \otimes A'') = \sum F_{p'}(A') \otimes \otimes F_{p''}(A'')$, где $p'+p''=p$, то доказать для ассоциированных спектральных последовательностей, что $E(A' \otimes A'') \cong E(A') \otimes E(A'')$.

7. Для спектральной последовательности фильтрации F модуля A показать, что модуль $E^r_{p,q}$ изоморфен образу гомоморфизма

$$H_{p+q}(F_pA/F_{p-r}A) \longrightarrow H_{p+q}(F_{p+r-1}A/F_{p-1}A), \quad r \geqslant 1,$$

индуцированного единицей. (Это описание можно использовать для определения спектральной последовательности фильтрации; см. Фаделл — Гуревич [1958], стр. 318.)

§ 4. Трансгрессия

В спектральной последовательности E первой четверти последний возможный ненулевой дифференциал, определенный на членах $E^r_{p,0}$ базы,— это дифференциал $d^p: E^p_{p,0} \to E^p_{0,p-1}$, который идет от базы к слою. Вместе с краевыми гомоморфизмами e_B и e_F это

порождает диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & E^1_{0,p-1} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_F} & & \\ 0 & \longrightarrow & E^\infty_{p,0} & \longrightarrow & E^p_{p,0} & \xrightarrow{d^p} & E^p_{0,p-1} & \longrightarrow E^\infty_{0,p-1} \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle e_B} & & \downarrow & & \\ & & & & E^2_{p,0} & & 0 & & \end{array} \qquad (4.1)$$

с точными строкой и столбцами. Если (как мы и предполагаем здесь) спектральная последовательность начинается с $r=1$, то аддитивное отношение

$$\tau = e_F^{-1} d^p e_B^{-1}: E^2_{p,0} \dashrightarrow E^1_{0,p-1}, \quad p=2, 3, \ldots,$$

называется *трансгрессией*. Любое аддитивное отношение (предложение II.6.1) является гомоморфизмом подмодуля своей области определения (называемой здесь модулем трансгрессивных элементов) в фактормодуль своей области значений; в нашем случае (4.1) представляет τ как гомоморфизм d^p подмодуля $E^p_{p,0}$ модуля $E^2_{p,0}$ в фактормодуль $E^p_{0,p-1}$ модуля $E^1_{0,p-1}$. Замена E^1 на E^2 в определении τ дает аддитивное отношение $\tau': E^2_{p,0} \longrightarrow E^2_{0,p-1}$, также называемое трансгрессией. Каждая трансгрессия однозначно определяет другую через краевой гомоморфизм $e: E^1_{0,p-1} \to E^2_{0,p-1}$, так как $\tau = e^{-1}\tau'$; поскольку e — эпиморфизм, $ee^{-1}=1$, так что $\tau' = e\tau$.

Предложение 4.1. *Трансгрессия в спектральной последовательности E канонически ограниченной фильтрации F модуля A является аддитивным отношением*

$$\tau: E^2_{p,0} \longrightarrow E^1_{0,p-1},$$

индуцированным дифференциалом $\partial: A \to A$.

Доказательство. В нашем случае E — спектральная последовательность первой четверти. Ее краевые члены можно выписать в явном виде из формул (3.8). Поскольку $\partial A_{p+1} \subset A_p = F_pA_p$, $A_{p+1} = Z^{r-1}_{p+r-1,-r+2}$ для некоторого $r \geqslant 2$, поэтому для членов базы формула (3.8) принимает вид

$$E^r_{p,0} = (Z^r_{p,0} \cup F_{p-1}A_p)/(\partial A_{p+1} \cup F_{p-1}A_p), \quad r=2, 3, \ldots. \qquad (4.2)$$

Нижний член этого выражения не зависит от r; этим проверяется то, что краевые гомоморфизмы e_B являются мономорфизмами. Точно так же $Z^r_{0,q}$ равняется F_0C_q, когда $r \geqslant 1$ и C есть ядро ∂. Следовательно, на слое формула (3.8) принимает вид

$$E^r_{0,q} = F_0C_q/\partial Z^{r-1}_{r-1,q-r+2}, \quad r=1, 2, \ldots. \qquad (4.3)$$

Верхний член не зависит от r (краевые гомоморфизмы e_F являются эпиморфизмами).

Трансгрессия — это произведение отношений, $\tau = e_F^{-1} d^p e_B^{-1}$, где e_B^{-1} и e_F^{-1} индуцированы 1_A, а d^p индуцирован ∂. Произведение τ является поэтому аддитивным отношением, индуцированным дифференциалом ∂, в чем можно убедиться, вычислив τ как множество всех пар смежных классов $(a + D^2_{p,0},\ \partial a + D^1_{0,p-1})$, где $a \in Z^p_{p,0}$ и $D^r_{p,q}$ — нижний член формулы для $E^r_{p\,q}$, или применив принцип композиции для аддитивных отношений (предложение II.6.3).

Краевые отображения (3.10) и трансгрессия могут быть подсчитаны прямо, исходя из комплекса A и двух подкомплексов, определенных с помощью фильтрации, без использования всей спектральной последовательности, но с использованием обобщения известных гомологических связывающих гомоморфизмов.

Если L и M — подкомплексы (не обязательно положительного) комплекса K, то *связывающее отношение*

$$\rho = \rho(K;\ L,\ M) : H_n(K/M) \longrightarrow H_{n-1}(L) \tag{4.4}$$

определяется как аддитивное отношение, индуцированное дифференциалом $\partial : K \to K$. При этом каждая группа гомологий должна рассматриваться как подфактор комплекса K, например $H_n(K/M) = C_n(K,\ M)/(\partial K_{n+1} \cup M_n)$, где $C_n(K,\ M)$ — модуль относительных циклов (состоящий из всех элементов $k \in K_n$, для которых $\partial k \in M_{n-1}$). Таким образом, ρ состоит из пар гомологических классов $(k + (\partial K_{n+1} \cup M_n),\ \partial k + \partial L_n)$ для всех $k \in C_n(K,\ L \cap M)$. Если $M = L$, то связывающее отношение ρ — это в точности связывающий гомоморфизм ∂_L для короткой точной последовательности $L \rightarrowtail K \twoheadrightarrow K/L$ комплексов. Имеет место более общее

Предложение 4.2. *Если L и M — подкомплексы комплекса K, где $L_{n-1} \subset M_{n-1}$ и $L_n \subset M_n$, то отношение $\rho = \rho(K;\ L,\ M)$ можно описать через связывающие гомоморфизмы как произведение отношений*

$$\rho(K;\ L,\ M) = \gamma^{-1}\partial_M = \partial_L\beta^{-1} : H_n(K/M) \longrightarrow H_{n-1}(L),$$

где β и γ индуцированы единицей в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(K) & \longrightarrow & H_n(K/L) & \xrightarrow{\partial_L} & H_{n-1}(L) & \longrightarrow & H_{n-1}(K) \\
\| & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \| \\
H_n(K) & \longrightarrow & H_n(K/M) & \xrightarrow{\partial_M} & H_{n-1}(M) & \longrightarrow & H_{n-1}(K).
\end{array}$$

Доказательство. Включения $L_{n-1} \subset M_{n-1}$ и $L_n \subset M_n$ показывают, что единица индуцирует описанные гомоморфизмы β и γ. В силу принципа эквивалентности (предложение II.6.2) β^{-1} и γ^{-1} — аддитивные отношения, индуцированные единицей. По принципу композиции (предложение II.6.3) каждое из произведений $\partial_L\beta^{-1}$ и $\gamma^{-1}\partial_M$ оказывается аддитивным отношением, индуцированным гомоморфизмом $\partial 1 = 1\partial$; отсюда следует требуемый результат.

Этот результат показывает, что $\operatorname{Def} \rho = \operatorname{Im} \beta$ и $\operatorname{Ind} \rho = \operatorname{Ker} \gamma$.

В § 10 нам потребуется информация о воздействии цепной эквивалентности на связывающие отношения.

Лемма 4.3. *Пусть $f : K \to K'$ — цепное преобразование, которое индуцирует изоморфизмы групп гомологий $f_* : H_n(K) \cong H_n(K')$. Пусть L, M — подкомплексы комплекса K, а L', M' — подкомплексы комплекса K', и пусть $f(L) \subset L'$, $f(M) \subset M'$, так что f индуцирует цепные преобразования $g : L \to L'$, $h : K/M \to K'/M'$. Предположим, что g_* и h_* — гомологические изоморфизмы и что $L_k \subset M_k$, $L'_k \subset M'_k$, $k = n-1$, n, так же как в предложении 4.2. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\rho = \rho(K;\ L,\ M) : H_n(K/M) & \longrightarrow & H_{n-1}(L) \\
\downarrow h_* & & \downarrow g_* \\
\rho' = \rho(K';\ L',\ M') : H_n(K'/M') & \longrightarrow & H_{n-1}(L')
\end{array}$$

коммутативна.

Этот результат вычисляет ρ' через ρ по формуле $\rho' = g_*\rho h_*^{-1}$ или обратно.

Доказательство. Поскольку f_* и g_* — гомологические изоморфизмы, точные гомологические последовательности для L, K, K/L и для L', K', K'/L' показывают, что f индуцирует гомологический изоморфизм φ: $K/L \to K'/L'$. По предложению 4.2 мы можем сосчитать связывающие отношения $\rho = \partial_L\beta^{-1}$ и $\rho' = \partial_L\beta'^{-1}$ с помощью строк коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(K/M) & \xleftarrow{\beta} & H_n(K/L) & \xrightarrow{\partial_L} & H_{n-1}(L) \\
\downarrow h_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow g_* \\
H_n(K'/M') & \xleftarrow{\beta'} & H_n(K'/L') & \xrightarrow{\partial_{L'}} & H_{n-1}(L').
\end{array}$$

Поскольку диаграмма коммутативна, $\beta'\varphi_* = h_*\beta$ или $\beta^{-1}h_*^{-1} = \varphi_*^{-1}\beta'^{-1}$. Но h_* и φ_* — изоморфизмы, поэтому $\varphi_*\beta^{-1} = \beta'^{-1}h_*$. Теперь $g_*\rho = g_*\partial_L\beta^{-1} = \partial_{L'}\varphi_*\beta^{-1} = \partial_{L'}\beta'^{-1}h_* = \rho' h_*$, что и утверждалось.

Теорема 4.4. *Если F — канонически ограниченная фильтрация DG-модуля A, то «краевые эффекты» в спектральной последовательности фильтрации F могут быть вычислены с помощью A и* *подкомплексов $L = F_0A$ и M, где $M_n = F_{n-1}A_n \cup \partial F_nA_{n+1}$. Именно краевые гомоморфизмы*

$$H_n(F_0A) = E^1_{0,n} \to H_n(A), \quad H_n(A) \to E^2_{n,0} = H_n(A/M)$$

индуцированы вложением $F_0A \rightarrowtail A$ и проекцией $A \twoheadrightarrow A/M$ соответственно, в то время как трансгрессия τ является связывающим отношением $\rho\,(A;\ F_0A,\ M)$.

Доказательство. По (4.3)

$$E^1_{0,n} = F_0C_n/\partial F_0A_{n+1} = H_n(F_0A).$$

По (4.2) и в силу определения $H_n\,(A/M)$ через относительные циклы

$$\begin{aligned} E^2_{n,0} &= (Z^2_{n,0} \cup F_{n-1}A_n)/(\partial A_{n+1} \cup F_{n-1}A_n) = \\ &= C_n(A, M)/(\partial A_{n+1} \cup M_n) = H_n(A/M). \end{aligned}$$

Однако отображения e_B и e_F индуцированы единицей; отсюда следует первый результат. Аналогично каждое из аддитивных отношений τ, $\rho : E^2_{n,0} \to E^1_{0,n-1}$ индуцировано ∂, так что $\tau = \rho$, что и требовалось доказать.

Эта ситуация может быть сделана наглядной в терминах комплексов

$$\begin{tikzcd} F_0A \arrow[r] & A \arrow[d] \\ & A/M. \end{tikzcd}$$

Поскольку $M_n \supset (F_0A)_n$ для $n \geqslant 1$, трансгрессия может быть описана также в терминах обычных связывающих гомоморфизмов, как в предложении 4.2. Эта теорема показывает, как аддитивные отношения проясняют результат Серра (loc. cit., I.3; его обозначение $R = F_0A$, $S = A/M$). В случае послойного отображения $f : E \to B$, $H(A) = H(E)$, $H(F_0A)$ — гомология слоя, $H_p(A/M) = E^2_{p,0} = H_p(B, Z)$ — гомология базы. Таким образом, предложение 4.2 дает следующее «геометрическое» описание трансгрессии (впервые она была именно так и определена): гомологический класс базы трансгрессивен, если его можно представить таким циклом z, что $z = fc$, где c — цепь полного пространства и ∂c лежит в слое. Образ $\operatorname{cls} z$ при трансгрессии является гомологическим классом любого такого элемента ∂c слоя.

§ 5. Точные пары

Альтернативное описание спектральных последовательностей можно дать при помощи понятия «точной пары» (Масси [1952]). Не являющееся необходимым в дальнейшем, оно проливает некоторый свет на источник и природу спектральных последовательностей.

Точная пара $\mathfrak{C} = \{D, E;\ i, j, k\}$ — это пара модулей D, E вместе с тремя гомоморфизмами i, j, k,

$$\mathfrak{C} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}, \qquad (5.1)$$

которые образуют *точный треугольник* в том смысле, что ядро равняется образу в каждой вершине. Модули D и E могут быть градуированными или Z-биградуированными; в последнем случае каждый из гомоморфизмов i, j, k имеет некоторую бистепень.

Точность пары $\mathfrak{C}$ показывает, что квадрат произведения $jk : E \to E$ равен нулю, и, следовательно, это произведение является дифференциалом в E. Образуем модуль гомологий $H(E, jk)$ для этого дифференциала. Построим треугольник

$$\mathfrak{C}' \qquad \begin{tikzcd} iD \arrow[rr, "i'"] & & iD \arrow[dl, "j'"] \\ & H(E, jk) \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}, \qquad (5.2)$$

где отображение i' индуцировано i, а отображения j' и k' определяются формулами

$$j'(id) = jd + jkE, \quad k'(e + jkE) = ke, \quad e \in E, \quad jke = 0.$$

Заметим, что из $id = 0$ следует $d \in kE$, так что $jd \in jkE$, и поэтому отображение j' определено корректно. Аналогично из $jke = 0$ следует $ke \in iD$, поэтому отображение k' корректно определено. Назовем $\mathfrak{C}'$ *производной парой* пары $\mathfrak{C}$; она является функтором от $\mathfrak{C}$ по отношению к очевидному определению гомоморфизмов для точных пар. Диаграммным поиском доказывается

Теорема 5.1. *Производная пара точной пары точна.*

Существует целая последовательность производных пар. Итерируем i $(r-1)$ раз:

$$\begin{tikzcd} i^{r-1} : D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & D \arrow[r, "i"] & \cdots \arrow[r, "i"] & D \arrow[d, equal] \\ E & & & D. \arrow[lll, "ji^{1-r}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь $i^{1-r}: D \to D$ и ji^{1-r} — аддитивные отношения, для которых

$$\operatorname{Ind}(ji^{1-r}) = j(\operatorname{Ker} i^{r-1}), \quad \operatorname{Im}(ji^{1-r}) = k^{-1}0 \subset k^{-1}(i^{r-1}D).$$

Положим

$$D^r = i^{r-1}D, \quad E^r = k^{-1}(i^{r-1}D)/j(\operatorname{Ker} i^{r-1}). \tag{5.3}$$

Тогда i, ji^{1-r} и k индуцируют гомоморфизмы i_r, j_r, k_r, указанные в треугольнике

$$\mathfrak{C}^r \quad \begin{tikzcd} D^r \arrow[rr, "i_r"] & & D^r \arrow[dl, "j_r"] \\ & E^r \arrow[ul, "k_r"] & \end{tikzcd}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

называемом r-й *производной парой пары* $\mathfrak{C}$.

Теорема 5.2. *r-я производная пара $\mathfrak{C}^r$ точна, причем $\mathfrak{C}^1 = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{C}^{r+1}$ — производная пара пары $\mathfrak{C}^r$.*

Доказательство. Для $r = 1$, $E^1 = E$. При $r = 2$, точность пары $\mathfrak{C}$ означает, что $iD = j^{-1}0$, $\ker i = kE$; следовательно, $E^2 = k^{-1}j^{-1}0/jkE = H(E, jk)$, и, таким образом, $\mathfrak{C}^2$ — производная пара $\mathfrak{C}$. При $r > 2$, $D^{r+1} = iD^r = i_rD^r$; нам нужно показать только, что E^{r+1} — это модуль гомологий модуля E^r относительно дифференциала $j_rk_r: E^r \to E^r$. Чтобы описать этот дифференциал, перепишем определение (5.3) для E^r в виде

$$E^r = C/B, \quad C = k^{-1}(i^{r-1}D), \quad B = j(\operatorname{Ker} i^{r-1}).$$

Элемент из E^r является смежным классом $c + B$, где $kc = i^{r-1}d$ для некоторого d и

$$j_rk_r(c + B) = j_r(kc) = jd + B, \quad kc = i^{r-1}d. \tag{5.4}$$

Нам достаточно доказать, что

$$\operatorname{Ker}(j_rk_r) = k^{-1}(i^rD)/B, \quad \operatorname{Im}(j_rk_r) = j(\operatorname{Ker} i^r)/B.$$

Прежде всего из $j_rk_r(c + B) = 0$ следует $jd = ja$ для некоторого элемента $a \in D$, обладающего свойством $i^{r-1}a = 0$. В силу точности пары $\mathfrak{C}$, $d - a = id'$ для некоторого d', так что $kc = i^rd'$ и $c \in k^{-1}(i^rD)$. Обратно, если $kc = i^rd'$, то $j_rk_r(c + B) = 0$; этим утверждение о ядре доказано. Точно так же $\operatorname{Im}(j_rk_r)$ состоит по (5.4) из элементов $jd + B$, для которых $i^rd = ikc = 0$, и обратно, из $i^rd = 0$ следует $i^{r-1}d = kc$ для некоторого c; значит, утверждение об образе доказано. Поскольку $\mathfrak{C}^{r+1}$ — производная пара пары $\mathfrak{C}^r$, она точна по теореме 5.1.

Следствие 5.3. *Точная пара Z-биградуированных модулей D, E с отображениями бистепеней*

$$\deg i = (1, -1), \quad \deg j = (0, 0), \quad \deg k = (-1, 0) \tag{5.5}$$

определяет спектральную последовательность (E^r, d^r) с дифференциалами $d^r = j_rk_r$, $r = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Если выполнены условия (5.5), то отображения пары $\mathfrak{C}^r$ имеют следующие бистепени:

$$\deg i_r = (1, -1), \quad \deg j_r = (-r+1, r-1), \quad \deg k_r = (-1, 0).$$

Отсюда следует, что $\deg(j_rk_r) = (-r, r-1)$, так что каждый модуль E^{r+1} является модулем гомологий для E^r относительно дифференциала d^r бистепени, удовлетворяющей определению спектральной последовательности.

Точную пару $\mathfrak{C}$ с бистепенями (5.5) можно изобразить следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \vdots \arrow[d, "i"] & & \vdots \arrow[d, "i"] & \\ \cdots \arrow[r] & E_{p,q+1} \arrow[r, "k"] & D_{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p-1,q+1} \arrow[r, "k"] & D_{p-2,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & E_{p+1,q} \arrow[r, "k"] & D_{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p,q} \arrow[r, "k"] & D_{p-1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & E_{p+2,q-1} \arrow[r, "k"] & D_{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & E_{p+1,q-1} \arrow[r, "k"] & D_{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \end{tikzcd}$$

Каждая последовательность, состоящая из вертикального шага i, двух горизонтальных шагов j и k, нового вертикального шага i и т. д, является точной; в действительности нашу диаграмму можно рассматривать как переплетение этих различных точных последовательностей, которые имеют общий член D. Эта диаграмма делает наглядным описание члена r-й производной пары с индексами (p, q). $E^r_{p,q}$ строится как подфактор модуля $E_{p,q}$ с верхним членом, полученным взятием прообраза (относительно k) образа вертикального отображения i^{r-1}, и с нижним членом, полученным взятием образа (относительно j) ядра соответствующего отображения i^{r-1} [см. (5.3)].

Каждая фильтрация F Z-градуированного дифференциального модуля A определяет следующим образом точную пару. Короткая точная последовательность комплексов $F_{p-1} \rightarrowtail F_pA \twoheadrightarrow F_pA/F_{p-1}A$

порождает обычную точную гомологическую последовательность

$$\dots \longrightarrow H_n(F_{p-1}A) \xrightarrow{i} H_n(F_pA) \xrightarrow{j} H_n(F_pA/F_{p-1}A) \xrightarrow{k}$$
$$\xrightarrow{k} H_{n-1}(F_{p-1}A) \longrightarrow \cdots,$$

где отображение i индуцировано вложением, отображение j — проекцией, а k — гомологический связывающий гомоморфизм. Комбинирование этих последовательностей для всех p дает точную пару

$$D_{p,q} = H_{p+q}(F_pA), \quad E_{p,q} = H_{p+q}(F_pA/F_{p-1}A), \tag{5.6}$$

причем степени отображений i, j, k такие же, как в (5.5). Назовем эту пару *точной парой фильтрации* F.

Теорема 5.4. *Спектральная последовательность фильтрации F изоморфна спектральной последовательности точной пары фильтрации F.*

Доказательство. Спектральная последовательность точной пары (5.6) фильтрации F имеет вид

$$E^r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})/j(\operatorname{Ker} i^{r-1}), \quad i: H(F_{p-1}A) \to H(F_pA).$$

Рассмотрим $E_p = E_p^1 = H(F_p/F_{p-1})$ и, следовательно, все E_p^r как подфактормодули F_p/F_{p-1}. Рассмотрим $k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$. Каждый гомологический класс модуля E_p^1 представляется «относительным циклом» $c \in F_p$ с $\partial c \in F_{p-1}$; при этом элемент $k(\operatorname{cls} c) = \operatorname{cls}(\partial c) \in H(F_{p-1})$ лежит в $i^{r-1}H(F_{p-r}) \subset H(F_{p-1})$, если $\partial c = a + \partial b$ для некоторого $b \in F_{p-1}$ и некоторого $a \in F_{p-r}$. Тогда $c - b$ лежит в модуле Z_p^r из (3.5) и $c = (c - b) + b \in Z_p^r \cup F_{p-1}A$, т. е. c принадлежит верхнему члену формулы (3.8).

С другой стороны, нижний член выражения для E^r определен как $j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$. Ядро $i^{r-1}: H(F_pA) \to H(F_{p+r-1}A)$ состоит из гомологических классов таких циклов $c \in F_pA$, что $c = \partial b$ для некоторого $b \in F_{p+r-1}A$ и, следовательно, для $b \in Z_{p+r-1}^{r-1}$. Тогда $j(\operatorname{cls} c) = \operatorname{cls}(\partial b)$ и $\partial b \in \partial Z_{p+r-1}^{r-1} \cup F_{p-1}$. Последнее выражение есть нижний член формулы (3.8). Суммируя все сказанное, мы видим, что E_p^r задается формулой (3.8), использованной для непосредственного определения спектральной последовательности фильтрации. В обоих случаях гомоморфизм d^r индуцирован дифференциалом $\partial: A \to A$.

Следствие 5.5. *В спектральной последовательности FDG-модуля первый дифференциал d^1 можно описать в терминах отображений j и k точной гомологической последовательности для $F_pA/F_{p-1}A$ как произведение $d^1 = jk$:*

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_pA/F_{p-1}A) \xrightarrow{jk} H_{p+q-1}(F_{p-1}A/F_{p-2}A) = E_{p-1,q}^1.$$

Заметим, что последовательность производных пар содержит больше информации, чем одна спектральная последовательность, поскольку в нее входят не только модули E^r, но и модули D^r и отображения i_r, j_r, k_r, которые определяют последовательные дифференциалы d^r.

Для появления точной пары фильтрация вовсе не обязательна. Примером является точная пара Бокштейна (Браудер [1961]; см. также упражнение II.4.2) для комплекса K абелевых групп без кручения. Пусть l — простое число, Z_l — факторгруппа группы целых чисел по подгруппе чисел, кратных l, и пусть $Z \rightarrowtail Z \twoheadrightarrow Z_l$ есть соответствующая точная последовательность абелевых групп. Поскольку каждая группа K_n без кручения, $K \rightarrowtail K \twoheadrightarrow K \otimes Z_l$ есть короткая точная последовательность комплексов. Обычная точная гомологическая последовательность является точной парой

$$\begin{tikzcd} H(K) \arrow[rr] & & H(K) \arrow[dl] \\ & H(K \otimes Z_l) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Z-градуированных (но не биградуированных) абелевых групп.

Другой пример дают тензорные произведения. Тензорное умножение, примененное к длинной точной последовательности, порождает точную пару и, значит, спектральную последовательность. Действительно, разложим длинную точную последовательность

$$\dots \to A_{p+1} \to A_p \to A_{p-1} \to A_{p-2} \to \cdots$$

левых R-модулей на короткие точные последовательности

$$\dots, \quad K_p \rightarrowtail A_p \twoheadrightarrow K_{p-1}, \quad K_{p-1} \rightarrowtail A_{p-1} \twoheadrightarrow K_{p-2}, \quad \dots .$$

Для правого R-модуля G и для каждого p мы получаем обычную длинную точную последовательность

$$\to \operatorname{Tor}_q(G, K_p) \xrightarrow{j} \operatorname{Tor}_q(G, A_p) \xrightarrow{k} \operatorname{Tor}_q(G, K_{p-1}) \xrightarrow{i}$$
$$\xrightarrow{i} \operatorname{Tor}_{q-1}(G, K_p) \to \dots$$

со связывающими гомоморфизмами i. Все это можно собрать в точную пару с

$$D_{p,q} = \operatorname{Tor}_q(G, K_p), \quad E_{p,q} = \operatorname{Tor}_q(G, A_p),$$

причем степени отображений i, j, k такие же, как в (5.5); кроме того, $d = jk: \operatorname{Tor}_q(G, A_p) \to \operatorname{Tor}_q(G, A_{p-1})$ — гомоморфизм, индуцированный заданным отображением $A_p \to A_{p-1}$. Аналогично, если C — левый R-модуль, мы получаем точную пару с

$$D_{p,q} = \operatorname{Ext}^{-q}(C, K_p), \quad E_{p,q} = \operatorname{Ext}^{-q}(C, A_p)$$

и со степенями отображений i, j, k, указанными в (5.5).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для точной пары $\mathfrak{C}$ с членом E первой четверти показать, что $D_{p-1,\,q} = D_{p,\,q-1}$ при $p < 0$ и $q < 0$. Описать верхний и нижний углы соответствующей диаграммы для $\mathfrak{C}$.

2. Показать, что точность производной пары $\mathfrak{C}'$ может быть выведена из Ker-coker-последовательности для диаграммы

$$\begin{tikzcd} E/jkE \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "(jk)_*"] & D \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"] & iD \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & k^{-1}iD \arrow[r] & k^{-1}iD \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Следующая последовательность упражнений описывает спектральные последовательности в терминах аддитивных отношений и принадлежит Пуппе [1962].

3. *Дифференциальное отношение* d в модуле E — это аддитивное отношение $d: E \rightharpoonup E$, для которого $\operatorname{Ker} d \supset \operatorname{Im} d$. Определить $H(E,\, d)$.

4. Показать, что спектральная последовательность может быть описана как модуль E вместе с такой последовательностью дифференциальных отношений d_r, $r = 2, 3, \ldots$, что $d_{r+1}0 = d_rE$, $d_{r+1}^{-1}E = d_r^{-1}0$. [Указание: положить $E_{r+1} = H(E,\, d_r)$.]

5. Показать, что спектральная последовательность точной пары $\mathfrak{C}$ — это модуль E вместе с дифференциальными отношениями $d_r = ji^{-r+1}k$, $r = 2, 3, \ldots$.

6. Показать, что спектральная последовательность фильтрации F — это спектральная последовательность модуля $E^0 = E_p^0$, где $E_p^0 = F_p/F_{p-1}$ и где дифференциалы — это аддитивные отношения $d^r: F_p/F_{p-1} \rightharpoonup F_{p-r}/F_{p-r-1}$, индуцированные ∂ $(r = 0, 1, \ldots)$.

§ 6. Бикомплексы

Многие важные фильтрации возникли в связи с бикомплексами. *Бикомплекс* (или «двойной комплекс») K — это семейство $\{K_{p,\,q}\}$ модулей с двумя семействами

$$\partial': K_{p,\,q} \to K_{p-1,\,q}, \quad \partial'': K_{p,\,q} \to K_{p,\,q-1} \tag{6.1}$$

таких модульных гомоморфизмов, определенных для всех целых чисел p и q, что

$$\partial'\partial' = 0, \quad \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0, \quad \partial''\partial'' = 0. \tag{6.2}$$

Таким образом, K — это Z-биградуированный модуль, а ∂' и ∂'' — гомоморфизмы бистепеней $(-1,\, 0)$ и $(0,\, -1)$ соответственно. Бикомплекс *положителен*, если он лежит в первой четверти ($K_{p,\,q} = 0$ при $p<0$ или $q<0$). Гомоморфизм $f: K \to L$ бикомплексов — это гомоморфизм биградуированных модулей степени 0, перестановочный с дифференциалами $f\partial' = \partial' f$ и $f\partial'' = \partial'' f$. Объекты $K_{p,\,q}$, входящие в бикомплекс, могут быть R-модулями, Λ-модулями, градуированными модулями или объектами некоторой абелевой категории. *Вторая гомология* H'' бикомплекса K образуется относительно ∂'' обычным образом:

$$H''_{p,\,q}(K) = \operatorname{Ker}(\partial'': K_{p,\,q} \to K_{p,\,q-1})/\partial'' K_{p,\,q+1}; \tag{6.3}$$

она является биградуированным объектом с дифференциалом $\partial': H''_{p,q} \to H''_{p-1,q}$, индуцированным исходным дифференциалом ∂'. Далее, гомология этого объекта

$$H'_pH''_q(K) = \operatorname{Ker}(\partial': H''_{p,\,q} \to H''_{p-1,\,q})/\partial' H''_{p+1,\,q} \tag{6.4}$$

является биградуированным объектом. *Первая гомология* $H'(K)$ и итерированная гомология $H''H'K$ определяются аналогично.

Каждый бикомплекс K определяет одинарный комплекс $X = \operatorname{Tot}(K)$:

$$X_n = \sum_{p+q=n} K_{p,\,q}, \quad \partial = \partial' + \partial'': X_n \to X_{n-1}. \tag{6.5}$$

Из условий (6.2) следует, что $\partial^2 = 0$; если бикомплекс K положителен, то и комплекс X положителен, и в этом случае каждая прямая сумма в (6.5) конечна. Эта операция «тотализации» уже была использована раньше. Так, если X и Y — комплексы $\mathbf{K}$-модулей с дифференциалами ∂' и ∂'' соответственно, то $X \otimes Y$, естественно, есть бикомплекс с двумя дифференциалами

$$\partial'(x \otimes y) = (\partial' x) \otimes y, \quad \partial''(x \otimes y) = (-1)^{\deg x} x \otimes \partial'' y,$$

которые удовлетворяют (6.2); тензорное произведение комплексов в том виде, как оно определено в гл. V,— это $\operatorname{Tot}(X \otimes Y)$. Аналогично $\operatorname{Hom}(X,\, Y)$ — бикомплекс.

Первая фильтрация F' комплекса $X = \operatorname{Tot}(K)$ определяется подкомплексами F'_p:

$$(F'_pX)_n = \sum_{h \leqslant p} K_{h,\, n-h}. \tag{6.6}$$

Ассоциированная спектральная последовательность этой фильтрации называется *первой спектральной последовательностью* E' бикомплекса.

Теорема 6.1. *Для первой спектральной последовательности E' бикомплекса K с ассоциированным полным комплексом X существуют естественные изоморфизмы*

$$E'^2_{p,\,q} \cong H'_pH''_q(K). \tag{6.7}$$

Если $K_{p,q} = 0$ при $p < 0$, то $E'^2 \Rightarrow H(X)$. Если K положителен, то E лежит в первой четверти.

Другими словами, эта спектральная последовательность показывает, как итерированная гомология $H'H''$ аппроксимирует полную гомологию комплекса X.

Доказательство. Пусть $E = E'$ — первая спектральная последовательность. Как и в (3.2), $E^1_{p,q} = H_{p+q}(F'_pX/F'_{p-1}X)$. Однако определение (6.6) фильтрации F' показывает, что $(F'_pX/F'_{p-1}X)_{p+q} \cong K_{p,q}$. Следовательно, $E^1_{p,q} = H''_{p,q}(K)$. Кроме того, дифференциал $d^1\colon E^1 \to E^1$ индуцирован дифференциалом $\partial = \partial' + \partial''$, отвечающим ∂' при изоморфизме $E^1 \cong H''K$. Поэтому $E^2 = H(E^1, d^1) = H'H''K$, как и утверждалось в (6.7).

Поскольку каждый модуль X_n является объединением всех F'_pX_n, первая фильтрация сходится сверху. Если $K_{p,q} = 0$ при $p < 0$, то $F'_{-1}X = 0$, так что фильтрация ограничена снизу. Отсюда вытекает сходимость $E'^2 \Rightarrow H(X)$. Для положительного комплекса K изоморфизмы (6.7) показывают, что E лежит в первой четверти.

Полезно дать доказательство теоремы, исходя непосредственно из определения

$$E^2_{p,q} = (Z^2_{p,q} \cup F_{p-1}X_n)/(\partial Z^1_{p+1,q} \cup F_{p-1}X_n), \quad n = p+q.$$

Элемент $a \in F_pX_n$ имеет вид

$$a = a_{p,q} + a_{p-1,q+1} + a_{p-2,q+2} + \dots, \quad a_{p,q} \in K_{p,q},$$

$$\partial a = \partial'' a_{p,q} + (\partial' a_{p,q} + \partial'' a_{p-1,q+1}) + (\partial' a_{p-1,q+1} + \partial'' a_{p-2,q+2}) + \dots,$$

где мы сгруппировали члены одинаковой бистепени. Следовательно, $a \in Z^1_{p,q}$, если $\partial'' a_{p,q} = 0$, и $a \in Z^2_{p,q}$, если

$$\partial'' a_{p,q} = 0, \quad \partial' a_{p,q} + \partial'' a_{p-1,q+1} = 0.$$

Значит, $E^2_{p,q} = L_{p,q}/M_{p,q}$, где

$$L_{p,q} = [a_{p,q} \mid \partial'' a_{p,q} = 0$$
$$\text{и } \partial' a_{p,q} = -\partial'' a_{p-1,q+1} \text{ для некоторого } a_{p-1,q+1}],$$
$$M_{p,q} = [\partial' b_{p+1,q} + \partial'' b_{p,q+1} \mid \partial'' b_{p+1,q} = 0].$$

Первое условие, наложенное на элемент $a_{p,q}$ из L, показывает, что $a_{p,q}$ есть ∂''-цикл, так что определен $\operatorname{cls}'' a_{p,q} \in H''_{p,q}$; второе условие утверждает, что этот гомологический класс лежит в ядре $\partial'\colon H''_{p,q} \to H''_{p-1,q}$. Член $\partial'' b_{p,q+1}$ из M может изменить $a_{p,q}$ на ∂''-границу, не меняя тем самым $\operatorname{cls}'' a_{p,q}$; член $\partial' b_{p+1,q}$ может изменить $\operatorname{cls}'' a_{p,q}$ на $\partial'(\operatorname{cls}'' b_{p+1,q})$. Поэтому соответствие $a_{p,q} \to \operatorname{cls}'(\operatorname{cls}'' a_{p,q})$ устанавливает требуемый изоморфизм $E^2_{p,q} \cong H'_pH''_q$.

Вторая фильтрация F'' и спектральная последовательность E'' определяются аналогично. Сохраняя p как обозначение для степени фильтрации, запишем бикомплекс в виде $K = \{K_{q,p}\}$, так что $\partial'\colon K_{q,p} \to K_{q-1,p}$. Тогда фильтрация F'' определяется формулой $(F''_pX)_n = \sum K_{n-h,h}$ для $h \leqslant p$ и имеет ассоциированную спектральную последовательность E'' с $E''^2_{p,q} \cong H''_pH'_q(\{K_{q,p}\})$. Если $K_{q,p} = 0$ при $p < 0$, то эта последовательность сходится к фильтрации F'' комплекса $H(X)$. Если комплекс K положителен, то обе спектральные последовательности лежат в первой четверти и сходятся к различным фильтрациям F' и F'' одного и того же градуированного модуля $H(X)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть X и Y — комплексы абелевых групп, причем каждая группа X_n свободна. Для первой спектральной последовательности бикомплекса $K = X \otimes Y$ показать, что $E^2_{p,q} \cong H_p(X \otimes H_q(Y))$. Используя формулу Кюннета и точное описание образующих для Tor из V.6, примененное так же, как и в предложении V.10.6, показать, что $d^2 = d^3 = \dots = 0$ и что в этом случае $E^2 = E^\infty$.

2. Описать $E^3_{p,q}$ как факторкомплекс комплекса L/M, подобно тому как это сделано во втором доказательстве теоремы 6.1.

§ 7. Спектральная последовательность покрытия

Если группа Π действует справа собственным образом, как в IV.11, на линейно связном пространстве X, то X является «регулярным покрытием» факторпространства (= пространства траекторий) X/Π относительно канонической проекции

$$f\colon X \to X/\Pi.$$

Каждый элемент u из Π переводит сингулярные симплексы в сингулярные симплексы, так что полный сингулярный комплекс $S(X)$ и его гомология $H(S(X), C)$ являются правыми Π-модулями.

Теорема 7.1. *Если группа Π действует собственным образом на линейно связном пространстве X и если C — произвольная абелева группа, то существует такая спектральная последовательность E первой четверти, что*

$$E^2_{p,q} \cong H_p(\Pi, H_q(X, C)) \underset{p}{\Rightarrow} H(X/\Pi, C). \tag{7.1}$$

Как всегда, сходимость означает, что существуют фильтрация F градуированной группы $H_n(X/\Pi, C)$ и изоморфизм между $E^\infty_{p,q}$ и ассоциированной (би)градуированной группой $G^F_pH_{p+q}(X/\Pi, C)$.

Для доказательства сначала напомним, как вычисляются различные гомологии. Сингулярная гомология $H(X, C)$ — это гомология комплекса $C \otimes S(X)$. Для любого правого П-модуля A, подобного $H(X, C)$, гомология $H_p(\Pi, A)$ — это гомология комплекса $A \otimes_\Pi B(\Pi)$, где $B(\Pi)$ есть B-резольвента для группы П; любая другая проективная резольвента тривиального П-модуля Z была бы также пригодна. Наконец, гомология пространства траекторий X/Π вычисляется из его сингулярного комплекса $S(X/\Pi)$. Существует изоморфизм комплексов

$$\varphi: S(X) \otimes_\Pi Z \cong S(X/\Pi), \tag{7.2}$$

определенный формулой $\varphi(T' \otimes 1) = fT'$ для каждого сингулярного симплекса T' из X. Действительно, поскольку Z — тривиальный П-модуль, $T'u \otimes 1 = T' \otimes 1$ для каждого $u \in \Pi$, так что отображение φ корректно определено на тензорном произведении $\otimes_\Pi$. По лемме IV.11.3 каждый сингулярный n-мерный симплекс T из X/Π можно поднять до сингулярного n-мерного симплекса T' из X, и эти T', по одному для каждого T, являются свободными П-модульными образующими комплекса $S(X)$. Таким образом, $S_n(X) \otimes_\Pi Z$ — свободная абелева группа с образующими $T' \otimes_\Pi 1$, $fT' = T$, и φ — изоморфизм. Бикомплекс

$$K_{p,q} = (C \otimes S_p(X)) \otimes_\Pi B_q(\Pi)$$

имеет две фильтрации F' и F'', и каждая из соответствующих спектральных последовательностей

$$E'^2_{p,q} = H'_p H''_q(K), \quad E''^2_{p,q} = H''_p H'_q(K),$$

сходится к ассоциированной градуированной группе комплекса $H(\operatorname{Tot} K)$ для соответствующих фильтраций F' и F''.

