

Б.Мальгранж
**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ
ПЕРЕМЕННЫХ**

«Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969

Предлагаемая книга является курсом лекций по теории функций нескольких комплексных переменных, которые автор, известный французский математик Б. Мальгранж, прочел в Эта Институте фундаментальных исследований в Бонбее и которые были записаны проф. Р. Нарасиманом.

Книга состоит из трех глав: области голоморфности, дифференциальные свойства куба, когерентные аналитические пучки. В литературе на русском языке имеется мало книг по важной в настоящее время теории функций нескольких комплексных переменных. Предлагаемая книга отличается краткостью, простотой и изяществом изложения, характерными для автора.

Книга может быть полезна для студентов старших курсов и аспирантов, а также для всех, интересующихся теорией функций нескольких комплексных переменных.

Оглавление

Предисловие автора к русскому изданию	4
<i>Глава 1</i>	
Области голоморфности	
§ 1. Формула Коши и элементарные следствия	5
§ 2. Области Рейнхардта и круговые области	12
§ 3. Комплексные аналитические многообразия	19
§ 4. Аналитическое продолжение	25
§ 5. Оболочки голоморфности	29
§ 6. Области голоморфности. Теория выпуклости	34
§ 7. Теория выпуклости (продолжение)	41
Упражнения	45
<i>Глава 2</i>	
Дифференциальные свойства куба	
§ 8. d'' -когомологии на кубе	48
§ 9. Голоморфные регулярные матрицы	57
§ 10. Дополнительные результаты	66
Упражнения	71
<i>Глава 3</i>	
Когерентные аналитические пучки	
§ 11. Пучки	73
§ 12. Общие свойства когерентных аналитических пучков	76
§ 13. Когомологии с коэффициентами в пучке	87
§ 14. Когерентные аналитические пучки на кубе	93
§ 15. Многообразия Штейна; предварительные результаты	100
§ 16. Когерентные аналитические пучки на многообразии Штейна	109
Литература	117

В основу этих заметок, посвященных теории функций нескольких

комплексных переменных, и, более специально, фундаментальным теоремам Картана — Ока, положен курс лекций (неопубликованный) А. Картана, прочитанный им в Ecole Normale Supérieure в 1950—1951 гг., а также материалы знаменитого «Семинара Картана» от 1950—1951 годов, где теорема А и теорема Б были впервые доказаны в их естественных рамках: когомологий со значениями в аналитических когерентных пучках. Изложение в этой книге следует изложению Картана, если отвлечься от некоторых незначительных изменений, и не претендует на оригинальность. Теперь, через шестнадцать лет, излишне подчеркивать фундаментальную важность, которую приобрели методы и результаты, изложенные здесь, для дальнейшего развития алгебраической геометрии и аналитической геометрии; теперь весьма трудно было бы дать полную библиографию работ, возникших под их прямым или косвенным влиянием.

Оглавление

Предисловие автора к русскому изданию 4

Г л а в а 1

Области голоморфности

§ 1. Формула Коши и элементарные следствия	5
§ 2. Области Рейнхардта и круговые области	12
§ 3. Комплексные аналитические многообразия	19
§ 4. Аналитическое продолжение	25
§ 5. Оболочки голоморфности	29
§ 6. Области голоморфности. Теория выпуклости	34
§ 7. Теория выпуклости (продолжение)	41
Упражнения	45

Г л а в а 2

Дифференциальные свойства куба

§ 8. d'' -когомологии на кубе	48
§ 9. Голоморфные регулярные матрицы	57
§ 10. Дополнительные результаты	66
Упражнения	71

Г л а в а 3

Когерентные аналитические пучки

§ 11. Пучки	73
§ 12. Общие свойства когерентных аналитических пучков	76
§ 13. Когомологии с коэффициентами в пучке	87
§ 14. Когерентные аналитические пучки на кубе	93
§ 15. Многообразия Штейна; предварительные результаты	100
§ 16. Когерентные аналитические пучки на многообразии Штейна	109
Литература	117

Предисловие автора к русскому изданию

В основу этих заметок, посвященных теории функций нескольких комплексных переменных, и, более специально, фундаментальным теоремам Картана — Ока, положен курс лекций (неопубликованный) А. Картана, прочитанный им в École Normale Supérieure в 1950—1951 гг., а также материалы знаменитого «Семинара Картана» от 1950—1951 годов, где теорема А и теорема Б были впервые доказаны в их естественных рамках: когомологий со значениями в аналитических когерентных пучках. Изложение в этой книге следует изложению Картана, если отвлечься от некоторых незначительных изменений, и не претендует на оригинальность. Теперь, через шестнадцать лет, излишне подчеркивать фундаментальную важность, которую приобрели методы и результаты, изложенные здесь, для дальнейшего развития алгебраической геометрии и аналитической геометрии; теперь весьма трудно было бы дать полную библиографию работ, возникших под их прямым или косвенным влиянием.

Проф. Линник по своей инициативе занялся переводом и изданием на русском языке этих заметок, за что я весьма признателен проф. Линнику.

Б. Мальгранж

Орсэ, 8 июня 1967 г.

Области голоморфности

§ 1. Формула Коши и элементарные следствия

1. Пусть C^n — пространство n комплексных переменных (z_1, \dots, z_n) . Мы будем писать просто z вместо (z_1, \dots, z_n) . Пусть $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, \dots, n$); пусть Ω — открытое множество в C^n . Предположим, что $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ — комплекснозначная функция, определенная на Ω , однократно дифференцируемая как функция $2n$ действительных переменных $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Положим по определению

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right).$$

Определение. $f(z)$ называется *голоморфной* на Ω , если $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ ($j = 1, \dots, n$) в каждой точке Ω .

(Эти уравнения обобщают уравнения Коши — Римана для случая функций нескольких переменных.)

Следующее определение эквивалентно данному:

Будем говорить, что $f(z)$ имеет комплексную производную в $a \in \Omega$, если для любого $b \in C^n$ и комплексного λ существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a + \lambda b) - f(a)}{\lambda}.$$

$f(z)$ называется *голоморфной* в Ω , если она имеет комплексную производную в каждой точке $a \in \Omega$.

Определение. Поликругом с центром в начале координат называется множество K таких точек, что

$|z_1| \leq \rho_1; |z_2| \leq \rho_2; \dots; |z_n| \leq \rho_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n > 0$.
Эти неравенства кратко записываются так:

$$|z| \leq \rho.$$

Пусть Γ — множество точек $z \in C^n$, для которых

$$|z_1| = \rho_1, \dots, |z_n| = \rho_n.$$

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в окрестности K , и обозначим через c_j кривую $|z_j| = \rho_j$ в z_j -плоскости. Тогда имеет место следующая теорема:

Формула Коши. Пусть z — точка с $|z| < \rho$ (*t. e.* $|z_j| < \rho_j; j = 1, \dots, n$), тогда

$$f(z_1, \dots, z_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \dots \int \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

(Интеграл $\int_{\Gamma} \dots \int g(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$ определен для непрерывных g как $\int_{c_1} d\xi_1 \dots \int_{c_n} g(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_n$ и не зависит от порядка интегрирования.)

Доказательство. Повторное применение формулы Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного дает

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\xi_1, z_2, \dots, z_n)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} \int_{c_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2, z_3, \dots, z_n)}{\xi_2 - z_2} d\xi_2 = \dots = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - z_1} \int_{c_2} \frac{d\xi_2}{\xi_2 - z_2} \dots \int_{c_n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_n - z_n} d\xi_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \dots \int \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

2. Если f — комплекснозначная непрерывная функция на компактном пространстве K , то определим $\|f\|_K$ так:

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Определение. Ряд $\sum_{m \in N^n} a_m(z)$ комплекснозначных непрерывных функций на компактном пространстве K называется *сходящимся нормально*, если

$$\sum_{m \in N^n} \|a_m\|_K < +\infty$$

(N — множество неотрицательных целых чисел).

Если $a_m(z)$ — функции, определенные на открытом множестве Ω , то будем говорить, что ряд сходится на Ω , если он сходится в каждом компактном подмножестве из Ω .

Приведем некоторые простые следствия формулы Коши:

Предложение 1. *Если $f(z)$ голоморфна в окрестности U поликруга K , то*

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n \in N^n} a_{j_1 \dots j_n} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \quad (1)$$

для $z \in K$.

Ряд (1) сходится нормально в K .

Это утверждение просто доказывается применением формулы Коши к поликругу K' с $K \subset \overset{\circ}{K}' \subset K' \subset U$ ($\overset{\circ}{K}'$ — внутренность K').

Коэффициенты $a_J = a_{j_1 \dots j_n}$ в (1) задаются формулой

$$\begin{aligned} a_J &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi_1^{j_1+1} \dots \xi_n^{j_n+1}} d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_n e^{i\theta_n})}{\rho_1^{j_1} \dots \rho_n^{j_n}} \times \\ &\quad \times \exp \{-i(j_1 \theta_1 + \dots + j_n \theta_n)\} d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Из разложения $f(z)$ в степенной ряд (1) видно, что $f(z)$ неограниченно дифференцируема и

$$\frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n} f(0)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} = j_1! \dots j_n! a_{j_1 \dots j_n},$$

так что разложение однозначно. Дифференцирование формулы Коши дает далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n} f(z)}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} &= \\ &= \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int \dots \int \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $f(z)$ предполагается голоморфной только внутри K , то можем написать

$$f(z) = \sum_{J \in N^n} a_J z^J,$$

где

$$a_J = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \dots \int \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1^{j_1+1} \dots \zeta_n^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

где Γ' — множество точек вида

$$|z_1| = r_1, \dots, |z_n| = r_n; \quad 0 < r_j < \rho_j; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ряд сходится нормально внутри K .

Если $f(z)$ голоморфна в окрестности K и

$$M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)| = \max_{z \in K} |f(z)|$$

(последнее равенство легко устанавливается с помощью формулы Коши), то

$$|a_J| \leq \frac{M}{\rho^J},$$

т. е.

$$|a_{j_1 \dots j_n}| \leq \frac{M}{\rho_1^{j_1} \dots \rho_n^{j_n}}.$$

Это непосредственно следует из формулы (2) для a_j как интеграла, выраженного через $f(z)$. Эти неравенства называются *неравенствами Коши*.

Предложение 2. Пусть $\{f_k(z)\}$ — последовательность функций, голоморфных на Ω ; допустим, что $\{f_k(z)\}$ сходится равномерно на всяком компактном подмножестве Ω к функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ голоморфна в Ω .

Доказательство. Поскольку $f_k(z) \rightarrow f(z)$ равномерно в некоторой окрестности любой точки $z \in \Omega$, то $f(z)$ непрерывна в Ω . Далее, в поликруге K с центром в любой точке Ω (лежащем полностью в Ω) $f_k(z)$ удовлетворяет формуле Коши; так как $\{f_k(z)\}$ равномерно сходится в K , то $f(z)$ также удовлетворяет этой формуле, откуда следует, что $f(z)$ голоморфна в Ω .

Далее, используя интеграл (3) для производных голоморфной функции, находим, что производные (всех порядков) $f_k(z)$ сходятся к соответствующим производным $f(z)$ равномерно на каждом компактном подмножестве Ω .

Дадим другую интерпретацию предложения 2.

Пусть \mathcal{C}_Ω и \mathcal{H}_Ω обозначают соответственно множества непрерывных и голоморфных на Ω функций; \mathcal{C}_Ω и \mathcal{H}_Ω — векторные пространства над полем комплексных чисел. Напомним, что можно топологизировать \mathcal{C}_Ω и \mathcal{H}_Ω , снабжая их топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах: если $f_n \in \mathcal{C}_\Omega$ (или \mathcal{H}_Ω), то $f_n \rightarrow 0$, если $\|f_n\|_K \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на каждом компакте $K \subset \Omega$. Фундаментальная система окрестностей начала задается множествами $\mathcal{V}(K_m, \frac{1}{m})$, где $\mathcal{V}(K, a)$ ($a > 0$) — множество $f \in \mathcal{C}_\Omega$ (соответственно \mathcal{H}_Ω), для которых $\|f\|_K < a$, а $\{K_m\}$ есть последовательность компактов таких, что

$$K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_m = \Omega.$$

\mathcal{C}_Ω является (\mathcal{F}) -пространством, т. е. имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля, и является полным.

Предложение 2 можно сформулировать так:
 \mathcal{H}_Ω — замкнутое подпространство \mathcal{C}_Ω .

Предложение 3. Всякое ограниченное замкнутое множество Φ в \mathcal{H}_Ω компактно.

(Ограниченнное множество Φ в любом топологическом векторном пространстве есть такое множество, что для любой окрестности \mathcal{V} начала найдется $\lambda > 0$ такое, что $\Phi \subset \lambda \mathcal{V}$. Относительно \mathcal{C}_Ω или \mathcal{H}_Ω мы можем высказать эквивалентное утверждение: множество Φ ограничено, если

$$\sup_{f \in \Phi} \|f\|_K < +\infty$$

для каждого компакта $K \subset \Omega$.)

Доказательство. Пусть K — какое-либо компактное подмножество Ω ; Φ_K — множество функций f_K , где f_K — сужение $f \in \Phi$ на K . Мы докажем, что функции из Φ_K равнотепенно непрерывны, откуда получим с помощью теоремы Асколи (см., например, Бурбаки, Общая Топология, гл. X), что Φ_K относительно компактно в \mathcal{C}_K .

Выберем компактное множество K' такое, что $K \subset K' \subset K' \subset \Omega$. K имеет положительное расстояние от границы K' . Так как

$$\sup_{f \in \Phi} \|f\|_{K'} < +\infty,$$

то неравенство Коши, примененное к производным f в подходящем поликруге с центром в любой точке K , содержащемся в K' , показывает, что

$$\sup_{f \in \Phi} \max_I \left\| \frac{\partial f}{\partial z_I} \right\|_K = M_K < \infty.$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_I} = 0$, то из определения $\frac{\partial f}{\partial z_I}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_I}$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}$ равномерно ограничены на K при

$f \in \Phi$ (в самом деле, $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_K \leq M_K; \left\| \frac{\partial f}{\partial y_j} \right\|_K \leq M_K$).

Теорема о среднем значении показывает равнотепенную непрерывность функций из Φ_K .

Чтобы доказать, что Φ компактно, достаточно показать, что любая последовательность $\{f_m\}$, $f_m \in \Phi$, имеет предельную точку в C_Ω . Выберем последовательность $\{K_m\}$ компактов K_m таких, что $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Поскольку Φ_K относительно компактно для любого компакта $K \subset \Omega$, выберем по индукции подпоследовательности $\{f_{m,v}\}$ из $\{f_m\}$ такие, что каждая из них есть подпоследовательность предыдущей и если $f_{m,v+1} = f_{m',v}$, то $m' > m$ и $\{f_{m,v}\}$ сходится равномерно на K_v . Так как $\bigcup \overset{\circ}{K}_m = \Omega$, то подпоследовательность $\{f_{vv}\}$ функций $\{f_m\}$ сходится к некоторому пределу в C_Ω , и предложение 3 доказано.

Пусть дано подмножество Φ из \mathcal{H}_Ω такое, что $\sup_{f \in \Phi} |f(z)| < +\infty$ для каждого $z \in \Phi$. Что можно утверждать об ограниченности множества Φ ?

Имеет место следующий результат:

Предложение 4. Существует открытое множество $\Omega' \subset \Omega$, плотное в Ω , такое, что $\Phi_{\Omega'}$ (множество сужений на Ω' функций из Φ) — ограниченное множество на $\mathcal{H}_{\Omega'}$.

Это предложение и его доказательство остаются верными, если \mathcal{H}_Ω заменяется на C_Ω . Для доказательства нам понадобится следующая теорема:

Теорема Бэра. Пусть U — открытое множество $\subset C^n$ и $\{O_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность открытых множеств $\subset U$ таких, что каждое O_k плотно

в U . Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ плотно в U .

Доказательство. Так как O_1 плотно в U , то $O_1 \cap B$ для любого открытого шара $B \subset U$ содержит открытый шар B_1 . Таким же образом множество $O_2 \cap \frac{1}{2}B_1$ ($\frac{1}{2}B_1$ — шар с тем же центром, что и B_1 , но с половинным радиусом) содержит открытый шар B_2 , и этот процесс можно продолжить.

Ясно, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \neq 0$, и так как $\bar{B}_k \subset B_{k-1}$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq 0$.

Далее, $B_k \subset O_k \cap B$, так что $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k \cap B \neq 0$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ плотно в U .

Доказательство предложения 4. Пусть U — произвольное открытое множество $\subset \Omega$. Пусть $O_k \subset U$ — множество $z \in U$, для которого существует хотя бы одна $f \in \Phi$ такая, что $|f(z)| > k$. Ясно, что O_k — открытое множество. Далее, поскольку

$$\sup_{f \in \Phi} |f(z)| < +\infty$$

для любого $z \in \Omega$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k = 0$. По теореме Бэра

по крайней мере одно из O_k не плотно в U . Поэтому U содержит открытое множество O_U , содержащееся в дополнении к O_k для некоторого k , и функции из Φ равномерно ограничены при $z \in O_U$ (при k). Если положим $\Omega' = \bigcup_U O_U$, то Ω' , очевидно, открыто и плотно

в Ω . Если $z \in \Omega'$, то z имеет окрестность, в которой Φ равномерно ограничено, так что Φ равномерно ограничено на любом компактном подмножестве Ω' (по лемме Бореля — Лебега).

§ 2. Области Рейнхардта и круговые области

1. Области Рейнхардта.

Определение. Область Рейнхардта есть открытое множество $\Omega \subset C^n$ такое, что из $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega$ следует, что $(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$ для всех действительных $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset C^n$ — связная область Рейнхардта, содержащая 0; допустим, что $f(z)$ голоморфна в Ω . Тогда $f(z)$ можно записать в таком виде:

$$f(z) = \sum_{m \in N^n} a_m z^m$$

на Ω , и ряд сходится нормально на Ω . Это разложение единственно.

Доказательство. Пусть Ω — множество таких $z \in \Omega$, которые имеют расстояние $> \varepsilon |z|$ ($|z|^2 = \sum |z_i|^2$) от границы Ω . Пусть $\Omega'_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ — связная компонента, содержащая 0. Тогда

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega'_\varepsilon = \Omega.$$

В самом деле, если $z \in \Omega$, то мы можем соединить z с 0 непрерывным путем в Ω . Этот путь имеет расстояние > 0 от границы Ω . Если ε достаточно мало, то путь лежит в Ω_ε и, значит, и в Ω'_ε . В частности, $z \in \Omega'_\varepsilon$.

Положим для $z \in \Omega'_\varepsilon$

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \dots \dots \dots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} dt_1 \dots dt_n.$$

Этот интеграл определен, так как если $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega'_\varepsilon$, то $((1 + \varepsilon)z_1, \dots, (1 + \varepsilon)z_n) \in \Omega$ и расстояние между этими двумя точками $\varepsilon |z|$. Отсюда, поскольку Ω есть область Рейнхардта, $(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Omega$ для всех (t_1, \dots, t_n) с $|t_j| = 1 + \varepsilon$. Дифференцирование под знаком интеграла показывает, что $g(z)$ голоморфна в Ω'_ε . Кроме того, если выберем поликруг $K \subset \Omega'_\varepsilon$ с центром 0 такой, что $(1 + \varepsilon)K \subset \Omega$, то для $z \in K$ $(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Omega$ для всех $|t_j| < 1 + \varepsilon$, так что по формуле Коши

$$g(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n), \quad z \in K.$$

Далее, если две функции, голоморфные на открытом связном множестве U , совпадают на некотором открытом множестве из U , то они совпадают и на

всем U . (См. принцип аналитического продолжения в § 3.) Отсюда

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \dots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} dt_1 \dots dt_n$$

на Ω'_ε . Далее,

$$\frac{1}{(t_1 - 1) \dots (t_n - 1)} = \frac{1}{t_1 \dots t_n} \sum_{m_1, \dots, m_n \in N^n} \frac{1}{t_1^{m_1}} \dots \frac{1}{t_n^{m_n}},$$

и этот ряд сходится нормально на $|t_j| = 1 + \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in N^n} \varPhi_{m_1 \dots m_n}(z),$$

где

$$\varPhi_{m_1 \dots m_n}(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \dots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{m_1+1} \dots t_n^{m_n+1}} dt_1 \dots dt_n.$$

Аналогично тому как мы доказывали, что $g(z) = f(z)$ в Ω'_ε , мы докажем, используя формулу (3) для производных голоморфной функции, что

$$\begin{aligned} \varPhi_{m_1 \dots m_n}(z) &= \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}} \Big|_{t_j=0} = \\ &= \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial_1^{m_1 + \dots + m_n} f(0)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}}. \end{aligned}$$

Из интегрального представления для \varPhi мы видим, что если z находится внутри компактного подмножества $K \subset \Omega$ и ε достаточно мало, то

$$|\varPhi_{m_1 \dots m_n}(z)| \leq \frac{M_K}{(1+\varepsilon)^{m_1} \dots (1+\varepsilon)^{m_n}},$$

где M_K зависит только от K , так что ряд сходится нормально в K . Разложение во всем Ω легко получается, если взять $\varepsilon \rightarrow 0$. Единственность очевидна.

2. Области сходимости степенных рядов. Пусть

$$\sum_{m \in N^n} a_m z^m$$

—данный степенной ряд. Область его сходимости D мы определим следующим образом: $z \in D$, если ряд сходится абсолютно в окрестности z . Очевидно, D открыто. Определим теперь множество B как множество тех z , для которых существует $C > 0$ такое, что $|a_m z^m| \leq C$ для всех $m \in N^n$. Очевидно, $D \subset \overset{\circ}{B}$ ($\overset{\circ}{B}$ — внутренность B). Но мы можем доказать, что $D = \overset{\circ}{B}$. Это является следствием следующей леммы:

Лемма Абеля. *Если $z = (z_1, \dots, z_n) \in B$, то $(a_1 z_1, \dots, a_n z_n) \in D$ при $|a_1| < 1, \dots, |a_n| < 1$, и ряд сходится нормально в D .*

Доказательство. Если $|a_m z^m| \leq C$, то общий член ряда $\sum_{m \in N^n} a_{m_1 \dots m_n} (a_1 z_1)^{m_1} \dots (a_n z_n)^{m_n}$ мажорируется выражением $C |a_1|^{m_1} \dots |a_n|^{m_n}$, откуда и следует требуемый результат.

Следствия леммы Абеля.

a) $D = \overset{\circ}{B}$. Это очевидно.

b) Рассматриваемый ряд представляет голоморфную функцию в D (см. § 1, предложение 2).

c) D — область Рейнхардта. Более того, если $(z_1, \dots, z_n) \in D$, то $(a_1 z_1, \dots, a_n z_n) \in D$, если $|a_1| \leq 1, \dots, |a_n| \leq 1$; таким образом, D — объединение поликругов (с центром 0).

Теперь мы приведем пример Хартогса области в C^2 такой, что каждая голоморфная в этой области функция может быть продолжена в большую область.

Пусть G — область, состоящая из точек z , удовлетворяющих условиям

$$|z_1| < \varepsilon, \quad |z_2| < 1,$$

и точек, удовлетворяющих условиям

$$|z_1| < 1, \quad 1 - \varepsilon < |z_2| < 1.$$

На рис. 1 показана область изменения $|z_1|, |z_2|$.

По теореме 1 функция, голоморфная в G , может быть разложена в степенной ряд в G , а по лемме Абеля степенной ряд представляет нашу функцию

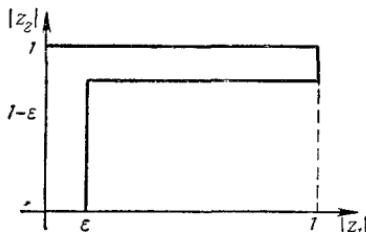


Рис. 1.

в открытом поликруге $|z_1| < 1, |z_2| < 1$.

Отметим еще следующий специальный случай:

Пусть Ω — открытое множество в C^n ($n > 1$) и a — точка из Ω . Пусть $f(z)$ голоморфна на $\Omega \setminus a$. Тогда $f(z)$ может

быть голоморфно продолжена на Ω . Следствие с) леммы Абеля показывает нам, что область сходимости степенного ряда есть область Рейнхардта; но не каждая область Рейнхардта, которая является объединением открытых поликругов, будет областью сходимости степенных рядов. Мы можем, однако, характеризовать области сходимости степенных рядов.

Пусть $D^* \subset R^n$ — множество, состоящее из точек $(\log|z_1|, \dots, \log|z_n|)$, где $(z_1, \dots, z_n) \in D$, т. е. D^* есть образ D при отображении $\varphi: C^n \rightarrow R^n$, определяемом равенством $\varphi(z_1, \dots, z_n) = (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|)$.

Пусть B^* — образ B при отображении φ (D и B — множества точек, определенные на стр. 15 и связанные со степенными рядами). Если $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in D^*$, то $(\rho_1 - t_1, \dots, \rho_n - t_n) \in D^*$ при $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$.

Имеет место следующий фундаментальный результат:

Теорема 2. D^* — выпуклое множество в R^n .

Доказательство. Поскольку $D = \overset{\circ}{B}$, $D^* = \overset{\circ}{B}^*$, то достаточно доказать, что B^* выпукло. Но $B^* = \bigcup_{C>0} B_C^*$, где B_C^* — образ при отображении φ множества точек

$z \in C^n$ таких, что $|a_m z^m| \leq C$ для всех $m \in N^n$. Поскольку $B_C^* \subset B_{C'}^*$, если $C < C'$, то достаточно доказать, что множество B_C^* выпукло. Далее, $B_C^* = \bigcap_{m \in N^n} B_{C,m}^*$, где $B_{C,m}^*$ — образ множества точек $z \in C^n$, $|a_m z^m| \leq C$, для фиксированного m при отображении φ . Таким образом, нам достаточно лишь доказать, что $B_{C,m}^*$ выпукло. Но $B_{C,m}^*$ является образом множества таких $z \in C^n$, для которых $|a_{m_1} \dots a_{m_n} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}| \leq C$, так что это — множество точек $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in R^n$ ($\rho_j = \log |z_j|$), для которых

$$\log |a_{m_1} \dots a_{m_n}| + m_1 \rho_1 + \dots + m_n \rho_n \leq \log C.$$

Будучи полупространством в R^n , это множество выпукло, что и доказывает теорему 2.

Например, рассмотрим ряд, сходящийся в области C^2 , состоящей из точек $|z_1| < 1, |z_2| < e$ и точек $|z_1| < e, |z_2| < 1$. Ее образ в плоскости $(|z_1|, |z_2|)$

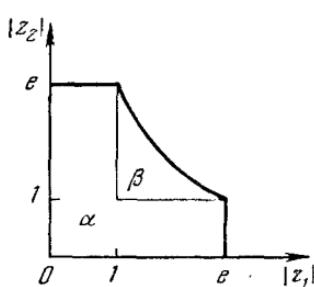


Рис. 2.

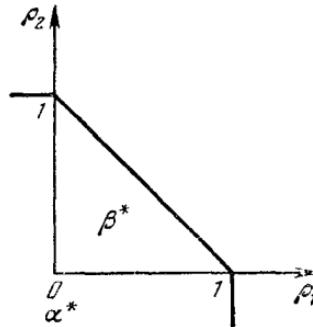


Рис. 3.

показан на рис. 2 (множество α). D^* содержит множество α^* (рис. 3). Так как D^* выпукло, то оно содержит и множество β^* (рис. 3), так что ряд сходится и в точках C^2 , которые отображением $\varphi: z \rightarrow (\log |z_1|, \log |z_2|)$ переводятся в множество β^* .

Теорема, обратная к теореме 2, также верна, то есть если область Рейнхардта, являющаяся

объединением поликругов, такова, что ее образ при отображении φ является выпуклым, то она будет (точной) областью сходимости степенного ряда. Мы докажем это позже (в § 7, стр. 43).

3. Круговые области. Рассмотрим теперь разложение голоморфных функций в ряды по однородным полиномам.

Определение. Открытое множество $\Omega \subset C^n$ называется *круговой областью*, если из $z \in \Omega$ следует $e^{i\theta}z \in \Omega$, т. е. $(e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_n) \in \Omega$ для всех действительных θ .

Теорема 3. Пусть Ω – связная круговая область и $0 \in \Omega$. Пусть $f(z)$ голоморфна в Ω . Тогда $f(z)$ может быть разложена в ряд по однородным полиномам

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \quad \text{в } \Omega$$

($P_k(z)$ – однородный полином степени k по z_1, \dots, z_n , сходящийся нормально на Ω . Это разложение единственное).

Доказательство. Определим Ω'_ε как в теореме 1, и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon} \frac{f(tz_1, \dots, tz_n)}{t-1} dt.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, выберем поликруг K вокруг начала такой, что $(1+\varepsilon)K \subset \Omega'_\varepsilon$, и тогда, если $z \in K$, то $(tz_1, \dots, tz_n) \in \Omega$ для $|t| \leq 1$, так что, в силу голоморфности нашего интеграла в Ω'_ε , мы получим по формуле Коши, что

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon} \frac{f(tz_1, \dots, tz_n)}{t-1} dt$$

на $\overset{\circ}{K}$ и, поскольку Ω'_ε связно, на Ω'_ε .

Так как

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^k}$$

и ряд сходится нормально при $|t| = 1 + \varepsilon$, то

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z),$$

где

$$P_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1+\varepsilon} \frac{f(tz_1, \dots, tz_n)}{t^{k+1}} dt.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, убеждимся, что ряд сходится нормально в Ω'_ε ; повторяя предыдущие рассуждения, найдем, что

$$\begin{aligned} P_k(z) &= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(tz_1, \dots, tz_n)}{dt^k} \right|_{t=0} = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{m_1 + \dots + m_n = k} \frac{\partial^k f(0)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 3 получается при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Легко видеть, что если $f(z)$ имеет разложение $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$, которое равномерно сходится в окрестности 0, то $P_k(z)$ имеет указанный выше вид. Это доказывает теорему 3.

