IDEALS OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

B. Malgrange

Professeur à la Faculté des Sciences,
Orsay, Paris

OXFORD UNIVERSITY PRESS
1966

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

Б. МАЛЬГРАНЖ

ИДЕАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Перевод с английского
А. М. ГАБРИЭЛОВА

Под редакцией
В. П. ПАЛАМОДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1968

УДК 513.83

В этой монографии крупного французского ученого трактуется ряд важных вопросов современного анализа (теоремы о продолжении, неравенство Лоясевича, подготовительная теорема Вейерштрасса — Мальгранжа, проблема деления Лорана Шварца и т. д.). Изложение сжатое, но доступное для начинающих.

Математики всех специальностей найдут в книге много для себя интересного. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге изложено с некоторыми дополнениями содержание курса лекций, прочитанных мной в Тата-институте фундаментальных проблем в Бомбее в январе — феврале 1964 г.

В процессе обработки материала я беседовал со многими математиками, особенно с А. Картаном, Г. Глезером, Л. Шварцем и Р. Томом, и извлек из этих бесед много полезного. В частности, я считаю своим долгом заметить, что один из основных результатов, „подготовительная теорема для дифференцируемых функций", был как предположение высказан мне Р. Томом и что ему пришлось приложить большие усилия для преодоления моего первоначального скептицизма.

Я рад также поблагодарить Рагхавана Нарасимхана и Н. Венкатисвара Рао, которые записали часть лекций, перевели остальное и, несмотря на их собственные дела, взяли на себя весь труд, связанный с публикацией этой книги.

Б. Мальгранж

Орсэ, июль 1965 г.

Глава I

ТЕОРЕМА УИТНИ О ПРОДОЛЖЕНИИ

1. Обозначения. R обозначает множество всех действительных чисел, **N** — множество натуральных чисел. Для всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ через $\mathscr{E}^m(\Omega)$ [соответственно $\mathscr{E}^m_c(\Omega)$] обозначается пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых в Ω действительнозначных функций (соответственно функций с компактными носителями в Ω). Мы опускаем индекс m в случае $m = \infty$. Если $\Omega = \mathbf{R}^n$, мы пишем $\mathscr{E}^m$, $\mathscr{E}^m_c$ вместо $\mathscr{E}^m(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{E}^m_c(\mathbf{R}^n)$. Для вектора $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ обозначим через $|k|$ сумму $k_1 + \ldots + k_n$, через $k!$ произведение $(k_1!) \ldots (k_n!)$. Множество $\mathbf{N}^n$ упорядочим по отношению: „$k \leqslant l$ тогда и только тогда, когда $k_j \leqslant l_j$ для всякого j“. Через $\binom{l}{k}$ обозначается $\frac{l!}{k!\,(l-k)!}$, если $k \leqslant l$. Иногда мы будем писать $\binom{l}{k} = 0$ для $k > l$. Через $|x|$ обозначается евклидова норма вектора $x \in \mathbf{R}^n$.

Пусть K — компактное подмножество в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим все векторы $F = (f^k)_{|k| \leqslant m}$, где f^k — непрерывные функции на K. Каждый такой вектор F называется *m-джетом* [1]. Пусть $J^m(K)$ обозначает пространство всех m-джетов, снабженное естественной структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$. Введем в $J^m(K)$ норму $|F|^K_m = \sup\limits_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant m}} |f^k(x)|$, иногда мы будем писать $|F|_m$ вместо $|F|^K_m$.

Положим $F(x) = f^0(x)$ для всех x из K и F из $J^m(K)$. Через D^k: $J^m(K) \to J^{m-k}(K)$ обозначим линейное отображение, определенное дифференцированием $D^kF =$

---

[1] Или m-струей. — *Прим. ред.*

$=(f^{k+l})_{|l|\leqslant m-|k|}$ $(|k|\leqslant m)$. Для всякой функции $g\in\mathcal{E}^m$ через $J^m(g)$ обозначается джет $\left(\frac{\partial^k g}{\partial x^k}\right)_{|k|\leqslant m}\in J^m(K)$, образованный сужениями функций $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}$ на K. Для $x\in\mathbf{R}^n$, $a\in K$, $F\in J^m(K)$ положим

$$T_a^m F(x)=\sum_{|k|\leqslant m}\frac{(x-a)^k}{k!}f^k(a).$$

Очевидно, что для фиксированных a из K и F из $J^m(K)$ функция $T_a^m F$ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{R}^n$. Мы будем писать $J^m(T_a^m F)=\tilde{T}_a^m F$ и $R_a^m F=F-\tilde{T}_a^m F$.

Для $x\in K$, $y\in K$ имеем, очевидно,

$$T_x^m\circ\tilde{T}_y^m=T_y^m \quad \text{и} \quad \tilde{T}_x^m\circ\tilde{T}_y^m=\tilde{T}_y^m; \tag{1.1}$$

$$R_x^m\circ R_y^m=R_x^m; \tag{1.2}$$

$$R_x^m\circ\tilde{T}_y^m=0; \tag{1.3}$$

$$\tilde{T}_x^m\circ R_y^m=-\tilde{T}_y^m\circ R_x^m=\tilde{T}_x^m-\tilde{T}_y^m=R_y^m-R_x^m; \tag{1.4}$$

$$D^k\circ\tilde{T}_x^m=\tilde{T}_x^{m-|k|}\circ D^k. \tag{1.5}$$

Для всякого джета $F\in J^m(K)$

$$(R_x^m F)^k=f^k-T_x^{m-|k|}\circ D^k F. \tag{1.6}$$

С этого момента мы опускаем символ $\sim$ над буквой T и „отождествляем" $T_a^m F$ с $J^m(T_a^m F)$.

2. Дифференцируемые функции в смысле Уитни.

Определение 2.1. Возрастающая непрерывная вогнутая функция α: $[0,\infty)\to[0,\infty)$, обращающаяся в нуль в точке 0, называется *модулем непрерывности*.

Теорема 2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(2.2.1) $(R_x^m F)^k(y) = o(|x-y|^{m-|k|})$ *для* $x, y \in K$ *и* $|k| \leqslant m$, *когда* $|x-y| \to 0$.

(2.2.2) *Существует такой модуль непрерывности* α, *что*

$$|(R_x^m F)^k(y)| \leqslant |x-y|^{m-|k|}\alpha(|x-y|)$$

для $x, y \in K$ *и* $|k| \leqslant m$.

(2.2.3) *Существует такой модуль непрерывности* α_1, *что*

$|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)| \leqslant \alpha_1(|x-y|)(|x-z|^m + |y-z|^m)$ *для* $x, y \in K$ *и* $z \in \mathbb{R}^n$.

Более того, если выполняется (2.2.2), *можно выбрать* $\alpha_1 = C\alpha$, *где* C *зависит только от* m *и* n. *Если выполняется* (2.2.3), *можно выбрать* $\alpha = C\alpha_1$, *где* C *зависит только от* m *и* n.

Доказательство. Очевидно, что из (2.2.2) следует (2.2.1). Предположим, что выполняется (2.2.1). Пусть $\beta(t) = \sup \dfrac{|(R_x^m F)^k(y)|}{|x-y|^{m-|k|}}$, где верхняя грань берется по x, $y \in K$, $x \neq y$, $|x-y| \leqslant t$, $|k| \leqslant m$. Тогда $\beta(t)$ — возрастающая функция, непрерывная в нуле, и $\beta(0) = 0$. Теперь мы можем выбрать такой модуль непрерывности α, что $\alpha(t) \geqslant \beta(t)$ для всех t (рассмотрев выпуклую огибающую положительной оси t и графика β). Таким образом, из (2.2.1) следует (2.2.2). Заметим, что функция α постоянна для $t \geqslant \operatorname{diam} K$ и равна $\beta(\operatorname{diam} K)$.

Предположим теперь, что выполнено (2.2.2). Используя (1.5) и (1.6), получаем

$$T_x^m F(z) - T_y^m F(z) = \sum_{|k| \leqslant m} \frac{(z-x)^k}{k!}(R_y^m F)^k(x).$$

Отсюда

$$|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|k| \leqslant m} \frac{|z-x|^{|k|}}{k!}|x-y|^{m-|k|}\alpha(|x-y|) \leqslant$$
$$\leqslant C\alpha(|x-y|)(|x-z|^m + |y-z|^m),$$

где C зависит только от m и n. Взяв $\alpha_1 = C\alpha$, мы получим (2.2.3).

Докажем теперь, что из (2.2.3) следует (2.2.2). Как и раньше, из (1.6) получаем для всех $z \in \mathbf{R}^n$, $x, y \in K$ оценку

$$\left| \sum_{|k| \leqslant m} (R_y^m F)^k (x) \frac{(z-x)^k}{k!} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1(|x-y|)(|x-z|^m + |y-z|^m).$$

Положив $z - x = |x-y|(z'-x)$, $|x-y| = \lambda$, получим

$$\left| \sum_{|k| \leqslant m} \frac{\lambda^{|k|}}{k!} (z'-x)^k (R_y^m F)^k (x) \right| \leqslant$$
$$\leqslant C\alpha_1(|x-y|)\lambda^m (1 + |z'-x|^m),$$

где C — постоянная, зависящая только от m и n. Фиксируя x и y и рассматривая левую часть как полином от $z' - x$ (отметим, что коэффициенты определяются линейно через значения полинома в подходящей конечной системе точек), мы видим, что существует такая константа C_1, зависящая только от m и n, что

$$\left| \frac{\lambda^{|k|}}{k!} (R_y^m F)^k (x) \right| \leqslant C_1 \alpha_1(|x-y|)\lambda^m,$$

откуда следует (2.2.2).

Последнее утверждение теоремы вытекает из доказанного выше.

Определение 2.3. Через $\mathscr{E}^m(K)$ обозначим пространство всех таких F из $J^m(K)$, для которых выполнено одно из утверждений (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3). Элементы пространства $\mathscr{E}^m(K)$ называются *функциями класса C^m по Уитни на K*. (Разумеется, это не совсем обычные функции, но это не вызовет недоразумения.)

Модуль непрерывности, определенный в (2.2.2), называется *модулем непрерывности функции F*.

Определим нормы в пространстве $\mathscr{E}^m(K)$ следующим образом:

$$\|F\|_m^K = |F|_m^K + \sup_{\substack{x,\, y \in K \\ x \neq y, \\ |k| \leqslant m}} \frac{\left|(R_x^m F)^k(y)\right|}{|x-y|^{m-k}},$$

$$\|F\|_m'^K = |F|_m^K + \sup_{\substack{x,\, y \in K,\, x \neq y \\ |k| \leqslant m \\ z \in \mathbf{R}^n}} \frac{\left|T_x^m F(z) - T_y^m F(z)\right|}{|x-z|^m + |y-z|^m}$$

(мы обычно будем опускать индекс K). Существуют такие постоянные C и C_1, зависящие только от m и n, что

$$\|F\|_m \leqslant C\|F\|_m' \leqslant C_1\|F\|_m.$$

(Доказательство подобно предыдущему.)

Замечание 2.4. Отметим также, что мы можем выбрать функции α и α_1 в (2.2.2) и (2.2.3) так, чтобы выполнялись равенства

$$\|F\|_m = |F|_m + \alpha(\operatorname{diam} K), \qquad \|F\|_m' = |F|_m + \alpha_1(\operatorname{diam} K).$$

Вследствие эквивалентности введенных норм мы будем опускать штрих и обозначать обе нормы просто $\|F\|_m$. $\mathscr{E}^m(K)$ оказывается банаховым пространством относительно введенной нормы. Доказательство предоставляем читателю.

Замечание 2.5. Пусть α обозначает модуль непрерывности функции F. Тогда существует такая константа C, зависящая только от m и n, что для всякой функции F из $\mathscr{E}^m(K)$, для любых $x, y \in K$ и $|k| \leqslant m$ выполняется неравенство

$$\left|D^k \circ T_x^m F(z) - D^k \circ T_y^m F(z)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\alpha(|x-y|)\left(|x-z|^{m-|k|} + |y-z|^{m-|k|}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству того, что из (2.2.2) следует (2.2.3).

3. Теорема Уитни о продолжении. Сначала будет доказана важная

Лемма 3.1. *Для любого компактного множества $K \subset \mathbf{R}^n$ существует семейство функций $\varphi_i (i \in I)$ из $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n \setminus K)$, обладающих следующими свойствами:*

(3.1.1) $0 \leqslant \varphi_i$ *для всякого* $i \in I$;

(3.1.2) *семейство носителей функций $\varphi_i (i \in I)$ является локально конечным, и для всякой точки $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$ число $N(x)$ различных функций φ_i, носители которых содержат точку x, не превосходит* 4^n;

(3.1.3) $\sum\limits_{i \in I} \varphi_i(x) \equiv 1$ *в* $\mathbf{R}^n \setminus K$;

(3.1.4) *для всякого $i \in I$ справедливо неравенство* $2d(\operatorname{supp} \varphi_i, K) \geqslant \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi_i)$;

(3.1.5) *существует такая константа C_k, зависящая только от k и n, что для $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$*

$$|D^k \varphi_i(x)| \leqslant C_k \left(1 + \frac{1}{d(x, K)^{|k|}}\right).$$

Доказательство. Разобьем $\mathbf{R}^n$ на замкнутые кубы со сторонами длины $\frac{1}{2^p}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ плоскостями $x_v = \frac{j_v}{2^p}$, где $1 \leqslant v \leqslant n$, а $j_1, \ldots, j_n$ пробегают все целые значения.

Обозначим через K_0 семейство всех таких кубов S нулевого разбиения, что $d(S, K) \geqslant \sqrt{n}$. Определим по индукции $K_p (p > 0)$ как семейство кубов S из p-го разбиения, не содержащихся ни в одном из кубов, входящих в $\bigcup\limits_{j < p} K_j$, и таких, что $d(S, K) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2^p}$. Пусть $I = \bigcup\limits_{p \geqslant 0} K_p$. Рассмотрим такую C^∞-функцию ψ, что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$; $\psi(x) = 1$, если $|x_i| \leqslant \frac{1}{2}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; $\psi(x) = 0$, если $|x_i| \geqslant \frac{3}{4}$ для какого-нибудь i. Для всякого куба $S \in I$ через ψ_S обозначим функцию $\psi\left(\frac{x - x_S}{l_S}\right)$, где x_S — центр, а l_S — длина стороны куба S. По построению множества I носители функций $\psi_S (S \in I)$ образуют локально конечное семейство. Таким образом, мы можем положить $\varphi_S(x) =$

$= \dfrac{\psi_S(x)}{\sum\limits_{T \in I} \psi_T(x)}$. Нетрудно проверить, что семейство $\varphi_S (S \in I)$ обладает свойствами (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.3).

Для доказательства (3.1.4) заметим, что

$$d(\operatorname{supp}\varphi_S, K) \geqslant \frac{3\sqrt{n}\, l_S}{4} \geqslant \frac{\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_S)}{2}.$$

Теперь докажем (3.1.5). Из определения функций ψ_S следует, что

$$|D^k\psi_S(x)| = \left| \frac{1}{l_S^{|k|}} D^k\psi\left(\frac{x - x_S}{l_S}\right)\right| \leqslant \frac{C}{l_S^{|k|}},$$

где C — константа, зависящая только от k. Из свойства (3.1.2) следует, что для $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$

$$1 \leqslant \sum_{S \in I} \psi_S(x) \leqslant 4^n.$$

Отсюда по формуле Лейбница получаем, что $|D^k\varphi_S(x)| \leqslant \leqslant \dfrac{C'}{l_S^{|k|}}$, где C' зависит только от k и n. Таким образом, если $l_S = 1$, то $|D^k\varphi_S(x)| \leqslant C'$. Если же $l_S < 1$, то для $x \in \operatorname{supp}\varphi_S$ расстояние $d(x, K)$ не меньше $\dfrac{\sqrt{n}\, l_S}{2}$. Итак, в любом случае для $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$

$$|D^k\varphi_S(x)| \leqslant C'\left(1 + \left(\frac{\sqrt{n}}{2d(x, K)}\right)^{|k|}\right).$$

Теорема 3.2 (Уитни [1]). *Существует такое линейное отображение W: $\mathscr{E}^m(K) \to \mathscr{E}^m$, что $D^kWF(x) = f^k(x)$ для всякой функции $F \in \mathscr{E}^m(K)$, $x \in K$ и $|k| \leqslant m$.*

Доказательство. Для всякого куба $S \in I$ выберем такую точку $a_S \in K$, что $d(\operatorname{supp}\varphi_S, K) = d(\operatorname{supp}\varphi_S, a_S)$. Определим функцию $\tilde{f}$ на $\mathbf{R}^n$ равенствами

$$\tilde{f}(x) = f^0(x), \quad \text{если} \quad x \in K;$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{S \in I} \varphi_S(x)\, T^m_{a_S} F(x), \quad \text{если} \quad x \notin K.$$

Очевидно, функция $\tilde{f}$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Для всех k, по модулю не превосходящих m, определим функцию $\tilde{f}^k$ равенствами

$$\tilde{f}^k(x) = f^k(x), \quad \text{если} \quad x \in K;$$

$$\tilde{f}^k(x) = D^k\tilde{f}(x), \quad \text{если} \quad x \notin K.$$

Рассмотрим такой куб L, что $K \subset \mathring{L}$[1]), и пусть $\lambda = \sup\limits_{x \in L} d(x, K)$. Обозначим через α модуль непрерывности, обладающий свойством (2.2.3), и докажем, что:

(3.2.1) существует такая константа C, зависящая только от m, n и λ, что для всякого k ($|k| \leqslant m$), $a \in K$, $x \in L$

$$|\tilde{f}^k(x) - D^k T_a^m F(x)| \leqslant C\alpha(|x-a|)\,|x-a|^{m-|k|};$$

(3.2.2) для всякого k ($|k| > m$) существует такая константа C_k, зависящая только от k, n и λ, что для $x \in L \setminus K$

$$|D^k\tilde{f}(x)| \leqslant \frac{C_k\alpha(d(x, K))}{d(x, K)^{|k|-m}}.$$

В самом деле, для всякого $x \in L \setminus K$

$$\tilde{f}(x) - T_a^m F(x) = \sum_{S \in I} \varphi_S(x)\left(T_{a_S}^m F(x) - T_a^m F(x)\right).$$

Отсюда, применяя формулу Лейбница, получаем

$$D^k\tilde{f}(x) - D^k T_a^m F(x) =$$
$$= \sum_{S \in I} \sum_{l \leqslant k} \binom{k}{l} D^l\varphi_S(x)\, D^{k-l}\left(T_{a_S}^m F(x) - T_a^m F(x)\right).$$

Рассмотрим те слагаемые в правой части, для которых $l = 0$. Если $x \in \operatorname{supp}\varphi_S$, то очевидно, что $d(x, K) \leqslant |x-a|$, и из (3.1.4) следует, что $d(x, K) \leqslant |x - a_S| \leqslant 3d(x, K)$, так что

$$\alpha(|a - a_S|) \leqslant \alpha(|x-a| + |x-a_S|) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(4|x-a|) \leqslant 4\alpha(|x-a|)$$

[1]) $\mathring{L}$ обозначает внутренность L. — *Прим. перев.*

(в силу вогнутости α). Отсюда, используя замечание 2.5 и лемму 3.1, получаем оценку типа (3.2.1). Если $l \neq 0$, то сумма $\sum_{S \in I} D^l \varphi_S(x) D^{k-l}\left[T^m_{a_S} F(x) - T^m_a F(x)\right]$ равна сумме $\sum_{S \in I} D^l \varphi_S(x) D^{k-l}\left[T^m_{a_S} F(x) - T^m_b F(x)\right]$ для всякой точки $b \in K$, поскольку $\sum_{S \in I} D^l \varphi_S(x) = 0$. Если точка b выбрана так, что $|x - b| = d(x, K)$, мы можем получить оценку (3.2.1) для такой суммы, рассуждая так же, как и в случае $l = 0$.

Таким образом, оценка (3.2.1) получена для всех $x \notin K$. А для $x \in K$ эта оценка следует из определения $\mathscr{E}^m(K)$ и α.

Доказательство утверждения (3.2.2) проведем таким же образом, выбрав такую точку $a \in K$, что $|x - a| = d(x, K)$, и заметив, что

$$D^k T^m_a F(x) = 0 \quad \text{и} \quad D^{k-l}\left[T^m_{a_S} F(x) - T^m_a F(x)\right] = 0,$$

если $|k - l| > m$.

Покажем теперь, что функция $\tilde{f}$ принадлежит классу C^m и $D^k \tilde{f} = f^k$ для $|k| \leqslant m$. Отсюда следует утверждение теоремы, если положить $WF = \tilde{f}$. Доказательство проведем по индукции. Предположим, что результат верен для всех $l < k$. Можно написать $k = l + (j)$, где $|l| = |k| - 1$, а $(j) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — вектор с единицей на j-м месте и нулями на остальных. Тогда достаточно доказать, что $\frac{\partial \tilde{f}^l}{\partial x_j}(x) = f^k(x)$ для всякой точки $x \in K$, так как уже известно, что вне K функция f бесконечно дифференцируема.

Для доказательства применим (3.2.1), заменив k на l. Сохраняя в левой части только члены степени 0 и 1 по $(x - a)$, получаем для $x \in L$

$$\tilde{f}^l(x) - f^l(a) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\, \tilde{f}^{l+(i)}(a) = o(|x - a|),$$

откуда и следует нужный результат.

Теперь мы докажем некоторые дополнения к теореме Уитни, принадлежащие Глезеру [1]. Построенное отображение W: $\mathscr{E}^m(K) \to \mathscr{E}^m$, очевидно, индуцирует отображение из $\mathscr{E}^m(K)$ в $\mathscr{E}^m(L)$. Обозначим через $\tilde{F}$ образ функции F в $\mathscr{E}^m(L)$ при отображении W и через α — модуль непрерывности функции F.

Дополнение 3.3. *Для $|k|>m$ и $x \in L \setminus K$ существует такая константа C, зависящая только от k, n и λ, что*

$$|D^k\tilde{F}(x)| \leqslant \frac{C\alpha(d(x, K))}{d(x, K)^{|k|-m}}.$$

Это переформулировка утверждения (3.2.2).

Замечание 3.4. Отметим, что нормы $\| \quad \|_m$ и $| \quad |_m$ эквивалентны в $\mathscr{E}^m(L)$. Пусть $F \in \mathscr{E}^m$ и функция α является модулем непрерывности для всех f^k, $|k|=m$ (т. е. $|f^k(x)-f^k(y)| \leqslant \alpha(|x-y|)$ для $x, y \in L$). Тогда α, умноженная на некоторую константу, зависящую только от m и n, является модулем непрерывности для F. Это легко проверяется по формуле Тейлора. Этот результат верен и для многих других компактных множеств, например для выпуклых множеств, но в общем случае не верен.

Дополнение 3.5. *Существует такая константа C, зависящая только от m, n и λ, что $\|\tilde{F}\|_m^L \leqslant C\|F\|_m^K$ для всех $F \in \mathscr{E}^m(K)$.*

Доказательство. Ввиду предшествующих замечаний достаточно доказать это для $|\tilde{F}|_m^L$ вместо $\|\tilde{F}\|_m^L$. Пусть $x \in L$, $a \in K$. Из неравенства (3.2.1) получаем для $|k| \leqslant m$

$$\left|\tilde{f}^k(x) - \sum_{|l| \leqslant m-|k|} \frac{(x-a)^l}{l!}\tilde{f}^{k+l}(a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\alpha(|x-a|)|x-a|^{m-|k|}.$$

Поэтому из замечания 2.4 следует, что

$$|\tilde{f}^k(x)| \leqslant C(\lambda, m, n)\|F\|_m.$$

Дополнение 3.6. *Существует такая константа C, зависящая только от m, n и λ, что если α — модуль* *непрерывности функции F, обладающий свойством* (2.2.3), *то $C\alpha$ — модуль непрерывности функции $\tilde{F}$.*

Доказательство. Вследствие замечания 3.4 достаточно найти такой модуль непрерывности для каждой функции $\tilde{f}^k$, $|k|=m$. Пусть точки x, y содержатся в L. Если одна из них принадлежит K, то из (3.2.1) следует, что

$$|\tilde{f}^k(x)-\tilde{f}^k(y)|\leqslant C\alpha(|x-y|).$$

Предположим теперь, что $x, y \in L\setminus K$.

Случай (i). Предположим, что $d(x, K)\geqslant 2|x-y|$. По теореме Лагранжа

$$\tilde{f}^k(x)-\tilde{f}^k(y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\frac{\partial \tilde{f}^k}{\partial x_i}(z),$$

где z принадлежит отрезку, соединяющему x и y. Отсюда в силу (3.2.2)

$$|\tilde{f}^k(x)-\tilde{f}^k(y)|\leqslant\frac{C\alpha(d(z, K))}{d(z, K)}|x-y|,$$

где C зависит только от m, n и λ. Но по предположению $d(z, K)\geqslant|x-y|$, и в силу вогнутости α

$$\frac{\alpha(d(z, K))}{d(z, K)}|x-y|\leqslant\alpha(|x-y|).$$

Случай (ii). Предположим, что $d(x, K)<2|x-y|$. Выберем такие a, $b\in K$, что

$$|x-a|=d(x, K),\quad (y-b)=d(y, K).$$

Тогда

$$|y-b|\leqslant 3|x-y|,\quad |a-b|\leqslant 6|x-y|.$$

Записывая разность $\tilde{f}^k(x)-\tilde{f}^k(y)$ в виде $\tilde{f}^k(x)-\tilde{f}^k(a)+\tilde{f}^k(a)-\tilde{f}^k(b)+\tilde{f}^k(b)-\tilde{f}^k(y)$ и используя (3.2.2), получаем требуемое.

Заметим, что здесь существенно предположение вогнутости α. В самом деле, можно найти компактное связное множество K и непостоянную непрерывную функцию f

на K с модулем непрерывности $t^{3/4}$. Очевидно, что f не может быть продолжена на куб с тем же самым модулем непрерывности! (См. Глезер [1].)

4. Теорема Уитни для случая C^∞. Мы сохраняем обозначения, употреблявшиеся ранее. Обозначим через $\mathcal{J}^m(K;\,L)$ семейство таких джетов из $\mathcal{E}^m(L)$, сужения которых на K равны нулю. Пусть i_m: $\mathcal{J}^m(K;\,L)\to\mathcal{E}^m(L)$ — каноническое вложение, а ψ_m: $\mathcal{E}^m(L)\to\mathcal{E}^m(K)$ — естественное отображение сужения. Тогда теорема 3.2 может быть сформулирована следующим образом:

Последовательность $0\to\mathcal{J}^m(K;\,L)\xrightarrow{i_m}\mathcal{E}^m(L)\xrightarrow{\psi_m}$ $\xrightarrow{\psi_m}\mathcal{E}^m(K)\to 0$ *точна.*

Пусть отображение η_m: $J^{m+1}(K)\to J^m(K)$ определено формулой $\eta_m(F)=(f^k)_{|k|\leqslant m}$. Очевидно, что $\eta_m(\mathcal{E}^{m+1}(K))\subset$ $\subset\mathcal{E}^m(K)$. Для аналогичного отображения η_m: $J^{m+1}(L)\to$ $\to J^m(L)$ очевидно, что $\eta_m(\mathcal{J}^{m+1}(K;\,L))\subset\mathcal{J}^m(K;\,L)$. Более того, отображение η_m: $\mathcal{E}^{m+1}(L)\to\mathcal{E}^m(L)$ является вложением.

Рассмотрим проективные пределы $\varprojlim J^m(K)=J(K)$, $\varprojlim\mathcal{E}^m(L)=\mathcal{E}(L)$, $\varprojlim\mathcal{E}^m(K)=\mathcal{E}(K)$, $\varprojlim\mathcal{J}^m(K;\,L)=$ $=\mathcal{J}(K,\,L)$. Элементы пространства $J(K)$ называются C^∞-джетами на K, а элементы пространства $\mathcal{E}(K)$ называются C^∞-функциями на K в смысле Уитни. Очевидно, что $\mathcal{E}(L)$ можно отождествить с пространством обычных C^∞-функций на кубе L. Обозначим $i=\varprojlim i_m$, $\psi=\varprojlim\psi_m$.

Теорема 4.1. *Последовательность*

$$0\to\mathcal{J}(K;\,L)\xrightarrow{i}\mathcal{E}(L)\xrightarrow{\psi}\mathcal{E}(K)\to 0$$

точна.

Для доказательства нам потребуется

Лемма 4.2. *Существуют такие константы $C_k>0$, зависящие только от $k\in\mathbf{N}^n$, что для данного компактного множества $K\subset\mathbf{R}^n$ и $\delta>0$ существует C^∞-функция α, определенная в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $\alpha=0$ *в окрестности множества* K, $\alpha(x)=1$, *если* $d(x, K)\geqslant\delta$, *и* $\alpha\geqslant 0$ *всюду в* $\mathbf{R}^n$;

(ii) *для всякого* $x\in\mathbf{R}^n$ *и всякого* $k\in\mathbf{N}^n$

$$|D^k\alpha(x)|\leqslant\frac{C_k}{\delta^{|k|}}.$$

Доказательство. Рассмотрим такую неотрицательную функцию φ в $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$, что $\varphi=1$, если $|x|\leqslant\frac{1}{4}$; $\varphi=0$, если $|x|\geqslant\frac{3}{8}$; $\int\varphi=1$. Пусть $\varphi_\delta(x)=\frac{1}{\delta^n}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Возьмем тогда характеристическую функцию α' множества $\left\{x\,|\,d(x, K)\geqslant\frac{\delta}{2}\right\}$ и положим $\alpha=\alpha' * \varphi_\delta$.

Лемма 4.3. *Пространство* $\mathscr{J}(K; L)$ *плотно в* $\mathscr{J}^m(K; L)$.

Действительно, докажем, что функции F из $\mathscr{J}(K; L)$, обращающиеся в нуль в окрестности множества K, плотны в $\mathscr{J}^m(K; L)$.

Возьмем произвольную функцию $F\in\mathscr{J}^m(K; L)$, и пусть $K_1=\{x\,|\,d(x, K)\leqslant\delta\}$. Рассмотрим функцию α (зависящую от K и δ), полученную в лемме 4.2. Обозначим $F\alpha$ через F_δ. По формуле Лейбница непосредственно проверяется, что F_δ стремится к F в $\mathscr{E}^m(L)$, когда $\delta\to 0$. Таким образом, класс функций из $\mathscr{E}^m(L)$, обращающихся в нуль в окрестности компакта K, плотен в $\mathscr{J}^m(K; L)$. (Это можно также доказать при помощи теоремы Уитни!) Нужный результат немедленно получается методом регуляризации.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $F\in\mathscr{E}(K)$, и для $m\geqslant 0$ через F_m обозначается функция F, рассматриваемая как элемент пространства $\mathscr{E}^m(K)$. Пусть $\tilde{F}_m=WF_m$ означает уитнеевское продолжение функции F_m на L. Так как $\tilde{F}_m-\tilde{F}_{m-1}\in\mathscr{J}^{m-1}(K; L)$, то из доказанной леммы следует существование такой функции $H_{m-1}\in\mathscr{J}(K; L)$, что

$$\|\tilde{F}_m-\tilde{F}_{m-1}-H_{m-1}\|_{m-1}\leqslant\frac{1}{2^m}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{F}(x)=\tilde{F}_0(x)+\sum_{m\geqslant 1}\{\tilde{F}_m(x)-\tilde{F}_{m-1}(x)-H_{m-1}(x)\}.$$

Легко проверить, что $\tilde{F}$ — бесконечно дифференцируемая функция, и C^∞-джет, индуцированный ее сужением на K, совпадает с F.

5. Регулярно расположенные множества. Пусть X — замкнутое подмножество открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Пространства $J^m(\Omega)$, $J^m(X)$, $J(\Omega)$, $J(X)$ определяем обычным образом. Определим $\mathscr{E}^m(X)$ как семейство всех таких джетов F из $J^m(X)$, что для всякого компактного множества $K \subset X$ сужение $F|_K$ функции F принадлежит пространству $\mathscr{E}^m(K)$. Определим в $\mathscr{E}^m(X)$ систему полунорм

$$\|F\|_m^K = \|F|_K\|_m^K$$

для всех $K \subset X$. Снабдим $\mathscr{E}^m(X)$ топологией, соответствующей введенной системе полунорм. Относительно этой топологии $\mathscr{E}^m(X)$ является пространством Фреше.

Определим $\mathscr{E}(X)$ как семейство всех таких джетов $F \in J(X)$, что для всякого компактного множества $K \subset X$ сужение $F|_K$ функции F принадлежит $\mathscr{E}(K)$. Для всех $m \geqslant 0$ и всех $K \subset X$ введенная только что функция $\|F\|_m^K$ является полунормой в $\mathscr{E}(X)$. Снабженное топологией, определяемой системой этих полунорм, $\mathscr{E}(X)$ становится пространством Фреше.

Если $X = \Omega$, то пространства $\mathscr{E}^m(X)$ (соответственно $\mathscr{E}(X)$) совпадают с обычными пространствами m раз дифференцируемых (соответственно бесконечно дифференцируемых) функций на Ω.

Определение 5.1. Пусть X, Y — замкнутые подмножества открытого множества Ω и $X \subset Y$. Пространство $\mathscr{J}^m(X; Y)$ есть множество всех таких джетов из $\mathscr{E}^m(Y)$, сужения которых на X равны нулю.

Если $m = \infty$, обозначим это пространство просто через $\mathscr{J}(X; Y)$.

Для того чтобы избежать возможного недоразумения, мы будем говорить об элементах пространства $\mathscr{J}^m(X; Y)$ [соответственно $\mathscr{J}(X; Y)$] как о функциях Уитни порядка m (соответственно бесконечного порядка) на Y, *m-плоских на X* (соответственно *плоских на X*).

Предложение 5.2. *Пусть X, Y — замкнутые подмножества открытого множества Ω и $X \subset Y$. Тогда $\mathcal{J}(X;\ Y)$ плотно в $\mathcal{J}^m(X;\ Y)$.*

На самом деле уже функции $F \in \mathcal{J}(X;\ Y)$, плоские в окрестности пространства X, образуют плотное множество в $\mathcal{J}^m(X;\ Y)$.

Доказательство с очевидностью следует из утверждения леммы 4.3.

Предложение 5.3. *Последовательности*

$$0 \to \mathcal{J}^m(X;\ \Omega) \xrightarrow{i_m} \mathcal{E}^m(\Omega) \xrightarrow{\psi_m} \mathcal{E}^m(X) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{J}(X;\ \Omega) \xrightarrow{i} \mathcal{E}(\Omega) \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}(X) \to 0$$

точны (i_m и i — канонические вложения, а ψ_m и ψ — канонические отображения сужения).

Доказательство проводится непосредственно, с помощью разбиения единицы.