Для первой спектральной последовательности $H''_{p,q}(K) = H_q(C \otimes S_p(X) \otimes_\Pi B(\Pi))$ есть гомология $H_q(\Pi, C \otimes S_p(X))$ группы П. При $C = Z$ мы получаем в точности гомологию группы П с коэффициентами в свободном П-модуле $S_p(X)$, который, как было вычислено, равен $S_p(X) \otimes_\Pi Z$ при $q = 0$ и равен нулю при $q > 0$. Поскольку $S_p \otimes_\Pi B$ — комплекс абелевых групп без кручения, из теоремы об универсальных коэффициентах следует, что

$$H''_{p,q}(K) = \begin{cases} C \otimes S_p(X) \otimes_\Pi Z, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

Ввиду (7.2) комплекс, стоящий справа в верхнем равенстве, равен $C \otimes S(X/\Pi)$. Следовательно,

$$E'^2_{p,q} \cong H'_p H''_q(K) \cong H_p(X/\Pi, C), \quad q = 0,$$
$$E'^2_{p,q} = 0, \quad q > 0.$$

Значит, спектральная последовательность «выродилась»; она лежит на горизонтальной оси $q = 0$, имеет нулевые дифференциалы и поэтому равна своему пределу, причем

$$H_n(\operatorname{Tot} K) \cong H_n(X/\Pi, C). \tag{7.3}$$

Для второй спектральной последовательности мы запишем индексы в бикомплексе K как $K_{q,p} = C \otimes S_q \otimes_\Pi B_p$, так что p будет попрежнему обозначать степень фильтрации. Первая гомология H'_q использует только дифференциал в $S_q(X)$, поскольку каждый П-модуль B_p свободен; отсюда следует, что

$$H'_{p,q}(K) = H'_{p,q}(\{C \otimes S_q \otimes_\Pi B_p\}) = H_q(X, C) \otimes_\Pi B_p(\Pi).$$

Вторая гомология H''_p является теперь гомологией группы П с коэффициентами в $H_q(X, C)$, так что

$$E''^2_{p,q} \cong H''_p H'_q(K) \cong H_p(\Pi, H_q(X, C)). \tag{7.4}$$

Это дает спектральную последовательность, указанную в теореме. Как и всякая канонически ограниченная фильтрация, она сходится к гомологии $H(\operatorname{Tot} K)$, описанной в (7.3) с помощью первой спектральной последовательности. Отсюда вытекает заключение (7.1).

Это доказательство дает типичный пример двух спектральных последовательностей, одна из которых вырождается, определяя предел второй последовательности.

Следствие 7.2. *Если группа* П *действует собственным образом на линейно связном ацикличном пространстве X, то существует естественный изоморфизм $H_p(\Pi, C) \cong H_p(X/\Pi, C)$ для каждого p, где C — любая абелева группа, рассматриваемая как тривиальный* П-*модуль.*

Доказательство. Поскольку пространство X ациклично, $H_q(X, C) = 0$ при $q \neq 0$ и равно C при $q = 0$, так что (вторая) спектральная последовательность вырождается и поэтому E^2 изоморфно пределу, что и утверждалось.

Этот результат является гомологической параллелью теоремы IV.11.5 для когомологии пространства X/Π. Как и ту теорему, это следствие можно было бы доказать непосредственно, без использования спектральных последовательностей. Однако спектральные последовательности позволяют нам обобщить теорему IV.11.5 для применений к пространствам, не являющимся ацикличными. Например, имеет место

Следствие 7.3. *Если $H_0(X) \cong Z$ для пространства X и $H_q(X) = 0$ для $0 < q < t$ и если группа* П *действует собственным образом на X, то*

$$H_n(X/\Pi, C) \cong H_n(\Pi, C), \quad 0 \leqslant n < t.$$

Для $n = t$ существует точная последовательность

$$H_{t+1}(X/\Pi, C) \to H_{t+1}(\Pi, C) \to H_t(X, C) \otimes_\Pi Z \to H_t(X/\Pi, C) \to \\ \to H_t(\Pi, C) \to 0.$$

Доказательство. В силу теоремы об универсальных коэффициентах $H_0(X, C) \cong C$ и $H_q(X, C) = 0$ для $0 < q < t$. Тогда в спектральной последовательности теоремы $E^2_{p,q} = 0$ для $0 < q < t$ и, значит, $E^\infty_{t,0} = E^2_{t,0} \cong H_t(\Pi, C)$. Фильтрация в $H_t(X/\Pi, C)$ равносильна точной последовательности

$$0 \to E^\infty_{0,t} \to H_t(X/\Pi, C) \to E^\infty_{t,0} \cong H_t(\Pi, C) \to 0,$$

а описание $E^\infty_{0,t}$ как гомологии комплекса $E^2_{0,t}$ относительно дифференциала d^{t+1} дает точную последовательность

$$H_{t+1}(X/\Pi, C) \xrightarrow{e_B} E^2_{t+1,0} \xrightarrow{d^{t+1}} E^2_{0,t} \to E^\infty_{0,t} \to 0.$$

Заменяя $E^2_{t+1,0}$ на $H_{t+1}(\Pi, C)$, используя X(5.2) для вычисления $E^2_{0,t} \cong H_0(\Pi, H_t(X, C)) \cong H_t(X, C) \otimes_\Pi Z$ и сплетая эти последовательности, мы получим требуемый результат. Эта точная последовательность является частным случаем «точной последовательности членов малой степени» (упражнение 3.3).

Этот результат определяет $H_n(X/\Pi)$ для $n < t$ и $H_t(X/\Pi)$ с точностью до некоторого группового расширения. Для полного определения $H_t(X/\Pi)$ в терминах $H(\Pi)$ и $H(X)$ требуется дополнительный инвариант — когомологический класс $k \in H^{t+1}(\Pi, H_n(X))$, введенный Эйленбергом и Маклейном [1949, 1950].

Спектральная последовательность покрытия принадлежит Картану и Лерэ [1949] и Картану [1948]. Дальнейшее использование см. у Картана — Эйленберга [1956], стр. 356; Ху Сы-Цзяна [1959], стр. 287 (сноска); Хилтона — Уайли [1960], стр. 467.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Показать, что использование первой спектральной последовательности в доказательстве теоремы можно заменить доказательством того, что $1 \otimes \varepsilon : C \otimes S(X) \otimes_\Pi B(\Pi) \to C \otimes S(X) \otimes_\Pi Z$ есть гомологический изоморфизм, где $\varepsilon: B \to Z$ — пополнение (использовать первую фильтрацию и теорему 3.4).

§ 8. Когомологические спектральные последовательности

Для когомологии привычно и удобно записывать спектральную последовательность с верхними индексами и с обычным изменением знаков: $E_r^{p,q} = E^r_{-p,-q}$ (знак r не меняется). *Та же самая* спектральная последовательность E тогда появляется как семейство биградуированных модулей E_r, $r = 2, 3, \ldots$, с дифференциалами

$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,\, q-r+1} \tag{8.1}$$

бистепени $(r, 1-r)$ и изоморфизмами $H(E_r, d_r) \cong E_{r+1}$. Сравнивая эти дифференциалы с прежними дифференциалами $d^r: E^r_{p+r,\, q-r+1} \to E^r_{p,q}$, мы видим, что *формулы* для спектральных последовательностей с верхними индексами получаются из формул для последовательностей с нижними индексами обращением всех стрелок и перемещением каждого индекса вверх (или, что может случиться, вниз) без изменения знака. Предел E_∞ определяется, как и раньше.

Спектральная последовательность E *третьей четверти* — это такая последовательность, у которой $E^r_{p,q} = 0$, когда $p > 0$ или $q > 0$; эквивалентно все ненулевые члены этой последовательности лежат в первой четверти, если их записать с верхними индексами, а диаграмма есть просто (1.6) с перевернутыми стрелками (дифференциалы направлены от слоя к базе, увеличивая полную степень на единицу). Краевые гомоморфизмы на базе являются эпиморфизмами

$$E_2^{p,0} \to E_3^{p,0} \to \cdots \to E_{p+1}^{p,0} = E_\infty^{p,0},$$

а на слое — мономорфизмами

$$E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q} \to E_{q+1}^{0,q} \to \cdots \to E_2^{0,q}.$$

Трансгрессия $\tau : E^1_{0,q-1} \to E^2_{q,0}$ — это аддитивное отношение (слоя с базой), индуцированное d_q и определенное формулой (4.1), в которой необходимо обратить все стрелки.

Пусть A есть DG_Z-модуль, записанный с верхними индексами ($A^n = A_{-n}$), с граничным гомоморфизмом $\delta : A^n \to A^{n+1}$. Фильтрация F модуля A, записанная с верхними индексами $F^p = F_{-p}$, проявляется в виде башни дифференциальных Z-градуированных подмодулей

$$\ldots \supset F^{p-1}A \supset F^pA \supset F^{p+1}A \supset \ldots \tag{8.2}$$

часто называемой *убывающей фильтрацией*, хотя в действительности это та же самая фильтрация, но в иных обозначениях. Теорема 3.1 применима непосредственно (только меняются обозначения). Каждая такая фильтрация F порождает спектральную последовательность $\{E_r, d_r\}$, в которой $E_1^p = H(F^pA/F^{p+1}A)$ и

$$E_r^{p,q} = (Z_r^{p,q} \cup F^{p+1}A^{p+q})/(\delta Z_{r-1}^{p-r+1,\, q+r-2} \cup F^{p+1}A^{p+q}),$$

где $Z_r^{p,q} = \{a \mid a \in F^pA^{p+q},\ \delta a \in F^{p+r}A^{p+q+1}\}$, и d_r индуцируется δ. Если фильтрация F ограничена, то существуют естественные изоморфизмы $E^p_\infty \cong F^pHA/F^{p+1}HA$, где F^pH обозначает фильтрацию комплекса HA, индуцированную фильтрацией F. Эти изоморфизмы имеют место и в том случае, когда фильтрация сходится сверху ($\bigcup F^pA = A$) и ограничена снизу (для каждого n существует такое s, что $F^sA^n = 0$). Заметим, что ограниченность «снизу» проявляется как граница справа в убывающей фильтрации (8.2).

Фильтрация F *канонически коограничена*, если $F^0A = A$ и $F^{n+1}A^n = 0$ (заметим, что это условие *не совпадает* с условием канонической ограниченности). Из этого условия следует, что комплекс A положителен по верхним индексам ($A^n = 0$ для $n < 0$). Соображения, подобные доказательству теоремы 4.4, устанавливают следующий факт:

Теорема 8.1. *Канонически коограниченная фильтрация DG_Z-модуля A порождает спектральную последовательность «третьей четверти». Начальные краевые члены описываются в терминах подкомплексов F^1A и L, где $L^p = Z_1^{p,0}$, как $E_1^{0,n} = H^n(A/F^1A)$ и $E_2^{n,0} = H^n(L)$, а краевые гомоморфизмы $H^n(A) \to E_0^{0,n}$ и $E_2^{n,0} \to H^n(A)$ индуцированы тождественным отображением 1_A. Трансгрессия $\tau : E_1^{0,n-1} \to E_2^{n,0}$ при $n \geqslant 2$ является аддитивным отношением, индуцированным δ, и является также связывающим отношением $\rho = \rho(A;\ L,\ F^1A)$*

$$\rho(A;\ L,\ F^1A) : H^{n-1}(A/F^1A) \to H^n(L), \quad n \geqslant 2.$$

В явном виде краевые члены при $r \geqslant 2$ задаются формулами

$$E_r^{p,0} \cong F^pC^p/\delta Z_{r-1}^{p-r+1,\,r-2}, \quad C = \operatorname{Ker}[\delta : A \to A], \tag{8.3}$$
$$E_r^{0,q} \cong (Z_r^{0,q} \cup F^1A^q)/(\delta A^{q-1} \cup F^1A^q).$$

Аналогично точные пары и бикомплексы можно записать с верхними индексами. Во многих когомологических спектральных последовательностях имеется (чрезвычайно полезное) умножение, возникающее из $\cup$-умножения и когомологии.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В условиях теоремы 7.1 получить спектральную последовательность третьей четверти $E_2^{p,q} \cong H^p(\Pi,\ H^q(X,\ C)) \underset{p}{\Rightarrow} H^n(X/\Pi,\ C)$.

2. Доказать теорему 8.1.

3. Если $E^r_{p,q}$ — спектральная последовательность векторных пространств над некоторым полем и если V — векторное пространство, то описать $\operatorname{Hom}(E^r_{p,q}\ V)$ как спектральную последовательность с верхними индексами.

§ 9. Сужение, инфляция и связь

Наш следующий пример спектральной последовательности относится к когомологии группы Π с данным нормальным делителем Γ. Нам необходимы некоторые подготовительные понятия, связывающие когомологии групп Π и Γ.

Если Γ — подгруппа группы Π и A — левый Π-модуль, то вложение $\varkappa$: $\Gamma \to \Pi$ определяет замену групп $(\varkappa,\ 1_A)$, которая индуцирует гомоморфизм

$$\operatorname{res}^\Pi_\Gamma : H^n(\Pi,\ A) \to H^n(\Gamma,\ A), \tag{9.1}$$

называемый *сужением*; сужение естественно по аргументу A. Если $\Delta \subset \Gamma \subset \Pi$, то $\operatorname{res}^\Gamma_\Delta \operatorname{res}^\Pi_\Gamma = \operatorname{res}^\Pi_\Delta$. Пусть A^Γ обозначает, как обычно, подгруппу тех элементов a из A, для которых $ta = a$ для всякого $t \in \Gamma$. Если Γ — нормальный делитель группы Π, то A^Γ является левым (Π/Γ)-модулем. Проекция $\sigma : \Pi \to \Pi/\Gamma$ и вложение $j : A^\Gamma \to A$ образуют замену группы $(\sigma,\ j) : (\Pi,\ A) \to (\Pi/\Gamma,\ A^\Gamma)$, которая индуцирует гомоморфизм

$$\operatorname{inf}^{\Pi/\Gamma}_\Pi : H^n(\Pi/\Gamma,\ A^\Gamma) \to H^n(\Pi,\ A), \tag{9.2}$$

называемый *инфляцией*; инфляция естественна по аргументу A. Кроме того, существует аддитивное отношение

$$\rho^\Gamma_{\Pi/\Gamma} : H^n(\Gamma,\ A) \to H^{n+1}(\Pi/\Gamma,\ A^\Gamma), \quad n > 0, \tag{9.3}$$

называемое *связью*, которое будет определено ниже.

Напомним, что $H^n(\Pi,\ A) = H^n(\operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi),\ A))$, где $B(\Pi) = B(Z(\Pi))$ есть B-резольвента. Каждый элемент $f \in \operatorname{Hom}_\Pi(B_n(\Pi),\ A)$ можно записать как однородную коцепь, т. е. как функцию $f(x_0,\ \ldots,\ x_n) \in A$ от $n+1$ аргумента $x_i \in \Pi$, для которой $f(xx_0,\ \ldots,\ xx_n) = xf(x_0,\ \ldots,\ x_n)$ и которая нормализована условием $f(x_0,\ \ldots,\ x_n) = 0$, если $x_i = x_{i+1}$ для некоторого i. Кроме того,

$$\delta f(x_0,\ \ldots,\ x_{n+1}) = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(x_0,\ \ldots,\ \hat{x}_i,\ \ldots,\ x_{n+1}).$$

Тогда сужение индуцируется цепным преобразованием ψ, заданным формулой

$$(\psi f)(t_0,\ \ldots,\ t_n) = f(t_0,\ \ldots,\ t_n), \quad t_i \in \Gamma. \tag{9.4}$$

Если $g \in \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_n(\Pi/\Gamma),\ A)$, то инфляция индуцируется коцепным преобразованием σ^*:

$$(\sigma^* g)(x_0,\ \ldots,\ x_n) = g(\sigma x_0,\ \ldots,\ \sigma x_n), \quad x_i \in \Pi, \quad \sigma x_i \in \Pi/\Gamma. \tag{9.5}$$

Эти преобразования σ^* и ψ можно изобразить в диаграмме цепных преобразований комплексов

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, equal] & K \arrow[d, equal] & \\
\mathrm{Hom}_\Pi(B(\Pi/\Gamma), A) \arrow[r, "\sigma^*"] & \mathrm{Hom}_\Pi(B(\Pi), A) \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
& \mathrm{Hom}_\Gamma(B(\Pi), A) \arrow[r, "B(\varkappa)^*"] & \mathrm{Hom}_\Gamma(B(\Gamma), A), \\
& S' \arrow[u, equal] & S \arrow[u, equal]
\end{tikzcd} \tag{9.6}$$

которые обозначены как L, K, S', S. Заметим, что (Π/Γ)-модуль $B(\Pi/\Gamma)$ становится Π-модулем при отступлении вдоль σ, так что комплекс L слева канонически изоморфен комплексу $\mathrm{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B(\Pi/\Gamma), A^\Gamma)$ с когомологией $H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma)$ и σ^* — это $B(\sigma)^*$, где $B(\sigma): B(\Pi) \to B(\Pi/\Gamma)$. Каждый Π-модуль превращается в Γ-модуль при отступлении вдоль вложения $\varkappa: \Gamma \to \Pi$, так что каждый Π-модульный гомоморфизм является также Γ-модульным гомоморфизмом. Этот мономорфизм $i: \mathrm{Hom}_\Pi \to \mathrm{Hom}_\Gamma$ определяет вертикальное цепное преобразование $i: K \to S'$ в диаграмме (9.6), в то время как $\varkappa$ индуцирует преобразование $B(\varkappa)^*$: $S' \to S$. Ясно, что $\psi = B(\varkappa^*)\, i$.

Цепное преобразование $B(\varkappa)^*$ является когомологическим изоморфизмом

$$B(\varkappa)^*: H^n(\mathrm{Hom}_\Gamma(B(\Pi), A)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_\Gamma(B(\Gamma), A)) = H^n(\Gamma, A). \tag{9.7}$$

Действительно, поскольку группа Π есть объединение смежных классов Γy по подгруппе Γ, свободный Π-модуль $Z(\Pi)$ с одним образующим является прямой суммой свободных Γ-модулей $Z(\Gamma)\, y$. Следовательно, любой свободный Π-модуль одновременно является свободным Γ-модулем, так что $\varepsilon: B(\Pi) \to Z$ — это также и свободная Γ-резольвента тривиального Γ-модуля Z. Отображение $B(\varkappa): B(\Gamma) \to B(\Pi)$ есть цепное преобразование, накрывающее 1_Z, следовательно, по теореме сравнения оно определяет изоморфизм (9.7).

Теперь если Γ — нормальный делитель группы Π и A — Π-модуль, то каждая группа $H^n(\Gamma, A)$ является (Π/Γ)-модулем. Прежде всего для каждого модуля ${}_\Pi B$, $\mathrm{Hom}_\Gamma(B, A)$ есть (Π/Γ)-модуль в силу следующего определения (структура алгебры Хопфа!):

$$(xf)(b) = xf(x^{-1}b) \quad \text{для } f: B \to A, \quad x \in \Pi, \quad b \in B. \tag{9.8}$$

Действительно, так определенное отображение xf является Γ-модульным гомоморфизмом, если таково f, так как для $t \in \Gamma$, $(xf)(tb) = xf(x^{-1}tb) = x(x^{-1}tx) f(x^{-1}b) = t[(xf)\, b]$ ввиду нормальности подгруппы Γ. Тем самым Hom_Γ становится Π-модулем, но, поскольку $tf = f$ для $t \in \Gamma$, этот модуль можно рассматривать как (Π/Γ)-модуль. Эта модульная структура естественна в B, поэтому $\mathrm{Hom}_\Gamma(B(\Pi), A)$ есть (Π/Γ)-модуль. В силу изоморфизма $B(\varkappa)^*$ из (9.7) $H^n(\Gamma, A)$ становится (Π/Γ)-модулем, что и утверждалось. Точная формула для этой (Π/Γ)-модульной структуры в терминах коциклов из $B(\Gamma)$ дана в приводимых ниже упражнениях 3—5.

Лемма 9.1. *Для нормального делителя* Γ *группы* Π *образ сужения лежит в* $H^n(\Gamma, A)^\Pi$.

Доказательство. По (9.6) сужение равно произведению $\psi = B(\varkappa)^* i$. Для каждого Π-модульного гомоморфизма $f: B(\Pi) \to A$ в силу (9.8) $xf = f$ при любом $x \in \Pi$. Следовательно, если f — коцикл, то $\mathrm{cls}\, f$ из $H^n(\Gamma, A)$ инвариантен относительно каждого оператора из Π.

Определения (9.5) и (9.4) показывают, что $\sigma^*: L \to K$ из диаграммы (9.6) — мономорфизм и что $\psi: K \to S$ — эпиморфизм, причем произведение $\psi\sigma^*$ равно нулю в размерностях, больших нуля. Значит, мы находимся в ситуации, в которой дан комплекс K с двумя подкомплексами $\sigma^* L$ и $M = \mathrm{Ker}\, \psi$, причем $(\sigma^* L)^n \subset M$ при $n > 0$ и $S \cong K/M$; в этой ситуации формула (4.4) определяет гомологическое связывающее отношение

$$\rho = \rho(K; \sigma^* L, \mathrm{Ker}\, \psi): H^n(S) \to H^{n+1}(L).$$

Возьмем его в качестве связи $\rho^\Gamma_{\Pi/\Gamma}$ из (9.3). В явном виде ρ является аддитивным отношением, состоящим из всех пар когомологических классов

$$(\mathrm{cls}_S\, \psi f, \quad \mathrm{cls}_L\, g), \qquad f \in K^n, \qquad g \in L^{n+1}, \qquad \delta f = \sigma^* g.$$

Из последнего условия следует, что $\delta g = 0$ и $\delta\psi f = 0$.

Лемма 9.2. *Модуль* $\mathrm{Def}\, \rho$ *для связи* ρ *лежит в* $H^n(\Gamma, A)^\Pi$.

Доказательство. Возьмем пару $(\mathrm{cls}_S\, \psi f, \mathrm{cls}_L\, g) \in \rho$, как выше, и определим коцепь $h \in S'^n$ следующим образом ($x_i \in \Pi$):

$$h(x_0, \ldots, x_n) = f(x_0, \ldots, x_n) + (-1)^n g(1, \sigma x_0, \ldots, \sigma x_n),$$

где второй член справа в действительности безоговорочно использует стягивающую гомотопию в $B(\Pi/\Gamma)$. Поскольку значение g лежит в A^Γ, эта функция h есть на самом деле Γ-модульный гомоморфизм $h: B_n(\Pi) \to A$. Вычисление с помощью граничной формулы для $B(\Pi)$, использующее равенства $\delta f = \sigma^* g$ и $\delta g = 0$, показывает, что $\delta h = 0$. Кроме того, $B(\varkappa)$: $B(\Gamma) \to B(\Pi)$ переводит h

из S' в ψf из S, так что любой элемент $\mathrm{cls}_S\,\psi f$ из $\mathrm{Def}\rho$ представляется как $\mathrm{cls}_{S'}\,h$ из $H^n(S')$. В комплексе S' мы можем подсчитать действие любого $x \in \Pi$. Пусть k_x — такая коцепь, что $k_x(x_0, \ldots, x_{n-1}) = g(\sigma x, 1, \sigma x_0, \ldots, \sigma x_{n-1})$. Кограничная формула и определение (9.8) показывают, что

$$(xh - h - \delta k_x)(x_0, \ldots, x_n) = \delta g(\sigma x, 1, \sigma x_0, \ldots, \sigma x_n) = 0.$$

Значит, $xh - h$ есть кограница k_x, так что когомологический класс коцепи h в S' инвариантен относительно x, что и утверждалось.

Ввиду лемм 9.1 и 9.2 мы можем переписать сужение и связь как

$$\mathrm{res}: H^n(\Pi, A) \to H^n(\Gamma, A)^\Pi \quad \text{и} \quad \rho: H^n(\Gamma, A)^\Pi \to H^{n+1}(\Pi/\Gamma, A).$$

Два менее значительных замечания будут необходимы в следующем параграфе. Для модулей ${}_{(\Pi/\Gamma)}C$, ${}_\Pi B$ и ${}_\Pi A$ существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\Pi/\Gamma}(C, \mathrm{Hom}_\Gamma(B, A)) \cong \mathrm{Hom}_\Pi(C \otimes B, A), \tag{9.9}$$

где Hom_Γ имеет операторы, описанные в (9.8), и $C \otimes B$ имеет «диагональные» операторы $x(c \otimes b) = (xc \otimes xb)$. Отображение в (9.9) задается сопряженной ассоциативностью. Для проверки того, что оно корректно относительно указанных операторов, рассмотрим произвольный групповой гомоморфизм $f: C \otimes B \to A$. Он принадлежит правой группе Hom_Π, если

$$f(xc \otimes xb) = xf(c \otimes b), \quad c \in C, \quad b \in B, \quad x \in \Pi. \tag{9.10}$$

При фиксированном c, $f(c \otimes -)$ лежит в Hom_Γ слева, если

$$f(c \otimes tb) = tf(c \otimes b), \quad t \in \Gamma, \tag{9.11}$$

а условие, что f порождает отображение из $\mathrm{Hom}_{\Pi/\Gamma}$, таково:

$$f(xc \otimes b') = xf(c \otimes x^{-1}b'), \quad b' \in B. \tag{9.12}$$

Теперь (9.12) превращается в (9.10), если $b' = xb$, а (9.10) при $x = t \in \Gamma$ дает $tc = c$, откуда следует (9.11). Таким образом, условия, накладываемые на f слева и справа, эквивалентны.

Лемма 9.3. *Для любого свободного Π-модуля F и любого Π-модуля A*

$$H^n(\Pi/\Gamma, \mathrm{Hom}_\Gamma(F, A)) = 0, \quad n > 0.$$

Доказательство. (См. упражнение 6.) Достаточно в качестве F взять свободный Π-модуль $Z(\Pi)$ с одним образующим. Рассматриваемая когомология — это когомология комплекса

$$\mathrm{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B(\Pi/\Gamma), \mathrm{Hom}_\Gamma(Z(\Pi), A)) \cong \mathrm{Hom}_\Pi(B(\Pi/\Gamma) \otimes Z(\Pi), A).$$

Значения n-мерного коцикла f этого комплекса $f((u_0, \ldots, u_n) \otimes x)$ лежат в A, где $u_i \in \Pi/\Gamma$. Используя проекцию $\sigma: \Pi \to \Pi/\Gamma$, определим $(n-1)$-мерную коцепь h формулой $h((u_0, \ldots, u_{n-1}) \otimes x) = f((u_0, \ldots, u_{n-1}, \sigma x) \otimes x)$. Тогда h будет Π-гомоморфизмом, а условие $\delta f((u_0, \ldots, u_n, \sigma x) \otimes x) = 0$, будучи расписанным, показывает, что $f = \delta h$. Поэтому каждый коцикл положительной размерности n есть кограница, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, как гомоморфизм сужения можно вычислить с помощью любой свободной Π-модульной резольвенты Z.

2. Если $\Pi = \Gamma \times \Delta$, то отождествить Π/Δ с Γ и показать, что $\inf_\Pi^{\Pi/\Delta} \mathrm{res}\,\frac{\Pi}{\Gamma} = 0$.

3. Для замены групп $\rho = (\zeta, \alpha): (\Gamma, A, \varphi) \to (\Gamma', A', \varphi')$ показать, что гомоморфизм $\rho^*: H^n(\Gamma', A') \to H^n(\Gamma, A)$ из (IV.5.9) может быть вычислен с помощью свободных резольвент $\varepsilon: X \to Z$ и $\varepsilon': X' \to Z$ группы Z как тривиального Γ- или Γ'-модуля соответственно, как произведение

$$\rho^* = f^*\alpha_*: H^n(\mathrm{Hom}_{\Gamma'}(X', A')) \to H^n(\mathrm{Hom}_\Gamma(X', A)) \to H^n(\mathrm{Hom}_\Gamma(X, A)),$$

где $f: X \to X'$ есть Γ-модульное цепное преобразование, накрывающее 1_Z.

4. Для нормального делителя Γ группы Π каждый Π-модуль A является Γ-модулем относительно индуцированного отображения $\varphi': \Gamma \to \mathrm{Aut}\,A$. Для каждого $x \in \Pi$ показать, что определения $\zeta_x t = x^{-1}tx$, $t \in \Gamma$ и $\alpha_x a = xa$ порождают замену групп

$$\rho_x = (\zeta_x, \alpha_x): (\Gamma, A, \varphi') \to (\Gamma, A, \varphi'),$$

причем $\rho_{xy} = \rho_y\rho_x$. Для Γ-модульной резольвенты $X \to Z$ и преобразования f из упражнения 3 показать, что $\alpha_* f^*: \mathrm{Hom}_\Gamma(X, A) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(X, A)$ — это модульное действие элементов x на Hom_Γ, определенное в тексте.

5. Используя упражнения 3 и 4, доказать, что модульное действие $x \in \Pi$ на $H^n(\Gamma, A)$ задается на (неоднородном) коцикле $h \in \mathrm{Hom}(B_n(\Gamma), A)$ сопоставлением $\mathrm{cls}\,h \to \mathrm{cls}\,h'$, где h' определяется с помощью сопряжения:

$$h'(t_1, \ldots, t_n) = xf(x^{-1}t_1x, \ldots, x^{-1}t_nx), \quad t_i \in \Gamma, \ x \in \Pi.$$

6. Используя (9.9), показать, что если модуль ${}_\Pi F$ свободен, то модуль $\mathrm{Hom}_\Gamma(F, A)$ относительно инъективен для пары колец $Z(\Pi/\Gamma)$, Z. Отсюда вывести второе доказательство леммы 9.3.

§ 10. Спектральная последовательность Линдона

Теорема 10.1. *Для нормального делителя Γ группы Π и для Π-модуля A существует спектральная последовательность третьей четверти $\{E_r, d_r\}$, естественная относительно A с естественными изоморфизмами*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(\Pi/\Gamma, H^q(\Gamma, A)) \underset{p}{\Rightarrow} H^{p+q}(\Pi, A),$$

сходящимися, как показано, к когомологии группы Π.

Здесь $H^q(\Gamma, A)$ есть (Π/Γ)-модуль с операторами, описанными в § 9. Таким образом, эта спектральная последовательность связывает когомологии подгруппы Γ и факторгруппы Π/Γ с когомологией всей группы Π.

Доказательство. Используя B-резольвенту, построим бикомплекс K:

$$K^{p,q} = \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_p(\Pi/\Gamma), \operatorname{Hom}_\Gamma(B_q(\Pi), A)) \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_\Pi(B_p(\Pi/\Gamma) \otimes B_q(\Pi), A),$$

как в (9.9), с двумя дифференциалами, задаваемыми, с учетом стандартных знаков для кограницы и дифференциала в $B_p \otimes B_q$, формулами

$$(\delta' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{p+q+1} f(\partial b' \otimes b''), \quad b' \in B_{p+1}, \quad b'' \in B_q,$$
$$(\delta'' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{q+1} f(b' \otimes \partial b''), \quad b' \in B_p, \quad b'' \in B_{q+1},$$

где $f \in K^{p,q}$. Условие $\delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0$ легко проверяется. Первая и вторая фильтрации этого бикомплекса порождают соответствующие спектральные последовательности E' и E'', сходящиеся к $H(\operatorname{Tot} K)$.

Для второй спектральной последовательности E'' индекс фильтрации по-прежнему обозначается как p, поэтому мы записываем члены K как $K^{q,p} = \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_q, \operatorname{Hom}_\Gamma(B_p, A))$ со вторым показателем p. Как и для любого бикомплекса, $E_2''^{p,q} = H''^p H'^q(K)$. Но $H'^q(K)$ — это когомология группы Π/Γ с коэффициентами в $\operatorname{Hom}_\Gamma(B_p, A)$. По лемме 9.3 она равна нулю при $q > 0$; при $q = 0$ она равна $[\operatorname{Hom}_\Gamma(B_p, A)]^{\Pi/\Gamma} = \operatorname{Hom}_\Pi(B_p, A)$, так как любая группа $H^0(\Pi, M)$ — это группа M^Π из Π-инвариантных элементов Π-модуля M. Вычисление когомологии H''^p комплекса $\operatorname{Hom}_\Pi(B_p, A)$ дает когомологию группы Π, так что

$$E_2''^{p,q} \cong H^p(\Pi, A), \quad q = 0,$$
$$E_2''^{pq} = 0, \quad q > 0.$$

Все ненулевые члены лежат на базе $q = 0$, поэтому спектральная последовательность вырождается. Для каждой полной степени n имеется только один ненулевой фактор в фильтрации $H^n(\operatorname{Tot} K)$; отсюда вытекает изоморфизм

$$H^n(\Pi, A) \cong H^n(\operatorname{Tot} K). \tag{10.1}$$

Можно показать, что этот изоморфизм индуцируется цепным преобразованием

$$\zeta : \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi), A) \to \operatorname{Tot} K,$$

которое сопоставляет каждому отображению $f : B_n(\Pi) \to A$ элемент $\zeta f \in K^{0,n}$, определяемый формулой

$$(\zeta f)((u) \otimes b) = f(b), \quad u \in \Pi/\Gamma, \quad b \in B_n(\Pi).$$

Для первой спектральной последовательности $E_2'^{p,p} \cong \cong H'^p H''^q(K)$. Пусть S' обозначает комплекс $\operatorname{Hom}_\Gamma(B(\Pi), A)$, как в (9.6); когомология комплекса S' — это $H(\Gamma, A)$. Теперь $K^p = \operatorname{Hom}_{(\Pi/\Gamma)}(B_p(\Pi/\Gamma), S')$, где $B_p(\Pi/\Gamma)$ — свободный (Π/Γ)-модуль, является точным функтором аргумента S', поэтому

$$H''^q(K^p) \cong \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_p(\Pi/\Gamma), H^q(S')) \cong \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_p(\Pi/\Gamma), H^q(\Gamma, A)).$$

Взятие H'^p дает когомологию группы Π/Γ, отсюда изоморфизм

$$\theta : E_2'^{p,q} \cong H^p(\Pi/\Gamma, H^q(\Gamma, A)). \tag{10.2}$$

Эта спектральная последовательность сходится, как и для любого положительного бикомплекса, к $H(\operatorname{Tot} K)$, т. е. в силу (10.1) к $H^n(\Pi, A)$, что и требовалось доказать.

Предложение 10.2. *В спектральной последовательности Линдона $E = E'$ краевыми членами являются:*

$$E_2^{p,0} \cong H^p(\Pi/\Gamma, A^\Gamma), \quad E_2^{0,q} \cong H^q(\Gamma, A)^{\Pi/\Gamma} = H^q(\Gamma, A)^\Pi \tag{10.3}$$

и $E_1^{0,q} \cong H^q(\Gamma, A)$. *Краевой гомоморфизм*

$$H^n(\Pi, A) \to E_1^{0,n} \cong H^n(\Gamma, A)$$

на слое является сужением $\operatorname{res}_\Gamma^\Pi$. *Краевой гомоморфизм*

$$H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \cong E_2^{n,0} \to H^n(\Pi, A)$$

на базе является инфляцией $\inf_\Pi^{\Pi/\Gamma}$. *Трансгрессия τ есть связывающее отношение ρ из* (9.3):

$$\tau = \rho_{\Pi/\Gamma}^\Gamma : H^{n-1}(\Gamma, A) \to H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma), \quad n > 1. \tag{10.4}$$

Изоморфизмы (10.3) являются специальными случаями изоморфизмов (10.2). Заметим, что образ краевого гомоморфизма на слое лежит в $E_2^{0,n} = H^n(\Gamma, A)^\Pi$, точно так же как для сужения (лемма 9.1), и что область определения трансгрессии τ содержится в $H^{n-1}(\Gamma, A)^\Pi$, точно так же как для связывающего отношения ρ (лемма 9.2).

Доказательство. Для спектральной последовательности E первой фильтрации краевые эффекты вычисляются по теореме 8.1 с помощью подкомплексов $F^1 K$ и L комплекса $\operatorname{Tot} K$, где $L^p = Z_1^{p,0}$, с использованием вложения $\iota : L \to \operatorname{Tot} K$ и проекции

$\pi : \operatorname{Tot} K \to \operatorname{Tot} K/F^1K$. Эти отображения образуют первую строку следующей диаграммы, вторая строка которой представляет комплексы, использованные в § 9 для вычисления res, inf и ρ:

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\iota} & \operatorname{Tot} K & \xrightarrow{\pi} & (\operatorname{Tot} K)/F^1K \\ \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi/\Gamma), A) & \xrightarrow{\sigma^*} & \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi), A) & \xrightarrow{\psi} & \operatorname{Hom}_\Gamma(B(\Gamma), A). \end{array} \tag{10.5}$$

Отображения λ, η, φ, связывающие эти две строки, будут определены в терминах однородных образующих $(x_0, \ldots, x_n)$ B-резольвенты $B(\Pi)$. Именно модуль $L^p = Z_1^{p,0} \subset F^pK$ состоит из всех элементов $g \in K^{p,0}$, для которых $\delta g \in K^{p+1,0}$, т. е. $\delta'' g = 0$. Поскольку $B_1(\Pi)$ есть свободная абелева группа с образующими (x, y) и дифференциалом $\partial(x, y) = (y) - (x)$, то

$$0 = \pm\delta'' g(b' \otimes (x, y)) = g(b' \otimes (y)) - g(b' \otimes (x)), \quad b' \in B_p(\Pi/\Gamma).$$

Таким образом, элемент $g(b' \otimes (x))$ не зависит от $x \in \Pi$, поэтому формулой $(\lambda g)\, b' = g(b' \otimes (1))$ определен цепной изоморфизм $\lambda : L \cong \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi/\Gamma), A)$. Элемент степени n из $\operatorname{Tot} K$ является набором $h = (h^0, \ldots, h^n)$ из $(n+1)$ элементов $h^p \in K^{p, n-p}$. Он лежит в F^1K, если $h^0 = 0$. Но $B_0(\Pi/\Gamma) = Z(\Pi/\Gamma)$, так что

$$h_0 \in \operatorname{Hom}_{\Pi/\Gamma}(B_0(\Pi/\Gamma), \operatorname{Hom}_\Gamma(B_n(\Gamma), A)) \cong \operatorname{Hom}_\Gamma(B_n(\Gamma), A).$$

Значит, формула $(\varphi h)(b'') = h^0((1) \otimes b'')$ определяет цепной изоморфизм φ, стоящий справа в (10.5). Наконец, прямой подсчет показывает, что определение

$$(\eta h)(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n} h^p((\sigma x_0, \ldots, \sigma x_p) \otimes (x_p, \ldots, x_n)),$$

где $\sigma : \Pi \to \Pi/\Gamma$, $h = (h^0, \ldots, h^n)$, задает цепное преобразование $\eta : \operatorname{Tot} K \to \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi), A)$, которое делает диаграмму (10.5) коммутативной. Теперь для описанного после (10.1) отображения $\zeta : \operatorname{Hom}_\Pi(B(\Pi), A) \to \operatorname{Tot} K$ будет $\eta\zeta = 1$; поскольку ζ индуцирует когомологический изоморфизм (10.1), то и η индуцирует подобный изоморфизм.