Последняя теорема показывает, что если $f(z)$ голоморфна в круговой области Ω (связной и содержащей 0), то она может быть голоморфно продолжена в $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (t\Omega)$. Это доказывается так же, как и лемма Абеля.

§ 3. Комплексные аналитические многообразия

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство V^n называется *топологическим многообразием размерности n* ($n \geq 0$ — целое число), если оно имеет следующее свойство: каждая точка $a \in V^n$ имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству $\Omega \subset R^n$. (Заметим, что пространство, обладающее этим свойством, не будет автоматически хаусдорфовым.)

V^n называется *счетным в бесконечности*, если V^n есть объединение счетного числа компактных множеств.

Напомним теперь (без доказательств) следующие два предложения:

Предложение 1. Если V^n связно, то следующие три условия эквивалентны:

1. V^n счетно в бесконечности.

2. V^n паракомпактно (т. е. всякое открытое покрытие $(U_i)_{i \in I}$ допускает локально конечное утончение), а именно: существует другое открытое покрытие $(W_j)_{j \in J}$, каждое множество которого содержится хотя бы в одном U_i и такое, что каждая его точка имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом W_j .

3. V^n имеет счетную открытую базу.

Предложение 2 (теорема Пуанкаре – Вольтерра). Пусть V^n, W^n – два n -мерных многообразия таких, что: 1) V^n связно, 2) W^n счетно в бесконечности, 3) существует непрерывное отображение $\varphi: V^n \rightarrow W^n$, являющееся локальным гомеоморфизмом (т. е. всякое $a \in V^n$ имеет открытую окрестность, которая гомеоморфно отображается на открытое множество $\subset W^n$).

Тогда V^n счетно в бесконечности.

1. Дифференцируемые многообразия. Пусть V^n – топологическое многообразие размерности n . Под (бесконечно) дифференцируемой или C^∞ -структурой на V^n понимают семейство $\{O_i\}_{i \in I}$ открытых множеств $\subset V^n$, которые покрывают V^n , и отображений $\{f_i\}_{i \in I}$ таких, что f_i отображает O_i гомеоморфно на открытое множество $\tilde{O}_i \subset R^n$, причем отображения $f_i \circ f_j^{-1}$ и $f_j \circ f_i^{-1}$ суть C^∞ -отображения $f_j(O_i \cap O_j)$ и $f_i(O_i \cap O_j)$ соответственно на $f_i(O_i \cap O_j)$ и $f_j(O_i \cap O_j)$, т. е. отображение $f_i(O_i \cap O_j) \leftrightarrow f_j(O_i \cap O_j)$ есть C^∞ .

(Заметим, что может случиться, что на многообразии V^n определена более чем одна дифференцируемая структура, так что C^∞ -многообразие является

не просто топологическим многообразием, а топологическим многообразием, снабженным дополнительной структурой.)

Если $\{O'_k, f'_k\}$ также определяет C^∞ -структурю на V^n , то мы говорим, что оно определяет ту же структуру, что и $\{O_i, f_i\}$, тогда (и только тогда), когда соответствие $f_i(O_i \cap O'_k) \leftrightarrow f'_k(O_i \cap O'_k)$ является C^∞ .

Если пересечение $O_i \cap O_j$ или $O_i \cap O'_k$ пусто, то считаем условие выполненным. Такое же соглашение примем относительно отображений $O_i \cap O_j$ или $O_i \cap O'_k$.

Если φ — отображение V в W , где V, W — C^∞ -многообразия (не обязательно одного и того же измерения) с C^∞ -структурами $\{O_i, f_i\}$ и $\{O'_j, f'_j\}$, то будем говорить, что φ есть *дифференцируемое или C^∞ -отображение*, если $f'_j \circ \varphi \circ f_i^{-1}$ суть C^∞ -отображения $f_i(O_i \cap \varphi^{-1}(O'_j))$.

Если V и W имеют одно и то же измерение, то будем говорить, что φ — *диффеоморфизм*, если φ — гомеоморфизм V на W и φ и φ^{-1} дифференцируемы.

2. Система локальных координат.

Определение. Пусть V есть C^∞ -многообразие и $a \in V$. Если (X_1, \dots, X_n) — система функций с действительными значениями в открытой окрестности W точки a такая, что отображение $\varphi: W \rightarrow R^n$, определенное равенством $\varphi(b) = (X_1(b), \dots, X_n(b))$, для любого $b \in W$ является диффеоморфизмом, то (X_1, \dots, X_n) будет называться *системой локальных координат в a* .

Если Y_1, \dots, Y_n — функции в окрестности a , то они образуют систему локальных координат в a в том и только в том случае, если якобиан

$$\frac{\partial(Y_1, \dots, Y_n)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}$$

не равен нулю в точке a . Доказательство легко следует из теоремы о неявных функциях.

3. Комплексные аналитические многообразия.

Определение. Пусть Ω, Ω' — два открытых множества в C^n , а f_1, \dots, f_n — комплекснозначные

функции на Ω . Мы говорим, что $f = (f_1, \dots, f_n)$ — *аналитический изоморфизм* Ω на Ω' , если отображение $f = (f_1, \dots, f_n): \Omega \rightarrow C^n$ является диффеоморфизмом Ω на Ω' функций f_1, \dots, f_n голоморфны в Ω .

Композиция аналитических изоморфизмов является аналитическим изоморфизмом. Обратное аналитическому изоморфизму преобразование — также аналитический изоморфизм. Это можно установить следующим образом.

Пусть (f_1, \dots, f_n) — n голоморфных функций от переменных z_1, \dots, z_n и

$$J = \det \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_1} \right),$$

$f_k = f_k^{(1)} + i f_k^{(2)}$, $z_k = x_k + iy_k$. Тогда детерминант

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

где

$$A = \left(\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial x_1} \right), \quad B = \left(\frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial x_1} \right), \quad C = \left(\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial y_1} \right), \quad D = \left(\frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial y_1} \right),$$

равен

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix},$$

где

$$A_1 = \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_1} \right), \quad B_1 = \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1} \right), \quad C_1 = \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1} \right), \quad D_1 = \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1} \right).$$

В силу уравнений Коши — Римана это выражение равно $|J|^2$, так что, поскольку $(f_1, \dots, f_n) = f$ — диффеоморфизм, имеем $J \neq 0$. Теперь легко вычислить $\frac{\partial z}{\partial f_k}$ и показать, что она равна 0, что и доказывает утверждение.

Определение. Пусть V — топологическое многообразие размерности $2n$. Мы будем отождествлять R^{2n} с C^n . Система $(O_i, f_i)_{i \in I}$, где $\{O_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие V и f_i — отображение $f_i: O_i \rightarrow \tilde{O}_i \subset C^n$, называется определяющей комплексную аналитическую структурой, если отображение $f_i \circ f_j^{-1}$ определяет

аналитический изоморфизм $f_j(O_i \cap O_j)$ на $f_i(O_i \cap O_j)$, т. е. соответствие

$$f_i(O_i \cap O_j) \leftrightarrow f_j(O_i \cap O_j)$$

есть аналитический изоморфизм для любых $i, j \in I$.

Две системы $\{O_i, f_i\}$, $\{O'_k, f'_k\}$ определяют одну и ту же комплексную структуру, если соответствие $f_i(O_i \cap O'_k) \leftrightarrow f'_k(O_i \cap O'_k)$ есть аналитический изоморфизм для любых i, k .

Мы называем V комплексным аналитическим многообразием (комплексной) размерности n .

Определение. Пусть V^n, W^n — два комплексных аналитических многообразия со структурами $\{O_i, f_i\}, \{O'_j, f'_j\}$ и ϕ — отображение $V^n \rightarrow W^n$. ϕ называется аналитическим отображением, если отображения $f'_j \circ \phi \circ f_i^{-1}$ являются аналитическими отображениями \tilde{O}_i в C^n , т. е. если компонентные функции голоморфны на \tilde{O}_i . ϕ называется аналитическим изоморфизмом V^n на W^n , если это — аналитическое отображение и, сверх того, диффеоморфизм.

4. Локальные координаты. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие. Система n комплекснозначных функций (z_1, \dots, z_n) в окрестности точки $a \in V$ называется системой локальных координат в a , если существует открытое множество W , $a \in W$, такое, что отображение $\phi: W \rightarrow \tilde{W} \subset C^n$, определяемое отображением $b \mapsto (z_1(b), \dots, z_n(b))$, есть аналитический изоморфизм. n голоморфных функций t_1, \dots, t_n (т. е. аналитических отображений в C^1) в окрестности a образуют систему локальных координат тогда и только тогда, когда детерминант

$$J = \det \left[\frac{\partial t_k}{\partial z_i} \right]_a \neq 0.$$

Это следует из того факта, что якобиан от $\operatorname{Re} t_i$, $\operatorname{Im} t_j$, выраженный в терминах $\operatorname{Re} z_i$, $\operatorname{Im} z_j$, равен $|J|^2 \neq 0$, и из замечания об обратном к аналитическому изоморфизму.

Встает вопрос о том, какие теоремы о голоморфных функциях в открытом множестве $\Omega \subset C^n$ могут быть обобщены на голоморфные функции на комплексном аналитическом многообразии V . Следующие теоремы и их доказательства допускают такое обобщение:

1. \mathcal{H}_V замкнуто в \mathcal{C}_V (обозначения очевидны).

2. Замкнутое ограниченное множество Φ в \mathcal{H}_V компактно. Диагональный процесс не проходит, если V не является счетным в бесконечности, но легко доказать, что каждый ультрафильтр в Φ сходится, рассматривая для любого компакта $K \subset V$ сужения на K функций элементов ультрафильтра.

3. Если $\Phi \subset \mathcal{H}_V$ (или \mathcal{C}_V) и $\sup_{f \in \Phi} |f(a)| < +\infty$ для любого $a \in V$, то существует открытое множество $V' \subset V$, плотное в V , такое, что $\Phi_{V'}$ (множество сужений на V' функций Φ) есть ограниченное множество в $\mathcal{H}_{V'}$ (соответственно $\mathcal{C}_{V'}$).

Это — следствие теоремы Бэра (см. § 1, предложение 4), которая верна для открытых подмножеств локально компактных пространств или полных метрических пространств (всякое многообразие локально компактно).

Иногда представляет интерес применить теорему Бэра к \mathcal{H}_V , но тогда необходимо предположить, что V счетно в бесконечности, если рассматривается случай, когда \mathcal{H}_V — пространство Фреше и, таким образом, является полным метрическим пространством.

5. Принцип аналитического продолжения. Пусть V — связное, а W — произвольное комплексное аналитическое многообразие, и пусть f_1, f_2 — два аналитических отображения V в W . Пусть $(O_i, \varphi_i), (O'_j, \varphi'_j)$ определяют структуры соответственно на V, W .

Пусть $a \in O_i, f_1(a) = f_2(a) \in O'_j$. Мы будем говорить, что f_1 и f_2 имеют одни и те же производные в a , если компоненты отображений $\varphi'_j \circ f_1 \circ \varphi_i^{-1}$ и $\varphi'_j \circ f_2 \circ \varphi_i^{-1}$ имеют одни и те же производные (всех

порядков) в точке $\varphi_i(a)$. Это определение не зависит от O_i , O'_i , содержащих соответственно a и $f_1(a)$, и от систем, вводимых для определения аналитических структур.

Имеет место следующая теорема:

Теорема.

1. (Сильный принцип аналитического продолжения.) *Если f_1 , f_2 и все их производные совпадают в точке $a \in V$, то $f_1 = f_2$ всюду в V .*

2. (Слабый принцип аналитического продолжения.) *Если $f_1 = f_2$ в открытом множестве, содержащемся в V , то $f_1 = f_2$ всюду в V .*

Доказательство. Слабый принцип непосредственно следует из сильного принципа, так что достаточно доказать последний.

Пусть E – множество точек, в которых f_1 , f_2 и все их производные совпадают. Ясно, что E замкнуто. Допустим, что $b \in E$. Тогда все компоненты функций $\Phi'_k \circ f_1 \circ \Phi_1^{-1}$ и $\Phi'_k \circ f_2 \circ \Phi_1^{-1}$ ($b \in O_1$, $f_1(b) = f_2(b) \in O'_k$) и все их производные совпадают в точке $\varphi_1(b)$. Разлагая их в степенной ряд в окрестности $\varphi_1(b)$, находим, что эти компоненты и их производные совпадают в окрестности $\varphi_1(b)$; находим, что E открыто. Так как $a \in E$ и V связано, то $E = V$, и теорема доказана.

§ 4. Аналитическое продолжение

1. Все многообразия, рассматриваемые в этом и следующем параграфе предполагаются связными.

Определение. Пусть V , W – два комплексных аналитических многообразия комплексной размерности n и φ – отображение $V \rightarrow W$. Мы будем говорить, что φ – локальный аналитический изоморфизм, если каждая точка $a \in V$ имеет открытую окрестность O такую, что сужение φ на O есть аналитический изоморфизм.

Мы говорим, что V растянуто в W и что φ растягивает V в W , если φ – локальный изоморфизм V в W .

Можно определить продолжение голоморфной на V функции f на многообразие W , в котором V растянуто отображением φ , говоря, что g является продолжением f на W , если $f = g \circ \varphi$. Если такая g существует, то она единственна, ибо из соотношения $g' \circ \varphi = f = g \circ \varphi$ следует, что $g = g'$ в некотором открытом подмножестве W , так как φ — локальный гомеоморфизм. В силу связности W $g = g'$ на W .

При м е р ы.

1. V — открытое множество $\subset W$, φ — отображение включения $\varphi(a) = a$ для любого $a \in V$. Функции V , которые могут быть продолжены в W , совпадают с сужениями на V голоморфизма функции W .

2. V — накрывающее пространство W и φ — естественная проекция. Функции на V , которые можно продолжить на W , — это те функции, которые имеют одно и то же значение во всех точках, лежащих над данной точкой W .

Однако такое обобщение продолжения оказывается слишком общим, чтобы быть полезным. Чтобы получить интересные теоремы, необходимо сузить определение, и мы вводим следующее

Определение. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, φ — отображение, растягивающее V в C^n (необходимое и достаточное условия для существования такого φ — наличие n глобальных функций на V , которые образуют систему локальных координат в каждой точке V). Пусть (V', φ') — другая такая пара; φ' растягивает V' в C^n . Допустим также, что существует отображение $\psi: V \rightarrow V'$, растягивающее V в V' , такое, что

$$\varphi = \varphi' \circ \psi \quad (\varphi, \varphi', \psi)$$

предполагаются заданными. Пусть f — голоморфная функция на V . Будем говорить, что f' является продолжением f с V на V' , если f' — голоморфная функция на V' такая, что $f = f' \circ \psi$.

2. Максимальное продолжение. Пусть (V, φ) — пара, состоящая из (n -мерного) комплексного аналитического многообразия V и растяжения φ V в C^n . Пусть f — голоморфная функция на V . Допустим,

что существует другая пара $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$ со следующими свойствами:

1. f может быть продолжена до $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$, т. е. существует голоморфная функция \tilde{f} на \tilde{V} и растяжение $\tilde{\Phi}$ V в \tilde{V} такое, что $f = \tilde{f} \circ \psi$, $\phi = \tilde{\Phi} \circ \tilde{\psi}$.

2. Если f' — продолжение f до пары (V', ϕ') и ψ — растяжение V в V' такое, что $f = f' \circ \psi$, $\phi = \phi' \circ \psi$, то существует растяжение χ V' в \tilde{V} такое, что $f' = \tilde{f} \circ \chi$ и что отображение $\tilde{\Phi}: V \rightarrow \tilde{V}$ факторизуется в виде $\tilde{\Phi} = \chi \circ \psi$. Тогда мы можем показать, что имеет место соотношение $\phi' = \tilde{\Phi} \circ \chi$, и мы будем называть $(\tilde{V}, \tilde{\phi}, \tilde{\Phi}, \tilde{f})$ *максимальным продолжением* (V, ϕ, f) .

Для рассмотрения проблемы существования и единственности максимального продолжения нам нужно будет ввести так называемый *пучок ростков голоморфных функций*.

Пусть W — комплексное аналитическое многообразие (комплексной размерности n). Пусть $a \in W$. Рассмотрим множество всех функций, голоморфных в открытых множествах, содержащих точку a . Введем соотношение эквивалентности в этом множестве функций, идентифицируя две функции f и g , если $f = g$ в некоторой окрестности a . Классы эквивалентности называются *ростками голоморфных функций* в a . Через f_a будем обозначать росток в a . Ясно, что обозначение $f_a(a)$ имеет однозначный смысл.

Обозначим через \mathfrak{O}_a множество ростков в a . Пучок ростков голоморфных функций на W определяется как

$$\underline{\mathfrak{O}}_W = \underline{\mathfrak{O}} = \bigcup_{a \in W} \mathfrak{O}_a.$$

Комплексная аналитическая структура на $\underline{\mathfrak{O}}$ может быть введена следующим образом.

Пусть $a \in W$ и $(a, f_a) \in \mathfrak{O}_a$. f_a определяется голоморфной функцией f в окрестности U точки a . Также для каждого $b \in U$ f определяет росток f_b в b . Мы определим $\bigcup_{b \in U} (b, f_b)$ как окрестность (a, f_a) . Легко проверить, что это определяет топологию в $\underline{\mathfrak{O}}$.

Предложение. $\underline{\Omega}$ — хаусдорфово пространство.

Доказательство. Пусть $(a, f_a) \neq (b, g_b)$ — две точки из $\underline{\Omega}$.

Если $a \neq b$, то выберем окрестности U_a, V_b точек a, b в W так, что f_a определяется функцией f в U_a , g_b определяется функцией g в V_b и $U_a \cap V_b = \emptyset$. Тогда $\bigcup_{c \in U_a} (c, f_c)$ и $\bigcup_{d \in V_b} (a, g_d)$ — непересекающиеся окрестности (a, f_a) и (b, g_b) в $\underline{\Omega}$.

Если $a = b$, то $f_a \neq g_a$. Пусть U — связная окрестность a в W такая, что f_a, g_a определены голоморфными функциями f, g в U . Тогда окрестности $\bigcup_{c \in U} (c, f_c), \bigcup_{c \in U} (c, g_c)$ точек (a, f_a) и (a, g_a) не пересекаются, потому что из $(c, f_c) = (c, g_c)$ следовало бы совпадение f, g в окрестности c и, так как U связно, мы имели бы $f = g$ в U , так что $f_a = g_a$, что неверно.

Пусть p — проекция $\underline{\Omega} \rightarrow W$, определенная как $p(a, f_a) = a$. Это — отображение $\underline{\Omega}$ на W . Это — локальный гомеоморфизм, как следует из определения топологии на $\underline{\Omega}$. Теперь ясно, как употребить p для перенесения комплексной аналитической структуры с W на $\underline{\Omega}$.

Пусть V — n -мерное комплексное аналитическое многообразие, φ — растяжение V в C^n . Пусть Ω — пучок ростков голоморфных функций в C^n . Пусть f — голоморфная функция на V . Пусть $a \in V$ и U — окрестность a такая, что сужение φ на U есть аналитический изоморфизм. Тогда голоморфная функция $f \circ \varphi^{-1}$ на $\varphi(U)$ определяет в Ω росток, именно $(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)}$. Определим отображение $\tilde{\Phi}: V \rightarrow \tilde{\Omega}$, полагая $\tilde{\Phi}(a) = \varphi(a)$, $((f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)}) \equiv \tilde{\Omega}$. $\tilde{\Phi}$ — локальный аналитический изоморфизм, который растягивает (V, φ) в $\tilde{\Omega}$.

Пусть \tilde{V} — связная компонента $\tilde{\Phi}(V)$ в $\tilde{\Omega}$; определим $\tilde{\Phi}$ как сужение на \tilde{V} проекции $p: \tilde{\Omega} \rightarrow C^n$ и определим $\tilde{f}(b, g_b) = g_b$ для $(b, g_b) \in \tilde{V}$. Ясно, что $\varphi = \tilde{\Phi} \circ \tilde{\psi}$ и $f = \tilde{f} \circ \tilde{\psi}$. Отсюда $(\tilde{V}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{f})$ есть продол-

жение (V, φ, f) . Мы утверждаем, что это — максимальное продолжение.

Предположим, что (V', φ', f') — какое-либо продолжение (V, φ, f) . Пусть ψ — локальный аналитический изоморфизм $V \rightarrow V'$ такой, что $f = f' \circ \psi$, $\varphi = \varphi' \circ \psi$. Мы можем применить ранее употребленное рассуждение, чтобы продолжить (V', φ', f') на $(\tilde{V}', \tilde{\varphi}', \tilde{f}')$. Точка $\psi(a) \in V'$ ($a \in V$) отображается на $(\varphi'(\psi(a)), (f' \circ \varphi'^{-1})_{\varphi'(\psi(a))})$; эта точка совпадает с $(\varphi(a), (f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)})$. Таким образом, образы V и V' имеют общую точку в $\bar{\mathbb{D}}$, и по определению \tilde{V} , \tilde{V}' имеем $\tilde{V} = \tilde{V}'$. Отсюда легко следует, что $(\tilde{V}', \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{f})$ максимально.

Если теперь $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{f})$ и $(\tilde{V}', \tilde{\varphi}', \tilde{f}')$ — два максимальных продолжения (V, φ, f) , а $\tilde{\psi}: V \rightarrow \tilde{V}$ и $\tilde{\psi}': V \rightarrow \tilde{V}'$ — два соответствующих растяжения V в \tilde{V} и \tilde{V}' , то существует растяжение $\chi: \tilde{V}$ в \tilde{V}' такое, что $\tilde{f} = \tilde{f}' \circ \chi$, $\tilde{\psi}' = \chi \circ \tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}' \circ \chi$. Рассматривая такое же растяжение $\chi_1: \tilde{V}'$ в \tilde{V} , легко показать, что χ — аналитический изоморфизм. Отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, φ — растяжение V в C^n . Пусть f — голоморфная функция на V . Тогда существует максимальное продолжение $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{f})$ тройки (V, φ, f) . Если $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{f})$ и $(\tilde{V}', \tilde{\varphi}', \tilde{\psi}', \tilde{f}')$ — два максимальных продолжения, то существует аналитический изоморфизм $\chi: V \rightarrow V'$ такой, что $\tilde{f} = \tilde{f}' \circ \chi$, $\tilde{\psi}' = \chi \circ \tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}' \circ \chi$.

§ 5. Оболочки голоморфности

Пусть V — комплексное аналитическое многообразие (комплексной) размерности n и φ — растяжение V в C^n . Пусть $F = (f_i)_{i \in I}$ — подмножество множества всех голоморфных функций на V . Мы будем говорить, что $(V, \varphi, f_i)_{i \in I}$ продолжимо до $(V', \varphi', \psi, (f'_i)_{i \in I})$, если существуют комплексное аналитическое много-

образие V' , растяжение φ' V' в C^n , система $(f'_i)_{i \in I}$ голоморфных функций f'_i на V' и локальный изоморфизм ψ V в V' такие, что $\varphi = \varphi' \circ \psi$ и $f_i = f'_i \circ \psi$ для $i \in I$. Такой процесс называется *одновременным продолжением* $(f_i)_{i \in I}$ на (V', φ') с (V, φ) . *Максимальное продолжение* $(f_i)_{i \in I}$ есть продолжение $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, (\tilde{f}_i)_{i \in I})$ такое, что если $(V', \varphi', \psi', (f'_i)_{i \in I})$ — любое продолжение $(V, \varphi, (f_i)_{i \in I})$, то существует локальный изоморфизм $\chi: V' \rightarrow \tilde{V}$ такой, что для всех $i \in I$ $f'_i = \tilde{f}_i \circ \chi$ и $\tilde{\psi} = \chi \circ \psi'$. Отсюда следует, что $\varphi' = \tilde{\varphi} \circ \chi$.

Мы можем доказать существование и единственность максимального (одновременного) продолжения данной системы $(V, \varphi, (f_i)_{i \in I})$ способом, похожим на доказательство теоремы в § 4.

Рассмотрим открытую окрестность U точки $a \in C^n$. Пусть $(g_i)_{i \in I}$ — семейство голоморфных функций в U (с индексом i из § 1). Пусть $(g'_i)_{i \in I}$ — другое такое семейство, определенное в окрестности U' точки a . Отождествим $(g_i)_{i \in I}$ и $(g'_i)_{i \in I}$, если существует окрестность W точки a , $W \subset U \cap U'$, такая, что $g_i = g'_i$ в W для любого $i \in I$.

Обозначим через $(g_i)_a$ класс эквивалентности (отношение эквивалентности определяется описанным выше отождествлением) множества всех семейств $(g_i)_{i \in I}$ голоморфных функций таких, что все функции одного семейства определены в фиксированной окрестности a . Множество всех $(g_i)_a$ обозначим \mathfrak{O}_{Ia} . Пусть $\underline{\mathfrak{O}}_I = \bigcup_{a \in C^n} \mathfrak{O}_{Ia}$. Тогда $\underline{\mathfrak{O}}_I$ — пучок. На $\underline{\mathfrak{O}}_I$ топология определяется так же, как и раньше: если $(a, (g_i)_a) \in \underline{\mathfrak{O}}_I$ и U — окрестность a , $(g_i)_{i \in I}$ — семейство функций, голоморфных в U , определяющих $(g_i)_a$, то

$U = \bigcup_{b \in U} (b, (g_i)_b)$ ($(g_i)_b$ — класс эквивалентности опре-

делений $(g_i)_{i \in I}$ в точке b) — открытая окрестность $(a, (g_i)_a)$. Точно так же, как в § 4, снабжаем Ω_I комплексной аналитической структурой и определяем отображение $\psi : (V, \varphi)$ на Ω_I : $\psi(a) = (\varphi(a), (f_i \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)})$ и показываем, что это дает нам максимальное продолжение. Единственность доказывается тем же путем, что и в § 4.

Наиболее важен случай, когда (f_i) состоит из *всех* голоморфных функций на V . В этом случае максимальное продолжение $(\tilde{V}, \varphi, \tilde{\varphi})$ называется *оболочкой голоморфности* (V, φ) .

Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, φ_1, φ_2 — два локальных аналитических изоморфизма V в C^n . Пусть $F = (f_i)_{i \in I}$ — семейство голоморфных функций на V . Пусть $(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{f}_{1i})$, $(\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{f}_{2i})$ — максимальные продолжения соответственно (V, φ_1, f_i) и (V, φ_2, f_i) . Два продолжения называются *изоморфными*, если существует аналитический изоморфизм $\chi : \tilde{V}_1$ на \tilde{V}_2 такой, что $\tilde{\varphi}_2 = \chi \circ \tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{f}_{1i} = \tilde{f}_{2i} \circ \chi$ для всех $i \in I$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $F = (f_i)_{i \in I}$ состоит из всех функций, голоморфных на комплексном аналитическом многообразии V . Пусть φ_1 и φ_2 — два отображения, растягивающие V в C^n . Пусть $(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1)$, $(\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2)$ — две оболочки голоморфности (V, φ_1) и (V, φ_2) соответственно. Тогда $(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1)$ и $(\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2)$ изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим компоненты отображения $\varphi_2: V \rightarrow C^n$. Они — голоморфные функции на V и потому продолжимы на \tilde{V}_1 , что дает нам отображение $\varphi'_2: \tilde{V}_1 \rightarrow C^n$ такое, что $\varphi_2 = \varphi'_2 \circ \tilde{\varphi}_1$. Пусть J — якобиан φ_2 по отношению к локальным координатам, определенным φ_1 . Тогда J — голоморфная функция на V , и, так как φ_2 — локальный изоморфизм, $J \neq 0$, так что $1/J$ голоморфно на V . Поэтому $1/J$ (соответственно J) имеет продолжение $(\widetilde{1/J})_1$ (соответственно \widetilde{J}_1) на \tilde{V}_1 . Ясно, что имеет место

равенство $(\widetilde{1/J})_1 \times \tilde{J} = 1$ на образе V при отображении $\tilde{\Phi}_1$ в \tilde{V}_1 , и, так как \tilde{V}_1 связно, $(\widetilde{1/J})_1 \times \tilde{J}_1 = 1$ всюду на \tilde{V}_1 , так что $\tilde{J}_1 \neq 0$ всюду на \tilde{V}_1 . Далее, \tilde{J}_1 есть якобиан φ'_1 по отношению к локальным координатам, определенным Φ_1 , так что φ'_1 есть локальный аналитический изоморфизм и растягивает \tilde{V}_1 в C^n . Ситуация поясняется диаграммой на рис. 4.

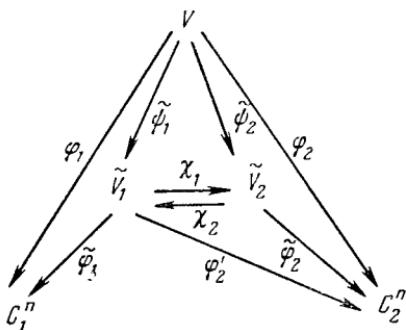


Рис. 4.