Пусть теперь X, Y — замкнутые подмножества открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Обозначим через δ „диагональное отображение"

$$\mathcal{E}(X \cup Y) \to \mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{E}(Y),$$

определенное формулой

$$\delta(F) = (F|_X,\ F|_Y),$$

а через π — отображение

$$\mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{E}(Y) \to \mathcal{E}(X \cap Y),$$

определенное формулой

$$\pi(F,\ G) = F|_{X \cap Y} - G|_{X \cap Y}.$$

Очевидно, что δ — инъективное, π — сюръективное отображения и $\pi \circ \delta = 0$; более того, $\operatorname{im} \delta$ плотен в $\ker \pi$. В самом деле, пусть $(F,\ G) \in \ker \pi$. Можно считать, что $G = 0$. [Если это не так, продолжим G до $\tilde{G} \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, использовав результат предложения 5.4, и возьмем $(F,\ G) - \delta\tilde{G}$ вместо $(F,\ G)$.] Таким образом, $F|_{X \cap Y} = 0$, т. е. $F \in \mathcal{J}(X \cap Y;\ Y)$. Тогда из предложения 5.3 следует, что F является пределом последовательности $\{F_m\}$ функций, плоских в окрестности пересечения $X \cap Y$, и очевидно, что $(F_m,\ 0) \in \operatorname{im} \delta$, что и доказывает утверждение.

Определение 5.4. Два замкнутых подмножества X, Y открытого множества Ω называются *регулярно расположенными*, если $\operatorname{im} \delta = \ker \pi$ или, что то же самое, если последовательность

$$0 \to \mathcal{E}(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{E}(Y) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}(X \cap Y) \to 0$$

точна.

Теорема 5.5 (Лоясевич [1].). *Для того чтобы два замкнутых подмножества X, Y открытого множества Ω были регулярно расположены, необходимо и достаточно, чтобы $X \cap Y = \varnothing$ или чтобы*

(Λ) *для любой пары компактных множеств $K \subset X$, $L \subset Y$ существовали такие константы $C > 0$, $\alpha > 0$, что $d(x,\ L) \geqslant C d(x,\ X \cap Y)^{\alpha}$ для всякого $x \in K$.* (d обозначает евклидово расстояние в $\mathbf{R}^n$).

Непосредственную проверку симметричности условия относительно X и Y предоставляем читателю.

Доказательство. (а) (Λ) $\Rightarrow$ „$\ker \pi = \operatorname{im} \delta$". Пусть $f = (f^k)$ [соответственно $g = (g^k)$] — элемент пространства $\mathcal{E}(X)$ [соответственно $\mathcal{E}(Y)$]; предположим, что $f = g$ на $X \cap Y$. Определим $h = (h^k) \in J(X \cup Y)$, положив $h^k = f^k$ на X и $h^k = g^k$ на Y. Достаточно доказать, что $h \in \mathcal{E}(X \cup Y)$.

Пусть M — компактное подмножество в $X \cup Y$ и $K = X \cap M$, $L = Y \cap M$. Проверим, что для всякого $m \in \mathbf{N}$ и всякого $k \in \mathbf{N}^n$ существует такая константа $C' > 0$, что для всякого $x \in M$ и всякого $y \in M$

$$\left| h^k(x) - \sum_{|l| \leqslant m} h^{k+l}(y) \frac{(x-y)^l}{l!} \right| \leqslant C' |x - y|^m.$$

Случаи, когда x и y оба принадлежат X или оба принадлежат Y, тривиальны. Предположим, что $x \in X$, $y \in Y$.

Если мы продолжим g до $\tilde{g} \in \mathscr{E}(X \cup Y)$ и заменим f на $f - \tilde{g}$, задача сведется к случаю $g = 0$, и, следовательно, $f|_{X \cap Y} = 0$. В этом случае наше неравенство можно записать просто как

$$|f^k(x)| \leqslant C' |x - y|^m.$$

По предположению можно найти тогда такую точку $z \in X \cap Y$, что $|x - y| \geqslant \frac{C}{2} |x - z|^\alpha$. Можно считать, что когда x изменяется в K, а y в L, z изменяется в некотором компактном подмножестве множества $X \cap Y$. Пусть m' — такое целое число, что $\alpha m \leqslant m'$. Так как величина $|x - z|$ ограничена, то $|x - z|^{m'} \leqslant C'' |x - y|^m$, где $C'' \geqslant 0$. Поскольку $f \in \mathscr{E}(X)$, имеем

$$\left| f^k(x) - \sum_{|l| \leqslant m'} f^{k+l}(z) \frac{(x-z)^l}{l!} \right| \leqslant C_1 |x - z|^{m'}.$$

Отсюда, так как $f = 0$ на $X \cap Y$, то

$$|f^k(x)| \leqslant C_1 |x - z|^{m'} \leqslant C'' C_1 |x - y|^m,$$

что и требовалось доказать.

(b) „$\ker \pi = \operatorname{im} \delta$“ $\Rightarrow (\Lambda)$. По предположению $\operatorname{im} \delta$ замкнут и, следовательно, δ — гомоморфизм. Пусть M — компактное подмножество в $X \cup Y$. Для всякой функции $f \in \mathscr{E}(X \cup Y)$ существует, в частности, полунорма p в $\mathscr{E}(X)$ и полунорма q в $\mathscr{E}(Y)$, такие, что для всяких $x, y \in M$ выполняется неравенство

$$\left| f^0(x) - f^0(y) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) f^{(i)}(y) \right| \leqslant$$
$$\leqslant (p(f) + q(f)) |x - y|.$$

В частности, если $f = 0$ на $X \cap Y$, положим $\hat{f} = f$ на X, $\hat{f} = 0$ на Y. Поскольку $\ker \pi = \operatorname{im} \delta$, функция $\hat{f}$ принадлежит $\mathscr{E}(X \cup Y)$; обозначив $X \cap M = K$, $Y \cap M = L$, получим для всякого $x \in K$

$$|f(x)| = |\hat{f}(x)| \leqslant p(\hat{f}) d(x, L) = p(f) d(x, L),$$

„Поднимая" это неравенство на $\mathscr{E}(\Omega)$, получаем, что существуют такие компактное множество $N \subset \Omega$, целое число $m \geqslant 0$ и константа $C > 0$, что для всякой функции $F \in \mathscr{E}(\Omega)$, плоской на $X \cap Y$, и всякого $x \in K$ выполняется оценка

$$|F(x)| \leqslant C |F|_m^N d(x, L).$$

Пусть φ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в единичном шаре и $\varphi(0) = 1$. Для всякой точки $x_0 \in K$, применив предыдущее неравенство к функции $x \to \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon = d(x_0, X \cap Y)$, получим

$$1 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^m} d(x, L) |\varphi|_m^N,$$

откуда немедленно следует результат.

Замечание 5.6. Естественно возникает вопрос, существует ли аналог теоремы 5.5 для $\mathscr{E}^m(X)$, $\mathscr{E}^m(Y)$, $\mathscr{E}^m(X \cup Y)$, т. е. точна ли последовательность

$$0 \to \mathscr{E}^m(X \cup Y) \to \mathscr{E}^m(X) \oplus \mathscr{E}^m(Y) \to \mathscr{E}^m(X \cap Y) \to 0$$

для конечного m. Результаты здесь следующие.

Если $m = 0$, то последовательность всегда точна (тривиально).

Если $m > 0$, то X и Y являются „m-регулярно расположенными", если в условии (Λ) заменить α на 1. Доказательство подобно предыдущему. Это, разумеется, значительно уже, чем (Λ).

6. Теорема о композиции[1]. Пусть $\mathfrak{G}$ — открытое множество в $\mathbf{R}^m$, Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и $g : \mathfrak{G} \to \Omega$, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ — два отображения класса C^s. Положим $A^0 = \Omega$ и $A^r = \{x \in \Omega \mid D^k f(x) = 0 \text{ для } 1 \leqslant |k| \leqslant r\}$, $1 \leqslant r \leqslant s$.

Теорема о композиции, которую мы имеем в виду, основывается на следующем замечании.

---

[1]) Результаты этого и следующего пунктов не будут использоваться в других частях книги, за исключением гл. V, § 5 (iii).

Пусть дана такая точка $y \in \mathfrak{G}$, что $x = g(y) \in A^r$. Тогда производные (порядка $\leqslant s$) функции $f \circ g$ в точке y не зависят от производных функции g порядка $> s - r$.

Действительно[1]), пусть $y \in \mathfrak{G}$ и $x = g(y)$. По формуле дифференцирования сложной функции получаем

$$T_y^s(f \circ g) = T_x^s f\left(T_y^s g(z)\right) \operatorname{mod} (z - y)^{s+1}.$$

Это тождество означает, что соответствующие выражения, рассматриваемые как полиномы от z, сравнимы по модулю идеала, порожденного функциями $(z - y)^l$, $|l| = s + 1$. Его можно записать также в форме

$$T_y^s(f \circ g)(z) = f(x) + \sum_{|k|=1}^{s} \frac{D^k f(x)}{k!} \left[\sum_{|l|=1}^{s} \frac{D^l g(y)}{l!}(z - y)^l\right]^k \operatorname{mod} (z - y)^{s+1}.$$

При $|k| \leqslant r$ слагаемые в правой части равны нулю. Предполагая, что $|k| \geqslant r + 1$, запишем скобку, стоящую в правой части, в виде

$$\left[\sum_{|l|=1}^{s} \frac{D^l g_1(y)}{l!}(z - y)^l\right]^{k_1} \cdots \left[\sum_{|l|=1}^{s} \frac{D^l g_n(y)}{l!}(z - y)^l\right]^{k_n},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$.

Заметим, что число всех скобок (считая кратности степеней) равно $|k| \geqslant r + 1$. Рассмотрим в какой-нибудь из скобок элемент, в который входит производная функции g порядка l, по модулю большего $s - r$. Раскроем все скобки. В каждую из остальных скобок $(z - y)$ входит в степени, по модулю не меньшей 1. Поэтому любой член в получившейся сумме, содержащий наш элемент, содержит $(z - y)$ в степени, по модулю не меньшей $s + 1$. Таким образом, для $x \in A^r$

$$T_y^s(f \circ g)(z) = T_x^s f\left[T_y^{s-r} g(z)\right] \operatorname{mod} (z - y)^{s+1},$$

откуда следует результат.

---

[1]) Доказательство в оригинале содержит неточности, поэтому при переводе оно несколько изменено. — *Прим. перев.*

Пусть Ω, f, A^l определены так же, как и ранее. Пусть r — целое число, причем $1 \leqslant r \leqslant s$. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbf{R}^m$ и G — система из n элементов пространства $\mathscr{E}^{s-r}(K)$, рассматриваемая как „функция“ со значениями в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что $g_0(K) = G(K) \subset A^r$. Проведенные выше вычисления приводят к определению джета из $J^s(K)$, который мы обозначим через $f \circ G$, по формуле

$$T^s_y(f \circ G)(z) = T^s_x f\left(T^{s-r}_y G(z)\right) \bmod (z-y)^{s+1},$$

где $y \in K$, $x = G(y) \in A^r$.

Теорема 6.1 (М. Кнезер [1], см. также Глезер [1]). *$f \circ G \in \mathscr{E}^s(K)$ для $1 \leqslant r < s$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что для некоторого модуля непрерывности α

$$\left| T^s_{y_1}(f \circ G)(z) - T^s_{y_2}(f \circ G)(z) \right| \leqslant \\ \leqslant \alpha(|y_1 - y_2|)(|y_1 - z|^s + |y_2 - z|^s) \quad (6.2)$$

для $y_1 \in K$, $y_2 \in K$, $z \in \mathbf{R}^m$. Пусть B — открытый шар в $\mathbf{R}^m$, содержащий K. Достаточно проверить эту оценку для $z \in B$ [это очевидно, если повторить доказательство импликации (2.2.3) $\Rightarrow$ (2.2.2), используя (2.2.3) только для $z \in B$].

(i) Покажем сначала, что достаточно установить формулу

$$\left| T^s_{x_1} f\left(T^{s-r}_{y_1} G(z)\right) - T^s_{x_2} f\left(T^{s-r}_{y_2} G(z)\right) \right| \leqslant \\ \leqslant \alpha(|y_1 - y_2|)(|y_1 - z|^s + |y_2 - z|^s) \quad (6.3)$$

для y_1, $y_2 \in K$, $x_1 = G(y_1)$, $x_2 = G(y_2)$, $z \in B$ и подходящего модуля непрерывности α. Для этого достаточно проверить, что выражения, стоящие в левых частях (6.2) и (6.3), отличаются только членами, удовлетворяющими нужному нам неравенству. Разность этих выражений есть сумма членов вида

$$h(y_1)(z - y_1)^k - h(y_2)(z - y_2)^k$$

с непрерывной функцией h и $|k| > s$. Записав это в виде

$$\{h(y_1) - h(y_2)\}(z - y_1)^k + h(y_2)\{(z - y_1)^k - (z - y_2)^k\}$$

и очевидным образом оценив сверху оба члена, получим требуемое. (Заметим, что ограничение $z \in B$ существенно, когда $|k| > s$.)

(ii) Запишем выражение, стоящее в левой части (6.3), в виде

$$\{T^s_{x_1} f(T^{s-r}_{y_1} G(z)) - T^s_{x_1} f(T^{s-r}_{y_2} G(z))\} + \\ + \{T^s_{x_1} f(T^{s-r}_{y_2} G(z)) - T^s_{x_2} f(T^{s-r}_{y_2} G(z))\}. \quad (6.4)$$

Второй член мажорируется по абсолютной величине выражением

$$\alpha(|x_1 - x_2|)(|x_2 - x_1|^s + |T^{s-r}_{y_2} G(z) - x_2|^s).$$

Так как $r < s$, то $|x_1 - x_2| = |G(y_1) - G(y_2)| \leqslant C|y_1 - y_2|$, где $y_1, y_2 \in K$ и

$$|T^{s-r}_{y_2} G(z) - x_2| \leqslant C|z - y_2| \quad (z \in B,\ y_2 \in K), \quad (6.5)$$

что дает искомую оценку для второго члена.

(iii) Остается оценить первый член в (6.4). Положим $T^{s-r}_{y_l} G(z) = u_l\ (l = 1,\ 2)$. Имеем тогда

$$T^s_{x_1} f(u_1) - T^s_{x_1} f(u_2) = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant s} \frac{1}{k!} D^k_{u_1} T^s_{x_1} f(u_1)(u_2 - u_1)^k \quad (6.6)$$

и

$$|u_2 - u_1| \leqslant \alpha(|y_2 - y_1|)(|z - y_1|^{s-r} + |z - y_2|^{s-r}), \quad (6.7)$$

где $y_1, y_2 \in K$, $z \in \mathbf{R}^m$ и α — подходящий модуль непрерывности.

Правая часть (6.6) оценивается теперь следующим образом. Если $1 \leqslant |k| \leqslant r$, то из тождества $D^k_{u_1} T^s_{x_1} f(u_1) = T^{s-|k|}_{x_1} D^k_{u_1} f(u_1)$ получаем равенство нулю членов, содержащих $(u_1 - x_1)^l$, если $|l| \leqslant r - |k|$. Отсюда, если $y_1 \in K$, $z \in B$, получаем

$$|D^k_{u_1} T^s_{x_1} f(u_1)| \leqslant C|x_1 - u_1|^{r-|k|+1}.$$

Отсюда, используя (6.5) и (6.7), нетрудно получить искомую оценку[1]). Наконец, для $|k| > r$ получаем $|u_2 - u_1|^k \leqslant C|u_2 - u_1|^{r+1}$, откуда, используя 6.7 и очевидное неравенство $(s-r)(r+1) \geqslant s$, получаем искомую оценку.

7. Теорема Сарда. Пусть Ω—открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и $f: \Omega \to \mathbf{R}^p$ — отображение класса C^s, $s \geqslant 1$. Как и в § 6, положим $A^0 = \Omega$ и $A^r = \{x \in \Omega \mid D^k f(x) = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant r\}$, где $1 \leqslant r \leqslant s$.

Лемма 7.1. *Множество $f(A^r)$ имеет меру нуль, если $r \geqslant n/p$.*

Доказательство. Пусть K — замкнутый куб в Ω. Очевидно, достаточно доказать, что $f(A^r \cap K)$ имеет меру нуль.

Существует такой модуль непрерывности α, что для $x \in K \cap A^r$ и всякого $y \in K$ выполняется оценка $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^r \alpha(|x-y|)$. Пусть l — длина стороны куба K. Разобьем K на N^n равных кубов K_i, $1 \leqslant i \leqslant N^n$. Обозначим через J множество индексов i кубов K_i, пересекающихся с A^r. Для $x, y \in K_j$, $j \in J$, получаем $|f(x) - f(y)| \leqslant C\left(\frac{l}{N}\right)^r \alpha\left(\frac{l}{N}\right)$, где $C = 2(\sqrt{n})^{r+1}$. Объем V_j образа куба K_j при отображении f не превосходит, таким образом, $C'\left(\frac{l}{N}\right)^{pr} \alpha\left(\frac{l}{N}\right)^p$, где C' — константа, зависящая только от r и p. Следовательно, объем множества $f(K \cap A^r)$ не превосходит $C'N^n\left(\frac{l}{N}\right)^{pr} \alpha\left(\frac{l}{N}\right)^p$. Выбрав N достаточно большим и используя условие $n - pr \leqslant 0$, получаем утверждение леммы.

Замечание 7.2. При $n < p$ аналогичными рассуждениями доказывается, что $f(\Omega)$ имеет меру нуль, если f — функция класса C^1.

---

[1]) Используя, кроме того, неравенство $(s-r)|k| + r - |k| + 1 \geqslant s$. — *Прим. ред.*

Лемма 7.3. *Множество $f(A^1)$ имеет меру нуль, если $s \geqslant n/p$.*

Доказательство. По лемме 1 результат верен для $p=n$. Зафиксировав p, проведем индукцию по n. Предположим, что для $n-1$ лемма доказана. Покажем, что для $1 \leqslant r < s$ множество $f(A^r \setminus A^{r+1})$ имеет меру нуль, откуда будет следовать наше утверждение, так как $f(A^s)$ имеет меру нуль по лемме 1.

Пусть $x \in A^r \setminus A^{r+1}$; положим $f=(f_1, \ldots, f_p)$. Существуют $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, $j\,(1 \leqslant j \leqslant p)$ и $k \in \mathbf{N}^n$, $|k|=r$, такие, что $\frac{\partial}{\partial x_i} D^k f_j(x) \neq 0$. В окрестности точки x множество точек области Ω, удовлетворяющих условию $D^k f_j(x)=0$, образует, таким образом, подмногообразие класса C^{s-r}. Следовательно, существуют такие открытое множество $U \subset \Omega$, содержащее x, открытое множество $\mathfrak{G} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ и невырожденное отображение g: $\mathfrak{G} \to U$ класса C^{s-r}, что $U \cap A^r \subset g(\mathfrak{G})$.

Пусть K — компактное множество в U и $x \in \mathring{K}$. Положим $L=g^{-1}(K)$ и $B^r = L \cap g^{-1}(A^r)$. По теореме 6.1 и теореме о продолжении существует отображение h: $\mathfrak{G} \to \mathbf{R}^p$ класса C^s, совпадающее с $f \circ g$ на B^r и удовлетворяющее условию $D^k h(y)=0$ для $y \in B^r$, $1 \leqslant |k| \leqslant r$.

По предположению индукции $f \circ g(B^r)$, а следовательно, и $f(A^r \cap K)$ имеют меру нуль. Так как $A^r \setminus A^{r+1}$ есть счётное объединение компактных подмножеств множества Ω, то $f(A^r \setminus A^{r+1})$ имеет меру нуль и лемма доказана.

Эта лемма получена А. П. Морсом [1] (по крайней мере для случая $p=1$). Использованный нами метод ее доказательства принадлежит М. Кнезеру [1].

Теорема 7.4 (Сард [1]). *Пусть K — множество критических точек отображения f (т. е. множество точек, в которых ранг производного отображения f' меньше p). Если $s \geqslant \max(1, n-p+1)$, то $f(K)$ имеет меру нуль.*

Доказательство. Для $n < p$ это следует из замечания 7.2. Предположим поэтому, что $n \geqslant p$. Пусть $0 \leqslant r < p$. Обозначим через K^r множество точек области Ω, в которых f' имеет ранг r. Пусть $a \in K^r$. Покажем, что существует такая окрестность U точки a, что $f(U \cap K^r)$ имеет меру нуль. Так как K^r локально замкнуто в Ω, а следовательно, является счетным объединением компактных множеств, то отсюда следует утверждение теоремы.

Можно найти окрестность U точки a и окрестность V точки $f(a)$ и сделать такую замену переменных класса C^s в U и V, что в новых координатах f будет задаваться системой уравнений

$$y_i = x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,$$
$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad r+1 \leqslant i \leqslant p.$$

Функции f_i принадлежат классу C^s, и необходимым и достаточным условием принадлежности точки $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ множеству K^r является обращение в нуль функций $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$ при $i \geqslant r+1$, $j \geqslant r+1$.

Пусть $E(x_1, \ldots, x_r)$ (соответственно $F(x_1, \ldots, x_r)$) — множество точек области U (соответственно V), имеющих первыми координатами $x_1, \ldots, x_r$. Из неравенства $s \geqslant n-p+1$ следует $s \geqslant \frac{n-r}{p-r}$. Фиксируя $x_1, \ldots, x_r$ и применяя лемму 7.3 к отображению $(f_{r+1}, \ldots, f_p)$, рассматриваемому как функция координат $x_{r+1}, \ldots, x_n$, получаем, что множество $f(K^r \cap E(x_1, \ldots, x_r))$ имеет меру нуль в $F(x_1, \ldots, x_r)$. По теореме Лебега — Фубини $f(U \cap K^r)$ имеет меру нуль, и теорема доказана.

Глава II

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ

1. Джеты вектор-функций. Пусть L — замкнутый куб в $\mathbf{R}^n$, K — замкнутое подмножество в L, E — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. С этого момента мы будем рассматривать джеты $(f^k)_{|k| \leq m}$, где f^k могут быть как обычными действительнозначными функциями, так и вектор-функциями со значениями в E. Пространства $J^m(K, E)$, $\mathscr{E}^m(K, E)$, $\mathscr{J}^m(K, L, E)$, $J(K, E)$, $\mathscr{E}(K, E)$, $\mathscr{J}(K, L, E)$ определяются очевидным образом. Результаты гл. I переносятся на эти пространства с очевидными изменениями. Ясно также, что можно отождествить $\mathscr{E}^m(L, E)$ с прямым произведением r экземпляров пространства $\mathscr{E}^m(L)$, где r — размерность E над $\mathbf{R}$. Поэтому естественно снабдить пространство $\mathscr{E}^m(L, E)$ топологией прямого произведения, а также структурой $\mathscr{E}^m(L)$-модуля. Впоследствии все рассматриваемые нами модули будут $\mathscr{E}^m(L)$-модулями.

Определение 1.1. Пусть $a \in L$. Обозначим через T_a^m естественное отображение

$$\mathscr{E}^m(L, E) \to \mathscr{E}^m(L, E)/\mathscr{J}^m(\{a\}, L, E).$$

Очевидно, что образ функции $f \in \mathscr{E}^m(L, E)$ при этом отображении можно отождествить с разложением Тейлора порядка m функции f в точке a, что и объясняет наше обозначение.

Для всякого подмодуля M модуля $\mathscr{E}^m(L, E)$ образ $T_a^m M$ является подмодулем модуля $\mathscr{E}^m(L, E)/\mathscr{J}^m(\{a\}, L, E)$ и имеет конечную размерность как векторное пространство над $\mathbf{R}$, поскольку сам модуль $\mathscr{E}^m(L, E)/\mathscr{J}^m(\{a\}, L, E)$ конечномерен.

Определение 1.2. Функция $f \in \mathscr{E}^m(L, E)$ называется *поточечно принадлежащей подмодулю M модуля* $\mathscr{E}^m(L, E)$, если $T_a^m f \in T_a^m M$ для всех $a \in L$.

Теорема 1.3 (Уитни [2])[1]. *Если M — подмодуль модуля $\mathscr{E}^m(L, E)$, $\bar{M}$ — его замыкание в $\mathscr{E}^m(L, E)$ и $\hat{M}$ — модуль всех функций f, поточечно принадлежащих M, то $\hat{M} = \bar{M}$.*

Лемма 1.4. *Пусть K — такое компактное подмножество в L, что для всех $a \in K$ размерность пространства $T_a^m M$ над $\mathbf{R}$ постоянна и равна p. Пусть $F \in \hat{M}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varphi \in \mathscr{E}^m(L)$, $\varphi \equiv 1$ в окрестности K, и $f \in M$, что $|\varphi F - f|_m < \varepsilon$.*

Здесь норма $|\ |_m$ обозначает норму $|\ |_m^L$, определенную так же, как и в гл. I, § 1, с той лишь разницей, что здесь используется норма в E. Отметим также, что теорема 2.2 гл. I остается верной для конечномерных векторнозначных джетов, и мы будем называть функцию α модулем непрерывности функции F, если она непрерывна, вогнута, обращается в нуль в точке 0 и удовлетворяет условию (2.2.3) гл. I.

Доказательство леммы. Пусть $a \in K$. По предположению существуют такие окрестность V_a точки a и функции $f_1, \ldots, f_p$ из M, что для $x \in V_a \cap K$ набор $T_x^m f_1, \ldots, T_x^m f_p$ является базисом в $T_x^m M$. Следовательно, существуют такие непрерывные на $V_a \cap K$ функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, что

$$T_x^m F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x) T_x^m f_i \quad \text{для всех} \quad x \in V_a \cap K.$$

Используя разбиение единицы, мы можем найти функции $f_1, \ldots, f_s \in M$, функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ на L и такую

[1]) В частном случае $m = 1$ эта теорема была независимо доказана И. Э. Шнолем (*Мат. сб.*, 27 (69), № 2 (1950), 281—284). — *Прим. ред.*

константу C, что для всякого $x \in K$

$$T_x^m F = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x)\, T_x^m f_i$$

и

$$\sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ x \in L}} |\lambda_i(x)| \leqslant C.$$

Пусть α—модуль непрерывности функций $F, f_1, \ldots, f_s$. Зададим для $a \in K$, $x \in L$ функцию $f_a(x)$ формулой

$$f_a(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(a)\, f_i(x).$$

Очевидно,

$$T_a^m F(z) = T_a^m f_a(z).$$

Таким образом, для $a \in K$, $x \in L$, $z \in \mathbf{R}^n$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |T_x^m F(z) - T_x^m f_a(z)| &\leqslant \\ \leqslant |T_x^m F(z) - T_a^m F(z)| &+ |T_a^m f_a(z) - T_x^m f_a(z)| \leqslant \\ &\leqslant C'(|z-x|^m + |z-a|^m)\, \alpha(|x-a|), \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где C' не зависит от a, x, z. Следовательно, так же как и при доказательстве импликации (2.2.3)$\Longrightarrow$(2.2.2) в гл. I, мы видим, что существует такая константа C'', не зависящая от a, x, z, что

$$|D^k F(x) - D^k f_a(x)| \leqslant C'' |x-a|^{m-|k|}\, \alpha(|x-a|). \tag{1.4.2}$$

Разобьем $\mathbf{R}^n$ на кубы со стороной d и для всякого такого куба рассмотрим открытый куб с центром в той же точке и стороной $2d$. Обозначим семейство этих кубов через I. Тем же способом, что в лемме 3.1 гл. I (и даже проще), построим такое разбиение единицы φ_i ($i \in I$), подчиненное покрытию I, что для $|k| \leqslant m$

$$\sum_{i \in I} |D^k \varphi_i(x)| \leqslant \frac{C}{d^{|k|}}, \tag{1.4.3}$$

где C — константа, зависящая только от m и n. Пусть I' — семейство кубов $S \in I$, пересекающихся с K. Во всяком таком кубе S отметим точку $a_S \in S \cap K$. Множество I' конечно. Пусть

$$\varphi = \sum_{S \in I'} \varphi_S, \quad f = \sum_{S \in I'} \varphi_S f_{a_S}.$$

Очевидно, что $\varphi(x) \equiv 1$ в окрестности множества K и

$$|\varphi F - f|_m = \sum_{|k| \leqslant m} \sup_{x \in L} |D^k(\varphi F - f)(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|k| \leqslant m} \sum_{S \in I'} \sup_{x \in L} |D^k(\varphi_S F - \varphi_S f_{a_S})(x)|,$$

и поэтому из формулы Лейбница и оценок (1.4.2) и (1.4.3) следует, что

$$|\varphi F - f|_m \leqslant C''' \alpha(d),$$

где C''' не зависит от d.

Для завершения доказательства леммы остается взять d достаточно малым.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $B_p = \{x \in L \mid \dim T_a^m M \leqslant p\}$. Пусть $A_p = B_p \setminus B_{p-1}$ для $p \geqslant 0$. Докажем, пользуясь индукцией по p, утверждение H_p: *для всякой функции $F \in \hat{M}$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие функции $\varphi \in \mathscr{E}^m(L)$, $f \in M$, что $\varphi(x) \equiv 1$ в окрестности множества B_p и $|\varphi F - f|_m \leqslant \varepsilon$.*

Утверждение H_0 выполняется в силу леммы 1.4 и того, что множество $B_0 = A_0$ замкнуто. Предположим, что для некоторого $p \geqslant 1$ выполняется H_{p-1}. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякой функции $F \in \hat{M}$ существуют такие функции $\varphi_{p-1} \in \mathscr{E}^m(L)$, $f_{p-1} \in M$, что $\varphi_{p-1}(x) \equiv 1$ для всех x в окрестности множества B_{p-1} и $|\varphi_{p-1} F - f_{p-1}|_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть K' — такая компактная окрестность носителя функции $(1 - \varphi_{p-1})$, что $K' \cap B_{p-1} = \varnothing$. Пусть $K = K' \cap B_p$. Тогда $K \subset A_p$, и, применяя нашу лемму к K, взяв $(1 - \varphi_{p-1})F$ вместо F, получаем функцию $\psi \in \mathscr{E}^m(L)$, равную единице в окрестности множества K, и такую функцию $f \in M$, что

$$|\psi(1 - \varphi_{p-1}) F - f|_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим функции φ_p, f_p, определенные формулами $1-\varphi_p=(1-\psi)(1-\varphi_{p-1})$ и $f_p=f+f_{p-1}$. Очевидно, что $\varphi_p \in \mathscr{E}^m(L)$, $f_p \in M$, $|\varphi_p F - f_p|_m \leqslant \varepsilon$ и $\varphi_p \equiv 1$ в окрестности множества B_p. Теорема доказана[1]).

Следствие 1.5. *Пусть M — подмодуль модуля $\mathscr{E}^m(L, E)$. Тогда $T_x^m M = T_x^m \overline{M}$ для всякого $x \in L$.*

Следствие 1.6. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и M — подмодуль модуля $\mathscr{E}^m(\Omega, E)$. Тогда $\hat{M} = \overline{M}$, где $\hat{M}$ и $\overline{M}$ определены так же, как в теореме* 1.3.

Доказательство. Возьмем C^∞-разбиение единицы $\varphi_i (i \in I)$ в области Ω. Пусть $f \in \hat{M}$. Тогда, применяя теорему к $\varphi_i f$, видим, что $\varphi_i f \in \overline{M}$. По определению топологии в $\mathscr{E}^m(\Omega, E)$ из этого следует, что $\sum_{i \in I} \varphi_i F \in \overline{M}$.

Следствие 1.7. *Пусть Ω — гладкое многообразие, счетное на бесконечности. Пусть M — подмодуль модуля $\mathscr{E}(\Omega, E)$. Тогда $\hat{M} = \overline{M}$, где модуль $\hat{M}$ определен как множество всех таких $f \in \mathscr{E}(\Omega, E)$, что $T_x^m f \in T_x^m M$ для всех $x \in \Omega$ и всех $m \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть K — компактное множество в Ω, m — произвольное целое положительное число, ε — произвольное положительное число. Пусть $f \in \hat{M}$. Тогда, так как $T_x^m f \in T_x^m M$ для всех $x \in \Omega$, то f содержится в замыкании модуля, порожденного модулем M над $\mathscr{E}^m(\Omega)$, и, следовательно, существуют такие функции $\varphi_1', \ldots, \varphi_k'$ в $\mathscr{E}^m(\Omega)$ и $g_1, \ldots, g_k$ в M, что $\left| f - \sum_{i=1}^{k} g_i \varphi_i' \right|_m^K \leqslant \varepsilon$. Но $\mathscr{E}(\Omega)$ плотно в $\mathscr{E}^m(\Omega)$, следовательно, функции φ_i' можно

---

[1]) Фактически доказано лишь включение $\hat{M} \subset \overline{M}$. Обратное включение $\hat{M} \supset \overline{M}$ следует из того, что подмодуль $\hat{M}$ замкнут и содержит M. — *Прим. ред.*

заменить такими функциями φ_i из $\mathscr{E}(\Omega)$, что

$$\left| f - \sum_{i=1}^{k} g_i \varphi_i \right|_m^K \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $f \in \bar{M}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.8. Нам известно (гл. I, § 4), что для всякой точки $a \in \Omega$ кольцо $\mathscr{E}(\Omega)/\mathscr{J}(\{a\}, \Omega)$ изоморфно кольцу формальных степенных рядов от n переменных ($n = \dim \Omega$). Определим T_a как естественное отображение $\mathscr{E}(\Omega, E) \to \mathscr{E}(\Omega, E)/\mathscr{J}(\{a\}, \Omega, E)$, и пусть M — подмодуль модуля $\mathscr{E}(\Omega, E)$. Из теоремы Крулля (см. гл. III) следует, что „$T_a f \in T_a M$" эквивалентно утверждению „$T_a^m f \in T_a^m M$ для всякого $m \geqslant 0$". Поэтому $T_a^m M = T_a^m \hat{M} = T_a^m \bar{M}$ для всякой точки $a \in \Omega$.

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ АЛГЕБРЫ

1. Локальные $\mathbf{R}$-алгебры. В этой главе кольца и алгебры предполагаются коммутативными с единицей, а модули над этими кольцами и алгебрами предполагаются унитарными. Далее, если A — кольцо, мы называем A-модуль „конечным над A“, если он имеет конечное число образующих как A-модуль.

Пусть A — локальное кольцо, т. е. кольцо, обладающее собственным идеалом $\mathfrak{m}(A)$, содержащим все остальные собственные идеалы и состоящим, очевидно, из всех необратимых элементов кольца A. Отметим следующий результат, которым мы будем часто пользоваться.

Предложение 1.1 (лемма Накаямы). *Пусть M есть A-модуль конечного типа и M' — такой подмодуль модуля M, что*

$$M = M' + \mathfrak{m}(A) M.$$

Тогда $M' = M$.

Доказательство. Если положить $N = M/M'$, то $N = \mathfrak{m}(A) N$, и мы должны показать, что $N = \{0\}$. Пусть $n_1, \ldots, n_p$ — система образующих модуля N. Существуют такие элементы $a_{ij} \in \mathfrak{m}(A)$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant p)$, что

$$n_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} n_j,$$

и так как $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \notin \mathfrak{m}(A)$ (δ_{ij} — символ Кронекера), то $n_i = 0$ для всех i.