Таким образом, все вертикальные отображения в (10.5) являются когомологическими изоморфизмами. В спектральной последовательности краевые гомоморфизмы на базе и слое индуцируются (теорема 8.1) ι и π соответственно; при описанных изоморфизмах они соответствуют инфляции, индуцированной σ^*, и сужению, индуцированному ψ. Аналогично лемма 4.3 показывает, что трансгрессия, рассматриваемая как связывающее отношение для верхней строки, совпадает с теоретико-групповой трансгрессией, вычисленной (как в § 9) из нижней строки.

Члены малой степени в этой спектральной последовательности порождают точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^1(\Pi, A) \xrightarrow{\operatorname{res}} H^1(\Gamma, A)^\Pi \xrightarrow{\rho} \\ \xrightarrow{\rho} H^2(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^2(\Pi, A). \end{aligned} \tag{10.6}$$

В высоких степенях спектральная последовательность производит более тонкий анализ ядер и образов отображений inf и res в терминах всей последовательности функторов $E_r^{p,q}(\Pi, \Gamma, A)$, которые можно рассматривать как «смешанные» группы когомологий двух групп Π и Γ.

В качестве приложения мы докажем

Следствие 10.3. *Если Γ — нормальный делитель конечной группы Π индекса $k = [\Pi : \Gamma]$, взаимно простого с порядком $h = [\Gamma : 1]$, то для каждого Π-модуля A и каждого $n > 0$ существует расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \to H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^n(\Pi, A) \xrightarrow{\operatorname{res}} H^n(\Gamma, A)^\Pi \to 0, \tag{10.7}$$

которая устанавливает изоморфизм $H^n(\Pi, A) \cong H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \oplus H^n(\Gamma, A)^\Pi$.

Доказательство. Из предложения IV.5.3 известно, что порядок каждого элемента из $H^q(\Gamma, A)$ при $q > 0$ делит h, а порядок каждого элемента из $H^p(\Pi/\Gamma, M)$ при $p > 0$ и при любом (Π/Γ)-модуле M делит k. Значит, группа $E_2^{p,q} \cong H^p(\Pi/\Gamma, H^q(\Gamma, A))$ при $p > 0$ и $q > 0$ состоит из таких элементов, порядок которых делит и h и k, и поэтому равна нулю. Ненулевые члены спектральной последовательности лежат, таким образом, на краях ($p = 0$ или $q = 0$), а единственный ненулевой дифференциал — это трансгрессия (от слоя к базе)

$$d_n : H^{n-1}(\Gamma, A)^\Pi = E_n^{0, n-1} \to E_n^{n, 0} = H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma).$$

Однако этот гомоморфизм отображает абелеву группу, порядки элементов которой делят h, в абелеву группу, порядки элементов которой делят k, причем $(h, k) = 1$; значит, дифференциал d_n равен нулю. Таким образом, все дифференциалы спектральной последовательности равны нулю, $E_2 = E_\infty$ и имеется только два члена (оба на краях каждой полной степени n). В этом случае фильтрация комплекса $H^n(\Pi, A)$ эквивалентна точной последовательности, указанной в теореме. Эта последовательность расщепляется; действительно, стандартным рассуждением, использующим алгоритм евклида, доказывается, что любая точная последовательность $B \rightarrowtail C \twoheadrightarrow D$ абелевых групп, в которой $kB = 0$, $hD = 0$ и $(h, k) = 1$, должна расщепляться.

УПРАЖНЕНИЯ

Все упражнения относятся к спектральной последовательности Линдона.

1. Показать для фильтрации $H^n(\Pi, A)$, что F^nH^n можно охарактеризовать как образ инфляции, а F^1H^n как ядро сужения.

2. Установить точность последовательности

$$0 \longrightarrow F^1H^2/F^2H^2 \longrightarrow E_2^{1,1} \longrightarrow E_2^{3,0} \longrightarrow H^3(\Pi, A).$$

3. (Хохшильд — Серр [1953].) Предположим, что $m \geqslant 1$ и что $H^n(\Gamma, A) = 0$ при $0 < n < m$. Показать, что $\inf: H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \cong H^n(\Pi, A)$ есть изоморфизм при $n < m$, что трансгрессия τ в размерности m — это гомоморфизм $\tau: H^m(\Gamma, A)^\Pi \to H^{m+1}(\Pi/\Gamma, A^\Gamma)$ и что следующая последовательность точна:

$$0 \longrightarrow H^m(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^m(\Pi, A) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^m(\Gamma, A)^\Pi \xrightarrow{\tau}$$
$$\xrightarrow{\tau} H^{m+1}(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^{m+1}(\Pi, A).$$

4. (Хохшильд — Серр [1953]; Хаттори [1960].) Предположим, что $m \geqslant 1$ и что $H^n(\Gamma, A) = 0$ при $1 < n < m$. Установить точность следующей последовательности для $0 < n < m$:

$$\ldots \longrightarrow H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \xrightarrow{\inf} H^n(\Pi, A) \longrightarrow H^{n-1}(\Pi/\Gamma, H^1(\Gamma, A)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \longrightarrow H^{n+1}(\Pi, A) \longrightarrow \ldots .$$

5. Для правого Π-модуля C построить спектральную последовательность первой четверти, сходящуюся к гомологии Π:

$$H_p(\Pi/\Gamma, H_q(\Gamma, C)) \cong E^2_{p,0} \underset{p}{\Rightarrow} H(\Pi, C).$$

§ 11. Теорема сравнения

При оперировании спектральными последовательностями полезно иметь возможность судить об изоморфизме двух спектральных последовательностей по ограниченным данным. Теорема сравнения, доказываемая в этом параграфе, представляет такую возможность для спектральной последовательности первой четверти E модулей над коммутативным кольцом при условии, что существует короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow E^2_{p,0} \otimes E^2_{0,q} \xrightarrow{\varkappa} E^2_{p,q} \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Tor}_1(E^2_{p-1,0}, E^2_{0,q}) \longrightarrow 0 \qquad (11.1)$$

для члена E^2. Это условие часто выполняется. Например, для спектральной последовательности Лерэ — Серра расслоенного пространства с односвязной базой формула (2.2) устанавливает изоморфизм $E^2_{p,q} \cong H_p(B, H_q(F))$, который по теореме об универсальных коэффициентах порождает точную последовательность

$$0 \longrightarrow H_p(B) \otimes H_q(F) \longrightarrow E^2_{p,q} \longrightarrow \operatorname{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F)) \longrightarrow 0.$$

Поскольку и B, и F линейно связны,

$$E^2_{p,0} \cong H_p(B, Z) = H_p(B) \quad \text{и} \quad E^2_{0,q} \cong H_0(B, H_q(F)) \cong H_q(F),$$

так что указанная последовательность сводится к (11.1).

Теорема 11.1. (*Теорема сравнения.*) *Пусть $f: E \to E'$ есть гомоморфизм спектральных последовательностей первой четверти модулей над коммутативным кольцом, каждая из которых удовлетворяет условию* (11.1), *причем f коммутирует с отображениями $\varkappa$, σ, $\varkappa'$, σ' из* (11.1). *Обозначим отображения $f^r_{p,q}: E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$. Тогда любые два из следующих условий влекут третье* (*и, следовательно, устанавливается, что f изоморфизм*)

(i) $f^2_{p,0}: E^2_{p,0} \to E'^2_{p,0}$ — *изоморфизм для всех* $p \geqslant 0$;
(ii) $f^2_{0,q}: E^2_{0,q} \to E'^2_{0,q}$ — *изоморфизм для всех* $q \geqslant 0$;
(iii) $f^\infty_{p,q}: E^\infty_{p,q} \to E'^\infty_{p,q}$ — *изоморфизм для всех* p, q.

Имея в виду геометрические приложения, можно прочитать (i) как «f — изоморфизм на базе», (ii) как «f — изоморфизм на слое» и (iii) как «f — изоморфизм на всем пространстве».

Доказательство. То, что из первых двух условий вытекает третье, элементарно. По условию диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & E^2_{p,0} \otimes E^2_{0,q} & \longrightarrow & E^2_{p,q} & \longrightarrow & \operatorname{Tor}_1(E^2_{p-1,0}, E^2_{0,q}) & \longrightarrow 0 \\
& \Big\downarrow {\scriptstyle f \otimes f} & & \Big\downarrow {\scriptstyle f^2_{p,q}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \operatorname{Tor}_1(f^2_{p-1,0},\, f^2_{0,q})} & \\
0 \longrightarrow & E'^2_{p,0} \otimes E'^2_{0,q} & \longrightarrow & E'^2_{p,q} & \longrightarrow & \operatorname{Tor}_1(E'^2_{p-1,0}, E'^2_{0,q}) & \longrightarrow 0
\end{array} \qquad (11.2)$$

коммутативна и имеет точные строки. Из условий (i) и (ii) следует, что крайние вертикальные отображения являются изоморфизмами. По короткой лемме о пяти гомоморфизмах среднее вертикальное отображение $f^2_{p,q}$ является изоморфизмом. Этот изоморфизм комплексов (E^2, d^2) и (E'^2, d'^2) влечет за собой изоморфизм их гомологий E^3 и E'^3, далее по индукции устанавливается (iii), поскольку каждый модуль $E^r_{p,q}$ постоянен, за исключением конечного числа номеров.

В других случаях, требующих доказательства, используется то обстоятельство, что спектральную последовательность можно рассматривать как согласованный набор точных последовательностей в биградуированных модулях

$$E^r, \; C^r = \ker d^r, \quad B^r = \operatorname{im} d^r \quad \text{и} \quad G^r = E^r/B^r.$$

При применении леммы о пяти гомоморфизмах (в ее уточненной форме, лемма I.3.3) мы будем записывать только первую строку коммутативной диаграммы, подобной диаграмме (11.2).

Для доказательства того, что из (i) и (iii) следует (ii), рассмотрим свойство

$$(\mathrm{ii}_m)\ f^2_{0,q}: E^2_{0,q} \to E'^2_{0,q} \text{ является изоморфизмом для } 0 \leqslant q \leqslant m.$$

Поскольку $E^2_{0,0} = E^\infty_{0,0}$, то из (iii) следует (ii_0). Следовательно, достаточно доказать индукцией по m, что из (i), (iii) и (ii_m) следует (ii_{m+1}). Если выполнено (ii_m), то диаграмма (11.2) показывает, что $f^2_{p,q}$ — изоморфизм при $q \leqslant m$. Дополнительной индукцией по $r \geqslant 2$ доказываем, что

$$f^r_{p,q} \text{ является } \begin{cases} \text{мономорфизмом для } q \leqslant m \text{ и всех } p, \\ \text{изоморфизмом для } q \leqslant m-r+2 \text{ и всех } p. \end{cases} \tag{11.3}$$

Это утверждение верно при $r = 2$; предположим, что оно верно для некоторого r. Лемма о пяти гомоморфизмах для коммутативной диаграммы точной последовательности

$$0 \to C^r_{p,q} \to E^r_{p,q} \xrightarrow{d^r} E^r_{p-r,q+r-1},$$

которая определяет ядро C^r дифференциала d^r, показывает для отображения c^r, индуцированного f^r, что

$$c^r_{p,q}: C^r_{p,q} \to C'^r_{p,q} \text{ является } \begin{cases} \text{мономорфизмом для } q \leqslant m, \\ \text{изоморфизмом для } q \leqslant m-r+1. \end{cases} \tag{11.4}$$

Далее, d^r определяет эпиморфизм $E^r_{p+r,q-r+1} \twoheadrightarrow B^r_{p,q}$. Если $q \leqslant m$, то $f^r_{p+r,q-r+1}$ — эпиморфизм, а поэтому отображение b, индуцированное f, есть эпиморфизм:

$$b^r_{p,q}: B^r_{p,q} \to B'^r_{p,q} \text{ есть эпиморфизм при } q \leqslant m. \tag{11.5}$$

Теперь E^{r+1} определяется короткой точной последовательностью

$$0 \to B^r_{p,q} \to C^r_{p,q} \to E^{r+1}_{p,q} \to 0. \tag{11.6}$$

Построим соответствующую диаграмму из двух строчек. При $q \leqslant m$ первое вертикальное отображение есть эпиморфизм в силу (11.5), а второе — мономорфизм в силу (11.4); следовательно, по лемме о пяти гомоморфизмах третье вертикальное отображение $f^{r+1}_{p,q}$ являявляется мономорфизмом. Если, кроме того, $q \leqslant m - (r+1) + 2 = m - r + 1$, то второе вертикальное отображение является изоморфизмом в силу (11.4), и поэтому $f^{r+1}_{p,q}$ является изоморфизмом. Этим закончено индуктивное доказательство утверждения (11.3).

Теперь мы утверждаем, что

$$c^r_{p,m-p+2} \text{ — эпиморфизм при } r \geqslant p \geqslant 2. \tag{11.7}$$

Для $r > p$, $d^r: E^r_p \to E^r_{p-r}$ имеет нулевой образ, так что $E^r_p = C^r_p$, $f^r_p = c^r_p$. При больших r, $f^r_{p,q} = f^\infty_{p,q}$, так что $c^r_{p,q}$ из (11.7) есть изоморфизм по условию (iii). Мы можем теперь доказать (11.7), уменьшая r. Предположим, что (11.7) верно для $r+1$, и возьмем первое диаграмму последовательности (11.6) при $q = m - p + 2$. Первое вертикальное отображение эпиморфно по (11.5); поскольку $E^{r+1}_{p,q} = C^{r+1}_{p,q}$, третье отображение эпиморфно по предположению. Значит, в силу короткой леммы о пяти гомоморфизмах $c^r_{p,q}$ — эпиморфизм, что и доказывает (11.7).

Наконец, мы доказываем уменьшением r, что $f^r_{0,m+1}$ — изоморфизм для $r \geqslant 2$. Это верно для больших r в силу (iii); предположим, что утверждение верно для $r+1$, и рассмотрим диаграмму из двух строк с первой строкой

$$0 \to C^r_{r,m-r+2} \to E^r_{r,m-r+2} \xrightarrow{d^r} E^r_{0,m+1} \to E^{r+1}_{0,m+1} \to 0.$$

Первое вертикальное отображение — это эпиморфизм в силу (11.7) при $r = p$, второе — это изоморфизм в силу (11.3) и четвертое — это изоморфизм по предположению. Значит, третье отображение $f^r_{0,m+1}$ — изоморфизм. При $r = 2$ этим заканчивается индукция по m в доказательстве утверждения (ii_m).

Доказательство того, что из (ii) и (iii) следует (i), проводится аналогично.

З а м е ч а н и я. Спектральные последовательности были открыты Лерэ [1946, 1950] для случая когомологии; нх существенные черты были независимо отмечены Линдоном [1946, 1948] в случае спектральной последовательности для когомологии группы. Алгебраические свойства спектральных последовательностей были эффективным образом собраиы Косулем [1947]. Их полезность в вычислениях групп гомотопий сфер была убедительно продемонстрирована Серром [1951]. Эквивалентное определение при помощи точных пар принадлежит Масси [1952[; еще одно определение дано Картаном и Эйленбергом [1956], XV.7. Теорема Лерэ — Серра была доказана методом ацнкличных моделей (Гугенгейм — Мур [1957]); другие доказательства см. у Ху Сы-Цзяна [1959, гл. IX], у Хилтоиа — Уайли [1960, гл. X] и, при несколько отличном понятнн расслоенного пространства, у Фаделла и Гуревича [1958]. Спектральиая последовательность Линдона впервые была определена с помощью фильтрации комплекса Hom (B (П), A); эта последовательность удовлетворяет теореме 10.1, но до настоящего времени не известно, изоморфна ли она определенной нами последовательности, в которой использована фильтрация, принадлежащая Хохшильду и Серру [1953]. Этимн авторами краевые эффекты были описаны (предложение 10.2) лишь для фильтрацин Линдона; наше доказательство, исходящее прямо из фильтрацнн Хохшильда — Серра, зависнт от нашего описания связывающих отиошений, которое было приведено для этой цели. Спектральная последовательность Линдона была использована Грином [1956] для доказательства того, что группа $H_2(\Pi, Z)$ для конечной p-группы П порядка p^n имеет порядок p^k, где $k \leqslant n(n-1)/2$. Для конечной группы П Венков [1959] доказал топологическими методами, что кольцо когомологий $H(\Pi, Z)$ конечно порождено как кольцо; алгебраическое доказательство этого факта, данное Ивенсом [1961], опирается на структуру умножения в спектральной последовательности Линдона. Среди многих других применений спектральных последовательностей отметим доказательство Бореля [1955] теоремы Смита о неподвижной точке и приложения к функциональным пространствам, указанные Федерером [1956]. В доказательстве теоремы сравнения, принадлежащей Муру (семинар Картана [1954—1955]), мы следовали Кудо и Араки [1956]; тесно связанное с этим доказательство Зеемана [1957] включает случай, когда исходные изоморфизмы предполагаются заданными только для определенных размерностей. Эйленберг — Мур [1962] изучали сходимость и двойственные свойства спектральных последовательностей в абелевой категории.

ГЛАВА XII

Производные функторы

В этой главе наши предыдущие исследования будут применены к более общей ситуации. Во-первых, мы уже отмечали, что модули можно заменить объектами абелевой категории; в первых трех параграфах исследуется эта техника и показывается, как идеи гомологической алгебры, не включающие тензорные произведения, могут быть распространены на любую абелеву категорию. Во-вторых, относительный и абсолютный функторы Ext можно рассматривать вместе как частные случаи общей теории «собственных» точных последовательностей, изложенной в § 4—7. Следующие параграфы описывают процесс построения «производных» функторов: Hom_R приводит к функторам Ext_R^n, $\otimes_R$ приводит к Tor_n^R, а любой аддитивный функтор T приводит к последовательности функторов —«сателлитов». Наконец, применение этих идей к категории комплексов дает обобщенную формулу Кюннета, в которой обычная точная последовательность заменяется спектральной последовательностью.

§ 1. Квадраты

Многие операции в абелевой категории основаны на построении «квадратов». Пусть α и β — два морфизма с общим концом; рассмотрим коммутативные квадраты

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ {\scriptstyle\beta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} D'' & \xrightarrow{\alpha''} & B \\ {\scriptstyle\beta''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C, \end{array} \tag{1.1}$$

построенные на данных сторонах α и β. Назовем левый квадрат *коуниверсальным* для данных морфизмов α и β, если для каждого правого квадрата существует такой единственный морфизм $\gamma: D'' \to D$, что $\beta'' = \beta'\gamma$, $\alpha'' = \alpha'\gamma$. Коуниверсальный квадрат (называемый также диаграммой «оттягивания»), если он существует определен с точностью до эквивалентности объекта D, так что α и β вместе определяют α' и β' с точностью до правой эквивалентности. Габриэль [1962] называет D расслоенным произведением.

Подобные коуниверсальные квадраты известны во многих областях математики и существуют при более общих предположениях (чем те, которые сделаны относительно абелевой категории). В категории множеств, если α и β — вложения, то D есть в точности пересечение подмножеств A и B множества C. В категории топологических пространств, если β — послойное отображение, $\alpha : A \to C$ — непрерывное отображение в базу отображения β, то β' это так называемое «индуцированное» послойное отображение. В любой абелевой категории коуниверсальный квадрат с $C = 0$ — это квадрат

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Т е о р е м а 1.1. (*Построение квадрата.*) *Для данных морфизмов α и β с общим концом в абелевой категории существует коуниверсальный квадрат* (1.1). *В терминах прямой суммы $A \oplus B$ с проекциями π_1 и π_2 объект D можно описать как область определения морфизма $\nu \in \ker(\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)$, причем $\alpha' = \pi_2\nu$, $\beta' = \pi_1\nu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для описанных в условиях теоремы объекта D и морфизмов ν, α' и β' рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dr, "\beta"] & \\ D'' \arrow[r, dotted, "\gamma"] & D \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\beta'"'] & A \oplus B \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & C. \\ & & A \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad (1.2)$$

Два треугольника этой диаграммы коммутативны по определению α' и β'. Квадрат (лучше ромб) в вершине D коммутативен, так как

$$\alpha\beta' = \alpha\pi_1\nu = (\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)\nu + \beta\pi_2\nu = 0 + \beta\alpha'.$$

Кроме того, для любого другого коммутативного квадрата, построенного на α и β, с верхним углом D'', как в (1.1), коуниверсальность прямой суммы $A \oplus B$ дает морфизм $\xi : D'' \to A \oplus B$, для которого $\pi_1\xi = \beta''$, $\pi_2\xi = \alpha''$. Следовательно, $0 = \alpha\beta'' - \beta\alpha'' = (\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)\xi$, поэтому ξ проходит через $\nu \in \ker(\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)$ как $\xi = \nu\gamma$ для некоторого γ (см. (1.2)). Теперь $\beta'' = \pi_1\nu\gamma = \beta'\gamma$ и $\alpha'' = \alpha'\gamma$. Если $\gamma_0 : D'' \to D$ — второй морфизм со свойствами $\beta'' = \beta'\gamma_0$, $\alpha'' = \alpha'\gamma_0$, то $\pi_j\nu\gamma_0 = \pi_j\nu\gamma$, $j = 1, 2$, так что $\nu\gamma_0 = \nu\gamma$. Но ν — мономорфизм, поэтому $\gamma_0 = \gamma$ и, значит, морфизм γ

единствен, что и требовалось для доказательства коуниверсальности.

Для модулей A, B, C угол D можно было описать как модуль всех пар (a, b), для которых $\alpha a = \beta b$; наше доказательство показало, как вместо элементов a, b использовать разность $\alpha\pi_1 - \beta\pi_2$ и образование ядер.

Т е о р е м а 1.2. *Если, в коуниверсальном квадрате, β — мономорфизм, то и β' — мономорфизм, если β — эпиморфизм, то и β' — эпиморфизм; по симметрии эти же утверждения справедливы для α.*

В доказательстве используется прямая сумма $A \oplus B$ с проекциями π_j и вложениями ι_j. Сначала будем считать, что β — мономорфизм. Предположим, что $\beta'\omega = 0$ для некоторого ω. Тогда $\beta\pi_2\nu\omega = \beta\alpha'\omega = \alpha\beta'\omega = 0$; так как β — мономорфизм, то $\pi_2\nu\omega = 0$. Вместе с тем $\pi_1\nu\omega = \beta'\omega = 0$, так что $\nu\omega = 0$ и $\omega = 0$, поскольку ν — мономорфизм. Следовательно, на β' можно сокращать слева, т. е. β' — мономорфизм.

Теперь будем считать β эпиморфизмом. Предположим, что $\omega(\alpha\pi_1 - \beta\pi_2) = 0$ для некоторого ω. Тогда $0 = \omega(\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)\iota_2 = -\omega\beta\pi_2\iota_2 = -\omega\beta$, так что $\omega = 0$. Следовательно, $\alpha\pi_1 - \beta\pi_2$ есть эпиморфизм, и, значит, он является коядром своего ядра ν. Теперь допустим, что $\xi\beta' = 0$ для некоторого ξ. Тогда $0 = \xi\beta' = \xi\pi_1\nu$, поэтому $\xi\pi_1$ проходит через $\alpha\pi_1 - \beta\pi_2 \in \operatorname{coker}\nu$, $\xi\pi_1 = \xi'(\alpha\pi_1 - \beta\pi_2)$. Следовательно, $0 = \xi\pi_1\iota_2 = -\xi'\beta\pi_2\iota_2 = -\xi'\beta$, откуда $\xi' = 0$, так как β — эпиморфизм; значит, $\xi\pi_1 = 0$, $\xi = 0$ и β' — эпиморфизм.

При дуализации (обращение стрелок, перестановка слов, «мономорфизм» и «эпиморфизм» и т. д.) аксиомы абелевой категории переходят в себя. Двойственное построение квадрата исходит из двух морфизмов α и β с общим началом и дает универсальный левый квадрат (или диаграмму «выдвижения»):

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow \\ B & \dashrightarrow & D, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D''. \end{array}$$

Здесь *универсальность* означает, что для любого другого подобного коммутативного квадрата с правым нижним углом D'' существует единственный морфизм $\gamma : D \to D''$ со свойствами... . Например, в категории групп (*не* являющейся абелевой категорией), если α и β — мономорфизмы, то такой универсальный квадрат существует и в качестве D нужно взять свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой C (Нейман [1954], Шпехт [1956]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если произведение $\tau\sigma$ определено и τ и σ — эпиморфизмы, то $\tau \in \operatorname{coker} [\sigma (\ker \tau\sigma)]$.

2. Если $\varkappa$ и σ имеют общий конец, $\varkappa$ — мономорфизм, σ — эпиморфизм, то доказать, что морфизмы $\varkappa'$ и σ' из коуниверсального квадрата определяются точными формулами $\varkappa' \in \ker \rho$, $\sigma' \in \operatorname{coim} (\sigma\varkappa')$, где $\rho = (\operatorname{coker} \varkappa)\, \sigma$ (использовать упражнение 1).

3. Если $\rho (\ker \alpha) = 0$ и ρ — эпиморфизм, то показать, что существуют такие мономорфизм μ и эпиморфизм σ, что $\mu\rho = \sigma\alpha$.

4. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\xi} & \cdot & \xrightarrow{\eta} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{\gamma} & \cdot & \xrightarrow{\beta} & \cdot \end{array}$$

оба квадрата коуниверсальны. Показать, что квадрат с верхним и нижним основаниями $\eta\xi$ и $\beta\gamma$ коуниверсален.

5. Построить коуниверсальную диаграмму для n морфизмов с общим концом.

§ 2. Подобъекты и факторобъекты

Подобъект объекта A определяется мономорфизмом $\varkappa : * \to A$ и является классом правой эквивалентности (все морфизмы $\varkappa\theta \mid \theta$ — эквивалентность) этого морфизма $\varkappa$. Класс A_s всех подобъектов объекта A можно рассматривать как множество (аксиома в конце IX.1).

Обычное отношение включения для подмодулей согласуется с определением, что $\operatorname{cls}\varkappa_1 \leqslant \operatorname{cls}\varkappa_2$ тогда и только тогда, когда существует такой морфизм ω, что $\varkappa_1 = \varkappa_2\omega$; этот морфизм ω необходимо является мономорфизмом. Множество A_s частично упорядочено этим отношением $\leqslant$ и имеет *нуль* $0_A : 0_A \leqslant \operatorname{cls} \varkappa$ для каждого $\varkappa$; именно, 0_A — это класс любого нулевого морфизма $0 : 0' \to A$, где $0'$ — произвольный нулевой объект категории.

В абелевой категории каждый морфизм α с областью значений A имеет стандартное разложение $\alpha = \lambda\sigma$ (λ — мономорфизм, σ — эпиморфизм) и $\operatorname{im} \alpha = \operatorname{cls} \lambda \in A_s$. Таким образом, мы можем описать A_s как множество всех образов морфизмов α с областью значений A; тогда отношения включения и равенства определяются следующим предложением.

Предложение 2.1. *В абелевой категории для морфизмов α_1, α_2 с общей областью значений A имеют место следующие утверждения (знак «$\Longleftrightarrow$» означает «тогда и только тогда, когда»):*

$$\operatorname{im} \alpha_1 = \operatorname{im} \alpha_2 \Longleftrightarrow \alpha_1\sigma_1 = \alpha_2\sigma_2 \text{ для некоторых эпиморфизмов } \sigma_1, \sigma_2;$$

$$\operatorname{im} \alpha_1 \leqslant \operatorname{im} \alpha_2 \Longleftrightarrow \alpha_1\sigma = \alpha_2\omega \text{ для некоторого эпиморфизма } \sigma \text{ и некоторого } \omega;$$

$$\operatorname{im} \alpha = 0_A \Longleftrightarrow \alpha = 0.$$

Доказательство. Из стандартного разложения морфизма $\alpha_1\sigma_1 = \alpha_2\sigma_2$ следует $\operatorname{im} \alpha_1 = \operatorname{im} \alpha_1\sigma_1 = \operatorname{im} \alpha_2$. Обратно, если для α_1 и α_2 образом является $\operatorname{cls} \varkappa$, то эти морфизмы имеют стандартные разложения $\alpha_1 = \varkappa\rho_1$, $\alpha_2 = \varkappa\rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — эпиморфизмы. Построение квадрата для ρ_1 и ρ_2 дает по теореме 1.2 эпиморфизмы σ_1, σ_2, для которых $\rho_1\sigma_1 = \rho_2\sigma_2$ и, следовательно, $\alpha_1\sigma_1 = \alpha_2\sigma_2$. Доказательство остальных утверждений аналогично.

Элемент из A_s будет записываться как $a \in A_s$ или как $\operatorname{im} \alpha$ для некоторого α с областью значений A; как будет удобнее.

Каждый морфизм $\xi : A \to B$ задает отображение $\xi_s : A_s \to B_s$, определяемое формулой

$$\xi_s (\operatorname{im} \alpha) = \operatorname{im} (\xi\alpha), \text{ область определения } \alpha = A.$$

Соответствия $A \to A_s$, $\xi \to \xi_s$ порождают «представление» каждой абелевой категории частично упорядоченными множествами с нулем. Мы можем также рассматривать A_s как «множество с отмеченной точкой». Под *множеством U с отмеченной точкой* понимается множество с выделенным элементом, скажем $0_U \in U$. Отображение $f : U \to V$ множеств с отмеченной точкой — это функция, определенная на множестве U со значениями в множестве V, для которой $f\,0_U = 0_V$; в частности, $f = 0$ означает, что $fu = 0_V$ для каждого $u \in U$. Множества с отмеченной точкой вместе со всеми описанными отображениями f в качестве морфизмов образуют категорию, в которой мы можем определить многие известные понятия следующим образом. Для каждого отображения $f : U \to V$:

$$\operatorname{Kernel} f = \{\text{все } u \mid u \in U,\ fu = 0_V\},$$

$$\operatorname{Image} f = \{\text{все } v \mid fu = v \text{ для некоторого } u \in U\},$$

f *сюръективно* тогда и только тогда, когда $\operatorname{Image} f = V$,

f *инъективно* тогда и только тогда, когда из $fu_1 = fu_2$ следует $u_1 = u_2$.

Если $(f, g) : U \to V \to W$, то назовем пару (f, g) *точной*, если $\operatorname{Image} f = \operatorname{Kernel} g$. Как и в абелевой категории, пара (f, g) точна тогда и только тогда, когда $gf = 0$ и $\operatorname{Kernel} g \subset \operatorname{Image} f$, где $\subset$ обозначает теоретико-множественное включение.

Основные свойства представления в виде частично упорядоченных множеств подобъектов можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.2. *Если $\xi: A \to B$ — морфизм абелевой категории, то $\xi_s: A_s \to B_s$ — отображение частично упорядоченных множеств с нулем, т. е. $\xi_s 0_A = 0_B$ и из $a \leqslant a'$ в A_s следует $\xi_s a \leqslant \xi_s a'$. Оно обладает следующими свойствами:*

(i) $\xi = 0 \Leftrightarrow \xi_s = 0$;

(ii) *ξ — эпиморфизм $\Leftrightarrow$ отображение ξ_s сюръективно;*

(iii) *ξ — мономорфизм $\Leftrightarrow$ отображение ξ_s инъективно $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Kernel $\xi_s = 0$.*

Если произведение $\eta\xi$ определено, то $(\eta\xi)_s = \eta_s\xi_s$ и

(iv) *пара (ξ, η) точна $\Leftrightarrow$ пара (ξ_s, η_s) точна.*

Доказательство. Если $\operatorname{im}\alpha_1 \leqslant \operatorname{im}\alpha_2$ в A_s, то по предположению 2.1 $\alpha_1\sigma = \alpha_2\omega$ для некоторого морфизма ω и некоторого эпиморфизма σ, поэтому $\xi\alpha_1\sigma = \xi\alpha_2\omega$ и $\operatorname{im}(\xi\alpha_1) \leqslant \operatorname{im}(\xi\alpha_2)$. Значит отображение ξ_s сохраняет частичную упорядоченность. Свойство (i) очевидно.

Если ξ — эпиморфизм и если $\operatorname{im}\beta \in B_s$, то коуниверсальный квадрат для ξ и β дает такой эпиморфизм ξ' и такой морфизм β', что $\xi\beta' = \beta\xi'$, откуда $\xi_s \operatorname{im}\beta' = \operatorname{im}\beta$ и отображение ξ_s сюръективно. Обратно, если отображение ξ_s сюръективно, то существует такой морфизм α с областью значений A, что $\operatorname{im}(\xi\alpha) = \operatorname{im} 1_B$, так что $\xi\alpha\sigma_1 = \sigma_2$ для некоторых эпиморфизмов σ_1 и σ_2, откуда вытекает эпиморфность ξ.

Если ξ — мономорфизм, из равенства $\xi_s \operatorname{im}\alpha = \xi_s \operatorname{im}\alpha'$ следует $\xi\alpha\sigma = \xi\alpha'\sigma'$, следовательно, $\alpha\sigma = \alpha'\sigma'$ и $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\alpha'$, так что отображение ξ_s инъективно. Если ξ_s инъективно, то Kernel ξ_s, очевидно, равно нулю. Наконец, если Kernel $\xi_s = 0$, то из $\xi\alpha = 0$ следует $\operatorname{im}(\xi\alpha) = \xi_s(\operatorname{im}\alpha) = 0$, значит, $\operatorname{im}\alpha = 0$ и $\alpha = 0$, поэтому ξ — мономорфизм. Этим доказано свойство (iii).

Для морфизма $\eta: B \to C$ определение $\ker\eta \in B_s$ показывает, что

$$\operatorname{Kernel}\eta_s = \{b \mid b \in B_s \text{ и } b \leqslant \ker\eta\}; \tag{2.1}$$

другими словами, $\ker\eta$ — это максимальный элемент подмножества Kernel η_s; мы пишем «ker» для морфизма абелевой категории, «Ker»— для модульных гомоморфизмов и «Kernel»— для множеств с отмеченной точкой. Аналогично для $\xi: A \to B$

$$\operatorname{Image}\xi_s = \{b \mid b \in B_s \text{ и } b \leqslant \operatorname{im}\xi\}. \tag{2.2}$$

Действительно, если A есть область значений морфизма α, то $\xi_s \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}(\xi\alpha) \leqslant \operatorname{im}\xi$; обратно, из $\operatorname{im}\beta \leqslant \operatorname{im}\xi$ следует, что $\beta\sigma = \xi\alpha$ для некоторого эпиморфизма σ и некоторого α с областью значений A, поэтому $\xi_s \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}(\xi\alpha) = \operatorname{im}\beta$. Этим доказано (2.2).

Если произведение $\eta\xi$ определено, то равенство $(\eta\xi)_s = \eta_s\xi_s$ вытекает из определения, а (2.1) и (2.2) доказывают свойство (iv) из теоремы.

Факторобъекты двойственны подобъектам. Подробнее, пусть B^q означает множество всех факторобъектов объекта B, т. е. множество всех классов левой эквивалентности эпиморфизмов σ с областью определения B. Множество B^q частично упорядочено с нулем; нулем является класс $0: B \to 0'$; включение $\operatorname{cls}\sigma \geqslant \operatorname{cls}\tau$ по определению означает, что $\tau = \beta\sigma$ для некоторого морфизма β, необходимо являющегося эпиморфизмом. Для модулей это включение имеет естественно ожидаемый смысл: если $\sigma: A \to A/S$, $\tau: A \to A/T$, то $\operatorname{cls}\sigma \geqslant \operatorname{cls}\tau$ означает $S \subset T$ и, следовательно, $A/T \cong (A/S)/(T/S)$.

Каждый морфизм $\xi: A \to B$ индуцирует отображение $\xi^q: B^q \to A^q$ (в обратном направлении!) по формуле $\xi^q(\operatorname{cls}\sigma) = \operatorname{coim}(\sigma\xi)$. В силу принципа двойственности нам нет необходимости доказывать теорему, двойственную теореме 2.2. Напомним, что двойственная теорема формулируется путем обращения всех стрелок и сохранения логической структуры теоремы. Таким образом, «область определения» становится «областью значений», а отображение ξ_s становится отображением ξ^q. Теоретико-множественные понятия составляют часть логической структуры теоремы, поэтому фраза «отображение ξ_s инъективно» переходит в фразу «отображение ξ^q инъективно».

Теорема 2.3. *Если $\xi: A \to B$ — морфизм абелевой категории, то $\xi^q: B^q \to A^q$ — отображение частично упорядоченных множеств с нулем. Оно обладает следующими свойствами:*

(i) $\xi = 0 \Leftrightarrow \xi^q = 0$;

(ii) *ξ — мономорфизм $\Leftrightarrow$ отображение ξ^q сюръективно;*

(iii) *ξ — эпиморфизм $\Leftrightarrow$ отображение ξ^q инъективно $\Leftrightarrow$ Kernel $\xi^q = 0$.*

Если произведение $\xi\eta$ определено, то $(\xi\eta)^q = \eta^q\xi^q$ и

(iv) *пара (ξ, η) точна $\Leftrightarrow$ пара (η^q, ξ^q) точна.*

Эти свойства приобретают более привычную форму, если их сформулировать в терминах прообразов подобъектов (упражнения 5, 6).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить непосредственно, что каждое утверждение теоремы 2.3 выполняется в абелевой категории всех R-модулей.

2. Если произведение $\eta\xi$ определено, то показать, что $\operatorname{im}\xi \leqslant \ker\eta$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{coker}\xi \geqslant \operatorname{coim}\eta$, и что $\ker\eta \leqslant \operatorname{im}\xi$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{coim}\eta \geqslant \operatorname{coker}\xi$.

3. *Антиизоморфизм* $\varphi : S \to T$ частично упорядоченных множеств S и T — это такое взаимно однозначное соответствие, что из $s \leqslant s'$ следует $\varphi s \geqslant \varphi s'$. Доказать, что соответствие $\operatorname{cls} \varkappa \to \operatorname{coker} \varkappa$ задает антиизоморфизм множеств A_s и A^q.

4. Доказать, что множество A_s является структурой (I.8) с пересечением $(\operatorname{cls} \lambda) \cap (\operatorname{cls} \mu)$, определенным с помощью коуниверсального квадрата как $\operatorname{cls}(\lambda\mu') = \operatorname{cls}(\mu\lambda')$, и объединением $(\operatorname{cls} \lambda) \cup (\operatorname{cls} \mu)$, определенным двойственным образом.

5. Для морфизма $\xi : A \to B$ определим отображение $\xi^s : B_s \to A_s$ формулой $\xi^s \operatorname{im} \beta = \ker [\xi^q (\operatorname{coker} \beta)]$ (в обозначениях упражнения 3, $\xi^s = \varphi^{-1}\xi^q\varphi$). Доказать, что ξ^s характеризуется свойствами $\xi_s (\xi^s \operatorname{im} \beta) \leqslant \operatorname{im} \beta$; из $\xi_s \operatorname{im} \alpha \leqslant \operatorname{im} \beta$ следует $\operatorname{im} \alpha \leqslant \xi^s \operatorname{im} \beta$. Вывести отсюда для модулей, что $\xi^s (\operatorname{im} \beta)$ — это прообраз подмодуля $\operatorname{im} \beta$ относительно ξ.

6. Переформулировать теорему 2.3 в терминах отображений ξ^s.

7. Показать, что $\operatorname{im} \alpha$ является наибольшей нижней гранью мономорфных левых множителей морфизма α.

§ 3. Диаграммный поиск

Различные леммы о диаграммах (лемма о пяти гомоморфизмах, 3×3 лемма и т. д.) справедливы в абелевых категориях. Обычные доказательства, основанные на «поиске» элементов, часто можно провести, применяя вместо этого «поиск» подобъектов или факторобъектов. Мы приведем три примера.