Поскольку $(\tilde{V}_2, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_2)$ максимально, существует локальный аналитический изоморфизм $\chi_1: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$ такой, что $\tilde{\Phi}_2 = \chi_1 \circ \tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{f}_{1i} = \tilde{f}_{2i} \circ \chi_1$. Таким же путем доказываем, что существует локальный аналитический изоморфизм $\chi_2: \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{V}_1$ такой, что

$\tilde{\Phi}_1 = \chi_2 \circ \tilde{\Phi}_2$. Отсюда следует, что $\tilde{\Phi}_2 = \chi_1 \circ \chi_2 \circ \tilde{\Phi}_1$, так что $\chi_1 \circ \chi_2 = I_{\tilde{V}_2}$ (тождественное отображение \tilde{V}_2) на образе V при отображении $\tilde{\Phi}_2$ в \tilde{V}_2 и, следовательно, по принципу аналитического продолжения, — на всем \tilde{V}_2 . Аналогично этому $\chi_2 \circ \chi_1 = I_{\tilde{V}_1}$ на \tilde{V}_1 , так что χ_1 — аналитический изоморфизм \tilde{V}_1 на \tilde{V}_2 . Так как $\tilde{\Phi}_2 = \chi_1 \circ \tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{f}_{1i} = \tilde{f}_{2i} \circ \chi_1$, то это доказывает теорему.

Мы можем доказать также следующую теорему:

Теорема 2. Пусть V, V' — комплексные аналитические многообразия, и пусть φ, φ' растягивают V, V' в C^n . Пусть g растягивает V в V' (не требуется, чтобы $\varphi = \varphi' \circ g$). Пусть $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), (\tilde{V}', \tilde{\varphi}', \tilde{\psi}')$ — оболочки голоморфности $(V, \varphi), (V', \varphi')$. Тогда существует локальный аналитический изоморфизм $\tilde{g}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ такой, что диаграмма рис. 5 коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму на рис. 6. V растянуто в C^n отображением $\varphi' \circ g$. По

теореме 1 в силу максимальности \tilde{V} имеется локальный аналитический изоморфизм $\tilde{\phi}: \tilde{V} \rightarrow C^n$ такой, что $\phi' \circ g = \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$. Также \tilde{V}' есть максимальное продолжение для функций на V' , индуцированных функциями g на V' , так, что, поскольку \tilde{V} максимально для всех функций на V , то \tilde{V}' — «промежуточное» между V и V' и существует растяжение $\tilde{g}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ в V' с требуемыми свойствами.

Теорема имеет такое следствие:

Следствие. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие и σ — аналитический автоморфизм V . Пусть V растягивается в C^n отображением ϕ и $(\tilde{V}, \tilde{\phi}, \tilde{\Phi})$ — оболочка голоморфности (V, ϕ) .

Тогда существует аналитический автоморфизм $\tilde{\sigma}$ \tilde{V} такой, что диаграмма на рис. 7 коммутативна.

Определение 1. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, ϕ — растяжение V в C^n . Пусть

$(\tilde{V}, \tilde{\phi}, \tilde{\Phi})$ — оболочка голоморфности (V, ϕ) . (V, ϕ) называется обла-

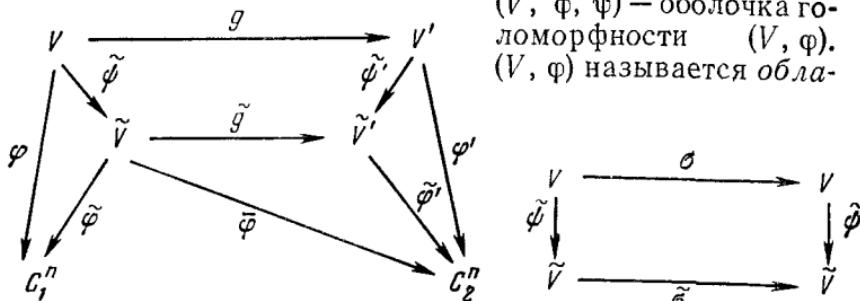


Рис. 6.

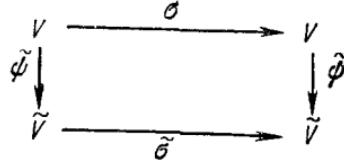


Рис. 7.

стью голоморфности, если $\tilde{\Phi}$ — аналитический изоморфизм V на \tilde{V} .

Заметим, что по этому определению (V, ϕ) не называется областью голоморфности, если V и \tilde{V} изоморфны, а только в том случае, если $\tilde{\Phi}$ — изоморфизм.

Тем не менее теорема 1 показывает, что если V — комплексное аналитическое многообразие, φ_1, φ_2 — два отображения, растягивающие V в C^n , то (V, φ_1) является областью голоморфности тогда и только тогда, когда (V, φ_2) является ею.

Ибо если $(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\Phi}_1), (\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\Phi}_2)$ — оболочки голоморфности (V, φ_1) и (V, φ_2) , то существует аналитический изоморфизм $\chi: \tilde{V}_1$ на \tilde{V}_2 такой, что $\tilde{\Phi}_2 = \chi \circ \tilde{\Phi}_1$, и $\tilde{\varphi}_1$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}_2$ — изоморфизм. Это оправдывает следующее определение:

Определение 2. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, которое может быть растянуто в C^n . Тогда V называется *областью голоморфности*, если для какого-либо растяжения φ V в C^n (V, φ) — область голоморфности.

Теорема 1, вообще говоря, неверна, если вместо рассмотрения семейства всех голоморфных функций на V мы рассмотрим лишь подсемейство. Предлагается следующий противоречащий пример.

Пусть Γ — комплексная ξ -плоскость, C — комплексная e^z -плоскость. Растянем Γ в C двумя отображениями: $\varphi_1(\xi) = \xi$ и $\varphi_2(\xi) = e^\xi$ соответственно. Пусть $f(\xi) = e^\xi$. Максимальное продолжение (Γ, φ_1, f) есть (C, \tilde{f}_1) , где $\tilde{f}_1(z) = e^z$. Так как Γ — универсальная накрывающая поверхность $C^* = C \setminus \{0\}$ при проекции $\varphi_2(\xi)$ (которая, естественно, придает одно значение всем точкам, лежащим над одной точкой из C^*) и f , как отображение $\Gamma \rightarrow C$, совпадает с φ_2 , то максимальное продолжение (Γ, φ_2, f) есть (C, \tilde{f}_2) , где $\tilde{f}_2(z) = z$. Но (например, потому, что z имеет нуль, а e^z не имеет нулей) не существует изоморфизма C , переводящего z в e^z .

§ 6. Области голоморфности. Теория выпуклости

Важной проблемой является нахождение необходимых и достаточных условий, при которых многообразие, которое можно растянуть в C^n , является областью голоморфности. Результаты, излагаемые

ниже, принадлежат А. Картану и Туллену [2] *) (см. также [1]).

$S(z, r)$ будет обозначать открытый поликруг в C^n с центром z и радиусом r , т. е. множество точек $z' \in C^n$, для которых

$$|z'_j - z_j| < r, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 1. Пусть V — комплексное многообразие, растянутое в C^n отображением φ . Пусть $z \in V$. Поликругом $S(z, r) \subset V$ с центром z и радиусом r будем называть содержащее z открытое множество O (если оно существует) такое, что сужение φ на O есть аналитический изоморфизм O на $S(\varphi(z), r) \subset C^n$.

Расстоянием $d(z)$ точки $z \in V$ от границы V называется радиус максимального поликруга $S(z, r) \subset V$; расстояние $d(K)$ компактного множества K от границы V есть $\inf_{z \in K} d(z)$. Числа $d(z)$ и $d(K)$, разумеется, зависят от φ .

Определение 2. Пусть K — компактное подмножество комплексного многообразия V , \mathcal{L} — семейство голоморфных функций на V . \mathcal{L} — оболочка K , $\hat{K}_{\mathcal{L}}$ есть множество точек $z \in V$, для которых существует $C_z > 0$ такое, что

$$|f(z)| \leq C_z \|f\|_K$$

при всех $f \in \mathcal{L}$ ($\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$, см. стр. 7).

Примеры.

1. Пусть $V = C$ — комплексная плоскость, \mathcal{L} — семейство полиномов. Если K — компактное множество $\subset C$, а L — объединение относительно компактных компонент дополнения K (относительно компактного в C), то можно показать, что $\hat{K}_{\mathcal{L}} = K \cup L$. С другой стороны, если мы рассмотрим $C^* = C - \{0\}$ и в качестве K возьмем кольцо, охватывающее 0, а в качестве \mathcal{L} — множество всех функций, голоморфных в C^* , то $\hat{K}_{\mathcal{L}} = K$.

2. Пусть в $V = C^2$ K — замыкание области из примера на стр. 15:

$$|z_1| \leq 1, |z_2| \leq e, 1 - e \leq |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1;$$

*) Библиография ко всем главам помещена в конце книги.

пусть \mathcal{L} — семейство всех полиномов (или всех голоморфных функций) на C^2 , тогда $\hat{K}_{\mathcal{L}}$ — поликруг $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$.

3. Если \mathcal{L} на множестве V таково, что из $f \in \mathcal{L}$ следует $f^p \in \mathcal{L}$ для любых целых $p > 0$, то

$$\hat{K}_{\mathcal{L}} = \{z \in V \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \text{ для любых } f \in \mathcal{L}\}.$$

В самом деле, если множество точек, определенных выше, обозначим K_1 , то $K_1 \subset \hat{K}_{\mathcal{L}}$. Если $z \in \hat{K}_{\mathcal{L}}$, то

$$|f(z)|^p \leq c_z \|f\|_K, \quad |f(z)| \leq c_z^{1/p} \|f\|_K;$$

при $p \rightarrow \infty$ находим, что $z \in K_1$.

Пусть V — комплексное многообразие и ϕ — растяжение V в C^n . Пусть f — голоморфная функция на V и $z \in V$. Пусть U — открытая окрестность z такая, что $\phi|U$ — изоморфизм.

Тогда $\frac{\partial f(z)}{\partial z_i}$ определяется как $\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})(\phi(z))}{\partial z_i}$; здесь ϕ^{-1} — обратное преобразование к $\phi|U$.

Теорема 1. Пусть V — комплексное многообразие, и пусть ϕ растягивает V в C^n . Пусть \mathcal{L} — семейство голоморфных функций на V , устойчивое относительно дифференцирования, т. е. такое, что из $f \in \mathcal{L}$ следует $\frac{\partial f}{\partial z_i} \in \mathcal{L}$. Далее допустим, что каноническое отображение V на максимальное продолжение V есть изоморфизм.

Если K — произвольное компактное подмножество V , то расстояние K и $\hat{K}_{\mathcal{L}}$ от границы V одно и то же.

Доказательство. Так как V само максимально для \mathcal{L} , то достаточно доказать следующее:

Если $z \in \hat{K}_{\mathcal{L}}$ и $0 < \rho < d(K)$, то каждая $f \in \mathcal{L}$ может быть продолжена до $S(z, \rho)$, т. е. функции $f \circ \phi^{-1}$ в окрестности $\phi(z)$ могут быть продолжены в поликруг $S(\phi(z), \rho) \subset C^n$.

Пусть $L = \bigcup_{x \in K} \overline{S(x, \rho)}$. Тогда L — непрерывный образ компактного пространства $K \times S(0, \rho)$ ($S(0, \rho) \subset C^n$), так что L — компакт.

Пусть

$$M(f) = \sup_{z \in U} |f(z)|$$

для $f \in \mathcal{L}$. Из неравенств Коши следует, что

$$|D^J f(z)| \leq \frac{J! M(f)}{\rho^{|J|}}$$

(где $J = (j_1, \dots, j_n)$, D^J есть оператор

$$\frac{\partial^{|J|}}{\partial z_1^{j_1} \cdots \partial z_n^{j_n}}; \quad |J| = j_1 + \dots + j_n \text{ и } J! = j_1! \cdots j_n!.$$

Из определения $\hat{K}_{\mathcal{L}}$ и того факта, что \mathcal{L} устойчиво относительно дифференцирования, следует, что если $z \in \hat{K}_{\mathcal{L}}$, то

$$|D^J f(z)| \leq \frac{C_z J! M(f)}{\rho^{|J|}}.$$

Ввиду этого, если

$$g(z') = \sum_{J \in N^n} \frac{D^J f(z)}{J!} (\varphi(z') - \varphi(z))^J$$

для любого $z \in \hat{K}_{\mathcal{L}}$, то ряд сходится нормально в поликруге $S(\varphi(z), \rho) \subset C^n$, и ясно, что он продолжает f до $S(\varphi(z), \rho)$ для любой $f \in \mathcal{L}$. Отсюда и следует

Теорема 2. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, φ — растяжение V в C^n . Пусть \mathcal{L} — семейство голоморфных функций на V , имеющее следующие свойства:

- 1) \mathcal{L} — замкнутая подалгебра \mathcal{H}_V ; $1 \in \mathcal{L}$;
- 2) если $\varphi(z) = \varphi(z')$ ($z \neq z'$), то существует функция $f \neq \mathcal{L}$ такая, что $f_z \neq f_{z'}$ (f_a — росток, $f_a = (f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)}$; см. § 4 и § 5);

3) если K — компактное подмножество V и $z \in \hat{K}_{\mathcal{L}}$, то $S(z, r)$ — максимальный (открытый) поликруг вокруг z в V — содержит точки не из $\hat{K}_{\mathcal{L}}$.

Тогда существует функция $g \in \mathcal{L}$ такая, что g не может быть продолжена с (V, φ) .

Доказательство. Главный шаг в доказательстве — конструкция функции g такой, что

а) Если $\varphi(z) = \varphi(z')$, то $g_z \neq g_{z'}$, и достаточно ясно, что для счетного плотного множества $\{z_m\}$ на V $g_{z_m} \neq g_{z'_m}$, если z'_m — любая точка такая, что $\varphi(z_m) = \varphi(z'_m)$. (Существование счетного множества следует из теоремы Пуанкаре — Вольтерра.)

б) Пусть $S(z_m, r_m)$ означает для счетного плотного множества $\{z_m\}$ точек V максимальный открытый поликруг вокруг z_m . Тогда $g(z)$ имеет нули произвольно большой кратности в каждом $S(z_m, r_m)$.

Доказательство разделяется на три шага.

Шаг 1. Докажем, что существование функции g означает, что (V, φ) — максимальная область для g .

Доказательство. Пусть $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ — максимальная область g ; \tilde{V} состоит из пар $(\varphi(z), (g \circ \varphi^{-1})_{\varphi(z)}) = (\varphi(z), g_z)$. Покажем, что $\tilde{\psi}$ есть однозначное отображение. Если $(\varphi(z), g_z) = (\varphi(z'), g_{z'})$, то $\varphi(z) = \varphi(z')$, $g_z = g_{z'}$, и, поскольку из $z \neq z'$ следует $g_z \neq g_{z'}$, мы видим, что $z = z'$. Поэтому $\tilde{\psi}$ отождествляет V с открытым подмножеством \tilde{V} .

В дальнейшем мы предположим, что такое отождествление осуществлено, и покажем, что тогда $V = \tilde{V}$.

Прежде всего, $S(z_m, r_m)$ — максимальный поликруг вокруг z_m в V ; если бы это было не так, $S(z_m, r_m)$ был бы относительно компактным в \tilde{V} и \tilde{g} — продолжение g в \tilde{V} — не могло бы иметь нулей неограниченной кратности в $S(z_m, r_m)$. Теперь предположим, что $V \neq \tilde{V}$. Поскольку \tilde{V} связно, существует точка $b \in \tilde{V}$ такая, что $b \notin V$, $b \in \overline{V}$. Если c достаточно близко к b , то ясно, что существует поликруг $S(c, \rho)$, содержащий b . Но если c есть одна из точек z_m , то существует поликруг $S(z_m, \rho) \subset \tilde{V}$, $S(z_m, \rho) \not\subset V$, что невозможно. Это завершает шаг 1.

Шаг 2. Построим функцию $f \in \mathcal{L}$, имеющую свойство б).

Пусть $S_m = S(z_m, r_m)$; рассмотрим следующую последовательность поликругов:

$$S_1, S_2; S_1, S_2, S_3; S_1, S_2, S_3, S_4; \dots$$

Обозначим ее p -й член через Σ_p . Пусть K_p — последовательность компактных множеств $\subset V$ таких, что $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ и $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = V$. По условию 3) теоремы 2 $\Sigma_p \not\subset (\overset{\circ}{K}_p)_\mathcal{L}$. Таким образом, существуют функция $h \in \mathcal{L}$ и точка $z^{(p)} \in \Sigma_p$ такие, что

$$|h(z^{(p)})| > \|h\|_{K_p}$$

(согласно примеру 3 на стр. 36), поскольку \mathcal{L} — алгебра. Если

$$f_p(z) = \left(\frac{h(z)}{h(z^{(p)})} \right)^v$$

и если v достаточно велико, то f_p удовлетворяет условиям $f_p \in \mathcal{L}$, $|f_p(z)| \leq 2^{-p}$ на K_p , $f_p(z^{(p)}) = 1$ для $z^{(p)} \in \Sigma_p$. Положим

$$f = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - f_p)^p.$$

Легко проверить, что это произведение сходится в \mathcal{H}_V и что $f \neq 0$. Поскольку \mathcal{L} — замкнутая подалгебра \mathcal{H}_V , то $f \in \mathcal{L}$. Кроме того, f имеет нуль порядка по крайней мере p в Σ_p , и, поскольку каждое $S_m = S(z_m, r_m)$ встречается бесконечно часто в последовательности $\{\Sigma_p\}$, это завершает шаг 2.

Шаг 3. Построим такую модификацию функции f , чтобы результирующая функция имела свойства а) и б).

Пусть \mathcal{L}_f — замыкание множества всех функций fh , $h \in \mathcal{L}$, где f — функция, построенная в шаге 2. Поскольку \mathcal{L} замкнуто в $\mathcal{L}_f \subset \mathcal{L}$, то, очевидно, всякое $g \in \mathcal{L}_f$ имеет свойство б).

Пусть (X_m) — счетное плотное множество на V и (Y_m) — множество всех точек, для которых $\varphi(Y_m) = \varphi(X_m)$ (это множество счетно по теореме Пуанкаре — Вольтерра). Пусть $O(m, Y_m)$ — множество функций $h \in \mathcal{L}_f$ таких, что $h_{X_m} \neq h_{Y_m}$ и $\varphi(X_m) = \varphi(Y_m)$. Ясно, что $O(m, Y_m)$ открыто в \mathcal{L}_f . Мы докажем

ниже, что каждое множество $O(m, Y_m)$ плотно в \mathcal{L}_f . Тогда из теоремы Бэра, примененной к \mathcal{L}_f (\mathcal{L}_f – полное метризуемое пространство, поскольку V счетно в бесконечности), следует, что $O = \bigcap O(m, Y_m)$ плотно в \mathcal{L}_f и если $g \in O$, $g \not\equiv 0$, то g имеет свойства а) и б). Таким образом, чтобы завершить шаг 3, остается лишь доказать, что $O(m, Y_m)$ плотно в \mathcal{L}_f .

Пусть $k \in \mathcal{L}_f$, $\varphi(Y_m) = \varphi(X_m)$. Если $k_{Y_m} \neq k_{X_m}$, то $k \in O(m, Y_m)$. Если $k \in O(m, Y_m)$, пусть $h \in \mathcal{L}_f$ будет выбрана так, что $h_{X_m} \neq h_{Y_m}$ (такое h существует: если f обладает рассматриваемым свойством, то можно взять $h = f$; если же $f_{X_m} = f_{Y_m}$ и l таково, что $l_{X_m} \neq l_{Y_m}$ (условие 2), то можно взять $h = fl$). Поэтому, если $|\lambda|$ достаточно мало, $k + \lambda h$ определяет различные ростки в X_m и Y_m и попадает в замыкание множества таких функций $k + \lambda h$ (при $|\lambda|$ малом), которые принадлежат $O(m, Y_m)$, при $k \in O(m, Y_m)$. Это доказывает, что $O(m, Y_m)$ плотно в \mathcal{L}_f , и завершает шаг 3; шаги 1, 2 и 3 дают полное доказательство теоремы.

Следствие. При условиях теоремы 2

(I) (V, φ) – область голоморфности,

(II) (V, φ) – максимальное продолжение $(V, \varphi, \mathcal{L})$.

Теоремы 1 и 2 показывают, что следующие утверждения эквивалентны:

a) (V, φ) – область голоморфности.

b) Если $\varphi(z) = \varphi(z')$, $z \neq z'$, то существует $f \in \mathcal{H}_V$ такая, что $f_z \neq f_{z'}$ и, если K – компактное подмножество V , $d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{H}_V})$.

Последнее условие может быть заменено условием, которое кажется более слабым: при $z \in \hat{K}_{\mathcal{H}_V}$ максимальный поликруг вокруг z содержит точки не из $\hat{K}_{\mathcal{H}_V}$. Из теорем 1 и 2 следует также, что если V – область голоморфности, то существует функция $g \in \mathcal{H}_V$, которая разделяет точки в том смысле, что если $z = z'$ и $\varphi(z) = \varphi(z')$, то $g_z \neq g_{z'}$ – такая, что g

не может быть продолжена вне V , т. е. если семейство всех функций на V не может быть одновременно продолжено вне V , то существует и одна функция, которая не может быть продолжена.

§ 7. Теория выпуклости (продолжение)

1. Максимальное продолжение семейства голоморфных функций на многообразии V (растянутом в \hat{C}^n) было определено для V . Теперь будут определены аналогичные понятия.

Пусть V — комплексное многообразие, растянутое в C^n отображением φ , и \mathcal{L} — семейство голоморфных функций на V .

N-продолжение (V , φ , \mathcal{L}) есть продолжение (V' , φ' , ψ' , \mathcal{L}') такое, что если $\{f_i\}_{i \in I}$ — какое-либо подсемейство \mathcal{L} , нормально сходящееся в V , и f'_i — продолжение f_i , то семейство $\{f'_i\}_{i \in I}$ нормально сходится в V' . Максимальное *N-продолжение* теперь определяется таким же путем, как ранее определялось максимальное продолжение.

Следующие два понятия определяются аналогично:

Максимальное U-продолжение: рассматриваемым свойством является сходимость последовательностей функций из \mathcal{L} в \mathcal{H}_V .

Максимальное B-продолжение: рассматриваемым свойством является ограниченность подсемейств \mathcal{H}_V .

Так же, как и ранее, доказывается существование и единственность максимальных *N*-, *U*- и *B*-продолжений. Аналогично доказательству теоремы 1 из § 6 (стр. 36) получаем следующий результат:

Теорема 1'. Пусть V — комплексное многообразие, φ — растяжение V в C^n . Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}_V$ и \mathcal{L} устойчиво относительно к дифференцированию.

Если (V, φ) — максимальное *N-продолжение* (или *B*-, или *U-продолжение*) $(V, \varphi, \mathcal{L})$, то расстояния K и K_{φ} до границы V одинаковы.

Теорема 2 из § 6 (стр. 37) также имеет аналог:

Теорема 2'. Пусть V — комплексное многообразие, φ — растяжение V в C^n .

Пусть \mathcal{L} имеет следующие свойства:

1. Из $f \in \mathcal{L}$ следует, что $\lambda f \in \mathcal{L}$ для любого комплексного λ .

2. Если $\phi(x) = \phi(y)$, то существует $f \in \mathcal{L}$ такое, что $f_x \neq f_y$.

3. Если $K \subset V$ компактно и $z \in \hat{K}_{\varphi}$, то максимальный поликруг вокруг z содержит точки не из \hat{K}_{φ} .

Наконец, пусть $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{L}})$ будет максимальным N - B - или U -продолжением $(V, \varphi, \mathcal{L})$.

Тогда $\tilde{\varphi}$ – изоморфизм V на \tilde{V} .

Доказательство. Как и в шаге 1 доказательства теоремы 2 § 6, $\tilde{\varphi}$ одно-однозначно («в»). Строим последовательность (f_p) следующим образом.

Выбираем счетное плотное множество $\{z_m\}$ в V , и пусть S_m – максимальный поликруг вокруг z_m в V . Рассмотрим последовательность

$$S_1, S_2; S_1, S_2, S_3; \dots$$

и обозначим ее p -й член через Σ_p . Пусть $\{K_p\}$ – последовательность компактных множеств таких, что

$K_p \subset K_{p+1}$, $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = V$. По условию 3 существует точка $z^{(p)} \in \Sigma_p$ ($z^{(p)} \in (\hat{K}_p)_{\varphi}$), и по определению $(\hat{K}_p)_{\varphi}$ существует функция $f \in \mathcal{L}$ такая, что $|f(z^{(p)})| > 2^{-p} \|f\|_{K_p}$. Это порождает последовательность функций $\{f_p\}$ таких, что

$$\|f_p\|_{K_p} \leq 2^{-p}, \quad |f_p(z^{(p)})| > 2^p.$$

Факт, что ψ есть отображение «на», доказывается рассуждениями, аналогичными шагу 1 из § 6 (теорема 2).

Примеры.

1. Пусть $O \subset C^n$ – (однозначная) область Рейнхардта и \mathcal{L} – семейство одночленов λz^J (λ комплексное). В этом случае очень легко найти \hat{K}_{φ} .

Пусть K' – множество $(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$, где $(z_1, \dots, z_n) \in K$ и $|t_1| \leq 1, \dots, |t_n| \leq 1$. Ясно, что $K' \subset \hat{K}_{\varphi}$. Также ясно, что \hat{K}_{φ} полностью характеризуется его образом в пространстве

($|z_1|, \dots, |z_n|$) и, таким образом, в пространстве (ρ_1, \dots, ρ_n) ($\rho_j = \log|z_j|$). Как в § 2, пусть K'^* — образ K' , $\hat{K}_{\mathcal{L}}^*$ — образ $\hat{K}_{\mathcal{L}}$ в пространстве (ρ_1, \dots, ρ_n) .

K'^* имеет следующее свойство: если $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in K'^*$, то $(\rho_1 - a_1, \dots, \rho_n - a_n) \in K'^*$ при $a_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). $\hat{K}_{\mathcal{L}}^*$ определяется неравенствами $j_1\rho_1 + \dots + j_n\rho_n \leq \log \|z^J\|_K$, так что $\hat{K}_{\mathcal{L}}^*$ явно выпукло и, таким образом, содержит выпуклую оболочку K'^* . Так как выпуклая оболочка K'^* есть пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих K'^* , то отсюда следует, что $\hat{K}_{\mathcal{L}}^*$ есть выпуклая оболочка K'^* , и это дает нам \mathcal{L} -оболочки K .

Это ведет к необходимому и достаточному условию того, чтобы область Рейнхардта O , содержащая 0, была областью голоморфности. Если O — область голоморфности, то по теореме 1 из § 2 O — область максимального N -продолжения одночленов. Если O — область максимального N -продолжения одночленов, то по теореме 1 и теореме 2 § 6 O — область голоморфности (так как оболочка компактного множества по отношению к многочленам, очевидно, больше, чем по отношению ко всем голоморфным функциям).

В соответствии с вышеизложенным, так будет тогда и только тогда, когда образ O^* области O в пространстве (ρ_1, \dots, ρ_n) выпуклый и таков, что если $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in O^*$, то $(\rho_1 - a_1, \dots, \rho_n - a_n) \in O^*$ при $a_j \geq 0$. Из теоремы 2 § 6 следует, что если O — область Рейнхардта, являющаяся объединением поликругов с центром в 0, и O^* выпукла, то существует степенной ряд такой, что O — область сходимости этого ряда, — результат, указанный на стр. 17 (теорема, обратная к теореме 2 § 2).

2. Пусть O — открытое множество в C , и пусть $\mathcal{L} = \mathcal{H}_O$. Если K — компактное подмножество O и L — объединение относительно компактных компонент дополнения K (в O), то $\hat{K}_{\mathcal{H}_O} = K \cup L$. Легко видеть на основании теоремы 2 § 6, что O — область голоморфности. На самом деле можно показать что $\hat{K}_{\mathcal{H}_O}$ компактно.

2. Некоторые замечания об областях голоморфности.

Предложение 1. Пусть O — (однолистная) область в C^n . Следующие три высказывания эквивалентны:

1. O — область голоморфности.

2. Если K — компактное подмножество O и $z \in \hat{K}_{\mathcal{H}}$ (где $\mathcal{H} = \mathcal{H}_O$), то максимальный поликруг вокруг z в O содержит точки не из $\hat{K}_{\mathcal{H}}$.

3. Если K — компактное подмножество O , то $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ компактно.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 § 6 достаточно показать, что из высказывания 1 следует высказывание 3. Ясно, что $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ замкнуто в O , поскольку \mathcal{H} — алгебра и $d(K) = d(\hat{K}_{\mathcal{H}})$. Так же $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ ограничено в C^n : функции z_i голоморфны в O , и, по определению $\hat{K}_{\mathcal{H}}$, $|z'_i| \leq \|z_i\|_K$ для любого $z' \in \hat{K}_{\mathcal{H}}$.

Если бы $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ не было компактным, то существовала бы последовательность $\{X_p\}$ точек $X_p \in \hat{K}_{\mathcal{H}}$, не имеющая предельной точки в $\hat{K}_{\mathcal{H}}$. Однако $\{X_p\}$ имеет предельную точку $X \in C^n$, поскольку $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ замкнуто. Далее, X принадлежит границе O , поскольку $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ замкнуто в O , так что X имеет расстояние > 0 от K . Но если O — область голоморфности, это означает, что X находится на положительном расстоянии от $\hat{K}_{\mathcal{H}}$, что невозможно. Следовательно, $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ компактно.

Определение. Пусть V — комплексное многообразие. V называется *голоморфно-выпуклым*, если \mathcal{H}_V -оболочка каждого компактного множества компактна.

Предложение 2. Пусть V — многообразие, растянутое в C^n , и пусть V голоморфно-выпукло. Тогда V — область голоморфности.

Пусть $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Phi})$ — оболочка (V, φ) . Доказательство шага 1 теоремы 2 § 6 показывает, что:

1) V — накрывающее пространство \tilde{V} при проекции $\tilde{\Phi}$.