Пусть теперь A — локальная $\mathbf{R}$-алгебра с единицей 1. Если $A \neq \{0\}$ (что мы всегда будем предполагать), то элемент 1 определяет вложение $\varepsilon\colon \mathbf{R}\to A$ по формуле $\varepsilon(\alpha)=\alpha\cdot 1$.

В дальнейшем, говоря о $\mathbf{R}$-алгебрах, мы всегда будем предполагать, что

(1.2; i) *идеал* $\mathfrak{m}(A)$ *конечен над* A;

(1.2; ii) *композиция отображений* $\mathbf{R}\xrightarrow{\varepsilon} A\to A/\mathfrak{m}(A)$ *биективна.*

Напомним, что если $\mathfrak{p}$ — идеал алгебры A, то можно ввести в A структуру топологической алгебры (называемую $\mathfrak{p}$-адической), взяв в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля степени $\mathfrak{p}^k$ идеала $\mathfrak{p}$ (k — целое положительное число). Для того чтобы эта топология была хаусдорфовой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bigcap_k \mathfrak{p}^k=\{0\}.$$

Если $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}(A)$, то соответствующая топология называется „топологией Крулля алгебры A“ (или просто „топологией алгебры A“, если это не приведет к недоразумению). $\mathfrak{p}$-адическая топология алгебры A совпадает с топологией Крулля тогда и только тогда, когда существует такое целое k, что $\mathfrak{m}^k(A)\subset\mathfrak{p}$; в этом случае мы говорим, что $\mathfrak{p}$ — *определяющий идеал в* A.

Предложение 1.3. *Для того чтобы идеал $\mathfrak{p}$ был определяющим в A, необходимо и достаточно, чтобы алгебра $A/\mathfrak{p}$ была конечна над* $\mathbf{R}$.

В самом деле, так как идел $\mathfrak{m}(A)$ конечен над A, то идеал $\mathfrak{m}^k(A)$ конечен над A для всякого k, так что алгебра $\mathfrak{m}^k(A)/\mathfrak{m}^{k+1}(A)$ конечна над $A/\mathfrak{m}(A)\simeq\mathbf{R}$. Отсюда для всякого k алгебра $A/\mathfrak{m}^k(A)$ конечна над $\mathbf{R}$. Следовательно, если $\mathfrak{p}$ — определяющий идеал, то алгебра $A/\mathfrak{p}$ конечна над $\mathbf{R}$.

Обратно, предположим, что алгебра $A/\mathfrak{p}$ конечна над $\mathbf{R}$. Модули $\mathfrak{m}^k(A/\mathfrak{p})$ образуют убывающую последовательность конечных модулей над $\mathbf{R}$. Следовательно, эта последовательность стабилизируется. По лемме Накаямы для некоторого k получим $\mathfrak{m}^k(A/\mathfrak{p})=\{0\}$, откуда $\mathfrak{m}^k\subset\mathfrak{p}$.

Пусть $\widehat{A}$ — алгебра, полученная хаусдорфовым пополнением алгебры A относительно топологии Крулля[1]). Очевидно, алгебру $\widehat{A}$ можно отождествить с проективным пределом $\varprojlim A/\mathfrak{m}^k(A)$. Очевидно также, что $\widehat{A}$ — локальная $\mathbf{R}$-алгебра [удовлетворяющая условиям (i) и (ii)] и естественные отображения $A/\mathfrak{m}^k(A) \to \widehat{A}/\mathfrak{m}^k(\widehat{A})$ являются изоморфизмами. (Детали мы оставляем читателю.)

Пусть $x_1, \ldots, x_p$ — элементы идеала $\mathfrak{m}(A)$. Определим очевидным образом отображение кольца $\mathbf{R}[[X_1, \ldots, X_p]]$ формальных степенных рядов в алгебру $\widehat{A}$. Это отображение будет сюръективным тогда (и только тогда), когда элементы $x_1, \ldots, x_p$ порождают идеал $\mathfrak{m}(A)$ над A. Следовательно, $\widehat{A}$ является факторалгеброй алгебры формальных степенных рядов. Отсюда следует, что алгебра $\widehat{A}$ нётерова. (Этот результат будет также следовать из дальнейшего.)

Пусть теперь A и B — две локальные $\mathbf{R}$-алгебры и $u: A \to B$ — гомоморфизм (который мы всегда будем предполагать унитарным). Тогда $u^{-1}(\mathfrak{m}(B)) = \mathfrak{m}(A)$. Действительно, $\mathbf{R}$-линейное отображение $A/u^{-1}(\mathfrak{m}(B)) \to B/\mathfrak{m}(B)$ является ненулевым, так как $u(1) = 1$, следовательно, оно сюръективно. Поэтому идеал $u^{-1}(\mathfrak{m}(B))$ максимален и равен $\mathfrak{m}(A)$, откуда $u(\mathfrak{m}(A)) \subset \mathfrak{m}(B)$. Другими словами, отображение u локально, т. е. непрерывно относительно топологии Крулля. Отсюда следует, что u индуцирует гомоморфизм $\widehat{u}: \widehat{A} \to \widehat{B}$, также локальный, и гомоморфизм

$$\bar{u}: A/\mathfrak{m}(A) \to B/Bu(\mathfrak{m}(A)).$$

Это последнее отображение совпадает с каноническим вложением

$$\varepsilon: \mathbf{R} \to B/Bu(\mathfrak{m}(A)).$$

---

[1]) Впоследствии мы будем говорить просто „пополнение", подразумевая хаусдорфово пополнение, и будем называть „полными" хаусдорфовы полные кольца.

В дальнейшем мы будем считать, что алгебра B снабжена структурой A-модуля, определенной отображением u. Мы будем писать поэтому

$$ab\,(a \in A,\ b \in B) \quad \text{вместо} \quad u(a)\,b,$$

$$\mathfrak{m}(A)\,B \quad \text{вместо} \quad Bu(\mathfrak{m}(A))$$

и т. д.

Определение 1.4 (i). Назовем *u конечным* отображением, если модуль B конечен над A.

(ii) Назовем *u квазиконечным*, если отображение $\bar{u}$ конечно, т. е. если модуль $B/\mathfrak{m}(A)\,B$ конечен над $\mathbf{R}$.

Из предложения 1.3 следует, что отображение u квазиконечно тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{m}(A)\,B$ является определяющим. Ясно, что всякий конечный гомоморфизм квазиконечен; обратное, вообще говоря, неверно (контрпример: A есть кольцо сходящихся степенных рядов от $n \geqslant 1$ переменных, B — его пополнение). Одна из наших основных целей доказать справедливость этого обратного утверждения (так называемой „подготовительной теоремы") для некоторых случаев. Отметим сразу следующее

Предложение 1.5 (формальная подготовительная теорема). *Если алгебры A и B полные (и хаусдорфовы) и если отображение $u\colon A \to B$ квазиконечно, то оно конечно.*

Мы будем пользоваться здесь этим предложением, а доказательство его отложим до § 3.

Вернемся к общему случаю: по непрерывному отображению $u\colon A \to B$ с помощью перехода к пополнениям определяется отображение $\hat{u}\colon \hat{A} \to \hat{B}$ (а также сквозное отображение $A \to \hat{B}$, которым мы будем иногда пользоваться).

Предложение 1.6. *Свойства „u квазиконечно", „$\hat{u}$ квазиконечно" и „$\hat{u}$ конечно" эквивалентны. Если они выполнены, каноническое отображение*

$$B/\mathfrak{m}(A)\,B \to \hat{B}/\mathfrak{m}(\hat{A})\,\hat{B}$$

биективно.

Доказательство. В силу предложения 1.5 свойства „u квазиконечно“ и „$\hat{u}$ конечно“ эквивалентны. Докажем эквивалентность свойств „u квазиконечно“ и „$\hat{u}$ квазиконечно“. Для этого достаточно доказать, что идеал $\mathfrak{m}(A)B$ является определяющим в B тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}$ является определяющим в $\hat{B}$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал в B. Для всякого r каноническое отображение

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m}^r(B))/\mathfrak{m}^r(B)\to(\mathfrak{p}\hat{B}+\mathfrak{m}^r(\hat{B}))/\mathfrak{m}^r(\hat{B})$$

очевидно, биективно[1]). Положим $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}(A)B$ и заметим, что идеал $\mathfrak{m}(A)\hat{B}+\mathfrak{m}^r(\hat{B})$ замкнут [так как содержит $\mathfrak{m}^r(\hat{B})$] и, следовательно, равен $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}+\mathfrak{m}^r(\hat{B})$. Таким образом, получаем изоморфизм

$$(\mathfrak{m}(A)B+\mathfrak{m}^r(B))/\mathfrak{m}^r(B)\xrightarrow{\sim}(\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}+\mathfrak{m}^r(\hat{B}))/\mathfrak{m}^r(\hat{B}). \quad (1.7)$$

Пусть теперь $\mathfrak{m}(A)B\supset\mathfrak{m}^k(B)$. Используя изоморфизм (1.7) для $r=k+1$, получаем включение $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}+\mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\supset\mathfrak{m}^k(\hat{B})$. Применяя лемму Накаямы к паре $\mathfrak{m}^k(\hat{B})$, $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}\cap\mathfrak{m}^k(\hat{B})$, получаем включение $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}\supset\mathfrak{m}^k(\hat{B})$. Обратно, те же рассуждения показывают, что из включения $\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}\supset\mathfrak{m}^k(\hat{B})$ следует $\mathfrak{m}(A)B\supset\mathfrak{m}^k(B)$, и утверждение доказано.

Наконец, пусть $\mathfrak{m}(A)B\supset\mathfrak{m}^k(B)$. Только что полученный результат вместе с изоморфизмом (1.7) для $r=k$ дает изоморфизм

$$\mathfrak{m}(A)B/\mathfrak{m}^k(B)\xrightarrow{\sim}\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}/\mathfrak{m}^k(\hat{B}).$$

Отсюда, учитывая изоморфизм

$$B/\mathfrak{m}(A)B\xrightarrow{\sim}(B/\mathfrak{m}^k(B))/(\mathfrak{m}(A)B/\mathfrak{m}^k(B))$$

и соответствующий изоморфизм для пополнений, получаем второе утверждение предложения 1.6.

Из предложения 1.6 вытекает полезное для приложений

---

[1]) Инъективность его вытекает из равенства $\mathfrak{m}^r(\hat{B})\cap(B)=\mathfrak{m}^r(B)$. — *Прим. ред.*

Следствие 1.8. *Пусть u: $A \to B$ есть гомоморфизм локальных* $\mathbf{R}$*-алгебр, и пусть $b_1, \ldots, b_p$ — конечное семейство элементов алгебры B. Обозначим через $\hat{b}_i$ образы этих элементов в $\hat{B}$ и через $\bar{b}_i$ их образы в $B/\mathfrak{m}(A)B$. Следующие свойства эквивалентны:*

(i) $\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_p$ *порождают* $\hat{B}$ *над* $\hat{A}$;

(ii) $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_p$ *порождают* $B/\mathfrak{m}(A)B$ *над* $\mathbf{R}$;

(iii) $\bar{\hat{b}}_1, \ldots, \bar{\hat{b}}_p$ *порождают* $\hat{B}/\mathfrak{m}(\hat{A})\hat{B}$ *над* $\mathbf{R}$.

Кроме того, если отображение u конечно, то эти свойства эквивалентны свойству:

(iv) $b_1, \ldots, b_p$ *порождают B над A.*

Эквивалентность свойств (ii) и (iii) следует из изоморфизма (1.6). В то же время очевидно, что из (iv) следует (ii). Если отображение u конечно, то из (ii) следует (iv) по лемме Накаямы. Аналогично с помощью предложения 1.5 доказывается эквивалентность свойств (i) и (iii).

2. Аналитические и дифференцируемые алгебры. В дальнейшем мы будем обозначать через $\mathfrak{S}_n$ и $\mathscr{E}_n$ кольца ростков в начале координат в $\mathbf{R}^n$ действительных аналитических и соответственно C^∞-функций со значениями в $\mathbf{R}$, а через $\mathscr{F}_n$ кольцо формальных степенных рядов от n переменных над $\mathbf{R}$. Имеем очевидные отображения $\mathfrak{S}_n \to \mathscr{E}_n$ (вложение), $\mathfrak{S}_n \to \mathscr{F}_n$ и $\mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n$ (разложение Тейлора в начале координат). Все эти кольца являются локальными $\mathbf{R}$-алгебрами, удовлетворяющими условиям (1.2). Единственный не совсем очевидный факт — это выполнение условия (1.2, i) для алгебры $\mathscr{E}_n$. Выполнение этого условия вытекает из следующей леммы, в которой через $x_1, \ldots, x_n$ обозначены координаты в $\mathbf{R}^n$.

Лемма 2.1. *Пусть $f \in \mathscr{E}_n$ и k — целое число не больше n. Предположим, что $f(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) = 0$. Тогда существуют такие функции $h_i \in \mathscr{E}_n$, $i = 1, \ldots, k$, что*

$$f = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i.$$

Доказательство. В самом деле, можно положить

$$h_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\,dt.$$

Из леммы 2.1 следует, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ составляют систему образующих идеала $\mathfrak{m}(\mathscr{E}_n)$ над $\mathscr{E}_n$. Из этой же леммы следует, что алгебра $\mathscr{F}_n$ является пополнением алгебры $\mathscr{E}_n$ в топологии Крулля; соответствующий факт для $\mathfrak{O}_n$ очевиден. Отметим также существенное отличие между этими двумя случаями: тогда как отображение $\mathfrak{O}_n \to \mathscr{F}_n$ инъективно, отображение $\mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n$ сюръективно (гл. I, § 4), так что алгебра $\mathscr{E}_n$ в некотором смысле „полна, но не хаусдорфова“.

Определение 2.2. *Дифференцируемой алгеброй* называется локальная $\mathbf{R}$-алгебра A вместе с сюръективным гомоморфизмом $\mathscr{E}_n \xrightarrow{\pi} A$ (который предполагается унитарным). Заменив $\mathscr{E}_n$ на $\mathfrak{O}_n$ (соответственно $\mathscr{F}_n$), определим таким же образом *аналитическую* (соответственно *формальную*) *алгебру*.

Определим теперь морфизмы дифференцируемых алгебр. Для $A = \mathscr{E}_n$ и $B = \mathscr{E}_m$ гомоморфизм u: $A \to B$ называется *морфизмом*, если существует такой росток φ (в начале координат) C^∞-отображения $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(0) = 0$, что для всякой функции $f \in \mathscr{E}_n$ выполняется равенство $u(f) = f \circ \varphi$ (отображение φ, если оно существует, очевидно, единственно). В общем случае пусть $\mathscr{E}_n \xrightarrow{\pi} A$, $\mathscr{E}_m \xrightarrow{\psi} B$ — две дифференцируемые алгебры и u — гомоморфизм $A \to B$. Мы говорим, что *u — морфизм*, если существует такой морфизм $\tilde{u}$: $\mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_m$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_n & \xrightarrow{\tilde{u}} & \mathscr{E}_m \\ \pi\downarrow & & \downarrow\psi \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

коммутативна.

Очевидно, что композиция двух морфизмов есть морфизм. В соответствии с общим определением категории мы говорим, что морфизм u является изоморфизмом, если существует такой морфизм $v: B \to A$, что $v \circ u$ и $u \circ v$ — тождественные отображения (на самом деле достаточно, чтобы отображение u было биективным; это следует из дальнейшего).

Предложение 2.3. *Пусть дана дифференцируемая алгебра $\mathscr{E}_m \xrightarrow{\pi} B$ и n элементов $b_i \in \mathfrak{m}(B)$. Существует один и только один такой морфизм $u: \mathscr{E}_n \to B$, что $u(x_i) = b_i$ (x_i обозначают координаты в $\mathbf{R}^n$).*

Доказательство. Для каждого i выберем такую функцию $f_i \in \mathscr{E}_m$, что $\pi(f_i) = b_i$, и пусть v — морфизм $\mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_m$, определенный формулами $v(x_i) = f_i$, т. е. индуцированный отображением $(y_1, \ldots, y_m) \to (f_1, \ldots, f_n)$ из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$. Тогда $u = \pi \circ v$ обладает нужным свойством. Для доказательства единственности выберем такие функции $f'_i \in \mathscr{E}_m$, что $\pi(f'_i) = b_i$, и обозначим через $\mathfrak{J}$ идеал $\pi^{-1}(0)$. Достаточно доказать, что для всякой функции $g \in \mathscr{E}_n$ выполняется условие

$$g(f_1, \ldots, f_n) - g(f'_1, \ldots, f'_n) \in \mathfrak{J}.$$

Но из леммы 2.1 следует, что существуют такие функции $h_i \in \mathscr{E}_{2n}$, что

$$g(f_1, \ldots, f_n) - g(f'_1, \ldots, f'_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} (f_i - f'_i) h_i(f_1, \ldots, f_n, f'_1, \ldots, f'_n),$$

откуда следует наше утверждение.

Нам будет удобно обозначить элемент $u(g)$, построенный в предложении 2.3, через $g(b_1, \ldots, b_n)$. Читатель без труда проверит, что гомоморфизм $u: A \to B$ является морфизмом тогда и только тогда, когда для всякого набора $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{m}(A)$ и всякой функции $f \in \mathscr{E}_p$ выполняется равенство

$$u(f(a_1, \ldots, a_p)) = f(u(a_1), \ldots, u(a_p))$$

(другими словами, гомоморфизм u перестановочен с композицией дифференцируемых функций).

Замечание 2.4. Насколько я знаю, в настоящее время неизвестно, является ли всякий гомоморфизм $A \to B$ (как $\mathbf{R}$-алгебр) морфизмом. Неизвестно даже, являются ли две дифференцируемые алгебры, изоморфные как $\mathbf{R}$-алгебры, также изоморфными как дифференцируемые алгебры. Именно этот факт заставил нас принять предшествующие определения, предпочтя их „наивным" определениям, с которыми мы не смогли бы работать.

Мы принимаем аналогичные определения также в случае формальных и аналитических колец, оставляя читателю их явную формулировку. Но это лишь временно, пока не доказана подготовительная теорема: мы увидим в § 3 (следствие из этой теоремы), что всякий гомоморфизм аналитической (соответственно формальной) $\mathbf{R}$-алгебры является морфизмом.

3. Подготовительная теорема для формальных и аналитических алгебр.

Теорема 3.1. *Морфизм и аналитических (соответственно формальных) алгебр квазиконечен тогда и только тогда, когда он конечен.*

Мы дадим доказательство в случае аналитических алгебр, оставив читателю случай формальных алгебр.

Пусть $\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\pi} A$, $\mathfrak{S}_m \xrightarrow{\psi} B$ — две аналитические алгебры и u: $A \to B$ — морфизм, предполагаемый квазиконечным. Задача состоит в том, чтобы доказать, что u конечен.

(A) *Сведение к регулярному случаю* ($A = \mathfrak{S}_n$, $B = \mathfrak{S}_m$).

Прежде всего морфизм $u \circ \pi$ тоже квазиконечен, и если этот морфизм конечен, то конечен и морфизм u. Мы можем, следовательно, предположить, что $A = \mathfrak{S}_n$ (и π — тождественный морфизм).

Положим теперь $\mathfrak{p} = \ker \psi$. Сведем задачу к случаю, когда идеал $\mathfrak{p}$ конечно порожден (свойство, a posteriori верное для всех идеалов, так как кольцо $\mathfrak{S}_m$ нётерово, но мы не можем использовать его здесь![1]). Пусть $\tilde{u}$ — такой морфизм $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_m$, что $u = \psi \circ \tilde{u}$. Так как $\mathfrak{m}(\mathfrak{S}_n) B$ является определяющим идеалом алгебры B, идеал $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}(\mathfrak{S}_n)\mathfrak{S}_m$ является определяющим в $\mathfrak{S}_m$ и, следовательно, содержит идеал $\mathfrak{m}^k(\mathfrak{S}_m)$ для некоторого k. Поэтому существует такой идеал $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, *конечно порожденный над* $\mathfrak{S}_m$, что

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{m}(\mathfrak{S}_n)\mathfrak{S}_m + \mathfrak{m}^{k+1}(\mathfrak{S}_m) \supset \mathfrak{m}^k(\mathfrak{S}_m).$$

По лемме Накаямы отсюда следует, что

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{m}(\mathfrak{S}_n)\mathfrak{S}_m \supset \mathfrak{m}^k(\mathfrak{S}_m).$$

Пусть теперь $B' = \mathfrak{S}_m/\mathfrak{p}'$, ψ': $\mathfrak{S}_m \to B'$ — естественная проекция, и пусть $u' = \psi' \circ \tilde{u}$. Морфизм u' квазиконечен, и если он конечен, то конечен и морфизм u.

Предположим, таким образом, что идеал $\mathfrak{p}$ конечно порожден, и пусть $g_1, \ldots, g_p$ — его система образующих. Обозначим через y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ [соответственно z_j $(1 \leqslant j \leqslant n + p)$] образующие максимального идеала в $\mathfrak{S}_n$ (соответственно в $\mathfrak{S}_{n+p}$), и пусть v: $\mathfrak{S}_{n+p} \to \mathfrak{S}_m$ — морфизм, определенный по формулам

$$v(z_i) = \tilde{u}(y_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$v(z_{n+j}) = g_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Морфизм v квазиконечен, и если он конечен, то конечен и морфизм u. Таким образом, мы можем ограничиться, заменив обозначения, случаем $A = \mathfrak{S}_n$, $B = \mathfrak{S}_m$.

(В) *Доказательство в регулярном случае* (Гузель [1]).

Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно $y_1, \ldots, y_m$) координаты в $\mathfrak{S}_n$ (соответственно в $\mathfrak{S}_m$). Положим $\varphi_i = u(x_i)$, и пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — отображение $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. По предположению, $u(f) = f \circ \varphi$ для $f \in \mathfrak{S}_n$. Так как морфизм u квазиконечен, то существует такое число r, что $\mathfrak{m}(\mathfrak{S}_n)\mathfrak{S}_m \supset \mathfrak{m}^r(\mathfrak{S}_m)$. Положив для m-вектора $k =$

[1]) Поскольку ниже приводится доказательство нётеровости аналитических (и формальных) алгебр, опирающееся на теорему 3.1. — *Прим. перев.*

$=(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{N}^m$, как обычно, $|k| = k_1 + \ldots + k_m$, $y^k = y_1^{k_1} \ldots y_m^{k_m}$, получим для $|k| = r$ разложение

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki}\varphi_i, \quad \lambda_{ki} \in \mathfrak{S}_m. \tag{3.2}$$

Докажем, что элементы y^k, $|k| < r$, порождают $\mathfrak{S}_m$ над $\mathfrak{S}_n$. Пусть $f \in \mathfrak{S}_m$. Обозначив через $\tau(f)$ сумму членов степени меньше r в разложении f, мы можем записать f в виде

$$f = \tau(f) + \sum_{|k|=r} y^k \sigma_k(f), \qquad \sigma_k(f) \in \mathfrak{S}_m. \tag{3.3}$$

Используя (3.2), получаем отсюда выражение для f в виде

$$f = \tau(f) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \rho_i(f), \qquad \rho_i(f) \in \mathfrak{S}_m. \tag{3.4}$$

(Функции σ и ρ, вообще говоря, не единственны, но это для нас несущественно.)

Применяя полученную формулу к функциям ρ_i и итерируя процесс, получаем для $p \in \mathbf{N}$

$$f = \tau(f) + \ldots + \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant n} \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_p} \tau_{i_1 \ldots i_p}(f) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_{p+1} \leqslant n} \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_{p+1}} \rho_{i_1 \ldots i_{p+1}}(f). \tag{3.4'}$$

Здесь функции τ являются полиномами степени не больше $r-1$ по y, а ρ — функции из $\mathfrak{S}_m$. Так как последний член этой формулы принадлежит идеалу $\mathfrak{m}^{p+1}(\mathfrak{S}_n)$, мы видим, что она определяет ряд, формально сходящийся к f. Таким образом, достаточно доказать, что для подходящего выбора функций τ ряд, составленный из функций

$$x_{i_1} \ldots x_{i_p} \tau_{i_1 \ldots i_p}(f) \tag{3.5}$$

(принимающих значения в пространстве полиномов степени не больше $r-1$ по y), сходится в окрестности начала координат.

Пусть $R > 0$ и $f = \sum a_k y^k$. Положим $|f|_R = \sum |a_k| R^{|k|}$. Отображение $f \to |f|_R$ обладает всеми обычными свойствами нормы, за исключением того, что оно может принимать значение $+\infty$. Для фиксированной функции f функция $R \to |f|_R$ возрастает и конечна при достаточно малых R. Наконец, прямое вычисление показывает, что $|fg|_R \leqslant |f|_R |g|_R$.

Из формулы (3.3) следует, что $|\tau(f)|_R \leqslant |f|_R$, и если выбрать подходящие функции σ, то для всякого $R > 0$ получим

$$|\sigma_k(f)|_R \leqslant \frac{1}{R^r} |f|_R.$$

Выберем такое R_0, что $|\lambda_{kl}|_{R_0} < \infty$ для всех k, l. Подставляя в (3.3) выражение для y^k из (3.2), получаем для $R < R_0$ следующие оценки в формуле (3.4):

$$|\rho_l(f)|_R \leqslant \frac{C}{R^r} |f|_R, \quad \text{где} \quad C \text{ не зависит от } R.$$

Итерируя, находим, что функции $\tau_{l_1 \ldots l_p}$ можно выбрать так, чтобы для $R < R_0$ была справедлива оценка

$$|\tau_{l_1 \ldots l_p}(f)|_R \leqslant \frac{C^p}{R^{rp}} |f|_R.$$

Наконец, выбрав $R < R_0$ так, что $|f|_R < \infty$, получим из последней оценки, что функции (3.5) образуют ряд, сходящийся при $|x_l| \leqslant \rho$, где $\rho \leqslant \frac{R^r}{nC}$, что доказывает теорему.

В следующих утверждениях мы рассматриваем алгебру $\mathfrak{S}_{n-1}$ (соответственно $\mathcal{F}_{n-1}$) как вложенную в $\mathfrak{S}_n$ (соответственно в $\mathcal{F}_n$) при помощи морфизма π^*, индуцированного проекцией π: $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Следствие 3.6 (алгоритм деления). *Пусть Φ — такая функция из $\mathfrak{S}_n$, что $\Phi(0, \ldots, 0, x_n) = x_n^p g(x_n)$, $g(0) \neq 0$. Для всякой функции $f \in \mathfrak{S}_n$ существуют такая функция $Q \in \mathfrak{S}_n$ и такой псевдополином $R \in \mathfrak{S}_{n-1}[x_n]$ степени меньше p, что $f = \Phi Q + R$. Более того, Q и R определены этими условиями однозначно.*

Утверждение остается справедливым и в случае замены $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_{n-1}$ на $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{n-1}$.

Пусть $A=\mathfrak{S}_{n-1}$, $B=\mathfrak{S}_n/(\Phi)$, и пусть u — композиция морфизма π^* и канонического отображения $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n/(\Phi)$. Очевидно, образы элементов $1, x_n, \ldots, x_n^{p-1}$ в $B/\mathfrak{m}(A)B$ образуют базис этого пространства над $\mathbf{R}$. Из нашей теоремы и леммы Накаямы следует, что элементы $1, x_n, \ldots, x_n^{p-1}$ составляют систему образующих модуля B над A, откуда следует существование Q и R.

Для доказательства единственности напишем $\Phi=\sum \Phi_k$, где Φ_k — сходящиеся степенные ряды от x_n с коэффициентами, являющимися однородными полиномами степени k по $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Предположим, что существуют такие $Q \in \mathfrak{S}_n$ и $R \in \mathfrak{S}_{n-1}[x_n]$, $\deg R < p$, что $\Phi Q + R = 0$ и $Q \neq 0$, $R \neq 0$. Пусть так же, как и выше, $Q=\sum Q_k$, $R=\sum R_k$, и пусть l — наименьшее целое число, для которого $Q_l \neq 0$ или $R_l \neq 0$. Тогда $\Phi_0 Q_l + R_l = 0$, но $\Phi_0 Q_l$ содержит x_n^p в качестве делителя, так что $Q_l = R_l = 0$, и мы приходим к противоречию.

Следствие 3.7 (Вейерштрасс). *При тех же предположениях, что и в предыдущем утверждении, существуют такие функция $Q \in \mathfrak{S}_n$, $Q(0) \neq 0$, и отмеченный полином $P \in \mathfrak{S}_{n-1}[x_n]$ (т. е. полином, старший коэффициент которого равен единице, а все остальные обращаются в нуль в начале координат), что $P=\Phi Q$. Полином P и функция Q полностью определены этими условиями. Утверждение остается верным, если заменить $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_{n-1}$ на $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{n-1}$.*

Для доказательства достаточно применить следствие 3.6 к $f=x_n^p$ и взять $P=x_n^p-R$ [легко проверить, что P — отмеченный полином и что $Q(0) \neq 0$].

Теорема 3.8. *Всякая аналитическая (соответственно формальная) алгебра нётерова.*

Доказательство. Достаточно доказать, что алгебра $\mathfrak{S}_n$ (соответственно $\mathcal{F}_n$) нётерова. Пусть $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ — идеал в $\mathfrak{S}_n$, и пусть $f \in \mathfrak{p}$, $f \neq 0$. Воспользовавшись линейной заменой координат, мы можем предположить, что $f(0, \ldots, 0, x_n) \neq 0$, и достаточно доказать, что образ $\bar{\mathfrak{p}}$

идеала $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{O}_n/(f)$ конечен над $\mathfrak{O}_n$. Тем более достаточно доказать, что идеал $\bar{\mathfrak{p}}$ конечен над $\mathfrak{O}_{n-1}$. Это следует из предположения индукции[1]) и из того, что модуль $\mathfrak{O}_n/(f)$ конечен над $\mathfrak{O}_{n-1}$.

Теорема 3.9. *Кольцо $\mathfrak{O}_n$ (соответственно $\mathcal{F}_n$) факториально.*

Доказательство. Кольцо $\mathfrak{O}_n$, очевидно, является областью целостности. В силу доказанной выше теоремы достаточно показать, что если элемент $f \in \mathfrak{O}_n$ неприводим, то он прост[2]). Мы воспользуемся индукцией по n и предположим, что кольцо $\mathfrak{O}_{n-1}$ факториально, так что (по теореме Гаусса) кольцо $\mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$ также факториально. Сделав замену переменных и домножив на обратимый элемент, мы можем предположить, что f — отмеченный полином от x_n. Утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.10. *Пусть $P \in \mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$ — отмеченный полином, неприводимый в $\mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$. Тогда P прост в $\mathfrak{O}_n$.*

Доказательство. Пусть $g, h \in \mathfrak{O}_n$ и P делит gh. Пусть $\bar{g}$ и $\bar{h}$ — остатки от деления функций g и h на P. Тогда P делит $\bar{g}\bar{h}$ в $\mathfrak{O}_n$. По предположению индукции P прост в $\mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$, так что достаточно доказать, что P делит $\bar{g}\bar{h}$ в $\mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$. Но, с одной стороны, мы имеем $\bar{g}\bar{h} = PQ$, $Q \in \mathfrak{O}_n$, а с другой (евклидово деление) $\bar{g}\bar{h} = PQ' + R'$, где $Q', R' \in \mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$, $\deg R' < \deg P$. Из условия единственности в следствии 3.6 следует, что $Q = Q'$, $R' = 0$, и лемма доказана.

Замечание 3.11. Пусть $P \in \mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$ — отмеченный полином. Легко проверить, что P допускает разложение

[1]) Здесь автор пользуется индукцией по n и предполагает, что теорема верна для $n-1$. — *Прим. перев.*

[2]) Автор называет элемент f неприводимым, если f не разлагается в произведение необратимых элементов. Элемент называется простым, если из „f делит ab" следует „f делит a" или „f делит b". — *Прим. перев.*

на неприводимые множители, являющиеся также отмеченными полиномами по x_n.

Теорема 3.8 дает нам возможность применить некоторые теоремы локальной алгебры к аналитическим и формальным кольцам. Напомним некоторые из этих результатов. Пусть A — локальное кольцо, E есть A-модуль. Структура топологической группы на E, „топология Крулля", определяется фундаментальной системой окрестностей нуля $\{\mathfrak{m}^k(A)E\}$. (Если $E=A$, это совпадает с определением, данным в § 1; можно также ввести $\mathfrak{p}$-адическую топологию на E для произвольного идеала $\mathfrak{p}$ кольца A, но это нам не понадобится.)

Пусть F — подмодуль модуля E. Очевидно, что топология Крулля модуля E/F есть фактортопология топологии модуля E. Для изучения топологии модуля F мы используем следующий результат.

Теорема 3.12 (Артин — Рис). *Предположим, что кольцо A нётерово и что модуль E конечен над A. Существует такое целое $p>0$, что для $n>p$ выполняется равенство* [*мы пишем* $\mathfrak{m}$ *вместо* $\mathfrak{m}(A)$]

$$F \cap \mathfrak{m}^n E = \mathfrak{m}^{n-p}(F \cap \mathfrak{m}^p(E)).$$

Доказательство можно найти, например, в Бурбаки [2].

Следствие 3.13 (Крулль). *В тех же предположениях:*

(i) *топология Крулля модуля F совпадает с топологией, индуцированной на F топологией Крулля модуля E;*

(ii) *топология модуля E хаусдорфова;*

(iii) *модуль F замкнут.*

Свойство (i) тривиально следует из теоремы 3.12. Для доказательства свойства (ii) применим (i) к $F=\overline{0}=\bigcap \mathfrak{m}^n E$. Мы увидим, что $\mathfrak{m}(\overline{0})=\overline{0}$, откуда (см. предложение 1.1) следует, что $\overline{0}=0$. Наконец, (iii) следует из (ii), примененного к E/F.

Из следствия 3.13 и теоремы 3.8 следует, что *формальные и аналитические алгебры хаусдорфовы*. Выведем отсюда результат, на который мы указывали в конце § 2.

Предложение 3.14. *Всякий гомоморфизм аналитических (соответственно формальных) алгебр является морфизмом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{O}_n \xrightarrow{\pi} A$, $\mathfrak{O}_m \xrightarrow{\varphi} B$ — аналитические алгебры; и пусть u — унитарный гомоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр $A \to B$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbf{R}^n$, и пусть $\tilde{u}$ — морфизм $\mathfrak{O}_n \to B$, определенный по формуле $\tilde{u}(x_i) = u \circ \pi(x_i)$ (см. предложение 2.3). Достаточно доказать, что для всякой функции $f \in \mathfrak{O}_n$ выполняется равенство $\tilde{u}(f) = u \circ \pi(f)$. Эта формула верна, если f — полином от $x_1, \ldots, x_n$. Так как алгебра B хаусдорфова и обе части формулы непрерывно зависят от f, то результат получается переходом к пределу.