Лемма 3.1. (*Слабая лемма о четырех гомоморфизмах.*) *В любой абелевой категории для коммутативной* 2×4 *диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D \\ \downarrow{\scriptstyle\xi} & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} & & \downarrow{\scriptstyle\omega} \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' \end{array}$$

с точными строками (т. е. со строками, точными в B, C, B' *и* C'*) справедливы следующие утверждения:*

(i) *из того, что* ξ *— эпиморфизм, а* η *и* ω *— мономорфизмы, следует мономорфность* ζ,

(ii) *из того, что* ω *— мономорфизм, а* ξ *и* ζ *— эпиморфизмы, следует эпиморфность* η.

Доказательство. Рассмотрим соответствующую диаграмму для множеств подобъектов и будем писать $a \in A_s$, $b' \in B'_s$ и т. д. Для доказательства (i) рассмотрим такой подобъект $c \in C_s$, что $\zeta_s c = 0$ (или, более коротко, возьмем подобъект c, переходящий в 0 из C'_s). Пусть c переходит в d из D_s. Тогда c и, значит, d переходят в 0 из D'_s; поскольку отображение ω_s инъективно, $d = 0$. В силу точности существует подобъект b, который отображается в c; этот подобъект b переходит в $b' \in B'_s$. И b', и c отображаются в 0 из C'_s, поэтому ввиду точности существует подобъект a' переходящий в b'. Поскольку ξ_s сюръективно, существует подобъект a, который отображается в a' и, значит, в b'. Пусть a отображается в b_1 из B_s. Но b и b_1 из B_s имеют один и тот же образ в B'_s; поскольку отображение η_s инъективно, $b = b_1$. Теперь a отображается в b, а затем в подобъект c, который оказывается равным нулю в силу точности последовательности $A \to B \to C$. Мы показали, что $\operatorname{Kernel} \zeta_s = 0$; по теореме 2.2 (iii) ζ — мономорфизм.

Это доказательство свойства (i) представляет полную аналогию поиску элементов в диаграмме модулей. Двойственное доказательство, использующее факторобъекты, дает (ii).

Существует доказательство свойства (ii) с помощью подобъектов. Если дан подобъект $b' \in B'_s$, то простой поиск дает подобъект $b \in B_s$ с тем же образом в C'_s, что и для b'; таким образом, $\varphi_s\eta_s b = \varphi_s b'$. Оперируя с элементами, мы могли бы образовать разность $\eta_s b - b'$, лежащую в $\operatorname{Ker} \varphi$. Вместо этого напишем $b = \operatorname{im} \beta$, $b' = \operatorname{im} \beta'$; тогда $\operatorname{im}(\varphi\eta\beta) = \operatorname{im}(\varphi\beta')$. По предложению 2.1 существуют такие эпиморфизмы σ_1, σ_2, что $\varphi\eta\beta\sigma_1 = \varphi\beta'\sigma_2$ и, следовательно, $\varphi_s \operatorname{im}(\eta\beta\sigma_1 - \beta'\sigma_2) = 0$. Точность в B' и эпиморфность ξ дают новый элемент $b_1 = \operatorname{im} \beta_1 \in B_s$, который отображается в $\operatorname{im}(\eta\beta\sigma_1 - \beta'\sigma_2) \in B'_s$. По предложению 2.1 имеются такие эпиморфизмы σ_3, σ_4, что $\eta\beta_1\sigma_3 = \eta\beta\sigma_1\sigma_4 - \beta'\sigma_2\sigma_4$; поэтому равенство

$$b' = \operatorname{im}(\beta'\sigma_2\sigma_4) = \eta_s (\operatorname{im}(\beta\sigma_1\sigma_4 - \beta_1\sigma_3))$$

показывает, что $b' \in \eta_s B_s$, так что η — эпиморфизм. Мы показали, каким образом предложение 2.1 может быть использовано для «вычитания» двух подобъектов с общим образом так, как если бы они были элементами модуля.

Из слабой леммы о четырех гомоморфизмах также вытекает лемма о пяти гомоморфизмах (лемма I.3.3). Напомним, что запись $\varkappa \parallel \sigma$ означает, что $(\varkappa, \sigma)$ — короткая точная последовательность.

Лемма 3.2. (3×3 *лемма.*) *В абелевой категории в любой* 3×3 *коммутативной диаграмме, в которой все три столбца и последние две строки являются короткими точными последовательностями, первая строка является короткой точной последовательностью.*

Мы докажем несколько больше. Назовем последовательность $(\alpha, \beta) : A \to B \to C$ *точной слева*, если точна последовательность $0' \to A \to B \to C$ (т. е. точна в A и в B). Таким образом, точность слева пары (α, β) означает, что $\alpha \in \ker \beta$.

Лемма 3.3. (*Уточненная* 3×3 *лемма.*) *Если в* 3×3 *коммутативной диаграмме все три столбца и последние две строки точны слева, то и первая строка точна слева. Если дополнительно* *первый столбец и средняя строка являются короткими точными последовательностями, то и первая строка является короткой точной последовательностью.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (нули наверху и сбоку опущены)

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\alpha} & B' & \xrightarrow{\beta} & C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C''. \end{array}$$

По условию $A' \to B$ — мономорфизм, имеющий $\alpha : A' \to B'$ правым множителем, следовательно, α — мономорфизм. Поскольку произведение $A' \to C' \to C$ равно нулю и $C' \to C$ — мономорфизм, $\beta\alpha = 0$. Для доказательства точности в B' выберем подобъект $b' \in B'_s$, имеющий образ 0 в C'_s, и пусть b' отображается в b из B_s. Тогда b' и b отображаются в 0 из C_s; ввиду точности слева строки в B существует подобъект a, который отображается в b. Но тогда a отображается в 0 из B''_s и, значит, в 0 из A''_s. В силу точности слева первого столбца существует подобъект a', который отображается в a. Теперь и $\alpha_s a'$, и b' имеют один и тот же образ в B_s; поскольку $B' \to B$ — мономорфизм, $\alpha_s a' = b'$. Этим показана точность строки в B'. Вновь доказательство подобно поиску элементов.

Теперь сделаем дополнительные предположения и используем диаграмму соответствующих множеств факторобъектов, в которой все отображения изменяют направление. Для того чтобы доказать, что β — эпиморфизм, по теореме 2.3 (iii) рассмотрим факторобъект $c' \in C'^q$ с образом 0 в B'^q. В силу (ii) той же теоремы существует факторобъект c, который отображается в c'. Пусть c отображается также в $b \in B^q$. Поскольку b затем отображается в 0 из B'^q, точность среднего столбца в B дает b'' с образом b. Но b и, значит, b'' переходят в 0 из A. Так как первый столбец является короткой точной последовательностью, то b'' переходит в нуль уже в A''. Точность строки в B'' позволяет найти c'' с образом b''. Пусть c'' отображается в $c_1 \in C^q$. Тогда c и c_1 имеют общий образ в B^q, поэтому $c_1 = c$ ввиду точности. Исходный факторобъект c' оказывается теперь, как образ для c'', равным нулю, так что β — эпиморфизм, что и утверждалось.

Вновь доказательство использует факторобъекты для того, чтобы обойти вычитание. Для полноты мы присоединяем следующую лемму.

Лемма 3.4. (*Симметричная* 3×3 *лемма.*) *Если в коммутативной* 3×3 *диаграмме средняя строка и средний столбец являются короткими точными последовательностями, то в том случае, когда три из оставшихся четырех строк и столбцов являются короткими точными последовательностями, четвертая строка или четвертый столбец также является короткой точной последовательностью.*

Доказательство. Использовать двойственность и симметрию относительно строк и столбцов леммы 3.2.

Замечание. Имеется несколько других способов установления этих и подобных лемм в абелевой категории.

Теорема представления (Любкин [1960]) утверждает, что для каждой малой абелевой категории $\mathscr{A}$ существует ковариантный аддитивный функтор T из $\mathscr{A}$ в категорию абелевых групп, который является точным вложением,— вложение означает, что разные объекты или морфизмы переходят в разные группы или гомоморфизмы; точность означает, что последовательность точна в $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда ее образ при T является точной последовательностью абелевых групп. В доказательстве Фрейда [1960] этой теоремы изучается категория всех функторов T, и подходящий функтор вкладывается в свою инъективную оболочку, построенную Митчеллом [1964], следуя методам Экмана — Шопфа. Используя эту важную теорему представления, обычные диаграммные леммы можно перенести из категории абелевых групп (где они известны) в малую абелеву категорию $\mathscr{A}$.

Аддитивное отношение r: $A \longrightarrow B$ в абелевой категории можно определить как подобъект объекта $A \oplus B$, как и в II.6. Относительно естественного определения умножения аддитивные отношения в $\mathscr{A}$ образуют категорию с инволюцией $r \to r^{-1}$. Пуппе [1962] открыл эффективный метод доказательства диаграммных лемм с помощью таких отношений (которые он называет *соответствиями*); кроме того, этот метод дает естественное определение связывающих гомоморфизмов для точных последовательностей комплексов в $\mathscr{A}$. Пуппе нашел также характеристику категории аддитивных отношений в $\mathscr{A}$ посредством такого множества аксиом, что каждая категория, удовлетворяющая этим аксиомам, является категорией аддитивных отношений однозначно определенной абелевой категории.

УПРАЖНЕНИЯ

В первых двух упражнениях использовать механизм «вычитания», отмеченный в доказательстве леммы о четырех гомоморфизмах.

1. Доказать сильную лемму о четырех гомоморфизмах (лемма I.3.2) в абелевой категории.

2. Доказать внутреннюю 3×3 лемму: если в коммутативной 3×3 диаграмме все три столбца и первая и третья строки являются короткими точными последовательностями, а в средней строке произведение двух ненулевых морфизмов равно нулю, то и средняя строка является короткой точной последовательностью (ср. упражнение II.5.2).

Замечание. Неопубликованные идеи Р. Г. Суона дают метод диаграммного поиска, используя морфизмы $\alpha : P \to A$ с проективной областью определения вместо элементов объекта A. Этот метод применим к абелевой категории, в которой *едва хватает* проективных объектов в том смысле, что для каждого ненулевого объекта A существует морфизм $\alpha : P \to A$ с проективной областью определения P и $\alpha \neq 0$. Пусть A_p обозначает класс всех таких морфизмов α (включая нуль); каждый морфизм $\xi : A \to B$ индуцирует отображение $\xi_p : A_p \to B_p$ множеств с отмеченной точкой, определенное формулой $\xi_p(\alpha) = \xi\alpha : P \to B$. Указанный метод формулируется на языке этих отображений ξ_p и указан в следующих упражнениях 3—9.

3. Эпиморфизм τ равен нулю тогда и только тогда, когда его область значений есть $0'$, и двойственно.

4. Если $\gamma\varkappa = 0$ и $\gamma\lambda = 0$ для мономорфизмов $\varkappa$, λ, то и $\gamma(\varkappa \cup \lambda) = 0$.

В остальных упражнениях используются упражнения 3 и 4 и диаграммный поиск в абелевой категории $\mathscr{A}$, в которой, как отмечалось, едва хватает проективных объектов.

5. Доказать: $\xi : A \to B$ — эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\xi_p(A_p) = B_p$.

6. Доказать, что $\xi : A \to B$ — мономорфизм тогда и только тогда, когда $\operatorname{Kernel} \xi_p = 0$.

7. Если $\eta\xi = 0$, то $\ker \eta = \operatorname{im} \xi$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Kernel} \eta_p = \operatorname{Image} \xi_p$.

8. Используя утверждения 5—7, доказать слабую лемму о четырех гомоморфизмах.

9. Теми же методами доказать 3×3 лемму.

§ 4. Собственные точные последовательности

В некоторых случаях мы имеем дело со специальным классом точных последовательностей в абелевой категории и с соответствующим функтором Ext; например, в категории модулей над **K**-алгеброй Λ функтор $\operatorname{Ext}_{(\Lambda, \mathbf{K})}$ использует те точные последовательности Λ-модулей, которые расщепляются как последовательности **K**-модулей.

Другой пример возникает в категории абелевых групп. Говорят, что абелева группы A является *сервантной* подгруппой абелевой группы B, если из $a = mb$ для некоторого целого числа m следует $a = ma'$ для некоторого элемента $a' \in A$, т. е. $mA = mB \cap A$. Эквивалентно, подгруппа A сервантна в B в том и только в том случае, когда каждый элемент c конечного порядка из факторгруппы $C = B/A$ имеет представитель в B того же самого порядка. Через $\operatorname{Ext}_f(C, A)$ мы обозначим множество (классов конгруэнтности) сервантных расширений A с помощью C. Топологические применения функтора Ext_f появились у Эйленберга и Маклейна [1942], алгебраические применения — у Харрисона [1959], Нунке [1959], Фукса [1958] и Маклейна [1960]. Тот факт, что Ext_f есть бифунктор в категорию абелевых групп, входящий в определенные точные последовательности, будет вытекать из нашей последующей теории.

Пусть $\mathscr{P}$ обозначает некоторый класс коротких точных последовательностей в абелевой категории $\mathscr{A}$; запись $\varkappa\mathscr{P}\sigma$ означает, что $(\varkappa, \sigma)$ — короткая точная последовательность, принадлежащая $\mathscr{P}$, $\varkappa \in \mathscr{P}_m$ означает, что $\varkappa\mathscr{P}\sigma$ для некоторого σ и $\sigma \in \mathscr{P}_e$ означает, что $\varkappa\mathscr{P}\sigma$ для некоторого $\varkappa$. Назовем $\mathscr{P}$ *собственным* классом (и любой из его элементов — собственной короткой точной последовательностью), если он удовлетворяет следующим самодвойственным аксиомам:

(P-1) если $\varkappa\mathscr{P}\sigma$, то любая изоморфная короткая точная последовательность принадлежит $\mathscr{P}$;

(P-2) для любых объектов A и C последовательность $A \rightarrowtail A \oplus C \twoheadrightarrow C$ собственная;

(P-3) если произведение $\varkappa\lambda$ определено и $\varkappa \in \mathscr{P}_m$, $\lambda \in \mathscr{P}_m$, то $\varkappa\lambda \in \mathscr{P}_m$;

(P-3′) если произведение $\sigma\tau$ определено и $\sigma \in \mathscr{P}_e$, $\tau \in \mathscr{P}_e$, то $\sigma\tau \in \mathscr{P}_e$;

(P-4) если $\varkappa$ и λ — мономорфизмы и $\varkappa\lambda \in \mathscr{P}_m$, то $\lambda \in \mathscr{P}_m$;

(P-4′) если σ и τ — эпиморфизмы и $\sigma\tau \in \mathscr{P}_e$, то $\sigma \in \mathscr{P}_e$.

Эти аксиомы выполняются во всех приведенных выше примерах. Они выполняются также, если $\mathscr{P}$ — класс всех $\square$-расщепляющихся коротких точных последовательностей относительной абелевой категории $\square : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ или если $\mathscr{P}$ — класс *всех* коротких точных последовательностей данной абелевой категории.

Отметим некоторые элементарные следствия. Из первых двух аксиом следует, что $\mathscr{P}$ — допустимый класс в смысле IX.4, так что $\mathscr{P}$ определяется классом $\mathscr{P}_m$ или классом $\mathscr{P}_e$. Точно так же любой морфизм, эквивалентный справа или слева с собственным мономорфизмом $\varkappa$, является собственным; если $\varkappa$ имеет объект A областью значений, то $\operatorname{cls} \varkappa$ состоит из собственных мономорфизмов и называется *собственным подобъектом* объекта A.

По (P-2), $0' \rightarrowtail 0' \oplus A \twoheadrightarrow A$ есть собственная короткая точная последовательность, и двойственно; следовательно, 1_A и $0 : 0' \to A$ суть собственные мономорфизмы, 1_A и $0 : A \to 0'$ — собственные эпиморфизмы. Морфизм $\alpha : A \to B$ называется *собственным*, если $\ker \alpha$ и $\operatorname{coker} \alpha$ собственны; как и в предложении IX.4.1, это условие эквивалентно условию, что $\operatorname{im} \alpha$ и $\operatorname{coim} \alpha$ собственны. Для любой эквивалентности θ, $\ker \theta$ и $\operatorname{coker} \theta$ собственны, поэтому θ — собственный морфизм и принадлежит одновременно $\mathscr{P}_m$ и $\mathscr{P}_e$.

Предложение 4.1. *Прямая сумма двух собственных коротких точных последовательностей является собственной точной последовательностью.*

Доказательство. Прямая сумма морфизмов $\alpha_i : A_i \to B_i$ — это морфизм

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \iota_1\alpha_1\pi_1 + \iota_2\alpha_2\pi_2 : A_1 \oplus A_2 \to B_1 \oplus B_2, \tag{4.1}$$

где $\pi_i : A_1 \oplus A_2 \to A_i$ и $\iota_j : B_j \to B_1 \oplus B_2$. Если $\varkappa \parallel \sigma$ и $\lambda \parallel \tau$, то легко доказать, что $(\varkappa \oplus \lambda) \parallel (\sigma \oplus \tau)$. Следовательно, достаточно показать, что из $\varkappa, \lambda \in \mathcal{P}_m$ следует $\varkappa \oplus \lambda \in \mathcal{P}_m$. Поскольку $\varkappa \oplus \lambda = (\varkappa \oplus 1)(1 \oplus \lambda)$, в силу (P-3) достаточно доказать, что $\varkappa \oplus 1 \in \mathcal{P}_m$. Таким образом, мы хотим доказать для каждого D, что если $(\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ — собственная точная последовательность, то и $(\varkappa \oplus 1, \sigma') : A \oplus D \rightarrowtail B \oplus D \twoheadrightarrow C$ — собственная точная последовательность. Здесь $\sigma' = \sigma\pi$, где $\pi : B \oplus D \to B$ — проекция прямой суммы, которая в силу (P-2) собственна. Следовательно, эпиморфизм $\sigma' = \sigma\pi$ — собственный по (P-3′), и поэтому мономорфизм $\varkappa \oplus 1 \in \ker \sigma'$ — собственный, что и требовалось доказать.

Две собственные короткие точные последовательности $E = (\varkappa, \sigma)$ и $E' = (\varkappa', \sigma')$ от A к C называются *конгруэнтными*, если существует такой морфизм θ, что $\theta\varkappa = \varkappa'$, $\sigma'\theta = \sigma$. Ввиду короткой леммы о пяти гомоморфизмах любой такой морфизм θ необходимо есть эквивалентность.

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если собственная короткая точная последовательность $E = (\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ расщепляется морфизмом $\alpha : C \to B$, $\sigma\alpha = 1_C$, то α — собственный мономорфизм, и последовательность E конгруэнтна прямой сумме. Обратно, любая последовательность, конгруэнтная прямой сумме, расщепляется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\sigma(1 - \alpha\sigma) = 0$, $1 - \alpha\sigma$ проходит через $\varkappa \in \ker \sigma$, $1 - \alpha\sigma = \varkappa\beta$ и $\beta\alpha = 0$, $\beta\varkappa = 1_A$. Результирующая диаграмма $A \rightleftarrows B \leftrightarrows C$ может быть сравнена с диаграммой прямой суммы с помощью обычной эквивалентности $\theta : A \oplus C \to B$, где $\alpha = \theta\iota_2$ и ι_2 — вложение $C \to A \oplus C$. Далее, θ — эквивалентность и, значит, собственный морфизм. Поэтому $\alpha = \theta\iota_2$ — произведение собственных мономорфизмов и, следовательно, собственный мономорфизм. Доказательство обратного утверждения еще проще.

Для любых объектов C и A, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C, A)$ теперь определяется как множество всех классов конгруэнтности *собственных* коротких точных последовательностей $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$; по аксиоме IX.1 о множестве расширений мы можем рассматривать $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}$ как множество. Теперь покажем, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}$ имеет все формальные свойства, установленные для Ext^1_R, где R — кольцо.

Т е о р е м а 4.3. *Для каждого собственного класса $\mathcal{P}$ коротких точных последовательностей абелевой категории, $\mathcal{A}$, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C, A)$ является бифунктором, определенным в категории $\mathcal{A}$. Сложение $E_1 + E_2 = \nabla_A (E_1 \oplus E_2) \Delta_C$ превращает его в бифунктор в категорию абелевых групп.*

Доказательство подобно доказательству для R-модулей. Существенный шаг состоит в доказательстве того, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}$ контравариантный функтор аргумента C; как и в лемме III.1.2, мы должны построить для каждой собственной последовательности E и каждого морфизма $\gamma : C' \to C$ из $\mathcal{A}$ однозначно определенную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{rcccccccc} E' : 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa'} & D & \xrightarrow{\sigma'} & C' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ E : 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \end{array} \tag{4.2}$$

с первой строкой E' — собственной точной последовательностью (здесь 0 обозначает нулевой объект 0′). Сначала построим правый квадрат при помощи конструкции теоремы 1.1. По теореме 1.2 σ' — эпиморфизм. Построим второй квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & C' \\ \downarrow{\scriptstyle\varkappa} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ B & \xrightarrow{\sigma} & C. \end{array}$$

Свойство коуниверсальности первого квадрата определяет морфизм $\varkappa' : A \to D$, для которого $\beta\varkappa' = \varkappa$ и $\sigma'\varkappa' = 0$. Диаграмма (4.2) теперь построена и коммутативна.

Для доказательства точности E' рассмотрим произвольный морфизм ξ, для которого $\sigma'\xi = 0$. Значит, $\sigma\beta\xi = \gamma\sigma'\xi = 0$, поэтому $\beta\xi$ проходит через $\varkappa \in \ker \sigma$, $\beta\xi = \varkappa\alpha = \beta\varkappa'\alpha$ для некоторого α. Но $\sigma'\xi = 0 = \sigma'\varkappa'\alpha$, поэтому коуниверсальность D для морфизмов ξ и $\varkappa'\alpha$ с областью значений D показывает, что $\xi = \varkappa'\alpha$. Поскольку любой морфизм ξ, для которого $\sigma'\xi = 0$, проходит через $\varkappa'$ и поскольку $\sigma'\varkappa' = 0$, $\varkappa' \in \ker \sigma'$.

В доказательстве собственности E' используется прямая сумма. По построению коуниверсального квадрата D, β и σ' определяются точной слева последовательностью

$$0 \to D \xrightarrow{\nu} B \oplus C' \xrightarrow{\sigma\pi_1 - \gamma\pi_2} C, \quad \pi_1\nu = \beta, \ \pi_2\nu = \sigma'.$$

Морфизм ν может не быть собственным, однако

$$\nu\varkappa' = (\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2)\nu\varkappa' = \iota_1\beta\varkappa' + \iota_2\sigma'\varkappa' = \iota_1\varkappa.$$

По аксиоме (P-2), $\iota_1 \in \mathcal{P}_m$; теперь аксиома (P-4) показывает, что $\varkappa' \in \mathcal{P}_m$ и, таким образом, последовательность E' собственна.

Из коуниверсальности квадрата в D теперь вытекает, что морфизм $(1, \beta, \gamma) : E' \to E$ собственных коротких точных последовательностей коуниверсален относительно морфизмов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) : E_1 \to E$ в точном соответствии с леммой III.1.3.

Теперь определим $E\gamma$ как E'. Этим задано действие справа морфизмов γ на E; из коуниверсальности E' вытекает, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}$ — контравариантный функтор аргумента C. Доказательство того, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C, A)$ — ковариантный функтор аргумента A, двойственно, и его нет нужды приводить; доказательство того, что это бифунктор, можно дословно повторить (лемма III.1.6); подобное же повторение, использующее предложение 4.1, показывает, что $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C, A)$ — абелева группа.

Длинная точная последовательность называется *собственной*, если каждый ее морфизм собственный. n-кратная точная последовательность S, начинающаяся объектом A и кончающаяся объектом C, может быть записана (в силу стандартного разложения ее морфизмов) как произведение $S = E_n \circ \ldots \circ E_1$ коротких точных последовательностей. По предложению IX.4.1 последовательность S собственна тогда и только тогда, когда каждый из ее множителей E_i является собственной короткой точной последовательностью. Назовем две n-кратные последовательности S и S', идущие от A к C, *конгруэнтными*, если вторая может быть получена из первой конечным числом замещений E_i на конгруэнтную последовательность E_i', или замещений двух последовательных множителей по правилам $(E\alpha)\circ F \equiv E\circ(\alpha F)$ и $E\circ(\alpha F) \equiv (E\alpha)\circ F$, где E и F — собственные последовательности, а α — подходящий морфизм. Теперь элементами множества $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{P}}(C, A)$ являются классы конгруэнтности таких n-кратных последовательностей, причем сложение и нуль определяются, как раньше. Свойства $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{P}}$ в точности те же, что собраны в теореме III.5.3.

Эти свойства можно переформулировать на другом языке. *Градуированная аддитивная категория* $\mathcal{G}$ — это категория, в которой каждое множество $\hom_{\mathcal{G}}(C, A)$ является теоретико-множественным объединением семейства абелевых групп $\{\hom^n(C, A), n = 0, 1, \ldots\}$, а умножение индуцирует гомоморфизм $\hom(B, C) \otimes \hom(A, B) \to \hom(A, C)$ степени 0 градуированных абелевых групп; $\mathcal{G}$ должна стать аддитивной категорией, если рассматривать только морфизмы $\hom^0(C, A)$. В частности, каждый морфизм градуированной аддитивной категории имеет степень. Теперь рассмотрим собственную n-кратную точную последовательность S, начинающуюся с объекта A и кончающуюся объектом C, как морфизм степени n из C в A, а обычным морфизмам из C в A припишем степень 0. Свойства $\operatorname{Ext}_{\mathcal{P}}$ можно теперь собрать в следующей теореме:

Теорема 4.4. *Каждый собственный класс $\mathcal{P}$ коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathcal{A}$ определяет градуированную аддитивную категорию $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$, объектами которой являются объекты категории $\mathcal{A}$ и $\hom^n_{\mathcal{E}}(A, B) = \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{P}}(A, B)$; в частности, $\hom^0_{\mathcal{E}}(A, B) = \hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Умножение в $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ определяется умножением Ионеды собственных длинных последовательностей и умножением гомоморфизмов и длинных последовательностей, а сложение определяется правилом $\operatorname{cls}(S_1 + S_2) = \operatorname{cls}(\nabla_B(S_1 \oplus S_2)\Delta_A)$.*

Если $\mathcal{P}$ — некоторый собственный класс коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathcal{A}$, то конгруэнтные собственные длинные точные последовательности S и S' также конгруэнтны, как несобственные длинные точные последовательности. Этим определяется естественное преобразование $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{P}}(C, A) \to \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(C, A)$ бифункторов. Предложение 4.2 утверждает, что это преобразование есть мономорфизм при $n = 1$. Этого может не быть в случае $n > 1$; в любом случае при наличии элементарной конгруэнции $(E_\alpha)\circ F \equiv E\circ(\alpha F)$ в $\mathcal{A}$; из того, что последовательность αF собственная, не следует собственность последовательности F.

Замечание. Идея систематического изучения точных последовательностей R-модулей, которые S-расщепляются, принадлежит Хохшильду [1956], а некоторые указания имеются у Картана и Эйленберга [1956]. Гомологические аспекты в случае сервантных расширений абелевых групп были замечены Харрисоном ([1959] и в неопубликованной рукописи). Возможные аксиомы для собственных точных последовательностей были сформулированы Буксбаумом [1959, 1960], Хеллером [1958] и Ионедой [1960]. Наши аксиомы эквивалентны аксиомам Буксбаума. Батлер и Хоррокс [1961] рассмотрели взаимоотношения нескольких собственных классов в одной и той же категории; вместо собственного класса $\mathcal{P}$ они рассмотрели подфунктор $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}} \subset \operatorname{Ext}^1$. Функторы Ext для категории $\mathcal{M} = \operatorname{Morph}(\mathcal{A})$ морфизмов категории $\mathcal{A}$, как оказалось, имеют тесную связь с функторами Ext в категории $\mathcal{A}$ (Маклейн [1960b]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Буксбаум.) Показать, что аксиому (P-2) можно заменить требованием, что из $\alpha\beta = 1_{\mathcal{A}}$ следует $\beta \in \mathcal{P}_m$.

2. (Хеллер.) Если $\varkappa \in \mathcal{P}_m$ и $\varkappa\alpha$ — собственный морфизм, то морфизм α собственный.

3. Построить пример двух сервантных подгрупп в $Z_4 \oplus Z_2$, показывающий, что из $\varkappa, \lambda \in \mathcal{P}_m$ не следует, вообще говоря, $\varkappa + \lambda \in \mathcal{P}_m$.

4. Построить пример несервантного расширения F абелевых групп и такой гомоморфизм α, чтобы расширение αF было сервантным.

5. Пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ двух собственных классов коротких точных последовательностей является собственным классом.

6. (Харрисон.) Если S — фиксированный модуль, то показать, что класс всех коротких точных последовательностей $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, для которых $\operatorname{Hom}(S, B) \to \operatorname{Hom}(S, C)$ — эпиморфизм, является собственным классом.

§ 5. Ext без проективных объектов

Если категория $\mathscr{A}$ имеет достаточно проективных объектов для данного собственного класса $\mathscr{P}$, то каждый объект C имеет собственную проективную резольвенту $\varepsilon : X \to C$. Тогда имеет место, как и для модулей (теорема III, 6.4), естественный изоморфизм $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}(C, A) \cong H^n(\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, A))$. Как и в отмеченном случае, мы можем построить стандартную точную последовательность для $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}$. Вместо этого мы даем прямое доказательство, не используя ни проективных, ни инъективных объектов.

Теорема 5.1. *Если $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathscr{A}$, $E = (\varkappa, \sigma) : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ собственная короткая точная последовательность и G — некоторый объект, то существует точная последовательность абелевых групп*

$$\ldots \to \operatorname{Ext}^{n-1}_{\mathscr{P}}(A, G) \xrightarrow{E^{n-1}} \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}(C, G) \xrightarrow{\sigma^n} \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}(B, G) \xrightarrow{\varkappa^n} \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{P}}(A, G) \xrightarrow{E^n} \ldots,$$

отображения в которой задаются с помощью умножения; в частности, $E^n(\operatorname{cls} S) = (-1)^n \operatorname{cls}(S \circ E)$.

Двойственная теорема устанавливает точность обычной длинной последовательности в том случае, когда E замещает второй аргумент, как в теореме III.9.1.

Доказательство. Немедленно проверяется, что $\sigma^n E^{n-1} = 0$, $\varkappa^n \sigma^n = 0$ и $E^n \varkappa^n = 0$. Будем писать «$\sigma^n \mid \varkappa^n$» для сокращения утверждения о точности пары $(\sigma^n, \varkappa^n)$. Мы должны доказать, что

$$E^{n-1} \mid \sigma^n, \quad \sigma^n \mid \varkappa^n, \quad \varkappa^n \mid E^n, \quad n = 0, 1, \ldots; \; E^{-1} = 0.$$

Для $n = 0$ и для $E^0 \mid \sigma^1$ доказательство такое же, как для модулей, с незначительными изменениями.

Чтобы показать, что $\sigma^1 \mid \varkappa^1$, рассмотрим последовательность $E' \in \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{P}}(B, G)$, для которой $E'\varkappa \equiv 0$. Это означает, что последовательность $E'\varkappa$ расщепляется, поэтому определение (4.2) для

$E'\varkappa$ эквивалентно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{lccccccc}
E'\varkappa : 0 \to & G & \xrightarrow{\iota_1} & G \oplus A & \xrightarrow{\pi_2} & A & \to 0 \\
& \| & & \downarrow \mu & & \downarrow \varkappa & \\
E' : 0 \to & G & \xrightarrow{\varkappa'} & \bullet & \xrightarrow{\sigma'} & B & \to 0 \\
& \| & & \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & \\
E_0 : & G & \xrightarrow{\alpha} & \bullet & \xrightarrow{\tau} & C, &
\end{array}$$

в которой μ — мономорфизм по теореме 1.2. Кроме того, $\sigma\sigma' \in \operatorname{coker} \mu$, так как $\sigma\sigma'\mu = \sigma\varkappa\pi_2 = 0$, если $\xi\mu = 0$ для некоторого ξ, то $\xi\varkappa' = \xi\mu\iota_1 = 0$, откуда $\xi = \eta\sigma'$ для некоторого η, для которого $0 = \eta\sigma'\mu = \eta\varkappa\pi_2$. Поскольку π_2 — эпиморфизм, $\eta\varkappa = 0$, и значит, η проходит через σ, $\eta = \zeta\sigma$. Следовательно, ξ проходит через $\sigma\sigma'$, так что мономорфизм $\mu \in \ker(\sigma\sigma')$ собственный ввиду (P-3′).

Для заполнения пунктирной части диаграммы используем собственное вложение $\iota_2 : A \to G \oplus A$, возьмем $\rho \in \operatorname{coker}(\mu\iota_2)$ и $\alpha = \rho\varkappa'$. Поскольку $\sigma\sigma'\mu\iota_2 = \sigma\varkappa\pi_2\iota_2 = 0 1_A = 0$, $\sigma\sigma'$ проходит через $\rho : \sigma\sigma' = \tau\rho$, где τ — собственный эпиморфизм по (P-4′). Теперь вместо G всюду в первой строке поставим 0, π_2 заменим на 1_A и μ — на $\mu\iota_2$. В результирующей 3×3 диаграмме собственны точные столбцы и точны первые две строки; по 3×3 лемме третья строка точна и собственна, поскольку эпиморфизм τ собственный. Следовательно, эта строка есть $E_0 \in \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{P}}(C, G)$; диаграмма утверждает, что $E_0\sigma \equiv E'$. Значит, $\sigma^1 \mid \varkappa^1$.

Лемма 5.2. *Если $\varkappa^n \mid E^n$ для всех собственных последовательностей E, то $E^n \mid \sigma^{n+1}$ и $\sigma^{n+1} \mid \varkappa^{n+1}$.*

В доказательстве мы опустим символ $\mathscr{P}$ в $\operatorname{Ext}_{\mathscr{P}}$ и будем записывать как $\varkappa_E$ и σ_E два ненулевых морфизма короткой точной последовательности $E = (\varkappa_E, \sigma_E)$. Они дают удобные конгруэнтности (предложение III.1.7)

$$\varkappa_E E \equiv 0, \quad E\sigma_E \equiv 0.$$

Сначала предположим, что $\sigma^{n+1} S \equiv 0$ для последовательности $S \in\in \operatorname{Ext}^{n+1}(C, G)$. Запишем S как произведение $S = T \circ F$, где $T \in\in \operatorname{Ext}^n$. Следовательно, $0 \equiv S\sigma \equiv T(F\sigma)$; по предположению ($E$ заменяется на $F\sigma$) имеется такая последовательность $U \in \operatorname{Ext}^n$, что $T \equiv U\varkappa_{F\sigma}$, значит, $S \equiv U(\varkappa_{F\sigma}F)$. Но $(\varkappa_{F\sigma}F)\sigma \equiv \varkappa_{F\sigma}(F\sigma) \equiv 0$, поэтому доказанное ранее утверждение $E^0 \mid \sigma^1$ устанавливает наличие морфизма α, для которого $\varkappa_{F\sigma} F \equiv \alpha E$. Таким образом, $S \equiv U(\varkappa_{F\sigma}F) \equiv (U\alpha) E \equiv \pm E^n (U\alpha)$, что и требовалось установить.

Затем мы хотим доказать, что всякую последовательность $S \in\in \operatorname{Ext}^{n+1}(B, G)$, для которой $S\varkappa \equiv 0$, можно представить в виде $S \equiv V\sigma$ для некоторой последовательности $V \in\in \operatorname{Ext}^{n+1}$. Доказательство проводится аналогично предыдущему с использованием $\sigma^1 \mid \varkappa^1$ вместо $E^0 \mid \sigma^1$.

Доказательство теперь сводится к установлению соотношения $\varkappa^n \mid E^n$ для всех $n \geqslant 1$.

Рассмотрим случай $\varkappa^1 \mid E^1$; утверждается, что если $FE \equiv 0$ для последовательности $F \in\in \operatorname{Ext}^1(A, G)$, то $F \equiv F'\varkappa_E$ для некоторой последовательности F'. Чтобы разобрать этот случай, мы должны вникнуть в многоступенное определение отношения конгруэнтности $FE \equiv 0$. В действительности мы докажем несколько больше.

Лемма 5.3. *Если $F \in \operatorname{Ext}^1(A, G)$ и $E \in \operatorname{Ext}^1(C, A)$, то следующие три свойства эквивалентны:*

(i) *$F \equiv F'\varkappa_E$ для некоторой последовательности $F' \in \operatorname{Ext}^1$;*
(ii) *$E \equiv \sigma_F E'$ для некоторой последовательности $E' \in \operatorname{Ext}^1$;*
(iii) *$FE \equiv 0$.*

Чтобы доказать, что из (i) следует (ii), запишем коммутативную диаграмму для морфизма $F \to F'$, определяющего $F'\varkappa_E$, в виде

$$\begin{tikzcd}
F: 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\sigma_F"] \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa_E"] & 0 \\
F': 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\varkappa'"] & \bullet \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_E"] & 0 \\
 & & C \arrow[r, equal] & C &
\end{tikzcd}$$

с последним столбцом E. Здесь μ — мономорфизм в силу построения коуниверсального квадрата для $F'\varkappa_E$. Вставим $\sigma_E\sigma'$ вместо пунктирной стрелки. Этот морфизм является собственным эпиморфизмом и принадлежит $\operatorname{coker}\mu$, что доказывается так же, как и для $\sigma\sigma'$ в предыдущей диаграмме. Средний столбец является теперь собственной короткой точной последовательностью E', и построенная диаграмма утверждает, что $\sigma_F E' = E$, что и требовалось доказать. Доказательство обратного утверждения двойственно проведенному.

Из условий леммы следует, что произведение $FE \in\in \operatorname{Ext}^2(C, G)$ определено, и из (i) вытекает, что $FE \equiv (F'\varkappa_E)E \equiv F'(\varkappa_E E) \equiv F'0 = 0$, т. е. (iii). Двойственным образом из (ii) следует (iii). При доказательстве обратного будем обозначать символом $F \# E$ свойство F и E, сформулированное в эквивалентных утверждениях (i) и (ii). Теперь нуль группы $\operatorname{Ext}^2(C, G)$ имеет разложение $0 = F_0E_0$, где

$$F_0: G \overset{1}{\rightarrowtail} G \twoheadrightarrow 0, \quad E_0: 0 \rightarrowtail C \overset{1}{\twoheadrightarrow} C,$$

и $F_0 \# E_0$, поскольку $F_0 = \varkappa_{E_0}F'$, где $F': G \rightarrowtail G \oplus C \twoheadrightarrow C$. Предположим, что $FE \equiv 0$, как в (iii); эта конгруэнция получена конечным числом k применений закона ассоциативности $F'(\gamma E') \equiv (F'\gamma)E'$ к равенству $F_0E_0 = 0$. Мы теперь покажем, что $F \# E$, индукцией по числу k таких применений. Поскольку $F_0 \# E_0$, нам необходимо только показать, что из $F\gamma \# E'$ следует $F \# \gamma E'$, и обратно ввиду двойственности. Теперь по (ii), $F\gamma \# E'$ означает, что $E' \equiv \sigma_{F\gamma}E''$ для некоторой последовательности E''. Диаграмма, определяющая $F\gamma$

$$\begin{tikzcd}
F\gamma: \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, "\sigma_{F\gamma}"] \arrow[d, "\beta"] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\
F: \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\sigma_F"] & \bullet,
\end{tikzcd}$$

дает $\gamma\sigma_{F\gamma} = \sigma_F\beta$ для некоторого β. Следовательно, $\gamma E' \equiv (\gamma\sigma_{F\gamma})E'' \equiv \sigma_F(\beta E'')$; по (ii) это означает, что $F \# \gamma E'$. В доказательстве обратного утверждения используется (i) вместо (ii) для отношения $\#$. Мы закончили доказательство того, что из (iii) следует (i) и (ii).