2) Над каждой точкой \tilde{V} лежит только конечное число точек V . По определению $\tilde{V}, \tilde{\varphi}$ все голоморфные функции на V имеют одно и то же значение во всех точках над одной точкой \tilde{V} . Если X — любая точка \tilde{V} , то все точки, лежащие над X , принадлежат \mathcal{H}_V -оболочке $\{X\}$, и, поскольку $\tilde{\Phi}$ — локальный гомеоморфизм, множество этих точек не может иметь

пределной точки; поскольку V голоморфно-выпукло, множество этих точек должно быть конечным.

3) \tilde{V} голоморфно-выпукло; это следует из 2).

4) Если $x, y \in \tilde{V}, x \neq y$, то существует голоморфная функция f на \tilde{V} такая, что $f(x) \neq f(y)$. Если $\tilde{\varphi}(x) \neq \tilde{\varphi}(y)$, это очевидно; если $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)$, то, поскольку \tilde{V} — область голоморфности, существует функция g такая, что $g_x \neq g_y$. Рассматривая производные g достаточно высокого порядка, придем к существованию f .

1), 2), 3) и 4) имеют следствием тот факт, что V — область голоморфности по теореме Ж. П. Серра ([1], гл. XX), которая является следствием теорем А и В Ока — Картана — Серра о многообразиях Штейна; они будут доказаны позже.

Упражнения

1. Пусть V — связное комплексное многообразие, растянутое в C^n отображением φ . Пусть существует n -параметрическое семейство \tilde{V} аналитических автоморфизмов $\sigma(a_1, \dots, a_n)$, где a — действительные числа $\text{mod } 2\pi$ такие, что если $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$, то

$$\varphi \circ \sigma(a_1, \dots, a_n)(z) = (e^{ia_1}\varphi_1(z), \dots, e^{ia_n}\varphi_n(z))$$

для всех a . Тогда (V, φ) называется *областью Рейнхардта*.

Докажите следующие два утверждения:

а) Если $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ — оболочка голоморфности (V, φ) , то $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ — область Рейнхардта.

б) Если существует точка $z \in V$ такая, что $\varphi(z) = 0$, то всякая голоморфная функция на V может быть разложена в ряд $\sum a_j \varphi(z)^j$ на V , и этот ряд сходится на V . Выберите, что отображение $\tilde{\varphi}$ одно-однозначно, т. е. V однолистна.

2. Пусть O — открытое множество в C^{n+1} и (z_1, \dots, z_n, w) — общая точка O . O называется *областью Хартогса*, если из $(z, w) \in O$ следует $(z, e^{ia}w) \in O$ при любом реальном a .

Пусть теперь O — связная область Хартогса такая, что находится точка $(z, 0) \in O$. Тогда, если $f(z, w)$ голоморфна в O , докажите, что $f(z, w)$ может быть разложена в ряд вида

$$f(z, w) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z, w) w^p,$$

где $a_p(z, w)$ — голоморфные функции в O , которые локально не зависят от w , т. е. $\frac{\partial a_p}{\partial w} = 0$ в O , и такие, что ряд сходится нормально в Q .

3. Пусть O — следующее открытое множество в C^2 :

$$-3 < \operatorname{Re} z < 0, \quad |w| < e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z — \text{любое};$$

$$0 \leq \operatorname{Re} z < 3, \quad e^{-1/\operatorname{Re} z} < |w| < 1, \quad \operatorname{Im} z — \text{любое}$$

(O — область Хартогса). Докажите, что $a_p(z, w)$ из упражнения 2 не зависят от w , и выведите, что каждая голоморфная функция в O может быть продолжена на O' — объединение O и множества точек (z, w) из $0 < \operatorname{Re} z < 3, |w| \leq e^{-1/\operatorname{Re} z}$.

Докажите также, что отображение

$$(z, w) \rightarrow \left(e^{i\frac{\pi}{2}} z, w \right)$$

растягивает O , но не может быть однозначно продолжено на O' .

Замечание. Упражнение 1 дает пример неоднозначной области, у которой оболочка однозначна, а упражнение 3 дает пример однозначной области, у которой оболочка неоднозначна.

В следующих двух упражнениях D будет означать замкнутый единичный круг $|z| \leq 1$ в плоскости C .

4. Если $f(z)$ голоморфна в окрестности D , то

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

5. Пусть $f_p(z)$ ($p = 1, 2, \dots$) голоморфна в окрестности D и допустим, что

$$1) \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log \|f_p\|_D < +\infty,$$

$$2) \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log |f_p(z)| \leq M, \quad z \in D.$$

Докажите, что $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log \|f_p\|_D \leq M$.

6. (Главная теорема Хартогса.) Пусть O — открытое множество в C и $\{f_p(z)\}$ — последовательность голоморфных функций в O . Область абсолютной (нормальной) сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} f_p(z) w^p$$

определяется как множество точек $(z_0, w_0) \in C^2$ таких, что $\sum_{p=0}^{\infty} f_p(z) w^p$ сходится абсолютно (нормально) в окрестности (z_0, w_0) . Пусть $R(z) (\bar{R}(z))$ — наибольшее число (≥ 0) такое, что множество $\{z \in O, |w| < R(z) (< \bar{R}(z))\}$ содержитя в области абсолютной (нормальной) сходимости.

Докажите, что если $\bar{R}(z) > 0$, то $R(z) = \bar{R}(z)$ (используйте упражнение 5).

7. Пусть $\{P_n(z_1, z_2)\}$ — множество однородных по z_1, z_2 полиномов P_n степени n . Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_1, z_2).$$

Область абсолютной его сходимости Δ определяется как множество $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \in C^2$ таких, что в окрестности $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_1, z_2)$$

абсолютно сходится.

Докажите следующие утверждения:

- a) Если $(z_1, z_2) \in \Delta$, то $(tz_1, tz_2) \in \Delta$ при $0 < |t| \leq 1$.
 - b) Если Δ не пустое, то $(0, 0) \in \Delta$ и ряд сходится нормально вблизи $(0, 0)$.
 - c) Ряд сходится нормально в Δ .
- (Эти результаты также принадлежат Хартогсу; для б) используйте теорему Бэра и принцип максимума; для с) используйте упражнение 6.)

Дифференциальные свойства куба

§ 8. d'' -когомологии на кубе

1. Дифференциальные формы. Пусть $O \subset R^n$ — открытое множество. Понятие (C^∞ -) дифференциальной формы считается известным. Дифференциальная форма ω' степени r на O имеет представление

$$\omega' = \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad (1)$$

где \wedge — знак внешнего умножения. $a_{i_1 \dots i_r}$ — C^∞ -функции. Определим также частные производные формы (1) посредством выражения

$$\frac{\partial \omega'}{\partial x_i} = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_i} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Дифференциал $d\omega'$ формы (1) определяется как

$$d\omega' = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge \frac{\partial \omega'}{\partial x_i}.$$

Оператор d имеет следующие свойства:

- a) d — локальный оператор: если $\omega = \omega'$ на открытом множестве U , то $d\omega = d\omega'$ на U .
- b) d — линейный оператор на формах, рассматриваемых как векторное пространство над комплексными числами (но не как модуль над C^∞ -функциями).
- c) $d(\omega^p \wedge \omega^q) = d\omega^p \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge d\omega^q$.
- d) $dd = 0$.
- e) d инвариантен относительно диффеоморфизмов.

Разумеется, d имеет то свойство, что для функций f (форм степени 0) $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ — обычновенный дифференциал f .

Это свойство вместе с б), с) и д) полностью характеризует d .

Имеет место следующий результат, называемый теоремой Пуанкаре:

Пусть O — открытый шар в R^n (или $O = R^n$). Пусть ω^p — форма степени p в O такая, что $d\omega^p = 0$. Тогда найдется форма π^{p-1} степени $p-1$ такая, что

$$d\pi^{p-1} = \omega^p.$$

Это не будет здесь доказываться. См., например, [6].

2. Операторы d' и d'' . Мы отождествим теперь C^n и R^{2n} и положим $z_j = x_j + ix_{n+j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, где x_1, \dots, x_{2n} — координаты в R^{2n} . Тогда r -форма ω^r (форма степени r) в O может быть записана однозначно в виде

$$\omega^r = \sum_{\substack{p+q=r \\ p, q \geq 0}} \omega^{(p, q)},$$

где

$$\begin{aligned} \omega^{(p, q)} = & \sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 0 < j_1 < \dots < j_q \leq n}} a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge \\ & \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}. \end{aligned}$$

$\omega^{(p, q)}$ называется *формой типа (p, q)* . Ее степень, разумеется, $p+q=r$. Легко проверить, что для каждой формы имеем

$$d\omega = \sum_{j=1}^n dz_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_j}.$$

Первая сумма обозначается $d'\omega$, вторая $d''\omega$. Здесь d' , d'' — операторы степени 1, т. е. под действием d' и d'' r -форма переходит в $(r+1)$ -форму; точнее, d' имеет тип $(1, 0)$, т. е. форма типа (p, q) переходит

под его действием в форму типа $(p+1, q)$, тогда как d'' имеет тип $(0, 1)$: он переводит формы типа (p, q) в формы типа $(p, q+1)$.

Операторы d' и d'' имеют свойства, подобные свойствам d . Они таковы:

- a) d', d'' — локальные операторы.
- b) d', d'' — линейные.
- c) $d'(\omega^p \wedge \omega^q) = d\omega^p \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge d'\omega^q$, и аналогично для d'' .

$$\text{d)} d'd' = 0, d'd'' + d''d' = 0, d''d'' = 0.$$

е) d', d'' инвариантны относительно аналитических изоморфизмов (но не диффеоморфизмов).

Форма ω называется d' - (d'' -) замкнутой, если $d'\omega = 0$ ($d''\omega = 0$).

3. Тривиальность d'' -когомологий на кубе. Форма ω называется голоморфной, если она типа $(p, 0)$ и коэффициент при $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ голоморфен для всех $i_1 < \dots < i_p$. $(p, 0)$ -форма ω голоморфна тогда и только тогда, когда $d''\omega = 0$. В частности, функция f голоморфна тогда и только тогда, когда $d''f = 0$.

Для форм типа (p, q) с $q \geq 1$ мы можем доказать аналог теоремы Пуанкаре, принадлежащий А. Гrotендику.

Замкнутый куб в C^n есть множество в C^n , определяемое неравенствами

$$|\operatorname{Re} z_j| \leq a_j, \quad |\operatorname{Im} z_j| \leq b_j, \quad a_j, b_j > 0.$$

Теорема 1. (Тривиальность d'' -когомологий на кубе.) Пусть K — замкнутый куб $\subset C^n$. Пусть ω — форма типа (p, q) , $q \geq 1$, определенная в окрестности K ; предположим, что $d''\omega = 0$.

Тогда существует окрестность U куба K и форма π типа $(p, q-1)$ в U такая, что $d''\pi = \omega$ в U .

Нам нужна будет следующая лемма:

Лемма. Пусть $a(z, \lambda, \mu)$ — комплексная функция, определенная для $z \in U$ (U — окрестность замкнутого единичного квадрата Δ с центром 0 в z -плоскости), $\lambda \in O \subset C^l$, $\mu \in \Omega \subset R^m$. Пусть a дифферен-

цируема по всем своим переменным и голоморфна по $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ($\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_l$).

Тогда

$$\hat{f}(z) = f(z, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int \frac{\alpha(\xi \lambda, \mu)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

дифференцируема по всем переменным в $\Delta^0 \times O \times \Omega$ и является голоморфной функцией по λ такой, что

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}} = \alpha(z, \lambda, \mu), \quad z \in \Delta^0.$$

Доказательство леммы. Интеграл существует, так как $\frac{1}{z}$ локально интегрируема. Пусть δ — замкнутый квадрат с центром 0 и $\delta \subset \Delta^0$. Достаточно доказать, что $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}} = \alpha$ для $z \in \delta$. Пусть $\beta(z)$ — C^∞ -функция, которая равна 1 в δ и 0 в окрестности границы Δ (такая $\beta(z)$ существует). Далее, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_1 = \beta \alpha$, $\alpha_2 = (1 - \beta) \alpha$, и мы имеем

$$\hat{f}(z) = \hat{f}_1(z) + \hat{f}_2(z),$$

где

$$\hat{f}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int \frac{\alpha_1(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

$$\hat{f}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int \frac{\alpha_2(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Ясно, что $\hat{f}_2(z)$ голоморфна по z , $\frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \bar{z}} = 0$ при $z \in \delta$ и \hat{f}_2 голоморфна по λ . Поскольку $\alpha_1(z) = 0$ в окрестности границы Δ , мы можем доопределить $\alpha_1(z)$ как 0 вне Δ и написать

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(z, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int \frac{\alpha_1(\xi \lambda, \mu)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \int \frac{\alpha_1(u + z, \lambda, \mu)}{u} du \wedge d\bar{u}, \end{aligned}$$

где сделана подстановка $u = \xi - z$ (интегралы без обозначения области интегрирования берутся по всей

плоскости). Из этой формы интеграла ясно, что $f_1(z, \lambda, \mu)$ дифференцируема по всем переменным и голоморфна по λ . Также (записывая $a_1(u+z)$ вместо $a_1(u+z, \lambda, \mu)$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \int \int \frac{\partial a_1(u+z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{u} du \wedge d\bar{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \int \frac{\partial a_1(u+z)}{\partial \bar{u}} \frac{1}{u} du \wedge d\bar{u} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\partial a_1(u+z)}{\partial \bar{u}} \frac{1}{u} du \wedge d\bar{u} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\partial \left(a_1(u+z) \frac{1}{u} \right)}{\partial \bar{u}} du \wedge d\bar{u}. \end{aligned}$$

Если $\Gamma_\varepsilon^+ (\Gamma_\varepsilon^-)$ — положительно (отрицательно) ориентированная окружность $|u| = \varepsilon$, то формула Римана, примененная к последнему интегралу, дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} a_1(u+z) \frac{\partial u}{u} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} a_1(u+z) \frac{du}{u} = a_1(z) = \alpha(z) \end{aligned}$$

при $z \in \overset{\circ}{\delta^0}$. Это доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1 (Гротендика). Доказательство сначала будет проведено для форм типа $(0, 1)$, чтобы яснее показать метод, а затем будет дано в общем случае. Доказательство проводится по индукции. Рассмотрим следующее утверждение.

Для всех форм ω типа $(0, 1)$, которые d'' -замкнуты и у которых коэффициенты при $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$ равны 0, существует f такая, что $d''f = \omega$.

Это утверждение очевидно при $k = 0$, так как тогда $\omega = 0$ и можно взять $f = 0$.

Допустим, что утверждение верно для всех форм при k , замененном на $k - 1$. Допустим, что в ω коэф-

фициенты при $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$ равны 0. Тогда коэффициенты суть голоморфные функции z_{k+1}, \dots, z_n
 (ибо если $\omega = \sum_{j=1}^k a_j d\bar{z}_j, d\bar{z}_l (l > k)$ встречается как
 $\sum_{j=1}^k \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_j$ в $d''\omega$, то, так как ω d'' -замкнута,
 $\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_l} = 0$ при $l > k$). Далее, согласно лемме существует функция $g(z_1, \dots, z_n)$, дифференцируемая по всем переменным z_1, \dots, z_n и голоморфная по z_{k+1}, \dots, z_n (в окрестности K) такая, что $\frac{\partial g}{\partial z_k} = a_k$.

Задача состоит теперь в том, чтобы найти f такую, что $d''f = \omega$. Если положим $f_1 = f - g$, то задача состоит в нахождении f_1 такой, что

$$d''f_1 = \omega_1 = \omega - d''g.$$

Ясно, что $d''\omega_1 = 0$, и по конструкции g коэффициент $d\bar{z}_k$ в ω равен 0 при $l \geq k$. По индуктивной гипотезе существует f_1 такая, что $d''f_1 = \omega_1$, и это верно и для k . Теорема Гrotендика для форм типа $(0, 1)$ получается при $k = n$.

В общем случае доказательство такое же.

Рассмотрим следующее утверждение: для каждой d'' -замкнутой формы ω типа (p, q) , в которой все члены, содержащие $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$, равны 0, существует форма π типа $(p, q-1)$ такая, что $d''\pi = \omega$.

Утверждение тривиально, если $k = 0$. Допустим, что оно верно, если k заменено на $k-1$, и пусть ω будет (p, q) -формой (формой типа (p, q)) такой, что все члены, где встречается $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$, равны нулю. Тогда, так же как и ранее, видим, что все коэффициенты ω — голоморфные функции от z_{k+1}, \dots, z_n . Допустим теперь, что

$$\omega = d\bar{z}_k \wedge \alpha^{(p, q-1)} \beta^{(p, q)}.$$

Согласно лемме существует форма φ типа $(p, p-1)$, дифференцируемая по всем переменным, такая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k} = \alpha^{(p, q-1)}.$$

Достаточно приложить нашу лемму к коэффициентам $\alpha^{(p, q-1)}$. Как и ранее, задача сводится к нахождению формы π такой, что $d''\pi_1 = \omega_1 = \omega - d''\varphi$. Так как $d''\omega_1 = 0$ и члены, в которых встречаются $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$, — нули по построению φ , то существование ω_1 следует из индуктивной гипотезы, и теорема Гrotендика получается при $k = n$.

Надо заметить, что теорема Гrotендика верна также для открытых кубов и полукругов, но тогда ее доказательство требует предельных переходов, и, поскольку его можно провести для любых «многообразий Штейна», мы не будем рассматривать здесь этих специальных случаев.

4. Мероморфные функции. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие и $a \in V$. Пусть Ω_a — кольцо ростков голоморфных функций в a . Можно легко проверить, что Ω_a — область целостности, и потому можно образовать поле дробей \mathfrak{M}_a . Поле \mathfrak{M}_a называется множеством *ростков мероморфных функций* в a . Пусть $\underline{\mathfrak{M}} = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{M}_a$. Можно ввести в $\underline{\mathfrak{M}}$ топологию следующим образом.

Пусть $a \in V$ и $\frac{f_a}{g_a} = m_a \in \mathfrak{M}_a$. Пусть f_a и g_a определяются голоморфными функциями f и g в связной открытой окрестности Ω точки a . Для каждой точки $b \in \Omega$ m_b определяется как $\frac{f_b}{g_b}$. Если f' , g' — две другие голоморфные функции в Ω такие, что $\frac{f'_a}{g'_a} = m_a$, то

$$f'_a g_a - g'_a f_a = 0 \quad \text{и} \quad f'g - g'f = 0$$

в окрестности a ; по принципу аналитического продолжения $f'g - g'f = 0$ в Ω , так что

$$\frac{f_a}{g_a} = \frac{f'_a}{g'_a},$$

и предыдущее определение однозначно. Окрестность $(a, m_a) \in \underline{\mathfrak{M}}$ теперь определяется как $\bigcup_{b \in \Omega} (b, m_b)$, где

Ω — окрестность указанного выше типа. В такой топологии $\underline{\mathfrak{M}}$ — пучок над V .

Мероморфная функция теперь просто определяется как сечение $\underline{\mathfrak{M}}$ над V , т. е. непрерывное отображение $f: V \rightarrow \underline{\mathfrak{M}}$ такое, что $f(a) \in \mathfrak{M}_a$ для любого $a \in V$.

Слабый принцип аналитического продолжения остается в силе, если голоморфные функции заменены мероморфными. Мероморфные функции можно также определить в терминах покрытий и локальных частных голоморфных функций с некоторыми очевидными условиями согласования.

Главные части. Система главных частей на V есть сечение факторпучка $\underline{\mathfrak{M}}/\underline{\mathfrak{Q}}$ ($\underline{\mathfrak{M}}$ — пучок аддитивных групп ростков мероморфных функций). Но мы будем употреблять для первой проблемы Кузена следующее альтернативное определение.

Система главных частей на комплексном многообразии V состоит из открытого покрытия $\{\Omega_i\}$ многообразия V и мероморфных функций f_i в Ω_i таких, что $f_i - f_j$ голоморфны в $\Omega_i \cap \Omega_j$ (значение последнего утверждения ясно). Две системы $\{\Omega_i, f_i\}$, $\{\Omega'_j, f'_j\}$ определяют одни и те же главные части, если $f_i - f'_j$ голоморфны в $\Omega_i \cap \Omega'_j$ для любых i, j . Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что подобного рода условия выполнены, если рассматриваемые здесь пересечения пусты.

5. Первая проблема Кузена. Проблема следующая: допустим, что на комплексном многообразии V дана система главных частей $\{\Omega_i, f_i\}$. Существует ли на V мероморфная функция f такая, что $f - f_i$ голоморфны на Ω_i , т. е. когда система главных частей порождается одной функцией?

Эта проблема обобщается до обобщенной первой проблемы Кузена.

Обобщенная первая проблема Кузена. Пусть $\{\Omega_i\}$ — открытое покрытие комплексного многообразия V , и пусть дано семейство функций $\{c_{ij}\}$ таких, что c_{ij} голоморфна в $\Omega_i \cap \Omega_j$ и имеет следующие

свойства:

$$c_{ij} + c_{ji} = 0 \text{ в } \Omega_i \cap \Omega_j, \quad c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 0$$

в $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$. Возможно ли тогда найти голоморфные функции c_i в Ω_i такие, что $c_{ij} = c_i - c_j$ в $\Omega_i \cap \Omega_j$?

Решение этой проблемы ведет к решению первой проблемы Кузена, ибо если положить $c_{ij} = f_i - f_j$, $c_{ij} = c_i - c_j$, то $f_i - c_i = f_j - c_j$ в $\Omega_i \cap \Omega_j$, и если определим $f = f_i - c_i$ в Ω_i , то легко видеть, что f решает первую проблему Кузена.

Первая проблема Кузена для куба. Мы докажем теперь следующую теорему:

Теорема 2. Пусть K — куб в C^n и $\{\Omega_i, c_{ij}\}$ — система такая, что $\{\Omega_i\}$ — открытое покрытие K , и c_{ij} имеет указанные выше свойства. Тогда существует окрестность U куба K такая, что обобщенная проблема Кузена имеет решение для системы $\{U \cap \Omega_i, c_{ij}\}$.

Доказательство. Сначала допустим, что $\{\Omega_i\}$ — конечное покрытие.

Шаг 1. Существует окрестность U_1 куба K и система $\{\gamma_i\}$ C^∞ -функций γ_i в $\Omega_i \cap U_1$ такая, что $\gamma_i - \gamma_j = c_{ij}$.

Пусть $\{\phi_i\}$ — дифференцируемое разбиение единицы относительно покрытия $\{\Omega_i\}$ куба K , т. е. $\phi_i \in C^\infty$ и имеет компактный носитель, содержащийся в Ω_i , $\phi_i \geq 0$, и $\sum \phi_i = 1$ в окрестности U_1 куба K . Такое разбиение единицы существует.

Рассмотрим следующую функцию γ_i на $\Omega_i \cap U_1$. Пусть $z \in \Omega_i \cap U_1$, определим

$$\gamma_i(z) = \sum_{j \neq i} \phi_j(z) c_{ij}(z).$$

Эта сумма имеет смысл, ибо если $c_{ij}(z)$ не определено, то $z \in \Omega_j$; следовательно, $\phi_j(z) = 0$, и для таких z мы определим $\phi_i(z) c_{ij}(z)$ как нуль. Легко видеть, что γ_i дифференцируема в $\Omega_i \cap U_1$. Далее,

$$\gamma_i - \gamma_j = \sum_{k \neq i, j} \phi_k(c_{ik} - c_{jk}) + \phi_j c_{ij} = \phi_i c_{ji}$$

и

$$c_{ik} - c_{jk} = c_{ik} + c_{kj} = -c_{jl} = c_{lj}.$$

Отсюда

$$\gamma_i - \gamma_j = \sum_k \varphi_k c_{ij} = c_{ij} \text{ в } \Omega_i \cap \Omega_j \cap U_1.$$

Шаг 1 завершен.

Шаг 2. Решение обобщенной первой проблемы Кузена. В $\Omega_i \cap \Omega_j \cap U_1$ мы имеем $d''\gamma_i - d''\gamma_j = d''c_{ij} = 0$, так как c_{ij} голоморфны. Поэтому, определяя форму α типа $(0, 1)$ равенством $\alpha = d''\gamma_i$ в $\Omega_i \cap U_1$, получим однозначно определенную форму в U_1 . Ясно, что $d''\alpha = 0$, и по теореме Гротендика существует $(0, 0)$ -форма β , т. е. функция β такая, что $d''\beta = \alpha$ в окрестности $U \subset U_1$ куба K . Полагая $c_i = \gamma_i - \beta$ в $\Omega_i \cap U$, имеем $d''c_i = d''\gamma_i - d''\beta = \alpha - \alpha = 0$, так что c_i голоморфна в Ω_i ; далее,

$$c_i - c_j = \gamma_i - \gamma_j = c_{ij} \text{ в } \Omega_i \cap \Omega_j \cap U.$$

Это завершает доказательство теоремы для случая, когда $\{\Omega_i\}$ конечно.

В общем случае пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ — конечное покрытие куба K , извлеченное из $\{\Omega_i\}$. Переходя к подходящим пересечениям, можем допустить, что каждое Ω_α содержится в $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p$, в то время как функции c_1, \dots, c_p определены в $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ соответственно. При данном α определены $c_\alpha = c_i + c_{ai}$ на $\Omega_\alpha \cap \Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$). На $\Omega_\alpha \cap \Omega_i \cap \Omega_j$ $c_i + c_{ai} = c_j + c_{aj}$,

ибо $c_i - c_j = c_{aj} - c_{ai}$. Поскольку $\Omega_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^p \Omega_i$, c_α определено на Ω_α , и легко проверить, что система $\{\Omega_\alpha, c_\alpha\}$ дает решение обобщенной первой проблемы Кузена.

§ 9. Голоморфные регулярные матрицы

В § 9 и § 10 мы докажем аналоги теорем § 8 для голоморфных функций, значения которых — регулярные (имеющие обратные) матрицы, и дадим приложения этих обобщений. Мы начнем с того, что

переформулируем теорему Гротендика в виде, допускающем нужные нам применения.

Пусть α — произвольная дифференцируемая $(0, 1)$ -форма в окрестности куба K . Необходимым и достаточным условием для существования C^∞ -функции f в окрестности K такой, что $f \neq 0$ в этой окрестности и $f^{-1} d'' f = \alpha$, является условие $d'' \alpha = 0$ (достаточно найти g такое, что $d'' g = \alpha$, и положить $f = \exp g$).

В дальнейшем функции или формы, рассматриваемые нами, будут иметь значения или коэффициенты в пространстве $(m \times m)$ -комплексных матриц или в полной линейной группе $GL(m, C)$ регулярных матриц.

Нашей целью будет обобщить приведенный выше результат на случай, когда α есть $(0, 1)$ -форма, коэффициенты которой — $(m \times m)$ -комплексные матрицы, и f заменяется отображением в $GL(m, C)$. Нам нужно обобщить лемму из § 8.

Теорема 1. Пусть K — треугольник в C -плоскости, L, M — компактные множества в C^l, C^m соответственно. Пусть $\alpha(z, \lambda, \mu)$ — матрица-функция, определенная в окрестности $K \times L \times M$, такая, что она есть дифференцируемая функция всех своих переменных и голоморфна по λ в этой окрестности. Тогда существует C^∞ -функция $f(z, \lambda, \mu)$ в окрестности $K \times L \times M$ со значениями в $GL(m, C)$, которая дифференцируема по всем своим переменным, голоморфна по λ и такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f\alpha.$$

Нам нужны некоторые леммы. Первые две здесь не будут доказываться.

Лемма 1. Пусть B — банахово пространство, L', M' — открытые множества в C^l, C^m соответственно и $U(\lambda, \mu)$ — непрерывный линейный оператор $B \rightarrow B$, имеющий обратный для каждого $(\lambda, \mu) \in L' \times M'$. Допустим, что $U(\lambda, \mu)$ является C^∞ -функцией от λ и μ и голоморфна по λ . Далее, допустим, что $\chi(\lambda, \mu)$ — дифференцируемая функция λ, μ со значениями в B , которая голоморфна по λ .

Тогда $U^{-1}(\lambda, \mu)\chi(\lambda, \mu)$ имеет такие же свойства.

Лемма 2. Пусть O — открытое множество на плоскости и H — открытое множество в C^k . Пусть $f(z, \eta)$ — элемент множества всех непрерывных функций от z в O со значениями в пространстве функций η , дифференцируемых в H . Пусть производные

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(в смысле теории обобщенных функций), все существуют и имеют те же свойства.

Тогда $f(z, \eta)$ — бесконечно дифференцируемая функция в $O \times H$.

Это частный случай теоремы «о регулярности внутри» решений эллиптических уравнений в частных производных. См., например, [5] (также упражнение 1). В изучаемой ситуации участвуют векторные функции со значениями в пространстве дифференцируемых функций, но доказательство остается в силе.

Доказательство теоремы 1 состоит из трех частей.

1. Первая часть. Доказательство теоремы 1 в частном случае, когда a достаточно близко к нулю. Под выражением « a достаточно близко к нулю» будем понимать следующее: если K', L', M' — компактные окрестности соответственно K, L, M такие, что $K' \times L' \times M'$ содержится в области определения a , то $\|a\| \leq C(K', L', M')$ для подходящего C ($\|a\|$ будет означать в дальнейшем $\max_i \|a_{ij}\|_{K' \times L' \times M'}$, если $a = (a_{ij})$).

Следующая лемма является решающим шагом в первой части доказательства:

Лемма 3. Пусть $a(z, \lambda, \mu)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и a достаточно близко к нулю. Тогда существует функция $\beta(z, \lambda, \mu)$ в окрестности $K \times L \times M$, принадлежащая C^∞ по z, λ, μ , голоморфная по λ и такая, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} + [\alpha, \beta] = \frac{\partial a}{\partial z}$$

($[\alpha, \beta]$ здесь и далее означает $\alpha\beta - \beta\alpha$)

Доказательство. Пусть $\gamma(z) - C^\infty$ -функция, равная 1 в открытой окрестности K и нулю близ границы K' .