Замечание 3.15. Точно так же доказывается, что если $\mathscr{E}_n \to A$, $\mathscr{E}_m \to B$ — две дифференцируемые алгебры и алгебра B хаусдорфова, то каждый гомоморфизм $A \to B$ является морфизмом. Мы увидим, что, вообще говоря, алгебра B не обязательно хаусдорфова, так что это не дает ответа на вопрос, поставленный в (2.4).

Пусть A — локальное кольцо, $\mathfrak{p}$ — идеал кольца A, $\mathfrak{p} \neq A$. Тогда $A/\mathfrak{p}$ — локальное кольцо и $\mathfrak{m}^k(A/\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}^k(A)\,A/\mathfrak{p}$. Следовательно, топологии локального кольца $A/\mathfrak{p}$ и A-модуля $A/\mathfrak{p}$ совпадают.

Положим $A = \mathscr{F}_n$. Это кольцо полное. Так как всякий идеал $\mathfrak{p}$ замкнут в $\mathscr{F}_n$, то $\mathscr{F}_n/\mathfrak{p}$ является также полным $\mathscr{F}_n$-модулем и, следовательно, полным локальным кольцом.

Таким образом, мы получаем

Предложение 3.16. *Всякая формальная алгебра полна.*

Положим теперь $A = \mathscr{E}_n$. Отображение $\mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n$, определяемое разложением Тейлора, сюръективно, и его ядром является идеал $\mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n) = \bigcap \mathfrak{m}^k(\mathscr{E}_n)$ функций, плоских в нуле. Таким образом, кольцо $\mathscr{F}_n$ можно отождествить с пополнением $\hat{\mathscr{E}}_n$ кольца $\mathscr{E}_n$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал в $\mathscr{E}_n$, а $\tilde{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n))/\mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n)$ — его образ в $\mathscr{F}_n$.

Отображение $\mathscr{E}_n/(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n)) \to \mathscr{F}_n/\tilde{\mathfrak{p}}$ является изоморфизмом; в частности, первое пространство хаусдорфово (и даже полно), поэтому идеал $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_m)$ замкнут. Пусть $B = \mathscr{E}_n/\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{m}^\infty(B) = \bigcap \mathfrak{m}^k(B)$. Очевидно, отображение $i: (\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n))/\mathfrak{p} \to \mathfrak{m}^\infty(B)$ инъективно. Так как идеал $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n)$ замкнут в $\mathscr{E}_n$, то идеал $(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n))/\mathfrak{p}$ замкнут в B. Следовательно, отображение i является изоморфизмом. Обозначив через $\hat{B}$ пополнение алгебры B и используя полноту алгебры $\mathscr{F}_n/\tilde{\mathfrak{p}}$, получаем

Предложение 3.17. *Канонические отображения*

$$\mathscr{F}_n/\tilde{\mathfrak{p}} \simeq \mathscr{E}_n/(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^\infty(\mathscr{E}_n)) \to B/\mathfrak{m}^\infty(B) \to \hat{B}$$

являются изоморфизмами.

В частности, пополнение дифференцируемой алгебры есть просто ее наибольшая хаусдорфова факторалгебра; и для того, чтобы дифференцируемая алгебра была полной, необходимо и достаточно, чтобы она была хаусдорфовой или чтобы она была изоморфна (как локальная алгебра) некоторой формальной алгебре.

4. Аналитические алгебры: пополнение и когерентность.

А. Плоские модули. Мы напомним здесь некоторые определения и элементарные свойства, отсылая за доказательствами к Серру [1] или Бурбаки [1]. (Тем более что почти все эти доказательства достаточно просты, так что самостоятельная проверка справедливости формулируемых утверждений явится хорошим упражнением для читателя.)

Отметим, что понятие плоского объекта находит естественную итерпретацию в гомологической алгебре. Мы не будем развивать здесь эту точку зрения.

Определение 4.1. Пусть A — кольцо, а E является A-модулем. Назовем модуль E *плоским*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

(i) Для всякой точной последовательности A-модулей $M' \to M \to M''$ последовательность $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M \to \to E \otimes_A M''$ точна.

(ii) Для всякого идеала $\mathfrak{J}$ кольца A естественное отображение $\mathfrak{J} \otimes_A E \to E$ инъективно.

Свойство (ii) можно интерпретировать следующим образом. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n) \in A^n$. Обозначим через $R(f, E)$ (модуль соотношений функций f_i в E) подмодуль модуля E^n, состоящий из таких наборов $(e_1, \ldots, e_n)$, что $\sum f_i e_i = 0$. Тогда справедливо

Предложение 4.2. *Модуль E является плоским тогда и только тогда, когда для всякого n и $f \in A^n$ модули $R(f, E)$ и $R(f, A)E$ совпадают.*

Замечание 4.3. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — система n элементов модуля A^m. Мы можем, как и раньше, определить $R(f, E)$ как подмодуль модуля E^n, состоящий из наборов $(e_1, \ldots, e_n)$, для которых $\sum f_i e_i = 0$. Используя индукцию и предложение 4.2, мы видим, что если модуль E плоский, то, как и раньше, $R(f, E) = R(f, A)E$.

Предложение 4.4. (i) *Пусть дана точная последовательность A-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. Если M' и M'' — плоские модули, то и M плоский. Если M и M'' плоские, то и M' плоский.*

(ii) *Пусть $A \to B$ — такой гомоморфизм колец, что B является плоским как A-модуль. Если M — плоский B-модуль, то M, рассматриваемый как A-модуль, также является плоским.*

(iii) *Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — точная последовательность A-модулей, и пусть модуль M'' плоский. Для всякого A-модуля E последовательность*

$$0 \to M' \otimes_A E \to M \otimes_A E \to M'' \otimes_A E \to 0$$

точна.

Предложение 4.5. *Пусть E — плоский A-модуль, M' и M'' — два подмодуля модуля M. Используя естественное вложение $M' \otimes_A E \to M \otimes_A E$ (соответственно*

$M''\otimes_A E \to M\otimes_A E$), рассмотрим $M'\otimes_A E$ (соответственно $M''\otimes_A E$) как подмодуль модуля $M\otimes_A E$. Тогда

$$(M'\cap M'')\otimes_A E = (M'\otimes_A E)\cap(M''\otimes_A E).$$

(Используется точность последовательности

$$0 \to M/(M'\cap M'') \xrightarrow{i} M/M' \oplus M/M'' \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} M/(M'+M'') \to 0,$$

где

$$i(x) = (x \bmod M',\ x \bmod M'')$$

и

$$\delta(x', x'') = x' \bmod (M'+M'') - x'' \bmod (M'+M''),$$

а также точность последовательности, полученной из предыдущей тензорным умножением на E.)

Определение 4.6. Пусть A — кольцо, а E — A-модуль. Мы говорим, что модуль E *вполне плоский*, если

(i) E — плоский модуль;

(ii) для всякого A-модуля M из равенства $E\otimes_A M = \{0\}$ следует, что $M = \{0\}$.

[Достаточно потребовать (ii) для модулей конечного типа.]

Пусть B — кольцо, содержащее A. Для того чтобы B было вполне плоским как A-модуль, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих эквивалентных условий:

(i) B/A — плоский A-модуль;

(ii) B — плоский A-модуль, и для всякого идеала $\mathfrak{J}$ кольца A идеал $(\mathfrak{J}B)\cap A$ совпадает с $\mathfrak{J}$.

В более общей ситуации справедливо

Предложение 4.7. *Пусть $A\subset B\subset C$ — такие три кольца, что:*

(i) *C вполне плоско над A;*

(ii) *для всякого идеала $\mathfrak{J}$ кольца A идеалы $(\mathfrak{J}C)\cap B$ и $\mathfrak{J}B$ совпадают.*

Тогда B вполне плоско над A.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим точную последовательность A-модулей

$$0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0.$$

Зная, что C/A — плоский модуль, мы хотим доказать, что B/A — также плоский модуль. Таким образом, достаточно доказать, что модуль C/B плоский (предложение 4.4). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{I}\otimes B & \to & \mathfrak{I}\otimes C & \to & \mathfrak{I}\otimes(C/B) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathfrak{I}B & \to & \mathfrak{I}C & \to & \mathfrak{I}(C/B) & \to & 0.
\end{array}$$

Первая строка точна, поскольку тензорное произведение является точным справа функтором, а вторая строка точна в силу свойства (ii). Первая и третья вертикальные стрелки сюръективны, а вторая биективна. Следовательно, третья стрелка биективна, предложение доказано.

Замечание 4.8. Рассмотрим опять ситуацию предыдущего предложения. Пусть $F \subset E$ — два A-модуля. Для упрощения обозначений положим $FB = F \otimes_A B$; аналогично определим FC, EB, ... Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & FB & \to & FC & \to & F(C/B) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & EB & \to & EC & \to & E(C/B) & \to & 0.
\end{array}$$

Так как B, C, C/B — плоские модули, то столбцы в этой диаграмме точны, а строки точны в силу пункта (iii) предложения 4.4 и того, что модуль C/B плоский. Тогда, рассматривая FB, FC, EB как подмодули модуля EC, получаем $FC \cap EB = FB$. [Эта формула в случае $E = A$, F — идеал кольца A есть не что иное, как условие (ii) предложения 4.7.]

В. Пополнение аналитических алгебр. Пусть A — нётерово локальное кольцо, E есть A-модуль конечного типа, снабженный топологией Крулля, и $\widehat{E}$ — пополнение модуля E. Имеет место следующий результат (Серр [1]; см. также Бурбаки [1]).

Теорема 4.9. (i) *Естественное отображение* $\hat{A} \otimes_A E \to \hat{E}$ *является изоморфизмом.*

(ii) $\hat{A}$ — *вполне плоский модуль над* A.

Приведем набросок доказательства. Во-первых, если $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность A-модулей конечного типа, то топология в E' индуцирована топологией из E, а топология в E'', являющаяся фактор-топологией топологии в E, хаусдорфова (следствие 3.13). Из свойств пополнения топологических групп следует, что последовательность $0 \to \hat{E}' \to \hat{E} \to \hat{E}'' \to 0$ точна. Из этого мы известным методом выводим, что для всякой точной последовательности $E' \to E \to E''$ A-модулей конечного типа последовательность $\hat{E}' \to \hat{E} \to \hat{E}''$ точна.

Применим этот результат к представлению модуля E, т. е. к точной последовательности $A^p \to A^q \to E \to 0$. Мы получим утверждение (i). Отсюда непосредственно следует, что $\hat{A}$ — плоский A-модуль.

Наконец, всякий модуль E конечного типа хаусдорфов, так что отображение $E \to \hat{E}$ инъективно. В частности, из того, что $\hat{E} = \{0\}$, следует, что $E = \{0\}$, и утверждение (ii) доказано.

Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал кольца A, $B = A/\mathfrak{p}$. „Внутренняя" топология кольца B и его топология как A-модуля совпадают. Следовательно,

$$\hat{B} \simeq \hat{A}/\hat{\mathfrak{p}} \simeq (A/\mathfrak{p}) \otimes_A \hat{A} \quad \text{и} \quad \hat{\mathfrak{p}} \simeq \hat{A} \otimes_A \mathfrak{p},$$

так что $\hat{\mathfrak{p}}$ есть замыкание идеала $\mathfrak{p}$ в $\hat{A}$. В случае $A = \mathfrak{O}_n$ очевидно, что $\hat{A} = \mathcal{F}_n$. Таким образом, полученные результаты дают описание пополнений аналитических алгебр.

Из теоремы 4.9 и предложения 4.7 вытекает

Предложение 4.10. *Пусть* $A \subset B$ — *два таких нётеровых локальных кольца, что отображение* $\hat{A} \to \hat{B}$ *является изоморфизмом. Тогда* B *вполне плоско над* A.

Пример 4.11. Пусть R_n — поле $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$ рациональных функций и S_n — его подкольцо, состоящее из дробей, знаменатели которых не обращаются в нуль в начале координат. Очевидно, что S_n вкладывается в $\mathfrak{O}_n$ и пополнения этих колец равны $\mathcal{F}_n$. Следовательно, кольцо $\mathfrak{O}_n$ вполне плоско над S_n. Так как кольцо S_n очевидно плоско над $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$, отсюда следует, что кольцо $\mathfrak{O}_n$ плоско над $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Точно так же можно доказать, что кольцо $\mathfrak{O}_n$ плоско над кольцом $\mathfrak{O}_{n-1}[x_n]$ (очевидным образом вложенным в $\mathfrak{O}_n$).

C. Когерентность. Пусть $\mathcal{U}$ — множество открытых окрестностей нуля в $\mathbf{R}^n$. Для $V \in \mathcal{U}$ введем обозначения $\widetilde{\mathfrak{O}}_n(V) = \prod_{x \in V} \mathfrak{O}_{n,x}$ и $\mathfrak{O}_n(V)$ — пространство действительнозначных аналитических функций на V.

Сопоставляя каждой функции $f \in \mathfrak{O}_n(V)$ множество ее рядов Тейлора в различных точках $x \in V$, получаем отображение $\mathfrak{O}_n(V) \to \widetilde{\mathfrak{O}}_n(V)$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{O}}_n$ — индуктивный предел колец $\widetilde{\mathfrak{O}}_n(V)$ относительно фильтрованного множества $\mathcal{U}$. Указанное выше отображение определяет вложение $\mathfrak{O}_n \to \widetilde{\mathfrak{O}}_n$ (на которое мы будем ссылаться как на каноническое вложение).

Заменив $\mathfrak{O}_n$ на $\mathcal{F}_n$, можно определить кольцо $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ и каноническое вложение $\mathcal{E}_n \to \widetilde{\mathcal{F}}_n$ (полученное сопоставлением каждой функции $f \in \mathcal{E}_n$ ростка в нуле семейства рядов Тейлора функции f в точках окрестности нуля). Наконец, из вложения $\mathfrak{O}_n \to \mathcal{F}_n$ получаем очевидным образом вложение $\widetilde{\mathfrak{O}}_n \to \widetilde{\mathcal{F}}_n$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{O}_n & \to & \widetilde{\mathfrak{O}}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_n & \to & \widetilde{\mathcal{F}}_n \end{array}$$

коммутативна.

Одним из основных результатов этого курса является доказательство того, что тройка $(\mathfrak{O}_n, \mathcal{E}_n, \widetilde{\mathcal{F}}_n)$ удовлетворяет условиям предложения 4.7. Мы докажем в гл. VI свойство (ii), являющееся более трудным, а сейчас установим свойство (i).

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 4.12 (Ока). *$\tilde{\mathfrak{S}}_n$ вполне плоско над $\mathfrak{S}_n$.*

Очевидно, достаточно доказать, что $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ плоско над $\mathfrak{S}_n$. Докажем сначала, что это свойство эквивалентно классической формулировке теоремы Ока:

(C) *Пусть $f=(f_1, \ldots, f_p)$ — система m-векторов аналитических функций в окрестности нуля, и пусть g_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, являются такими p-векторами аналитических функций в окрестности нуля, что их ростки g_i^0 в нуле порождают $R(f^0, \mathfrak{S}_n)$. Тогда во всякой точке a, достаточно близкой к нулю, ростки g_i^a порождают $R(f^a, \mathfrak{S}_{n,a})$.*

Используя интерпретацию понятия плоского модуля в терминах соотношений, с очевидностью получаем (C)$\Rightarrow$(4.12). Обратно, докажем (C), используя (4.12). Если бы (C) было неверно, существовали бы последовательность точек a_k, сходящихся к нулю, и ростки $\gamma_k \in R\left(f^{a_k}, \mathfrak{S}_{n,a_k}\right)$, не являющиеся линейными комбинациями векторов $g_i^{a_k}$. Рассмотрим в модуле $\tilde{\mathfrak{S}}_n^p$ росток, определенный в точках a_k ростками γ_k, а в остальных точках нулевыми ростками. Этот росток не принадлежит модулю $R(f^0, \mathfrak{S}_n)\tilde{\mathfrak{S}}_n$, что приводит к противоречию.

Докажем теперь (C). Прежде всего, применяя, как и в замечании 4.3, индукцию по m, мы легко сведем утверждение к случаю $m=1$. В случае $m=1$ обозначим через J идеал, порожденный в $\mathfrak{S}_n$ ростками $f_1^0, \ldots, f_p^0$; доказательство (C) для $(f_1, \ldots, f_p)$ эквивалентно доказательству (C) для любой другой системы функций, ростки которых в нуле порождают J (проверку этого утверждения предоставляем читателю).

Применив следствия 3.7 и 3.6 и производя линейную замену координат, можно предположить, что f_1^0 — отмеченный полином по x_n и что $f_2^0, \ldots, f_p^0$ — полиномы по x_n степени меньше $\deg_{x_n}^0 f_1^0 = r$.

Теперь мы докажем, что для всякой точки a, достаточно близкой к нулю, $R(f^a, \mathfrak{O}_{n,a})$ порождается системой из p полиномов, степени которых по x_n не больше r. Прежде всего, учитывая пример 4.11, видим, что $R(f^a, \mathfrak{O}_{n,a})$ порождается системой p полиномов по x_n; рассмотрим такую систему $(g_1, \ldots, g_p)$. Так как f_1^a — унитарный полином (не обязательно отмеченный!), то для $i \geqslant 2$

$$g_i = f_1^a g_i' + g_i'',$$

где g_i' и g_i'' — полиномы по x_n, $\deg_{x_n}^0 g_i'' < r$. Из соотношения $\sum g_i f_i^a = 0$ следует

$$f_1^a \left(g_1 + \sum_{i=2}^{p} f_i^a g_i'\right) + \sum_{i=2}^{p} f_i^a g_i'' = 0.$$

Положим $g_1'' = g_1 + \sum\limits_{i=2}^{p} f_i^a g_i'$, тогда $(g_1'', \ldots, g_p'') \in$ $\in R(f^a, \mathfrak{O}_{n,a})$ и $\deg_{x_n}^0 f_1^a g_1'' = \sup\limits_{i \geqslant 2} \deg_{x_n}^0 f_i^a g_i'' < 2r$. Следовательно,

$$\deg_{x_n}^0 g_1'' < r.$$

Наконец,

$$(g_1, \ldots, g_p) = (g_1'', \ldots, g_p'') + \\ + \sum_{i=2}^{p} g_i'(-f_i^a, 0, \ldots, 0, f_1^a, 0, \ldots, 0),$$

что доказывает утверждение.

Доказательство свойства (С) нетрудно получить индукцией по n: в самом деле, достаточно установить этот результат для соотношений в нуле между функциями $f_1, \ldots, f_p$ с коэффициентами, являющимися полиномами по x_n степени не больше r. Если теперь выписать в явном виде коэффициенты полиномов и их соотношений, утверждение сведется к (С) в случае $n-1$ переменной.

Следствие 4.13. *$\tilde{\mathfrak{F}}_n$ вполне плоско над $\mathfrak{O}_n$.*

Это утверждение, если его сформулировать в тех же терминах, что и (C), немедленно следует из (C) и из того, что $\mathcal{F}_{n,a}$ вполне плоско над $\mathfrak{S}_{n,a}$ для всякой точки a.

5. Размерность аналитических алгебр и аналитических ростков.

А. Понятие размерности. Напомним следующее определение.

Определение 5.1. Пусть A — нётерово локальное кольцо. *Размерностью* кольца A (пишется $\dim A$) называется наибольшее целое число n, для которого существует строго убывающая последовательность $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m}(A)$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ простых идеалов кольца A.

Имеет место следующий результат (см. Зарисский, Самюэль [1]).

Предложение 5.2. *Для всякого нётерова локального кольца A*

(i) *размерность A конечна и равна минимальному числу образующих определяющих идеалов кольца A*;

(ii) $\dim A = \dim \hat{A}$.

Из утверждения (i) сразу следует, что $\dim \mathfrak{S}_n = \dim \mathcal{F}_n = n$.

Теорема 5.3 (Коэн — Зайденберг). *Если A и B — два нётеровых локальных кольца, $A \subset B$ и B конечно над A, то* $\dim B = \dim A$.

Неравенство $\dim B \leqslant \dim A$ следует немедленно из 5.2 (i), так как всякий определяющий идеал кольца A порождает определяющий идеал кольца B (ср. § 1). Его можно также получить из следующего предложения.

Предложение 5.4. *Пусть A и B — два кольца, $A \subset B$ и B конечно над A. Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — два идеала кольца B, причем $\mathfrak{p}$ — простой идеал, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$. Тогда $\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{q} \cap A$.*

Доказательство. Факторизуя по $\mathfrak{p}$, мы сведем задачу к случаю, когда $\mathfrak{p} = \{0\}$, а A и B — области целостности [1]). Пусть $\bar{A}$ (соответственно $\bar{B}$) — поле частных кольца A (соответственно B). Так как $\bar{A}[B]$ — конечная $\bar{A}$-алгебра без делителей нуля, то она является полем, так что $\bar{A}[B] = \bar{B}$. Пусть $f \in \mathfrak{q}$, $f \neq 0$. Тогда $1/f = b/a$, где $b \in B$, $a \in A$, $a \neq 0$. Следовательно, $a = fb \in \mathfrak{q} \cap A$, и предложение доказано.

B. Целые аналитические алгебры. Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал в $\mathfrak{O}_n$ и $A = \mathfrak{O}_n/\mathfrak{p}$. Пусть $g_1, \ldots, g_p \in \mathfrak{m}(\mathfrak{O}_n)$, а $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_p$ — канонические образы этих функций в A. Напомним, что существует единственный морфизм u: $\mathfrak{O}_p \to A$ такой, что $u(y_i) = \bar{g}_i$ ($y_1, \ldots, y_p$ — координаты в $\mathbf{R}^p$). Если морфизм u инъективен, то говорят, что функции $g_1, \ldots, g_p$ аналитически независимы относительно $\mathfrak{p}$ (или что $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_p$ аналитически независимы).

Пусть $k = \dim A$; ясно, что $0 \leqslant k \leqslant n$.

Теорема 5.5. *При сделанных выше предположениях существует такая линейная замена координат в $\mathbf{R}^n$, что в новых координатах $x_1, \ldots, x_n$*

(i) *$x_1, \ldots, x_k$ аналитически независимы относительно $\mathfrak{p}$;*

(ii) *морфизм $\mathfrak{O}_k \to A$, определенный элементами $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$, конечен.*

Рассмотрим множество (E) пар (f, S) [где $f = (f_1, \ldots, f_l)$ — семейство ненулевых элементов идеала $\mathfrak{p}$, а S — система координат $(x_1, \ldots, x_n)$, полученная из канонической системы координат линейной заменой], обладающее следующими свойствами $(1 \leqslant p \leqslant l)$:

(a) $f_p \in \mathfrak{O}_{n-p+1}$, т. е. f_p зависит только от $x_1, \ldots, x_{n-p+1}$;

(b) $f_p(0, \ldots, 0, x_{n-p+1}) \neq 0$.

Назовем такую пару максимальной, если не существует пары $(f', S') \in (E)$, где $f' = (f_1, \ldots, f_l, g)$, а система S' получена из системы S линейной заменой первых $n-l$

---

[1]) Дальше можно рассуждать так: пусть $f \in \mathfrak{q}$, $f \neq 0$. Из конечности B над A следует, что имеется соотношение $\sum a_i f^i = 0$, где $a_i \in A$, причем можно полагать, что $a_0 \neq 0$. Остается заметить, что $a_0 \in A \cap \mathfrak{q}$. — *Прим. ред.*

координат (в подпространстве, натянутом на эти координаты). Возьмем такую максимальную пару (которая, очевидно, существует). Применяя подготовительную теорему, получаем, что кольцо A конечно над $\mathfrak{O}_{n-l}$. С другой стороны, отображение $\mathfrak{O}_{n-l} \to A$ инъективно: если бы это было не так, то существовала бы функция $g \in \mathfrak{O}_{n-l} \cap \mathfrak{p}$, $g \neq 0$, и после линейной замены первых $n-l$ координат в подпространстве, натянутом на эти координаты, мы получили бы, что $g(0, \ldots, 0, x_{n-l}) \neq 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 5.3 следует, что $\dim A = k$. Теперь будем предполагать, что идеал $\mathfrak{p}$ прост, и вернемся к прежним обозначениям. Пусть $\overline{\mathfrak{O}}_k$ (соответственно $\overline{A}$) — поле частных кольца $\mathfrak{O}_k$ (соответственно A). Поле $\overline{A}$ — конечное алгебраическое расширение поля $\overline{\mathfrak{O}}_k$.

Предложение 5.6. *Для всякого элемента $f \in A$ [соответственно $\mathfrak{m}(A)$] его минимальный полином над $\overline{\mathfrak{O}}_k$ имеет коэффициенты в $\mathfrak{O}_k$ [соответственно в $\mathfrak{m}(\mathfrak{O}_k)$] и является отмеченным.*

Доказательство. Кольцо $\mathfrak{O}_k$ факториально, следовательно, целозамкнуто. Так как всякий элемент $f \in A$ цел над $\mathfrak{O}_k$, коэффициенты его минимального полинома P лежат в $\mathfrak{O}_k$. Покажем, что если $f \in \mathfrak{m}(A)$, то P — отмеченный полином. Если бы это было не так, то существовало бы разложение $P = P'P''$, где $P' \in \mathfrak{O}_k[t]$ — отмеченный полином, а $P'' \in \mathfrak{O}_{k+1}$ (на самом деле $P'' \in \mathfrak{O}_k[t]$, но это не имеет значения) — обратимый элемент в $\mathfrak{O}_{k+1}$. Тогда $P''(x_1, \ldots, x_k, f)$ обратим в $\mathfrak{O}_k$, а $P'(x_1, \ldots, x_k, f) = 0$, так что P не является минимальным полиномом элемента f (если P'' не есть константа). Предложение доказано.

В той же ситуации подготовительная теорема показывает, что классы $\overline{x}_{k+1}, \ldots, \overline{x}_n$ элементов $x_{k+1}, \ldots, x_n$ по модулю $\mathfrak{p}$ порождают кольцо A как $\mathfrak{O}_k$-алгебру. Тем более они порождают поле $\overline{A}$ над $\overline{\mathfrak{O}}_k$. Из теоремы о примитивном элементе следует, что линейной заменой координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ в подпространстве, натянутом на эти координаты, можно получить $\overline{A} = \overline{\mathfrak{O}}_k[\overline{x}_{k+1}]$. Пусть тогда

P — минимальный полином элемента $\bar{x}_{k+1}$, Δ — его дискриминант, и пусть $p = \deg P = [\bar{A} : \bar{\mathfrak{O}}_k]$.

Предложение 5.7. *Для всякого элемента $f \in \bar{A}$, целого над A, существует такой единственный полином $Q \in \mathfrak{O}_k[t]$, $\deg Q < p$, что $\Delta f = Q(\bar{x}_{k+1})$.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ — $\bar{\mathfrak{O}}_k$-изоморфизмы поля $\bar{A}$ в алгебраическом замыкании поля $\bar{\mathfrak{O}}_k$ [1]). Для $0 \leqslant i \leqslant p-1$ получаем

$$\sigma_1(\bar{x}_{k+1}^i f) + \ldots + \sigma_p(\bar{x}_{k+1}^i f) = a^{(i)} \in \mathfrak{O}_k$$

(так как $\mathfrak{O}_k$ целозамкнуто). Если отождествить A с $\sigma_1(A)$ и решить эти уравнения относительно $\sigma_1(f)$, получим полином Q с нужными свойствами. Единственность очевидна.

C. Действительные аналитические ростки. В заключение этой главы мы напомним некоторые результаты, которые потребуются нам в дальнейшем. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Замкнутое множество $F \subset \Omega$ называется аналитическим, если в окрестности каждой своей точки F есть множество общих нулей конечного семейства аналитических функций. Выделим в $\mathbf{R}^n$ точку, например 0. Если мы отождествим любые два аналитических множества, определенных в двух окрестностях точки 0 и совпадающих в третьей окрестности, то получим аналитический росток в точке 0. Каждому такому ростку E мы поставим в соответствие идеал $\mathfrak{J}(E) \subset \mathfrak{O}_n$ ростков всех аналитических функций, обращающихся в нуль на E. Обратно, всякому идеалу $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{O}_n$ можно поставить в соответствие росток $V(\mathfrak{p})$, определенный нулями конечной системы образующих идеала $\mathfrak{p}$. [Очевидно, что росток $V(\mathfrak{p})$ не зависит от выбранной системы образующих.] Для любого ростка E росток $V(\mathfrak{J}(E))$ совпадает с E, и для любого идеала $\mathfrak{p}$ идеал $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{p}))$ содержит $\mathfrak{p}$, но, вообще говоря, $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{p})) \neq \mathfrak{p}$.

Конечное объединение (пересечение) аналитических ростков определяется очевидным образом и тоже является аналитическим ростком.

---

[1]) Изоморфизмы, переводящие $\bar{x}_{k+1}$ в корни полинома P. — *Прим. перев.*

Говорят, что росток E приводим, если $E = E' \cup E''$, где $E \neq E'$, $E \neq E''$; в противном случае росток E неприводим. Нетрудно проверить, что E неприводим тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{J}(E)$ прост. Всякая убывающая последовательность аналитических ростков стабилизируется (поскольку $\mathcal{O}_n$ — нётерово кольцо). Всякий аналитический росток E можно представить единственным способом в виде конечного объединения неприводимых ростков, ни один из которых не содержится в объединении остальных. Мы назовем эти ростки неприводимыми компонентами ростка E.

Пусть E — аналитический росток. Размерностью ростка E (пишется $\dim E$) называется размерность кольца $\mathcal{O}_n/\mathfrak{J}(E)$. Если $E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i$, очевидно, что $\mathfrak{J}(E) = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{J}(E_i)$. Отсюда и из определения 5.1 следует, что размерность ростка равна наибольшей размерности его неприводимых компонент.

Пусть росток E неприводим и $\dim E = k$. Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(E)$. Применим к идеалу $\mathfrak{p}$ результаты § 5, В. Используя обозначения предложения 5.7, обозначим через $Q_{k+2}, \ldots, Q_n$ полиномы, соответствующие элементам $\bar{x}_{k+2}, \ldots, \bar{x}_n$.

Предложение 5.8. *Пусть $\bar{E}$ — аналитическое множество в окрестности нуля, росток которого в нуле неприводим. Тогда множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ окрестности нуля, удовлетворяющих условиям $x \in \bar{E}$, $\Delta(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, совпадает с множеством*

$$P(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0; \ \Delta(x_1, \ldots, x_k)\, x_{k+j} - Q_{k+j}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant n-k;$$
$$\Delta(x_1, \ldots, x_k) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{q}$ — идеал в $\mathcal{O}_n$, порожденный элементами P и $\Delta x_{k+j} - Q_{k+j}$. Ясно, что $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, и достаточно показать, что для всякой функции $f \in \mathfrak{p}$ существует такое целое число p, что $\Delta^p f \in \mathfrak{q}$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{O}}_k$ (соответственно $\tilde{\mathcal{O}}_n$, $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{q}}$) локализацию $\mathcal{O}_k$ (соответственно $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$) относительно Δ, т. е. множество дробей f/Δ^p, где $f \in \mathfrak{S}_k$ (соответственно $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$). Мы должны показать, что $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{q}}$ или что естественный эпиморфизм $\tilde{\mathfrak{S}}_n/\tilde{\mathfrak{q}} \to \tilde{\mathfrak{S}}_n/\tilde{\mathfrak{p}}$ биективен.

Кольцо $\tilde{\mathfrak{S}}_k$ можно рассмотреть естественным образом как подкольцо двух предшествующих колец, и, обозначив через x'_{k+j} (соответственно x''_{k+j}) образ элемента x_{k+j} в $\tilde{\mathfrak{S}}_n/\tilde{\mathfrak{p}}$ (соответственно в $\tilde{\mathfrak{S}}_n/\tilde{\mathfrak{q}}$), мы получим изоморфизмы

$$\tilde{\mathfrak{S}}_a/\tilde{\mathfrak{p}} \simeq \tilde{\mathfrak{S}}_k\left[x'_{k+1}\right] \simeq \tilde{\mathfrak{S}}_k\left[x''_{k+1}\right] \simeq \tilde{\mathfrak{S}}_k[t]/(P)$$

(первый изоморфизм следует из предложения 5.7). Таким образом, нам осталось только показать, что x''_{k+1} порождает $\tilde{\mathfrak{S}}_n/\tilde{\mathfrak{q}}$. Из равенства $x''_{k+j} = Q_{k+j}/\Delta$ следует, что $x''_{k+j} \in \tilde{\mathfrak{S}}_k\left[x''_{k+1}\right]$. Таким образом, результат будет доказан, если мы покажем, что по модулю идеала $\mathfrak{q}$ всякий элемент кольца $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ эквивалентен элементу кольца $\tilde{\mathfrak{S}}_k[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Если P_{k+j} — минимальный полином элемента $\bar{x}_{k+j}$ над $\mathfrak{S}_k (2 \leqslant j \leqslant n-k)$, то изоморфизмы, указанные выше, показывают, что $P_{k+j}(x''_{k+j}) = 0$, так что $P_{k+j} \in \tilde{\mathfrak{q}}$. Это вместе с подготовительной теоремой [точнее, следствием 3.6, примененным последовательно к P, $P_{k+2}, \ldots, P_n$] дает нужный результат.

Замечание 5.9. Необходимо обратить внимание на то, что в противоположность комплексному случаю простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{S}_n$ не обязательно имеет вид $\mathfrak{J}(E)$: другими словами, „Nullstellensatz" не выполняется в действительной области. (Контрпример: $n=2$, а $\mathfrak{p}$ — главный идеал, порожденный функцией $x_1^2 + x_2^2$!)

Глава IV

МЕТРИЧЕСКИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

1. Множители. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и X — его замкнутое подмножество. Обозначим через $\mathcal{M}(X;\Omega)$ множество C^∞-функций f на $\Omega \setminus X$, удовлетворяющих следующему условию.

(1.1) Для всякого компактного множества $K \subset \Omega$ и всякого набора $k \in \mathbf{N}^n$ из n целых неотрицательных чисел существуют такие константы $C > 0$, $m > 0$, что для $x \in K \setminus X$

$$|D^k f(x)| \leqslant \frac{C}{(d(x, X))^m}.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $g \in \mathcal{M}(X;\Omega)$, $g \neq 0$, *во всех точках множества* $\Omega \setminus X$. *Тогда* $\frac{1}{g} \in \mathcal{M}(X;\Omega)$ *в том и только том случае, если для всякого компактного множества* $K \subset \Omega$ *существуют такие константы* $C > 0$, $\alpha > 0$, *что*

$$|g(x)| \geqslant C \cdot (d(x, X))^\alpha, \quad \text{если} \quad x \in K \setminus X. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если $g^{-1} \in \mathcal{M}(X;\Omega)$, то, применив условие (1.1) к $f = g^{-1}$ и $k = 0$, получим оценку (1.3). Обратно, если выполняется (1.3), то условие (1.1) для $f = g^{-1}$ следует из (1.1) для g и соотношений

$$D^k f = g^{-|k|-1} P_k(g, \ldots, D^k g),$$

где P_k — многочлен от производных функции g порядка $l \leqslant k$.