Лемма 5.4. *Условие (ii) леммы 5.3 эквивалентно условию: (ii′) для некоторого морфизма α и некоторой последовательности E', $F\alpha \equiv 0$ и $E \equiv \alpha E'$.*

Доказательство. Поскольку $F\sigma_F \equiv 0$, из (ii) следует (ii′). Для доказательства обратного запишем F в виде $G \rightarrowtail D \twoheadrightarrow A$. Для некоторого объекта L двойственная последовательность, индуцированная F, начинается членами

$$0 \to \hom(L, G) \to \hom(L, D) \xrightarrow{\sigma_F} \hom(L, A) \xrightarrow{F_*} \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(L, G);$$

мы уже знаем, что эта часть последовательности точна. Значит, если $F\alpha \equiv 0$ и $\alpha: L \to A$, то $\alpha = \sigma_F\beta$ для некоторого $\beta: L \to D$.

Таким образом, если выполнено условие (ii′), мы получаем, что $E \equiv \alpha E' \equiv \sigma_F(\beta E')$, т. е. условие (ii) леммы.

Эти леммы являются первым шагом индуктивного доказательства следующего утверждения:

Лемма 5.5. *Если $n > 0$, $S \in\in \operatorname{Ext}^n(A, G)$ и $E \in \operatorname{Ext}^1(C, A)$, то следующие три свойства эквивалентны:*

(i) *для некоторой последовательности $S' \in\in \operatorname{Ext}^n$, $S \equiv S'\varkappa_E$;*
(ii) *для некоторого морфизма α и некоторой последовательности E', $S\alpha \equiv 0$ и $E \equiv \alpha E'$;*
(iii) *$SE \equiv 0$.*

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) покажет, что $\varkappa^n | E^n$, и закончит доказательство теоремы.

Для доказательства того, что из (i) следует (ii), запишем S' как произведение TF', где $F' \in \mathrm{Ext}^1$. Отсюда $S \equiv S'\varkappa_E \equiv T(F'\varkappa_E)$. Применим лемму 5.3 к $F \equiv F'\varkappa_E$ и E; она устанавливает, что $E \equiv \sigma_F E'$ и $S\sigma_F \equiv T(F\sigma_F) \equiv 0$, что и совпадает с (ii).

Для доказательства того, что из (ii) следует (i), используем индуктивное предположение. Если $E \equiv \alpha E'$ и $S\alpha \equiv 0$, то запишем S как произведение TF, где $T \in \in \mathrm{Ext}^{n-1}$. Тогда $T(F\alpha) \equiv 0$, так что по индукции (из (iii) следует (i)) существует такая последовательность $T' \in \in \mathrm{Ext}^{n-1}$, что $T \equiv T'\varkappa_{F\alpha}$. Таким образом, $S = TF \equiv T'(\varkappa_{F\alpha}F)$ и $(\varkappa_{F\alpha}F)\alpha \equiv \varkappa_{F\alpha}(F\alpha) \equiv 0$, так что $(\varkappa_{F\alpha}F)E \equiv 0$. По лемме 5.3 (из (iii) следует (i)), $\varkappa_{F\alpha}F \equiv F'\varkappa_E$ для некоторой последовательности F', откуда $S \equiv (T'F')\varkappa_E$, т. е. свойство (i).

И из (i), и из (ii) следует (iii); пусть в доказательстве обратных импликаций $S \# E$ снова обозначает отношение между S и E, устанавливаемое эквивалентными утверждениями (i) и (ii). Тогда из $SE \equiv 0$ следует $S \# E$, что устанавливается индукцией по числу шагов в конгруэнции $SE \equiv 0$ в точности так же, как в доказательстве леммы 5.3.

Заметим, что условие (ii) из этой леммы можно интерпретировать, сказав, что конгруэнцию $SE \equiv 0$ можно установить с помощью одной ассоциативности $SE = S(\alpha E') \equiv (S\alpha)E'$, включающей E, а остальные ассоциативности все применяются внутри $S\alpha$.

Замечание. Доказанная теорема была установлена Буксбаумом [1959]; обработка доказательства, приведенного в тексте, целиком принадлежит Стефану Шануэлю (не опубликовано).

§ 6. Категория коротких точных последовательностей

Пусть $\mathscr{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathscr{A}$. Построим категорию $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ (сокращение слов «короткая точная последовательность из $\mathscr{A}$»):

Объекты — все собственные короткие точные последовательности $E = (\varkappa, \sigma)$ из $\mathscr{A}$,

Морфизмы $\Gamma : E \to E'$ — все тройки $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ морфизмов из $\mathscr{A}$, которые порождают коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} E: 0 & \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ E': 0 & \to & A' & \xrightarrow{\varkappa'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C' & \to & 0. \end{array}$$

$\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ является аддитивной категорией относительно определенных очевидным образом умножения и сложения морфизмов. Однако $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ не есть абелева категория. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для морфизма (α, β, γ) с $\alpha = \beta = 0$ необходимо $\gamma = 0$, так как $\gamma\sigma = \sigma'\beta = \sigma'0 = 0$, откуда $\gamma = 0$, поскольку σ — эпиморфизм. Правило умножения $(\alpha, \beta, \gamma)(\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma')$ показывает, что если α и β — мономорфизмы в $\mathscr{A}$, то (α, β, γ) — мономорфизм в $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$. Двойственно, если β и γ — эпиморфизмы в $\mathscr{A}$, то (α, β, γ) — эпиморфизм в $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$. Для нулевого объекта $0'$ и некоторого объекта $G \neq 0'$ из $\mathscr{A}$ построим морфизм $\Gamma = (0, 1, 0)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 0' & \to & G & \to & G & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\ 0 & \to & G & \to & G & \to & 0' & \to & 0 \end{array}$$

коротких точных последовательностей. Поскольку 0 и 1 — мономорфизмы, Γ — мономорфизм; поскольку 1 и 0 — эпиморфизмы, Γ — эпиморфизм. Однако Γ не является эквивалентностью, как должно было бы быть в абелевой категории.

Причину этого явления нетрудно заметить. Если мы возьмем «почленное» ядро этого морфизма Γ, мы получим короткую последовательность $0' \to 0' \to G$, которая не точна; то же самое справедливо и для «почленного» коядра $G \to 0' \to 0'$. Действительно Ker-Coker-последовательность леммы II.5.2 показывает, что эти две последовательности нужно соединить вместе морфизмом $1_G : G \to G$, чтобы получить точную последовательность. (Используя аддитивные отношения, можно получить ker-coker-последовательность в любой абелевой категории.)

Вложим категорию $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ в следующую категорию $\mathscr{S}(\mathscr{A})$:

Объекты — все диаграммы $D : A \to B \to C$ из $\mathscr{A}$ (точность не требуется);

Морфизмы $\Gamma : D \to D'$ — все тройки $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ морфизмов из $\mathscr{A}$, которые порождают коммутативную 2×3 диаграмму, подобную приведенной выше.

Поскольку $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ — категория диаграмм в абелевой категории, она является абелевой категорией; кроме того, морфизм (α, β, γ) тогда и только тогда является эпиморфизмом в $\mathscr{S}(\mathscr{A})$, когда α, β, γ — эпиморфизмы в $\mathscr{A}$, тоже и для мономорфизмов. Короткая точная последовательность $D' \rightarrowtail D \twoheadrightarrow D''$ из $\mathscr{S}(\mathscr{A})$

соответствует коммутативной 3×3 диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} D' : A' & \to & B' & \to & C' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D : A & \to & B & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D'' : A'' & \to & B'' & \to & C'' \end{array}$$

в категории $\mathscr{A}$, столбцы которой точны в $\mathscr{A}$. Назовем последовательность $D' \rightarrowtail D \twoheadrightarrow D''$ *допустимой* в $\mathscr{S}(\mathscr{A})$, если все строки и столбцы в этой диаграмме являются собственными короткими точными последовательностями в $\mathscr{A}$. Тем самым определен допустимый класс коротких точных последовательностей в $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ в смысле IX.4 и, значит, определены допустимые морфизмы категории $\mathscr{S}(\mathscr{A})$.

Предложение 6.1. *Морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : D \to D''$ из $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ тогда и только тогда является допустимым эпиморфизмом (допустимым мономорфизмом) в $\mathscr{S}(\mathscr{A})$, когда D и D'' — собственные короткие точные последовательности категории $\mathscr{A}$, а α, β, γ — собственные эпиморфизмы в $\mathscr{A}$ (соответственно собственные мономорфизмы в $\mathscr{A}$).*

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Обратно, если α, β и γ — собственные эпиморфизмы, то построим 3×3 диаграмму со второй и третьей строками D и D'' и с первой строкой, состоящей из ядер α, β, γ и морфизмов, индуцированных морфизмами последовательности D. По 3×3 лемме первая строка точна; по аксиоме (Р-4) первая строка собственна. Следовательно, все строки и столбцы — собственные точные последовательности, так что Γ — допустимый эпиморфизм.

Теперь «собственные» проективные объекты определяются как «допустимые» проективные объекты (IX.4). Если дан собственный класс $\mathscr{P}$, то объект P из $\mathscr{A}$ называется *собственным проективным* объектом для $\mathscr{P}$, если он имеет обычные свойства по отношению к *собственным* эпиморфизмам, т. е. если каждый собственный эпиморфизм $\sigma : B \twoheadrightarrow C$ индуцирует эпиморфизм $\mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C)$. Мы будем говорить, что имеется *достаточно собственных проективных объектов*, если для каждого объекта A существует собственный эпиморфизм $\tau : P \twoheadrightarrow A$, где P — собственный проективный объект.

Теорема 6.2. *Если P и Q — собственные проективные объекты абелевой категории $\mathscr{A}$, то $F : P \to P \oplus Q \to Q$ — допустимый проективный объект в $\mathscr{S}(\mathscr{A})$.*

Доказательство. Если дана любая коммутативная диаграмма в $\mathscr{A}$

$$\begin{array}{cccccccccc} & F: 0 \to & P & \xrightarrow{\iota_1} & P \oplus Q & \xrightarrow{\pi_2} & Q & \to 0 \\ Z \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \downarrow \zeta & \\ & E': 0 \to & A' & \xrightarrow{\varkappa'} & B' & \xrightarrow{\sigma'} & C' & \to 0 \\ \Gamma \uparrow & & \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & \\ & E: 0 \to & A & \xrightarrow{\varkappa} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \to 0 \end{array}$$

с точными строками и если Γ — допустимый эпиморфизм, то мы должны найти такой морфизм $Z' : F \to E$ первой строки в третью, что $\Gamma Z' = Z : F \to E'$. По предложению 6.1, α, β и γ — собственные эпиморфизмы, значит, $\gamma\sigma$ — собственный эпиморфизм. Поскольку P и Q — собственные проективные объекты из $\mathscr{A}$, ξ можно представить в виде $\alpha\xi' = \xi$, где $\xi' : P \to A$, а ζ можно представить в виде $\gamma\sigma\omega = \zeta$, где $\omega : Q \to B$. Возьмем $\iota_2 : Q \to P \oplus Q$. Тогда $\sigma'(\beta\omega - \eta\iota_2) = \gamma\sigma\omega - \zeta\pi_2\iota_2 = \zeta - \zeta = 0$, поэтому $\beta\omega - \eta\iota_2$ проходит через $\varkappa' \in \ker \sigma'$: $\beta\omega - \eta\iota_2 = \varkappa'\omega'$ для некоторого $\omega' : Q \to A'$. Поскольку α — собственный эпиморфизм и Q собственный проективный объект в $\mathscr{A}$, ω' представляется как $\alpha\psi = \omega'$, где $\psi : Q \to A$, и

$$\beta\omega - \eta\iota_2 = \varkappa'\alpha\psi = \beta\varkappa\psi.$$

Определим морфизмы $\eta' : P \oplus Q \to B$ и $\zeta' : Q \to C$, используя $\pi_1 : P \oplus Q \to P$

$$\eta' = \varkappa\xi'\pi_1 + (\omega - \varkappa\psi)\pi_2, \quad \zeta' = \sigma\omega.$$

Тогда $Z' = (\xi', \eta', \zeta') : F \to E$ — требуемый морфизм.

Мы теперь покажем, что имеется достаточно допустимых проективных объектов, не для всех объектов категории $\mathscr{S}(\mathscr{A})$, а для объектов категории $\mathrm{Ses}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{S}(\mathscr{A})$.

Теорема 6.3. *Если абелева категория $\mathscr{A}$ имеет достаточно собственных проективных объектов, то для каждой собственной короткой точной последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ из $\mathscr{A}$ существует допустимый проективный объект F и допустимый эпиморфизм $Z = (\xi, \eta, \zeta) : F \to E$ категории $\mathscr{S}(\mathscr{A})$.*

Мы будем строить F в форме, указанной в теореме 6.2. Поскольку в $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов, мы можем найти собственные проективные объекты P и Q и собственные эпиморфизмы $\xi : P \to A$, $\omega : Q \to B$. Произведение $\zeta = \sigma\omega : Q \to C$ является собственным эпиморфизмом, а морфизм $\eta = \varkappa\xi\pi_1 + \omega\pi_2 : P \oplus Q \to B$ порождает морфизм $Z = (\xi, \eta, \zeta) : F \to E$. Но поскольку ξ и ζ — эпиморфизмы, по короткой лемме о пяти гомоморфизмах η — эпиморфизм. Следовательно, Z — допустимый эпиморфизм по предложению 6.1, если только η — собственный эпиморфизм. Но η определяется морфизмами $\eta\iota_1 = \varkappa\xi$, $\eta\iota_2 = \omega$, поэтому его можно записать как произведение

$$P\oplus Q \xrightarrow{\xi\oplus\omega} A\oplus B \xrightarrow{\varkappa\oplus 1} B\oplus B \xrightarrow{\nabla_B} B.$$

Оба множителя $\xi\oplus\omega$ и $\nabla_B(\varkappa\oplus 1)$ — собственные эпиморфизмы; второй множитель потому, что он эквивалентен (собственной) проекции π_2 прямой суммы, как показывает диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A\oplus B \arrow[r, "\nabla_B(\varkappa\oplus 1)"] \arrow[d, shift left, "\psi"] & B \arrow[d, equal] \\
A\oplus B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, shift left, "\varphi"] & B,
\end{tikzcd}$$

в которой φ и ψ — автоморфизмы прямой суммы $A\oplus B$, определенные равенствами

$$\pi_1\varphi\iota_1 = 1,\quad \pi_1\varphi\iota_2 = 0,\quad \pi_2\varphi\iota_1 = -\varkappa,\quad \pi_2\varphi\iota_2 = 1,$$
$$\pi_1\psi\iota_1 = 1,\quad \pi_1\psi\iota_2 = 0,\quad \pi_2\psi\iota_1 = \varkappa,\quad \pi_2\psi\iota_2 = 1$$

(на элементах $\varphi(a, b) = (a, b-\varkappa a)$, $\psi(a, b) = (a, b+\varkappa a)$. Доказательство закончено.

Эта теорема позволяет построить допустимые проективные резольвенты.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathcal{A}$. Для каждой собственной короткой точной последовательности E из $\mathcal{A}$ существует допустимая проективная резольвента $\varepsilon: K \to E$, в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, представленная коммутативной диаграммой*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & W_n \arrow[r] \arrow[d] & W_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & W_0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

в $\mathcal{A}$; каждая строка этой диаграммы является собственной проективной резольвентой в $\mathcal{A}$, каждый столбец K — собственной короткой точной последовательностью (собственных проективных объектов) из $\mathcal{A}$ и каждый объект $W_n = X_n \oplus Y_n$.

Доказательство. Теорема 6.3 позволяет построить $\varepsilon: K \to E$ рекурсивно, причем каждый столбец K_n является допустимым проективным объектом в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ вида F из теоремы 6.2.

Значит, K_n — собственная короткая точная последовательность $X_n \rightarrowtail W_n \twoheadrightarrow Y_n$ собственных проективных объектов X_n, W_n, Y_n и $W_n = X_n \oplus Y_n$. Каждый морфизм $\partial: K_n \to K_{n-1}$ и $\varepsilon: K_0 \to E$ являются допустимыми морфизмами категории $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, поэтому строки диаграммы точны и собственны в $\mathcal{A}$. Заметим, что K можно рассматривать или как комплекс коротких точных последовательностей, или как короткую точную последовательность $X \rightarrowtail W \twoheadrightarrow Y$ комплексов из $\mathcal{A}$. Заметим также, что хотя последовательность $X \rightarrowtail W \twoheadrightarrow Y$ расщепляется как последовательность градуированных объектов, она может не расщепляться как последовательность комплексов ($=$ градуированных объектов с дифференциалом ∂).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Если $\mathcal{M}$ — категория всех левых R-модулей, то показать, что каждый мономорфизм в $\mathrm{Ses}(\mathcal{M})$ имеет коядро в $\mathrm{Ses}(\mathcal{M})$ и двойственно. (Использовать Ker-coker-последовательность.)

2. Морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma): D \to D'$ допустим в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда D и D' — собственные короткие точные последовательности из $\mathcal{A}$, и индуцированное отображение $\ker\beta \to \ker\gamma$ является собственным эпиморфизмом в $\mathcal{A}$ (или, двойственно, индуцированное отображение $\operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta$ является собственным мономорфизмом в $\mathcal{A}$).

§ 7. Связанные пары аддитивных функторов

При систематическом исследовании функторов $T: \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ в этом и следующих параграфах (§ 7—9) будет предполагаться, что

(i) $\mathcal{A}$ — абелева категория;

(ii) $\mathcal{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathcal{A}$;

(iii) $\mathcal{R}$ — отмеченная абелева категория (IX.2).

При таком подходе одновременно включается и относительная гомологическая алгебра (например, если $\mathcal{P}$ — класс подходящих расщепляющихся точных последовательностей), и «абсолютная» гомологическая алгебра, для которой в качестве $\mathcal{P}$ берется класс всех коротких точных последовательностей в $\mathcal{A}$. В $\mathcal{R}$ мы используем класс *всех* коротких точных последовательностей. Для приложений в качестве $\mathcal{R}$ можно взять категорию всех модулей над некоторым кольцом или над алгеброй.

Аддитивный функтор $T: \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ — это такой функтор (ковариантный или контравариантный), то $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$ всякий раз, как определена сумма $\alpha+\beta$. Из этого условия следует, что $T(0) = 0$, $T(-\alpha) = -T(\alpha)$ и $T(A\oplus B) \cong T(A) \oplus T(B)$. Начиная с этого места, мы будем считать, что *все функторы аддитивны*.

Изучим действие ковариантного функтора T на все *собственные* короткие точные последовательности $(\varkappa, \sigma): A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C \in \mathscr{A}$. Назовем функтор T

$\mathscr{F}$-*точным*, если в $\mathscr{R}$ точна каждая последовательность $0 \to T(A) \to T(B) \to T(C) \to 0$;

$\mathscr{F}$-*точным справа*, если точна каждая последовательность $T(A) \to T(B) \to T(C) \to 0$;

$\mathscr{F}$-*точным слева*, если точна каждая последовательность $0 \to T(A) \to T(B) \to T(C)$;

$\mathscr{F}$-*полуточным*, если точна каждая последовательность $T(A) \to T(B) \to T(C)$.

Если функтор T $\mathscr{F}$-точен, то он переводит собственные мономорфизмы в мономорфизмы, собственные эпиморфизмы в эпиморфизмы и собственные длинные точные последовательности в длинные точные последовательности. Кроме того, для любого собственного морфизма α и $\mathscr{F}$-точного функтора T

$$\begin{aligned} T(\ker\alpha) &= \ker(T\alpha), & T(\operatorname{im}\alpha) &= \operatorname{im}(T\alpha);\\ T(\operatorname{coker}\alpha) &= \operatorname{coker}(T\alpha), & T(\operatorname{coim}\alpha) &= \operatorname{coim}(T\alpha). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Точные справа функторы могут быть описаны несколькими эквивалентными способами. Под *собственной точной справа* последовательностью категории $\mathscr{A}$ мы будем понимать последовательность вида $(\alpha, \sigma): D \to B \to C \to 0$, точную в B и C, с собственными морфизмами α и σ.

Лемма 7.1. *Ковариантный аддитивный функтор T $\mathscr{F}$-точен справа тогда и только тогда, когда или*

(i) *T переводит собственные точные справа последовательности из A в точные справа последовательности в $\mathscr{R}$, или*

(ii) *$T(\operatorname{coker}\alpha) = \operatorname{coker}(T\alpha)$ для каждого собственного морфизма α из $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Поскольку равенство $\operatorname{coker}\alpha = \sigma$ означает, что последовательность (α, σ) точна справа, условия (i) и (ii) эквивалентны, и из них следует, что функтор T $\mathscr{F}$-точен справа. Обратно, пусть T $\mathscr{F}$-точен справа. Каждая собственная точная справа последовательность $D \to B \to C \to 0$ из A порождает две собственные короткие точные последовательности

$$\begin{array}{c} K \\ \downarrow \\ D \\ \downarrow \\ 0 \to A \to B \to C \to 0; \end{array}$$

T переводит каждую из них в точную справа последовательность в $\mathscr{R}$, так что последовательность $T(D) \to T(B) \to T(C)$ точна справа.

Аналогично функтор T $\mathscr{F}$-точен слева тогда и только тогда, когда $T(\ker\alpha) = \ker(T\alpha)$ для собственного морфизма α.

Если $T: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ контравариантный функтор и если рассматриваются все собственные короткие точные последовательности $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ из $\mathscr{A}$, то T называется

$\mathscr{F}$-точным, если точна в $\mathscr{R}$ каждая последовательность $0 \to T(C) \to T(B) \to T(A) \to 0$;

$\mathscr{F}$-точным справа, если точна каждая последовательность $T(C) \to T(B) \to T(A) \to 0$;

$\mathscr{F}$-точным слева, если точна каждая последовательность $0 \to T(C) \to T(B) \to T(A)$;

$\mathscr{F}$-полуточным, если точна каждая последовательность $T(C) \to T(B) \to T(A)$.

Справедлив аналог леммы 7.1; в частности, функтор T $\mathscr{F}$-точен справа тогда и только тогда, когда он переводит каждую собственную точную слева последовательность из $\mathscr{A}$ в точную справа последовательность в $\mathscr{R}$.

$\mathscr{F}$-*связанной парой* (S, E_*, T) ковариантных функторов называется пара функторов $S, T: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ вместе с функцией, которая сопоставляет каждой собственной точной последовательности $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ из $\mathscr{A}$ морфизм $E_*: S(C) \to T(A)$ из $\mathscr{R}$ таким образом, что любой морфизм $(\alpha, \beta, \gamma): E \to E'$ собственных коротких точных последовательностей порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{E_*} & T(A) \\ \downarrow{\scriptstyle S(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\alpha)} \\ S(C') & \xrightarrow{E'_*} & T(A'), \end{array} \quad \mathscr{R} \tag{7.2}$$

(в отмеченной категории $\mathscr{R}$). Назовем E_* *связывающим* морфизмом пары. Условие (7.2) означает, что E_* — естественное преобразование функторов аргумента E. Это условие может быть заменено тремя отдельными требованиями:

Если последовательность E конгруэнтна последовательности E', то $E_* = E'_*$. (7.2a)

Если $\gamma: C' \to C$, то $(E\gamma)_* = E_*\gamma_*$, $\gamma_* = S(\gamma)$. (7.2b)

Если $\alpha: A \to A'$, то $(\alpha E)_* = \alpha_* E_*$, $\alpha_* = T(\alpha)$. (7.2c)

Действительно, из (7.2) при $\alpha = 1$ и $\gamma = 1$ следует (a). Если $(1, \beta, \gamma): E \to E'$, то $E'\gamma$ по определению равняется E, поэтому из (7.2) следует (b). Двойственно из (7.2) при $\gamma = 1$ вытекает (c). Обратно, если выполнены условия (a), (b) и (c) и если $(\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$, то конгруэнция $\alpha E \equiv E'\gamma$ из предложения III.1.8 доказывает справедливость (7.2).

Если последовательность E_0 расщепляется, то $(E_0)_* = 0$. В самом деле, если последовательность E_0 расщепляется, то морфизм $(1_A, \pi_1, 0)$ отображает E_0 в последовательность $A \rightarrowtail A \twoheadrightarrow 0$. Поскольку функтор S аддитивен, $S(0) = 0$, так что из (7.2) получаем $0 = S(0) = T(1)(E_0)_* = (E_0)_*$.

Для каждой собственной последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ длинная последовательность

$$S(A) \xrightarrow{S(\varkappa)} S(B) \xrightarrow{S(\sigma)} S(C) \xrightarrow{E_*} T(A) \xrightarrow{T(\varkappa)} T(B) \xrightarrow{T(\sigma)} T(C) \qquad (7.3)$$

является комплексом в $\mathscr{R}$ (произведение любых двух последовательных морфизмов равно нулю) и функтором аргумента E. Действительно, запишем $E = (\varkappa, \sigma)$; последовательности $\varkappa E$ и $E\sigma$ расщепляются, поэтому $T(\varkappa) E_* = 0$, $E_* S(\sigma) = 0$ и $S(\sigma) S(\varkappa) = S(\sigma\varkappa) = S(0) = 0$.

Например, если $\mathscr{A}$ — категория R-модулей, $\mathscr{P}$ — класс всех коротких точных последовательностей, то функторы $S(A) = \operatorname{Tor}_{n+1}(G, A)$ и $T(A) = \operatorname{Tor}_n(G, A)$ при фиксированных G и n образуют связанную пару с обычным связывающим гомоморфизмом.

Морфизмом $(f, g) : (S', E_\#, T') \to (S, E_*, T)$ связанных пар называется такая пара естественных преобразований $f : S' \to S$, $g : T' \to T$ функторов, определенных в категории $\mathscr{A}$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S'(C) & \xrightarrow{E_\#} & T'(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f(C)} & & \downarrow{\scriptstyle g(A)} \\ S(C) & \xrightarrow{E_*} & T(A), \quad \mathscr{R}, \end{array} \qquad (7.4)$$

коммутативна для каждой собственной последовательности E. Другими словами, морфизм (f, g) сопоставляет каждому объекту A морфизмы $f(A) : S'(A) \to S(A)$, $g(A) : T'(A) \to T(A)$ категории $\mathscr{R}$, которые в совокупности образуют цепное преобразование комплексов (7.3). Эти условия на f и g можно выразить следующими равенствами:

$$f\alpha_\# = \alpha_* f, \quad gE_\# = E_* f, \quad g\alpha_\# = \alpha_* g, \qquad (7.4a)$$

где $\alpha_\#$ — сокращение для $S'(\alpha)$ или $T'(\alpha)$, α_* — сокращение для $S(\alpha)$ или $T(\alpha)$.

Связанная пара (S, E_*, T) *$\mathscr{P}$-коуниверсальна слева*, если для каждой связанной пары $(S', E_\#, T')$ и каждого естественного

преобразования $g : T' \to T$ существует такое единственное естественное преобразование $f : S' \to S$, что пара (f, g) является морфизмом связанных пар. Короче, коуниверсальность слева пары (S, E_*, T) означает, что если дано g, то диаграмму (7.4) можно единственным образом дополнить до коммутативной с помощью естественного f. Аналогично $\mathscr{P}$-коуниверсальность справа пары (S, E_*, T) означает, что при заданном f существует единственное g. Точно так же пара $(S', E_\#, T')$ *$\mathscr{P}$-универсальна справа*, если при заданной паре (S, E_*, T) и заданном f существует единственное преобразование g, удовлетворяющее (7.4).

Если задан функтор T, то обычным образом показывается, что существует не более одной коуниверсальной слева пары (S, E_*, T) с точностью до естественных эквивалентностей функтора S. Эта пара и, выражаясь не точно, этот функтор S называются *левым сателлитом* функтора T. Отметим любопытный факт: если (S, E_*, T) — левый сателлит, то и $(S, -E_*, T)$ — левый сателлит, требуется только изменить знак у каждого морфизма E_* и у каждого f в (7.4).

Теорема 7.2. *Если в категории $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов, то эквивалентны следующие условия относительно $\mathscr{P}$-связанной пары (S, E_*, T) ковариантных функторов:*

(i) *пара (S, E_*, T) $\mathscr{P}$-коуниверсальна слева;*

(ii) *для каждой собственной короткой точной последовательности $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow C$ последовательность*

$$0 \to S(C) \to T(K) \to T(P), \quad \mathscr{R}, \qquad (7.5)$$

точна слева всякий раз, когда P — собственный проективный объект.

Поскольку имеется достаточно проективных объектов, для каждого объекта C из $\mathscr{A}$ существует собственный эпиморфизм $\sigma: P \twoheadrightarrow C$ собственно проективного объекта P; этим путем получается собственная точная последовательность

$$E_C : 0 \to K \xrightarrow{\varkappa} P \to C \to 0, \quad \varkappa = \varkappa_C. \qquad (7.6)$$

Она является первым шагом при построении собственной проективной резольвенты объекта C; мы назовем ее *короткой проективной резольвентой*.

Чтобы доказать, что из (ii) следует (i), мы должны построить для заданного преобразования g преобразование f, указанное в (7.4). В коммутативной диаграмме для $E = E_C$

$$\begin{array}{ccccccc} S'(P) & \longrightarrow & S'(C) & \xrightarrow{E_\#} & T'(K) & \xrightarrow{T'(\varkappa)} & T'(P) \\ & & \downarrow{\scriptstyle f(C)} & & \downarrow{\scriptstyle g(K)} & & \downarrow{\scriptstyle g(P)} \\ 0 & \longrightarrow & S(C) & \xrightarrow{E_*} & T(K) & \xrightarrow{T(\varkappa)} & T(P), \ \mathscr{R} \end{array} \qquad (7.7)$$

первая строка является комплексом, а нижняя строка точна по условию. Следовательно, E_* — мономорфизм, поэтому морфизм $f(C)$ определен однозначно, если вообще существует. С другой стороны, $T(\varkappa)\,g(K)\,E_\# = g(P)\,T'(\varkappa)\,E_\# = 0$, так что $g(K)\,E_\#$ проходит через $E_* \in \ker(T(\varkappa))$, $g(K)\,E_\# = E_*\xi$ для единственного морфизма $\xi : S'(C) \to S(C)$. Положим $f(C) = \xi$. Этот морфизм вставляется вместо пунктирной стрелки и делает диаграмму коммутативной.

Теперь возьмем любую собственную короткую точную последовательность $E' = (\varkappa', \sigma') : A' \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C'$ и любой морфизм $\gamma : C \to C'$ из $\mathscr{A}$. В диаграмме

$$\begin{array}{l} E : 0 \to K \to P \to C \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow\gamma \\ E' : 0 \to A' \to B' \to C' \to 0, \quad \mathscr{A}, \end{array} \tag{7.8}$$

из категории $\mathscr{A}$, P — собственный проективный объект, так что ее можно дополнить (теорема сравнения!) до морфизма $(\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$. Мы утверждаем, что

$$E'_*S(\gamma)\,f(C) = g(A')\,E'_\#S'(\gamma) : S'(C) \to T(A'), \quad \mathscr{R}. \tag{7.9}$$

Действительно, $\alpha E \equiv E'\gamma$ и в обозначениях (7.4a) $E'_*\gamma_*f = \alpha_*E_*f = \alpha_*gE_\# = g\alpha_\#E_\# = gE'_\#\gamma_\#$. Мы уточним этот результат (7.9) в двух направлениях.

Во-первых, пусть $\gamma : C \to C'$ — некоторый морфизм из $\mathscr{A}$. Возьмем в качестве E' короткую проективную резольвенту $E_{C'}$, используемую для определения морфизма $f(C')$, который удовлетворяет равенству $g(K')\,E'_\# = E'_*f(C')$, как в (7.7). Тогда $A' = K'$ и E'_* — мономорфизм, поэтому из (7.9) получаем $S(\gamma)\,f(C) = f(C')\,S'(\gamma)$. Это означает, что преобразование $f : S' \to S$ естественно. При $C = C'$ и $\gamma = 1$ последнее равенство показывает, что морфизм $f(C)$ не зависит от выбора E_C.

Во-вторых, пусть E' — некоторая собственная короткая точная последовательность, оканчивающаяся объектом $C' = C$. Возьмем $\gamma = 1$. Тогда (7.9) принимает вид $E'_*f(C) = g(A')\,E_\#$; последнее означает, что f и g коммутируют со связывающими гомоморфизмами и, следовательно, образуют, как в (7.4), морфизм пар $(S', E_\#, T') \to (S, E_*, T)$.

Прежде чем доказывать обратное утверждение, отметим, что диаграмма (7.7) подсказывает определение $S(C)$ как ядра морфизма $T(K) \to T(P)$. Рассмотрим каждую собственную короткую точную последовательность $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ как комплекс в $\mathscr{A}$ с размерностями 1, 0, —1. Тогда $T(E) : T(A) \to T(B) \to T(C)$ — комплекс в $\mathscr{R}$; его одномерная гомология $H_1(T(E))$ является (отмеченным) объектом категории $\mathscr{R}$, который делает последовательность

$$0 \to H_1(T(E)) \xrightarrow{\mu} T(A) \to T(B), \quad \mathscr{R} \tag{7.10}$$

точной. Каждый морфизм $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ собственных коротких точных последовательностей из $\mathscr{A}$ определяет цепное преобразование $T(\Gamma) : T(E) \to T(E')$ и, следовательно, индуцирует морфизм

$$H_1(\Gamma) : H_1(T(E)) \to H_1(T(E')), \quad \mathscr{R},$$

который характеризуется равенством $\mu' H_1(\Gamma) = T(\alpha)\,\mu$. Кроме того, морфизм $H_1(\Gamma)$ зависит только от γ, E и E' и не зависит от α и β.

Действительно, пусть $\Gamma_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma) : E \to E'$ — любой другой морфизм с тем же γ. В диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\alpha-\alpha_0"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta-\beta_0"] \arrow[dl, dotted, "s"'] & C \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varkappa'"] & B' \arrow[r, "\sigma'"] & C', \end{tikzcd} \quad \mathscr{A},$$

$\sigma'(\beta - \beta_0) = 0$, поэтому $\beta - \beta_0 = \varkappa's$ для некоторого $s : B \to A'$. Далее, $\varkappa'(\alpha - \alpha_0) = (\beta - \beta_0)\,\varkappa = \varkappa's\varkappa$, поэтому, учитывая все сказанное, $s\varkappa = \alpha - \alpha_0$, $\varkappa's = \beta - \beta_0$. Значит, s — гомотопия $\Gamma \simeq \Gamma_0$. Поскольку функтор T аддитивен, $T(s)$ — гомотопия $T(\Gamma) \simeq T(\Gamma_0) : T(E) \to T(E')$, так что $H_1(\Gamma) = H_1(\Gamma_0)$. Теперь существуют:

для каждого объекта C из $\mathscr{A}$ короткая проективная резольвента E_C;

для каждого $\gamma : C \to C'$ из $\mathscr{A}$ морфизм $\Gamma_\gamma = (\text{—}, \text{—}, \gamma) : E_C \to E_{C'}$;

для каждой собственной точной последовательности E из $\mathscr{A}$ морфизм $\Lambda_E = (\text{—}, \text{—}, 1) : E_C \to E$.

Лемма 7.3. *Если задан ковариантный функтор $T : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ и если выполнены приведенные выше условия, то равенства $S(C) = H_1(T(E_C))$, $S(\gamma) = H_1(\Gamma_\gamma) : S(C) \to S(C')$ определяют ковариантный аддитивный функтор $S : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$, а равенство*

$$E_* = \mu H_1(\Lambda_E) : S(C) \to T(A),$$

в котором μ имеет тот же смысл, что и в (7.10), определяет цепное преобразование, превращающее пару (S, E_*, T) в $\mathscr{F}$-связанную пару, которая удовлетворяет условию (ii) теоремы 7.2.

Доказательство. В силу замечаний о $H_1(\Gamma)$ $S(C)$ не зависит от выбора E_C, а также $S(1) = 1$. При умножении

$S(\gamma_1\gamma_2) = S(\gamma_1) S(\gamma_2)$. Если $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ — морфизм собственных коротких точных последовательностей, то $\Gamma\Lambda_E$ и $\Lambda_{E'}\Gamma_\gamma : E_C \to E'$ имеют общий член γ, поэтому преобразование E_* естественно. Свойство (ii) выполняется по построению.

Этим доказано, что из (i) в теореме 7.2 следует (ii), так как любая коуниверсальная слева пара $(S_0, E_\#, T)$ должна совпадать с построенной выше парой, а последняя удовлетворяет условию (ii). Это построение дает также теорему существования:

Теорема 7.4. *Если в категории $\mathcal{A}$ достаточно собственных проективных объектов, то каждый ковариантный аддитивный функтор $T: A \to \mathcal{R}$ имеет левый сателлит (S, E_*, T).*

Следствие 7.5. *Пусть $(S, E_\#, T)$ $\mathcal{P}$-связанная пара. Если для каждой $\mathcal{P}$-связанной пары $(S', E_\#, T)$ с тем же функтором T существует такое единственное естественное преобразование $f : S' \to S$, что $(f, 1) : (S', E_\#, T) \to (S, E_*, T)$ есть морфизм пар, то пара (S, E_*, T) $\mathcal{P}$-коуниверсальна слева.*

Доказательство. Использовать условия для сравнения пары (S, E_*, T) с левым сателлитом функтора T, который, как известно, существует и коуниверсален.

Двойственной к теореме 7.2 является

Теорема 7.6. *Если в категории $\mathcal{A}$ достаточно собственных инъективных объектов, то $\mathcal{P}$-связанная пара (T, E_*, S) ковариантных функторов $\mathcal{P}$-универсальна справа тогда и только тогда, когда каждая собственная короткая точная последовательность*

$$0 \to C \to J \to K \to 0, \qquad \mathcal{A},$$

с собственным инъективным объектом J индуцирует точную справа последовательность

$$T(J) \to T(K) \to S(C) \to 0, \qquad \mathcal{R}.$$

Кроме того, если дан функтор T, то функтор S с этим свойством однозначно определен; он называется *правым сателлитом* функтора T. Таким образом, каждый функтор T имеет левый сателлит (коуниверсальный) и правый сателлит (универсальный).

Доказательство. Двойственность обращает все стрелки одновременно и в $\mathcal{A}$, и в $\mathcal{R}$, заменяет «проективные объекты» на «инъективные», дает E_* от T к S и оставляет функторы T и S ковариантными.

$\mathcal{P}$-связанная пара (T, E^*, S) контравариантных функторов состоит из двух таких функторов $T, S : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ и функции, которая сопоставляет каждой собственной короткой точной последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ из $\mathcal{A}$ комплекс

$$T(C) \to T(B) \to T(A) \xrightarrow{E^*} S(C) \to S(B) \to S(A), \ \mathcal{R},$$

являющийся функтором аргумента E. Пара *универсальна справа* тогда и только тогда, когда для каждого естественного преобразования $f : T \to T'$ и каждой связанной пары $(T', E^\#, S')$ существует единственное естественное преобразование $g : S \to S'$, которое делает пару (f, g) морфизмом связанных пар.