Рассмотрим следующее интегральное уравнение (пишем $[\alpha, \beta]$ вместо $[\alpha, \beta](\zeta, \lambda, \mu)$):

$$\begin{aligned} \beta(z, \lambda, \mu) + \frac{1}{2\pi i} \int \int_{K'} \gamma[\alpha, \beta] \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int \int_{K'} \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Рассмотрим банахово пространство B всех непрерывных функций на K' , значения которых суть $(m \times m)$ -матрицы с нормой $\|\beta\|$ (определенной, как для α) при $\beta \in B$. Пусть $A(\lambda, \mu)$ означает оператор, определенный формулой

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mu) \beta(z) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int \int_{K'} \gamma(\zeta) \{ \alpha(\zeta, \lambda, \mu) \beta(\zeta) - \beta(\zeta) \alpha(\zeta, \lambda, \mu) \} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

при $z \in \overset{\circ}{K'}$. Наше интегральное уравнение можно записать так:

$$(I + A(\lambda, \mu)) \beta = \chi(\lambda, \mu),$$

где

$$\chi(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int \int_{K'} \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}.$$

Далее, $\chi(\lambda, \mu)$ и $A(\lambda, \mu)$ дифференцируемы по λ, μ и голоморфны по λ . Из определения $A(\lambda, \mu)$ ясно, что если α достаточно близко к нулю, то

$$\|A(\lambda, \mu)\| \leq \theta < 1 \text{ для } (\lambda, \mu) \in L' \times M'.$$

Следовательно, $I + A(\lambda, \mu)$ имеет обратный элемент для всякого $(\lambda, \mu) \in L' \times M'$, и по лемме 1 $(I + A(\lambda, \mu))^{-1} \chi(\lambda, \mu)$ дифференцируема по (λ, μ) и голоморфна по λ , и интегральное уравнение имеет решение $\beta(z, \lambda, \mu)$ со следующими свойствами:

- 1) β — дифференцируемая функция $(\lambda, \mu) \in \overset{\circ}{L}' \times \overset{\circ}{M}'$ со значениями в B ;
 2) β голоморфна по λ .

Из 1) следует, что β — непрерывная функция $z \in K^0$ со значениями в пространстве всех дифференцируемых в $\overset{\circ}{L}' \times \overset{\circ}{M}'$ функций (λ, μ) .

Далее, если $g(z) = 1/z$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int \int_{K'} \gamma(\xi) f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} = \frac{1}{\pi} g * \gamma f$$

(* — знак свертки).

Поскольку $\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \pi \delta_0$ (δ_0 — обобщенная функция Дирака для нуля; это, по существу, — содержание леммы, доказанной перед доказательством теоремы Гrotендика), то отсюда следует, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} = -[\alpha, \beta] + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

в $O \times \overset{\circ}{L}' \times \overset{\circ}{M}'$ (в смысле теории обобщенных функций). Так как члены справа — непрерывные функции z (со значениями в пространстве функций, дифференцируемых в $\overset{\circ}{L}' \times \overset{\circ}{M}'$), то такова же $\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}$, и

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = -\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}, \beta \right] - \left[\alpha, \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} \right] + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}}$$

имеет то же свойство. Итерация дает нам, что $\frac{\partial^k \beta}{\partial \bar{z}^k}$ непрерывна при $k \geq 0$ и, по лемме 2, $\beta \in C^\infty$ в окрестности $K \times L \times M$. Это доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы 1 в частном случае. Пусть O — открытый прямоугольник $\subset C$, $K \subset O$ и L', M' — открытые окрестности соответственно L, M такие, что $O \times L' \times M'$ содержится в области определения α . Мы найдем дифференцируемую регулярную матрицу f такую, что

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f\beta, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f\alpha, \quad f(0) = I, \quad (1)$$

I — единичная матрица.

Если положим $f(tz) = \varphi_z(t)$, то $\varphi(t) = \varphi_z(t)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 1, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= z\varphi(t)\beta(tz) + \bar{z}\varphi(t)\alpha(tz) = \varphi(t)A, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

если f удовлетворяет (1). По классическим теоремам о системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2) решение $\varphi(t)$ для (2) существует, является C^∞ по z , λ , μ , голоморфно по λ и единствено; таким образом, f , если она существует, задается однозначно формулой $f(z) = \varphi_z(1)$.

Пусть теперь φ удовлетворяет (2); определим f равенством $f(z) = \varphi_z(1)$. Тогда $f \in C^\infty$ в $O \times L' \times M'$ и голоморфна, как функция λ . Мы покажем, что

- 1) $f(z)$ — регулярная матрица;
- 2) f удовлетворяет условию (1).

Доказательство 1). φ удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(0) = I, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi A.$$

Пусть ψ — единственное решение для

$$\psi(0) = I, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A\psi.$$

Тогда $\frac{d(\varphi\psi)}{dt} = 0$, $\varphi\psi = \varphi(0)\psi(0) = I$, так что, в частности, $f(z)\psi(1) = I$.

Доказательство 2). Пусть $g_z(t) = \frac{\partial \varphi_z(t)}{\partial \bar{z}}$. Мы докажем, что

$$g_z(t) = t\varphi_z(t)\alpha(tz) = h_z(t)$$

(второе равенство — определение); отсюда будет следовать 2). Далее, при $t = 0$ $g_z(0) = h_z(0) = 0$ и $g_z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dg_z}{dt} &= g_z \{ z\beta(tz) + \bar{z}\alpha(tz) \} + \varphi_z \alpha(tz) + \\ &\quad + \varphi_z \left\{ zt \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}(tz) + \bar{z}t \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}(tz) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} + [\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial z}$, уравнение (3) остается верным, если g_z заменяется на h_z . Поскольку $g_z(0) = h_z(0) (= 0)$, из единственности уравнения вида (3) следует, что $g_z(t) \equiv h_z(t)$, и это завершает доказательство 2). Этим заканчивается доказательство теоремы 1 в данном частном случае.

Следствие. В условиях теоремы 1 каждая точка K имеет открытую окрестность U , которой может быть сопоставлена функция $f(z, \lambda, \mu)$, принадлежащая C^∞ по всем ее переменным и голоморфная по λ в окрестности $U \times L \times M$, такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f \alpha \text{ в окрестности } U \times L \times M.$$

Доказательство следствия. Достаточно доказать это для точки $0 \in K$. Пусть

$$\alpha_t = \alpha(tz, \lambda, \mu), \quad t \geq 0.$$

Ясно, что достаточно найти $t > 0$ такое, что для α_t найдется в окрестности $K \times L \times M$ функция f_t с нужными свойствами регулярности такая, что $\frac{\partial f_t}{\partial \bar{z}} = tf_t \alpha_t$ (полагая $f(z) = f_t\left(\frac{z}{t}\right)$ в окрестности $z = 0$).

Если t достаточно мало, то ta_t близко к 0 и, на основании разобранного нами случая теоремы 1, матрица f_t существует.

Прежде чем продолжать доказательство теоремы 1, мы выведем из предыдущих результатов следующую теорему А. Картана, которая нам будет нужна в дальнейшем.

2. Вторая часть. Теорема о голоморфных регулярных матрицах.

Теорема 2. Пусть K — прямоугольник на комплексной плоскости и L, M — два компактных множества в C^l, C^m соответственно. Пусть H — пересечение K с линией $\operatorname{Re} z = 0$. Пусть $C(z, \lambda, \mu)$ — функция класса C^∞ в окрестности $H \times L \times M$, голоморфная по z и λ и со значениями в $GL(m, C)$. Пусть

$$K_1 = K \cap \{z \in C \mid \operatorname{Re} z \geq 0\},$$

$$K_2 = K \cap \{z \in C \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Тогда существуют функции $C_1(z, \lambda, \mu)$ и $C_2(z, \lambda, \mu)$ в окрестностях $K_1 \times L \times M$, $K_2 \times L \times M$, удовлетворяющие тем же условиям регулярности, что и функции C , и такие, что в окрестности $H \times L \times M$

$$C = C_1 C_2^{-1}.$$

Доказательство. Сначала доказательство будет дано для случая, когда C мало отличается от единичной матрицы I . Пусть H' — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям в плоскости, содержащей H , такой, что $H' \times L \times M$ содержится в области определения C . Тогда $\log C$ (определенный как $\exp^{-1}(C)$) близок к нулю, если C близко к I в $H' \times L \times M$. Пусть φ — C^∞ -функция в окрестности K такая, что $\varphi(z) = 1$, если $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon$, и $\varphi(z) = 0$, если $\operatorname{Re} z \leqslant -\varepsilon$ (ε выбирается так, что пересечение K с полосой $|\operatorname{Re} z| \leqslant \varepsilon$ содержится в H'). Определим теперь

$$\gamma_2^{-1} = \exp(\varphi \log C) \quad \text{и} \quad \gamma_1 = C \gamma_2$$

в окрестности $H' \times L \times M$. Функцию γ_2 можно продолжить к окрестности $K_1 \times L \times M$, полагая $\gamma_2 = I$ для $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon$. Тогда получается

$$C = \gamma_1 \gamma_2^{-1}.$$

Если C близко к I , то γ_1 , γ_2 близки к I , в то время как $\frac{\partial \gamma_1}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial \gamma_2}{\partial \bar{z}}$ близки к 0. Поскольку C голоморфно, имеем

$$C \frac{\partial \gamma_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \bar{z}}$$

и

$$\gamma_1^{-1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \bar{z}} = \gamma_2^{-1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \bar{z}} = a.$$

Так как a близко к 0, если C близко к I , то существует C^∞ -функция $f(z, \lambda, \mu)$, голоморфная по λ в окрестности $K \times L \times M$, такая, что

$$f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = a.$$

Если $C_1 = \gamma_1 f^{-1}$, $C_2 = \gamma_2 f^{-1}$, то

$$\frac{\partial C_1}{\partial \bar{z}} = -\gamma_1 f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} f^{-1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \bar{z}} f^{-1} = -\gamma_1 a f^{-1} + \gamma_1 a f^{-1} = 0,$$

так что C_1 и также C_2 голоморфны по z и λ . Ясно, что $C = C_1 C_2^{-1}$ в окрестности $H \times L \times M$.

Чтобы доказать теорему 2 в общем случае, поступаем следующим образом. Пусть C — любая голоморфная регулярная матрица в окрестности $H \times L \times M$. Тогда существует регулярная матрица C' , голоморфная по z и λ в окрестности $K \times L \times M$, которая приближает C . Чтобы доказать это, заметим, что это очевидно, если C близко к единичной матрице (достаточно приблизить $\log C$ и пропотенцировать получающуюся матрицу) и если C не зависит от z . Далее, $C_t = C(z(1-t), \lambda, \mu)$ для каждого t в сегменте $0 \leq t \leq 1$ — голоморфная регулярная матрица с теми же свойствами регулярности, что и C , и C_1 не зависит от z . Очевидно, можем написать, что

$$C = (C_{t_0} C_{t_1}^{-1}) (C_{t_1} C_{t_2}^{-1}) \dots (C_{t_{v-1}} C_{t_v}^{-1}) C_1,$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_v = 1$ и t_i выбраны так, что $C_{t_{\mu-1}} C_{t_\mu}^{-1}$ близко к единице. Результат следует из нашего предыдущего замечания. В силу частного результата, доказанного выше, существуют голоморфные регулярные матрицы C'_1 , C_2 в окрестности $K_1 \times L \times M$ и $K_2 \times L \times M$ соответственно такие, что

$$(C')^{-1} C = C'_1 C_2^{-1},$$

так что имеем

$$C = C_1 C_2^{-1},$$

где $C_1 = C' C'_1$. Это завершает доказательство теоремы Кардана о голоморфных регулярных матрицах.

3. Третья часть. Доказательство теоремы I в общем случае. Согласно следствию из доказанного ранее частного случая теоремы I мы можем разбить K на конечное число замкнутых прямоугольников K_i со сторонами, параллельными осям координат, и получить функции f_i в окрестностях K_i

такие, что $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = f_i a$ и f_i имеет нужные свойства регулярности. Нам нужна функция определенного вида во всем K . Легко заметить, что достаточно решить следующую задачу: даны две функции f_1, f_2 в окрестностях двух смежных прямоугольников K_1 и K_2 такие, что в окрестностях $K_1 \times L \times M$ и $K_2 \times L \times M$ соответственно

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = f_1 a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = f_2 a.$$

Надо найти функцию f в окрестности $(K_1 \cup K_2) \times L \times M$ с условием $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = fa$. Поскольку $f_1^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = f_2^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}$, то функция $c = f_1 f_2^{-1} \in C^\infty$ в окрестности $H \times L \times M$ (H — общая сторона K_1 и K_2) и голоморфна по z и по λ . Следовательно, в силу теоремы 2 существуют матрицы c_1, c_2 в окрестностях $K_1 \times L \times M, K_2 \times L \times M$, голоморфные по z и λ , такие, что $c = c_1 c_2^{-1}$ в окрестности $H \times L \times M$. Тогда $c = c_1 c_2^{-1} = f_1 f_2^{-1}$ и $c_1^{-1} f_1 = c_2^{-1} f_2$ в окрестности $H \times L \times M$. Если положим $\tilde{f} = c_1^{-1} f_1$ в окрестности $K_1 \times L \times M$ и $\tilde{f} = c_2^{-1} f_2$ в окрестности $K_2 \times L \times M$, то

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = c_1^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = c_1^{-1} f_1 a = fa,$$

если z принадлежит окрестности K_1 , и то же равенство имеет место и в окрестности $K_2 \times L \times M$. Это завершает доказательство теоремы 1 в общем случае.

§ 10. Дополнительные результаты

1. Обобщение теоремы Гробендика. Пусть Ω — открытое множество в C^n и a — $(0, 1)$ -форма в Ω . Ищем условия, при которых существует дифференцируемое отображение f множества Ω в $GL(m, C)$ такое, что

$$f^{-1} d'' f = a.$$

Если $a = \sum a_k d\bar{z}_k$ и $f^{-1} d''f = a$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_l \partial \bar{z}_k} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_l} a_k + f \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_l} = f a_l a_k + f \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_l} = \\ &= - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_l} = f a_k a_l + f \frac{\partial a_l}{\partial \bar{z}_k},\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial a_l}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_l} + [a_k, a_l] = 0,$$

и если обозначим

$$[a, a] = \sum_{k < l} [a_k, a_l] d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l,$$

то можем написать эти уравнения так:

$$d''a + [a, a] = 0.$$

Следующее обобщение теоремы Гротендика дает обратное утверждение в случае куба:

Теорема 1. Пусть K — куб в C^n , a — $(0, 1)$ -дифференцируемая форма в окрестности K . Пусть

$$d''a + [a, a] = 0.$$

Тогда существует дифференцируемая регулярная матрица f в окрестности U куба K такая, что в U

$$f^{-1} d''f = a.$$

Доказательство. Употребляем индукцию, как и при выводе теоремы Гротендика. Рассмотрим следующее утверждение: для любой формы a типа $(0, 1)$ такой, что $d''a + [a, a] = 0$, для которой коэффициенты при $d\bar{z}_{k+1}, \dots, d\bar{z}_n$ равны нулю, существует f со значениями в $GL(m, C)$ такая, что $f^{-1} d''f = a$. При $k=0$ это утверждение тривиально, так как $a=0$, и можно взять $f=I$.

Пусть оно верно, если k заменено на $(k-1)$.

Пусть $a = \sum_{j=1}^k a_j d\bar{z}_j$. Так как $d''a + [a, a] = 0$ и $[a, a]$ не содержит $d\bar{z}_l$, $l > k$, то a_j голоморфно по z_{k+1}, \dots, z_n . По теореме 1 § 9 существует функция g ,

голоморфная по z_{k+1}, \dots, z_n , такая, что $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = g a_k$. Если положить $f = f'g$, то

$$f^{-1}d''f = g^{-1}f'^{-1}d''f'g + g^{-1}d''g,$$

и проблема сводится к нахождению f' такой, что

$$f'^{-1}d''f' = g(a - g^{-1}d''g)g^{-1} = \beta$$

(обозначение). Легко проверить, что $d''\beta + [\beta, \beta] = 0$, и видно, что коэффициенты $d\bar{z}_l$ ($l \geq k$) в β равны нулю; по индуктивному предположению f' существует.

2. Линейные расслоения. Пусть V – топологическое пространство, $\{O_i\}_{i \in J}$ – открытое покрытие V . Пусть в каждом $O_i \cap O_j$ определена непрерывная функция c_{ij} со значениями в $GL(m, C)$ такая, что множество $\{c_{ij}\}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $c_{ij}c_{ji} = I$ в $O_i \cap O_j$;
- 2) $c_{ij}c_{jk}c_{kl} = I$ в $O_i \cap O_j \cap O_k$.

Рассмотрим множество $\bigcup_{i \in J} (O_i \times C^m)$. Пусть $(x, y) \in O_i \times C^m$, $(x', y') \in O_j \times C^m$. Мы отождествим (x, y) с (x', y') , если $x = x'$ в V и $y' = c_{ij}(x)y$. Фактор-множество обозначим E .

Определение. E вместе с системой $\{O_i, c_{ij}\}$ называется *линейным расслоением* над V (со слоем C^m). V называется *базой* E .

E – топологическое пространство со следующими свойствами:

a) Существует каноническое отображение $p: E \rightarrow V$, которое непрерывно и есть отображение «на» V .

b) $p^{-1}(a) \simeq C^m$ для каждого $a \in V$ (топологически и как векторное пространство над C).

c) Каждая точка $a \in V$ имеет окрестность O такую, что $p^{-1}(O) \simeq O \times C^m$, причем изоморфизм топологический и совместимый с а) и б) очевидным образом.

Пусть E' – другое линейное расслоение над V , определенное системой $\{O'_a, c'_{ab}\}_A$. Пусть p' – отобра-

жение p , отвечающее E' , и имеется гомоморфизм E на E' , совместимый с а), б) и в). Тогда легко доказать, что $\{O_i, c_{ij}\}_j$, $\{O'_\alpha, c'_{\alpha\beta}\}_A$ связаны конечным числом применений следующих двух операций;

1. Переход к уточнениям, или обратный переход. $\{O'_\alpha, c'_{\alpha\beta}\}$ есть *уточнение* $\{O_i, c_{ij}\}_j$, если есть отображение $\varphi: A \rightarrow J$ такое, что $O_\alpha \subset O_{\varphi(\alpha)}$ и $c'_{\alpha\beta} = c_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$.

2. Если покрытия $\{O_i\}_{i \in J}$ одинаковые, переходим к новым функциям c'_{ij} , определяя $c'_{ij} = c_i c_{ij} c_j^{-1}$, где c_i непрерывны в O_i .

(Кроме того, легко показать, что если при определении E и E' употребляется одно и то же покрытие, то достаточно лишь применения операции 2.)

Если E и E' связаны указанным гомеоморфизмом, то будем говорить, что они *в одном и том же классе*.

Тривиальный класс определяется как класс, содержащий расслоение, получаемое при покрытии, состоящем из одного V . По отношению к покрытию $\{O_i\}_{i \in J}$ этот класс может быть определен тем, что в качестве функций c_{ij} берется единичная матрица I или, более общим образом, любые функции $c_i c_j^{-1}$, где c_i непрерывны в O_i . Расслоение *тривиально*, если оно находится в тривиальном классе.

Если V является дифференцируемым (комплексным аналитическим) многообразием, то мы определяем *дифференцируемое (аналитическое) линейное расслоение* над V таким же образом, но требуем, чтобы c_{ij} были дифференцируемыми (аналитическими).

Классы дифференцируемых, или аналитических, расслоений могут быть определены очевидным образом, и мы можем говорить о *тривиальном классе дифференцируемых, или аналитических, расслоений*.

Имеет место следующая важная теорема:

Теорема 2. Пусть K — куб в C^n , E — аналитическое расслоение в окрестности K . Тогда E тривиально над окрестностью K .

Доказательство. Разбивая K на меньшие (замкнутые) кубы K_i со сторонами, параллельными координатным гиперплоскостям, мы получаем голоморфные регулярные матрицы c_{ij} в окрестностях $K_i \cap K_j$ соответственно. Далее, если расслоение определено как $\{O_i, c_{ij}\}$ и тривиально над O_1, O_2 , мы можем заменить O_1 и O_2 их объединением и изменить c_{ij} так, чтобы получить эквивалентное расслоение (если $c_{12} = c_1 c_2^{-1}$, положим $O'_1 = O_1 \cap O_2; O'_i = O_i$, если $i \neq 1, 2$; $c'_{ij} = c_{ij}$, если $i, j \neq 1$, $c'_{1j} = c_1^{-1} c_{1j}$ ($= c_2^{-1} c_{2j}$); тогда $\{O'_i, c'_{ij}\}$ определяет эквивалентное расслоение). Таким образом, нам остается доказать лишь следующий результат: если даны два смежных куба K_1, K_2 и голоморфная регулярная матрица c в окрестности их общей грани, то мы можем написать $c = c_1 c_2^{-1}$ в окрестности $K_1 \cup K_2$; здесь c_1, c_2 — регулярные голоморфные матрицы в окрестностях K_1, K_2 соответственно. Но это следует сразу же из теоремы Картана о голоморфных матрицах (§ 9, теорема 2).

3. Приложение ко второй проблеме Кузена.

Дивизоры. *Дивизор* можно определить двумя путями, подобными двум определениям мероморфных функций и главных частей.

a) Пусть $\underline{\mathcal{M}}^*$ — пучок мультиликативных групп ростков мероморфных функций $\not\equiv 0$ на комплексном многообразии V , $\underline{\mathfrak{G}}$ — пучок мультиликативных групп ростков голоморфных функций, допускающих обратный элемент. *Дивизор* есть сечение $\underline{\mathcal{M}}^*/\underline{\mathfrak{G}}$ над V .

b) Пусть $\{O_i\}$ — открытое покрытие V и g_i — мероморфная функция на O_i . Система $\{O_i, g_i\}$ определяет *дивизор*, если функция $g_i g_j^{-1}$ и обратный ей элемент голоморфны на $O_i \cap O_j$. Две системы $\{O_i, g_i\}$ и $\{O'_j, g'_j\}$ определяют один и тот же дивизор, если $g_i g_j^{-1}$ голоморфны и обратимы в $O_i \cap O'_j$.

Вторая проблема Кузена состоит в следующем. Если дан дивизор $\{O_i, g_i\}$ на V , то существует ли мероморфная функция f на V такая, что $f = \gamma_i g_i$ на O_i , где γ_i и γ_i^{-1} голоморфны на O_i , т. е. существует ли одна мероморфная функция f на V , которая определяет тот же дивизор, что и $\{O_i, g_i\}$? Как и в случае первой проблемы Кузена, здесь возможно обобщение.

Пусть $\{O_i\}$ — открытое покрытие V и даны голоморфные функции γ_{ij} на $O_i \cap O_j$, имеющие обратный элемент и такие, что

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}\gamma_{ji} &= 1 \quad \text{на } O_i \cap O_j, \\ \gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki} &= 1 \quad \text{на } O_i \cap O_j \cap O_k. \end{aligned}$$

Существует ли голоморфная функция γ_i на O_i , имеющая обратный элемент, такая, что $\gamma_i \gamma_i^{-1} = \gamma_{ij}$ на $O_i \cap O_j$?

Легко видеть, что решение этой проблемы ведет к решению второй проблемы Кузена, ибо если определять $\gamma_{ij} = g_i g_j^{-1}$ на $O_i \cap O_j$ (здесь $\{O_i, g_i\}$ — данные из условия второй проблемы Кузена) и если $\gamma_{ij} = \gamma_i \gamma_j^{-1}$ (также на $O_i \cap O_j$), то $\gamma_i^{-1} g_i = \gamma_j^{-1} g_j$ на $O_i \cap O_j$, и мероморфная функция f , определяемая равенством $f = \gamma_i^{-1} g_i$ в O_i , решает вторую проблему Кузена.

Теорема 3. Обобщенная вторая проблема Кузена всегда разрешима в окрестности куба.

Доказательство. Пусть дана система $\{O_i, \gamma_i\}$ в окрестности куба K ; эта система определяет *аналитическое линейное расслоение* над окрестностью K (со слоем C). Разрешимость второй проблемы Кузена следует из тривиальности этого расслоения над окрестностью куба K , что доказывалось теоремой 2.

Упражнения

1. Пусть $\alpha(z) — C^\infty$ -функция с компактным носителем на плоскости. Пусть

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \int \alpha(\zeta) \frac{\zeta - z}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Докажите, что $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = a(z)$. Если a — лишь обобщенная функция с компактным носителем, докажите, что это уравнение имеет место в смысле теории обобщенных функций. Выведите, что если f — обобщенная функция такая, что $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ — непрерывная функция, то таковы же функции f , $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

2. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие. Допустим, что обобщенная первая проблема Кузена всегда разрешима на V . Докажите, что вторая обобщенная проблема Кузена разрешима, если она «дифференциальна разрешима» (в очевидном смысле).

Докажите, что на римановой сфере первая проблема Кузена всегда разрешима, вторая — не всегда.

3. Пусть K — компактное множество в C . Докажите, что аналитическое расслоение, дифференциально тривиальное над окрестностью K , аналитически тривиально над окрестностью K .

4. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие и $\{O_i, c_{ij}\}$ определяют аналитическое расслоение над V , которое дифференциально тривиально.

Пусть γ_i — C^∞ -функция на O_i с $c_{ij} = \gamma_i \gamma_j^{-1}$, голоморфной на $O_i \cap O_j$. Пусть $a_i = \gamma_i^{-1} d'' \gamma_i$. Покажите, что a_i определяет форму a типа $(0, 1)$. Какому условию удовлетворяет a ?

Пусть дана форма a типа $(0, 1)$ с условием $d''a + [a, a] = 0$; покажите, что она определяет класс аналитических расслоений над V , который дифференциально тривиален. Когда две такие формы a и b определяют один и тот же (аналитический) класс аналитических расслоений?

5. Обобщите результаты упражнения 4 на случай нетривиального класса дифференцируемых расслоений над V . Как приложение докажите, что если V — риманова поверхность и E — произвольное дифференцируемое расслоение над V , то всегда существует аналитическое расслоение, дифференциально эквивалентное E (употребите прием, сходный с тем, который применялся в шаге 1 теоремы 2 § 8).

Когерентные аналитические пучки

§ 11. Пучки

Определение. Пусть X и \mathfrak{F} — топологические пространства и π — отображение $\mathfrak{F} \rightarrow X$ такое, что

- 1) π есть отображение «на»,
- 2) π — локальный гомеоморфизм.

Тогда будем называть \mathfrak{F} (с отображением π) *пучком над X* , π будем называть *проекцией \mathfrak{F} на X* .

Сечение пучка \mathfrak{F} (над X) есть непрерывное отображение $s: X \rightarrow \mathfrak{F}$ такое, что $\pi \circ s$ есть тождественное отображение.

Сечение пучка \mathfrak{F} над подмножеством W из X есть сечение пучка $\pi^{-1}(W)$ над W .

Мы иногда будем называть сечением образ сечения s в \mathfrak{F} . Если $x \in X$, \mathfrak{F}_x будем обозначать $\pi^{-1}(x)$.

Предложение 1. *Сечение над открытым множеством $U \subset X$ есть открытое множество в \mathfrak{F} .*

Доказательство. Пусть $s: U \rightarrow \mathfrak{F}$ — сечение над U . Пусть $a \in s(U)$, и пусть O — открытое множество в $s(U)$ такое, что $O = O' \cap s(U)$, где O' открыто в \mathfrak{F} , и π , суженное до O' , есть гомеоморфизм O на открытое подмножество X . Так как s непрерывно, то $s^{-1}(O)$ открыто в X , т. е. $\pi(O)$ открыто в X и, таким образом, и в $\pi(O')$. Так как π — гомеоморфизм на O' , то O — открытое множество в O' и также в \mathfrak{F} .

Отсюда следует, в частности, что два сечения, совпадающие в какой-либо точке, совпадают в окрестности этой точки.

Предложение 2. Если $\underline{\mathfrak{F}}$ —пространство Хаусдорфа, то его сечение над замкнутым множеством замкнуто.

Доказательство. Пусть W —замкнутое множество в X , и пусть $a \in s(W)$ (s —данное сечение). Пусть $x = \pi(a)$. Пусть Ω_a —открытая окрестность a , гомеоморфная своей проекции. Точка a принадлежит замыканию $\Omega_a \cap s(W)$ в Ω_a , следовательно, $\pi(a)$ принадлежит и замыканию $\pi(\Omega_a \cap s(W)) \subset \pi s(W) = W$; поскольку W замкнуто, $\pi(a) \in W$. Предположим теперь, что $s(x) = b \neq a$, и пусть Ω_a , Ω_b —дизъюнктные окрестности a , b , гомеоморфные своим проекциям. Если y достаточно близко к x , то $s(y) \in \Omega_b$, и, значит, Ω_a не пересекается с $\overline{s(W)}$, что противоречит определению Ω_a .

Предложение 2 неверно, если $\underline{\mathfrak{F}}$ —не хаусдорфово пространство.

Примеры пучков.

1. Если V , W —многообразия и W растянуто на V отображением на V , то W есть пучок над V .