Предложение 1.4. $\mathcal{M}(X;\Omega)$ *является пространством множителей для пространства* $\mathcal{J}(X, \Omega)$ *функций класса* C^∞ *на* Ω, *плоских на* X. *Более точно, если*

$F \in \mathcal{J}(X; \Omega)$, $g \in \mathcal{M}(X; \Omega)$, то C^∞-функция gF на $\Omega \setminus X$ имеет единственное продолжение до C^∞-функции на Ω, плоской на X.

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{J}_*$ функций класса C^∞ на Ω, обращающихся в нуль в окрестности множества X, плотно в $\mathcal{J}(X; \Omega)$, мы должны доказать только то, что умножение на g является непрерывным отображением пространства $\mathcal{J}_*$ в себя в топологии, индуцированной из $\mathcal{J}(X; \Omega)$, т. е. для всякого $m > 0$ и компакта $K \subset \Omega$ существует $m' > 0$ и такой компакт $K' \subset \Omega$, что для $F \in \mathcal{J}_*$ выполняется оценка

$$\| gF \|_m^K \leqslant C \| F \|_{m'}^{K'},$$

где $C > 0$ не зависит от F. Если функция F принадлежит $\mathcal{J}(X; \Omega)$, то для любых $k \in \mathbf{N}^n$, $N > 0$ на любом компакте $K \subset \Omega$ выполняется неравенство

$$| D^k F(x) | \leqslant C_N (d(x, X))^N \| F \|_{N+k}^{K'},$$

где K' — некоторый компакт в Ω.

Отсюда следует наше утверждение, если применить условие (1.1) к функции g и использовать формулу Лейбница.

Предложение 1.5. *Если X и Y — два регулярно расположенных замкнутых подмножества множества Ω и $\mathcal{J}(X \cap Y; Y)$ — пространство C^∞-функций по Уитни на Y, плоских на $X \cap Y$, то $\mathcal{M}(X; \Omega)$ является пространством множителей для $\mathcal{J}(X \cap Y; Y)$ (в том же смысле, что и в предложении* 1.4).

Доказательство. Так как X и Y регулярно расположены, то для всякой функции $F \in \mathcal{J}(X \cap Y; Y)$ функция $\tilde{F}$ на $X \cup Y$, равная F на Y и нулю на X, является сужением на $X \cup Y$ некоторой функции $f \in \mathcal{J}(X; \Omega)$. Предложение 1.5, таким образом, немедленно следует из предложения 1.4.

2. Квазигёльдеровские функции. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и f — действительная функция в Ω.

Определение 2.1. Функция f называется *квазигёльдеровской порядка* α, $0<\alpha\leqslant 1$, если существует такая константа $C>0$, что для всяких двух точек x, y, таких, что соединяющий их отрезок $[x, y]$ принадлежит области Ω, выполняется условие

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha}.$$

(Заметим, что это условие не обязано выполняться для всех $x, y\in\Omega$.)

Предложение 2.2. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и a_l ($l=1, \ldots, p$) — ограниченные функции, квазигёльдеровские порядка α. Пусть f — непрерывная функция на Ω, удовлетворяющая уравнению*

$$f^p+\sum_{l=1}^{p} a_l f^{p-l}=0.$$

Тогда функция f ограничена и является квазигёльдеровской порядка α/p.

Доказательство основывается на трех совсем элементарных леммах.

Лемма 2.3. *Если $c_1, \ldots, c_p$, z — комплексные числа и*

$$z^p+\sum_{l=1}^{p} c_l z^{p-l}=0,$$

то $|z|\leqslant 2\sup|c_l|^{1/l}$.

Доказательство. В силу однородности[1]) можно предположить, что $|c_l|\leqslant 1$. Тогда

$$|z|^p\leqslant 1+|z|+\ldots+|z|^{p-1},$$

откуда $|z|\leqslant 2$.

Лемма 2.4. *Пусть z_j (соответственно z'_k) ($j, k=1, \ldots, p$) — корни уравнения* $z^p+\sum_{l=1}^{p} c_l z^{p-l}=0$

[1]) Автор подразумевает здесь возможность замены z на λz и c_l на $\lambda^l c_l$. — *Прим. перев.*

$\left(\text{соответственно } z^p+\sum_{i=1}^{p} c'_i z^{p-i}=0\right)$, *где* c_i, c'_i — *комплексные числа. Предположим, что* $|c_i|\leqslant K^i$, $|c_i-c'_i|\leqslant\leqslant K^i\delta$, *где* K, $\delta>0$. *Тогда для каждого* j *существует такое* k, *что* $|z_j-z'_k|\leqslant 2K\delta^{1/p}$.

Доказательство. Так как $z_j^p+\sum_{i=1}^{p} c_i z_j^{p-i}=0$, то

$$\prod_k |z_j-z'_k| = \left|z_j^p+\sum_{i=1}^{p} c'_i z_j^{p-i}\right| = \left|\sum_{i=1}^{p}(c'_i-c_i)z_j^{p-i}\right|.$$

Из леммы 2.3 следует, что $|z_j|\leqslant 2K$, так что

$$\prod_k |z_j-z'_k|\leqslant 2^pK^p\delta,$$

откуда следует утверждение леммы.

Предложение 2.2 очевидным образом вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.5. *Пусть* $K>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, *и пусть* $b_1, \ldots, b_p$ — *такие комплексные функции, определенные на замкнутом отрезке* $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, *что для* $t_1\leqslant t, t'\leqslant t_2$ *выполняются условия*

$$|b_i(t)|\leqslant K^i, \quad |b_i(t)-b_i(t')|\leqslant K^i|t-t'|^\alpha.$$

Пусть f — *такая непрерывная функция на* $[t_1, t_2]$, *что*

$$f^p+\sum_{i=1}^{p} b_i f^{p-i}=0.$$

Тогда

$$|f(t_2)-f(t_1)|\leqslant 4pK|t_2-t_1|^{\alpha/p}.$$

Доказательство. Пусть $z_1=f(t_1), \ldots, z_p$ — корни уравнения $z^p+\sum_{i=1}^{p} b_i(t_1)z^{p-i}=0$, и пусть Ω — объединение замкнутых кругов радиуса $2K|t_2-t_1|^{\alpha/p}$ с центрами в точках z_i. Тогда из леммы 2.4 следует, что $f([t_1, t_2])$ содержится в Ω, а в силу непрерывности функции f содержится в связной компоненте множества Ω, содержащей точку z_1. Отсюда сразу следует утверждение леммы 2.5.

3. Обозначения. В оставшейся части этой главы и в следующих главах нам придется несколько раз ссылаться на локальное описание действительного аналитического множества, данное в гл. III, § 5. Поэтому мы зафиксируем условия и обозначения, которых мы будем придерживаться.

Пусть X — аналитическое множество в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, пусть $0 \in X$, и предположим, что росток X_0 множества X в точке 0 неприводим. Пусть $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(X)$ — идеал в $\mathfrak{O}_n$ ростков аналитических функций, обращающихся в нуль на X_0. Пусть $\dim X_0 = k$, и предположим, что координаты $x_1, \ldots, x_n$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям (мы доказали, что этого всегда можно достичь линейной заменой координат в $\mathbb{R}^n$):

(a) $x_1, \ldots, x_k$ аналитически независимы относительно идеала $\mathfrak{J}$, т. е. естественное отображение $\mathfrak{O}_k \to \mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ инъективно; кроме того, $\mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ — конечный $\mathfrak{O}_k$-модуль.

(b) Образ элемента x_{k+1} в $\mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ порождает поле частных кольца $\mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ над полем частных кольца $\mathfrak{O}_k$.

(c) Образы $\bar{x}_{k+j}$, $j = 1, \ldots, n-k$, элементов x_{k+j} в $\mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ удовлетворяют уравнениям

$$P_j(\bar{x}_{k+j}, x') = 0 \qquad (x' = (x_1, \ldots, x_k))$$

над $\mathfrak{O}_k$ (т. е. P_j — полиномы с коэффициентами в $\mathfrak{O}_k$). Более того, мы можем предположить, что P_j — минимальные полиномы для $\bar{x}_{k+j}$, и, следовательно, являются *отмеченными* полиномами. Обозначим P_1 через P. Пусть $\Delta(x_1, \ldots, x_k)$ — дискриминант полинома P по $\bar{x}_{k+1}$. Тогда существуют такие полиномы $Q_j(\bar{x}_{k+1}; x')$ над $\mathfrak{O}_k$, что

$$\Delta(x') \cdot \bar{x}_{k+j} = Q_j(x_{k+1}; x').$$

В дальнейшем мы будем писать $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x'')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, а $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Обозначим $n-k$ через l. Выберем окрестность $\Omega_1 \subset \Omega$

начала координат, $\Omega_1 = \Omega' \times \Omega''$, где $\Omega' \subset \mathbf{R}^k$, $\Omega'' \subset \mathbf{R}^l$, так что существуют такие полиномы $P_j(x_{k+j};\ x')$, $Q_j(x_{k+j};\ x')$ с коэффициентами, аналитическими в Ω', что образы этих полиномов в $\mathfrak{O}_n/\mathfrak{J}$ представляют собой полиномы, рассматривавшиеся выше и имеющие ту же степень по x_{k+j}. Обозначим также через Δ дискриминант полинома $P_1 = P$. Тогда Δ — аналитическая функция в Ω' и ее росток в точке 0 не равен тождественно нулю. Так как P — отмеченный полином, то все корни уравнения $P(t,\ 0)=0$ равны нулю, так что для всякой окрестности нуля V'' в $\mathbf{R}^l$ существует такая окрестность нуля V' в $\mathbf{R}^k$, что если $x' \in V'$, $x'' \in \mathbf{R}^l$, $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ и $P_j(x_{k+j};\ x')=0$, то $x'' \in V''$. Можно выбрать V'' и V' так, чтобы множество $V = V' \times V''$ было относительно компактно в Ω_1. Предположим также, что V' и V'' являются кубами в $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^l$ соответственно.

Пусть $\delta = \{x' \in V' \mid \Delta(x') = 0\}$. Если окрестность V достаточно мала, то множество $X \cap ((V' \setminus \delta) \times V'')$ совпадает с множеством, определенным соотношениями

$$x' \in V' \setminus \delta, \qquad P(x_{k+1};\ x') = 0,$$

$$\Delta(x')\, x_{k+j} - Q_j(x_{k+1};\ x') = 0, \qquad 2 \leqslant j \leqslant l.$$

Ясно, что если $x' \in V' \setminus \delta$, то все корни полинома $P(x_{k+1};\ x')$ различны. Пусть $V_s (1 \leqslant s \leqslant p)$ — множество точек $x' \in V' \setminus \delta$, для которых полином $P(x_{k+1};\ x')$ имеет не менее s действительных корней. Тогда множество V_s открыто и его граница V' содержится в δ. Пусть $F^1(x') < \ldots < F^s(x')$ — s наименьших действительных корней полинома P в V_s. Ясно, что функция F^r определена, непрерывна и ограничена в $V_r (1 \leqslant r \leqslant p)$. Для $x' \in V_r$ положим

$$F_1^r = F^r; \quad F_j^r(x') = \frac{Q_j(F^r(x');\ x')}{\Delta(x')}.$$

Функции F_j^r также определены и непрерывны в V_r и, являясь корнями уравнений $P_j(t;\ x') = 0$, ограничены в V_r. Положим $\Phi^r = (F_1^r, \ldots, F_l^r)$ в V_r и

$$X_r' = \{x = (x',\ x'') \in V \mid x' \in V_r, \quad x'' = \Phi^r(x')\}.$$

Пусть $D = X \cap (\delta \times V'')$, $X_r = X'_r \cup D$. Тогда множества X_r замкнуты и $\bigcup\limits_{1 \leqslant r \leqslant p} X_r = X \cap V$.

4. Неравенство Лоясевича. Цель этого параграфа — доказать следующую важную теорему Лоясевича [1].

Теорема 4.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, и пусть f — действительная аналитическая функция в Ω. Пусть $E = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Тогда для всякого компактного множества $K \subset \Omega$ существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что для всех $x \in K$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, E))^\alpha$$

[*другими словами*, $1/f \in \mathscr{M}(E; \Omega)$].

Предположим, что теорема доказана для всех аналитических функций во всех открытых множествах в $\mathbf{R}^m$ для $m < n$. Доказательство проводится в два шага.

Шаг 1. (L) *При указанных предположениях индукции для всякого аналитического множества S в Ω размерности, меньшей n, в каждой его точке существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что для $x \in S \cap K$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, E))^\alpha.$$

Здесь f, K, E обозначают то же, что и в теореме 1.

Шаг 2. *Вывод теоремы* 4.1 *для* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *из* (L).

Доказательство свойства (L). Очевидно, достаточно доказать, что у всякой точки $a \in S \cap E$ существует такая окрестность W, что для $x \in W \cap S$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, E))^\alpha$$

с подходящими константами C и α. Мы можем предположить, что $a = 0$. Ясно, что достаточно доказать наше неравенство для $x \in X$, где X — аналитическое подмножество множества $S \cap W$, росток X_0 которого в точке 0 неприводим. Пусть $k = \dim X_0$. Можно, очевидно, предположить, что $X \not\subset E$. Воспользуемся индукцией по k и предположим, что (L) доказано для всех множеств S размерности, меньшей k. Сначала сведем (L) к следующему условию.

(L′) *Существуют аналитическое множество $Y \subset X$ в окрестности начала координат, $Y \neq X$, и такие константы $C > 0$, $\alpha > 0$, что для точек $x \in X$, достаточно близких к нулю, выполняется неравенство*

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, Y))^{\alpha}. \tag{4.2}$$

Доказательство импликации (L′)$\Longrightarrow$(L). По предположению индукции[1]) существуют такие константы B, $\beta > 0$, что для точек $y \in Y$, достаточно близких к нулю, выполняется неравенство

$$B\,|f(y)|^{\beta} \geqslant d(y, E).$$

Пусть $x \in X$ и точка $y \in Y$ выбрана так, что $|x - y| = d(x, Y)$. Такая точка y существует, если точка x достаточно близка к нулю. Но $|f(x) - f(y)| \leqslant B_1 |x - y|$ (по теореме о среднем), так что

$$d(x, E) \leqslant B\,|f(y)|^{\beta} \leqslant B_2 \{|x - y|^{\beta} + |f(x)|^{\beta}\},$$

следовательно,

$$d(y, E) \leqslant |x - y| + B_2 \{|x - y|^{\beta} + |f(x)|^{\beta}\}.$$

Утверждение следует теперь из того, что $|x - y| = d(x, Y) \leqslant (1/C)|f(x)|^{1/\alpha}$ [из формулы (4.2)].

Докажем теперь (L′). Так как идеал $\mathfrak{J}$ прост, существуют такие функции $h \in \mathfrak{O}_n$ и $f_1 \in \mathfrak{O}_k$, $f_1 \neq 0$, что $hf - f_1 \in \mathfrak{J}$[2]). Очевидно, что в (L′) можно заменить f

---

[1]) Использование предположения индукции основано на том, что Y, будучи собственным подмножеством неприводимого аналитического множества X, имеет размерность, меньшую k. — *Прим. ред.*

[2]) Можно положить $f_1 = \sigma_1(f) \ldots \sigma_p(f)$, где обозначения $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ взяты из предложения 5.7 гл. III. — *Прим. ред.*

на f_1 и E на множество E_1 нулей функции f_1 в некоторой окрестности начала координат. Предположим поэтому, что $f \in \mathfrak{S}_k$.

Возьмем теперь в качестве Y множество $D \cup (E \cap X)$. Так как $f \not\equiv 0$ на X, $Y \neq X$, то достаточно доказать, что для $x \in X_s$ (обозначения те же, что и в § 3) в окрестности начала координат выполняется неравенство

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, (E \cap X_s) \cup D))^{\alpha}.$$

Воспользуемся тем, что функция f зависит только от $x_1, \ldots, x_k$. Если E' — множество ее нулей в достаточно малой окрестности начала координат, то теорема 1, применимая к $\mathbf{R}^k$ по предположению индукции, дает нам неравенство вида

$$|f(x')| \geqslant C(d(x', E'))^{\alpha}.$$

Для завершения доказательства осталось только получить неравенство вида

$$d(x, (E \cap X_s) \cup D) \leqslant B_3(d(x', E'))^{\gamma}, \qquad x \in X_s. \tag{4.3}$$

В случае $x \in D$ все доказано. Пусть тогда $x' \in V_s$, $x = (x', \Phi^s(x'))$, и пусть точка $y' \in E'$ выбрана так, что $d(x', E') = |x' - y'|$.

Если полуинтервал $[x', y')$ пересекается с δ, то неравенство (4.3) очевидно. Если же $[x', y') \cap \delta = \varnothing$, то $[x', y') \subset V_s$, и для последовательности $\{y'_\nu\}$ такой, что $y'_\nu \in [x', y')$ и $y'_\nu \to y'$ при $\nu \to \infty$, каждая предельная точка y'' множества точек $\Phi^s(y'_\nu)$ обладает свойством $(y', y'') \in D \cup (E \cap X_s)$. Отсюда следует, что

$$|\Phi^s(x') - y''| \leqslant \varlimsup_{\nu \to \infty} |\Phi^s(x') - \Phi^s(y'_\nu)| \leqslant$$
$$\leqslant B_4|x' - y'|^{\gamma} = B_4(d(x', E'))^{\gamma}.$$

Второе неравенство получено из предложения 2.2, так как функции F^s_j удовлетворяют уравнениям $P_j(F^s_j(x); x') = 0$, где P_j — отмеченные полиномы. Неравенство (4.3), а вместе с тем и утверждения (L′) и (L) доказаны.

Для доказательства теоремы 1 осталось только выполнить шаг 2, т. е. доказать, что теорема 1 следует из (L). Достаточно найти аналитическое множество S в окрестности начала координат $0 \in \mathbf{R}^n$, $\dim S_0 < n$, и такие константы C, $\alpha > 0$, что в окрестности начала координат

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, E \cup S))^{\alpha}.$$

Теорема будет следовать отсюда, так как из (L) мы имеем для $y \in S$ неравенство вида

$$|f(y)| \geqslant C_1 (d(y, E))^{\alpha_1} \quad (C_1, \alpha_1 > 0)$$

и можем получить требующееся неравенство, применив тот же метод, что и при доказательстве импликации $(\mathrm{L}') \Rightarrow (\mathrm{L})$. В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса можно считать функцию f отмеченным полиномом по x_n и даже неприводимым полиномом. (В самом деле, если неравенство Лоясевича верно для двух функций, оно, очевидно, верно для их произведения.) Тогда дискриминант $\Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ полинома f по x_n не равен тождественно нулю. Предположим, что Δ_f и коэффициенты полинома f определены в окрестности U начала координат. Можно взять $S = \{x \in U \mid \Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0\}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — действительные корни уравнения $f(x_n; x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$ и $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — его остальные корни. Тогда

$$|f(x)| = \prod_{i=1}^{r} |x_n - \lambda_i| \prod_{j=1}^{s} |x_n - \mu_j|.$$

Первое произведение $\prod\limits_{i=1}^{r}$, очевидно, не меньше $(d(x, E))^r$. Второе произведение не меньше

$$\prod_{j=1}^{s} |\operatorname{Im} \mu_j| \geqslant 2^{-s} \prod_{j=1}^{s} |\mu_j - \bar{\mu}_j|.$$

Все функции λ_i, μ_j ограничены, и $\Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ является произведением квадратов разностей всех корней полинома $f(x_n; x_1, \ldots, x_{n-1})$. Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{s} |\mu_j - \bar{\mu}_j| \geqslant C_2 \Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Таким образом,

$$|f(x)| \geqslant C_3(d(x, E))^r \Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

По предположению индукции $\Delta_f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \geqslant C_4(d(x, S))^\beta$, следовательно,

$$|f(x)| \geqslant C(d(x, E \cup S))^\alpha,$$

и теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.4. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть X и Y — два аналитических множества в Ω. Тогда X и Y регулярно расположены.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что для всякой точки $a \in X \cap Y$ существует такая окрестность U точки a, что множества $X \cap U$ и $Y \cap U$ регулярно расположены в U. Следовательно, можно предположить, что существуют такие аналитические функции f, g в Ω, что

$$\{x \in \Omega \mid f(x) = 0\} = X, \qquad \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\} = Y.$$

Пусть K — некоторое компактное множество в Ω. Тогда существует такая константа $B > 0$, что для $x \in K$ выполняется неравенство

$$|g(x)| \leqslant Bd(x, Y). \tag{4.5}$$

Применяя теорему 4.1 к функции $f^2 + g^2$, находим такие константы C, $\alpha > 0$, что для $x \in K$ выполняется неравенство

$$f^2(x) + g^2(x) \geqslant C(d(x, X \cap Y))^\alpha,$$

поскольку $X \cap Y = \{x \in \Omega \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Из этого неравенства и из (4.5) следует

$$d(x, Y) \geqslant C_1(d(x, X \cap Y))^{\alpha/2} \quad \text{для } x \in X \cap K,$$

что и требовалось доказать.

5. Дальнейшие свойства аналитических множеств. Следствие 4.4 дает нам информацию о метрических свойствах двух аналитических множеств. Вернемся теперь к обозначениям § 3 и докажем некоторые метрические свойства различных листов неприводимого аналитического множества. Эти свойства получены также Лоясевичем [1].

Пусть X — аналитическое множество в открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, неприводимое в начале координат. Пусть $k = \dim X_0$, и пусть $V = V' \times V''$ — окрестность начала координат в $\mathbf{R}^n$, такая же, как и в § 3. В § 3 были определены замкнутые множества $X_r \subset V$, $1 \leqslant r \leqslant p$.

Предложение 5.1. *Для всякой пары целых чисел r, s множества X_r, X_s регулярно расположены.*

Доказательство. Можно, очевидно, предположить, что $s > r$, так что $V_r \supset V_s$. Ясно, что для всякого компактного множества $K' \subset V'$ существует такое компактное множество $K'' \subset V''$, что $(K' \times V'') \cap X = (K' \times K'') \cap X$. Пусть $K = K' \times K''$. Мы должны доказать, что существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что для $x \in K \cap X_s$, $y \in K \cap X_r$ выполняется неравенство $|x - y| \geqslant C(d(x, D))^\alpha$ (поскольку $X_s \cap X_r = D$). Мы уже получили (в доказательстве теоремы 4.1) для $x \in X$ неравенство вида

$$d(x', \delta) \geqslant B(d(x, D))^\beta$$

из того, что функции F^r_j квазигёльдеровы. Следовательно, нам осталось только доказать неравенство вида

$$|x - y| \geqslant C(d(x', \delta))^\alpha. \tag{5.2}$$

Пусть $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$, где $x' \in V_s$, $y' \in V_r$. Если отрезок $[x', y']$ не содержится в V_s, то его пересечение с множеством δ непусто и неравенство (5.2) тривиально. Предположим поэтому, что $[x', y'] \subset V_s$. Пусть $\eta = (x', \Phi^r(x'))$. Далее, $F^r(x')$ и $F^s(x')$ — два различных корня уравнения $P(t; x') = 0$. Следовательно, существует такая константа $A > 0$, что

$$|F^r(x') - F^s(x')| \geqslant A|\Delta(x')|.$$

Применив теорему 1 к Δ, получаем

$$|x - \eta| \geqslant |F^r(x') - F^s(x')| \geqslant B_1(d(x', \delta))^{\beta_1}.$$

С другой стороны,

$$|y-\eta| \leqslant |y'-x'| + |\Phi^r(x') - \Phi^r(y')| \leqslant B_2 |x'-y'|^{\beta_2}$$

(поскольку функции F^r_j квазигёльдеровы). Если теперь $B_2|x'-y'|^{\beta_2} \geqslant \frac{1}{2} B_1 (d(x', \delta))^{\beta_1}$, то неравенство (5.2) тривиально. В противном случае $|y-\eta| \leqslant \frac{1}{2}|x-\eta|$, так что $|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x-\eta| \geqslant \frac{1}{2} B_1 (d(x', \delta))^{\beta_1}$, и неравенство (5.2) доказано.

Предложение 5.3. *Функции* $F^r_j (1 \leqslant j \leqslant l\, (=n-k)$, $1 \leqslant r \leqslant p)$ *принадлежат пространству* $\mathcal{M}(V' \setminus V_r;\ V')$.

Доказательство. Из леммы 1.2 и теоремы 4.1 следует, что $\frac{1}{\Delta} \in \mathcal{M}(V' \setminus V_r;\ V')$. Поэтому достаточно доказать предложение для $j=1$, т. е. для функции F^r. Докажем индукцией по $|q|\,(q \in \mathbf{N}^k)$ оценку вида

$$|D^q F^r(x')| \leqslant \frac{C_q}{(d(x', \delta))^{m_q}} \tag{5.4}$$

для $x' \in K' \setminus \delta$, где K' — компактное подмножество множества V'. Пусть $q \in \mathbf{N}^k$. Предположим, что оценка (5.4) доказана для всех таких q', что $|q'| < |q|$. Из равенства нулю функции $P(F^r(x');\ x')$ получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_{k+1}}(F^r;\ x')\right)^{\lambda_q} \cdot D^q F^r = R_q(F^r,\ D^{q'}F^r;\ x'),$$

где λ_q — целое положительное число [1]), а R_q — полином от функции F^r и ее производных порядка меньше $|q|$ (дифференцирование сложной функции). Предложение вытекает из предположения индукции, теоремы 4.1 и очевидного неравенства

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x_{k+1}} \cdot (F^r;\ x')\right| \geqslant C|\Delta(x')|.$$

[1]) Можно положить $\lambda_q = 1$. — *Прим. перев.*

Закончим эту главу описанием пространства $\mathcal{J}(D;\ X_r)$ функций, дифференцируемых по Уитни на X_r, плоских на D.

Пусть $\lambda \in \mathbf{N}^n = \mathbf{N}^k \times \mathbf{N}^l$, и пусть

$$F = \{f^\lambda\} \in \mathcal{J}(D;\ X_r).$$

Заметим, что функция F определена однозначно набором $\{g^\mu\}_{\mu \in \mathbf{N}^l}$, где

$$g^\mu = f^\lambda \quad \text{для } \lambda = 0 \times \mu,\ 0 \in \mathbf{N}^k.$$

В самом деле, если $\lambda = \nu \times \mu$, $\nu \in \mathbf{N}^k$, то f^λ является линейной комбинацией производных $D_{x'}^{\nu'} g^{\mu'}(x',\ \Phi^r(x'))$, где $\mu' \leqslant \mu$ [см. также доказательство включения (5.5 b), данное ниже].

Для всякого набора (g^μ), определяющего элемент пространства $\mathcal{J}(D;\ X_r)$, положим

$$h^\mu(x') = g^\mu(x';\ \Phi^r(x')) \in \mathcal{E}(V_r).$$

Это дает отображение

$$\pi\colon \mathcal{J}(D;\ X_r) \to [\mathcal{E}(V_r)]^{\mathbf{N}^l}.$$

Предложение 5.5. *Морфизм π отображает $\mathcal{J}(D;\ X_r)$ биективно на* $[\mathcal{J}(V' \setminus V_r;\ V')]^{\mathbf{N}^l}$.

Доказательство. Как было отмечено выше, отображение π инъективно. Поэтому достаточно доказать, что

$$\pi(\mathcal{J}(D;\ X_r)) \subset [\mathcal{J}(V' \setminus V_r;\ V')]^{\mathbf{N}^l} \tag{5.5a}$$

$$\pi(\mathcal{J}(D;\ X_r)) \supset [\mathcal{J}(V' \setminus V_r;\ V')]^{\mathbf{N}^l}. \tag{5.5b}$$

Доказательство. (а) Заметим, что любую производную функции $h^\mu(x')$ можно представить в виде конечной линейной комбинации функций $f^\lambda(x',\ \Phi^r(x'))$ с коэффициентами, являющимися полиномами от производных функций $F^r{}_j$. [Это можно доказать, например, выбором C^∞-функции в V, сужение которой на X_r равно (f^λ), и применением правила дифференцирования сложной функции.] Для доказательства (а) достаточно установить, что для всякого компактного подмножества K' множества V' функции $f^\lambda(x', \Phi^r(x'))$ стремятся к нулю быстрее всякой положительной степени расстояния от точки x' до δ, когда $x' \in V_r \cap K'$ стремится к δ. Но это следует из определения пространства $\mathcal{J}(D; X_r)$ и из того, что функция Φ^r квазигёльдерова.

(b) Пусть $h = (h^\mu)_{\mu \in \mathbf{N}^l}$, $h^\mu \in \mathcal{J}(V' \setminus V_r; V')$. Достаточно доказать, что для всякого целого $m > 0$ существует такая C^m-функция H на V, m-плоская на $(V' \setminus V_r) \times V''$, что для $\mu \in \mathbf{N}^l$, $|\mu| \leqslant m$,

$$D^\mu_{x''} H(x'; \Phi^r(x')) = h^\mu(x') \qquad \left(D^\mu_{x''} = D^{\mu_1}_{x_{k+1}} \ldots D^{\mu_l}_{x_n}\right)^{1)}.$$

Положим $H = 0$ на $(V' \setminus V_r) \times V''$ и

$$H(x) = \sum_{|\mu| \leqslant m} h^\mu(x') \frac{(x'' - \Phi^r(x'))^\mu}{\mu!},$$

$$x = (x', x'') \in V_r \times V''.$$

Из предложения 5.3 следует, что H является C^∞-функцией на V, поскольку $h^\mu(x') \in \mathcal{J}(V' \setminus V_r; V')$. Ясно, что эта функция обладает нужными свойствами.

---

[1]) В самом деле, пусть $H_m \in J^m(D; X_r)$ — сужение H на X_r. В силу последнего равенства при любом m образ H_{m+1} в $J^m(D; X_r)$ совпадает с H_m. Поэтому последовательность $\{H_m\}$ определяет искомый элемент пространства $J(D; X_r)$. — *Прим. ред.*

Глава V

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Специальная подготовительная теорема. Цель этой главы — доказать подготовительную теорему для дифференцируемых функций. Начнем с частного случая этой теоремы.

(1.1) Специальная подготовительная теорема. *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, *и пусть*

$$\Pi(x, t) = t^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(x) t^{p-i}$$

— отмеченный полином по t *с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями от* x *в окрестности точки* $x = 0$ *в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда для всякой функции* $f \in \mathscr{E}_{n+1}$ *существуют такие функции* $g \in \mathscr{E}_{n+1}$ *и* $\rho_i \in \mathscr{E}_n$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, *что*

$$\text{(W)} \qquad f(x, t) = \Pi(x, t) g(x, t) + \sum_{i=0}^{p-1} \rho_i(x) t^i.$$

Сформулируем сначала более общую теорему, которая более удобна для употребления. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть X — аналитическое множество в окрестности начала координат $0 \in \mathbf{R}^n$, X_0 — росток этого множества в точке $x = 0$. Для всякого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ обозначим через A_0 росток множества A в точке $x = 0$ и через $\widehat{A}_0$ — росток множества $A \times \mathbf{R}$ в точке $(x, t) = (0, 0)$. Пусть Y — аналитическое подмножество в X, и пусть $\mathscr{J}(Y_0; X_0)$ обозначает пространство ростков функций, дифференцируемых по Уитни на X_0, плоских на Y_0. Аналогично определим пространство $\mathscr{J}(\widehat{Y}_0; \widehat{X}_0)$.

Теорема 1.2. *Пусть* П, X_0, Y_0 *обозначают то же, что и выше. Тогда для всякой функции* $f \in \mathcal{J}(\hat{Y}_0; \hat{X}_0)$ *существуют такие ростки* $g \in \mathcal{J}(\hat{Y}_0; \hat{X}_0)$ *и* $\rho_l \in \mathcal{J}(Y_0; X_0)$, $0 \leqslant l \leqslant p-1$, *что выполняется равенство* (W).

Специальная подготовительная теорема следует отсюда, если взять $X = \mathbf{R}^n$, $Y = \varnothing$.

Сведем сначала теорему 1.2 к ее более слабому варианту. Фиксируя n и П, обозначим через $\mathrm{T}(Y_0, X_0)$ утверждение теоремы 1.2. Ясно, что если $Z_0 \subset Y_0 \subset X_0$, то из $\mathrm{T}(Z_0, Y_0)$ и $\mathrm{T}(Y_0, X_0)$ вытекает $\mathrm{T}(Z_0, X_0)$. В основе доказательства теоремы лежит следующее утверждение.

$\mathrm{P}(X_0)$. *Для всякого аналитического ростка* $Y_0 \subset X_0$, $Y_0 \neq X_0$, *существует такой аналитический росток* Y_0', $Y_0 \subset Y_0' \subsetneqq X_0$, *что* $\mathrm{T}(Y_0', X_0)$ *верно.*

Докажем, что из $\mathrm{P}(X_0)$ для всякого X_0 следует $\mathrm{T}(Y_0, X_0)$. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество таких аналитических ростков Z_0, $Y_0 \subset Z_0 \subset X_0$, что утверждение $\mathrm{T}(Z_0, X_0)$ верно. Ясно, что множество $\mathfrak{H}$ непусто ($X_0 \in \mathfrak{H}$). Так как всякая убывающая фильтрация аналитических ростков стабилизируется, множество $\mathfrak{H}$ содержит минимальный элемент. Обозначим его также через Z_0. Докажем, что $Y_0 = Z_0$. Пусть это не так. Тогда вследствие утверждения $\mathrm{P}(Z_0)$ существует такой росток Z_0', $Y_0 \subset Z_0' \subsetneqq Z_0$, что $\mathrm{T}(Z_0', Z_0)$ верно. Но из справедливости $\mathrm{T}(Z_0', Z_0)$ следует справедливость $\mathrm{T}(Z_0', X_0)$, т. е. элемент Z_0 не является минимальным.

Таким образом, осталось доказать утверждение $\mathrm{P}(X_0)$. Мы сделаем это в два этапа. Сначала в случае $X = \mathbf{R}^n$ докажем более сильный результат [аналогичный утверждению $\mathrm{P}(X_0)$ для фиксированной окрестности начала координат], а затем сведем к нему общий случай.

2. Случай $X = \mathbf{R}^n$. Пусть V — окрестность начала координат, Y — аналитическое подмножество в V, Y_0 — его росток в начале координат. Предположим, что коэффициенты полинома П аналитичны в окрестности множества $\overline{V}$.

Пусть I — такой ограниченный открытый интервал в $\mathbf{R}$, что всякий действительный корень уравнения $\Pi(x, t)=0$ лежит в I, если $x \in V$. Для всякого подмножества A в V положим $\hat{A}=A \times I$.