Теорема 7.7. *При наличии достаточного числа собственных проективных объектов контравариантная пара (T, E^*, S) $\mathcal{P}$-универсальна справа тогда и только тогда, когда каждая собственная последовательность $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow C$ с собственным проективным объектом P индуцирует точную последовательность*

$$T(P) \to T(K) \to S(C) \to 0, \qquad \mathcal{R}.$$

Пример. Для фиксированного модуля D, $T(C) = \operatorname{Ext}^n(C, D)$, $S(C) = \operatorname{Ext}^{n+1}(C, D)$.

Доказательство. Теорема сводится к предшествующей, если мы заменим категорию $\mathcal{A}$ двойственной категорией $\mathcal{A}^{op}$. Напомним (I.7), что категория $\mathcal{A}^{op}$ имеет объекты A^*, соответствующие объектам A из $\mathcal{A}$, и морфизмы $\alpha^* : B^* \to A^*$, соответствующие морфизмам $\alpha : A \to B$ из $\mathcal{A}$, причем $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$. Таким образом, мономорфизмы из $\mathcal{A}$ становятся эпиморфизмами в $\mathcal{A}^{op}$, категория, двойственная абелевой, абелева, и класс, двойственный собственному классу $\mathcal{P}$ коротких точных последовательностей из $\mathcal{A}$, образует собственный класс в $\mathcal{A}^{op}$. Каждый ковариантный функтор $T: \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ определяет контравариантный функтор $T^*: \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{R}$, $T^*(A^*) = T(A)$. Далее, «достаточность инъективных объектов» становится «достаточностью проективных объектов». Все стрелки в $\mathcal{A}$-диаграммах обращаются, в $\mathcal{R}$-диаграммах остаются без изменения, и теорема 7.6 становится теоремой 7.7.

Аналогичное замещение в теореме 7.2 показывает, что контравариантная пара (S, E^*, T) коуниверсальна слева тогда и только тогда, когда последовательность $0 \to S(C) \to T(K) \to T(J)$ точна для каждой последовательности $C \rightarrowtail J \twoheadrightarrow K$. Тогда S есть левый сателлит T.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Назовем диаграмму $A_1 \rightleftarrows B \leftrightarrows A_2$ «декартовой», если она удовлетворяет обычным тождествам прямой суммы $\pi_1\iota_1 = 1 = \pi_2\iota_2$ и $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1$. Доказать, что аддитивный функтор переводит каждую декартову диаграмму в декартову и, обратно, любой функтор с этим свойством аддитивен.

2. Пусть функтор $T: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$, не предполагаемый аддитивным, $\mathscr{P}$-полуточен. Доказать, что он аддитивен (ср. упражнение 1 и предложение I.4.2).

3. Если функтор T ковариантен и $\mathscr{P}$-точен слева, то показать, что его левый сателлит равен нулю.

4. Если пара (S, E_*, T) коуниверсальна слева и функтор T $\mathscr{P}$-полуточен и аддитивен, то доказать точность последовательности (7.3) при условии, что в $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов.

5. Вывести теорему 7.6 из теоремы 7.2, заменив обе категории $\mathscr{A}$ и $\mathscr{R}$ двойственными.

§ 8. Связанные последовательности функторов

$\mathscr{P}$-связанная последовательность $\{T_n, E_n\}$ ковариантных функторов — это последовательность $(\ldots, T_n, E_n, T_{n-1}, E_{n-1}, \ldots)$ функторов T_n: $A \to \mathscr{R}$, в которой каждая пара (T_n, E_n, T_{n-1}) $\mathscr{P}$-связана; другими словами, такая последовательность сопоставляет каждой собственной короткой точной последовательности E из $\mathscr{A}$ комплекс

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1}(C) \xrightarrow{E_{n+1}} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \xrightarrow{E_n} T_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots, \tag{8.1}$$

являющийся ковариантным функтором аргумента E. Последовательность *положительна*, если $T_n = 0$ при $n < 0$, и *отрицательна*, если $T_n = 0$ при $n > 0$; в последнем случае мы обычно используем верхние индексы.

Положительные связанные последовательности могут быть описаны более непосредственно в терминах градуированных аддитивных категорий. Напомним (теорема 4.4), что категория $\mathscr{A}$ может быть вложена в градуированную аддитивную категорию $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ с теми же объектами и с элементами из $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{P}}(C, A)$ в качестве морфизмов степени n из C в A. Из категории $\mathscr{R}$ мы можем построить категорию $\mathscr{R}^+$ градуированных объектов из $\mathscr{R}$ с морфизмами отрицательных степеней. Подробнее, объект $\mathfrak{R}$ из $\mathscr{R}^+$ — это семейство $\{R_n\}$ объектов из $\mathscr{R}$ с $R_n = 0'$ при $n < 0$, а элемент из $\hom^k(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ — это морфизм $\mu: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ степени $-k$, т. е. семейство морфизмов $\{\mu_n : R_n \to R'_{n-k}\}$ из $\mathscr{R}$; умножение морфизмов определяется очевидным образом. Тогда $\mathscr{R}^+$ является градуированной аддитивной категорией. Если $\mathscr{R}$ — категория модулей над некоторым кольцом, то $\mathscr{R}^+$ — категория градуированных модулей над тем же кольцом с морфизмами отрицательных степеней.

Для градуированных категорий функторы определяются, как обычно, но обращается дополнительное внимание на степени морфизмов. Так, если $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ — градуированные аддитивные категории, то *ковариантный функтор* $\mathfrak{T}: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ сопоставляет каждому

объекту G из $\mathscr{G}$ объект $\mathfrak{T}(G)$ из $\mathscr{H}$ и каждому морфизму $\gamma: G_1 \to G_2$ степени d из $\mathscr{G}$ морфизм $\mathfrak{T}(\gamma): \mathfrak{T}(G_1) \to \mathfrak{T}(G_2)$ той же степени из $\mathscr{H}$, причем должны выполняться обычные условия $\mathfrak{T}(1_G) = 1_{\mathfrak{T}(G)}$ и $\mathfrak{T}(\gamma_1\gamma_2) = \mathfrak{T}(\gamma_1)\mathfrak{T}(\gamma_2)$ всякий раз, как определено произведение $\gamma_1\gamma_2$. Функтор $\mathfrak{T}$ аддитивен, если $\mathfrak{T}(\gamma_1 + \gamma_2) = \mathfrak{T}(\gamma_1) + \mathfrak{T}(\gamma_2)$ всякий раз, как определена сумма $\gamma_1 + \gamma_2$. *Естественное преобразование* $f: \mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}$ степени d — это функция, которая сопоставляет каждому объекту $G \in \mathscr{G}$ такой морфизм $f(G): \mathfrak{T}'(G) \to \mathfrak{T}(G)$ степени d из $\mathscr{H}$, что

$$\mathfrak{T}(\gamma)\, f(G_1) = (-1)^{(\deg \gamma)(\deg f)} f(G_2)\, \mathfrak{T}'(\gamma)$$

для каждого $\gamma: G_1 \to G_2$ из $\mathscr{G}$.

В частности, рассмотрим такие функторы из $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ в $\mathscr{R}^+$.

Предложение 8.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между ковариантными аддитивными функторами $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ и положительными $\mathscr{P}$-связанными последовательностями $\{T_n, E_n\}$ ковариантных аддитивных функторов $T_n: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$.*

Доказательство. Пусть задан функтор $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$. Функтор $\mathfrak{T}$ сопоставляет каждому объекту A объект $\{T_n(A)\}$ из $\mathscr{R}^+$, а каждому морфизму из $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$ — морфизм из $\mathscr{R}^+$. В частности, каждый морфизм $\alpha: A \to A'$ из $\mathscr{A}$ является морфизмом степени 0 в $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$, поэтому $\mathfrak{T}$ сопоставляет ему семейство морфизмов $\{T_n(\alpha): T_n(A) \to T_n(A')\}$ из $\mathscr{R}$; эти сопоставления превращают каждое отображение T_n в аддитивный функтор $T_n: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$. Далее, каждая собственная последовательность $E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ из $\mathscr{A}$ является морфизмом $E: C \to A$ степени 1 в категории $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A})$, поэтому E соответствует морфизм степени 1 в $\mathscr{R}^+$, т. е. семейство морфизмов $\{E_n = T_n(E): T_n(C) \to T_{n-1}(A)\}$ из $\mathscr{R}$. Правила умножения $\mathfrak{T}(E\gamma) = \mathfrak{T}(E)\mathfrak{T}(\gamma)$ и $\mathfrak{T}(\alpha E) = \mathfrak{T}(\alpha)\mathfrak{T}(E)$ показывают, что эти морфизмы E_n удовлетворяют условиям (7.2a), (7.2b) и (7.2c), при выполнении которых пара (T_n, E_n, T_{n-1}) становится связанной. Таким образом, $\mathfrak{T}$ определяет положительную $\mathscr{P}$-связанную последовательность функторов $\{T_n: \mathscr{A} \to \mathscr{R}\}$.

Обратно, каждая такая связанная последовательность функторов определяет функции $\mathfrak{T}(A) = \{T_n(A)\}$ и $\mathfrak{T}(\alpha)$, $\mathfrak{T}(E)$ для морфизмов степени 0 и 1 в $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}$. Теперь морфизм более высокой степени в $\mathscr{E}_{\mathscr{P}}$ — это в точности класс конгруэнтности длинных точных последовательностей S. Каждая такая последовательность является произведением Йонеды коротких точных последовательностей E, так что функция $\mathfrak{T}(E)$ определяет каждый морфизм $\mathfrak{T}(S)$; правила (7.2a), (7.2b) и (7.2c) показывают, что две конгруэнтные длинные точные последовательности определяют один и тот же морфизм $\mathfrak{T}(S)$; действительно, этот морфизм $\mathfrak{T}(S)$ является «итерированным связывающим гомоморфизмом», определенным длинной точной последовательностью S. Наконец, чтобы убедиться в аддитивности функтора $\mathfrak{T}$, мы должны доказать, что $\mathfrak{T}(E+E') = \mathfrak{T}(E)+\mathfrak{T}(E')$. Это вытекает из определения сложения $E+E' = \nabla_A(E\oplus E')\Delta_C$ и правила $(E\oplus E')_n \cong E_n \oplus E'_n$ для связывающих морфизмов, которое является следствием условия (7.2) для связанных пар.

Тем самым установлено указанное в теореме взаимно однозначное соответствие. То же самое применимо к отображениям:

Предложение 8.2. *Если $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ есть два ковариантных функтора, то естественное преобразование $\mathfrak{f}: \mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}$ степени d является семейством естественных преобразований $\{f_n: T'_n \to T_{n+d}: \mathscr{A} \to \mathscr{R}\}$, которые коммутируют со всеми связывающими морфизмами:*

$$T_{n+d}(E)\,f_n(C) = f_{n-1}(A)\,T'_n(E),\quad E: A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C. \tag{8.2}$$

Другими словами, для $d=0$, $\mathfrak{f}$ есть цепное преобразование комплекса (8.1) для функтора $\mathfrak{T}'$ в такой же комплекс для $\mathfrak{T}$.

Ковариантный функтор $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ называется *коуниверсальным*, если для каждого ковариантного функтора $\mathfrak{T}': \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ и для каждого естественного преобразования $f_0: T'_0 \to T_0$ функторов, определенных в $\mathscr{A}$ на компонентах степени 0, существует единственное естественное преобразование $\mathfrak{f}: \mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}$ степени 0, продолжающее f_0. Другими словами, коуниверсальная положительная связанная последовательность ковариантных функторов — это последовательность, начинающаяся с функтора T_0, продолжающаяся влево и коуниверсальная для всех таких связанных последовательностей. Значит, T_0 однозначно с точностью до естественного изоморфизма определяет $\mathfrak{T}$.

Теорема 8.3. *Пусть в категории $\mathscr{A}$ достаточно проективных объектов. Ковариантный функтор $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ коуниверсален тогда и только тогда, когда для каждой собственной короткой точной последовательности $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow C$ из $\mathscr{A}$ с собственным проективным объектом P последовательность*

$$0 \to T_n(C) \to T_{n-1}(K) \to T_{n-1}(P),\ \mathscr{R}, \tag{8.3}$$

точна для каждого $n>0$.

Доказательство. Если выполнено это условие и дан некоторый функтор $\mathfrak{T}': \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ вместе с некоторым естественным преобразованием $f_0: T'_0 \to T_0$, то мы построим рекурсией по n требуемые естественные преобразования $f_n: T'_n \to T_n$. Если уже построены $f_0, \ldots, f_{n-1}$, коммутирующие со связывающими гомоморфизмами, то условие (8.3) показывает в силу теоремы 7.2, что пара (T_n, E_n, T_{n-1}) коуниверсальна слева, поэтому можно построить единственное преобразование $f_n: T'_n \to T_n$, для которого $E_n f_n = f_{n-1}E'_n$. Следовательно, функтор $\mathfrak{T}$ коуниверсален.

Обратно, предположим, что функтор $\mathfrak{T}$ коуниверсален. Исходя из T_0, мы построим левый сателлит S_1 и, продолжая, построим каждый функтор $S_n: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ как левый сателлит функтора S_{n-1}. Результирующая связанная последовательность удовлетворяет условию (8.3) и, следовательно, коуниверсальна; поэтому она должна совпадать с единственным коуниверсальным функтором $\mathfrak{T}$ для данного функтора T_0. Следовательно, любой коуниверсальный функтор $\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию (8.3). Это доказательство устанавливает также теорему существования.

Теорема 8.4. *Пусть в $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов. Каждый ковариантный функтор $T_0: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ является компонентой степени 0 для коуниверсального функтора $\mathfrak{T}: \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$, n-я компонента T_n которого есть n-й итерированный левый сателлит функтора T_0.*

Поскольку последовательность $0 \rightarrowtail P \twoheadrightarrow P$ точна для каждого собственного проективного объекта, из условия (3.3) следует $T_n(P) = 0$ для каждого $n>0$. В теореме 8.3 содержится более слабый результат.

Следствие 8.5. *Если функтор $\mathfrak{T}$ удовлетворяет условию $T_n(P) = 0$ для каждого проективного P и для каждого $n>0$ и если длинная последовательность (8.1) точна для каждой собственной точной последовательности E из $\mathscr{A}$, то $\mathfrak{T}$ коуниверсален.*

В частности, если $\mathscr{A}$ — категория всех левых модулей над некоторым кольцом R и если G — фиксированный правый R-модуль, то теорема V.8.5 утверждает, что функторы $T_n(A) = \operatorname{Tor}_n^R(G, A)$ удовлетворяют этому условию.

Следствие 8.6. *Если функтор $U: \mathscr{R} \to \mathscr{R}'$ точен и ковариантен, а $\{T_n, E_n\}$ — коуниверсальная положительная связанная последовательность, то такова же и последовательность $\{UT_n, UE_n\}$.*

Доказательство. Поскольку $E_n: T_n(C) \to T_{n-1}(A)$ является морфизмом из $\mathscr{R}$, а U — функтор, $UE_n: UT_n(C) \to UT_{n-1}(A)$ является морфизмом из $\mathscr{R}'$. Поскольку U сохраняет точность, условие (8.3) для коуниверсальности выполняется.

Замечание. Если функтор U не точен, то описание левого сателлита UT_0 в терминах U и T_0 включает важную спектральную последовательность (Картан — Эйленберг XVI, § 3; Гротендик [1957], стр. 147).

Чтобы иметь дело с отрицательными связанными последовательностями

$$\cdots \to T^0(C) \to T^1(A) \to T^1(B) \to T^1(C) \to T^2(A) \to \cdots$$

ковариантных функторов $T^n : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$, мы используем градуированную категорию $\mathscr{R}^-$; ее объекты $\{R^n\}$ — это семейства объектов из $\mathscr{R}$, причем $R^n = 0$ при $n < 0$; ее морфизмы μ степени $k \geqslant 0$ это семейства $\{\mu_n : R^n \to R'^{n+k}\}$ морфизмов из $\mathscr{R}$. Ковариантный функтор $\mathfrak{T} : \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^-$ является теперь отрицательной связанной последовательностью функторов $T^n : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$, почти как в предложении 8.1.

Контравариантные функторы требуют внимания к знаку. Так, если $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ — градуированные аддитивные категории, то контравариантный функтор $\mathfrak{T} : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ сопоставляет каждому объекту G объект $\mathfrak{T}(G)$ из $\mathscr{H}$ и каждому морфизму $\gamma : G_1 \to G_2$ из $\mathscr{G}$ — морфизм $\mathfrak{T}(\gamma) : \mathfrak{T}(G_2) \to \mathfrak{T}(G_1)$ той же степени в $\mathscr{H}$, причем $\mathfrak{T}(1_G) = 1_{\mathfrak{T}(G)}$ и

$$\mathfrak{T}(\gamma_1\gamma_2) = (-1)^{(\deg \gamma_1)(\deg \gamma_2)}\, \mathfrak{T}(\gamma_2)\, \mathfrak{T}(\gamma_1) \tag{8.4}$$

в соответствии с правилом знаков. Естественное преобразование $\mathfrak{f} : \mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}$ степени d является функцией, которая сопоставляет каждому объекту G из $\mathscr{G}$ морфизм $\mathfrak{f}(G) : \mathfrak{T}'(G) \to \mathfrak{T}(G)$ степени d из $\mathscr{H}$ таким образом, что

$$\mathfrak{T}(\gamma)\, \mathfrak{f}(G_2) = (-1)^{(\deg \gamma)(\deg \mathfrak{f})}\, \mathfrak{f}(G_1)\, \mathfrak{T}'(\gamma);$$

т. е., за исключением знака, обычное правило.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что условие $T_n(P) = 0$ нельзя опустить в следствии 8.5: использовать $T'_n(A) = T_n(A) \oplus T_{n-1}(A)$.

2. Описать контравариантный аддитивный функтор $\mathfrak{G} : \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^+$ как подходящую связанную последовательность функторов из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{R}$.

§ 9. Производные функторы

Стандартный метод состоит в следующем: нужно взять резольвенту, применить к ней ковариантный функтор $T: \mathscr{A} \to \mathscr{R}$, взять гомологию результирующего комплекса. При этом получается связанная последовательность функторов, называемых производными функторами функтора T.

Подробнее, пусть в категории $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов. Каждый объект A имеет тогда собственную проективную резольвенту $\varepsilon : X \to A$. Если $\varepsilon' : X' \to A'$ есть вто-

рая такая резольвента, то теорема сравнения накрывает каждый морфизм $\alpha : A \to A'$ цепным преобразованием $f : X \to X'$, и любые два таких преобразования гомотопны.

Поскольку функтор T аддитивен, он переводит гомотопии в гомотопии, и поэтому индуцированное цепное преобразование $T(f) : T(X) \to T(X')$ в $\mathscr{R}$ определено с точностью до гомотопии. Следовательно, формула $L_n(A) = H_n(T(X))$ определяет функцию от A, не зависящую от выбора X, а формула $L_n(\alpha) = H_n(T(f)) : L_n(A) \to L_n(A')$ превращает L_n в ковариантный функтор $\mathscr{A} \to \mathscr{R}$. Он называется *$n$-м левым производным* функтором функтора T.

Пусть теперь $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ есть любая собственная короткая точная последовательность из $\mathscr{A}$. Возьмем допустимую проективную резольвенту $\varepsilon: K \to E$ в категории коротких точных последовательностей, описанную в теореме 6.4; эта резольвента равносильна короткой точной последовательности $X \rightarrowtail W \twoheadrightarrow Y$ комплексов из $\mathscr{A}$, где $X \to A$, $W \to B$ и $Y \to C$ — собственные проективные резольвенты; кроме того, $W_n = X_n \oplus Y_n$ для каждого n. Так как функтор T аддитивен, то последнее равенство показывает, что $T(X) \rightarrowtail T(W) \twoheadrightarrow T(Y)$ является короткой точной последовательностью комплексов в $\mathscr{R}$, которая дает связывающие гомоморфизмы $H_n(T(Y)) \to H_{n-1}(T(X))$ для $n > 0$. Поскольку X — резольвента A и Y — резольвента C, это есть гомоморфизм $E_* = L_n(E) : L_n(C) \to L_{n-1}(A)$. Общая теорема сравнения для допустимых резольвент (теорема IX.4.3) показывает его независимость от выбора резольвенты K и показывает, что $L_n(E)$ есть естественное преобразование функторов аргумента E.

Теорема 9.1. *Для каждого аддитивного ковариантного функтора $T : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ левые производные функторы $L_n : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ и связывающие гомоморфизмы $L_n(E)$ образуют положительную связанную последовательность функторов, в которой функтор L_0 $\mathscr{P}$-точен справа. Эта последовательность коуниверсальна относительно начальной компоненты L_0. Если функтор T $\mathscr{P}$-точен справа, то $L_0 = T$.*

Доказательство. Если P — собственный проективный объект, то резольвента $P \to P$ показывает, что $L_n(P) = 0$ при $n > 0$. Для каждой собственной точной последовательности E точность длинной последовательности (8.1) для $L_n = T_n$ вытекает из обычной длинной точной последовательности гомологий комплексов $T(X) \rightarrowtail T(W) \twoheadrightarrow T(Y)$. В частности, функтор L_0 точен справа. Связанная последовательность $\{L_n, L_n(E)\}$ удовлетворяет условиям следствия 8.5 и, следовательно, коуниверсальна.

Предположим, что исходный функтор T $\mathscr{P}$-точен справа. В любой резольвенте часть $X_1 \to X_0 \to A \to 0$ точна справа, следовательно, точна последовательность $T(X_1) \to T(X_0) \to T(A) \to 0$. Отсюда вытекает естественный изоморфизм $L_0(A) = H_0(T(X)) \cong T(A)$.

Эта теорема представляет интерес в случае точности справа функтора T. Тогда ее можно считать или характеризацией последовательности левых производных функторов функтора T как коуниверсальной последовательности при $L_0 = T$, или утверждением о том, что левые сателлиты функтора T и их связывающие гомоморфизмы могут быть вычислены с помощью резольвент.

Чтобы получить определенный производный функтор L_n, нужно выбрать резольвенту X для каждого объекта A. Такое широкое использование аксиомы выбора законно в малых категориях $\mathcal{A}$ и возможно во всех тех примерах категорий, в которых имеется канонический способ выбора проективной резольвенты. Если категория $\mathcal{R}$, являющаяся областью значений, не есть категория модулей, а является произвольной абелевой категорией, то в приведенном выше доказательстве требуется знание точной гомологической последовательности с ее связывающими гомоморфизмами для любой абелевой категории. Мы уже указывали весьма бегло в § 3, как этого можно достичь, используя аддитивные отношения.

Давайте теперь подытожим свойства производных функторов в нашем случае.

I. Ковариантный функтор $\mathfrak{T} : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}^+$ является положительной связанной последовательностью $\{T_n, E_n\}$, состоящей из ковариантных функторов $T_n : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ и гомоморфизмов $E_n : T_n(C) \to T_{n-1}(A)$, естественных по аргументу E. Он сопоставляет каждой собственной последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ комплекс

$$\ldots \to T_n(A) \to T_n(B) \to T_n(C) \xrightarrow{E_n} T_{n-1}(A) \to \ldots \qquad (9.1)$$

из $\mathcal{R}$. Предположим, что в $\mathcal{A}$ достаточно проективных объектов. Каждый $\mathcal{P}$-точный справа ковариантный функтор $T : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ имеет левый производный функтор $\mathfrak{T} : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}^+$, который определяется функтором T с точностью до естественного изоморфизма любым одним из следующих трех условий:

(Ia) $T_0 = T$ и функтор $\mathfrak{T}$ коуниверсален;

(Ib) $T_0 = T$, последовательность (9.1) точна и $T_n(P) = 0$ при $n > 0$ для каждого собственного проективного объекта P;

(Ic) $T_n(A) = H_n(T(X))$ для некоторой собственной проективной резольвенты $\varepsilon : X \to A$, а морфизм E_n вычисляется подобным же образом с помощью короткой точной последовательности таких резольвент.

Эти рассмотрения можно дуализировать: для этого нужно заменить одну или обе категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}$ двойственными. Например, замена категории $\mathcal{A}$ приводит к следующим результатам.

II. Пусть $T : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ является $\mathcal{P}$-точным справа контравариантным функтором, и пусть в категории $\mathcal{A}$ достаточно собственных инъективных объектов. Для каждого объекта A выберем собственную инъективную резольвенту $\varepsilon : A \to Y$. Здесь Y—отрицательный комплекс $Y^0 \to Y^1 \to \ldots$; применение контравариантного функтора T дает положительный комплекс $T(Y) : T(Y^0) \leftarrow \leftarrow T(Y^1) \leftarrow \ldots$; т. е. $[T(Y)]_n = T(Y^n)$. Его гомология $H_n(T(Y)) = T_n(A)$ есть n-й левый производный функтор T_n функтора T.

Для каждой собственной последовательности E корезольвенты E дают соответствующий связывающий гомоморфизм $E_n : T_n(A) \to T_{n-1}(C)$, естественный по аргументу E. Эти функторы и гомоморфизмы образуют положительную связанную последовательность $\{T_n, E_n\}$ контравариантных функторов, которая сопоставляет каждой собственной последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ комплекс

$$\ldots \to T_n(C) \to T_n(B) \to T_n(A) \xrightarrow{E_n} T_{n-1}(C) \to \cdots \qquad (9.2)$$

из $\mathcal{R}$. Эта последовательность $\{T_n, E_n\}$ может быть описана также как контравариантный функтор $\mathfrak{T} : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}^+$. Если дан точный справа функтор $T: \mathcal{A} \to \mathcal{R}$, то его левые производные функторы могут быть охарактеризованы или своим построением из инъективных резольвент, или одним из следующих свойств:

(IIa) $T_0 = T$ и функтор $\mathfrak{T}$ коуниверсален, т. е. если задан функтор $\mathfrak{T}' : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}^+$, то каждое естественное преобразование $f_0 : T'_0 \to T_0$ продолжается до единственного естественного преобразования $\mathfrak{f}: \mathfrak{T}' \to \mathfrak{T}$;

(IIb) $T_0 = T$, последовательность (9.2) всегда точна и $T_n(J) = 0$ при $n > 0$ для каждого собственного инъективного объекта J.

Категорная дуализация I (заменить $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}^{op}$ и $\mathcal{R}$ на $\mathcal{R}^{op}$) такова:

III. Пусть $T : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ есть $\mathcal{P}$-точный слева и ковариантный функтор (например, $T(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(G, A)$). Его правые производные функторы — это функторы $T^n(A) = H^n(T(Y))$, где $\varepsilon : A \to Y$ есть собственная инъективная резольвента (предполагается достаточность числа инъективных объектов). Вместе с соответствующими связывающими гомоморфизмами они образуют отрицательную связанную последовательность ковариантных функторов $T^n: \mathcal{A} \to \mathcal{R}$, которая сопоставляет каждой последовательности E комплекс

$$\cdots \to T^{n-1}(G) \xrightarrow{E^n} T^n(A) \to T^n(B) \to T^n(C) \to \cdots \qquad (9.3)$$

из $\mathcal{R}$, т. е. является ковариантным функтором $T : \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{R}^-$.

Функторы T^n характеризуются в терминах T любым из следующих свойств:

(IIIa) $T^0 = T$ и функтор $\mathfrak{T}$ универсален, т. е. если дан функтор $\mathfrak{T}' : \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^-$, то каждое естественное преобразование $f^0 : T^0 \to T'^0$ продолжается до единственного преобразования $\mathfrak{f} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}'$;

(IIIb) $T^0 = T$, последовательность (9.3) точна и $T^n(J) = 0$ при $n > 0$ для каждого инъективного объекта J.

Наконец, заменим $\mathscr{R}$ на $\mathscr{R}^{op}$ в I.

IV. Пусть $T : \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ есть $\mathscr{P}$-точный слева контравариантный функтор (например, $T(A) = \operatorname{Hom}_R(A, G)$). Предположим, что в $\mathscr{A}$ достаточно собственных проективных объектов. Проективная резольвента $\varepsilon : X \to A$ порождает отрицательный комплекс $T(X)$ в $\mathscr{R}$ и, следовательно, производные функторы $T^n(A) = H^n(T(X))$ и связывающие гомоморфизмы, которые образуют отрицательную связанную последовательность $\{T^n, E^n\}$; при этом каждой последовательности E отвечает комплекс

$$\ldots \to T^{n-1}(A) \xrightarrow{E^n} T^n(C) \to T^n(B) \to T^n(A) \to \ldots, \qquad (9.4)$$

т. е. получается контравариантный функтор $\mathfrak{T} : \mathscr{E}_{\mathscr{P}}(\mathscr{A}) \to \mathscr{R}^-$, который характеризуется одним из свойств:

(IVa) $T^0 = T$ и функтор $\mathfrak{T}$ универсален;

(IVb) $T^0 = T$ последовательность (9.4) точна и $T^n(P) = 0$ при $n > 0$ для каждого проективного объекта P.

Суммируем эти результаты в следующей таблице (примеры указаны с фиксированным модулем G):

T_0	Вариантность	Производные	$\mathfrak{T}$	Резольвента	Тип $T_n(A)$
I. Точный справа	Ко	Левые	Коуниверсальный	Проективная	$\operatorname{Tor}^n(G, A)$
II. Точный справа	Контра	Левые	Коуниверсальный	Инъективная	?
III. Точный слева	Ко	Правые	Универсальный	Инъективная	$\operatorname{Ext}^n(G, A)$
IV. Точный слева	Контра	Правые	Универсальный	Проективная	$\operatorname{Ext}^n(A, G)$

Таким образом, изменение вариантности или изменение точности слева на точность справа приводит к перестановке используемых типов резольвент.

Например, если Λ является $\mathbf{K}$-алгеброй, $\mathscr{A}$ — категория левых Λ-модулей, $\mathscr{P}$ — класс $\mathbf{K}$-расщепляющихся коротких точных последовательностей Λ-модулей и $\mathscr{R}$ — категория $\mathbf{K}$-модулей, то $\operatorname{Hom}_\Lambda(C, A)$ есть точный слева функтор. Как функтор только аргумента C, он контравариантен (случай IV); его правые $\mathscr{P}$-производные функторы — это $\operatorname{Ext}^n_{(\Lambda, \mathbf{K})}(C, A)$. Как функтор аргумента A, $\operatorname{Hom}_\Lambda$ ковариантен (случай III); его правые $\mathscr{P}$-производные функторы снова задаются последовательностью функторов $\operatorname{Ext}^n_{(\Lambda, \mathbf{K})}(C, A)$, в этом случае со связывающими гомоморфизмами для второго аргумента A.

Замечания. Характеризация функторов. Для категорий модулей точные справа или слева аддитивные функторы часто даются только обычными функторами $\otimes$ и Hom. Именно (Уоттс [1960], Эйленберг [1960]): если C — фиксированный S-R-бимодуль, то тензорное умножение на C левых R-модулей $_{\mathscr{R}}A$ дает ковариантный функтор $T_C(A) = C \otimes_{\mathscr{R}} A$, точный справа и переводящий (бесконечные) прямые суммы в прямые суммы. Любой функтор T с этими свойствами из категории R-модулей в категорию S-модулей имеет указанный вид для некоторого модуля C, а именно для $C = T(R)$. Точно также любой точный слева контравариантный функтор T из категории R-модулей в категорию S-модулей, который превращает (бесконечные) прямые суммы в полные прямые произведения, естественно эквивалентен функтору $T(A) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(A, C)$ для некоторого левого $(R \otimes S)$-модуля C (вновь $C = T(R)$). Наконец (Уоттс [1960]), любой ковариантный точный слева функтор из категории R-модулей в категорию абелевых групп, который перестановочен с обратными пределами, имеет вид $T(A) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(C, A)$ для подходящего C. Митчелл [1962] обобщил эти теоремы на подходящие абелевы категории.

Бифункторы. Пусть $T_0(C, A)$ есть бифунктор, аддитивный и точный справа по каждому переменному в отдельности. Заменим оба аргумента проективными резольвентами и возьмем полный комплекс результирующего бикомплекса; тогда его гомология дает левые производные функторы $T_n(C, A)$, как, например, для $\operatorname{Tor}_n(C, A)$ как бифунктора (теорема V.9.3). Этот и связанные с ним случаи, отличающиеся вариантностью, более детально рассмотрены Картаном и Эйленбергом. Эта теория не нужна для функтора $C \otimes A$, потому что этот бифунктор становится точным, когда один из аргументов замещается проективным объектом, так что производные функторы можно построить с помощью случая одного переменного. Подходящий пример — это трифунктор $C \otimes B \otimes A$ для трех модулей над коммутативным кольцом, который нужно рассматривать как функтор от двух переменных. Его производные функторы, называемые Trip_n, встречаются в формулах Кюннета для гомологии тензорного произведения трех комплексов (Маклейн [1960]). До настоящего времени не существует, по-видимому, способа охарактеризовать производные функторы от двух и большего числа переменных «универсальными» свойствами, или «аксиомами». Например, подходящее определение тензорного произведения двух абелевых категорий позволило бы свести бифункторы к функторам от одного переменного.

Другие построения производных функторов. Если T_0 — точный справа ковариантный функтор, определенный в категории всех модулей, то каждая последовательность $S \in \operatorname{Ext}^n(C, A)$ дает итерированный связывающий гомоморфизм $S_* : T_n(C) \to T_0(A)$, так что каждый элемент $t \in T_n(C)$ порождает естественное преобразование $\operatorname{Ext}^n(C, A) \to T_0(A)$ функторов аргумента A. Действительно, $T_n(C)$ можно определить (Ионеда [1960], Хилтон — Рис [1961]) как

$$T_n(C) = \operatorname{Nat} \hom_A (\operatorname{Ext}^n(C, A), T(A)).$$

Тем самым дается другое определение периодических умножений. Мы уже отмечали, что аддитивная категория является «кольцоидом» (в ней выполнены обычные аксиомы кольца, но умножение не всегда определено). В том же смысле каждый ковариантный аддитивный функтор T из $\mathscr{A}$ в категорию абелевых групп является левым «$\mathscr{A}$-модулоидом» (аксиомы для левого модуля над кольцом; умножения не всегда определены), а контравариантный функтор S — это правый $\mathscr{A}$-модулоид. Ионеда [1960] определил соответствующее тензорное произведение $S \otimes_{\mathscr{A}} T$ и использовал его для построения сателлитов. Пусть опять T — контравариантный аддитивный функтор. Короткие точные последовательности $E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, оканчивающиеся фиксированным объектом C, можно частично упорядочить: $E' \leqslant E$, если существует морфизм $(\alpha, \beta, 1_C) : E' \to E$; тогда эти последовательности E образуют «направленный» класс; прямой предел ядер отображений $T(A) \to T(B)$, взятый по этому направленному классу, дает правый сателлит функтора T (Буксбаум [1960]), определенный таким способом без предположения о существовании достаточного числа проективных объектов. Это построение было подвергнуто дальнейшему изучению Амицуром [1961]; Рёрль [1962] установил теорему существования сателлитов для полуточных функторов и применил ее к теории пучков. Для любого аддитивного функтора, который не полуточен, нужно различать производные функторы, сателлиты и косателлиты; их взаимосвязи изучаются в работе Батлера и Хоррокса [1961].

Производные функторы неаддитивных функторов изучались Дольдом и Пуппе [1961], с использованием итерированных B-конструкций. В самом деле, группы гомологий $H_{n+k}(\Pi, n; G)$ группы Π дают много примеров неаддитивных функторов (Эйленберг — Маклейн [1954a]). Классическим примером является функтор Γ Дж. Уайтхеда [1950]. Для каждой абелевой группы A, $\Gamma(A)$ — это абелева группа с образующими $[\gamma(a) \mid a \in A]$ и определяющими соотношениями $\gamma(-a) = \gamma(a)$ и

$$\gamma(a+b+c) - \gamma(a+b) - \gamma(a+c) - \gamma(b+c) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = 0.$$

Эти соотношения верны для «возведения в квадрат» $\gamma(a) = a^2$.

§ 10. Умножения и универсальность

Универсальные свойства производных функторов можно часто использовать для построения гомоморфизмов типа $\cup$-умножения для когомологии группы П. В схеме обозначений § 7 возьмем в качестве $\mathscr{R}$ категорию абелевых групп, в качестве $\mathscr{A}$ — категорию всех левых П-модулей и в качестве $\mathscr{P}$ — класс Z-расщепляющихся коротких точных последовательностей П-модулей. Мы сначала покажем, что в категории $\mathscr{A}$ имеется достаточно собственных инъективных объектов.

Для каждой абелевой группы M построим П-модуль $J_M = \operatorname{Hom}_Z(Z(\Pi), M)$ с левыми операторами, определенными для каждого $f \in J_M$ формулой $(xf)r = f(rx)$, где $x \in \Pi$, $r \in Z(\Pi)$. Это левые операторы, индуцированные правой П-модульной

структурой группового кольца $Z(\Pi)$. Определим гомоморфизм $e = e_M : J_M \dashrightarrow M$ абелевых групп, положив $e(f) = f(1)$ для каждого $f : Z(\Pi) \dashrightarrow M$. Он имеет обычное коуниверсальное свойство, двойственное свойству из предложения VI.8.2.

Л е м м а 10.1. *Если A — левый П-модуль и если $h : A \dashrightarrow M$ — гомоморфизм абелевых групп, то существует такой единственный П-модульный гомоморфизм $\gamma : A \to J_M$, что $e\gamma = h$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим диаграмму $A \xrightarrow{h} M \xleftarrow{e} J_M$.

Для выполнения равенства $e\gamma = h$ требуется, чтобы для каждого $a \in A$ и каждого $x \in \Pi$ имело место равенство

$$h(xa) = e[\gamma(xa)] = [\gamma(xa)]1 = [x(\gamma a)]1 = (\gamma a)x.$$

Обратно, если определить γ формулой $(\gamma a)x = h(xa)$, то γ будет П-гомоморфизмом и будет удовлетворять равенству $e\gamma = h$.

Стандартным рассуждением теперь показывается, что каждый модуль J_M относительно инъективен. Кроме того, если A — любой П-модуль, то по лемме имеется единственный П-модульный гомоморфизм $\gamma : A \to \operatorname{Hom}_Z(Z(\Pi), A) = J_A$, для которого $e\gamma = 1_A$. Следовательно, γ — собственный мономорфизм и $\gamma : A \to J_A$ вкладывает каждый модуль A в собственный инъективный объект. Значит, имеется достаточно собственных инъективных объектов.

Пусть для каждого П-модуля C C^Π обозначает подгруппу П-инвариантных элементов из C. Ковариантные функторы

$$H^p(G) = H^p(\Pi, C) = \operatorname{Ext}^p_{Z(\Pi), Z}(Z, C)$$

имеют связывающие гомоморфизмы для каждой собственной последовательности E:

$$E_* : H^p(C) \to H^{p+1}(A), \quad E : A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C,$$

определенные, например, с помощью умножения Ионеды и дающие обычную точную последовательность. Кроме того, $H^p(J) = 0$ при $p > 0$ для каждого собственного инъективного объекта J (любое расширение собственного инъективного объекта расщепляется). Следовательно, $H^p(C)$ — правые производные функторы функтора $H^0(C) = C^\Pi$.

Л е м м а 10.2. *Для каждого фиксированного целого числа q и каждого фиксированного П-модуля C' функторы $H^p(C) \otimes H^q(C')$ образуют компоненты универсальной последовательности функторов с $\mathscr{P}$-связывающими гомоморфизмами $E_* \otimes 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E_0 : A \rightarrowtail J \twoheadrightarrow K$ есть любая Z-расщепляющаяся короткая точная последовательность с собственным инъективным объектом J. При $p > 0$ последовательность

$H^{p-1}(J) \to H^{p-1}(K) \to H^p(A) \to 0$ ($= H^p(J)$) точна. Так как тензорное умножение над Z точно справа, то точна последовательность

$$H^{p-1}(J)\otimes H^q(C') \to H^{p-1}(K)\otimes H^q(C') \to H^p(A)\otimes H^q(C') \to 0.$$

Это условие параллельно условию (8.3) в теореме, двойственной теореме 8.3; следовательно, $H^p(C)\otimes H^q(C')$ — универсальная последовательность для заданной начальной компоненты $H^0(C)\otimes H^q(C')$.