2. Пусть X —топологическое пространство, Y —любое множество; множество всех отображений $X \rightarrow Y$ порождает пучок (пучок ростков отображений $X \rightarrow Y$) следующим образом: два отображения окрестности $x \in X$ считаются эквивалентными, если они совпадают в какой-либо окрестности x . Множество классов эквивалентности в x обозначим $\underline{\mathfrak{F}}_x$ и $\underline{\mathfrak{F}} = \bigcup_{x \in X} \underline{\mathfrak{F}}_x$. Топология на $\underline{\mathfrak{F}}$ определяется методом, сходным с тем, который употреблялся в случае пучка ростков голоморфных функций в § 4.

3. Таким же образом, если X , Y —топологические пространства, то можно определить пучок ростков непрерывных отображений X в Y .

4. Если V , W —комплексные аналитические многообразия, то можно определить пучок ростков аналитических отображений V в W . Этот пучок—хаусдорфово пространство, что можно доказать рассуждениями, употреблявшимися в § 4, когда $W = C$.

Диагональное произведение двух пучков. Пусть $(\underline{\mathfrak{F}}, \pi)$, $(\underline{\mathfrak{G}}, \pi')$ —два пучка над X . Множество $(f, g) \in \underline{\mathfrak{F}} \times \underline{\mathfrak{G}}$ такое, что $\pi(f) = \pi'(g)$ может быть топологизировано естественным путем. Это множество образует пучок над X , называемый *диагональным произведением* $\underline{\mathfrak{F}} \vee \underline{\mathfrak{G}}$ пучков $\underline{\mathfrak{F}}$ и $\underline{\mathfrak{G}}$.

Пучок групп. Пусть $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок над X . $\underline{\mathfrak{F}}$ есть *пучок групп*, если

- 1) для каждого $x \in X$ \mathfrak{F}_x — группа;
- 2) отображение $a \rightarrow a^{-1}$ в $\underline{\mathfrak{F}}$ ($a, a^{-1} \in \mathfrak{F}_x$) непрерывно;
- 3) отображение $(f, g) \rightarrow fg$ из $\underline{\mathfrak{F}} \times \underline{\mathfrak{F}}$ в $\underline{\mathfrak{F}}$ непрерывно.

Пример. Пучок непрерывных отображений X в топологическую группу есть пучок групп.

Пучок колец. Пусть $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок над X . $\underline{\mathfrak{F}}$ есть *пучок колец*, если

- 1) для каждого $x \in X$ \mathfrak{F}_x — кольцо;
- 2) $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок (аддитивно записанных, абелевых) групп;
- 3) отображение $(f, g) \rightarrow fg$ из $\underline{\mathfrak{F}} \times \underline{\mathfrak{F}}$ в $\underline{\mathfrak{F}}$ непрерывно.

Пусть $\underline{\mathcal{A}}$ — пучок колец, $\underline{\mathfrak{M}}$ — пучок над тем же пространством X . $\underline{\mathfrak{M}}$ называется *пучком $\underline{\mathcal{A}}$ -модулей*, если

- 1) $\underline{\mathfrak{M}}$ — пучок абелевых групп (аддитивный);
- 2) для каждого $x \in X$ \mathfrak{M}_x есть \mathcal{A}_x -модуль;
- 3) отображение $(a, m) \rightarrow am$ из $\underline{\mathcal{A}} \times \underline{\mathfrak{M}}$ в $\underline{\mathfrak{M}}$ непрерывно (предполагается, что \mathfrak{M}_x — левый \mathcal{A}_x -модуль).

Следующий пример является важным.

Пусть $\{O_i, c_{ij}\}$ определяет линейное расслоение E над пространством V (c_{ij} — непрерывное отображение $O_i \cap O_j$ в $GL(m, C)$). Пусть p — проекция E на V . *Поперечным сечением расслоения* называется непрерывное отображение $s: V \rightarrow E$ такое, что $p \circ s$ есть тождественное отображение.

Мы можем определить *пучок ростков сечений расслоения* обычным путем. Этот пучок есть $\underline{\mathcal{C}}$ -модулей, где $\underline{\mathcal{C}}$ — пучок ростков непрерывных комплекснозначных функций на V .

Важно узнать, когда пучок модулей над $\underline{\mathcal{C}}$ может быть получен из расслоения указанным выше методом.

Предположим теперь, что пучок $\underline{\mathfrak{F}}$ можно так получить. Тогда, поскольку каждое $a \in V$ имеет окрестность U такую, что $p^{-1}(U) \cong U \times C^m$ (как

линейные расслоения) локально, то сужение $\underline{\mathfrak{F}}$ на U изоморфно (как пучок) пучку $\underline{\mathcal{E}}_U^m$, где $\underline{\mathcal{E}}_U$ — пучок ростков непрерывных функций на U .

Обратно, предположим, что пучок $(\underline{\mathfrak{F}}, \pi)$ имеет вышеуказанное свойство. Пусть $\{O_i\}$ — покрытие V такое, что $\pi^{-1}(O_i) \cong \underline{\mathcal{E}}_{O_i}^m$. Тогда $O_i \cap O_j$ будет открытым множеством как в O_i , так и в O_j и порождает автоморфизм $\varphi: \underline{\mathcal{E}}_{O_i \cap O_j}^m$, как пучка модулей над $\underline{\mathcal{E}}_{O_i \cap O_j}$. Пусть $e_p \in \underline{\mathcal{E}}_{O_i \cap O_j}^m$ — элемент, определенный $(0, \dots, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где всюду, кроме p -го места, стоит 0. Тогда $\varphi(e_p) = \sum a_{pq} e_q$ (так как φ есть автоморфизм пучка $\underline{\mathcal{E}}_{O_i \cap O_j}^m$, как пучка модулей над $\underline{\mathcal{E}}_{O_i \cap O_j}$), и мы можем определить матрицу $c_{ij} = (a_{pq})$. Поскольку φ — автоморфизм, то c_{ij} обратимо. Легко видеть, что расслоение, определяемое $\{O_i, c_{ij}\}$, порождает пучок $\underline{\mathfrak{F}}$. Это ведет к однозначному соответствуанию между классами линейных расслоений и пучками, локально изоморфными с $\underline{\mathfrak{F}}^m$.

Также существует одно-однозначное соответствие между поперечными сечениями линейного расслоения и сечениями пучка, определяемого расслоением.

§ 12. Общие свойства когерентных аналитических пучков

1. Аналитические пучки. Пусть $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок над базисным пространством X . Понятие *подпучка* определяется обычным путем (как подмножество $\underline{\mathfrak{F}}$, превращаемое в пучок сужением проекции на подмножество). Ясно, что если $\underline{\mathfrak{G}}, \underline{\mathfrak{H}}$ — подпучки $\underline{\mathfrak{F}}$, то $\underline{\mathfrak{G}} \cap \underline{\mathfrak{H}}$ — также пучок.

Пусть теперь $\underline{\mathfrak{F}}, \underline{\mathfrak{G}}$ — два пучка групп на X с проекциями π_f, π_g . Пусть φ — отображение $\underline{\mathfrak{F}} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}$. φ называется (*пучковым*) *гомоморфизмом*, если

- 1) φ непрерывно;
- 2) $\pi_f = \pi_g \circ \varphi$;
- 3) сужение φ на $\mathfrak{F}_a (= \pi_f^{-1}(x); x \in X)$ есть гомоморфизм группы \mathfrak{G}_x в $\mathfrak{G}_a (= \pi_g^{-1}(x))$.

Вводятся соответствующие определения подпучков в пучках алгебраических структур и гомоморфизмов таких пучков. Понятия одно-однозначного отображения («в»), отображения («на»), *образа* гомоморфизма, *ядра* гомоморфизма определяются очевидным путем.

Последовательность

$$\rightarrow \underline{\mathfrak{F}}_p \xrightarrow{d_p} \underline{\mathfrak{F}}_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \underline{\mathfrak{F}}_{p+2} \rightarrow \dots$$

пучков $\underline{\mathfrak{F}}_p$ групп (или других алгебраических структур) и гомоморфизмов $d_p: \underline{\mathfrak{F}}_p \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}_{p+1}$ называется *точной* в $\underline{\mathfrak{F}}_p$, если ядро d_{p+1} равно образу d_p ; она *точна*, если она точна в $\underline{\mathfrak{F}}_p$ при всех p .

Факторпучки. Пусть $\underline{\mathfrak{G}}$ — пучок групп над топологическим пространством X , $\underline{\mathfrak{F}}$ — подпучок $\underline{\mathfrak{G}}$ такой, что для всякого $x \in X$ \mathfrak{F}_x — нормальный делитель \mathfrak{G}_x . Тогда существует ровно один пучок $\underline{\mathfrak{H}}$ над X такой, что $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{G}_x/\mathfrak{F}_x$ и отображение $\eta: \underline{\mathfrak{G}} \rightarrow \underline{\mathfrak{H}}$ ($\eta_x: \mathfrak{G}_x \rightarrow \mathfrak{H}_x$ — естественный гомоморфизм) есть пучковый гомоморфизм. Достаточно положить $\underline{\mathfrak{H}} = \bigcup_{x \in X} (\mathfrak{G}_x/\mathfrak{F}_x)$ и ввести faktortopologию на $\underline{\mathfrak{H}}$. Ясно, что условия на $\underline{\mathfrak{H}}$, указанные выше, однозначно определяют топологию на ней.

Аналитические пучки. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие и $\underline{\mathfrak{O}} = \underline{\mathfrak{O}}_V$ — пучок простков голоморфных функций на V .

Определение. Аналитический пучок на V есть пучок $\underline{\mathfrak{O}}$ -модулей.

Можно очевидным образом определить (*аналитические*) подпучки аналитического пучка $\underline{\mathfrak{O}}$. Ясно, что пересечение аналитических подпучков $\underline{\mathfrak{O}}$ аналитично.

Обозначение. В дальнейшем O будет обозначать кольцо голоморфных функций на комплексном многообразии V , $\underline{\Omega}$ — пучок ростков голоморфных функций на V ; O^m , $\underline{\Omega}^m$ обозначают m -ю степень соответственно O и $\underline{\Omega}$.

Если $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок над пространством X , U — подмножество X , то $\underline{\mathfrak{F}}_U$ будет обозначать сужение $\underline{\mathfrak{F}}$ на U . \mathfrak{F}_U или $\Gamma(U, \underline{\mathfrak{F}})$ будет обозначать множество сечений $\underline{\mathfrak{F}}$ над U .

Примеры.

1. $\underline{\Omega}^m$ — аналитический пучок.

2. Пусть \mathfrak{M} — конечнопорождаемый подмодуль O^m (порожденный, скажем, k_1, \dots, k_p). Для $a \in V$ пусть \mathfrak{M}_a — подмодуль O_a^m , порожденный над O_a ростком $(k_1)_a, \dots, (k_p)_a$. Тогда $\underline{\mathfrak{M}} = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{M}_a$ — аналитический пучок над V . Чтобы это доказать,

достаточно показать, что если f — сечение $\underline{\Omega}^m$ над открытой окрестностью U точки $a \in V$, то существует окрестность $U_1 \subset U$ точки a такая, что $f_a \in \mathfrak{M}_a$ имеет следствием $f_b \in \mathfrak{M}_b$ для $b \in U_1$. Но

$$f_a = \sum_{i=1}^p (\lambda_i)_a (k_i)_a, \quad (\lambda_i)_a \in \Omega_a,$$

и есть открытая окрестность U_1 точки a и есть функция f, λ_i в U_1 такие, что $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i k_i$ в U_1 , откуда следует, что

$$(f)_b = \sum_{i=1}^p (\lambda_i)_b (k_i)_b \in \mathfrak{M}_b \text{ для } b \in U_1.$$

3. Пучок соотношений q элементов $\underline{\Omega}_q^m$. Пусть $k_1, \dots, k_q \in O^m$. Пусть \mathfrak{M}_a — подмодуль Ω_a , состоящий из векторов $((c_1)_a, \dots, (c_q)_a)$, $(c_i)_a \in \Omega_a$, таких, что $(c_1)_a (k_1)_a + \dots + (c_q)_a (k_q)_a = 0$. Легко проверить, что $\underline{\mathfrak{M}} = \underline{\mathfrak{M}}(k_1, \dots, k_q) = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{M}_a$ — аналитический пучок, называемый пучком соотношений между k_1, \dots, k_q .

2. Когерентные аналитические подпучки в $\underline{\Omega}^m$.

Определение. Пусть \mathfrak{F} — аналитический подпучок $\underline{\Omega}^m$. \mathfrak{F} называется *когерентным*, если верно следующее утверждение: для каждого $a \in V$ существует окрестность U точки a и конечное число сечений \mathfrak{F} над U , f_1, \dots, f_q таких, что для всякого $b \in U$ \mathfrak{F}_b будет Ω_b -порождено ростками $(f_1)_b, \dots, (f_q)_b$.

Имеет место важная теорема, которую мы здесь не будем доказывать. Теорема принадлежит К. Ока [7]. По поводу доказательства см. А. Картан [2, 3], лекция XV.

Теорема Ока. Пусть $k_1, \dots, k_q \in \Omega^m$. Тогда пучок соотношений $\underline{\mathfrak{N}}(k_1, \dots, k_q)$ есть когерентный аналитический пучок.

Следствие. Пусть $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ — когерентные аналитические подпучки $\underline{\Omega}^p$. Тогда $\mathfrak{F} \cap \underline{\mathfrak{G}}$ — когерентный аналитический пучок.

Доказательство следствия. Пусть U — окрестность $a \in V$; пусть $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m$ — сечения $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ над U такие, что $(f_1)_b, \dots, (f_k)_b$ (соответственно $(g_1)_b, \dots, (g_m)_b$) Ω_b -порождает \mathfrak{F}_b (соответственно \mathfrak{G}_b) для каждого $b \in U$. Рассмотрим пучок $\underline{\mathfrak{N}}(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m) = \underline{\mathfrak{N}}$ над U . Он когерентен по теореме Ока. Определим отображение φ пучка $\underline{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{F}_U \cap \underline{\mathfrak{G}}_U$ следующим образом: при $x \in U$ пусть

$$r = ((c_1)_x, \dots, (c_k)_x, (c'_1)_x, \dots, (c'_m)_x) \in \underline{\mathfrak{N}},$$

т. е.

$$\sum (c_i)_x (f_i)_x + \sum (c'_j)_x (g_j)_x = 0.$$

Образ $\varphi(r)$ этой точки пусть по определению будет $\sum (c_i)_x (f_i)_x \in \mathfrak{F}_x$. В силу указанного выше соотношения $\varphi(r) \in \mathfrak{G}_x$, так что $\varphi(r) \in \mathfrak{F}_x \cap \mathfrak{G}_x$, φ , очевидно, гомоморфизм $\underline{\mathfrak{N}}$ в $\mathfrak{F}_U \cap \underline{\mathfrak{G}}_U$. Далее, если

$$f_x = \sum (c_i)_x (f_i)_x = - \sum (c'_j)_x (g_j)_x \in \mathfrak{F}_x \cap \mathfrak{G}_x,$$

то $\varphi(r) = f_x$, где $r = ((c_1)_x, \dots, (c_k)_x, (-c'_1)_x, \dots, (-c'_m)_x)$, так что φ — гомоморфизм на $\mathfrak{F}_U \cap \mathfrak{G}_U$.

Отсюда легко следует, что $\mathfrak{F}_U \cap \mathfrak{G}_U$ когерентно, и следствие доказано.

Дадим несколько примеров некогерентных аналитических пучков.

Примеры.

1. Пусть \mathfrak{F} — пучок идеалов на V , т. е. \mathfrak{F}_a — идеал \mathfrak{D}_a (и, значит, \mathfrak{D}_a -модуль). Допустим, что \mathfrak{F} когерентен, и пусть в окрестности U точки a f_1, \dots, f_p порождают \mathfrak{F}_b над \mathfrak{D}_b . Тогда необходимо и достаточное условие того, что $\mathfrak{F}_b = \mathfrak{D}_b$, состоит в том, что хотя бы одно $f_l(b) \neq 0$. Поэтому множество b с $\mathfrak{F}_b \neq \mathfrak{D}_b$ совпадает с множеством общих нулей f_1, \dots, f_p . Таким образом, множество точек в $\mathfrak{F}_b \neq \mathfrak{D}_b$ есть *аналитическое подмножество* V (т. е. локально в V это — множество общих нулей конечного числа голоморфных функций).

Дополнение к открытому шару S в C^n не является аналитическим множеством. Поэтому, если мы положим $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{D}_a$ при $a \in S$, $\mathfrak{F}_a = 0$ при $a \in \bar{S}$, то аналитический пучок $\mathfrak{F} = \bigcup_{a \in C^n} \mathfrak{F}_a$

некогерентен.

2. Пусть $\Omega \neq V$ — открытое подмножество комплексного многообразия V . Пусть $\mathfrak{F}_a = \mathfrak{D}_a$ при $a \in \Omega$, $\mathfrak{F}_a = 0$ при $a \in \bar{\Omega}$. Пучок $\mathfrak{F} = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{F}_a$ будет аналитическим, но не когерентным

(определение нарушается в точках на границе Ω).

Пусть \mathfrak{F} — когерентный аналитический пучок на (связном) комплексном многообразии V . Тогда $\mathfrak{F}_a \neq 0$ в любой точке $a \in V$, если только \mathfrak{F}_a не обращается в нуль на всех точках $a \in V$: если $\mathfrak{F}_a = 0$ и $(f_1)_b, \dots, (f_p)_b$ \mathfrak{D}_b -порождает \mathfrak{F}_b для $b \in U$, где U — связная окрестность a , то f_1, \dots, f_p обращается в 0 в окрестности a , поскольку $\mathfrak{F}_a = 0$ и $\mathfrak{F}_b = 0$ при $b \in U$ по принципу аналитического продолжения. Поэтому множество точек a , где $\mathfrak{F}_a = 0$, открыто. Легко таким же образом доказать, что оно замкнуто, откуда и получается наш результат.

3. Общие когерентные аналитические пучки на комплексном аналитическом многообразии.

Определение. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие и \mathfrak{F} — аналитический пучок на V . \mathfrak{F} называется *когерентным*, если каждое $a \in V$

имеет открытую окрестность Ω такую, что $\underline{\mathfrak{F}}_\Omega \simeq \underline{\mathfrak{D}}_\Omega^p/\underline{\mathfrak{N}}$, где $\underline{\mathfrak{N}}$ — когерентный подпучок $\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^p$ (в первом смысле).

Для подпучков $\underline{\mathfrak{D}}^m$ оба определения когерентности совпадают. Ясно, что если задан подпучок $\underline{\mathfrak{D}}^m$, который локально является произвольным факторпучком некоторого $\underline{\mathfrak{D}}^p$, то существует естественный гомоморфизм $\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^p$ на $\underline{\mathfrak{F}}_\Omega(\Omega)$ (Ω — открытая окрестность данной точки $a \in V$) и $\underline{\mathfrak{F}}$ когерентен в смысле первого определения. Обратно, предположим, что $\underline{\mathfrak{F}} \subset \underline{\mathfrak{D}}^m$ и что у каждого $a \in V$ существует окрестность Ω такая, что в Ω p элементов g_1, \dots, g_p из $\underline{\mathfrak{F}}$ порождают $\underline{\mathfrak{F}}_\Omega$. Имеем гомоморфизм

$$((\varphi_1)_b, \dots, (\varphi_p)_b) \{ \equiv \underline{\mathfrak{D}}_b^p \} \rightarrow (\varphi_1)_b(g_1)_b + \dots + (\varphi_p)(g_p)_b$$

пучка $\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^p$ на $\underline{\mathfrak{F}}_\Omega$, ядро которого есть пучок соотношений $\underline{\mathfrak{N}}_\Omega(g_1, \dots, g_p)$, который когерентен по теореме Ока. Поэтому второе условие выполнено.

Предложение 1. *Пусть $\underline{\mathfrak{F}}$ — когерентный аналитический пучок. Пусть f_1, \dots, f_q — конечное число сечений $\underline{\mathfrak{F}}$. Тогда пучок $\underline{\mathfrak{N}}(f_1, \dots, f_q)$ соотношений между f_1, \dots, f_q когерентен.*

Доказательство. Пусть $a \in V$. Имеются p сечений g_1, \dots, g_p над окрестностью Ω точки a таких, что

1) $(g_1)_b, \dots, (g_p)_b$ \mathfrak{D}_b -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_b$ при $b \in \Omega$;

2) $\underline{\mathfrak{N}}_\Omega(g_1, \dots, g_p)$ — когерентный подпучок $\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^p$ (это просто переформулировка определения когерентности).

Мы имеем

$$(f_i)_a = \sum_{j=1}^p (\lambda'_i)_a (g_j)_a ((\lambda'_i)_a \equiv \mathfrak{D}_a),$$

так что существует открытая окрестность $\Omega' \subset \Omega$ точки a такая, что $f_i = \sum \lambda'_i g_j$ в Ω' . Предположим, что $b \in \Omega'_b$ и что $((\mu')_b, \dots, (\mu^q)_b) \equiv \underline{\mathfrak{N}}_b(f_1, \dots, f_q)$.

Тогда мы имеем

$$\sum_{i=1}^q (\mu^i)_b (f_i)_b = 0,$$

так что

$$\sum_{i,j} (\mu^i)_b (\lambda_i^j)_b (g_j)_b = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\sum_i (\mu^i)_b (\lambda_i^1)_b, \dots, \sum_i (\mu^i)_b (\lambda_i^p)_b \right) \in \mathfrak{N}_b(g_1, \dots, g_p).$$

Поскольку по предположению $\underline{\mathfrak{R}}_\Omega(g_1, \dots, g_p)$ когерентен, существуют функции h_k^j , $j = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, r$, и окрестность $\Omega'' \subset \Omega'$ точки a такая, что

$$\sum_i (\mu^i)_b (\lambda_i^j)_b = \sum_{k=1}^r (\nu^k)_b (h_k^j)_b$$

при $b \in \Omega''$, где $(\nu^k)_b \in \mathfrak{D}_b$. Отсюда следует, что

$$(\mu^1, \dots, \mu^q, -\nu^1, \dots, -\nu^r) \in \underline{\mathfrak{R}}_{\Omega''}(\lambda_i^j, h_k^j).$$

По теореме Ока $\underline{\mathfrak{R}}_{\Omega''}(\lambda_i^j, h_k^j)$ когерентен и системы $(\mu^1, \dots, \mu^q) \in \underline{\mathfrak{R}}_{\Omega''}(f_1, \dots, f_q)$ порождают факторпучок $\underline{\mathfrak{R}}_{\Omega''}(\lambda_i^j, h_k^j)$; поскольку последний пучок принадлежит $\mathfrak{D}_{\Omega''}$, пучок $\underline{\mathfrak{R}}_{\Omega''}(f_1, \dots, f_q)$ когерентен. Это доказывает 1).

Теорема 1. *Пусть $\underline{\mathfrak{G}}$ и $\underline{\mathfrak{F}}$ — два когерентных аналитических пучка. Пусть $\varphi: \underline{\mathfrak{G}} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}$ — гомоморфизм (как аналитических пучков) $\underline{\mathfrak{G}}$ в $\underline{\mathfrak{F}}$. Тогда ядро, образ, коядро и кообраз φ — когерентные аналитические пучки.*

(Коядро есть $\underline{\mathfrak{F}}/\varphi(\underline{\mathfrak{G}})$; кообраз есть $\underline{\mathfrak{G}}/\varphi^{-1}(\mathfrak{D})$).

Доказательство.

1. *Образ φ .* Пусть g_1, \dots, g_q — сечения над открытой окрестностью Ω такие, что $(g_1)_a, \dots, (g_q)_a$ \mathfrak{D}_a -порождают $\underline{\mathfrak{G}}_a$ при $a \in \Omega$. Тогда $\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_q)$ — сечения $\underline{\mathfrak{F}}$ над Ω , и они \mathfrak{D}_a -порождают $\varphi(\underline{\mathfrak{G}})_a$ при $a \in \Omega$. Поэтому на Ω $\varphi(\underline{\mathfrak{G}})$ изоморчен $\underline{\mathfrak{D}}_\Omega/\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N} =$

$= \underline{\mathfrak{N}}_{\Omega}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_q))$. Результат следует из предложения 1 и определения.

2. *Ядро* φ . Пусть $g_1, \dots, g_q \in \underline{\mathfrak{G}}_{\Omega}$ порождают $\underline{\mathfrak{G}}_{\Omega}$. Пучок $\underline{\mathfrak{N}}_{\Omega}(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_q))$ когерентен. Определим отображение $\underline{\mathfrak{N}}_{\Omega}$ на ядро φ следующим образом. Если $((c_1)_a, \dots, (c_q)_a) \in \underline{\mathfrak{N}}_a$, отобразим эту точку на $(c_1)_a(g_1)_a + \dots + (c_q)_a(g_q)_a$. Это дает гомоморфизм $\underline{\mathfrak{N}}_{\Omega}$ на ядро φ (суженное на Ω), и, согласно первой части доказательства, ядро когерентно.

3. *Колдро и кообраз* φ . Согласно частям 1 и 2 достаточно доказать следующее утверждение.

Если $\underline{\mathfrak{G}}$ — когерентный аналитический пучок, $\underline{\mathfrak{F}}$ — когерентный аналитический подпучок $\underline{\mathfrak{G}}$, то $\underline{\mathfrak{G}}/\underline{\mathfrak{F}}$ когерентен.

Каждому $a \in V$ отвечает открытое множество Ω ($a \in \Omega$) с $\underline{\mathfrak{G}}_{\Omega} \simeq \underline{\mathfrak{O}}_{\Omega}^p/\underline{\mathfrak{N}}$, где $\underline{\mathfrak{N}}$ когерентен. Пусть $f'_1, \dots, f'_q \in \underline{\mathfrak{F}}_{\Omega}$ порождают $\underline{\mathfrak{F}}_{\Omega}$. Так как $\underline{\mathfrak{F}}_{\Omega} \subset \underline{\mathfrak{G}}_{\Omega}$, то существуют элементы $f_1, \dots, f_q \in \underline{\mathfrak{O}}_{\Omega}^p$, переходящие в f'_1, \dots, f'_q . Пусть $\underline{\mathfrak{N}}$ — аналитический пучок над Ω , порожденный f_1, \dots, f_q ; он, очевидно, когерентен. Имеем $\underline{\mathfrak{F}}_{\Omega} \simeq (\underline{\mathfrak{R}} + \underline{\mathfrak{N}})/\underline{\mathfrak{N}}$, и, следовательно, $\underline{\mathfrak{G}}_{\Omega}/\underline{\mathfrak{F}}_{\Omega} \simeq \underline{\mathfrak{O}}_{\Omega}^p/(\underline{\mathfrak{R}} + \underline{\mathfrak{N}})$. Так как $\underline{\mathfrak{R}} + \underline{\mathfrak{N}}$, очевидно, когерентен, получаем требуемый результат.

4. Когерентные аналитические пучки на подмножествах комплексных аналитических многообразий. Пусть X — подмножество комплексного многообразия V . *Аналитический пучок* на X определяется как пучок $\underline{\mathfrak{O}}_X$ модулей ($\underline{\mathfrak{O}}_X$ есть, разумеется, сужение $\underline{\mathfrak{O}}$ на X). Определение *когерентного* аналитического пучка на X такое же, как раньше: если $\underline{\mathfrak{F}} \in \underline{\mathfrak{O}}_X^p$, то $\underline{\mathfrak{F}}$ когерентен, если для каждого $a \in X$ существуют окрестность U в X и элементы $f_1, \dots, f_p \in \underline{\mathfrak{F}}_U$ такие, что $(f_1)_b, \dots, (f_p)_b$ $\underline{\mathfrak{O}}_{Xb}$ -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_b$ для каждого $b \in X$. Аналитический пучок $\underline{\mathfrak{F}}$ на X *когерентен*, если каждое $a \in X$ имеет открытую окрестность $U \subset X$ такую, что $\underline{\mathfrak{F}}_U \simeq \underline{\mathfrak{O}}_U^p/\underline{\mathfrak{N}}$.

где \mathfrak{N} — когерентный аналитический подпучок $\underline{\Omega}_U^p$. Результаты п. 3 обобщаются на пучки $\underline{\Omega}_X^p$. Мы докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть X — компактное подмножество комплексного многообразия V и \mathfrak{F} — когерентный аналитический пучок на X . Тогда существует открытое множество $\Omega \supset X$ (открытое в V) и когерентный аналитический пучок $\underline{\mathfrak{G}}$ на Ω такой, что $\underline{\mathfrak{G}}_X \simeq \mathfrak{F}$.*

Мы начнем доказательство с замечания, которое непосредственно следует из того факта, что сечение пучка есть открытое отображение, и из определения когерентности.

Замечание. Пусть \mathfrak{F} , $\underline{\mathfrak{G}}$ — два когерентных аналитических пучка на подмножестве Y комплексного многообразия V , а f , g — два гомоморфизма $\mathfrak{F} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_a$.

Тогда множество точек $y \in Y$, для которых $f_y = g_y$ (f_y , g_y — гомоморфизмы $\mathfrak{F}_y \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_y$, определенные f и g соответственно), открыто в Y .

Для доказательства теоремы 2 нам нужны две леммы.

Лемма 1. *Пусть \mathfrak{F} , $\underline{\mathfrak{G}}$ — когерентные аналитические пучки на подмножестве $Y \subset V$. Пусть $a \in Y$, и предположим, что существует гомоморфизм $\varphi_a: \mathfrak{F}_a \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_a$. Тогда существует окрестность Ω точки a в Y такая, что φ_a может быть продолжен до гомоморфизма $\varphi: \mathfrak{F}_\Omega \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_\Omega$ (очевидным путем).*

Доказательство. Допустим, что в окрестности Ω' точки a $f_1, \dots, f_p \in \mathfrak{F}_{\Omega'}$ порождают $\mathfrak{F}_{\Omega'}$; пусть $g_1, \dots, g_p \in \underline{\mathfrak{G}}_{\Omega'}$ определяют соответственно ростки $(g_1)_a = \varphi_a((f_1)_a), \dots, (g_p)_a = \varphi_a((f_p)_a)$. Пучок соотношений между f_1, \dots, f_p когерентен, так что для достаточно малой окрестности Ω' он порождается в Ω' функциями (λ_i^k) , причем

$$\sum_i (\lambda_i^k)_a (f_i)_a = 0,$$

так что мы имеем

$$\sum_i (\lambda_i^k)_a (g_i)_a = 0.$$

Пусть $\Omega \subset \Omega'$ таково, что $\sum_i \lambda_i^k f_i = 0$, $\sum_i \lambda_i^k g_i = 0$ в Ω .