Можно предположить в условии теоремы 1.2, что полином Π неприводим в $\mathscr{O}_n[t]$. Следовательно, его дискриминант Δ отличен от 0 в V. Пусть $\delta=\{x \in V \mid \Delta(x)=0\}$. Докажем справедливость утверждения $\mathrm{T}(Y'_0, \mathbf{R}^n)$, где $Y'_0=Y_0 \cup \delta_0$. Более точно, докажем

Предложение 2.1. *Пусть $Y'=Y \cup \delta$. Для всякой функции $f \in \mathscr{I}(\hat{Y}'; \hat{V})$ существуют такие функции $g \in \mathscr{I}(\hat{Y}'; \hat{V})$ и $\rho_i \in \mathscr{I}(Y'; V)$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, что $f=\Pi g+\sum \rho_i t^i$ в $\hat{V}$.*

Доказательство. Пусть U_s — множество точек из $V \setminus \delta$, в которых полином Π имеет в точности s действительных корней. Тогда U_s открыто и его граница содержится в δ. Пусть $U'_s=U_s \setminus Y$, $F_s=V \setminus U_s$. Пусть $f^{(s)}=f$ в $\hat{U}_s$, $f^{(s)}=0$ в $\hat{F}_s$. Тогда $f=\sum_{s=0}^{p} f^{(s)}$, и достаточно доказать предложение для каждой функции $f^{(s)}$. Следовательно, можно предположить, что $f=0$ вне U_s для некоторого s.

Пусть $\tau_1(x)<\ldots<\tau_s(x)$ — действительные корни полинома $\Pi(x, t)$ для $x \in U_s$. Функции $\tau_i(x)$ квазигёльдеровы и принадлежат пространству $\mathscr{M}(F_s; V)$ (предложение 5.3 гл. IV).

Пусть $f_1(x, t)$ — функция, определенная уравнением

$$f(x, t)=(t-\tau_1(x)) f_1(x, t)+f(x, \tau_1(x))$$

на множестве $\hat{U}_s$, и $f_1=0$ на $\hat{F}_s$. Мы утверждаем, что функции $f_1(x, t)$ и $f(x, \tau_1(x))$ принадлежат пространствам $\mathscr{I}(\hat{F}_s \cup \hat{Y}; \hat{V})$ и $\mathscr{I}(F_s \cup Y; V)$ соответственно. Очевидно, достаточно доказать, что эти функции принадлежат пространствам $\mathscr{I}(\hat{F}_s; \hat{V})$ и $\mathscr{I}(F_s; V)$ соответственно, поскольку они, очевидно, плоские на $\hat{Y} \cap \hat{U}_s$. Мы видели при доказательстве предложения 5.5 гл. IV, что $f(x, \tau_1(x)) \in \mathcal{E}(F_s; V)$. Для любых $(x, t, \tau) \in V \times I \times I$ имеем

$$f(x, t) - f(x, \tau) = (t - \tau) h(x, t, \tau),$$

где $h \in \mathcal{E}(\hat{F}_s \times I; \hat{V} \times I)$. Ясно, что

$$f_1(x, t) = h(x, t, \tau_1(x)).$$

Отсюда так же, как и раньше, следует, что $f_1 \in \mathcal{E}(\hat{F}_s; \hat{V})$. Применим ту же конструкцию, заменив f на f_1 и τ_1 на τ_2. Получим равенство

$$f(x, t) = (t - \tau_1(x))(t - \tau_2(x)) f_2(x, t) + \\ + (t - \tau_1(x)) f_1(x, \tau_2(x)) + f(x, \tau_1(x)),$$

где $f_2 \in \mathcal{E}(\hat{F}_s \cup \hat{Y}; \hat{V})$. Кроме того,

$$f_1(x, \tau_2(x)), \ \tau_1(x) f_1(x, \tau_2(x)) \in \mathcal{E}(F_s \cup Y; V).$$

Повторив процесс s раз, получим равенство

$$f(x, t) = (t - \tau_1(x)) \ldots (t - \tau_s(x)) f_s(x, t) + \sum_{i=0}^{s-1} \rho_i(x) t^i,$$

где $f_s \in \mathcal{E}(\hat{F}_s \cup \hat{Y}; \hat{V})$ и $\rho_i \in \mathcal{E}(F_s \cup Y; V)$.

Но полином Π можно записать в виде

$$\Pi(x, t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \tau_i(x)) \Pi'(x, t), \qquad x \in U_s.$$

Предложение будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что функция

$$g = \begin{cases} f_s/\Pi' & \text{в } \hat{U}_s, \\ 0 & \text{в } \hat{F}_s \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathcal{E}(\hat{F}_s \cup \hat{Y}; \hat{V})$. Ясно, что так как Π' не обращается в нуль ни в одной точке множества U_s, достаточно доказать, что $1/\Pi' \in \mathcal{M}(\hat{F}_s, \hat{V})$. Из леммы 1.2 гл. IV следует, что достаточно доказать, что

(a) $\Pi' \in \mathcal{M}(\hat{F}_s, \hat{V})$;

(b) для всякого компакта $K \subset \hat{V}$ существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что $|\Pi'(x, t)| \geqslant C(d(x, \delta))^\alpha$ для $(x, t) \in K \setminus \delta$.

Доказательство. (a) Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — новые переменные. Разделим полином $\Pi(x, t)$ на $(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_s)$. Получим равенство

$$\Pi(x, t)=(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_s)\Psi(x; t; \lambda)+\Psi'(x; t; \lambda),$$

где $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, а Ψ, Ψ' — полиномы по t, λ с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями в V. Ясно, что $\Psi'(x; t; \tau)=0$ [1], где $\tau=(\tau_1(x), \ldots, \tau_s(x))$, так что

$$\Pi'(x, t)=\Psi(x; t; \tau).$$

Так как $\tau_l(x)\in\mathcal{M}(F_s, V)$, то (a) доказано.

(b) Пусть σ_j — комплексные корни полинома $\Pi(x, t)$. Тогда для $(x, t)\in K$ выполняются неравенства

$$|\Pi'(x, t)|=\prod_j|t-\sigma_j|\geqslant\prod_j|\operatorname{Im}\sigma_j|\geqslant$$
$$\geqslant C_1\prod_j|\bar\sigma_j-\sigma_j|\geqslant C_2|\Delta(x)|^2,$$

где C_1, $C_2>0$. Нужный результат следует из неравенства Лоясевича (теорема 4.1 гл. IV).

Замечание. Заметим, что единственность остатка не гарантирована. Полученный остаток имеет степень не больше $s-1$ на U_s, но нетрудно проверить, что можно получить в качестве остатка любую функцию R степени не больше $p-1$, если только $R\in\mathcal{J}(\hat F_s\cup\hat Y; \hat V)$ и $R(x, \tau_l(x))=f(x, \tau_l(x))$ для $l=1, \ldots, s$. Это показывает, что единственность в предложении 2.1 достигается только в том случае, когда *все корни полинома* Π *действительные*.

3. Доказательство теоремы 1.2 в общем случае. Отметим сначала следующее. Пусть X_0 обозначает то же, что и в § 1,2, и $X_0=X_0'\cup X_0''$. Предположим, что утверждения $\mathrm{P}(X_0')$ и $\mathrm{P}(X_0'')$ верны. Тогда верно и утверждение $\mathrm{P}(X_0)$. В самом деле, можно предположить, что мно-

[1]) Это равенство следует из того, что функция $\Psi'(x; t; \tau)$, будучи многочленом по t порядка не выше $s-1$, обращается в нуль при $t=\tau_1(x), \ldots, \tau_s(x)$. — *Прим. ред.*

жество $S_0 = X_0' \cap X_0''$ является собственным подмножеством множеств X_0' и X_0''. Пусть теперь $Y_0 \subset X_0$, $Z_0' = X_0' \cap \cap (Y_0 \cup S_0)$, $Z_0'' = X_0'' \cap (Y_0 \cup S_0)$. Пусть W_0', W_0'' — такие аналитические множества, что $Z_0' \subset W_0' \subset X_0'$, $Z_0'' \subset W_0'' \subset X_0''$ и утверждения $\mathrm{T}(W_0', X_0')$ и $\mathrm{T}(W_0'', X_0'')$ верны. Тогда утверждение $\mathrm{T}(W_0' \cup W_0'', X_0)$ также верно, поскольку множества X_0', X_0'' регулярно расположены.

Следовательно, можно предположить, что множество X_0 неприводимо. Вернемся теперь к обозначениям § 3 гл. IV.

Пусть окрестность начала координат V выбрана достаточно малой и такой, что выполняются все свойства, установленные в § 3 гл. IV[1]). Пусть Y — аналитическое подмножество в X (в дальнейшем мы рассматриваем X как замкнутое подмножество в V).

Мы можем считать множество Y прообразом некоторого аналитического множества $S \subset V'$, $S \neq V'$, при проекции $X \to V'$. В самом деле, достаточно вспомнить тот факт, что если $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, $\varphi = 0$ на Y, $\varphi \notin \mathfrak{I} = \mathfrak{I}(X_0)$, то существует такая функция $h \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{I}$, что $h\varphi - \varphi_1 \in \mathfrak{I}$, где $\varphi_1 \in \mathfrak{S}_k$. Мы утверждаем, что существует полином $\Psi \in \mathfrak{S}_n[t]$, делящийся на Π в $\mathfrak{S}_n[t]$ и такой, что $\Psi = \Psi' + \Psi''$, где $\Psi'' \in \mathfrak{I}[t]$, а $\Psi' \in \mathfrak{S}_k[t]$ — отмеченный полином. Действительно, положим Ψ' равным произведению элементов, сопряженных с образом $\overline{\Pi}$ полинома Π в $(\mathfrak{S}_n/\mathfrak{I})[t]$ над $\mathfrak{S}_k[t]$, и пусть $\Psi' = \overline{\Lambda\Pi}$. Пусть, далее, $\Lambda \in \mathfrak{S}_n[t]$ — некоторый прообраз элемента $\overline{\Lambda}$ и $\Psi = \Lambda\Pi$. Ясно, что $\Psi' = = \overline{\Lambda\Pi}$ — отмеченный полином в $\mathfrak{S}_k[t]$ и $\Psi'' = \Lambda\Pi - - \Psi' \in \mathfrak{I}[t]$.

Заметим, что достаточно доказать $\mathrm{P}(X_0)$, заменив Π на Ψ. В самом деле, если $R(x, t) = \sum_{l=0}^{p} r_l(x) t^l$ — остаток от деления функции f на полином Ψ, то остается только провести стандартное деление полинома R на полином Π. Утверждение $\mathrm{P}(X_0)$ будет тогда доказано для Π, так как

[1]) В частности, $V = V' \times V''$, где $V' \subset \mathbf{R}^k$, $V'' \subset \mathbf{R}^l$, а система координат в $\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условиям (a) и (c) указанного параграфа. — *Прим. ред.*

ясно, что коэффициенты полиномов, полученных при этом делении, будут плоскими везде, где плоски коэффициенты полиномов $r_l(x)$.

Предположим, что коэффициенты полиномов Ψ' и Ψ'' аналитичны на множестве V и что I — такой ограниченный открытый интервал в $\mathbf{R}$, что все действительные корни полинома $\Psi(x'; t)$ лежат в I, если $x' \in V'$. Для всякого подмножества A в V' обозначим $A \times I \subset \mathbf{R}^{k+1}$ через $\hat{A}_k$, $A \times V'' \subset \mathbf{R}^n$ через $\tilde{A}$, $A \times V'' \times I = \tilde{A} \times I \subset \mathbf{R}^{n+1}$ через $\hat{A}_n$.

Применив предложение 2.1 к неприводимым множителям полинома Ψ', увидим, что если окрестность начала координат V достаточно мала, то существует такое аналитическое множество S' в V', что $S \cup \delta \subset S'$, $\dim S' < k$, и всякую функцию $f \in \mathcal{J}(\hat{S}'_k; \hat{V}'_k)$ можно записать в виде $f = \Psi' g + \sum_{l=0}^{p'-1} \rho_l t^l$, где $p' = \deg \Psi'$, $\rho_l \in \mathcal{J}(S'; V')$ и $g \in \mathcal{J}(\hat{S}'_k; \hat{V}'_k)$. Пусть $Y' = \tilde{S}' \cap X$. Докажем следующий результат, из которого, очевидно, следует утверждение $\mathrm{P}(X_0)$ для полинома Ψ.

Предложение 3.1. *Для всякой функции $f \in \mathcal{J}(\hat{Y}'; \hat{X})$ существуют такие функции $g \in \mathcal{J}(\hat{Y}'; \hat{X})$ и $\rho_l \in \mathcal{J}(Y'; X)$, $0 \leqslant l \leqslant p' - 1$, что*

$$f = \Psi g + \sum \rho_l t^l.$$

Доказательство. Так как множества X_r регулярно расположены и $X_r \cap X_s \subset Y'$, то достаточно доказать предложение, заменив X на X_r. Заметим, что если π — изоморфизм пространств $\mathcal{J}(D; X_r)$ и $[\mathcal{J}(V' \setminus V_r; V')]^{\mathbf{N}^l}$, определенный в предложении 5.5 гл. IV, то π индуцирует изоморфизм пространств $\mathcal{J}(Y'; X_r)$ и $[\mathcal{J}(C; V')]^{\mathbf{N}^l}$, где $C = (V' \setminus V_r) \cup S'$. Существует также аналогичный изоморфизм $\hat{\pi}$ пространств $\mathcal{J}(\hat{Y}'; \hat{X}_r)$ и $[\mathcal{J}(\hat{C}; \hat{V}')]^{\mathbf{N}^l}$, определенный по формуле $\hat{\pi}(F) = (G^\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{N}^l$, где $G^\lambda(x, t) = (\pi F_t)^{(\lambda)}(x)$ (F_t обозначает функцию $x \to F(x; t)$). Нам осталось, таким образом, доказать, что для всякой функции $f \in \mathcal{J}(\hat{Y}'; \hat{X}_r)$ существуют такие функции $\rho_i \in \mathcal{J}(Y'; X_r)$ и $g \in \mathcal{J}(\hat{Y}'; \hat{X}_r)$, что

$$\hat{\pi}(f) = \Psi\hat{\pi}(g) + \sum \pi(\rho_i) t^i. \tag{3.2}$$

Если $\hat{\pi}(f) = (f^\lambda)$ и $\Psi^\lambda = D^\lambda_{x''}\Psi(x', \Phi^r(x'), t)$, то $\Psi^\lambda \in \mathcal{M}(\hat{V}' \setminus \hat{V}_r; \hat{V}')$, так что уравнение (3.2) эквивалентно бесконечной системе

$$f^\lambda = \Psi' g^\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \Psi^{\lambda-\mu} g^\mu + \sum_{i=0}^{p'-1} \rho_i^\lambda t^i, \tag{3.3}$$

где $\rho_i^\lambda \in \mathcal{J}(C; V')$, $g \in \mathcal{J}(\hat{C}; \hat{V}')$. Существование функций g^λ, ρ_i^λ, удовлетворяющих этим уравнениям, немедленно следует из предложения 5.3 гл. IV. В самом деле, предположим, что функции g^μ, ρ_i^μ построены для $\mu < \lambda$, тогда достаточно решить уравнение[1])

$$h^\lambda = \Psi' g^\lambda + \sum_{i=1}^{p'-1} \rho_i^\lambda t^i,$$

где функция $h^\lambda = f^\lambda - \sum_{\mu < \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \Psi^{\lambda-\mu} g^\mu$ принадлежит пространству $\mathcal{J}(\hat{C}; \hat{V}')$ в силу предложения 1.4 гл. IV. Заметим, что, поскольку система (3.3) бесконечна, нам требуется предложение 2.1, а одного утверждения $\mathrm{P}(X_0)$, вообще говоря, недостаточно.

Замечание. Предположим, что в условия специальной подготовительной теоремы внесено следующее добавление.

Во всякой точке в окрестности начала координат разложение Тейлора функции Π *делит разложение Тейлора функции* f *в кольце формальных степенных рядов.*

Доказательство, проведенное выше, показывает, что можно положить в этом случае $\rho_i = 0$. (Единственное отличие состоит в том, что в § 3 мы должны применить наши рассмотрения к функции Λf, так как мы заменяем Π на $\Lambda\Pi$.) Это замечание дает нам следующую теорему.

[1]) Это уравнение разрешимо в силу результата § 2. — *Прим. ред.*

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, Π — аналитическая функция в Ω. Функция $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ представляется в виде $f = \Pi g$, $g \in \mathscr{E}(\Omega)$, тогда и только тогда, когда разложение Тейлора функции Π делит разложение Тейлора функции f во всякой точке множества Ω (Лоясевич [1], Хёрмандер [1]).

Принимая во внимание результаты гл. II, можно сформулировать это утверждение так: *всякий главный идеал в $\mathscr{E}(\Omega)$, порожденный аналитической функцией, замкнут.* В следующей главе мы докажем обобщение этой теоремы на произвольные идеалы, порожденные аналитическими функциями.

4. Общая подготовительная теорема.

Теорема 4.1 (Мальгранж [2]). *Пусть A и B — дифференцируемые алгебры и u: $A \to B$ — морфизм. Если морфизм u квазиконечен, то он конечен.*

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что мы уже доказали эквивалентность квазиконечности морфизма u и конечности морфизма $\hat{u}$, а также квазиконечности морфизма $\hat{u}$. Более того, мы можем считать, что $A = \mathscr{E}_n$, $B = \mathscr{E}_m$ ($\mathscr{E}_k$ обозначает кольцо ростков дифференцируемых функций в точке $0 \in \mathbf{R}^k$); это доказывается точно так же, как и в аналитическом случае.

Лемма 4.2. *Пусть u — сюръективный морфизм дифференцируемой алгебры A на дифференцируемую алгебру B. Пусть $\hat{u}$ — индуцированный морфизм пополнений, т. е. $\hat{u}$: $\hat{A} \to \hat{B}$. Тогда* $\ker \hat{u} = (\ker u + \mathfrak{m}^\infty(A))/\mathfrak{m}^\infty(A)$.

Доказательство. Так как очевидно, что $\ker \hat{u} = u^{-1}(\mathfrak{m}^\infty(B))/\mathfrak{m}^\infty(A)$, остается доказать только, что $u^{-1}(\mathfrak{m}^\infty(B)) = \ker u + \mathfrak{m}^\infty(A)$. Но из сюръективности морфизма u следует, что $u(\mathfrak{m}(A)) = \mathfrak{m}(B)$. Поэтому $u(\mathfrak{m}^k(A)) = \mathfrak{m}^k(B))$ для всякого целого k, так что $u^{-1}(\mathfrak{m}^k(B)) = \mathfrak{m}^k(A) + \ker u$. Следовательно, $u^{-1}(\mathfrak{m}^\infty(B)) = \bigcap_{k \geqslant 0} (\ker u + \mathfrak{m}^k(A))$. Так как пополнение $\hat{A}$ алгебры A

нётерово, из теоремы Крулля вытекает, что

$$\bigcap_{k \geqslant 1} (\ker u + \mathfrak{m}^k(A)) = \ker u + \mathfrak{m}^\infty(A),$$

и лемма доказана.

Пусть u: $\mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_m$ — квазиконечный морфизм, и пусть φ: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемое отображение, индуцирующее u. Обозначим через $x_1, \ldots, x_m$ координаты в $\mathbf{R}^m$, через $y_1, \ldots, y_n$ — координаты в $\mathbf{R}^n$. Обозначим также $\mathscr{E}_n$ через $\mathscr{E}(y)$ и $\mathscr{E}_m$ — через $\mathscr{E}(x)$. Тогда морфизм u можно разложить следующим образом:

$$\mathscr{E}(y) \to \mathscr{E}(x, y) \to \mathscr{E}(x);$$

первое отображение является каноническим вложением (ставящим в соответствие каждой функции $f(y) \in \mathscr{E}(y)$ ту же самую функцию, рассматриваемую как функцию от x и y), а второе отображение есть

$$f(x, y) \to f(x, \varphi(x)),$$

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = (u(y_1)(x), \ldots, u(y_n)(x))$. Пусть N — ядро отображения $\mathscr{E}(x, y) \to \mathscr{E}(x)$. Для доказательства конечности морфизма u достаточно найти такой идеал $P \subset N$, что композиция отображений

$$\mathscr{E}(y) \to \mathscr{E}(x, y) \to \mathscr{E}(x, y)/P$$

является конечным морфизмом [поскольку u является композицией этого отображения и эпиморфизма $\mathscr{E}(x, y)/P$ на $\mathscr{E}(x)$]. Обозначим это отображение через t.

Пусть $\hat{N}$ — ядро отображения $\hat{u}$: $\hat{\mathscr{E}}(y) \to \hat{\mathscr{E}}(x)$. Как было замечено выше, отображение $\hat{u}$ конечно. Следовательно, существует конечный набор одночленов $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, порождающий $\hat{\mathscr{E}}(x)$ над $\hat{\mathscr{E}}(y)$. Ясно, что если некоторые из этих одночленов порождают $\hat{\mathscr{E}}(x)/\hat{\mathscr{E}}(x)\,\mathfrak{m}(\hat{\mathscr{E}}(y))$ над $\mathbf{R}$, то они порождают $\hat{\mathscr{E}}(x)$ над $\hat{\mathscr{E}}(y)$. Поэтому мы можем предположить, что эти одночлены линейно независимы в $\hat{\mathscr{E}}(x)/\hat{\mathscr{E}}(x)\,\mathfrak{m}(\hat{\mathscr{E}}(y))$. Пусть r — достаточно большое целое число. Тогда, так как элементы x^α являются образующими в $\hat{\mathscr{E}}(x)$ над $\hat{\mathscr{E}}(y)$, существуют такие элементы $c_{i\alpha}(y) \in \hat{\mathscr{E}}(y)$, что

$$x_i^r = \sum_\alpha c_{i\alpha}(\varphi(x))\, x^\alpha.$$

Рассматривая левую и правую части этого уравнения как элементы алгебры $\hat{\mathscr{E}}(x)$, можно сделать вывод, что если r достаточно велико, то $c_{i\alpha}(0) = 0$. Из определения $\hat{N}$ следует, что

$$Q_i(x, y) = x_i^r - \sum_\alpha c_{i\alpha}(y)\, x^\alpha \in \hat{N}.$$

Пусть $[\alpha] = \max_j |\alpha_j|$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Вводя в случае необходимости ряды $c_{i\alpha} \equiv 0$, мы допустим, что

$$Q_i(x, y) = x_i^r - \sum_{[\alpha] < r} c_{i\alpha}(y)\, x^\alpha \in \hat{N}, \quad c_{i\alpha}(0) = 0.$$

Из леммы 4.2 следует, что существуют функции $P_i(x, y) \in N$, разложения Тейлора которых в точке 0 совпадают с Q_i. Пусть P — идеал в $\mathscr{E}(x, y)$, порожденный функциями $P_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$. Докажем, что морфизм

$$t\colon \mathscr{E}(y) \to \mathscr{E}(x, y)/P$$

конечен. Это, как уже было замечено, завершит доказательство.

Введем новые переменные $t = (t_{i\alpha})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $[\alpha] < r$, и „полиномы общего вида"

$$\Pi_i(x, t) = x_i^r - \sum_{[\alpha] < r} t_{i\alpha} x^\alpha,$$

рассматриваемые как элементы алгебры $\mathscr{E}(x, y, t)$. Пусть Π — идеал, порожденный полиномами Π_i в $\mathscr{E}(x, y, t)$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Для всякой функции $f \in \mathscr{E}(x, y, t)$ существуют такие функции $g_i \in \mathscr{E}(x, y, t)$ и $h_\alpha \in \mathscr{E}(y, t)$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ [\alpha] < r)$, что*

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \Pi_i(x, t)\, g_i(x, y, t) + \sum_{[\alpha] < r} h_\alpha(y, t)\, x^\alpha. \tag{4.1}$$

Более того, если функция f является плоской в начале координат, то функции g_i и h можно также выбрать плоскими в начале координат.

Доказательство. Ясно, что всякий полином по x, t сравним с суммой одночленов x^α, $[a] < r$, по модулю идеала $\mathfrak{p}$, порожденного полиномами Π_i в кольце полиномов по x, t. Следовательно, композиция отображений

$$\mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[x, t] \to \mathbf{R}[x, t]/\mathfrak{p}$$

является конечным отображением, так что для всякого i элемент x_i цел над $\mathbf{R}[t]$, т. е. существует приведенный полином по x_i, $\psi_i(x_i, t) \in \mathfrak{p}$. Ясно, что $\psi_i(0, 0) = 0$. В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса (или лучше из гензелевых свойств аналитических колец) существуют отмеченные полиномы

$$R_i(x_i, t) = x_i^s + \sum_{j=0}^{s-1} \varphi_{ij}(t)\, x_i^j,$$

где $\varphi_{ij}(t)$ — аналитические функции от t, принадлежащие идеалу, порожденному идеалом $\mathfrak{p}$ в кольце аналитических функций от x, t. Мы можем, очевидно, считать, что s не зависит от i.

Ко всякой функции $f(x, y, t) \in \mathscr{E}(x, y, t)$ применим теперь специальную подготовительную теорему и получим равенство

$$f(x, y, t) = G_1(x, y, t)\, R_1(x_1, t) + \\ + \sum_{\alpha_1 < s} H_{\alpha_1}(x_2, \ldots, x_m;\ y, t)\, x_1^{\alpha_1},$$

где G_1, $H_{\alpha_1} \in \mathscr{E}(x, y, t)$. Если функция f является плоской в начале координат, то из единственности алгоритма деления в кольце формальных степенных рядов следует, что функции G_1, H_{α_1} также плоские.

Повторяя процесс, применим специальную подготовительную теорему к функциям G_1, H_{α_1}, разделив их на $R_2(x_2, t)$, и т. д. В результате получим тождество

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{m} G_i(x, y, t)\, R_i(x_i, t) + \sum_{|\beta| < s} H_\beta(y, t)\, x^\beta,$$

причем если функция f плоская в начале координат, то и функции G_l, H_β плоские. Так как $R_l \in \Pi$, а элементы x^β сравнимы по модулю идеала $\mathfrak{p}$ с линейными комбинациями элементов x^α, $[\alpha] < r$, то

$$f(x, y, t) = \sum_{l=1}^{m} \Pi_l(x, t)\, g_l(x, y, t) + \sum_{[\alpha] < r} h_\alpha(y, t)\, x^\alpha,$$

где функции g_l, $h_\alpha \in \mathscr{E}(x, y, t)$ плоские в начале координат, если f плоская. Лемма доказана.

Далее,

$$Q_l(x, y) = \Pi_l(x, t) + \sum_{[\alpha] < r} (t_{l\alpha} - c_{l\alpha}(y))\, x^\alpha.$$

Если функция $\gamma_{l\alpha} \in \mathscr{E}(y)$ имеет разложение Тейлора $c_{l\alpha}(y)$, то разность

$$P_l(x, y) - \Pi_l(x, t) - \sum_{[\alpha] < r} (t_{l\alpha} - \gamma_{l\alpha}(y))\, x^\alpha$$

плоская в начале координат. Из леммы 4.3 следует соотношение

$$P_l(x, y) = \Pi_l(x, t) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_j(x, t)\, g_{lj}(x, y, t) + \\ + \sum_{[\alpha] < r} k_{l\alpha}(y, t)\, x^\alpha, \quad (4.2)$$

где функции g_{lj} плоские в начале координат, а разложение Тейлора в начале координат функции $k_{l\alpha}$ равно $t_{l\alpha} - c_{l\alpha}(y)$. Следовательно, матрица

$$\left(\frac{\partial k_{l\alpha}}{\partial t_{j\beta}}(0, 0)\right)$$

является единичной матрицей (функций $k_{l\alpha}$ столько же, сколько переменных $t_{l\alpha}$). По теореме о неявной функции существуют такие дифференцируемые функции $\theta_{l\alpha}(y)$, что равенство

$$k_{l\alpha}(y, t) = 0 \quad \text{для всех } l$$

равносильно равенству

$$t_{l\alpha} = \theta_{l\alpha}(y).$$

Положив $t_{i\alpha} = \theta_{i\alpha}(y)$ в (4.2), получим

$$P_i(x, y) = \Pi_i(x, \theta(y)) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_j(x, \theta(y))\, g_{ij}(x, y, \theta(y)), \qquad (4.3)$$

где функции $g_{ij}(x, y, \theta(y))$ плоские в начале координат. Поэтому уравнения (4.3) можно разрешить, так что функции $\Pi_i(x, \theta(y))$ порождают тот же самый идеал P, что и функции $P_i(x, y)$. Ко всякой функции $f \in \mathscr{E}(x, y)$ применим теперь (4.1), а затем подставим $\theta_{i\alpha}(y)$ вместо $t_{i\alpha}$. Получим тождество

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i(x, \theta(y))\, g_i(x, y, \theta(y)) + \sum_{[\alpha] < r} h_\alpha(y, \theta(y))\, x^\alpha.$$

Следовательно, отображение

$$i\colon \mathscr{E}(y) \to \mathscr{E}(x, y)/P$$

конечно. В самом деле, элементы x^α, $[\alpha] < r$, порождают алгебру $\mathscr{E}(x, y)/P$ над $\mathscr{E}(y)$. Подготовительная теорема доказана.

Следствие 4.4. *Пусть $u\colon A \to B$ — морфизм дифференцируемых алгебр A и B. Пусть $b_1, \ldots, b_p \in B$, и пусть $\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_p$ — образы этих элементов в $\hat{B}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *образы элементов $\hat{b}_i$ порождают $\hat{B}/\hat{B}\mathfrak{m}(\hat{A})$ над* $\mathbf{R}$,

(ii) *элементы $\hat{b}_i$ порождают $\hat{B}$ над $\hat{A}$;*

(iii) *образы элементов b_i порождают $B/B\mathfrak{m}(A)$ над* $\mathbf{R}$;

(iv) *элементы b_i порождают B над A.*

(Вывод см. следствие 1.8 гл. III.)

5. Примеры. Приведем теперь три примера, иллюстрирующие применение подготовительной теоремы (или скорее следствия 4.4).

I. Симметрические функции. Пусть $\sigma_i(x)$ обозначает i-ю элементарную симметрическую функцию от $x_1, \ldots, x_n$ (координатных функций в $\mathbf{R}^n$). Пусть $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ есть отображение

$$\varphi(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$$

и $u\colon \mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_n$ — индуцированный морфизм. Из элементарной теоремы о представлении симметрических полиномов как полиномов от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ сразу следует, что в кольце $\hat{\mathscr{E}}_n$ формальных степенных рядов одночлены

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \qquad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant n - i,$$

порождают $\hat{\mathscr{E}}_n$ над подалгеброй, являющейся образом морфизма u. Применяя следствие 4.4, получаем, что *эти одночлены порождают $\mathscr{E}_n$ над подалгеброй дифференцируемых функций от* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. В частности, если функция $f \in \mathscr{E}_n$ симметрична (т. е. инвариантна относительно перестановок переменных $x_1, \ldots, x_n$), то, взяв среднее по группе перестановок, получим, что существует такая функция $g \in \mathscr{E}_n$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Таким образом, *всякий симметрический росток дифференцируемой функции можно представить в виде дифференцируемой функции от элементарных симметрических функций.*

Этот результат принадлежит Глезеру [2].

II. Подготовительная теорема Вейерштрасса. Пусть функция $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{E}^n$ *регулярна* по x_n порядка p, т. е. $F(0, \ldots, 0, x_n)$ имеет нуль порядка в точности p при $x_n = 0$. Пусть B — дифференцируемая алгебра $\mathscr{E}_n/(F)$ и A — алгебра $\mathscr{E}_{n-1}$. Пусть $u\colon A \to B$ — композиция вложения $\mathscr{E}_{n-1} \to \mathscr{E}_n$ и проекции $\mathscr{E}_n \to B$. Ясно, что образы элементов $1, x_n, \ldots, x_n^{p-1}$ в $\hat{B}/\hat{B}\mathfrak{m}(\hat{A})$ порождают этот модуль над $\mathbf{R}$. Из следствия 4.4 получаем, что элементы $1, x_n, \ldots, x_n^{p-1}$ порождают $\mathscr{E}_n/(F)$ над $\mathscr{E}_{n-1}$; это означает, что *для всякой функции $f \in \mathscr{E}_n$ существуют такие $Q \in \mathscr{E}_n$ и $r_i \in \mathscr{E}_{n-1}$, что*

$$f = QF + \sum_{i=0}^{p-1} r_i x_n^i.$$

Применим это разложение к $f = x_n^p$. Так как функция $F(0, \ldots, 0, x_n)$ имеет нуль порядка в точности p при $x_n = 0$, то функции r_i, Q должны удовлетворять условиям $r_i(0) = 0$, $Q(0) \neq 0$. Следовательно, $F = gP$, где $g = 1/Q$, а $P = x_n^p - \sum_{i=0}^{p-1} r_i x_n^i$ — отмеченный полином.

Таким образом, *всякая функция, регулярная по x_n порядка p, эквивалентна отмеченному полиному по x_n степени p с коэффициентами, являющимися дифференцируемыми функциями от $x_1, \ldots, x_{n-1}$.*

III. Отображения $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Пусть X и Y — два экземпляра пространства $\mathbf{R}^2$ с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно. Пусть Ω — открытое множество в X, и пусть $F = (f_1, f_2)$ есть C^∞-отображение $\Omega \to Y$.

(a) Существует отображение F', сколь угодно мало отличающееся от F в $\mathscr{E}(\Omega; Y)$ и такое, что во всякой точке $(x_1, x_2) \in \Omega$ его ранг (т. е. ранг его якобиана) не меньше 1.

В самом деле, рассмотрим отображение

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) : \Omega \to \mathbf{R}^4.$$

По теореме Сарда (теорема 7.4 гл. I) образ этого отображения имеет меру нуль. Пусть тогда $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — точка, не принадлежащая образу Ω в $\mathbf{R}^4$ (ее модуль можно выбрать сколь угодно малым). Можно определить отображение $F' = (f_1', f_2')$ формулами

$$f_1' = f_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \qquad f_2' = f_2 - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2.$$

(b) Предположим, что ранг отображения F всюду не меньше 1. Взяв область Ω достаточно малой и сделав подходящую замену координат в X и Y, можно положить $f_1 = x_1$. Обозначим для простоты функцию f_2 через f. Покажем, что существует функция f', достаточно близкая к f в $\mathscr{E}(\Omega; \mathbf{R})$, обладающая следующим свойством:

(G) Во всякой точке $a \in \Omega$, где производные $\frac{\partial f'}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2}$ обращаются в нуль, выполняются условия

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f'}{\partial x_2^3}(a) \neq 0.$$

Доказательство проводится так же, как и раньше: с помощью теоремы Сарда показываем, что множество тех точек $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$, для которых функция $f' = f - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3$ не удовлетворяет свойству (G), имеет меру нуль.

Используя (a) и (b), можно доказать следующее (детали предоставляем читателю).