Лемма 10.3. *Если произведение $C\otimes C'$ имеет диагональную Π-модульную структуру $[x(c\otimes c') = xc\otimes xc'$ для $x\in\Pi]$, то при фиксированных q и C' функторы $H^{p+q}(C\otimes C')$ аргумента C образуют $\mathfrak{F}$-связанную последовательность функторов со связывающими гомоморфизмами $(E\otimes C')_*$.*

Доказательство. Поскольку последовательность E Z-расщепляется и точна, тензорное произведение

$$E\otimes C' : A\otimes C' \rightarrowtail B\otimes C' \twoheadrightarrow C\otimes C'$$

точно и Z-расщепляется, следовательно, оно определяет требуемые (естественные) связывающие отображения. Аналогично при фиксированных p и C функторы $H^p(C)\otimes H^q(C')$ образуют универсальную $\mathfrak{F}$-связанную последовательность, если связывающие гомоморфизмы $1\otimes E'_*$ определяются с обычным знаком:

$$(1\otimes E'_*)(\sigma\otimes\sigma') = (-1)^p\sigma\otimes E'_*\sigma', \quad \sigma\in H^p(C), \quad \sigma'\in H^q(C'). \qquad (10.1)$$

Кроме того, функторы $H^{p+q}(C\otimes C')$ образуют $\mathfrak{F}$-связанную последовательность функторов аргумента C' со связывающими гомоморфизмами $(C\otimes E')_*$. При $p=0$, $H^0(C) = C^{\Pi}$ есть подгруппа Π-инвариантных элементов из C. Теперь если $c\in C^{\Pi}$ и $c'\in C'^{\Pi}$, то $c\otimes c' \in (C\otimes C')^{\Pi}$, поэтому тождественное отображение индуцирует гомоморфизм $C^{\Pi}\otimes C'^{\Pi} \to (C\otimes C')^{\Pi}$.

Теорема 10.4. *Существует единственное семейство групповых гомоморфизмов*

$$f^{p,q} : H^p(C)\otimes H^q(C') \to H^{p+q}(C\otimes C'), \qquad (10,2)$$

определенных для всех $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$ и всех Π-модулей C и C', для которого:

(i) *$f^{0,0}$ — отображение, индуцированное тождественным отображением, как отмечено выше;*

(ii) *гомоморфизм $f^{p,q}$ естествен по C и C', $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$;*

(iii) $f^{p+1,q}(E_*\otimes 1) = (E\otimes C)_* f^{p,q}$, $p\geqslant 0, q\geqslant 0$;

(iv) $f^{p,q+1}(1\otimes E'_*) = (C\otimes E')_* f^{p,q}$, $p\geqslant 0, q\geqslant 0$.

Последние два свойства выполняются для всех Z-расщепляющихся коротких точных последовательностей E и E'.

Последние два условия означают, что отображения f коммутируют со связывающими гомоморфизмами.

Доказательство. Мы уже определили $f^{0,0}$. При $q=0$ и фиксированном C' левые члены из (10.2) образуют $\mathfrak{F}$-универсальную последовательность, а правые члены $\mathfrak{F}$-связанную последовательность. Следовательно, отображения $f^{p,0}$, естественные относительно C, существуют, единственны и удовлетворяют условию (iii) при $q=0$. Эти отображения естественны также и по аргументу C'. В самом деле, рассмотрим гомоморфизм $\gamma : C'\to D'$. Тогда $\gamma f^{p,0}$ и $f^{p,0}\gamma$ — два естественных преобразования $\mathfrak{F}$-универсального функтора $H^p(C)\otimes H^0(C')$ в $\mathfrak{F}$-связанный функтор $H^p(C\otimes D')$, которые совпадают при $p=0$ и, значит, совпадают при всех p.

Теперь зафиксируем p и C. В (10.2) отображения $f^{p,q}$ заданы для $q=0$ и в силу (iv) должны составлять естественное преобразование универсальной последовательности в связанную. Следовательно, они существуют и единственны; как и раньше, эти отображения естественны относительно C.

Наше построение устанавливает (iii) только для $q=0$; остается доказать выполнение этого условия при $q>0$. При фиксированном p пусть φ^q обозначает левую часть, а ψ^q — правую часть из (iii). Это будут отображения

$$\varphi^q,\ \psi^q : H^p(C)\otimes H^q(C') \to H^{p+q+1}(A\otimes C')$$

универсальной последовательности функторов от C' в связанную последовательность. Они антикоммутируют со связывающими гомоморфизмами, определяемыми последовательностью E'. Действительно, в силу (iv)

$$(A\otimes E')_*\varphi^q = (A\otimes E')_* f^{p+1,q}(E_*\otimes 1) = f^{p+1,q+1}(1\otimes E'_*)\cdot(E_*\otimes 1),$$

$$\varphi^{q+1}(1\otimes E'_*) = f^{p+1,q+1}(E_*\otimes 1)(1\otimes E'_*),$$

и $(1\otimes E'_*)(E_*\otimes 1) = -(E_*\otimes 1)(1\otimes E'_*)$ по определению (10.1). Точно так же

$$(A\otimes E')_*\psi^q = (A\otimes E')_*(E\otimes C')_* f^{p,q},$$

$$\psi^{q+1}(1\otimes E'_*) = (E\otimes A')_* f^{p,q+1}(1\otimes E'_*) = (E\otimes A')_*(C\otimes E')_* f^{p,q},$$

и последовательность $(A\otimes E')\circ(E\otimes C')$ конгруэнтна последовательности $-(E\otimes A')\circ(C\otimes E')$ в силу 3×3 леммы о сплетении (VIII.3.1). Поскольку $\varphi^0 = \psi^0$, единственность отображений универсальной последовательности дает $\varphi^q = \psi^q$ во всех размерностях. Этим доказательство закончено.

Теперь $\cup$-умножение (определенное, скажем, с помощью умножения Ионеды длинных точных последовательностей) для когомологии групп удовлетворяет условиям, в точности совпадающим с условиями из нашей теоремы для $f^{p,q}$. Значит, мы имеем еще одно построение этих $\cup$-умножений (VIII.9.). Это построение может быть использовано для «вычисления» этих умножений для циклической группы Π.

Путем аналогичного доказательства для $H_n(\Pi, C) = \operatorname{Tor}_n^{(Z(\Pi), Z)}(Z, C)$ можно построить умножение, которое совпадает с внутренним умножением для относительного периодического функтора. Если группа Π конечна, то эти два умножения можно скомбинировать в одно умножение (Картан — Эйленберг, гл. XII).

§ 11. Собственные проективные комплексы

Пусть $\mathscr{K}$ — абелева категория положительных комплексов K (левых модулей над некоторым кольцом) со всеми цепными преобразованиями $f: K \to L$ в качестве морфизмов. Назовем короткую последовательность комплексов $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ *собственной точной* последовательностью, если для каждого n

(i) последовательность $0 \to K_n \to L_n \to M_n \to 0$ точна и

(ii) последовательность $0 \to C_n(K) \to C_n(L) \to C_n(M) \to 0$ точна, где $C_n(K)$ обозначает модуль n-мерных циклов из K. Поскольку из (i) следует точность слева последовательности (ii), условие (ii) можно заменить условием

(ii′) отображение $C_n(L) \to C_n(M)$ является эпиморфизмом для всех n. Другими словами, цепной эпиморфизм $g: L \to M$ собственный, если для каждого $m \in M$, для которого $\partial m = 0$, существует $l \in L$, для которого $gl = m$ и $\partial l = 0$. Эквивалентно цепной мономорфизм $f: K \to L$ собственный, если для каждого $l \in L$, для которого $\partial l \in fK$, существует $k \in K$, для которого $\partial l = \partial fk$. Учитывая эти характеристики, читатель может проверить, что класс собственных коротких точных последовательностей удовлетворяет аксиомам из § 4. Поскольку длинная точная последовательность является произведением Ионеды коротких точных последовательностей, справедлива

Лемма 11.1. *Последовательность* $\cdots \to K \to L \to M \to \to N \to \cdots$ *комплексов является собственной точной тогда и только тогда, когда для каждой размерности* $n \geqslant 0$ *последовательности* $\cdots \to K_n \to L_n \to M_n \to N_n \to \cdots$ *и* $\cdots \to C_n(K) \to C_n(L) \to \to C_n(M) \to C_n(N) \to \cdots$ *точны.*

Предложение 11.2. *Если* $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow M$ *является собственной короткой точной последовательностью комплексов, то для всех* n *точна каждая из следующих последовательностей:*

(iii) $0 \to B_n(K) \to B_n(L) \to B_n(M) \to 0$,

(iv) $0 \to H_n(K) \to H_n(L) \to H_n(M) \to 0$,

(v) $0 \to K_n/B_n(K) \to L_n/B_n(L) \to M_n/B_n(M) \to 0$,

(vi) $0 \to K_n/C_n(K) \to L_n/C_n(L) \to M_n/C_n(M) \to 0$.

Доказательство. Модули $B_{n-1}(K) = \partial K_n$ границ определяются с помощью короткой точной последовательности $C_n(K) \rightarrowtail \rightarrowtail K_n \twoheadrightarrow B_{n-1}(K)$. Эти последовательности для комплексов K, L и M образуют 3×3 диаграмму со строками (ii), (i) и (iii), поэтому 3×3 лемма устанавливает точность строки (iii). Гомология $H_n(K)$ определяется с помощью точной последовательности $B_n(K) \rightarrowtail C_n(K) \twoheadrightarrow H_n(K)$; 3×3 лемма устанавливает точность последовательности (iv). Доказательства точности последовательностей (v) и (vi) проводятся аналогично с помощью последовательности $B_n \rightarrowtail K_n \twoheadrightarrow K_n/B_n(K)$ и двойственного описания модулей гомологий через точные последовательности $H_n(K) \rightarrowtail \rightarrowtail K_n/B_n(K) \twoheadrightarrow K_n/C_n(K)$.

Теперь построим собственные проективные комплексы. Для каждого модуля A и для каждого целого числа n введем специальный комплекс $U = U(A, n)$, в котором $U_n = A$ и $U_m = 0$ при $m \neq n$. Если K — произвольный комплекс, то каждый модульный гомоморфизм $\alpha: A \to C_n(K)$ определяет цепное преобразование $h = h(\alpha): U(A, n) \to K$ с h_n равным произведению $A \to C_n(K) \to \to K_n$; все цепные преобразования $h: U \to K$ имеют этот вид.

Для каждого модуля A и каждого целого числа n введем специальный комплекс $V = V(A, n)$, в котором $V_n = V_{n+1} = A$, а все остальные группы цепей равны нулю, причем $\partial: V_{n+1} \to V_n$ есть 1_A. Тогда $H_m(V) = 0$ для всех m. Если K — комплекс, то каждый модульный гомоморфизм $\gamma: A \to K_{n+1}$ определяет цепное преобразование $h = h(\gamma): V(A, n) \to K$ с $h_{n+1} = \gamma$, $h_n = = \partial\gamma$; все преобразования $h: V \to K$ имеют этот вид.

Лемма 11.3. *Для проективного модуля* P *специальные комплексы* $U(P, n)$ *и* $V(P, n)$ *являются собственными проективными комплексами.*

Доказательство. Пусть $g: L \twoheadrightarrow M$ является собственным эпиморфизмом комплексов, и пусть $h = h(\gamma): V(P, n) \to M$ произвольное цепное преобразование. Тогда $g_{n+1}: L_{n+1} \to M_{n+1}$ эпиморфизм, поэтому $\gamma: P \to M_{n+1}$ можно провести через g_{n+1}, $g_{n+1}\beta = \gamma$, где $\beta: P \to L_{n+1}$. Следовательно, $h(\gamma)$ накрывается преобразованием $h(\beta): V \to L$. В соответствующем доказательстве для U используется тот факт, что $C_n(L) \to C_n(M)$ является эпиморфизмом. Теперь справедлива

Лемма 11.4. *Если* P_n *и* Q_n — *проективные модули, то*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} U(P_n, n) \oplus \sum_{n=0}^{\infty} V(Q_n, n) \tag{11.1}$$

собственный проективный комплекс и $H_n(S) \cong P_n$, $B_n(S) \cong Q_n$. Любой комплекс K, у которого все модули $H_n(K)$ и $B_n(K)$ проективны, имеет этот вид.

Доказательство. Прямая сумма собственных проективных объектов является собственным проективным объектом. Положим $Q_{-1} = 0$. Комплекс S имеет вид

$$\cdots \to Q_{n+1} \oplus P_{n+1} \oplus Q_n \to Q_n \oplus P_n \oplus Q_{n-1} \to \cdots,$$

а дифференциал ∂ индуцирован тождественным отображением $Q_n \to Q_n$, поэтому группы $H(S)$ и $B(S)$ совпадают с указанными в лемме. Последнее утверждение устанавливается индукцией с использованием того факта, что каждое расширение с помощью проективного модуля расщепляется.

Теперь мы можем доказать, что имеется достаточно собственных проективных комплексов.

Лемма 11.5. *Для каждого комплекса K существует собственный проективный комплекс S вида* (11.1) *и собственный эпиморфизм $h: S \twoheadrightarrow K$ комплексов.*

Доказательство. Для каждого n имеется проективный модуль P_n и эпиморфизм: $\rho_n : P_n \twoheadrightarrow H_n(K)$; накроем ρ_n гомоморфизмом $\alpha_n : P_n \to C_n(K)$. Этот гомоморфизм α_n определяет цепное преобразование $h(\alpha_n) : U(P_n, n) \to K$. Для каждого n существует проективный модуль Q_n и эпиморфизм $\sigma_n : Q_n \to B_n(K)$; поскольку $K_{n+1} \to B_n$ есть эпиморфизм, σ_n можно накрыть гомоморфизмом $\gamma_n : Q_n \to K_{n+1}$. Этот гомоморфизм γ_n определяет преобразование $h(\gamma_n) : V(Q_n, n) \to K$. Для комплекса S типа (11.1) эти цепные преобразования $h(\alpha_n)$ и $h(\gamma_n)$ в комбинации дают преобразование $h : S \to K$. Если $s_n = q_n + p_n + q_{n-1} \in S_n$, то $hs_n = \partial\gamma_n q_n + \alpha_n p_n + \gamma_{n-1}q_{n-1}$, так что h — эпиморфизм. Чтобы показать, что это собственный эпиморфизм, мы должны доказать, что если $\partial hs_n = 0$, то $\partial s_n = \partial s_n'$ для некоторого такого s_n', что $hs_n' = 0$. Но ∂hs_n равняется $\partial\gamma_{n-1}q_{n-1}$. Поскольку $\gamma_{n-1}q_{n-1}$ есть цикл из $C_n(K)$, а σ_n и ρ_n — эпиморфизмы, существуют такие элементы p_n' в P_n и q_n' в Q_n, что $\gamma_{n-1}q_{n-1} = \alpha_n p_n' + \partial\gamma_n q_n'$. Тогда для $s_n' = -q_n' - p_n' + q_{n-1} \in S_n$, $\partial s_n = \partial s_n' = q_{n-1}$ и $hs_n' = 0$, что и требовалось.

Из соединения этих результатов вытекает

Предложение 11.6. *Для каждого (положительного) комплекса L существует собственная проективная резольвента*

$$\cdots \to Y_q \xrightarrow{\partial} Y_{q-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\partial} Y_0 \to L \to 0, \qquad (11.2)$$

где каждый Y_q — собственный проективный комплекс вида (11.1).

Здесь $Y = \{Y_q\}$ — комплекс комплексов; каждый комплекс Y_q — это градуированный модуль $\{Y_{q,r}\}$ с граничным дифференциалом $\partial'' : Y_{q,r} \to Y_{q,r-1}$, причем $\partial''\partial'' = 0$. Сама резольвента порождает цепные преобразования ∂, для которых $\partial''\partial = \partial\partial''$. Изменим знак у ∂ (точно так же, как в процессе конденсации, X.9), положив $\partial' = (-1)^q\partial : Y_{q,r} \to Y_{q-1,r}$. Тогда $(Y, \partial', \partial'')$ — положительный бикомплекс.

Для положительных комплексов K и L правых и левых R-модулей введем теперь соответственно некоторые модули «гипергомологий». Возьмем резольвенту Y комплекса L, описанную выше, и образуем $K \otimes Y$, где $\otimes$ означает $\otimes_R$. Это произведение является триградуированным модулем $\{K_p \otimes Y_{q,r}\}$ с тремя граничными гомоморфизмами $\partial_I = \partial_K : K_p \otimes Y_{q,r} \to K_{p-1} \otimes Y_{q,r}$

$$\partial_{II}(k \otimes y) = (-1)^{\dim k} k \otimes \partial' y, \quad \partial_{III}(k \otimes y) = (-1)^{\dim k} k \otimes \partial'' y; \qquad (11.3)$$

это есть *трикомплекс* (квадрат каждого ∂ равен нулю, каждая пара дифференциалов антикоммутативна). Соответствующий полный комплекс $T = \mathrm{Tot}(K \otimes Y)$ имеет компоненты $T_n = \sum K_p \otimes Y_{q,r}$, где $p + q + r = n$, $\partial = \partial_I + \partial_{II} + \partial_{III}$. Применение теоремы сравнения для собственных проективных резольвент показывает, что группы $H_n(T)$ не зависят от выбора резольвенты Y. Мы определим модули *гипергомологий* комплексов K и L как

$$\mathfrak{R}_n(K, L) = H_n(\mathrm{Tot}(K \otimes Y)). \qquad (11.4)$$

Замечание. Тот часто используемый факт, что тензорное произведение двух комплексов является бикомплексом, справедлив и для функторов, отличных от тензорного произведения. Пусть $T(A, B)$ — ковариантный бифунктор, зависящий от модулей A и B и принимающий значения в некоторой аддитивной категории $\mathscr{C}$. Если K и L — положительные комплексы модулей, то применение T дает биградуированный объект $T(K_p, L_q)$ в $\mathscr{C}$, а граничные гомоморфизмы в K и L индуцируют морфизмы

$$\partial' = T(\partial_K, 1) : T(K_p, L_q) \to T(K_{p-1}, L_q),$$
$$\partial'' = (-1)^p T(1, \partial_L) : T(K_p, L_q) \to T(K_p, L_{q-1}),$$

которые удовлетворяют соотношениям $\partial'\partial' = 0$, $\partial''\partial'' = 0$ и $\partial'\partial'' = -\partial''\partial'$, причем последнее имеет место потому, что T — бифунктор. Следовательно, $T(K, L) = \{T(K_p, L_q), \partial', \partial''\}$ — бикомплекс в $\mathscr{C}$ с ассоциированным полным комплексом $\mathrm{Tot}[T(K, L)]$. Если необходимо рассмотреть гомотопии, то предполагается *биаддитивность* функтора T, т. е. аддитивность по каждому переменному в отдельности. Если T — тензорное умножение, то $T(K, L)$ есть знакомый нам бикомплекс $K \otimes L$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ есть последовательность комплексов и $gf = 0$. Показать, что она является собственной короткой точной последовательностью тогда и только тогда, когда выполнены условия (iii) и (iv) из предложения 11.2, а также тогда и только тогда, когда выполнены условия (ii) и (iii). Найти другие достаточные пары условий.

2. Показать, что всякий собственный проективный положительный комплекс имеет вид, указанный в лемме 11.4.

3. Доказать, что модуль $\mathcal{R}_n(K, L)$ не зависит от выбора резольвенты комплекса L, и доказать, что его можно найти также с помощью собственной проективной резольвенты комплекса K или с помощью резольвент обоих комплексов K и L.

4. Изучить собственные точные последовательности не обязательно положительных комплексов.

5. Пусть $\mathcal{P}$ — собственный класс коротких точных последовательностей абелевой категории $\mathcal{A}$. Изучить соответствующий собственный класс в абелевой категории положительных комплексов из $\mathcal{A}$.

6. Каждый аддитивный функтор $T : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ индуцирует функтор T из категории $\mathcal{A}$-комплексов K в категорию $\mathcal{R}$-комплексов. Для точного слева функтора S и точного справа функтора T построить естественные отображения

$$H_nSK \to SH_nK, \quad TH_nK \to H_nTK.$$

Распространить построение на бифункторы и получить гомологическое умножение как специальный случай для $T = \otimes$.

§ 12. Спектральная формула Кюннета

Спектральные последовательности позволяют дать обобщение формулы Кюннета.

Теорема 12.1. *Если K и L — положительные комплексы правых и левых R-модулей соответственно и если*

$$H(\operatorname{Tot}[\operatorname{Tor}_m(K, L)]) = 0 \text{ для всех } m > 0, \tag{12.1}$$

то существует такая спектральная последовательность первой четверти $\{E^r_{p,q}, d_r\}$, что

$$E^2_{p,q} = \sum_{s+t=q} \operatorname{Tor}_p(H_s(K), H_t(L)), \quad E^r_{p,q} \overset{p}{\Rightarrow} H(K \otimes L). \tag{12.2}$$

Условие (12.1) этой теоремы требует, чтобы каждый из комплексов $\operatorname{Tor}_m(K, L)$, определенный в замечании из § 11, имел нулевую гомологию при $m > 0$. Из выполнения более сильного условия плоскости каждого модуля K_n вытекает, что каждый $\operatorname{Tor}_m(K, L) = 0$ для $m > 0$, и поэтому выполнено условие (12.1).

Для положительных комплексов предшествующая теорема Кюннета (теорема V.10.2) содержится в теореме 12.1. Подробнее, усло-

вия теоремы V.10.2 требуют, чтобы модули $C_n(K)$ и $B_n(K)$ были плоскими, т. е. чтобы $\operatorname{Tor}_p(C_n, G) = 0 = \operatorname{Tor}_p(B_n, G)$ для всех модулей G и всех $p > 0$. Поскольку последовательность $C_n(K) \rightarrowtail K_n \twoheadrightarrow B_{n-1}(K)$ точна, следующая часть стандартной точной последовательности для периодического умножения

$$\operatorname{Tor}_1(C_n, G) \to \operatorname{Tor}_1(K_n, G) \to \operatorname{Tor}_1(B_{n-1}, G)$$

точна, так что $\operatorname{Tor}_1(K_n, G) = 0$, модуль K_n плоский, и, значит, условие (12.1) выполнено. Далее, последовательность $B_n(K) \rightarrowtail C_n(K) \twoheadrightarrow H_n(K)$ точна, поэтому последовательность

$$\operatorname{Tor}_p(C_n, G) \to \operatorname{Tor}_p(H_n, G) \to \operatorname{Tor}_{p-1}(B_n, G)$$

точна и, следовательно, $\operatorname{Tor}_p(H_n(K), G) = 0$ при $p > 1$. Таким образом, в спектральной последовательности (12.2) $E^2_{p,q} = 0$ при $p \neq 0, 1$, и, следовательно, она состоит только из двух столбцов и поэтому имеет нулевой дифференциал. Фильтрация комплекса $H_n(K \otimes L)$ равносильна следующей точной последовательности с $E^2_{0,n}$ и $E^2_{1,n-1}$:

$$0 \to \sum_{s+t=n} H_s(K) \otimes H_t(L) \to H_n(K \otimes L) \to$$
$$\to \sum_{s+t=n-1} \operatorname{Tor}_1(H_s(K), H_t(L)) \to 0.$$

Это и есть обычная точная последовательность Кюннета. Другими словами, теорема этого параграфа показывает, как более высокие периодические произведения комплексов $H(K)$, $H(L)$ действуют на $H(K \otimes L)$ через подходящую спектральную последовательность.

Эта теорема будет выведена из более общего результата.

Теорема 12.2. *Если K и L — положительные комплексы соответственно правых и левых R-модулей с гипергомологией $\mathfrak{R}_n(K, L)$, определенной в § 11, то существуют следующие две спектральные последовательности первой четверти:*

$$E'^r_{p,q} \overset{p}{\Rightarrow} \mathfrak{R}(K, L) \overset{q}{\Leftarrow} E''^r_{p,q}, \tag{12.3}$$

$$E'^2_{p,q} \cong H_p(\operatorname{Tot}[\operatorname{Tor}_q(K, L)]), \quad E''^2_{p,q} \cong \sum_{s+t=q} \operatorname{Tor}_p(H_s(K), H_t(L)). \tag{12.4}$$

При выполнении предыдущего условия (12.1) первая последовательность сводится к базе, откуда $\mathfrak{R}_n \cong E'^2_{n,0} \cong H_n(K \otimes L)$, и тем самым получается результат первой теоремы.

Доказательство. Выберем собственную проективную резольвенту Y комплекса L и построим трикомплекс $K \otimes Y$ из (11.3) с тремя граничными дифференциалами ∂_{I}, ∂_{II}, ∂_{III}. Объединяя первый и третий индексы, построим двойной комплекс:

$$X_{p,q}=\sum_{s+t=p} K_s\otimes Y_{q,t},\quad \partial'=\partial_I+\partial_{III},\quad \partial''=\partial_{II}.$$

Тогда комплекс $\operatorname{Tot} X=\operatorname{Tot}(K\otimes Y)$ имеет гомологию $\mathfrak{R}(K, L)$. Две спектральные последовательности этого двойного комплекса и будут давать требуемый результат.

В первой спектральной последовательности $E'^2_{p,q}=H'_pH''_q(X)$. В каждой размерности t последовательность $\cdots\to Y_{q,t}\to\cdots$ $\cdots\to Y_{0,t}\to L_t\to 0$ является проективной резольвентой модуля L_t, поэтому периодическое произведение $\operatorname{Tor}_q(K_s, L_t)$ можно вычислить с помощью этой резольвенты как $H''_q(K\otimes Y)$; оставшийся дифференциал $\partial'=\partial_I+\partial_{III}$ является тогда граничным гомоморфизмом комплекса $\operatorname{Tor}_q(K, L)$. Следовательно, бикомплекс E'^2 совпадает с указанным в теореме.

Для второй спектральной последовательности компоненты комплекса X запишем с переименованными индексами как $X_{q,p}$, так что p есть по-прежнему индекс фильтрации для (второй) фильтрации и $E''^2_{p,q}=H''_pH'_q(X)$. При фиксированном p, $X_{q,p}=\Sigma K_s\otimes Y_{p,t}$ с $s+t=q$ — это в точности комплекс $\operatorname{Tot}(K\otimes Y_p)$ с дифференциалом $\partial'=\partial_I+\partial_{III}$. В каждом комплексе Y_p модули циклов и гомологий проективны по построению, так что применение тензорной формулы Кюннета (теорема V.10.1) с условиями на второй множитель дает

$$H'_q(X_p)=H_q(K\otimes Y_p)\cong\sum_{s+t=q} H_s(K)\otimes H_t(Y_p).$$

Теперь каждый комплекс Y_p имеет вид S из (11.1), так что каждый модуль $H_n(Y_p)$ проективен, а определение собственных точных последовательностей комплексов показывает, что для каждого t последовательность

$$\cdots\to H_t(Y_p)\to H_t(Y_{p-1})\to\cdots\to H_t(Y_0)\to H_t(L)\to 0$$

является проективной резольвентой модуля $H_t(L)$. Тензорное умножение этой резольвенты на $H_s(K)$ и взятие гомологии относительно ∂'' есть стандартный метод вычисления для $\operatorname{Tor}(H_s(K), H_t(L))$. Следовательно, мы получаем часть формулы (12.4), относящуюся к $E''^2_{p,q}$.

Эта теорема может рассматриваться как построение из комплексов K и L большого числа «гипергомологических инвариантов»: модули $\mathfrak{R}(K, L)$, две фильтрации в $\mathfrak{R}$ и две спектральные последовательности, сходящиеся, как указано выше, к градуированным модулям, ассоциированным с этими фильтрациями. Например, если основное кольцо R является кольцом целых чисел, то наш результат принимает вид следствия.

С л е д с т в и е 12.3. *Если K и L — положительные комплексы абелевых групп с группами гипергомологий $\mathfrak{R}(K, L)$, то существует диаграмма*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \sum\limits_{p+q=n} H_p(K)\otimes H_q(L) \arrow[d, tail] & & & \sum\limits_{p+q=n-1} H_p(K)\otimes H_q(L) \arrow[d, tail] & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-1}(\operatorname{Tor}_1(K, L)) \arrow[r] & \mathfrak{R}_n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H_n(K\otimes L) \arrow[r] & H_{n-2}(\operatorname{Tor}_1(K, L)) \arrow[r] & \mathfrak{R}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
 & & \sum\limits_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1(H_p(K), H_q(L)) & & & \sum\limits_{p+q=n-2} \operatorname{Tor}_1(H_p(K), H_q(L)) &
\end{tikzcd}$$

с (длинной) точной строкой и короткими точными столбцами. Здесь $\operatorname{Tor}_1(K, L)$ есть сокращение для $\operatorname{Tot}[\operatorname{Tor}_1(K, L)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Над кольцом Z Tor_p равен нулю при $p>1$, поэтому первая спектральная последовательность имеет только две ненулевые строки ($q=0$, $q=1$) и только один ненулевой дифференциал $d^2: E^2_{n,0}\to E^2_{n-2,1}$; следовательно, точна последовательность

$$0\to E'^{\infty}_{n,0}\to H_n(K\otimes L)\xrightarrow{d_2} H_{n-2}(\operatorname{Tor}_1(K, L))\to E'^{\infty}_{n-2,1}\to 0.$$

Ее сплетение с точными последовательностями, описывающими фильтрацию в $\mathfrak{R}_n$, дает приведенную выше длинную горизонтальную последовательность. Вторая спектральная последовательность имеет только два ненулевых столбца ($p=0$, $p=1$), следовательно, все дифференциалы $d^2=d^3=\ldots=0$; это дает вертикальные точные последовательности.

Читатель может показать, что произведение

$$H_p(K)\otimes H_q(L)\to\mathfrak{R}_n\to H_n(K\otimes L)$$

из этой диаграммы является гомологическим умножением; произведение

$$H_{n-1}(\operatorname{Tor}_1(K, L))\to\mathfrak{R}_n\to\sum\operatorname{Tor}_1(H_p(K), H_q(L))$$

является соответствующим «умножением» для точного слева функтора Tor_1, как это определено в упражнении 11.6.

З а м е ч а н и е. Определение модулей гипергомологий принадлежит Картану и Эйленбергу; рассмотрение их в терминах собственных точных последовательностей принадлежит Эйленбергу (не опубликовано).

Библиография[1])

А д а м с (A d a m s J. F.)

On the Cobar construction, *Proc. NAS USA*, **42** (1956), 409—412. [X.13]
On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. of Math.*, **72** (1960), 20—104. [VII.6; X.8] (Имеется русский перевод: А д а м с Дж. Ф., О несуществовании отображений с инвариантом Хопфа, равным единице, сб. *Математика*, **5 : 4** (1961).)

А м и ц у р (A m i t s u r S. A.)

Derived functors in abelian categories, *J. Math. and Mech.*, **10** (1961) 971—994. [XII.9]

А р т и н (A r t i n E.)

Galois theory, Notre Dame Math. Lectures, № 2, Notre Dame (Ind.), 2nd ed., 1944. [IV.2]

А р т и н, Т э й т (A r t i n E. and T a t e J.)

Class field theory (Mimeographed notes), Cambridge, Harvard University, 1960. [IV.11]

А с а н о, С ё д а (A s a n o K. and S h o d a K.)

Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen, *Comp. Math.*, **2** (1935), 230—240. [IV.11]

А с м у с (A s s m u s E. F., Jr.)

On the homology of local rings, *Ill. J. Math.*, **3** (1959), 187—199. [VII.7]

А т и я (A t i y a h M. F.)

On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 307—317. [IX.2]
Characters and cohomology of finite groups, Pub. Math., № 9, Inst. Hautes Etudes, Paris.

А у с л е н д е р (A u s l a n d e r M.)

On the dimension of modules and algebras. III, *Nagoya Math. J.*, **9** (1955), 67—77. [VII.1]

А у с л е н д е р, Б у к с б а у м (A u s l a n d e r M. and B u c h s b a u m D. A.)

Homological dimension in Noetherian rings, *Proc. NAS USA*, **42** (1956), 36—38. [VII.7]

[1]) Ссылка типа [X.8] указывает то место в книге (здесь гл. X, § 8), где упомянута соответствующая статья.

Homological dimension in local rings, *Trans. AMS*, **85** (1957), 390—405.
Homological dimension in Noetherian rings. II, *Trans. AMS*, **88** (1958), 194—206 [VII.7]
Codimension and multiplicity, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 625—657. [VII.7]
Unique factorization in regular local rings, *Proc. NAS USA*, **45** (1959), 733—734. [VII.7]

Б а р р а т т (B a r r a t t M. G.)

Homotopy ringoids and homotopy groups, *Q. J. Math. Oxon* (2), **5** (1954), 271—290. [IX.1]

Б а р р а т т, Г у г е н г е й м, М у р (B a r r a t t M. G., G u g e n h e i m V. K. A. M. and M o o r e J. C.)

On semisimplicial fibre bundles, *Am. J. Math.*, **81** (1959), 639—657. [VIII.9]

Б а с с (B a s s H.)

Finitistic dimension and a homological generalisation of semi-primary rings, *Trans. AMS*, **95** (1960), 466—488. [V.4; VII.1]

Б а т л е р, Х о р р о к с (B u t l e r M. C. R. and H o r r o c k s G.)

Classes of extensions and resolutions, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **254** (1961), 155—222. [XII.4]

Б о к ш т е й н (B o c k s t e i n M.)

Sur le spectre d'homologie d'un complexe, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 259—261. [V.11]
Sur la formule des coefficients universels pour les groupes d'homologie, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **247** (1958), 396—398. [V.11]

Б о р е л ь (B o r e l A.)

Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groups de Lie compacts, *Ann. of Math.*, **57** (1953), 115—207. [VI.9]
Nouvelle démonstration d'un théorème de P.A. Smith, *Comment. Math. Helv.*, **29** (1955), 27—39. [XI.11]

Б р а у д е р (B r o w d e r W.)

Torsion in *H*-spaces, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 24—51. [II.4; XI.5]

Б р а у е р (B r a u e r R.)

Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen. I., *Math. Z.*, **28** (1928), 677—696. [III.11]

Б р а у н (B r o w n E. H., Jr.)

Twisted Tensor Products. I, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 223—246. [VIII.9] (Имеется русский перевод: Б р а у н Е., Скрещенные тензорные произведения, I, сб. *Математика*, **6 : 1** (1962).)

Б у к с б а у м (B u c h s b a u m D. A.)

Exact categories and duality, *Trans. AMS*, **80** (1955), 1—34. [IX.2] (Имеется русский перевод в книге: К а р т а н А. и Э й л е н б е р г С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.)
A note on homology in categories, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 66—74. [XII.4; XII.5]
Satellites and universal functors, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 199—209. [XII.4; XII.9]

Б у р б а к и (B o u r b a k i N.)
Algèbre Multilinéare (гл. III книги II в Éléments de Mathématique), Hermann, Paris, 1948; 2-е изд., 1951. [V.11] (Имеется русский перевод: Б у р б а к и Н., Алгебра (алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, М., 1962.)

Б э р (B a e r R.)
Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen, *Math. Z.*, **38** (1934), 375—416. [III.11; IV.11]
Automorphismen von Erweiterungsgruppen, Actualités Scientifiques et Industrielles, № 205, Paris, 1935. [III.11; IV.11] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bull. AMS*, **46** (1940), 800—806. [III.11]

В е д д е р б а р н (W e d d e r b u r n J. H. M.)
Homomorphisms of groups, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 486—487. [II.9]

В е н к о в Б. Б.
Алгебры когомологий, *ДАН СССР*, **127** (1959), 943—944. [XI.11]

Г а б р и э л ь (G a b r i e l P.)
Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323—448. [IX.2]

Г а л ь п е р н (H a l p e r n E.)
Twisted polynomial hyperalgebras, *Memoir AMS*, **29** (1958), Providence. [VI.9]

Г ё д е л ь (G ö d e l K.)
The consistency of the continuum hypothesis, *Ann. of Math.*, Studies 3, Princeton, 1940. [I.7]

Г ё л ь д е р (H ö l d e r O.)
Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4, *Math. Ann.*, **43** (1893), 301—412 (особенно § 18). [III.11]

Г и л ь б е р т (H i l b e r t D.)
Über die Theorie der Algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890), 473—534. [VII.6]

Г о д е м а н (G o d e m e n t R.)
Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958. [I.8; IX.4] (Имеется русский перевод: Г о д е м а н Р., Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, М., 1961.)

Г р е й (G r a y J. W.)
Extensions of sheaves of algebras, *Ill. J. Math.*, **5** (1961), 159—174. [X.13]
Extensions of sheaves of associative algebras by non-trivial kernels., *Pac. J. Math.*, **11** (1961), 909—917. [X.13]

Г р ё б н е р (G r ö b n e r W.)
Über die Syzygien-Theorie der Polynomideale, *Monatsh. Math.*, **53** (1949), 1—16. [VII.6]

Г р и н (G r e e n J. A.)
On the number of automorphisms of a finite group, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, **237** (1956), 574—581. [XI.11]

Г р о т е н д и к (G r o t h e n d i e c k A.)
Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 119—221. [XI.2; IX.4; XII.8] (Имеется русский перевод: Г р о т е н д и к А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961.)

Г р о т е н д и к (с Д ь е д о н н е) (G r o t h e n d i e c k A. with D i e u d o n n é J.)
Éléments de géometrie algébrique. I, II, Pub. Math. Inst. des Hautes Etudes, Paris, 1960, 1961, № 4, 8. [I.8]

Г р ю н б е р г (G r u e n b e r g K. W.)
Resolutions by relations, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 481—494. [X.5]

Г у г е н г е й м (G u g e n h e i m V. K. A. M.)
On a theorem of E.H. Brown, *Ill. J. Math.*, **4** (1960), 292—311. [VIII.9]
On extensions of algebras, co-algebras and Hopf algebras I., *Am. J. Math.*, **84** (1962), 349—382.

Г у г е н г е й м, М у р (G u g e n h e i m V. K. A. M. and M o o r e J. C.)
Acyclic models and fibre spaces, *Trans. AMS*, **85** (1957), 265—306. [VIII.7; XI.11]

Г у р е в и ч (H u r e w i c z W.)
Beiträge zur Topologie der Deformationen, *Proc. Acad. Amsterdam* **38** (1935), 112—119, 521—538; **39** (1936), 117—125, 215—224. [IV.11]
On duality theorems, *Bull. AMS*, abstract 47—7—329, **47** (1941), 562—563. [I.8]

Д ж е к о б с о н (J a c o b s o n N.)
Structure of rings, AMS, Providence, 1956. (Имеется русский перевод: Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, ИЛ, М., 1961.)
Lie algebras, New York [Interscience], John Wiley & Sons, 1962. [X.13] (Имеется русский перевод: Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли, «Мир», М., 1964.)

Д ж е н с (J a n s J. P.)
Duality in Noetherian rings, *Proc. AMS*, (1961), 829—835. [V.4; VII.7]

Д и к с м ь е (D i x m i e r J.)
Homologie des anneaux de Lie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **74** (1957), 25—83. [X.13]

Д о л ь д (D o l d A.)
Homology of symmetric products and other functors of complexes, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 54—80. [VIII.5]
Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe, *Math. Ann.*, **140** (1960), 278—298. [II.4] (Имеется русский перевод: Д о л ь д А., К гомотопической теории цепных комплексов, сб. *Математика*, **7** : 2 (1963).)
Über die Steenrodschen Kohomologieoperationen, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 258—294. [VIII.8] (Имеется русский перевод: Д о л ь д А., О когомологических операциях Стинрода, сб. *Математика*, **7** : 6 (1963).)