Пусть $b \Subset \Omega$, и пусть $\sum_i (\mu_i)_b (f_i)_b = 0$. Тогда

$$(\mu_i)_b = \sum_k (a_k)_b (\lambda_i^k)_b$$

и

$$\sum_i (\mu_i)_b (g_i)_b = \sum_k (a_k)_b \sum_i (\lambda_i^k)_b (g_i)_b = 0.$$

Отсюда, если $b \Subset \Omega$, из $\sum_i (\mu_i)_b (b_i)_b = 0$ следует $\sum_i (\mu_i)_b (g_i)_b = 0$, и гомоморфизм φ на Ω может быть определен формулой $\varphi_b((f_i)_b) = (g_i)_b$ при $b \Subset \Omega$.

Лемма 2. *Пусть X – компактное множество на V ; \mathfrak{F} , \mathfrak{G} – когерентные пучки в окрестности X . Пусть φ – гомоморфизм $\mathfrak{F}_X \rightarrow \mathfrak{G}_X$. Тогда φ можно продолжить до гомоморфизма $\mathfrak{F}_U \rightarrow \mathfrak{G}_U$, где U – подходящая окрестность X в V .*

Доказательство. По лемме 1 для любого $a \Subset X$ φ_a можно продолжить до гомоморфизма $\varphi_{\Omega_a}: \mathfrak{F}_{\Omega_a} \rightarrow \mathfrak{G}_{\Omega_a}$ в некоторой окрестности Ω_a точки a . Далее, φ и φ_{Ω_a} определяют один и тот же гомоморфизм $\varphi_a: \mathfrak{F}_a \rightarrow \mathfrak{G}_a$.

В силу замечания, предшествовавшего лемме 1, можем предположить, что $\varphi = \varphi_{\Omega_a}$ в $\Omega_a \cap X$. Так как X компактно, получаем конечное покрытие $\{\Omega_i\}$ множества X и гомоморфизмы $\psi_i: \mathfrak{F}_{\Omega_i} \rightarrow \mathfrak{G}_{\Omega_i}$ такие, что $\psi_i = \psi_j = \varphi$ в $\Omega_i \cap \Omega_j \cap X$. Снова по замечанию перед леммой 1 и в силу компактности X мы можем предположить, что $\psi_i = \psi_j$ в $U_i \cap U_j$, где U_i – открытое множество, содержащее $\Omega_i \cap X$. Ясно, что существует открытое множество $U \supset X$ такое, что $\psi_i = \psi_j$ в $\Omega_i \cap \Omega_j \cap U$ и $\psi_i = \varphi$ на $\Omega_i \cap X$. Отсюда следует лемма 2.

Доказательство теоремы 2. Из определения когерентных аналитических пучков (как локально изоморфных факторпучкам $\underline{\Omega}_X^p$, где $\underline{\Omega}_X$ — сужение $\underline{\Omega}_V$) следует, что если $a \in X$, то существует открытое множество Ω_a , $a \in \Omega_a$, и когерентный аналитический пучок $\underline{\mathcal{G}}^a$ над Ω_a такой, что

$$\underline{\mathcal{G}}^a_{\Omega_a \cap X} \simeq \underline{\mathfrak{F}}_{\Omega_a \cap X}.$$

Поскольку X компактно, существует конечное число когерентных аналитических пучков $\underline{\mathcal{G}}^1, \dots, \underline{\mathcal{G}}^r$ соответственно над открытыми множествами $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ $\left(\bigcup_{i=1}^r \Omega_i \supset X \right)$ таких, что

$$\underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap X} \simeq \underline{\mathfrak{F}}_{\Omega_i \cap X}.$$

Пусть эти изоморфизмы задаются отображениями $c_i: \underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap X} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}_{\Omega_i \cap X}$. На $\Omega_i \cap \Omega_j \cap X$ есть, таким образом, изоморфизм

$$c_{ij}: \underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap X} \rightarrow \underline{\mathcal{G}}^j_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap X}$$

(где $c_{ij} = c_j^{-1} c_i$). Далее, c_{ij} — тождественный изоморфизм; $c_{ij} c_{jk} c_{ki}$ — тождественный на $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \cap X$. По лемме 2 существуют окрестность U_{ij} множества $\Omega_i \cap \Omega_j \cap X$ ($U_{ij} = U_{ji}$) и гомоморфизм γ_{ij}

$$\underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U_{ij}} \rightarrow \underline{\mathcal{G}}^j_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U_{ij}}.$$

Также в силу замечания перед леммой 1 мы можем предположить, что U_{ij} таковы, что γ_{ii} тождественно на $\Omega_i \cap U_{ii}$, $\gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki}$ тождественно на $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \cap U_{ij} \cap U_{jk} \cap U_{ki}$, в частности, γ_{ij} есть изоморфизм $\underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U_{ij}}$ на $\underline{\mathcal{G}}^j_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U_{ij}}$. Поскольку X компактно, существует окрестность U множества X такая, что γ_{ij} — изоморфизм $\underline{\mathcal{G}}^i_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U}$ на $\underline{\mathcal{G}}^j_{\Omega_i \cap \Omega_j \cap U}$, γ_{ii} — тождественное преобразование и $\gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki}$ — тождественное (соответственно на $\Omega_i \cap U$, $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \cap U$).

Указанные пучки и изоморфизмы порождают когерентный аналитический пучок $\underline{\mathfrak{G}}$ на окрестности X . Также из определения ψ_{ij} следует, что $\underline{\mathfrak{G}}_X \simeq \underline{\mathfrak{F}}$, и доказательство теоремы 2 завершено.

Если многообразие V паракомпактно, X можно заменить любым замкнутым множеством в формулировке теоремы 2. По поводу деталей доказательства см. А. Картан [4] или Г. Даукер [6].

§ 13. Когомологии с коэффициентами в пучке

1. Когомологии покрытия. Пусть X – топологическое пространство, $\underline{\mathfrak{F}}$ – пучок абелевых групп на X . Пусть $O = \{O_i\}_{i \in I}$ – открытое покрытие X . Мы обозначим $O_{i_0 \dots i_p}$ множество $O_{i_0} \cap \dots \cap O_{i_p}$ и для открытых подмножеств U , входящих в X , через $\Gamma(U, \underline{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{F}_U$ – сечения $\underline{\mathfrak{F}}$ над U . (Если U пусто, полагаем $\Gamma(U, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$.)

Определение. *p-коцепью* O называется отображение c множества мультииндексов I^{p+1} такое, что $c_{i_0 \dots i_p} \in \Gamma(O_{i_0 \dots i_p}, \underline{\mathfrak{F}})$ со свойством *альтернирования* (т. е. $c_{i_0 \dots i_p} = \varepsilon c_{i_0 \dots i_p}$, если $(j_0 \dots j_p)$ – перестановка $(i_0 \dots i_p)$, и $\varepsilon = \pm 1$, смотря по тому, четна или нечетна эта перестановка).

$\mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ будет обозначать абелеву группу p -коцепей O ; $\mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{F}}) = \sum_{p \geq 0} \mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ – прямая сумма $\mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ для $p \geq 0$.

Кограничный оператор $\delta^p: \mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow \mathcal{L}^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{F}})$ определяется следующим образом: если $c \in \mathcal{L}^p$, то

$$(\delta^p c)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}},$$

где $i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}$ означает, что j -й индекс i_j удаляется. Оператор δ^p порождает кограничный

оператор $\delta: \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{F}})$. Можно проверить, что $\delta^p \circ \delta^{p-1} = 0$, т. е. $\delta \circ \delta = 0$.

Далее, элементы c из $\mathcal{L}^0(O, \underline{\mathfrak{F}})$ такие, что $\delta c = 0$, совпадают с теми элементами, у которых $c_{i_1} - c_{i_0} = 0$ в $O_{i_0 i_1}$ (по определению δ), и поскольку $c_{i_0} = c_{i_1}$ в $O_{i_0} \cap O_{i_1}$, то они отвечают сечениям над всем X , т. е. элементам $\Gamma(X, \underline{\mathfrak{F}})$. Поэтому мы имеем следующее соотношение:

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{i} \mathcal{L}^0(O, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1(O, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

и $\delta^p \circ \delta^{p-1} = 0$. Полагая, что $Z^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ равно ядру δ^p , $B^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ равно образу δ^{p-1} , мы определяем p -ю группу когомологий $H^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ покрытия O с коэффициентами в пучке $\underline{\mathfrak{F}}$ следующим образом:

$$H^p(O, \underline{\mathfrak{F}}) = Z^p(O, \underline{\mathfrak{F}})/B^p(O, \underline{\mathfrak{F}}), \quad p > 0,$$

$$H^0(O, \underline{\mathfrak{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathfrak{F}}).$$

2. Когомологии пространства X . Пусть $O = \{O_I\}_{I \in I}$, $\Omega = \{\Omega_a\}_{a \in A}$ — два (индексированных) покрытия X , и пусть Ω — утончение O , т. е. существует отображение $\varphi: A \rightarrow I$ такое, что $\Omega_a \subset O_{\varphi(a)}$ (мы не рассматриваем φ как заданное раз и навсегда, но просто требуем его существования). Отображение ρ группы $\mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{F}})$ в $\mathcal{L}^p(\Omega, \underline{\mathfrak{F}})$ определяется равенством

$$(\rho c)_{a_0 \dots a_p} = \text{сужению } c_{\varphi(a_0)} \dots \varphi(a_p) \text{ на } \Omega_{a_0 \dots a_p}.$$

Оно индуцирует отображение $\rho^*: H^p(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow H^p(\Omega, \underline{\mathfrak{F}})$ (что легко проверить).

Предложение 1. ρ^* не зависит от φ .

Доказательство. Пусть φ, ψ — два отображения $A \rightarrow I$ такие, что $\Omega_a \subset O_{\varphi(a)} \cap O_{\psi(a)}$. Допустим, что A вполне упорядочено. Для $p = 0$ результат очевиден, поскольку $H^0(O, \underline{\mathfrak{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathfrak{F}})$ для каждого O . Если $p \geq 1$, определим отображение k («оператор

гомотопии») $\mathcal{L}^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\Omega, \underline{\mathfrak{F}})$ посредством равенства

$$(kc)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j c_{\varphi(\alpha_0) \dots \varphi(\alpha_j) \psi(\alpha_{j+1}) \dots \psi(\alpha_p)},$$

если $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p$ (в смысле упорядочности в A), и затем определим kc однозначно как (альтернированную) коцепь. Если коцепи, отвечающие отображениям φ, ψ суть c', c'' в $\mathcal{L}^p(\Omega, \underline{\mathfrak{F}})$ соответственно, можно проверить, что

$$(k\delta + \delta k)c = c' - c''.$$

Следовательно, если c — коцикл (т. е. $\delta c = 0$), то $c' - c''$ — кограница, $c' - c'' = \delta(kc)$ и отображения φ и ψ индуцируют один и тот же гомоморфизм

$$H^p(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow H^p(\Omega, \underline{\mathfrak{F}}).$$

Это доказывает предложение 1.

Этот гомоморфизм обозначим $\sigma(O, \Omega)$. Он удовлетворяет некоторым очевидным свойствам транзитивности (как функция O, Ω).

Если $p = 0$, σ всегда является описанным выше изоморфизмом.

Предложение 2. Если $p = 1$, то σ — мономорфизм.

Нам надо показать, что если $\varphi: A \rightarrow I$ таково, что $\Omega_\alpha \subset O_{\varphi(\alpha)}$ и $c = 0$ в $H^1(\Omega, \underline{\mathfrak{F}})$, то $c = 0$ в $H^1(O, \underline{\mathfrak{F}})$. Пусть c — коцепь с $c_{\varphi(\alpha) \varphi(\beta)} = \gamma_\beta - \gamma_\alpha$ в $\Omega_{\alpha\beta}$. Для каждого i и $x \in O_i$, если $x \in \Omega_\alpha$, положим

$$c_i(x) = \gamma_\alpha(x) + c_{\varphi(\alpha)i}(x).$$

Если также $x \in \Omega_\beta$, то

$$\gamma_\beta(x) + c_{\varphi(\beta)i}(x) = \gamma_\alpha(x) + c_{\varphi(\alpha)i}(x),$$

поскольку

$$\gamma_\beta - \gamma_\alpha = c_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} = c_{\varphi(\alpha)i} - c_{\varphi(\beta)i}.$$

Это определяет сечение c_i на O_i , причем $c_{ij} = c_i - c_j$ в O_{ij} , что и доказывает наше предложение.

Гомоморфизм $\sigma(O, \Omega)$, определенный выше, зависит только от покрытий O, Ω . Если O, Ω — утончения одно другого, то $\sigma(O, \Omega)$ — изоморфизм. Поэтому мы отождествляем все покрытия, из которых каждое есть утончение другого, и рассматриваем класс всех индексированных покрытий соответственно этому отношению эквивалентности. Ясно, что такая факторизация может быть поставлена в одно-однозначное соответствие с подмножеством множества всех множеств X , так что ее можно рассматривать как множество, и мы имеем направленную систему

$$\{H^p(O, \underline{\mathfrak{F}}), \sigma(O, \Omega)\}$$

для любого p . Индуктивный предел этой системы называется p -группой когомологий X с коэффициентами в пучке $\underline{\mathfrak{F}}$ и обозначается $H^p(X, \underline{\mathfrak{F}})$. Очевидно,

$$H^0(X, \underline{\mathfrak{F}}) = \Gamma(X, \underline{\mathfrak{F}}).$$

3. Точная последовательность когомологий. Пусть

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{G}} \xrightarrow{\eta} \underline{\mathfrak{H}} \rightarrow 0$$

— точная последовательность пучков. Она, очевидно, порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{G}}) \rightarrow \mathcal{L}(\underline{\mathfrak{H}}),$$

но последнее отображение, вообще говоря, не будет «на».

Если обозначим через $\mathcal{L}_a(O, \underline{\mathfrak{H}})$ образ $\mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{H}})$ (группу «подымющихся коцепей»), то получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow \mathcal{L}(O, \underline{\mathfrak{G}}) \rightarrow \mathcal{L}_a(O, \underline{\mathfrak{H}}) \rightarrow 0.$$

Если Z_a^p — группа коцепей c в $\mathcal{L}_a^p(O, \underline{\mathfrak{H}})$ с $\delta c = 0$ и B_a^p — группа коцепей δc , $c \in \mathcal{L}_a^{p-1}(O, \underline{\mathfrak{H}})$, то мы определим группу $H_a^p(O, \underline{\mathfrak{H}})$ посредством

$$H_a^p(O, \underline{\mathfrak{H}}) = Z_a^p / B_a^p.$$

Теперь определим отображение

$$d^*: H_a^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \rightarrow H^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{G}})$$

следующим образом. Пусть $h \in Z_a^p$, и пусть $h_{i_0 \dots i_p} = \eta(g_{i_0 \dots i_p})$, где $g \in \mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{G}})$; далее, поскольку η и δ , очевидно, коммутируют, то $\eta((\delta g)_{i_0 \dots i_{p+1}}) = (\delta h)_{i_0 \dots i_{p+1}} = 0$; поскольку $h \in Z_a^p$, то $(\delta g)_{i_0 \dots i_{p+1}}$ является сечением над $O_{i_0 \dots i_{p+1}}$, которое переходит в 0 под действием гомоморфизма η , и $\delta g \in \mathcal{L}^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{G}})$ (так как $\underline{\mathfrak{G}}$ — ядро η).

Легко видеть, что класс δg в $H^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{G}})$ остается неизменным, если g заменить другой коцепью g' с $g' = h$ и если h заменить когомологичным коциклом. Это определяет d^* .

Ясно, что i , η индуцируют гомоморфизмы

$$i^*, \eta^*: H^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{i^*} H^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{\eta^*} H^p(O, \underline{\mathfrak{G}}),$$

и можно проверить точность следующей последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(O, \underline{\mathfrak{G}}) &\xrightarrow{i^*} H^0(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{\eta^*} H_a^0(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{d^*} \\ &\xrightarrow{d^*} H^1(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{i^*} \dots \xrightarrow{d^*} H^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{i^*} H^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{\eta^*} \\ &\xrightarrow{\eta^*} H_a^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(O, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{i^*} \dots \end{aligned}$$

Мы можем теперь определить группы $H_a^p(X, \underline{\mathfrak{G}})$, беря индуктивные пределы, когда покрытия становятся все более мелкими, как и для групп $H^p(X, \underline{\mathfrak{G}})$. Далее, имеется каноническое отображение $H_a^p(O, \underline{\mathfrak{G}}) \rightarrow H^p(O, \underline{\mathfrak{G}})$ и, таким образом, канонический гомоморфизм $H_a^p(X, \underline{\mathfrak{G}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathfrak{G}})$. Поскольку операция образования индуктивного предела коммутирует

с точностью последовательностей, мы получаем точную последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^*} H^p(X, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{i^*} H^p(X, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{n^*} \\ \xrightarrow{n^*} H_a^p(X, \underline{\mathfrak{H}}) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(X, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{i^*} \dots$$

Интересно выяснить, когда $H_a^p(X, \underline{\mathfrak{H}}) = H^p(X, \underline{\mathfrak{H}})$. Так будет в случае, если X паракомпактно (т. е. является хаусдорфовым пространством, где каждое покрытие допускает локально конечное утончение).

Теорема. *Если X паракомпактно и*

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{G}} \xrightarrow{n} \underline{\mathfrak{H}} \rightarrow 0$$

есть точная последовательность пучков над X , то канонический гомоморфизм

$$H_a^p(X, \underline{\mathfrak{H}}) \rightarrow H^p(X, \underline{\mathfrak{H}})$$

является изоморфием.

Теорема является непосредственным следствием такой леммы:

Лемма. *Если $O = \{O_i\}_{i \in I}$ есть покрытие X и $c \in \mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{H}})$, то существует покрытие $\Omega = \{\Omega_a\}_{a \in A}$ и отображение $\varphi: A \rightarrow I$ с $\Omega_a \subset O_{\varphi(a)}$ такое, что индуцированный гомоморфизм*

$$\mathcal{L}^p(O, \underline{\mathfrak{H}}) \rightarrow \mathcal{L}^p(\Omega, \underline{\mathfrak{H}})$$

переведет c в коцепь

$$\varphi^*(c) \equiv \mathcal{L}_a^p(\Omega, \underline{\mathfrak{H}}).$$

Доказательство леммы. Поскольку X паракомпактно, мы можем допустить, что O локально конечно. Поскольку X нормально (см. Дьеонне [5]), существует открытое покрытие $\{O'_i\}_{i \in I}$ такое, что $\bar{O}'_i \subset O_i$. Для каждого $x \in X$ мы выбираем открытую окрестность Ω_x точки x такую, что

- 1) $x \in O_i$ (соответственно O'_i) влечет $\Omega_x \subset O_i$ (соответственно O'_i);
- 2) $\Omega_x \cap O'_i \neq \emptyset$ влечет $\Omega_x \subset O_i$;

3) если $x \in O_{t_0 \dots t_p}$, то существует сечение s пучка $\underline{\mathfrak{G}}$ над Ω_x такое, что $\eta(s) = c_{t_0 \dots t_p}$ на Ω_x .

Поскольку O локально конечно, из определения факторпучка следует, что 3) выполнимо, и 1) и 2) тогда обеспечены, если выбрать достаточно малое Ω_x . Это дает нам покрытие $\{\Omega_x\}_{x \in X} = \Omega$ пространства X ; мы выбираем отображение $\varphi: X \rightarrow I$ такое, что $\Omega_x \subset O'_{\varphi(x)}$. После этого легко проверить, что Ω и φ имеют свойство, указанное в лемме.

§ 14. Когерентные аналитические пучки на кубе

1. Абстрактная теорема де Рама. Пусть X — паракомпактное топологическое пространство, $\underline{\mathfrak{G}}$ — пучок абелевых групп на X . Предположим, что

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{G}}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{\mathfrak{G}}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{k-1}} \underline{\mathfrak{G}}_k \xrightarrow{d_k} \dots$$

— точная последовательность пучков на X и что $H^p(X, \underline{\mathfrak{G}}) = 0$ для $p \geq 1, k \geq 0$. Рассмотрим последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \underline{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{i^*} \Gamma(X, \underline{\mathfrak{G}}_0) \xrightarrow{d_0^*} \dots \xrightarrow{d_{k-1}^*} \Gamma(X, \underline{\mathfrak{G}}_k) \xrightarrow{d_k^*} \dots$$

с индуцированными гомоморфизмами d_k^* (эта последовательность, вообще говоря, не точна). Тогда

$$H^k(X, \underline{\mathfrak{G}}) \simeq \text{ядро } d_k^* / \text{образ } d_{k-1}^* \text{ при } k \geq 1.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\underline{\mathfrak{G}}_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \underline{\mathfrak{G}}_k \xrightarrow{d_k} \underline{\mathfrak{G}}_{k+1},$$

и пусть $\underline{\mathfrak{G}}_k = \text{ядру } d_k = \text{образу } d_{k-1}$. Тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_k \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_k \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_{k+1} \rightarrow 0,$$

и, поскольку X паракомпактно, мы получаем при $q > 0$ точную последовательность

$$H^q(X, \underline{\mathfrak{G}}_k) \rightarrow H^q(X, \underline{\mathfrak{G}}_{k+1}) \rightarrow H^{q+1}(X, \underline{\mathfrak{G}}_k) \rightarrow H^{q+1}(X, \underline{\mathfrak{G}}_k),$$

и поскольку $H^p(X, \underline{\mathfrak{G}}_k) = 0$, если $p \geq 1$, то при $q \geq 1$

$$H^q(X, \underline{\mathfrak{G}}_{k+1}) \simeq H^{q+1}(X, \underline{\mathfrak{G}}_k).$$

Путем итераций получаем

$$H^p(X, \underline{\mathfrak{G}}) \simeq H^{p-1}(X, \underline{\mathfrak{G}}) \simeq \dots \simeq H^1(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}). \quad (1)$$

Мы имеем также точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_{p-1} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_{p-1} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_p \rightarrow 0$$

и индуцированную точную последовательность

$$H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}) \rightarrow H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_p) \rightarrow H^1(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}) \rightarrow H^1(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}).$$

Поскольку последний член есть 0 по предположению, то

$$H^1(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}) \simeq H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_p)/\text{образ } H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}).$$

Легко видеть, что $H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_p) \simeq$ ядро d_p^* и образ $H^0(X, \underline{\mathfrak{G}}_{p-1}) =$ образу d_{p-1}^* , так что результат следует из (1).

Приложения.

а) Теорема де Рама. Пусть $X = V$ — паракомпактное дифференцируемое многообразие и $\underline{\mathfrak{G}}^p$ — пучок ростков дифференциальных p -форм на V . Тогда мы имеем последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{S}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{G}}^0 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \underline{\mathfrak{G}}^p \xrightarrow{d} \underline{\mathfrak{G}}^{p+1} \xrightarrow{d} \dots$$

($\underline{\mathfrak{S}}$ — постоянный пучок, \mathfrak{S} — группа комплексных чисел). Эта последовательность точна в силу локальной формы теоремы Пуанкаре (см. § 8). Методом 1-го шага решения обобщенной первой проблемы Кузена (§ 8) можно показать, что $H^k(V, \underline{\mathfrak{G}}^p) = 0$ при $k \geq 1$, $p \geq 0$. Отсюда, по приведенной выше теореме, находим

$$H^p(V, \underline{\mathfrak{S}}) \simeq (\text{группа замкнутых } p\text{-форм})/$$

/(дифференциалы $(p-1)$ -форм),

т. е. $H^p(V, \underline{\mathfrak{S}})$ то же, что p -мерная d -когомология V . Это — теорема де Рама.

б) Теорема Дольбо. Пусть V — паракомпактное комплексное многообразие и $\underline{\mathfrak{E}}^{0, p}$ — пучок ростков форм типа $(0, p)$ на V . Тогда локальная форма теоремы Гrotендика показывает, что последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{D}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{E}}^{0, 0} \xrightarrow{d''} \underline{\mathfrak{E}}^{0, 1} \xrightarrow{d''} \dots$$

точна ($\underline{\mathfrak{D}}$ есть пучок ростков голоморфных функций на V). Снова, пользуясь методом для решения обобщенной первой проблемы Кузена, мы доказываем, что

$$H^k(V, \underline{\mathfrak{E}}^{0, p}) = 0, \quad p \geq 0, k \geq 1,$$

и получаем

$$H^p(V, \underline{\mathfrak{D}}) \simeq (d''\text{-замкнутые } (0, p)\text{-формы}) / (d''\text{-дифференциалы } (0, p-1)\text{-форм}),$$

т. е. $H^p(V, \underline{\mathfrak{D}})$ то же, что p -мерная d'' -когомология $(0, r)$ -форм, $r = 0, 1, \dots$ на V .

Аналогичное рассуждение показывает, что p -я когомология с коэффициентами в пучке ростков голоморфных $(q, 0)$ -форм является p -й d'' -когомологией (q, r) -форм, $r = 0, 1, \dots$ на V . Это — частный случай теоремы Дальбо.

с) Пусть K — куб, погруженный в C^n , т. е. подмножество заданного C^n , состоящее из точек $z \in C^n$ с условием $|Re z_i| \leq a_i$, $|Im z_i| \leq b_i$, $a_i, b_i \geq 0$. Рассмотрим пучок $\underline{\mathfrak{D}} = \underline{\mathfrak{D}}_K$ (в смысле § 12, т. е. сужение на K пучка ростков голоморфных функций в C^n). Определим пучки $\underline{\mathfrak{E}}^{0, p}$ таким же путем, как сужение на K пучка ростков $(0, p)$ -форм в C^n . Как ранее, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{D}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{E}}^{0, 0} \xrightarrow{d''} \underline{\mathfrak{E}}^{0, 1} \xrightarrow{d''} \dots$$

и

$$H^p(K, \underline{\mathfrak{D}}) \simeq (d''\text{-замкнутые } (0, p)\text{-формы}) / (d''\text{-дифференциалы } (0, p-1)\text{-форм}).$$

Теорема Гrotендика показывает, что эта факторгруппа есть 0 (теорема была доказана только при $a_i > 0$, $b_i > 0$, но непосредственно видно, что она

верна также, если некоторые из a_i, b_i — нули). Это доказывает следующую теорему:

Теорема 1. *Если K — замкнутый куб в C^n , то*

$$H^p(K, \underline{\Omega}) = 0 \quad \text{при } p \geq 1.$$

Следствие. *Если $p, q \geq 1$, то $H^p(K, \underline{\Omega}^q) = 0$.*

(Достаточно приложить теорему 1 к компонентам элемента c из $Z^p(K, \underline{\Omega}^q)$, чтобы увидеть, что c — ко-граница.)

Поучительно сравнить предыдущее доказательство с решением обобщенной первой проблемы Кузена для куба, содержащим утверждение, что $H^1(K, \underline{\Omega}) = 0$. (Это как раз обобщение указанного доказательства на более общую ситуацию данного случая.)

2. Когерентные аналитические пучки на кубе. Пусть K — куб в C^n и $\underline{\mathfrak{F}}$ — когерентный аналитический пучок на K .

Фундаментальная теорема (Ока — Картан — Серр).

A. $\underline{\mathfrak{F}}$ — (глобально) факторпучок пучка $\underline{\Omega}^N$. Это можно также выразить, сказав, что существуют N (глобальных) сечений f_1, \dots, f_N $\underline{\mathfrak{F}}$, которые Ω_b -порождают \mathfrak{F}_b для любого $b \in K$.

B. Для $p \geq 1$ $H^p(K, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$.

Рассматриваем следующее утверждение:

A'. $\underline{\mathfrak{F}}$ (глобально) является факторпучком когерентного аналитического пучка, локально изоморфного $\underline{\Omega}^N$.

Доказательство фундаментальной теоремы теперь разбивается на две части: доказательство того, что A' влечет A и B для куба, и доказательство A' для куба.

Шаг 1. Верность A' для любого $\underline{\mathfrak{F}}$ влечет верность A и B для любого $\underline{\mathfrak{F}}$.

1. Пусть A' верно для всех $\underline{\mathfrak{F}}$. Тогда $\underline{\mathfrak{F}}$ — факторпучок пучка $\underline{\mathfrak{G}}$, локально изоморфного $\underline{\Omega}^N$. Поэтому $\underline{\mathfrak{G}}$ определяет класс аналитических расслоений над окрестностью K (конец § 11; результаты, доказанные там, относятся к топологическим расслоениям,

но остаются верными при очевидных изменениях для аналитических расслоений).

По теореме 2 § 10 этот класс — тривиальный класс в некоторой окрестности K , так что $\underline{\mathfrak{G}} \simeq \underline{\mathfrak{D}}^N$, и А доказано.

2. Следуя А, имеем точную последовательность

$$\underline{\mathfrak{D}}^{N_1} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \rightarrow 0,$$

и если $\underline{\mathfrak{G}}_1$ — ядро этого отображения, то $\underline{\mathfrak{G}}_1$ — когерентный аналитический пучок по теореме 1 § 12, и мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_1 \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}^{N_1} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}_1 \rightarrow 0.$$

Поскольку А предположено верным для *всех* когерентных аналитических пучков, мы получаем точные последовательности

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_2 \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}^{N_2} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_1 \rightarrow 0,$$

.