Пусть M и N — два гладких многообразия размерности 2, счетные в бесконечности, и пусть K — компактное множество в M. Пусть $\mathscr{E}(M, N)$ — пространство C^∞-отображений M в N с топологией равномерной сходимости на всяком компактном множестве функций и их производных всех порядков (в очевидном смысле). Тогда *множество отображений* $F \in \mathscr{E}(M; N)$, *все критические точки которых на* K *удовлетворяют условию* (G) (*в подходящей координатной системе*), *открыто и плотно в* $\mathscr{E}(M, N)$.

Рассмотрим теперь подробнее эти критические точки. Для простоты перенесемся в начала координат в X и Y. Существуют два типа критических точек, не сводящиеся один к другому.

Тип 1.

$$F = (x_1, f), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) \neq 0. \tag{5.1}$$

Применим следствие 4.4 к отображению $\mathscr{E}_2 \to \mathscr{E}_2$, определенному функцией F. Получим, в частности, что существуют такие функции $\Phi, \Psi \in \mathscr{E}_2$, что

$$x_2^2 = \Phi(x_1, f) + 2\Psi(x_1, f)\, x_2. \tag{5.2}$$

Очевидно, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. Положим $x_2' = x_2 - \Psi(x_1, f)$, $y_2' = \Phi(y_1, y_2) + \Psi^2(y_1, y_2)$. Из (5.1) и (5.2) следует, что (x_1, x_2') и (y_1, y_2') — локальные координаты в точке 0. В этой координатной системе наше отображение принимает *канонический вид типа* 1: $f_1 = x_1$, $f_2 = x_2^2$.

Тип 2.

$$F = (x_1, f), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \neq 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(0) \neq 0. \tag{5.3}$$

Снова применяя следствие 4.4, можно найти такие функции Φ, Ψ, $\Theta \in \mathscr{E}_2$, что

$$x_2^3 = \Phi(x_1, f) + \Psi(x_1, f)\, x_2 + 3\Theta(x_1, f)\, x_2^2. \tag{5.4}$$

Ясно, что $\Phi(0) = \Psi(0) = \Theta(0) = 0$. Переходя от x_2 к $x_2 - \Theta(x_1, f)$, получаем локальные координаты в X, для которых снова выполнено условие (5.3), так что можно положить $\Theta = 0$.

Нетрудно проверить, что в силу выполнения условий (5.3) и (5.4) можно взять в качестве системы координат в X

$$x_1' = \Psi(x_1, f), \quad x_2' = x_2$$

и в Y

$$y_1' = \Psi(y_1, y_2), \quad y_2' = \Phi(y_1, y_2).$$

Итак, получаем *канонический вид типа* 2:

$$f_1 = x_1, \quad f_2 = -x_1 x_2 + x_2^3.$$

Эти результаты принадлежат X. Уитни [3]. Идея использования подготовительной теоремы при их доказательстве принадлежит Р. Тому. Более общие результаты можно найти в статье Б. Морена [1].

Глава VI

ИДЕАЛЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Основная теорема. Основным результатом этой главы является

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{E}_n$ — кольца ростков аналитических и дифференцируемых функций соответственно и $\tilde{\mathcal{F}}_n$ — кольцо ростков в начале координат семейств формальных степенных рядов, заданных во всех точках в окрестности начала координат* (см. § 4 гл. III). *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathcal{O}_n$. Тогда*

$$(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{F}}_n) \cap \mathcal{E}_n = \mathfrak{a} \cdot \mathcal{E}_n.$$

Эта теорема очевидно эквивалентна следующей (разбиение единицы).

Теорема 1.1′. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и $f_1, \ldots, f_p$ — аналитические функции в Ω. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Тогда функцию φ можно представить в виде*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} f_i \psi_i, \quad где \quad \psi_i \in \mathcal{E}(\Omega),$$

в том и только том случае, если для всякой точки $a \in \Omega$ разложение Тейлора $T_a\varphi$ принадлежит идеалу, порожденному разложениями $T_a f_i$ в кольце $T_a\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{F}_a$ (формальных степенных рядов в точке a). Для $p = 1$ см. Хёрмандер [1], Лоясевич [1]; в общем случае Мальгранж [1]; см. также Паламодов [1].

Для доказательства этой теоремы мы сведем наше утверждение к ряду промежуточных, подобно тому, как мы это сделали при доказательстве подготовительной теоремы. Установим сначала более общую форму теоремы 1.1.

Пусть $Y_0 \subset X_0$ — ростки аналитических множеств в точке $0 \in \mathbf{R}^n$, и пусть $\tilde{\mathcal{F}}_n(X_0)$ — кольцо ростков в точке 0 семейств формальных степенных рядов, заданных в точках $x \in X_0$. Очевидно, имеется включение $\mathcal{E}(X_0) \subset \tilde{\mathcal{F}}_n(X_0)$, где $\mathcal{E}(X_0)$ — кольцо функций, дифференцируемых по Уитни на X_0. Пусть $\mathcal{I}(Y_0; X_0)$ — подкольцо кольца $\mathcal{E}(X_0)$, образованное функциями, плоскими на Y_0.

Теорема 1.2. *Если* $\mathfrak{a}$ — *идеал в* $\mathcal{O}_n$, *то*

$$\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{F}}_n(X_0) \cap \mathcal{I}(Y_0; X_0) = \mathfrak{a}\mathcal{I}(Y_0; X_0).$$

Обозначим утверждение теоремы 1.2 для ростков Y_0 и X_0 через $\mathrm{T}(Y_0, X_0)$ (идеал $\mathfrak{a}$ предполагается фиксированным). Как и в случае подготовительной теоремы, можно свести теорему 1.2 к доказательству следующего утверждения.

$\mathrm{P}(X_0)$. *Для всякого аналитического ростка* $Y_0 \subset X_0$, $Y_0 \neq X_0$, *существует такой аналитический росток* $Z_0 \neq X_0$, $Y_0 \subset Z_0 \subset X_0$, *что утверждение* $\mathrm{T}(Z_0, X_0)$ *верно*.

Заметим, что из теоремы 1.2 следует

Теорема 1.2'. *Пусть* X — *аналитическое подмножество в открытом множестве* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, *а* Y — *аналитическое подмножество в* X. *Пусть, далее,* $f_1, \ldots, f_p$ — *аналитические функции в* Ω, *а* $\varphi \in \mathcal{I}(Y; X)$. *Тогда разложение* $\varphi = \sum_{i=1}^{p} f_i \psi_i$, *где* $\psi_1, \ldots, \psi_p \in \mathcal{I}(Y; X)$, *возможно в том и только том случае, когда* $T_a\varphi$ *принадлежит идеалу, порожденному разложениями* $T_a f_i$ *в* $\mathcal{F}_a$ *во всякой точке* $a \in X$.

Докажем утверждение $\mathrm{P}(X_0)$ индукцией по $k = \dim X_0$. Предположим, что утверждение теоремы 1.2' верно для всех аналитических множеств $X \subset \Omega$, размерность которых во всякой точке меньше k.

Покажем, что достаточно доказать $\mathrm{P}(X_0)$ в случае, когда росток X_0 неприводим, а идеал $\mathfrak{a}$ содержится в идеале $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_n$ функций, обращающихся в нуль на X_0. Доказательство того, что можно взять X_0 неприводимым, проводится точно так же, как и в случае подготовительной теоремы, и мы не будем его повторять. Предположим, что росток X_0 неприводим и $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Пусть $f \in \mathfrak{a}$, $f \notin \mathfrak{p}$, и пусть $Z_0 = Y_0 \cup [X \cap \{x \mid f(x) = 0\}]$. Тогда, как вытекает из следующей леммы, утверждение $\mathrm{T}(Z_0, X_0)$ верно.

Лемма 1.3. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и f — аналитическая функция в Ω. Пусть $S = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Пусть φ — функция, принадлежащая пространству $\mathcal{J}(S; \Omega)$. Тогда существует такая функция $\psi \in \mathcal{J}(S; \Omega)$, что $\varphi = \psi f$.*

Доказательство. Из неравенства Лоясевича и леммы 1.2 гл. IV следует, что $1/f \in \mathcal{M}(S; \Omega)$. Так как $\varphi \in \mathcal{J}(S; \Omega)$, то $\psi = (1/f)\varphi \in \mathcal{J}(S, \Omega)$ в силу предложения 1.4 гл. IV. Лемма 1.3 доказана.

Для доказательства утверждения $\mathrm{P}(X_0)$ нам потребуются две леммы.

Лемма 1.4. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее 0, а $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ — два идеала в $\mathfrak{O}_n$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_p)$, $g = (g_1, \ldots, g_q)$ — образующие идеалов $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ соответственно. Предположим, что эти образующие аналитичны в Ω. Пусть $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{b}_x$ — идеалы, порожденные функциями $f_1, \ldots, f_p$; $g_1, \ldots, g_q$ в точке $x \in \Omega$*[1]*). Тогда для всякого компактного подмножества K в Ω и всякого целого числа $m \geqslant 0$ существует такое целое число m', что для всякой точки $x \in K$*

$$\mathfrak{a}_x^{m'} \cap \mathfrak{b}_x \subset \mathfrak{a}_x^m \cdot \mathfrak{b}_x.$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$, а $m'(x)$ обозначает наименьшее целое число m', для которого

$$\mathfrak{a}_x^{m'} \cap \mathfrak{b}_x \subset \mathfrak{a}_x^m \cdot \mathfrak{b}_x$$

(такое число m' существует по лемме Артина — Риса). Существуют такие функции[2]) $h_1, \ldots, h_r$; $k_1, \ldots, k_s$ в окрестности U точки x, что h_i принадлежат идеалу $\mathfrak{a}_y^{m'(x)} \cap \mathfrak{b}_y$ и порождают его во всякой точке $y \in U$, а k_j

[1]) То есть в кольце функций, голоморфных в этой точке. — *Прим. ред.*

[2]) Существование функций h_i следует из когерентности пучка идеалов $\mathfrak{a}_y^{m'(x)} \cap \mathfrak{b}_y$. — *Прим. ред.*

принадлежат идеалу $\mathfrak{a}_y^m \cdot \mathfrak{b}_y$ и порождают его во всякой точке $y \in U$. Если окрестность U достаточно мала, то из включения $\mathfrak{a}_x^{m'(x)} \cap \mathfrak{b}_x \subset \mathfrak{a}_x^m \cdot \mathfrak{b}_x$ вытекает, что существуют такие аналитические функции a_{ij} в U, что $h_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда ясно, что так как функции h_i порождают $\mathfrak{a}_y^{m'(x)} \cap \mathfrak{b}_y$, то $\mathfrak{a}_y^{m'(x)} \cap \mathfrak{b}_y \subset \mathfrak{a}_y^m \cdot \mathfrak{b}_y$, так что $m'(y) \leqslant \leqslant m'(x)$ для $y \in U$. Следовательно, величина $m'(x)$ ограничена на K, и лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, f — аналитическая функция в Ω, и пусть $X = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Тогда у всякой точки $a \in \Omega$ существует такая фундаментальная система открытых окрестностей Ω_p, что $\Omega_p \setminus X$ имеет только конечное число связных компонент, замыкание каждой из которых в Ω_p содержит точку a.*

Доказательство. Можно, очевидно, считать, что $a = 0$, а f — отмеченный полином по x_n, неприводимый в точке 0. Пусть $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Дискриминант полинома f в точке $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ имеет росток, отличный от нулевого. Пусть $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\Omega' \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $\Omega'' \subset \mathbf{R}$. Предположим, что лемма доказана для множества $Y \subset \Omega'$, $Y = \{y \in \Omega' \mid \Delta(y) = 0\}$. Пусть Ω'_p — такая фундаментальная система окрестностей точки $0 \in \mathbf{R}^{n-1}$, что $\Omega'_p \setminus Y$ имеет k_p компонент $U_{p,\nu}$, замыкания которых содержат точку 0. Пусть I_p — открытый интервал, длина которого стремится к 0 при $p \to \infty$, и такой, что из $f(y, x_n) = 0$, $y \in \Omega'_p$ следует $x_n \in I_p$, и пусть $\Omega_p = \Omega'_p \times I_p$. Для доказательства того, что $\Omega_p \setminus X$ имеет только конечное число компонент, в замыкании каждой из которых содержится 0, достаточно доказать то же самое для множества $\Omega_p \setminus (X \cup (Y \times I_p))$. Но число действительных корней полинома $f(y, x_n)$ на $U_{p,\nu}$ постоянно и равно, например, s. Пусть $\tau_1(y) < \ldots$

$\ldots < \tau_s(y)$ — эти корни. Тогда связными компонентами множества $\Omega_p \setminus (X \cup (Y \times I_p))$ будут множества

$$\{(y, x_n) \mid y \in U_{p,\nu}, \ \tau_l(y) < x_n < \tau_{l+1}(y)\},$$

где $\tau_0 = -\infty$, $\tau_{s+1} = +\infty$. Так как $\tau_l(y) \to 0$ при $y \to 0$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, лемма доказана.

Приступим к доказательству утверждения $P(X_0)$. Воспользуемся обозначениями § 3 гл. IV и предположим, как и в подготовительной теореме, что существует такое аналитическое множество $Y' \subset V'$, что $Y = (Y' \times V'') \cap X$. Пусть $\delta = \{x' \in V' \mid \Delta(x') = 0\}$. Пусть $Z' = Y' \cup \delta$, и предположим, что множество V' выбрано так, что $V' \setminus Z'$ имеет только конечное число связных компонент, в замыкании каждой из которых содержится 0. Пусть $Z = X \cap (Z' \times V'')$. Тогда то же самое верно и для $X \setminus Z$. В самом деле, всякая компонента U' множества $V' \setminus Z'$ содержится в V_r, а компонентами множества $X \setminus Z$ являются множества $\{(x', x'') \mid x' \in U', \ x'' = \Phi^s(x')\}$ для всякого $s \leqslant r$.

Предположим, что Ω — открытое множество, содержащее $\bar{V}$, и что идеал $\mathfrak{p}$ порожден функциями $f_1, \ldots, f_p$, аналитическими в Ω. Пусть $\mathfrak{p}_x$ обозначает идеал, порожденный в кольце аналитических функций в точке $x \in \Omega$ функциями f_i. Наконец, пусть $\mathcal{F}_x$ обозначает кольцо формальных степенных рядов в точке x.

Сделаем следующее замечание:

(1.6) *Если φ — росток C^∞-функции на X в точке $a \in X \setminus Z$ и „нормальные производные“ функции φ обращаются в нуль вплоть до порядка m (т. е. $D_{x''}^{\lambda}\varphi = 0$ для $\lambda \in \mathbf{N}^l$, $|\lambda| \leqslant m$), то разложение Тейлора функции φ в точке a принадлежит идеалу $\mathfrak{p}_a^{m+1} \cdot \mathcal{F}_a$.*

Это тривиально следует из того, что идеал в $\mathcal{O}_a$, порожденный функциями $P(x_{k+1}; x')$ и $\Delta x_{k+j} - Q_j(x_{k+1}; x')$, совпадает с идеалом ростков, обращающихся в нуль на X. Предположим теперь, что $\mathfrak{q}$ — некоторый идеал в $\mathcal{O}_n$, порожденный функциями $g_1, \ldots, g_q$, аналитическими в Ω,

$\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$. Отождествим $\mathcal{G}(Z;\,X_r)$ с $[\mathcal{G}((V'\setminus V_r)\cup Z';\,V')]^{\mathbf{N}^l}$ (в силу предложения 5.5 гл. IV эти пространства изоморфны). Пусть $\lambda\in\mathbf{N}^l$ и $g_j^\lambda=(D_{x''}^\lambda g_j)(x',\,\Phi^r(x'))$.

Лемма 1.7. *Пусть* $\varphi=(\varphi^\lambda)\in[\mathcal{G}((V'\setminus V_r)\cup Z';\,V')]^{\mathbf{N}^l}$ *и разложение Тейлора функции* φ *во всякой точке* $a\in X_r$ *принадлежит идеалу, порожденному в* $\mathcal{F}_a$ *функциями* g_j. *Тогда для любого* λ *существуют такие функции* ψ_j^μ, $\mu<\lambda$, *что*

$$\varphi^{\lambda'}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{\mu<\lambda'}\binom{\lambda'}{\mu}g_j^{\lambda'-\mu}\psi_j^\mu \quad \text{для} \quad \lambda'\leqslant\lambda.$$

Доказательство. Если все функции g_j^μ, $\mu\leqslant\lambda$, обращаются в нуль на V_r, то доказывать нечего. В противном случае пусть x' — точка, в которой матрица $(g_j^{\lambda'-\mu'})$ [индексами являются λ' и пары $(\mu',\,j)$] имеет максимальный ранг, скажем ρ, и пусть A' обозначает $(\rho\times\rho)$-минор матрицы $(g_j^{\lambda'-\mu'})$, детерминант которого отличен от нуля в точке x'. Пусть A — соответствующий $(\rho\times\rho)$-минор матрицы $(D_{x''}^{\lambda'-\mu'}g_j)$. Тогда очевидно, что $\det A\neq 0$ в точке $(x',\,\Phi^r(x'))$. Пусть S — множество точек в X, в которых $\det A=0$. Мы утверждаем, что $\dim S<k$ в любой точке. В самом деле, так как в замыкании всякой компоненты множества $V'\setminus Z'$ содержится 0, то проекция множества S не содержит окрестности точки 0 в V'. Следовательно, росток множества S в точке 0 не совпадает с X_0, так что $\dim S<k$ в любой точке множества $X\setminus Z$, а поскольку в замыкании всякой компоненты множества $X\setminus Z$ содержится 0, множество S не содержит ни одной такой компоненты.

Для доказательства леммы 1.7 мы используем следующее простое обобщение леммы 1.3.

Лемма 1.8. *Пусть* $h_1,\,\ldots,\,h_\rho$ — *это* ρ-*векторы из аналитических функций на связном открытом множестве* $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, *линейно независимые в некоторой точке множества* Ω. *Пусть* M — *множество точек в* Ω, *в которых* h_i *линейно зависимы. Тогда для всякого*

ρ-вектора φ, состоящего из бесконечно дифференцируемых функций, плоских на M, существуют такие функции ψ_l, $1 \leqslant l \leqslant \rho$, плоские на M, что

$$\varphi = \sum_{l=1}^{\rho} \psi_l h_l.$$

Более того, функции ψ_l можно выбрать плоскими во всех точках множества $\Omega \setminus M$, в которых φ — плоская вектор-функция.

Лемма 1.7 немедленно следует из леммы 1.8, если φ — функция, плоская на S.

Поскольку по предположению рассматриваемая система разрешима в каждой точке и A' — минор максимального ранга вне проекции множества $S \cap X_r$ на V_r, достаточно решить систему

$$\varphi^{\lambda'} = \sum_{j,\mu} \binom{\lambda'}{\mu} g_j^{\lambda'-\mu} \psi_j^{\mu}, \quad \text{где} \quad (g_j^{\lambda'-\mu'}) = A',$$

с функциями ψ_j^{μ}, плоскими на проекции множества $S \cap X_r$ на V'; остальные уравнения системы будут выполнены автоматически.

Для доказательства леммы 1.7 мы поступим следующим образом. Пусть $\varphi_1 \in \mathcal{J}(Z \cap S; S)$ — сужение функции φ на S. Из предположений индукции и теоремы 1.2′ следует, что существуют такие функции $\psi_l \in \mathcal{J}(Z \cap S; S)$, что

$$\varphi_1 = \sum \psi_l g_l \quad \text{в} \quad \mathcal{E}(S).$$

Пусть $\psi'_l \in \mathcal{J}(Z; X)$ — такие функции, что их сужениями на S являются функции ψ_l (такие функции существуют, так как любые два аналитических множества регулярно расположены), и пусть $\varphi' = \sum g_l \psi'_l$. Тогда $\varphi - \varphi' \in \mathcal{J}(Z \cap S; X)$ и можно применить полученные результаты к $\varphi - \varphi'$. Так как лемма 1.7 верна для $\varphi - \varphi'$ и для φ', она, очевидно, верна и для φ.

Вернемся теперь к нашему идеалу $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ и предположим, что этот идеал порожден функциями, аналитическими в Ω. Тогда, очевидно, лемма 1.7 справедлива для идеала

$\mathfrak{q}_m = \mathfrak{p}^m \cdot \mathfrak{a}$ для всякого $m \geqslant 0$. Предположим, что число $m' = m'(m)$ выбрано так, что

$$\mathfrak{p}_x^{m'} \cap \mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{p}_x^m \cdot \mathfrak{a}_x \quad \text{для} \quad x \in V \text{ (лемма 1.4).} \tag{1.9}$$

Из леммы 1.7 и утверждения (1.6) вытекает справедливость следующего утверждения.

(1.10) *Если* $\varphi \in \mathcal{J}(Z; X_r)$ *и* φ *есть* m'*-плоская функция на* X_r*, то для всякого вектора* $\lambda \in \mathrm{N}^l$ *существуют такие функции* $\psi_j^\mu \in \mathcal{J}(Z; X_r)$, *m-плоские на* X_r*, что*

$$\varphi^{\lambda'} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\mu < \lambda'} \binom{\lambda'}{\mu} f_j^{\lambda' - \mu} \psi_j^\mu \quad \text{для} \quad \lambda' \leqslant \lambda. \tag{1.11}$$

Теперь нетрудно закончить доказательство утверждения $\mathrm{P}(X_0)$. Так как множества X_r регулярно расположены, то достаточно для данной функции φ найти такие функции $\psi_j \in \mathcal{J}(Z'; X_r)$, что $\varphi = \sum f_i \psi_i$.

Представим φ в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots$, где $\varphi_k \in \mathcal{J}(Z; X_r)$ и $\varphi_k^\lambda \neq 0$, $k > 0$, только если $m'(k-1) < |\lambda| \leqslant m'(k)$ [$m'(k)$ определено в (1.9)]. Существуют такие функции $\psi_{j,0}^\mu \in \mathcal{J}((V' \setminus V_r) \cup Z'; V')$, $|\mu| \leqslant m'(0)$, что (1.11) выполняется для $|\lambda| \leqslant m'(0)$. Если функция $\psi_{j,0} \in \mathcal{J}(Z; X_r)$ имеет компоненты $\psi_{j,0}^\mu$, то функция $\varphi_0 - \sum_{j=0}^{p} f_i \psi_{j,0}$ является $m'(0)$-плоской. Подобным образом мы можем, используя (1.10), найти такие функции $\psi_{j,1} \in \mathcal{J}(Z; X_r)$, 0-плоские на X_r, что функция $\varphi_0 + \varphi_1 - \sum_{j=1}^{p} f_j(\psi_{j,0} + \psi_{j,1})$ является $m'(1)$-плоской.

По индукции находим такие функции $\psi_{j,k} \in \mathcal{J}(Z; X_r)$, $(k-1)$-плоские на X_r, что функция

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_k - \sum_{j=1}^{p} f_j(\psi_{j,0} + \ldots + \psi_{j,k})$$

является $m'(k)$-плоской.

Ясно, что $\psi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{j,k} \in \mathcal{J}(Z;\ X_r)$ (поскольку функция $\psi_{j,k}$ является $(k-1)$-плоской) и $\varphi = \sum_{j=1}^{p} f_j \psi_j$.

Этим доказано утверждение $P(X_0)$, а следовательно, и основная теорема.

Следствие 1.12. *$\mathcal{E}_n$ — вполне плоский $\mathfrak{O}_n$-модуль.*

Мы уже видели, что $\tilde{\mathcal{F}}_n$ — вполне плоский $\mathfrak{O}_n$-модуль (теорема 4.12 гл. III). Таким образом, наше утверждение следует из теоремы 1.1 и предложения 4.7 гл. III.

2. Замечание, касающееся неравенства Лоясевича. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Пусть $X = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$. Мы утверждаем, что если идеал $f\mathcal{E}(\Omega)$ замкнут, то для всякого компакта $K \subset \Omega$ существуют такие константы C, $\alpha > 0$, что

$$|f(x)| \geqslant C\{d(x,\ X)\}^{\alpha} \quad \text{для } x \in K. \tag{2.1}$$

В самом деле, предположим, что идеал $f\mathcal{E}(\Omega)$ замкнут. Тогда по теореме Банаха для всякого компактного множества $K \subset \Omega$ и числа $m > 0$ существуют такие компактное множество $K' \subset \Omega$ и число $m' > 0$, что для всякой функции $g \in f\mathcal{E}(\Omega)$ существует такая функция $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, что $\psi f = g$ и

$$|\psi|_m^K \leqslant C\,|g|_{m'}^{K'}, \quad \text{где } C \text{ не зависит от } g. \tag{2.2}$$

Если $x_0 \in K \setminus X$, можно найти такую функцию $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, $g(x_0) = 1$, $g = 0$, в окрестности множества X, что

$$|g|_{m'}^{K'} \leqslant \frac{A}{\{d(x_0,\ X)\}^p},$$

где $A > 0$ и $p > 0$ не зависят от x_0, а зависят только от K, K'. Из (2.2) следует, что

$$\sup_K \left|\frac{g}{f}\right| \leqslant \frac{AC}{\{d(x_0,\ X)\}^p};$$

в частности,

$$|f(x_0)| \geqslant \frac{\{d(x_0,\ X)\}^p}{AC}.$$

Следующий пример показывает, что для неаналитических функций ситуация достаточно сложна.

Пусть $f^{\pm} = y^2 \pm e^{-1/x^2} \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^2) = \mathscr{E}$. Тогда идеал $f^+\mathscr{E}$ не замкнут, а идеал $f^-\mathscr{E}$ замкнут. В самом деле, функция f^+ не удовлетворяет условию (2.1) ни в какой окрестности начала координат. Так как $f^- = (y + e^{-1/2x^2})(y - e^{-1/2x^2}) = f_1^- f_2^-$, то достаточно доказать теорему отдельно для f_1^- и f_2^-. Но эти функции заменой координат можно сделать линейными.

3. Дифференцируемые функции, обращающиеся в нуль на аналитическом множестве. Результаты этого пункта основываются на следующей теореме.

Теорема 3.1 (Зарисский — Нагата). *Если аналитическая алгебра A является областью целостности, то и ее пополнение $\hat{A}$ является областью целостности.*

Доказательство можно найти, например, у Гузеля [1] или Мальгранжа [3].

Вот некоторые непосредственные следствия из этой теоремы (A — аналитическая алгебра, $\hat{A}$ — ее пополнение).

(3.2) *Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал алгебры A, то идеал $\hat{\mathfrak{p}} = \hat{A}\mathfrak{p}$ также прост.* (Применяем теорему 3.1 к $A/\mathfrak{p}$.)

(3.3) *Пусть $\mathfrak{q}$ — идеал алгебры A и $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ — минимальные простые идеалы в разложении идеала $\mathfrak{q}$*[1]). *Тогда $\hat{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{p}}_s$ — минимальные простые идеалы в разложении идеала $\hat{\mathfrak{q}}$.*

В самом деле, утверждение сразу сводится к случаю $\mathfrak{q} = \{0\}$; тогда $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ — минимальные простые идеалы алгебры A. Пусть $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$. Известно, что $\mathfrak{x}$ — множество нильпотентных элементов алгебры A и что $\mathfrak{x}^n = \{0\}$ для некоторого n.

Из предложения 4.5 гл. III и теоремы 4.9 гл. III следует, что $\hat{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{p}}_1 \cap \ldots \cap \hat{\mathfrak{p}}_s$. С другой стороны, очевидно, что

---

[1]) Имеются в виду примарное разложение $\mathfrak{q}$ и минимальные идеалы в множестве радикалов примарных компонент $\mathfrak{q}$. — *Прим. ред.*

$\hat{\mathfrak{g}}^n = \{0\}$. Предположим, что $\mathfrak{J}$ — простой идеал алгебры $\hat{A}$, и предположим, например, что $\hat{\mathfrak{p}}_1 \not\subset \mathfrak{J}, \ldots, \hat{\mathfrak{p}}_{s-1} \not\subset \mathfrak{J}$. Пусть $a_i \in \hat{\mathfrak{p}}_i$, $a_i \notin \mathfrak{J}$ $(1 \leqslant i \leqslant s-1)$. Для всякого элемента $x \in \hat{\mathfrak{p}}_s$

$$(a_1 \ldots a_{s-1}x)^n = 0 \in \mathfrak{J}.$$

Следовательно, $x \in \mathfrak{J}$. Отсюда $\mathfrak{p}_s \subset \mathfrak{J}$, что доказывает утверждение (3.3).

В частности, из (3.3) следует, что если алгебра A *приведенная* (т. е. не содержит нильпотентных элементов), то и $\hat{A}$ — приведенная алгебра.

Определение 3.4. Пусть X — множество в $\mathbf{R}^n$, в замыкании которого содержится 0, и пусть g — функция класса C^∞ в окрестности начала координат. Говорят, что *функция g имеет нуль бесконечного порядка на X в начале координат*, если для всякого натурального числа p существуют такие окрестность U_p начала координат и число $C_p > 0$, что на $X \cap U_p$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant C_p |x|^p$.

Это свойство зависит только от ростка X_0 множества X и разложения Тейлора функции g в начале координат. Множество рядов Тейлора, обладающих этим свойством, образует идеал в $\mathcal{F}_n$, который мы назовем „формальным идеалом, определенным множеством X (или ростком X_0)“, и обозначим через $J(X)$.

Теорема 3.5. *Пусть X — аналитическое множество в окрестности начала координат в $\mathbf{R}^n$, и пусть $I(X)$ — идеал в $\mathfrak{O}_n$ ростков аналитических функций, обращающихся в нуль на X_0. Тогда $I(X)\mathcal{F}_n = \hat{I}(X) = J(X)$.*

Достаточно доказать эту теорему в случае, когда росток X_0 неприводим. В самом деле, если $X = X' \cup X''$, то

$$I(X) = I(X') \cap I(X'').$$

Из предложения 4.5 гл. III и теоремы 4.9 гл. III следует, что

$$\hat{I}(X) = \hat{I}(X') \cap \hat{I}(X'').$$

С другой стороны, очевидно, что $J(X) = J(X') \cap J(X'')$, следовательно, если теорема верна для X' и X'', то она верна и для X.

Предположим, таким образом, что росток X_0 неприводим. Пусть $\dim X = k$. Вернемся к обозначениям § 3 гл. IV. Отображение $\mathfrak{S}_k \to \mathfrak{S}_n / I(X)$, определенное элементами $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$, конечно и инъективно, следовательно, „собственная" топология алгебры $\mathfrak{S}_n / I(X)$ совпадает с ее топологией как $\mathfrak{S}_k$-модуля. Из точности функтора пополнения следует, что отображение $\mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_n / \hat{I}(X)$, определенное тем же способом, что и выше, также инъективно. В силу предложения 1.6 гл. III это отображение конечно. С другой стороны, идеал $\hat{I}(X)$ прост (в силу (3.2)). Применив предложение 5.4 гл. III к $A = \mathcal{F}_k$, $B = \mathcal{F}_n / \hat{I}(X)$, $\mathfrak{p} = \{0\}$, $\mathfrak{q} = J(X) / \hat{I}(X)$[1]), получим, что для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условия

$$J(X) \cap \mathcal{F}_k = \{0\}$$

(кольцо $\mathcal{F}_k$ рассматривается как вложенное в $\mathcal{F}_n$). Это эквивалентно тому, что:

*Всякая функция $f(x_1, \ldots, x_k)$ класса C^∞, **имеющая нуль бесконечного порядка на** X **в начале координат, имеет тождественно нулевое разложение Тейлора.***

Пусть U — росток в нуле множества точек в $\mathbf{R}^k \setminus \delta$, являющихся образами точек множества X при проекции $(x', x'') \to x'$ $\left(\text{т. е. } U = \bigcup_{s \geqslant 1} V_s \text{ в обозначениях гл. IV}\right)$. Существуют такие числа $C > 0$, $p > 0$, что $|x''| \leqslant C |x'|^p$ на X. Следовательно, функция f, рассматриваемая как функция на $\mathbf{R}^k$, имеет нуль бесконечного порядка на U в начале координат. Меняя обозначения, получаем

Предложение 3.6. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^k$, $0 \in \Omega$ и Φ — аналитическая функция в Ω,*

---

[1]) Включение $\hat{I}(X) \subset J(X)$ проверяется непосредственно. — *Прим. ред.*

$\Phi(0)=0$, $\Phi \not\equiv 0$. *Пусть D — множество нулей функции Φ. Пусть Γ — открыто-замкнутое подмножество $\Omega \setminus D$, в замыкании которого содержится* 0. *Тогда* $J(\Gamma)=\{0\}$.

Для доказательства этого предложения предположим, что функция $\Phi(0, \ldots, 0, x_k)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки $x_k=0$, и покажем, что при этих условиях всякая функция f, имеющая нуль бесконечного порядка на Γ в начале координат, удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_k^q}(0, \ldots, 0)=0 \quad \forall q \in \mathbf{N}.$$

Отсюда следует нужный результат. В самом деле, множество прямых, проходящих через 0, на которых функция Φ не равна тождественно нулю, открыто и плотно в множестве всех прямых, проходящих через 0. Поскольку линейной заменой координат можно сделать каждую такую прямую осью x_k, отсюда тривиально следует, что все производные функции f равны нулю в начале координат и $J(\Gamma)=\{0\}$.

Предположим, таким образом, что $\Phi(0, \ldots, 0, x_k)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки $x_k=0$. Взяв множество Ω малым, мы можем считать Φ отмеченным полиномом по x_k, росток которого в нуле не имеет кратных множителей. Тогда

$$\Phi=x_k^p+\sum_{l=1}^{p} a_l(x_1, \ldots, x_{k-1})\, x_k^{p-l},$$

где a_l — аналитические функции в Ω, $a_l(0)=0$, $1 \leqslant l \leqslant p$, и дискриминант Δ полинома Φ не равен тождественно нулю в окрестности начала координат.

Для $x=(x_1, \ldots, x_k)$ положим $x=(x', x_k)$ и $\mathrm{pr}(x)=x'$. Пусть Ω' — такая окрестность начала координат в $\mathbf{R}^{k-1}$, что из условий

$$x' \in \Omega', \quad \Phi(x', z)=0, \quad z \in \mathbf{C}$$

следует, что $|z| \leqslant 1/2$, а если z — действительное число, то $(x', z) \in \Omega$. Пусть δ — множество нулей функции Δ в Ω' и $V' \subset \Omega'$ — открытая окрестность начала координат в $\mathbf{R}^{k-1}$, относительно компактная в Ω'. Согласно неравенству Лоясевича (теорема 4.1 гл. IV), существуют такие константы $C>0$, $\alpha>0$, что

$$\forall x'\in V' \quad |\Delta(x')|\geqslant C(d(x', \delta))^{\alpha}.$$

Если $z^1, \ldots, z^p$ — корни уравнения $\Phi(x', z)=0$, то $|z^i-z^j|\leqslant 1$, следовательно,

$$|z^i-z^j|\geqslant C(d(x', \delta))^{\alpha},$$

если $i\neq j$.