Д о л ь д, П у п п е (D o l d A. and P u p p e D.)
Homologie nicht-additiver Funktoren; Anwendungen, *Ann. Inst. Fourier*, **11** (1961), 201—312. [XII.9]

Дьедонне (Dieudonné J.)
Remarks on quasi-Frobenius rings, *Ill. J. Math.*, **2** (1958), 346—354. [V.4]

Зееман (Zeeman E. C.)
A proof of the comparison theorem for spectral sequences, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 57—62. [XI.11]

Ивенс (Evens L.)
The cohomology ring of a finite group, *Trans. AMS*, **101** (1961), 224—239. [XI.11]

Ионеда (Yoneda N.)
On the homology theory of modules, *J. Fac. Sci. Tokyo*, Sec. I, 7 (1954), 193—227. [III.11]
Notes on products in Ext, *Proc. AMS*, **9** (1958), 873—875. [VIII.4]
On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Tokyo*, Sec. I, **8** (1960), 507—526 [III.11; XII.4; XII.9]

Кан (Kan D. M.)
Adjoint functors, *Trans. AMS*, **87** (1958), 294—329. [IX.6] (Имеется русский перевод: Кан Д. М., Сопряженные функторы, сб. *Математика*, 3 : 2 (1959).)
A combinatorial definition on homotopy groups, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 282—312. [VIII.5]

Каплански й (Kaplansky I.)
On the dimension of modules and algebras. X, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 85—88. [VII.1]

Картан (Cartan H.)
Sur la cohomologie des espaces où opére un groups, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **226** (1948), 148—150, 303—305. [XI.7]
Séminaire de topologie algébrique, 1950—1951. (École Norm. Sup.), Paris, 1951. [III.11]
Extension du théorème des «chaînes de syzygies», *Rend. Matem. Appl. Roma*, **11** (1952), 156—166. [VII.6]
Sur les groupes d'Eilenberg — MacLane H (П, n): I. Méthode des constructions; II., *Proc. NAS USA*, **40** (1954), 467—471, 704—707. [X.13] (Имеется русский перевод: Картан А., Алгебры когомологий пространств Эйленберга — Маклейна, сб. *Математика*, **3** : **5**, **3** : **6** (1959).)
Séminaire (École Norm. Sup.), Algèbres d'Eilenberg — MacLane et Homotopie, Paris, 1955. [X.12; XI.11]

Картан, Лерэ (Cartan H. and Leray J.)
Relations entre anneaux d'homologie et groupe de Poincaré, Colloque Topologie Algébrique, Paris, 1949, 83—85. [XI.7]

Картан, Эйленберг (Cartan H. and Eilenberg S.)
Homological algebra, Princeton, 1956. (Имеется русский перевод: Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.)

Каш (Kasch F.)
Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen, *Math. Z.*, **77** (1961), 219—227. [VII.7]

Келли, Питчер (Kelley J. L. and Pitcher E.)
Exact homomorphism sequences in homology theory, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 682—709. [I.8]

Клейсли (Kleisli H.)
Homotopy theory in Abelian categories, *Can. J. Math.*, **14** (1962), 139—169. [XII.4]

Кон (Cohn P. M.)
On the free product of associative rings, *Math. Z.*, **71** (1959), 380—398; **73** (1960), 433—456. [VI.4]

Косуль (Koszul J. L.)
Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **225** (1947), 217—219. [XI.11]
Sur un type d'algébres différentielles en rapport avec la transgression, Colloque de topologie, Brussels, 1950, 73—81. [VII.2]
Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 65—127. [X.13]

Кохендёрфер (Kochendörffer R.)
Über den Multiplikator einer Gruppe, *Math. Z.*, **63** (1956), 507—513. [IV.11]

Кудо, Араки (Kudo T. and Araki S.)
Topology of H_n-spaces and H-squaring operations, *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.*, Ser. A, **10** (1956), 85—120. [XI.11]

Кюннет (Künneth H.)
Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit, *Math. Ann.*, **90** (1923), 65—85. [V.10]
Über die Torsionzahlen von Produktmannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **91** (1924), 125—134. [V.10]

Ламбек (Lambek J.)
Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma, *Can. J. Math.*, **10** (1958), 45—56. [II.9]

Ленг (Lang S.)
Review of «Éléments de géométrie algébrique», *Bull. AMS*, **67** (1961), 239—246. [I.8]

Лерэ (Leray J.)
Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **222** (1946), 1419—1422. [XI.2; XI.11]
L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 1—139. [XI.2; XI.11]
L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 169—213. [XI.2; XI.11]

Лефшец (Lefschetz S.)
Algebraic topology, AMS, New York, 1942. (Имеется русский перевод: Лефшец С., Алгебраическая топология, М., 1949.)

Линдон (Lyndon R. C.)
The cohomology theory of group extensions, Harvard University. Thesis, 1946. [XI.10; XI.11]

The cohomology theory of group extensions, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 271—292. [XI.10; XI.11]
Cohomology theory of groups with a single defining relation, *Ann. of Math.*, **52** (1950), 650—665. [X.5]

Лиулевичус A. (Liulevicius A.)
The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations, *Proc. NAS USA*, **46** (1960), 978—981. [X.8]

Лоренцен (Lorenzen P.)
Über die Korrespondenzen einer Struktur, *Math. Z.*, **60** (1954), 61—65. [II.9]

Любкин (Lubkin S.)
Imbedding of abelian categories, *Trans. AMS*, **97** (1960), 410—417. [XII.3]

Майер (Mayer W.)
Über abstrakte Topologie. I und II., *Monatsh. Math. u. Physik*, **36** (1929), 1—42, 219—258. [II.9]
Topologische Gruppensysteme, *Monatsh. Math. u. Physik*, **47** (1938/1939), 40—86. [II.9]

Макки (Mackey G. W.)
Unitary representations of group extensions. I., *Acta Math.*, **99** (1958), 265—311. [IV.11]

Маклейн (MacLane S.)
Duality for groups, *Bull. AMS*, **56** (1950), 485—516. [IX.2]
Slide and torsion products for modules, *Rend. del Sem. Math. Torino*, **15** (1955/1956), 281—309. [V.11]
Homologie des anneaux et des modules, Colloque de Topologie algébrique, Louvain, 1956, 55—80. [X.13]
Extensions and obstructions for rings, *Ill. J. Math.*, **2** (1958), 316—345. [X.13]
Group extensions by primary abelian groups, *Trans. AMS*, **95** (1960), 1—16. [II.4; XII.4]
Triple torsion products and multiple Künneth formulas, *Math. Ann.*, **140** (1960), 51—64. [XII.9]
An algebra of addiitve relations, *Proc. NAS USA*, **47** (1961), 1043—1051. [II.9] (Имеется русский перевод: Маклейн С., Алгебра аддитивных отношений, сб. *Математика*, **7** : 6 (1963).)
Locally small categories and the foundations of set theory, Infinitistic Methods (Warsaw symposium, 1959), Oxford, 1961. [I.8; IX.2]

Маколей (Macauley R. A.)
Analytic group kernels and Lie algebra kernels, *Trans. AMS*, **95** (1960), 530—553. [X.13]

Масси (Massey W. S.)
Exact couples in algebraic topology, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 363—396. [XI.5; XI.11]
On the universal coefficient theorem of Eilenberg and MacLane, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (2), **3** (1958), 1—12. [III.11]

Матлис (Matlis E.)
Injective modules over Noetherian rings, *Pac. J. Math.*, **8** (1958), 511—528. [III.11]

Applications of duality, *Proc. AMS*, **10** (1959), 659—662. [VII.1]
Modules with descending chain condition, *Trans. AMS*, **97** (1960), 495—508. [VII.7]

Милнор (Milnor J.)
The Steenrod algebra and its dual, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 150—171. [VIII.8]

Милнор, Мур (Milnor J. and Moore J. C.)
On the structure of Hopf algebras, Forthcoming. [VI.9]

Митчелл (Mitchell B.)
The full embedding theorem, *Am. J. Math.*, **86** (1964), 619—637. [IX.4; XII.3; XII.9]

Морита (Morita K.)
Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition., *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, Sec. A, **6** (1958), 83—142. [V.4]

Нагата (Nagata M.)
A general theory of algebraic geometry over Dedekind rings. II., *Am. J. Math.*, **80** (1958), 382—420. [VII.7]

Накаяма (Nakayama T.)
On the complete cohomology theory of Frobenius Algebras, *Osaka Math. J.*, **9** (1957), 165—187. [VII.7]

Накаяма, Цудзуку (Nakayama T. and Tsuzuku T.)
On Frobenius extensions. I, II, *Nagoya Math. J.*, **17** (1960), 89—110; **19** (1961), 127—148. [VII.7]

Нейман (Neumann B. H.)
An essay on free products of groups with amalgamations, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A **246** (1954), 503—554. [XII.1]

Норскотт (Northcott D. G.)
Ideal theory, Cambridge, 1953.
An introduction to homological algebra, Cambridge, 1960. [VII.1]

Нунке (Nunke R. J.)
Modules of extensions over Dedekind rings, *Ill. J. Math.*, **3** (1959), 222—241. [XII.4]

Палермо (Palermo F. P.)
The cohomology ring of product complexes, *Trans. AMS*, **86** (1957), 174—196. [V.11]

Пуппе (Puppe D.)
Homotopie und Homologie in Abelschen Gruppen und Monoidkomplexen, I.II., *Math. Z.*, **68** (1958), 367—406, 407—421.
Korrespondenzen in Abelschen Kategorien, *Math. Ann.*, **148** (1962), 1—30. [XII.3] (Имеется русский перевод: Пуппе Д., Соответствие в абелевых категориях, сб. *Математика*, **8** : 6 (1964).)

Редеи (Redei L.)
Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 252—273. [X.13]

Рёрль (Röhrl H.)
Über Satelliten halbexakter Funktoren, *Math. Z.*, **79** (1962), 193—223. [XII.9]

Ри (Ree R.)
Lie elements and an algebra associated with shuffles, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 210—220. [X.13]

Рим (Rim D. S.)
Modules over finite groups, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 700—712.

Роэе (Rose I. H.)
On the cohomology theory for associative algebras, *Am. J. Math.*, 74 (1952), 531—546. [X.7]

Розенберг, Зелинский (Rosenberg A. and Zelinsky D).
Cohomology of infinite algebras, *Trans. AMS*, **82** (1956), 85—98. [X. 3]

Сендреи (Szendrei J.)
On Schreier extension of rings without zero-divisors, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 276—280. [X.13]

Серр (Serre J.-P.)
Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 425—505. [XI.2; XI.11]
Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. Proceedings. Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo, 1956, 175—189. [VII.7]
Algèbre locale — Multiplicités (notes written by P. Gabriel), Paris, 1957/1958. [VII.7] (Имеется русский перевод: Серр Ж.-П., Локальная алгебра и теория кратностей (курс лекций, записанный П. Габриэлем), сб. *Математика*, **7 : 5** (1963).)

Стинрод (Steenrod N. E.)
The topology of fibre bundles, Princeton, 1951. [XI.2]
Cyclic reduced powers of cohomology classes, *Proc. NAS USA*, **39** (1953), 217—223. [IV.7; VIII.8]
The cohomology algebra of a space, L'Ens. Math., II, ser. 7 (1961), 153—178. [VIII.8]

Стинрод, Эпштейн (Steenrod N. E. and Epstein D. B. A.)
Cohomology operations, Lectures by N. E. Steenrod, written and revised by D. B. A. Epstein, Annals of Math. Studies 50, Princeton, 1962. [XIII.8]

Суон (Swan R. G.)
A simple proof of the cup product reduction theorem, *Proc. NAS USA*, **46** (1960), 114—117, [VIII.8; VIII.9]
Induced representations and projective modules, *Ann. of Math.*, **71** (1960), 552—578. (Имеется русский перевод: Суон Р., Индуцированные представления и проективные модули, сб. *Математика*, **8 : 1** (1964).)

Тейхмюллер (Teichmüller O.)
Über die sogenannte nicht kommutative Galoissche Theorie und die Relation.... *Deutsche Math.*, **5** (1940), 138—149. [IV.11]

Тэйт (Tate J.)
The higher dimensional cohomology groups of class field theory, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 294—297. [IV.11]

Уайтхед (Whitehead J. H. C.)
A certain exact sequence, *Ann. of Math.*, **52** (1950), 51—110. [XII.9]
On group extensions with operators, *Q. J. Math. Oxon* (2), **1** (1950), 219—228.

Уитни (Whitney H.)
Tensor products of abelian groups, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 495—528. [V.11]

Уолл (Wall C. T. C.)
Resolutions for extensions of groups, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57** (1961), 251—255. [X.5]
On the cohomology of certain groups, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57** (1961), 731—733. [X.5]

Уоллес (Wallace A. H.)
An introduction to algebraic topology, Pergamon, London, 1957. [II.9]

Уоттс (Watts C. E.)
Intrinsic characterizations of some additive functors, *Proc. AMS*, **11** (1960), 5—8. [XII.9]

Фаделл, Гуревич (Fadell E. and Hurewicz W.)
On the structure of higher differential operators in spectral sequences, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 314—347. [XI.3; XI.11]

Федерер (Federer H.)
A study of function spaces by spectral sequences, *Trans. AMS*, 82 (1956), 340—361. [XI.11]

Фиттинг (Fitting H.)
Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Jber. DMV*, **48** (1938), 77—141. [IV.11]

Фрейд (Freyd P.)
Functor theory, Dissertation, Princeton University, 1960. [XII.3]

Фрейденталь (Freudenthal H.)
Der Einfluß der Fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 274—316. [IV.11]

Фрелих (Fröhlich A.)
On-groups over a d. g. near ring. II. Categories and functors, *Q. J. Math. Oxon* (2), **11** (1960), 211—228.
Non Abelian homological algebra. I. Derived functors and satellites, *Proc. London Math. Soc.*, (3), **11** (1961), 239—275; II. Varieties, *Proc. London Math. Soc.*, (3), **12** (1961), 1—28.

Фрухт (Frucht R.)
Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen, *Math. Z.*, **63** (1955), 145—155. [IV.11]

Ф у к с (F u c h s L.)
Abelian groups, Budapest, 1958. Also published by Pergamon Press, Oxford and New York, 1960.
Notes on Abelian groups. I., *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sec. Math., **2** (1959), 5—23. [XII.4]

Х а р р и с (H a r r i s B.)
Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution, *Trans. AMS*, **98** (1961), 148—162. [X.13]

Х а р р и с о н (H a r r i s o n D. K.)
Infinite Abelian groups and homological methods, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 366—391; **71** (1960), 197. [XII.4]
Commutative algebras and cohomology, *Trans. AMS*, **104** (1962), 191—204. [X.13]

Х а с с е, Б р а у е р, Н ё т е р (H a s s e H., B r a u e r R. and N o e t h e r E.)
Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, *J. reine angew. Math.*, **167** (1932), 399—404. [III.11]

Х а т т о р и (H a t t o r i A.)
On fundamental exact sequences., *J. Math. Soc. Japan*, **12** (1960), 65—80 [XI. 11, упр. 4]

Х е л л е р (H e l l e r A.)
Homological algebra in Abelian categories, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 484—525. [XII,4; XII.6]

Х и л т о н, Л е д е р м а н (H i l t o n P. J. and L e d e r m a n n W.)
Homology and ringoids. I., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54** (1958), 152—167. [IX.1]

Х и л т о н, Р и с (H i l t o n P. J. and R e e s D.)
Natural maps of extension functors and a theorem of R. G. Swan, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57** (1961), 489—502. [XII.9]

Х и л т о н, У а й л и (H i l t o n P. J. and W y l i e S.)
Homology theory. Cambridge, 1960. [II.9; VIII.9; XI.7] (Имеется русский перевод: Х и л т о н П. Дж., У а й л и С., Теория гомологии и введение в алгебраическую топологию, «Мир», М., 1966.)

Х о л л (H a l l M.)
Group rings and extensions. I., *Ann. of Math.*, **39** (1938), 220—234. [IV.11]

Х о п ф (H o p f H.)
Über die Abbildungen der dreidimensionalen Spähre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, **104** (1931), 637—665. [XI.2]
Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fund. Math.*, **25** (1935), 427—440. [XI.2]
Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. Math. Helv.*, **14** (1941/1942), 257—309. [IV. 11]
Relations between the fundamental group and the second Betti group, Lectures in topology, Ann Arbor, 1942. [IV.11]
Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, *Comment. Math. Helv.*, **17** (1944/1945), 39—79. [III.11; IV.11]

Х о х ш и л ь д (H o c h s c h i l d G.)
On the cohomology groups of an associative algebra, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 58—67. [VII. 4; VII.7]
On the cohomology theory for associative algebras, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 568—579. [VII.7]
Cohomology and representations of associative algebras, *Duke M. J.*, **14** (1947), 921—948. [VII.4; IX.3; X.13]
Local class field theory, *Ann. of Math.*, **51** (1950), 331—347. [IV.11]
Cohomology classes of finite type and finite dimensional kernels for Lie algebras, *Am. J. Math.*, **76** (1954), 763—778. [X.13]
Lie algebra kernels and cohomology, *Am. J. Math.*, **76** (1954), 698—716. [X.13]
Relative homological algebra, *Trans. AMS*, **82** (1956), 246—269. [IX.8; XII.4]

Х о х ш и л ь д, С е р р (H o c h s c h i l d C. and S e r r e J.-P.)
Cohomology of group extensions, *Trans. AMS*, **74** (1953), 110—134. [XI.10; XI.11]

Х у б е р (H u b e r P. J.)
Homotopy theory in general categories, *Math. Ann.*, **144** (1961), 361—385

Х у С ы - Ц з я н (H u S.-T.)
Homotopy theory, Academic Press, New York and London, 1959. [XI. 2; XI.7] (Имеется русский перевод: Х у С ы - Ц з я н, Теория гомотопий, «Мир», М., 1964.)

Ч е х (Č e c h E.)
Les groupes de Betti d'un complex infini, *Fund. Math.*, **25** (1935), 33—44. [V.11]

Ц а с с е н х а у з (Z a s s e n h a u s H.)
The theory of groups, 2nd ed., New York, 1958 (особенно стр. 237; морфизмы). [II.9]

Ш е в а л л е (C h e v a l l e y C.)
Fundamental concepts of algebra, Academic Press, New York, 1956. [VI.9]

Ш е в а л л е, Э й л е н б е р г (C h e v a l l e y C. and E i l e n b e r g S.)
Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. AMS*, **63** (1948), 85—124. [X.13]

Ш м и д (S c h m i d J.)
Zu den Reduktionssätzen in der homologischen Theorie der Gruppen, *Archiv der Math.*, **15** (1964), 28—32. [IX.7]

Ш п е х т (S p e c h t W.)
Gruppentheorie, Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer 1956. [XII.1]

Ш р е й е р (S c h r e i e r O.)
Über die Erweiterungen von Gruppen. I., *Monatsh. Math. u. Phys.*, **34** (1926), 165—180; II. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **4** (1926), 321—346. [III.11; IV.11]

Ш у к л а (S h u k l a U.)
Cohomologie des algèbres associatives, *Ann. Sci. École Norm.*, Sup., **78** (1961), 163—209. [X.13]

Щ а р б а (S z c z a r b a R. H.)
The homology of twisted cartesian products, *Trans. AMS*, **100** (1961), 197—216. [VIII.9]

Э в е р е т т (E v e r e t t C. J.)
An extension theory for rings, *Am. J. Math.*, **64** (1942), 363—370. [X.13]

Э й л е н б е р г (E i l e n b e r g S.)
Singular homology theory, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 407—447. [II.9]
Homology of spaces with operators. I., *Trans. AMS*, **61** (1947), 378—417.
Homological dimension and syzygies, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 328—336. Errata thereto: *Ann. of Math.*, **65** (1957), 593. [VII.6; VII.7]
Abstract description of some basic functors, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1960), 231—234. [XIII.9]

Э й л е н б е р г, З и л ь б е р (E i l e n b e r g S. and Z i l b e r J. A.)
Semi-simplicial complexes and singular homology, *Ann. of Math.*, **51** (1950), 499—513. [VIII.5]
On products of complexes, *Am. J. Math.*, **75** (1953), 200—204. [VIII.5]

Э й л е н б е р г, М а к л е й н (E i l e n b e r g S. and M a c L a n e S.)
Group extensions and homology, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 757—831 [III.11; XII.4]
Relations between homology and homotopy groups, *Proc. NAS USA*, **29** (1943), 155—158. [IV.11]
General theory of natural equivalences, *Trans. AMS*, **58** (1945), 231—294. [I.8]
Relations between homology and homotopy groups of spaces, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 480—509. [IV.11]
Cohomology theory in abstract groups. I., *Ann. of Math.*, **48** (1947), 51—78. [VIII.5; VIII.9]
Cohomology theory in abstract groups. II. Group extensions with a non-abelian kernel, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 326—341. [IV.9]
Cohomology and Galois theory. I., Normality of algebras and Teichmüller's cocycle, *Trans. AMS*, **64** (1948), 1—20.
Homology of spaces with operators, II., *Trans. AMS*, **65** (1949), 49—99. [XI.7]
Relations between homology and homotopy groups of spaces. II., *Ann. of Math.*, **51** (1950), 514—533. [XI.7]
Cohomology theory of Abelian groups and homotopy theory. I., *Proc. NAS USA*, **36** (1950), 443—447. [X.13]
Homology theories for multiplicative systems, *Trans. AMS*, **71** (1951), 294—330. [X.12; X.13]
Acyclic models, *Am. J. Math.*, **75** (1953), 189—199. [VIII.7; VIII.8]
On the groups $H(\Pi, n)$. I., *Ann. of Math.*, **58** (1953), 55—106. [VIII.5; X.12]
On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation., *Ann. of Math.*, **60** (1954), 49—139. [X. 11; XII.9]
On the groups $H(\Pi, n)$. III. Operations and obstructions, *Ann. of Math.*, **60** (1954), 513—557.
On the homology theory of Abelian groups, *Can. J. Math.*, **7** (1955), 43—55. [X.12]

Э й л е н б е р г, М у р (E i l e n b e r g S. and M o o r e J.)
Limits and spectral sequences, *Topology*, **1** (1962), 1—23. [XI.11]

Э й л е н б е р г, С т и н р о д (E i l e n b e r g S. and S t e e n r o d N.)
Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952. [II.9] (Имеется русский перевод: С т и н р о д Н. и Э й л е н б е р г С., Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958.)

Э к м а н (E c k m a n n B.)
Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, *Comment. Math. Helv.*, **18** (1945—1946), 232—282. [IV.11; VIII.9]
Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen, Proc. Int. Cong. Math. Amsterdam (1954) III, 170—177. [VIII.9]

Э к м а н, Х и л т о н (E c k m a n n B. and H i l t o n P. J.)
On the homology and homotopy decomposition of continuous maps, *Proc. NAS USA*, **45** (1959), 372—375.
Homotopy groups of maps and exact sequences, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 271—304.

Э к м а н, Ш о п ф (E c k m a n n B. and S c h o p f A.)
Über injektive Moduln, *Archiv Math.*, **4** (1953), 75—78. [III.11; IX.4]

Э р е с м а н (E h r e s m a n n C.)
Gattungen von lokalen Strukturen, *Jber DMV*, **60** (1957), 49—77. [I.8]

Я м а г у т и (Y a m a g u t i K.)
On the cohomology space of a Lie triple system, *Kumamoto J. Sci.*, A, **5** (1960), 44—51. [X.13]

Дополнительная библиография

Б е н а б у (B é n a b o u J.), Catégories avec multiplication, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 1887—1890.
Algebre élémentaire dans les catégories avec multiplication, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 771—774.
Б е р м а н Г. Х., Функторы в категории локально компактных пространств, *ДАН СССР* 154, 3 (1964), 497—499.
Б у р м и с т р о в и ч И. Е., Вложение аддитивной категории в категорию с прямыми произведениями, *ДАН СССР*, 132, **6** (1960), 1235—1237.
Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е., Категории конечномерных пространств, *Вестник МГУ*, сер. 1., Матем., мех., № 4 (1963), 27—48.
Г о д е м а н (G o d e m e n t R.), Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.
Г р е й (G r a y J. M.), Sheaves with values in a category, *Topology* (to appear).
Г р о т е н д и к (G r o t h e n d i e c k A.), Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, **9** (1957), 119—221.
Technique de descente et théoremes d'existence en géométrie algébrique, II, Séminaire Bourbaki, 12 (1959/1960), exp. 195, Secrétariat Mathématique, Paris, 1961.
Technique de construction en géométrie analytique. IV, Formalisme général des foncteurs représentables, Séminaire H. Cartan 13 (1960/1961), exp. 11, Secrétariat Mathématique, Paris, 1962.
Г р о т е н д и к и Д ь е д о н н е (G r o t h e n d i e c k A. and D i e u d o n n é J.), Éléments de géométrie algébrique, Vol. III, *Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes*, **11** (1961), 1—167.

Д ж е н с (J a n s J. P.), Rings and homology, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
Д е д е к е р, М е р ш (D e d e c k e r P., M e r s c h J.), Précatégories et relations d'equivalence dans les catégories, *C. R. Acad Sci. Paris*, **256** (1963), 4811—4814.
Д и к с о н (D i c k s o n S. E.), A torsion theory for abelian categories (to appear).
Д о л ь д (D o l d A.), Lectures on homotopy theory and half exact functors, Notes taken and prepared by F. Oört, Mathematisches Institut, Amsterdam, 1964.
З и л ь б е р (Z i l b e r J. A.), Categories in homotopy theory, Dissertation, Harvard University, Cambridge, Mass., 1963.
З о н н е р (S o n n e r J.), On the formal definition of categories, *Math. Z.*, **80**(1962), 163—176.
Universal and special problems, *Math. Z.*, **82** (1963), 200—211.
И с б е л л (I s b e l l J. R.), Natural sums and direct decompositions, *Duke Math.J.*, **27** (1960), 507—512.
Subobjects, adequacy, completeness, and categories of algebras, *Rozprawy Mat.*, **36** (1964), 3—32.
Two set-theoretical theorems in categories, *Fund. Math.*, **53** (1963), 43—49.
К а н (K a n D. M.), Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 294—329.
К е л л и (K e l l y G. M.), Tensor products in categories. I, *J. Algebra* (to appear).
Complete functors in homology, I, II, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 721—735; 737—749.
On MacLane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc., *J. Algebra* (to appear).
К е н н и с о н (K e n n i s o n J. F.), Reflective functors in general topology and elsewhere, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).
К о в а л ь с к и й (K o w a l s k y H. J.), Kategorien topologischer Räume, *Math. Z.*, **77** (1961), 249—272.
К о н (C o h n P. M.), Universal algebra, Harper, New York, 1965.
К у р о ш А. Г., Прямое разложение в алгебраических категориях, Труды Моск. Мат. об-ва, 8, 1959, 319—421.
К у р о ш А. Г., Л и в ш и ц А. Х., Ш у л ь г е й ф е р Е. Г., Основы теории категорий, *УМН*, XV, 6 (1960), 3—52.
Л е й х т (L e i c h t J. B.), On commutative squares, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 59—79.
Remarks on axiomatic theory of relations (to appear).
Л и в ш и ц А. Х., Прямые разложения в алгебраических категориях, Труды Моск. Мат. об-ва, 9, 1960, 129—141.
Прямые разложения с неразложимыми сомножителями в алгебраических категориях, *Матем. сб.* (н. с.), **51** (1960), 427—458.
Сложение отображений и понятие центра в категориях, *Матем. сб.* (н. с), **60** (1963), 159—184.
Л и н т о н (L i n t o n F. E. J.), The functorial foundations of measure theory, Dissertation, Columbia University, New York, 1963.
Autonomous categories and duality, *J. Algebra* (to appear).
Л о в е р (L a w v e r e F. W.), Functorial semantics of algebraic theories, Dissertation, Columbia University, New York, 1963.
Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **50** (1963), 869—872.
М а к л е й н (M a c L a n e S.), Natural associativity and commutativity, *Rice University Studies*, **49**, № 4 (1963), 28—46.

М и т я г и н Б. С., Ш в а р ц А. С., Функторы в категориях банаховых пространств, *УМН*, **19** (1964), 65—130.
М о р и т а (M o r i t a K.), Category isomorphisms and endomorphism rings of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 451—469.
Н ё б е л и н г (N ö b e l i n g G.), Ueber die Derivierten des Inversen und des dirketen Limes einer Modulfamilie, *Topology*, **1** (1962), 47—61.
Н у а з е (N o u a z é Y.), Catégories localement de type fini et catégories localement noethériennes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257** (1963), 823—824.
О к у н а (O h k u n a T.), Duality in mathematical structure, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 6—10.
О э р т (O ö r t F.), Natural maps of extension functors, *Nederl. Akad. Wetensch.*, ser. A 66, № 4-Indag. Math., **25** (1963), 559—566.
Yoneda extensions in abelian categories, *Math. Ann.*, **153** (1964), 227—235.
Р о о с (R o o s J. E.), Sur les foncteurs dérivées de lim. Applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 3702—3704.
С а м у э л ь (S a m u e l P.), On universal mappings and free topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 591—598.
С е г а л (S e g h a l S. K.), Ringoids with minimum conditions, *Math. Z.*, **83** (1964), 395—408.
С е м а д е н и (S e m a d e n i Z.), Free and direct objects, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 63—65.
Projectivity, injectivity, and duality, *Rozprawy Mat.*, **35** (1963), 1—47.
С т а ш е ф (S t a s h e f f J. D.), Homotopy associativity of H-spaces. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 273—292.
С у о н (S w a n R. G.), Theory of sheaves, Univ. Chicago Press, Chicago, Ill., 1964.
У о к е р К., У о к е р Е. (W a l k e r C. L., W a l k e r E. A.), Quotient categories and rings of quotients (to appear).
У о т т с (W a t t s C. E.), Homological algebra of categories. I (to appear).
Ф л е й ш е р (F l e i s c h e r I.), Sur le probleme d'application universelle de M. Bourbaki, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), 3161—3163.
Ф р е й д (F r e y d P.), Relative homological algebra made absolute, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **49** (1963), 19—20.
Abelian categories, Harper and Row, New York, 1964.
Ф у к с Д. Б., О гомотопической двойственности, *ДАН СССР*, **141**, **4** (1961), 818—821.
Об естественных отображениях функторов в категории топологических пространств, *Матем. сб.*, **62** (1963), 160—179.
Ф у к с Д. Б., Ш в а р ц А. С., К гомотопической теории функторов в категории топологических пространств, *Матем. сб.*, **62**, (1963).
Х е л е м с к и й А. Я., Алгебры нильпотентных операторов и категории, ассоциированные с ними, *Вестник МГУ*, сер. 1, матем., мех., № 4 (1963), 49—55.
Х ё н к е (H o e h n k e H. J.), Zur Theorie der Gruppoide, I, II, *Math. Nachr.*, **24** (1962), 137—168, 169—179; III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **13** (1962), 91—100; IV, V, *Monatsh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin*, **4** (1962), 337—342, 539—544.
Einige Bemerkungen zur Einbettbarkeit von Kategorien in Gruppen, *Math. Nachr.*, **25** (1963), 179—190.
Х и г г и н с (H i g g i n s P. J.), Presentations of groupoids, with applications to groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 7—20.
Х и л т о н (H i l t o n P. J.), Note on free and direct products in general categories, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **13** (1961), 38—49.
Х и л т о н, Л и д е р м а н (H i l t o n P. J., L e d e r m a n n W.), On the Jordan-Hölder theorem in homological monoids, *Proc. London. Math. Soc.*, **10** (1960), 321—334.

Хилтон, Экман (Hilton P. J., Eckmann B.), Homotopy groups of maps and exact sequences, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 271—304.
Operators and cooperators in homotopy theory, *Math. Ann.*, **141** (1960), 1—21.
Structure maps in group theory, *Fund. Math.*, **50** (1961/1962), 207—221.
Group-like structures in general categories, I, *Math. Ann.*, **145** (1961/1962), 227—255.
Group-like structures in general categories. II, Equalizers, limits, lengths, *Math. Ann.*, **151** (1963), 150—186.
Group-like structures in general categories. III, Primitive categories, *Math. Ann.*, **150** (1963), 165—187.

Хофман (Hofmann F.), Ueber eine die Kategorie der Gruppen umfassende Kategorie, S.-B. Bayer., *Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* (1960), 163—204.

Хубер (Huber P. J.), Standard constructions in abelian categories, *Math. Ann.*, **146** (1962), 321—325.

Хушек (Hušek M.), *S*-categories, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **5** (1964), 37—46.

Цаленко М. С., К основам теории категорий, *УМН*, XV, **6** (1960), 53—58.
Правильные объединения и специальные подпрямые суммы в категориях, *Матем. сб.* (н. с.), **57** (1962), 75—94.
Пополнение категорий прямыми и свободными объединениями объектов, *Матем. сб.* (н. с.), **60** (1963), 235—256.
Соответствия над квазиточной категорией, *ДАН СССР*, **155** (1964).

Шефер (Schafer J. A.), The dual of the flabby is the bar, *Proc. Amer. Math. Soc.* (to appear).

Шварц А. С., Двойственность функторов, *ДАН СССР*, **148** (1963), 288—291.
Функторы в категориях банаховых пространств, *ДАН СССР*.

Ши (Shih W.), Ensembles simpliciaux et operations cohomologiques, Séminaire H. Cartan (1958/1959), exp. 7, Secrétariat Mathématique, Paris.

Шульгейфер Е. Г., К общей теории радикалов в категориях, *Матем. сб.* (н. с.), **51** (1960), 487—500.
О структуре идеалов объекта категории, I, II. *Матем. сб.* (н. с.), **54** (1961), 209—224, **62** (1963), 335—344.
Правильные вложения категорий, *Матем. сб.* (н. с.), **61** (1963), 467—503.

Эпштейн (Epstein D. B. A.), Steenrod operations in abelian categories (to appear).

Эресман (Ehresmann Ch.), Catégories topologiques et catégories différentiables, Colloque de géometrie différentielle globale, Bruxelles, 1958.
Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **10** (1960), 307—332.
Catégorie des foncteurs types, *Rev Un. Mat. Argentina*, **20** (1960), 194—209.
Catégories doublées et catégories structurées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 1198—1201.
Catégories structurées d'operateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 2080—2083.
Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 2280—2283.
Product croisé des catégories, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 2461—2464.
Structures quotiments, *Comment. Math. Helv.*, **38** (1964), 219—283.
Catégories structurées, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, **80** (1963), 349—426.
Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.*, **54** (1964), 211—228.

Список обозначений

$\to$ гомоморфизм;
$\rightarrowtail$ мономорфизм;
$\twoheadrightarrow$ эпиморфизм;
$\dashrightarrow\cdots>$ гомоморфизм, индуцированный «пренебрежением» некоторой структуры; гомоморфизм, который нужно построить;
$\rightharpoonup$ аддитивное отношение;
$\Rightarrow$ влечет; сходимость спектральной последовательности (IX.3);
$\exists$ существует;
& и;
∂ символ взятия границы;
δ символ взятия кограницы (II.3.1);
$*$, $\#$ индуцированный гомоморфизм (ставится наверху или внизу) (I.2.4); (I.6.1); (III.6.8);
$\sim$ гомологичность (II.1.2), (II.2);
$\simeq$ гомотопность (II.2.3);
$\cong$ изоморфизм;
$\lesssim$ отношение включения (XII.2);
$\equiv$ конгруэнтность расширений (III.5.2);
$\circ$ произведение;
$\in$ принадлежность;
$\varnothing$ пустое множество;
$\subset$ включение;
[ ] базисный элемент *B*-резольвенты (IV.5.1), (X.2);
$\bigcap$ $\cap$ пересечение;
$\bigcup$ $\cup$ объединение;
$\smile$ $\smile$-умножение (VIII.9.5);
$\vee$ $\vee$-умножение (V.III.4.1);
$\times$ декартово произведение;
$\otimes$ тензорное произведение;
Σ, $\oplus$ прямая сумма (I.4);
Π прямое произведение;
$\|$ короткая точная последовательность;
$\square$ «пренебрегающий» функтор;

∇, ∇_A кодиагональное отображение (III.2.1′), (IX.1.6);
0 нулевой элемент или нулевое отображение;
$0'$ нулевой объект категории (IX.1);
1, 1_Λ единица группы, кольца или алгебры;
1, 1_A тождественное отображение $A \to A$;
$\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$ категория;
$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ двойственная категория;
$\mathcal{M}_R$ категория правых R-модулей;
E точная последовательность; внешняя алгебра;
E_K внешняя алгебра над K;
F свободный модуль; поле;
H гомология или когомология;
I отображение единицы $K \to \Lambda$;
K комплекс;
L комплекс; проективный модуль; левый идеал (I.2);
P проективный модуль;
Q поле рациональных чисел;
R кольцо;
R^{op} антиизоморфное кольцо;
S длинная точная последовательность; кольцо;
$S(X)$ сингулярный комплекс пространства X;
T функтор; сингулярный симплекс; кольцо;
U DGA-алгебра;
V векторное пространство; алгебра Хопфа;
X, Y комплекс, топологическое пространство;
Z кольцо целых чисел;
a, r элементы $a \in A$, $r \in R$ и т. д.;
d_i граничный оператор (симплициального множества) (VIII.5);
p, p_Λ, p_H гомологическое умножение (VIII.1);
s, t гомотопия;
s_i оператор вырождения (симплициального множества) (VIII.5);
Γ морфизм диаграмм (I.7);
Δ, Δ^n симплекс, n-мерный (аффинный) симплекс (II.7);
Δ, Δ_A диагональное отображение (III.2.1), (IX.1.6);
K коммутативное основное кольцо;
Λ алгебра;
Π мультипликативная группа;
Σ алгебра;
Ω алгебра;
α отображение ассоциативности для тензорного умножения (VI.2.3), (VI.8.3);
η сопряженная ассоциативность (V.3.5); (VI.8.7);
θ изоморфизм, эквивалентность в категории;

ι вложение слагаемого прямой суммы (I.4.I);
$\varkappa$, λ мономорфизм;
π_i проекция на слагаемое прямой суммы (I.4.I);
ρ, σ, τ эпиморфизм;
τ внутренняя четверная перестановка (VI.2.4), (VI.8.4);
ψ кодиагональное отображение коалгебры или алгебры Хопфа (VI.9).

Сокращения (с прописной буквы — для модулей, со строчной буквы — для категорий)

bidim — размерность как бимодуля (VII.5);
cls — гомологический класс;
Coim, coim — кообраз;
Coker, coker — коядро;
Def — область определения аддитивного отношения (II.6);
deg — степень элемента или морфизма;
Ext, ext — группа расширений;
h. dim — гомологическая размерность (VII.I);
Hom, hom — группа гомоморфизмов;
Im, im — образ;
Ind — неопределенность (аддитивного отношения) (II.6);
Ker, ker — ядро;
l.gl. dim — левая глобальная размерность кольца (VII.I);
Tor — периодическое произведение.

Указатель

Оглавление

С. Маклейн
ГОМОЛОГИЯ

Редактор *Э. Э. Пейсахович*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Ю. И. Экке*

Сдано в производство 26/IV 1966 г.
Подписано к печати 16/XI 1966 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$=17,0 бум. л. 34,0 печ. л.
Уч.-изд. л. 31,77. Изд. № 1/3421
Цена 2 р. 47 к. Зак. 353
Темплан изд-ва «Мир» 1966 г., пор. № 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9