В дополнение к наложенным выше условиям можно предположить, что $\Omega=\Omega'\times(-a, a)$, $a>0$. Для $x'\in\Omega'$ интервал $\{x'\}\times(-a, a)$ разбивается самое большее на $p+1$ интервал нулями функции $\Phi(x', z)$, и

$$\Phi(x', \pm a)\neq 0.$$

Отсюда следует, что множество $\gamma=\operatorname{pr}(\Gamma)\setminus\delta$ открыто и замкнуто в $\Omega'\setminus\delta$ и, кроме того, замыкание множества γ, очевидно, содержит 0. Для всякой точки $x'\in\gamma$ множество $\operatorname{pr}^{-1}(x')\cap\Gamma$ содержит по крайней мере один из упоминавшихся интервалов. Обозначим начало этого интервала через $b(x')$, его конец — через $c(x')$. Если $-a\neq b(x')$, $a\neq c(x')$, то $b(x')$, $c(x')$ являются различными (последовательными) корнями полинома Φ, следовательно для $x'\in V'$

$$c(x')-b(x')\geqslant C(d(x', \delta))^{\alpha}. \tag{3.6i}$$

Если $b(x')=-a$, $c(x')\neq a$, заменим $b(x')$ на $c(x')-C(d(x', \delta))^{\alpha}$ (эта разность стремится к нулю при $x'\to 0$ и, следовательно, больше $-a$, если окрестность V' достаточно мала); точно так же поступим и в случае $b(x')\neq -a$, $c(x')=a$. Если $b(x')=-a$, $c(x')=a$, заменим $b(x')$ на 0, а $c(x')$ на $C(d(x', \delta))^{\alpha}$.

После этих изменений неравенство (3.6i) выполняется во всякой точке множества V', и существуют такие константы $C'>0$, $\alpha'>0$, что $\forall x'\in V'$

$$|b(x')|, \quad |c(x')|\leqslant C'|x'|^{\alpha'}. \tag{3.6ii}$$

Лемма 3.7. *Если выполнены условия предложения* 3.6, *то существует такая сходящаяся к нулю* *последовательность* $\{x^l\}$ *точек множества* Γ *и такие числа* $C'' > 0$, $\alpha'' > 0$, *что*

$$|x^l| \leqslant C''(d(x^l, D))^{\alpha''} \quad \forall l.$$

Доказательство. Эта лемма очевидна, если $k=1$. Предположим, что она доказана для $k-1$. Достаточно найти такую последовательность $\{x^l\}$ точек из Γ, сходящуюся к нулю, что

$$|x^l| \leqslant C''|\Phi(x^l)|^{\alpha''}.$$

По предположению индукции существует последовательность $\{x'^l\}$ точек множества γ, для которых

$$|x'^l| \leqslant C'''d(x'^l, \delta)^{\alpha'''}. \tag{3.7'}$$

Нетрудно проверить, что последовательность точек

$$x^l = \left(x'^l, \frac{b(x'^l) + c(x'^l)}{2}\right)$$

обладает всеми нужными свойствами. Достаточно оценить снизу расстояние от x^l до корней уравнения $\Phi(x'^l, z) = 0$. Для действительных корней это следует из (3.6i), для остальных корней — из оценки снизу мнимой части корней через $\Delta(x')$. Лемма доказана.

Применим эту лемму к Δ и γ (вместо Φ и Γ). Существует сходящаяся к нулю последовательность $\{x'^l\}$ точек множества γ, удовлетворяющая условию (3.7'). Разобьем интервал $[b(x'^l), c(x'^l)]$ на q равных интервалов с концами

$$b_0(x'^l) = b(x'^l), \quad b_1(x'^l), \ \ldots, \ b_q(x'^l) = c(x'^l)$$

и рассмотрим выражение

$$\frac{1}{(b_1 - b_0)^q}\left\{f(x'^l, b_0) - \binom{q}{1} f(x'^l, b_1) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^q f(x'^l, b_q)\right\}.$$

Если $l \to \infty$, это выражение стремится к $\frac{\partial^q f}{\partial x_k^q}(0)$. С другой стороны, из неравенств (3.6i), (3.6ii), (3.7') и из того, что функция f имеет нуль бесконечного порядка на Γ в начале координат, следует, что этот предел равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_k^q}(0)=0 \qquad \forall q \in \mathbf{N},$$

что доказывает предложение 3.6, а следовательно, и теорему 3.5.

Замечание 3.8. Пусть X — множество в $\mathbf{R}^n$, в замыкании которого содержится 0. Кроме $J(X)$, можно рассмотреть идеал $J'(X) \subset \mathcal{F}_n$ рядов Тейлора в точке 0 функций $f \in \mathcal{E}_n$, обращающихся в нуль на X. Очевидно, $J'(X) \subset J(X)$. Если X — аналитическое множество, то $\hat{I}(X) \subset J'(X)$. Отсюда по теореме 3.5 имеем $J(X) = J'(X)$.

Мы выясним сейчас, что можно сказать о самих дифференцируемых функциях, обращающихся в нуль на аналитическом множестве X, а не только о рядах Тейлора этих функций.

Определение 3.9. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, X — аналитическое множество в Ω, $a \in X$. Множество X называют *когерентным* в точке a, если существуют такая окрестность Ω' точки a и конечное число таких аналитических функций f_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ в Ω', обращающихся в нуль на X, что для всякой точки $b \in \Omega'$ образы функций $f_1, \ldots, f_p$ в $\mathcal{O}_b$ (кольце ростков аналитических функций в b) порождают идеал $I(X_b)$.

В противоположность случаю комплексных переменных это свойство выполняется не для всех аналитических множеств. Простейшим контрпримером является „зонтик" $x_3(x_1^2+x_2^2)=x_1^3$, содержащий прямую $x_1=x_2=0$ в качестве изолированной образующей и, следовательно, не когерентный в точке 0.

Теорема 3.10. *Пусть* X_0 — *действительный аналитический росток в точке* 0 *в* $\mathbf{R}^n$, $I(X_0)$ — *аналити-*

ческий идеал[1]), *и пусть* $K(X_0)$ — *идеал в* $\mathscr{E}_n$ *функций класса* C^∞, *обращающихся в нуль на* X_0. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) $K(X_0) = I(X_0)\mathscr{E}_n$;

(ii) *росток* X_0 *когерентен в точке* 0.

Доказательство. (ii)$\Rightarrow$(i). Пусть росток X_0 когерентен в точке 0, и пусть X — представитель ростка X_0 в окрестности Ω' точки 0, обладающий свойствами, указанными в определении 3.9. Пусть $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega')$, $\varphi = 0$ на X. В силу теоремы 3.5 для всякой точки $b \in \Omega'$ разложение $T_b\varphi$ является линейной комбинацией разложений $T_b f_i$. Следовательно, по теореме 1.1′ функция φ является линейной комбинацией функций f_i в $\mathscr{E}(\Omega')$.

(i)$\Rightarrow$(ii) (Тужерон [1]). Предположим, что росток X_0 не когерентен. Пусть $f_1, \ldots, f_p$—образующие идеала $I(X_0)$, Ω — окрестность начала координат, в которой функции f_i определены, и пусть

$$X = \{x \in \Omega \mid f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\}.$$

Так как росток X_0 не когерентен, существуют сходящаяся к нулю последовательность $\{x^l\}$ различных точек множества X и последовательность таких функций g^l, определенных в окрестностях точек x^l, что для всякого l функция g^l не принадлежит идеалу в $\mathcal{O}_x$, порожденному f_i. Пусть $\{\varphi^l\}$ — последовательность функций из $\mathscr{E}(\Omega)$, равных единице в окрестности точки x^l, имеющих компактные носители в Ω, содержащиеся во множествах, на которых определены функции g^l, причем носители функций φ^l, $\varphi^{l'}$ не пересекаются, если $l' \neq l$. Пусть функция $h^l = \varphi^l g^l$ продолжена на Ω нулем. Методом, хорошо известным в теории пространств Фреше (применение которого оставляется читателю), можно найти такую последовательность $\{\lambda^l\}$ действительных чисел, отличных от нуля, что ряд $\sum \lambda^l h^l$ сходится в $\mathscr{E}(\Omega)$ к функции g. Росток $g_0 \in \mathscr{E}_n$ функции g в точке 0 не является линейной комбинацией функций f_i с коэффициентами из $\mathscr{E}_n$, и теорема доказана.

[1]) То есть идеал ростков функций, обращающихся в нуль на X_0. — *Прим. перев.*

В статье Мальгранжа [3] имеются приложения теорем 3.5 и 3.10 к комплексным аналитическим множествам. В заключение отметим другое приложение теоремы 3.5.

Предложение 3.11. *Пусть X_0 — аналитический росток в точке* 0 *в* $\mathbf{R}^n$, $\dim X_0 = k$. *Предположим, что X_0 содержит росток V_0 многообразия класса C^∞ размерности k. Тогда V_0 — росток аналитического многообразия (являющегося неприводимой компонентой ростка X_0).*

Прежде чем доказывать это предложение, приведем два примера.

Пример 3.11.1. Если росток V_0 является многообразием класса C^∞, то он является также и аналитическим многообразием. Однако нетрудно проверить, что даже в случае $n = 2$ утверждение не будет верным, если заменить C^∞ на C^r ($r \in \mathbf{N}$).

Пример 3.11.2. Пусть $\Phi \in \mathcal{O}_{n+1}$, $\Phi \neq 0$, и пусть функция $f \in \mathcal{E}_n$, $f(0) = 0$, удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

Тогда f аналитична [достаточно взять за X множество точек, определенных равенством $\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, и за V множество точек, определенных равенством $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$].

Доказательство предложения 3.11. Обозначим через $I(X_0)$ аналитический идеал множества X и через $J(V_0)$ формальный идеал многообразия V_0. Строение идеала $J(V_0)$ тривиально в силу нашего предположения о том, что V_0 — неособое многообразие. С другой стороны, $J(X_0) \subset J(V_0)$, следовательно, $\hat{I}(X_0) \subset J(V_0)$. Так как

$$\dim(\mathcal{F}_n / \hat{I}(X_0)) = \dim(\mathcal{F}_n / J(V_0)) = k,$$

то $J(V_0)$ — минимальный простой идеал в разложении идеала $\hat{I}(X_0)$. В силу (3.3) существует такой простой идеал $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_n$, что

$$\mathfrak{p} \supset I(X_0), \quad \hat{\mathfrak{p}} = J(V_0).$$

Остается доказать два утверждения.

(i) *Росток* W_0, *определенный идеалом* $\mathfrak{p}$, *является аналитическим многообразием размерности* k. (Это утверждение — простое следствие критерия Якоби для регулярных точек; детали оставляем читателю.)

(ii) $V_0 = W_0$.

После аналитической замены координат можно считать, что многообразие W_0 определено уравнениями $x_{k+1} = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$. С другой стороны, многообразие V_0, очевидно, имеет касание с многообразием W_0 бесконечного порядка в точке 0 и, следовательно, определено уравнениями

$$x_{k+j} = \varphi_{k+j}(x_1, \ldots, x_k),$$

где $\varphi_{k+j} \in \mathscr{E}_k$, φ_{k+j} — плоские в точке 0 функции.

Предположим, что $W_0 \neq V_0$. Пусть X_0' — объединение неприводимых компонент множества X_0, отличных от W_0, и пусть $g(x_1, \ldots, x_k) \in \mathscr{O}_k$ — функция, не равная тождественно нулю, обращающаяся в нуль на $X_0' \cap W_0$. Пусть D — множество нулей функции g и U — множество точек из $\mathbf{R}^k \setminus D$ в окрестности начала координат, в которых хотя бы одна из функций φ_{k+j} отлична от нуля. Множество U, очевидно, открыто и замкнуто в $\mathbf{R}^k \setminus D$ в окрестности начала координат, и в замыкании этого множества в $\mathbf{R}^k$ содержится 0. Пусть f — функция из $\mathscr{O}_n$, обращающаяся в нуль на X_0'. В частности, f обращается в нуль на $V_0 \setminus W_0$. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ имеет нуль бесконечного порядка на U в точке 0. В силу предложения 3.6 функция f имеет в точке 0 тождественно нулевое разложение Тейлора. Следовательно, она сама равна нулю тождественно. Поэтому функция f обращается в нуль на W_0, что противоречит нашему предположению $W_0 \neq V_0$. Предложение доказано.

Глава VII

ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Носитель распределения. Продолжаемые распределения. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathscr{D}'(\Omega)$ [соответственно $\mathscr{D}'_c(\Omega)$, $\mathscr{D}'^m(\Omega)$, $\mathscr{D}'^m_c(\Omega)$] пространство распределений (соответственно с компактными носителями, порядка m, порядка m с компактными носителями) в Ω (Л. Шварц [1]). Известно, что пространство $\mathscr{D}'_c(\Omega)$ [соответственно $\mathscr{D}'^m_c(\Omega)$] двойственно пространству $\mathscr{E}(\Omega)$ [соответственно $\mathscr{E}^m(\Omega)$], наделенному топологией пространства Фреше, рассматривавшемуся в гл. I.

Пусть X — замкнутое подмножество в Ω. Обозначим через $\mathscr{D}'(X)$ [соответственно $\mathscr{D}'_c(X)$, $\mathscr{D}'^m(X)$, $\mathscr{D}'^m_c(X)$] подпространство соответствующего пространства распределений в Ω, имеющих носитель в X. Покажем, что пространство $\mathscr{D}'_c(X)$ [соответственно $\mathscr{D}'^m_c(X)$] ортогонально к пространству $\mathscr{I}(X; \Omega)$ [соответственно $\mathscr{I}^m(X; \Omega)$]. В самом деле, по определению носителя пространство $\mathscr{D}'_c(X)$ ортогонально множеству функций $f \in \mathscr{E}(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности множества X; с другой стороны, $\mathscr{I}(X; \Omega)$ является замыканием в $\mathscr{E}(\Omega)$ этого множества (предложение 5.2, гл. I). Утверждение для $\mathscr{D}'^m_c$ доказывается аналогично.

Следовательно, пространство $\mathscr{D}'_c(X)$ [соответственно $\mathscr{D}'^m_c(X)$] можно естественным образом отождествить с пространством, двойственным к $\mathscr{E}(X) = \mathscr{E}(\Omega)/\mathscr{I}(X; \Omega)$ [соответственно $\mathscr{E}^m(X) = \mathscr{E}^m(\Omega)/\mathscr{I}^m(X; \Omega)$].

Пусть теперь Y — другое замкнутое множество в Ω, $Y \subset X$. Положим $\mathscr{P}'(Y; X) = \mathscr{D}'(X)/\mathscr{D}'(Y)$, $\mathscr{P}'_c(Y; X) =$

$=\mathscr{D}'_c(X)/\mathscr{D}'_c(Y)$. Пространство $\mathscr{P}'(Y;X)$ можно интерпретировать как пространство распределений на $\Omega\setminus Y$ с носителями в $X\setminus Y$, которые можно продолжить до распределений на Ω (имеющих носитель в X). Пространство $\mathscr{P}'_c(Y;X)$ можно интерпретировать аналогично. Если мы рассматриваем пространство $\mathscr{D}'_c(X)$ как двойственное к $\mathscr{E}(X)$, то пространство $\mathscr{D}'_c(Y)\subset\mathscr{D}'_c(X)$ является ортогональным дополнением к $\mathscr{J}(Y;X)$ (по той же причине, что и выше). Следовательно, пространство $\mathscr{P}'_c(Y;X)$ двойственно к пространству $\mathscr{J}(Y;X)$, снабженному топологией, индуцированной из $\mathscr{E}(X)$.

Пусть теперь X и Y — два произвольных замкнутых множества в Ω. Рассмотрим последовательность

$$0\to\mathscr{E}(X\cup Y)\xrightarrow{\delta}\mathscr{E}(X)\oplus\mathscr{E}(Y)\xrightarrow{\pi}\mathscr{E}(X\cap Y)\to 0, \quad (1.1)$$

введенную в определении 5.4 гл. I. Двойственной последовательностью будет

$$0\to\mathscr{D}'_c(X\cap Y)\xrightarrow{\pi^*}\mathscr{D}'_c(X)\oplus\mathscr{D}'_c(Y)\xrightarrow{\delta^*}\mathscr{D}'_c(X\cup Y)\to 0, \quad (1.2)$$

где π^* (с точностью до знака) — диагональное отображение $\pi^*T=(T,-T)$, а $\delta^*(T,S)$ равно $T+S$. Из свойств последовательности (1.1)[1]) и теории двойственности пространств Фреше сразу следует, что π^* — вложение, $\ker\delta^*=\operatorname{im}\pi^*$ и $\operatorname{im}\delta^*$ является плотным в $\mathscr{D}'_c(X\cup Y)$ множеством. Более того, для сюръективности отображения δ^* (т. е. для точности последовательности (1.2)) необходимо и достаточно, чтобы множество $\operatorname{im}\delta$ было замкнуто, т. е. чтобы последовательность (1.1) была точна. Наконец, при помощи разбиения единицы получаем, что точность последовательности (1.2) эквивалентна точности последовательности

$$0\to\mathscr{D}'(X\cap Y)\xrightarrow{\pi'}\mathscr{D}'(X)\oplus\mathscr{D}'(Y)\xrightarrow{\delta'}\mathscr{D}'(X\cup Y)\to 0, \quad (1.3)$$

где отображения π', δ' определены так же, как и π^*, δ^*, а это условие эквивалентно сюръективности отображения δ. Следовательно, справедливо

---

[1]) Здесь имеется в виду, что δ инъективно, π сюръективно, $\pi\delta=0$ и $\operatorname{im}\delta$ плотен в $\ker\pi$ (см. стр. 21). — *Прим. ред.*

Предложение 1.4 (Лоясевич [1]). *При указанных предположениях следующие свойства эквивалентны:*

(i) *множества X и Y регулярно расположены;*

(ii) *последовательность* (1.3) *точна;*

(iii) *отображение δ' сюръективно, т. е. всякое распределение $T \in \mathscr{D}'(X \cup Y)$ можно представить в виде $T = S_1 + S_2$, где $\operatorname{supp} S_1 \subset X$, $\operatorname{supp} S_2 \subset Y$.*

2. Деление распределений. Сформулируем и докажем теорему, двойственную к теореме 1.1 гл. IV.

Теорема 2.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $Y \subset X \subset \Omega$ — два аналитических подмножества в Ω и $f_1, \ldots, f_p$ — аналитические функции в Ω. Пусть $T_1, \ldots, T_p \in \mathscr{P}'(Y; X)$. Тогда необходимым и достаточным условием существования распределения $S \in \mathscr{P}'(Y; X)$, удовлетворяющего равенствам $f_1 S = T_1, \ldots, f_p S = T_p$, является следующее.*

(R) *Для всякой точки $a \in X \setminus Y$ аналитические соотношения между функциями f_i в a являются соотношениями между распределениями T_i, т. е. если $g_1, \ldots, g_p$ — ростки аналитических функций в a, то из $g_1 f_1 + \ldots + g_p f_p = 0$ следует $g_1 T_1 + \ldots + g_p T_p = 0$ в окрестности точки a.*

Замечание 2.2. Используя глобальную теорему когерентности аналитических пучков на действительном аналитическом многообразии, это условие можно заменить следующим: если $g_1, \ldots, g_p$ — аналитические функции в Ω, то из $g_1 f_1 + \ldots + g_p f_p = 0$ следует $g_1 T_1 + \ldots + g_p T_p = 0$.

Пример 2.3. Возьмем $Y = \varnothing$, $X = \Omega$. Для любого распределения $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ существует такое распределение $S \in \mathscr{D}'(\Omega)$, что $f_1 S = T$. Другими словами „деление распределения на аналитическую функцию всегда возможно". Эта теорема была доказана для $p = 1$ (прежде, чем для произвольного p) Хёрмандером [1] в случае, когда f_1 — многочлен, и Лоясевичем [1].

Доказательство теоремы 2.1. Достаточно доказать теорему для $\mathcal{P}'_c(Y;\ X)$ вместо $\mathcal{P}'(Y;\ X)$, а затем использовать разбиение единицы. Рассмотрим отображение

$$F\colon \mathcal{P}'_c(Y;\ X) \to [\mathcal{P}'_c(Y;\ X)]^p,$$

определенное формулой $F(S) = (f_1 S,\ \ldots,\ f_p S)$. Докажем, что образ отображения F замкнут и плотен во множестве E распределений $(T_1,\ \ldots,\ T_p)$, удовлетворяющих условию (R); следовательно, $\operatorname{im}(F) = E$. Отображением, сопряженным к F, будет отображение

$$F^*\colon [\mathcal{J}(Y;\ X)]^p \to \mathcal{J}(Y;\ X),$$

определенное формулой $F^*(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_p) = f_1\varphi_1 + \ldots + f_p\varphi_p$. Из теоремы 1.2 гл. VI следует, что идеал, порожденный в $\mathcal{J}(Y;\ X)$ функциями f_i, замкнут, а потому замкнут и образ отображения F^*. Переходя к сопряженному отображению, получим замкнутость множества $\operatorname{im}(F)$.

Докажем теперь, что образ отображения F плотен в E. Для этого достаточно показать, что всякий вектор $\varphi = (\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_p) \in [\mathcal{J}(Y;\ X)]^p$, ортогональный к $\operatorname{im}(F)$, ортогонален также к E. Учитывая разбиение единицы, достаточно проверить это утверждение для функций φ с компактным носителем, содержащимся в данной окрестности произвольной точки a множества Ω. Из ортогональности φ к $\operatorname{im}(F)$ следует, что $f_1\varphi_1 + \ldots + f_p\varphi_p = 0$. Следствие 1.12 гл. VI показывает, что можно найти аналитические соотношения $g^{(1)},\ \ldots,\ g^{(r)}$ между функциями f_i в окрестности точки a и такие функции $\psi_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \psi_r \in \mathcal{E}(\Omega)$ с компактным носителем в данной окрестности точки a, что $\varphi = \sum \psi_j g^{(j)}$. Отсюда сразу следует, что функция φ ортогональна к E, и теорема доказана.

Теорему 2.1 можно интерпретировать в терминах инъективных модулей. Пусть A — унитарное (т. е. с единицей. — *Перев.*) коммутативное кольцо и M — унитарный A-модуль. Модуль M называется ***инъективным***, если для всякого идеала $\mathfrak{J} \subset A$ естественное отображение $M \simeq \operatorname{Hom}_A(A,\ M) \to \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{J},\ M)$ сюръективно. Возьмем систему $(f_i)_{i \in I}$ образующих идеала $\mathfrak{J}$ и семейство $(T_i)_{i \in I}$ таких элементов модуля M, что всякое соотношение между f_i с коэффициентами в A является также соотношением между T_i. Тогда отображение u: $f_i \to T_i$ определяет элемент модуля $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{J}, M)$ и обратно. Инъективность модуля M эквивалентна, таким образом, существованию такого элемента $S \in M$, что $f_i S = T_i$ для всех i. В этом случае из теоремы 2.1, нётеровости кольца $\mathcal{O}_n$ и теоремы Ока 4.12 гл. III следует

Теорема 2.4. *Пусть X_0, Y_0 — ростки аналитических множеств в точке $0 \in \mathbf{R}^n$, $Y_0 \subset X_0$, и пусть $\mathcal{P}'(Y_0; X_0)$ — пространство ростков, индуцированных в точке 0 элементами пространства $\mathcal{P}'(Y; X)$ (Y, X — такие представители ростков Y_0, X_0 в окрестности точки 0, что $Y \subset X$). Тогда $\mathcal{P}'(Y_0; X_0)$ является инъективным $\mathcal{O}_n$-модулем. В частности, пространство $\mathcal{D}'_n$ ростков распределений в точке 0 является инъективным $\mathcal{O}_n$-модулем.*

Замечание 2.5. В предположениях теоремы 2.1 пусть $\mathcal{O}(\Omega)$ — кольцо действительных аналитических функций в Ω. Тогда с помощью замечания 2.2 нетрудно показать, что $\mathcal{P}'(Y; X)$ [и, в частности, $\mathcal{D}'(\Omega)$] является инъективным $\mathcal{O}(\Omega)$-модулем.

3. Гармонический синтез в $\mathcal{S}'$. Начнем с утверждения, двойственного к теореме 1.3 гл. II.

Предложение 3.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и V — слабо замкнутый подмодуль $\mathcal{E}^m(\Omega)$-модуля $\mathcal{D}'^m(\Omega)$. Тогда в модуле V [снабженном слабой топологией, индуцированной из $\mathcal{D}'^m(\Omega)$] распределения с точечными носителями образуют полную систему.*

То же самое верно, если заменить $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ и $\mathcal{E}^m(\Omega)$ соответственно на $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{E}(\Omega)$.

Доказательство, которое легко получить с помощью сопряжения и разбиения единицы, предоставляем читателю.

В случае пространств $\mathscr{E}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$ результат верен даже в сильной топологии, поскольку эти пространства рефлексивны. Заметим, что, используя разбиение единицы (или непосредственно следствие 1.7 гл. II), нетрудно перенести эти результаты на случай, когда Ω — многообразие класса C^∞, счетное в бесконечности.

Пусть теперь $\mathscr{S}$ — пространство C^∞-функций на $\mathbf{R}^n$, стремящихся к нулю вместе с производными всех порядков быстрее, чем любая отрицательная степень многочлена $x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Пусть $\mathbf{R}^n \to S^n$ — естественное отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в n-мерную сферу (получающуюся из $\mathbf{R}^n$ добавлением точки ∞ в бесконечности). Это отображение отождествляет $\mathscr{S}$ с пространством $\mathscr{J}(\{\infty\}; S^n)$ и является топологическим изоморфизмом этих пространств, снабженных обычной топологией. Двойственное к $\mathscr{S}$ пространство $\mathscr{S}'$ можно отождествить тогда с $\mathscr{P}'(\{\infty\}; S^n) = \mathscr{P}'_c(\{\infty\}; S^n)$. Мы рассматриваем это пространство как вложенное в $\mathscr{D}'(S^n \setminus \{\infty\}) = \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Пусть V — (слабо или сильно) замкнутый подмодуль $\mathscr{S}$-модуля $\mathscr{S}'$ (слабая и сильная замкнутость эквивалентны, так как пространство $\mathscr{S}$ рефлексивно). Покажем, что распределения с точечными носителями образуют полную систему в V. Пусть $\tilde{V}$ — прообраз модуля V в $\mathscr{D}'(S^n)$. Достаточно доказать, что множество $\tilde{V}$ замкнуто (что очевидно) и что оно инвариантно относительно умножения на всякую функцию $f \in \mathscr{E}(S^n)$. Но если $f \in \mathscr{J}(\{\infty\}; S^n)$, то это верно по предположению. Если f — произвольная функция, покажем, что всякая функция $\varphi \in \mathscr{E}(S^n)$, ортогональная к $\tilde{V}$, ортогональна к $f\tilde{V}$: всякая такая функция φ ортогональна к $\mathscr{D}'(\{\infty\})$, поэтому $\varphi \in \mathscr{J}(\{\infty\}; S^n)$. Следовательно, существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$ функций в $\mathscr{E}(S^n)$, обращающихся в нуль в окрестности точки ∞, что $f\varphi = \lim \alpha_k f\varphi$ (ср. с доказательством леммы 4.3 гл. I). Отсюда получаем для $T \in \tilde{V}$

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle = \lim \langle T, \alpha_k f\varphi\rangle = \lim \langle(\alpha_k f) T, \varphi\rangle = 0,$$

и наше утверждение доказано. [Те же рассуждения можно применить к $\mathcal{P}'_c(Y;\ X)$, где $Y \subset X$ — замкнутые подмножества некоторого многообразия.]

Известно, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ и что умножение при этом переходит в свертку. Нетрудно видеть, что если V — замкнутый подмодуль $\mathcal{S}$-модуля $\mathcal{S}'$, то его образ Фурье $\hat{V}$ является замкнутым и инвариантным относительно сдвига векторным подпространством пространства $\mathcal{S}'$ (над $\mathbf{R}$) и обратно. Кроме того, преобразование Фурье переводит распределения с точечными носителями в „экспоненциальные полиномы", т. е. в функции $x \to P(x)\, e^{i\langle\lambda,\, x\rangle}$, где P — многочлен и $\lambda \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.2 (Уитни — Шварц, см. Шварц [2]). *Во всяком замкнутом и инвариантном относительно сдвига векторном подпространстве пространства $\mathcal{S}'$ экспоненциальные полиномы образуют полную систему.*

С другой стороны, известно, что это утверждение неверно в $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ со слабой топологией (Шварц для $n \geqslant 3$; Малявен для $n = 1,\ 2$). Есть предположение, что это верно в $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ (необходимо взять все „комплексные" экспоненциальные полиномы, т. е. $\lambda \in \mathbf{C}^n$), но до настоящего времени это доказано только в случае $n=1$ (Шварц [3]).

4. Дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Пусть $P_n = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов от n неизвестных. Мы рассмотрим его, по крайней мере сначала, как вложенное в кольцо аналитических функций в $\mathbf{R}^n$ отображением $X_j \to x_j$, где x_j — координаты в $\mathbf{R}^n$. Пусть $f_1, \ldots, f_p \in P_n$ и $T_1, \ldots, T_p \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Распределение $S \in \mathcal{S}'$, для которого $f_j S = T_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, существует в том и только том случае, если выполнено следующее условие:

(R) *Во всякой точке $a \in \mathbf{R}^n$ аналитические соотношения между f_j являются соотношениями между T_j в окрестности точки a.*

Для доказательства, как и в § 3, вложим пространство $\mathbf{R}^n$ в сферу S^n и отождествим $\mathcal{S}'$ с $\mathcal{P}'(\{\infty\}; S^n)$. Достаточно доказать утверждение в окрестности всякой точки $a \in S^n$ (общий случай получим разбиением единицы). Если $a \neq \infty$, то это следует из теоремы 2.1. Если $a = \infty$, сделаем замену переменных $y_j = x_j / \sum x_i^2$ и заметим, что когда число m достаточно велико, функция $\left(\sum y_i^2\right)^m f_j$ является полиномом от $y_1, \ldots, y_n$; таким образом, утверждение снова следует из теоремы 2.1.

Заметим, что условие (R) эквивалентно следующему:

(R′) *Соотношения между* f_i *с коэффициентами в* P_n *являются соотношениями между* T_i (*т. е. из* $\sum g_j f_j = 0$, $g_j \in P_n$, *следует, что* $\sum g_j T_j = 0$).

В самом деле, кольцо $\mathcal{O}_a$ $(a \in \mathbf{R}^n)$ ростков функций, аналитических в точке a, является плоским над P_n (пример 4.11 гл. III). Интерпретируя это в терминах соотношений, получаем $(\mathrm{R}') \Rightarrow (\mathrm{R})$. Отсюда и из нётеровости кольца P_n следует

Теорема 4.1. *Действие* P_n *на* $\mathcal{S}'$, *определенное по формуле* $X_j T = x_j T$, *превращает* $\mathcal{S}'$ *в инъективный* P_n-*модуль.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2.4.

Применяя преобразование Фурье, получаем следующий результат:

Теорема 4.1′. *Если* P_n *действует на* $\mathcal{S}'$ *по формуле* $X_j T = \dfrac{\partial T}{\partial x_j}$, *то* $\mathcal{S}'$ *является инъективным* P_n-*модулем.*

Пример 4.2. Пусть $f \in P_n$, и $\delta \in \mathcal{S}'$ — распределение, определенное по формуле $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Тогда существует такое распределение $E \in \mathcal{S}'$, что $f\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) E = \delta$.

Другими словами, *у всякого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами есть медленно растущее фундаментальное решение* (т. е. фундаментальное решение из $\mathcal{S}'$). Этот пример имеет в основном исторический интерес (условие $E \in \mathcal{S}'$ искусственно; см. Хёрмандер [2]). Однако мы привели его здесь, так как он является источником большой части результатов, изложенных в этой книге.

ЛИТЕРАТУРА

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Algèbre commutative, Chap. I, Paris, 1961.
2. Algèbre commutative, Chap. III, Paris, 1961.

Глезер (Glaeser G.)

1. Etude de quelques algèbres tayloriennes, *Journal d'An. Math. Jerusalem*, 6 (1958), 1—124.
2. Fonctions composées différentiables, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 193—209.

Гузель (Houzel C.)

1. Géométrie analytique locale, Séminaire H. Cartan, 1960/61, exposés 18—21.

Дьёдонне, Шварц (Dieudonné J., Schwartz L.)

1. La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*), *Ann. Inst. Fourier* (1949), 61—101. (Русский перевод: Двойственность в пространствах (*F*) и (*LF*), сб. *Математика*, 2:2 (1958), 77—107.)

Зарисский О., Самюэль П.

1. Коммутативная алгебра, т. I, II, ИЛ, М., 1963.

Кнезер (Kneser M.)

1. Abhängigkeit von Functionen, *Math. Z.*, 54 (1951), 34—51.

Лоясевич (Łojasiewicz S.)

1. Sur le problème de la division, *Studia Math.*, 8 (1959), 87—136 (или Rozprawy Mathematyczne, 22 (1961)).

Мальгранж (Malgrange B.)

1. Division des distributions, Séminaire L. Schwartz 1959/60, exposés 21—25.
2. Le théorème de preparation en géométrie différentialle, Séminaire H. Cartan, 1962/63, exposés 11, 12, 13, 22.
3. Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 113—127.

Морен (Morin B.)

1. Forme canonique des singularités d'une application différentiable, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 260 (1965), 5662—5665, 6503—6506.

Морс (Morse A. P.)
1. The behaviour of a function on its critical set, *Ann. of. Math.*, 40 (1939), 62—70.

Паламодов В. П.
1. Строение полиномиальных идеалов и их факторпространств в пространствах бесконечно дифференцируемых функций, *ДАН СССР*, 141(6), (1961), 1302—1305.

Сард (Sard A.)
1. The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 883—890.

Серр (Serre J. P.)
1. Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1955—56), 1—42.

Тужерон (Tougeron J. C.)
1. Faisceaux différentiables quasi-flasques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 260 (1965), 2971—2973.

Уитни (Whitney H.)
1. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63—89.
2. On ideals of differentiable functions, *Amer. Journ. Math.*, 70 (1948), 635—658. (Русский перевод: Об идеалах в кольцах дифференцируемых функций, сб. *Математика*, 10 : 4 (1966), 79—100.)
3. On singularities of mappings of euclidean spaces I, *Ann. of Math.*, 62 (1955), 347—410.

Хёрмандер (Hörmander L.)
1. On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Math.*, 3 (1958), 555—568. (Русский перевод: О делении обобщенных функций на полиномы, сб. *Математика*, 3 : 5 (1959), 117—130.)
2. Local and global properties of fundamental solutions, *Math. Scand.*, 5 (1957), 27—39.

Шварц (Schwartz L.)
1. Théorie des distributions, 1, 2, Paris (1950-1951).
2. Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions, *Canad. Journ. Math.*, 3 (1951), 503—512.
3. Théorie générale des fonctions moyenne-periodiques, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 857—929.

ОГЛАВЛЕНИЕ