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_k \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}^{N_k} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}_{k-1} \rightarrow 0,$$

.

Это ведет к точной последовательности

$$H^p(K, \underline{\mathfrak{D}}^{N_k}) \rightarrow H^p(K, \underline{\mathfrak{G}}_{k-1}) \rightarrow H^{p+1}(K, \underline{\mathfrak{G}}_k) \rightarrow H^{p+1}(K, \underline{\mathfrak{D}}^{N_k}).$$

Если $p \geq 1$, то первый и последний члены равны нулевой группе по теореме 1, приведенной выше, и, следовательно,

$$H^p(K, \underline{\mathfrak{G}}_{k-1}) \simeq H^{p+1}(K, \underline{\mathfrak{G}}_k). \quad (2)$$

Существует такое целое число m , что всякое покрытие \hat{K} имеет утончение, в котором пересечение любых $m + 1$ множеств (утончение) пусто. (Это доказывается, например, подразделением K на меньшие кубы. Это утверждение, однако, по существу принадлежит теории размерности; классическая теория размерности показывает, что наименьшее возможное значение m есть $2n + 1$ и что это относится не только к кубам. Указанное выше свойство является исходным при построении новейшей теории размерности.)

Отсюда $H^{m+p}(K, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$ для любого пучка $\underline{\mathfrak{F}}$ над K и $p \geq 1$. Повторяя (2), получаем

$$H^p(K, \underline{\mathfrak{F}}) \simeq H^{p+1}(K, \underline{\mathfrak{G}}_1) \simeq \dots \simeq H^{m+p}(K, \underline{\mathfrak{G}}_m) = 0,$$

и В доказано.

Шаг 2. Доказательство А' для куба. Доказательство приводится по индукции по реальной размерности куба K . Если K имеет размерность 0, A' совпадает с определением когерентного аналитического пучка. Пусть A' верно для всех кубов K' реальной размерности p и всех когерентных аналитических пучков $\underline{\mathfrak{F}}$ на K' . Тогда А и В также верны для K' и $\underline{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь K — куб реальной размерности $p + 1$. Найдем координатную гиперплоскость такую, что пересечение K с любой гиперплоскостью, параллельной ей, имеет размерность p (если оно не пусто). Сужение $\underline{\mathfrak{F}}$ к каждому такому пересечению является когерентным аналитическим пучком и, по индуктивной гипотезе, \simeq факторпучку $\underline{\mathfrak{D}}^N$. Теорема о расширении (§ 12) показывает, что существует окрестность каждого пересечения, в которой $\underline{\mathfrak{F}}$ индуцирует когерентный аналитический пучок, изоморфный факторпучку некоторого $\underline{\mathfrak{D}}^N$. Из леммы Бореля — Лебега следует, что достаточно доказать лишь такой результат:

Даны два смежных куба K_1, K_2 размерности $p + 1$ такие, что $P = K_1 \cap K_2$ размерности p , и когерентный аналитический пучок $\underline{\mathfrak{F}}$ на $K_1 \cup K_2$ такой, что $\underline{\mathfrak{F}}$ есть факторпучок пучка $\underline{\mathfrak{D}}^{N_1}$ на K_1 и факторпучок пучка $\underline{\mathfrak{D}}^{N_2}$ на K_2 ; тогда $\underline{\mathfrak{F}}$ — факторпучок, локально изоморфного $\underline{\mathfrak{D}}^{N_1+N_2}$ на $K_1 \cup K_2$.

Пусть

$$(f) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_1} \end{pmatrix},$$

f_1, \dots, f_{N_1} — сечения $\underline{\mathfrak{F}}$ над K_1 , которые \mathfrak{D}_a -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_a$ при $a \in K_1$;

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N_2} \end{pmatrix},$$

g_1, \dots, g_{N_2} — сечения $\underline{\mathfrak{F}}$ над K_2 , \mathfrak{D}_b -порождающие $\underline{\mathfrak{F}}_b$ при $b \in K_2$. Легко видеть, что достаточно найти голоморфную регулярную матрицу c на P такую, что

$$c \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти c , используем следующую лемму, которая интересна и сама по себе:

Лемма. *Если φ — сечение $\underline{\mathfrak{F}}$ над P , то существует N_1 голоморфных функций $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}$ на P таких, что*

$$\varphi = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{N_1} f_{N_1}.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}' \rightarrow \underline{\mathfrak{D}}^{N_1} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \rightarrow 0$$

(члены ее — пучки над $P = K_1 \cap K_2$; $\underline{\mathfrak{G}}'$ — ядро гомоморфизма $\underline{\mathfrak{D}}^{N_1} \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}$). Это дает точную последовательность

$$H^0(P, \underline{\mathfrak{D}}^{N_1}) \rightarrow H^0(P, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow H^1(P, \underline{\mathfrak{G}}'),$$

и по индуктивному предположению $H^1(P, \underline{\mathfrak{G}}') = 0$, так как P имеет размерность p . Поэтому отображение

$$H^0(P, \underline{\mathfrak{D}}^{N_1}) \rightarrow H^0(P, \underline{\mathfrak{F}})$$

есть отображение «на», и лемма отсюда следует.

Построение c . Лемма показывает, что существует матрица γ_1 из N_1 столбцов и N_2 строк такая, что

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N_2} \end{pmatrix},$$

т. е. $\gamma_1(f) = (g)$. Точно так же существует матрица γ_2 с N_2 столбцами и N_1 строками такая, что

$$\gamma_2(g) = (f).$$

Если положим

$$c = \begin{pmatrix} -I & \gamma_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \gamma_1 & I \end{pmatrix},$$

то ясно, что c регулярна. Далее, $\begin{pmatrix} I & 0 \\ \gamma_1 & I \end{pmatrix}$ переводит $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -I & \gamma_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ переводит $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$. Это завершает шаг 2 и с ним — доказательство фундаментальной теоремы.

Замечание. Можно избежать всех ссылок на расслоение, если после конструкции C применить теорему Картана о голоморфных регулярных матрицах, чтобы доказать непосредственно A и B , не вводя A' .

Утверждение A' верно для значительно более широкого класса множеств, чем те, для которых верно A . В настоящее время проблема классификации компактных множеств, для которых верно A' , еще открыта (даже в C^n).

§ 15. Многообразия Штейна; предварительные результаты

1. Теоремы A и B для замкнутых поликругов в C^n . Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, K — компактное подмножество V . Мы говорим, что теоремы A и B верны для K , если:

А. Каждый когерентный аналитический пучок $\underline{\mathfrak{F}}$ на K есть факторпучок пучка $\simeq \underline{\mathfrak{O}}^N$.

В. $H^p(K, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$ при $p \geq 1$.

Предложение 1. Теоремы А и В верны для (замкнутых) поликругов в C^n .

Доказательство. Пусть P – данный поликруг. P имеет фундаментальную систему окрестностей, каждая из которых аналитически изоморфна замкнутому кубу: P имеет фундаментальную систему окрестностей, являющихся открытыми поликругами Π ; Π , являясь произведением открытых кругов, изоморфен открытому кубу Π_1 , и образ P в Π_1 содержится в замкнутом кубе, содержащемся в Π_1 , прообраз которого в Π есть окрестность, изоморфная замкнутому кубу. Поскольку теорема А и В верны для замкнутых кубов, отсюда следует, что теоремы А и В верны для фундаментальной системы окрестностей P ; из теоремы о расширении из § 12 легко видеть, что А верно для P , а В вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. Пусть X – паракомпактное топологическое пространство, $\underline{\mathfrak{F}}$ – пучок абелевых групп на X . Пусть Y – замкнутое множество в X с фундаментальной системой замкнутых окрестностей L . Тогда $H^p(Y, \underline{\mathfrak{F}})$ есть индуктивный предел $H^p(L, \underline{\mathfrak{F}})$ при L , сжимающемся до Y .

Доказательство. При $p = 0$ утверждение леммы следует из того факта, что каждое сечение над Y можно продолжить до сечения над открытой окрестностью Y , и из того факта, что множество точек, где два сечения совпадают, открыто. При $p > 0$ сконструируем точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \xrightarrow{i} \underline{\mathfrak{G}}_0 \xrightarrow{d_0} \underline{\mathfrak{G}}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{k-1}} \underline{\mathfrak{G}}_k \rightarrow d_k \dots \quad (1)$$

такую, что $H^p(E, \underline{\mathfrak{G}}_l) = 0$ при $p > 0$, $l \geq 0$ для всех подмножеств E пространства X . Для этого, очевидно, достаточно построить точную последовательность $0 \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}$, $H^p(E, \underline{\mathfrak{G}}) = 0$ при $p > 0$ (так как построение можно повторить с факторпучком $\underline{\mathfrak{G}}/\underline{\mathfrak{F}}$ и

продолжить процесс). Определим $\underline{\mathfrak{G}}$ как пучок ростков всех отображений $f: X \rightarrow \underline{\mathfrak{F}}, f(\bar{x}) \in \mathfrak{F}_x$ при $x \in X$. Тогда, очевидно, имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{F}} \rightarrow \underline{\mathfrak{G}},$$

и $H^p(E, \underline{\mathfrak{G}}) = 0$ при $p > 0$ по теореме, изложенной в приложении на стр. 107.

Построив точную последовательность (1), мы рассматриваем соответствующую ей последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma(E, \underline{\mathfrak{F}}) \xrightarrow{i^*} \Gamma(E, \underline{\mathfrak{G}}_0) \xrightarrow{d_0^*} \dots \xrightarrow{d_{k-1}^*} \Gamma(E, \underline{\mathfrak{G}}_k) \xrightarrow{d_k^*},$$

и согласно абстрактной теореме де Рама имеем

$$H^p(E, \underline{\mathfrak{F}}) \simeq (\text{ядро } d_p^*) / (\text{образ } d_{p-1}^*) \quad (p \geq 1). \quad (2)$$

Как и в случае $p = 0$, когда L сжимается к Y , ядро d_k^* и образ d_{k-1}^* (с заменой E на L) имеют в качестве индуктивных пределов ядро и образ отображений

$$\Gamma(Y, \underline{\mathfrak{G}}_k) \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathfrak{G}}_{k+1}) \quad \text{и} \quad \Gamma(Y, \underline{\mathfrak{G}}_{k-1}) \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathfrak{G}}_k)$$

соответственно; применение (1) при $E = Y$ доказывает теперь лемму.

2. Когерентные аналитические пучки на аналитическом подмногообразии. Пусть X — топологическое пространство, Y — замкнутое подмножество X , $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок абелевых групп на Y . Определим пучок $\tilde{\underline{\mathfrak{F}}}$ на X , полагая $\tilde{\mathfrak{F}}_a = \mathfrak{F}_a$, если $a \in Y$, и $\tilde{\mathfrak{F}}_a =$ нулевой группе, если $a \not\in Y$. Ясно, что это определяет пучок на X . Имеем:

Предложение 2. При $p = 0, 1, 2, \dots$

$$H^p(Y, \underline{\mathfrak{F}}) \simeq H^p(H, \tilde{\underline{\mathfrak{F}}}).$$

Доказательство. Если $O = \{O_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие X , $O'_i = O_i \cap Y$, то $\{O'_i\} = O'$ — открытое покрытие Y и очевидно, что

$$H^p(O, \tilde{\underline{\mathfrak{F}}}) \simeq H^p(O', \underline{\mathfrak{F}}).$$

Далее, если дано открытое покрытие $O' = \{O'_i\}$ множества Y и O_i такое, что $O_i \cap Y = O'_i$, то открытое покрытие $\{O_i, X - Y\}$ пространства X порождает O' указанным выше способом, откуда и следует предложение 2.

Определение. Пусть V^n — комплексное аналитическое многообразие комплексной размерности n . Пусть W^m — замкнутое подмножество V^n . Множество W^m называется *аналитическим подмногообразием размерности m* , если при $a \in W^m$ локальные координаты (z_1, \dots, z_n) в точках a на V^n (в открытом множестве $U \subset V^n$) могут быть выбраны так, что

$$W^m \cap U = \{z \in U \mid z_{m+1} = \dots = z_n = 0\}.$$

Приложение теоремы о неявных функциях показывает, что если W — комплексное аналитическое многообразие размерности m и i — аналитическое однозначное отображение W в V^n , то $i(W)$ является аналитическим подмногообразием V^n тогда и только тогда, когда

1) i — собственное: прообраз компактного подмножества V^n является компактным подмножеством W ;

2) i имеет ранг m (т. е. якобиева матрица i имеет ранг m в каждой точке W).

Пусть V — комплексное многообразие и W — подмногообразие V . Пусть $X \subset V$ и $Y = X \cap W$. Обозначим $v\mathfrak{D}$ и $w\mathfrak{D}$ пучки ростков голоморфных функций на V и W соответственно; последние рассматриваются как самостоятельные комплексные многообразия.

Пусть $\underline{\mathfrak{F}}$ — когерентный $w\mathfrak{D}$ -аналитический пучок на Y и $\tilde{\mathfrak{F}}$ — пучок, продолжающий $\underline{\mathfrak{F}}$ на X с нулевыми группами вне Y . Тогда $\tilde{\mathfrak{F}}$ имеет структуру $v\mathfrak{D}$ -аналитического пучка на X : если $a \in Y$, $\tilde{\mathfrak{F}}_a$ есть $v\mathfrak{D}_a$ -модуль ($\tilde{\mathfrak{F}}_a = 0$); если $a \in Y$, $f_a \in \tilde{\mathfrak{F}}_a = \underline{\mathfrak{F}}_a$ и произведение $h_a f_a$ определяется как $h_a w f_a$, где h_a есть сужение h_a на W . Пусть $\underline{\mathfrak{J}}(W)$ — подпучок $v\mathfrak{D}$, состоящий из ростков,

исчезающих на W . Тогда имеем изоморфизм

$$v\underline{\mathfrak{D}}/\underline{\mathfrak{J}}(W) \simeq w\underline{\mathfrak{D}}.$$

Нетрудно вывести, что $\underline{\mathfrak{J}}(W)$ — когерентный аналитический пучок.

Предложение 3. *Если $\underline{\mathfrak{J}}$ — когерентный $w\underline{\mathfrak{D}}$ -аналитический пучок на Y , то $\tilde{\underline{\mathfrak{J}}}$ — когерентный $v\underline{\mathfrak{D}}$ -аналитический пучок на X .*

Доказательство. Если $\underline{\mathfrak{J}}$ — пучок $w\underline{\mathfrak{D}}_Y$ (сужение $w\underline{\mathfrak{D}}$ на Y), то по предыдущему

$$v\underline{\mathfrak{D}}_X/\underline{\mathfrak{J}}(W)_X \simeq w\underline{\mathfrak{D}},$$

так что $w\underline{\mathfrak{D}}$ — когерентный $v\underline{\mathfrak{D}}$ -аналитический пучок. В общем случае пусть $\underline{\mathfrak{J}}$ — пучок на Y , $a \in Y$, Ω — открытая окрестность a в Y такая, что

$$\underline{\mathfrak{J}}_\Omega \simeq w\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^N/\underline{\mathfrak{R}},$$

где $\underline{\mathfrak{R}}$ — когерентный аналитический подпучок $w\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^N$.

Пусть Ω выбрана столь малой, что существуют N_1 систем N голоморфных функций на W , которые $w\underline{\mathfrak{D}}_b$ -порождают $\underline{\mathfrak{M}}_b$ в каждой точке Ω . Если Ω выбрана достаточно малой, найдется окрестность Ω' точки a в V такая, что $\Omega' \cap Y = \Omega$, и эти функции — сужение голоморфных функций в Ω' на Ω . Пусть $\underline{\mathfrak{R}'}$ — подпучок $v\underline{\mathfrak{D}}_{\Omega'}^N$, порожденный этими N_1 элементами $v\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^N$. Тогда $\underline{\mathfrak{R}'}$ есть когерентный аналитический подпучок $v\underline{\mathfrak{D}}_\Omega^N$; ясно, что

$$\tilde{\underline{\mathfrak{J}}}_{\Omega' \cap X} \simeq v\underline{\mathfrak{D}}_{\Omega' \cap X}^N/\underline{\mathfrak{R}}'_X + \underline{\mathfrak{J}}^N(W)_X,$$

откуда вытекает следующее утверждение:

Предложение 4. *Пусть P — замкнутый поликруг в C^n , Π — открытый поликруг $\supset P$. Пусть W — аналитическое многообразие, которое является*

подмногообразием П. Тогда теоремы А и В верны для $W \cap P$ (рассматриваемого как подмножество W).

Это следует сразу же из предложений 1, 2 и 3.

3. Многообразия Штейна.

Определение. Комплексное многообразие V размерности n , которое счетно в бесконечности *), называется многообразием Штейна, если

- а) V голоморфно-выпукло (§ 7, п. 3);
- б) для любых двух точек $a \neq b$ на V существует голоморфная функция f на V такая, что

$$f(a) \neq f(b);$$

γ) для любого $a \in V$ существует n функций, голоморфных на V , которые образуют систему локальных координат в a .

Примеры многообразий Штейна.

1. Однозначные области голоморфности в C^n (см. § 7, предложение 1).

2. Любая открытая связная риманова поверхность. (Риманова поверхность счетна на бесконечности по теореме Радо; а), б) и γ) следуют из теоремы Рунге. По поводу деталей доказательства см. Г. Бенке и К. Штейн, Разложение аналитических функций на римановых поверхностях, Math. Ann. 120 (1948), 430–461 и Б. Мальгранж, Существование решений и приближений к ним для уравнений в частных производных и уравнений свертки, Диссертация, Париж, 1956 (гл. III, § 4).)

3. Аналитические подмногообразия C^n . В частности, алгебраические многообразия над C без особенностей.

Лемма 2 (о многообразиях Штейна). Пусть V – многообразие Штейна, K – компактное подмножество V такое, что $K = \hat{K}$ (\hat{K} есть Φ_V -оболочка K , см. § 6). Тогда K имеет фундаментальную систему $\{L\}$ компактных окрестностей L со следующими свойствами.

Каждому L отвечает открытое множество $\Lambda \supset L$, замкнутый поликруг $P \subset C^n$, открытый поликруг $\Pi \supset P$ и конечное число N голоморфных функций f_1, \dots, f_N на V таких, что сужение на Λ функций f_i реализует Λ как аналитическое подмножество Π , и

*) См. § 3. (Прим. перев.)

таких, что

$$\varphi(L) = P \cap \varphi(\Lambda),$$

где φ — отображение (f_1, \dots, f_N) в V в C^n .

Доказательство. Пусть Ω — относительно компактная окрестность K и F — граница Ω . Для каждого $a \in F$ существует f такое, что

$$|f(a)| > 1, \quad \|f\|_K < 1.$$

Поскольку F компактно и множество a с $|f(a)| > 1$ открыто, существует конечное число $f_1, \dots, f_{N'}$ голоморфных функций таких, что

$$\|f_i\|_K \leq \theta < 1,$$

тогда как $\max_i |f_i(a)| > 1$ при $a \in F$. Пусть Ω' — множество $a \in \Omega$ с $|f_i(a)| < 1$ при $i = 1, \dots, N'$. Далее, множество $a \in \Omega$ с $|f_i(a)| \leq \rho$, $\theta < \rho < 1$, компактно, поскольку $\bar{\Omega}'$ компактно, и замыкание этого множества не пересекает F . Это показывает, что отображение Ω' в $C^{N'}$, определенное с помощью $(f_1, \dots, f_{N'})$, — собственное.

Положим $\Lambda = \Omega'$. Присоединяя конечное число функций $f_{N'+1}, \dots, f_N$ к $f_1, \dots, f_{N'}$, мы можем добиться того, что точки Ω будут разделены отображением $\varphi = (f_1, \dots, f_N)$ и что φ будет максимального ранга (это следует из свойств β и γ) многообразий Штейна и компактности $\bar{\Omega}$.

Если $1 > \rho > \theta$ и $\|f_{N'+1}\|_K < A, \dots, \|f_N\|_K < A$, возьмем в C^N поликруг P $|z_i| \leq \rho$ для $i \leq N'$, $|z_i| \leq A$ для $i \geq N'+1$ в C^N , и L в Λ прообраз $P \cap \varphi(\Lambda)$ при отображении φ . Поскольку K имеет фундаментальную систему относительно компактных окрестностей Ω , лемма 2 доказана.

Теорема. Пусть V — многообразие Штейна, K — компактное множество $\subset V$ такое, что $K = \hat{K}$. Тогда

1) теоремы А и В верны для K ;

2) каждая голоморфная функция на K может быть приближена равномерно на K голоморфными функциями на V .

Доказательство. Утверждение 1) следует из предложения 4 и лемм 1 и 2. Чтобы доказать 2), рассмотрим какую-либо голоморфную функцию g на K ; пусть L — окрестность K , имеющая свойства, указанные в лемме 2, такая, что g голоморфна на L .

По предположению 4 мы имеем точную последовательность

$${}_{C^N}\underline{\Omega}_P \rightarrow {}_V\underline{\Omega}_L \rightarrow 0$$

(L рассматривается как подмножество Π), и если $\underline{\mathfrak{J}}$ — ядро первого гомоморфизма, то последовательность

$$0 \rightarrow \underline{\mathfrak{J}} \rightarrow {}_{C^N}\underline{\Omega}_P \rightarrow {}_V\underline{\Omega}_L \rightarrow 0$$

точна. Присоединенная точная последовательность когомологий

$$H^0(P, {}_{C^N}\underline{\Omega}_P) \rightarrow H^0(P, {}_V\underline{\Omega}_L) \rightarrow H^1(P, \underline{\mathfrak{J}})$$

показывает, поскольку $H^1(P, \underline{\mathfrak{J}}) = 0$ по теореме В для поликруга, что всякий элемент $H^0(P, {}_V\underline{\Omega}_L)$ есть образ элемента $H^0(P, {}_{C^N}\underline{\Omega}_P)$, и g есть сужение на L голоморфной функции на P ; поэтому g можно разложить в степенной ряд по f_1, \dots, f_N , равномерно сходящийся на $K \subset L^0$. Поскольку частные суммы этого ряда, являясь полиномами по f_1, \dots, f_N , голоморфны на V , теорема доказана.

Приложение.

Теорема. Пусть X — топологическое пространство, $\underline{\mathfrak{F}}$ — пучок абелевых групп над X такой, что всякое сечение $\underline{\mathfrak{F}}$ над каким-либо открытым подмножеством X может быть продолжено до сечения $\underline{\mathfrak{F}}$ над X . Тогда для любого открытого покрытия $O = \{O_i\}_{i \in I}$ пространства X

$$H^p(O, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$$

при $p > 0$; в частности,

$$H^p(X, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$$

при $p > 0$.

Доказательство. Доказательство идет по индукции.

a) $p=1$. Пусть c будет 1-коцикл покрытия $O = \{O_i\}_{i \in I}$. Допустим, что J — подмножество множества индексов I такое, что существует 0-коцель γ покрытия O с условием $\gamma_i - \gamma_j = c_{ij}$ при $i, j \in J$. Пусть $a \in I$, $a \notin J$. Определим O -коцель γ' следующим образом: $\gamma'_i = \gamma_i$, если $i \neq a$, $\gamma'_a = \gamma_a + c_{ai}$ на $O_a \cap O_i$, $i \in J$. Тогда на $O_a \cap O_i \cap O_j$

$$\gamma_i + c_{ai} = \gamma_j + c_{aj},$$

поскольку

$$\gamma_i - \gamma_j = c_{ij} = c_{aj} - c_{ai}$$

(с альтернирующее). Таким образом, γ'_a определено однозначно на $\bigcup_{i \in J} (O_a \cap O_i)$. По предположению γ' можно продолжить до сечения \mathfrak{F} над O_a , и коцель γ' полностью определена. Далее,

$$\gamma'_i - \gamma'_j = c_{ij}$$

на O_{ij} , если $i, j \in J \cup \{a\}$. Ясно, что J не пусто (поскольку c альтернирующее), и теорема для $p=1$ следует из леммы Цорна.

b) $p > 1$. Допустим, что теорема верна при замене p на $(p-1)$ для всех пространств X , всех покрытий O пространства X и всех $(p-1)$ -коциклов O . Пусть c есть p -коцикл и J — подмножество I такое, что существует $(p-1)$ -коцель γ с

$$(\delta\gamma)_{i_0 \dots i_p} = c_{i_0 \dots i_p}$$

при $i_0, \dots, i_p \in J$. Пусть $a \in I$, $a \notin J$. Для каждого $i_0, \dots, i_{p-2} \in J$ определим сечение $\gamma'_{i_0 \dots i_{p-2} a}$ пучка \mathfrak{F} над $O_{i_0 \dots i_{p-2} a}$ такое, что

$$c_{i_0 \dots i_{p-1} a} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \gamma'_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p-1} a} + (-1)^p \gamma_{i_0 \dots i_{p-1}}$$

над $O_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha}$. Это возможно: легко увидеть из определения γ , что $(p-1)$ -коцепь c' , определенная посредством

$$c'_{i_0 \dots i_{p-1}} = c_{i_0 \dots i_{p-1} \alpha} + (-1)^{p-1} \gamma_{i_0 \dots i_{p-1}},$$

является коциклом покрытия $\{O_\alpha \cap O_i\}_{i \in J}$ пространства

$$Y = \bigcup_{i \in J} (O_\alpha \cap O_i)$$

(поскольку c — коцикл), и существование $\gamma'_{i_0 \dots i_{p-2} \alpha}$ следует из индуктивного предположения.

Определим теперь $(p-1)$ -коцепь γ_1 следующим образом: если $i_0, \dots, i_{p-2} \in J$, то $(\gamma_1)_{i_0 \dots i_{p-2} \alpha} = \gamma'_{i_0 \dots i_{p-2} \alpha}$; γ_1 определяется условием, что она альтернирует для других систем из p индексов множества $J \cup \{\alpha\}$, содержащих α и $(\gamma_1)_t = \gamma_t$, если $t \in J^P$. γ_1 имеет то свойство, что

$$(\delta \gamma_1)_{j_0 \dots j_p} = c_{j_0 \dots j_p} \text{ при } j_0, \dots, j_p \in J \cup \{\alpha\},$$

так как $\gamma_1 = \gamma$ на J^P . Упорядочим частично пары (J, γ) , полагая

$$(J, \gamma) < (J', \gamma'),$$

если $J \subset J'$ и $\gamma' = \gamma$ на J^P ; теорема будет следовать тогда из леммы Цорна.

§ 16. Когерентные аналитические пучки на многообразии Штейна

1. Фундаментальная теорема Ока—Кардана—Серра для многообразий Штейна.

Фундаментальная теорема. Пусть V — многообразие Штейна и \mathfrak{F} — когерентный аналитический пучок на V . Тогда

А. Для каждого $a \in V$ $H^0(V, \mathfrak{F})$ \mathfrak{D}_a -порождает \mathfrak{F}_a .

В. При $p \geq 1$ $H^p(V, \mathfrak{F}) = 0$.

(Ясно, что для компактных подмножеств V теорема А, как она сформулирована в § 15, эквивалентна теореме, сформулированной выше.)

Нам нужны будут следующие два результата, из которых первый не будет доказан здесь. По поводу его доказательства см. Картан [1].

Теорема 1. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, и пусть $a \in V$. Пусть \mathfrak{M} — подмодуль \mathfrak{D}_a^p (как \mathfrak{D}_a -модуль), и пусть $f = (f_1, \dots, f_p) \in \mathfrak{D}^p$ ($\mathfrak{D} = \mathcal{H}_V$ — пространство всех голоморфных функций на V). Пусть \tilde{f} — предел в \mathfrak{D}^p функций $\tilde{f}_i \in \mathfrak{D}^p$ таких, что $(\tilde{f}_i)_a \in \mathfrak{M}$.

Тогда $\tilde{f}_a \in \mathfrak{M}$.

Лемма. Пусть K — компактное подмножество многообразия Штейна V такое, что $K = \hat{K}$ (\hat{K} есть \mathcal{H}_V -оболочка K), и \mathfrak{F} — когерентный аналитический пучок на K . Пусть $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m \in H^0(K, \mathfrak{F})$; допустим, что для любого $a \in K$ $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ \mathfrak{D}_a -порождают \mathfrak{F}_a .

Тогда $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ $H^0(K, \mathfrak{F})$ -порождают $H^0(K, \mathfrak{F})$.

Эту лемму доказывают, используя теоремы А и В для K , тем же путем, что и в доказательстве теорем А и В для куба в § 14.

2. Топология на $H^0(V, \mathfrak{F})$. Пусть $\{K_p\}$ будет последовательностью компактных подмножеств V таких, что

$$K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}, \quad \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = V \quad \text{и} \quad K_p = \hat{K}_p$$

(такая последовательность существует, поскольку V счетно на бесконечности и для каждого компактного множества K

$$\widehat{(\hat{K})} = \hat{K}).$$

Для каждого целого $N \geq 1$ вводим норму в $H^0(K_p, \mathfrak{D}^N)$, полагая норму

$$\|f = (f_1, \dots, f_N)\| \in H^0(K_p, \mathfrak{D}^N)$$

равной наибольшей из точных верхних граней $|f_1|, \dots, |f_N|$ на K_p . Далее, вводим полуночную

$\|\dots\|_p$ на $H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$ следующим путем: по теореме А для K_p

$$\underline{\mathfrak{F}}_{K_p} \simeq \underline{\mathfrak{D}}^N / \underline{\mathfrak{R}},$$

и $\|\dots\|_p$ определяется как факторполунорма нормы на $\underline{\mathfrak{D}}^N$. Легко проверить, что два изоморфизма

$$\underline{\mathfrak{F}}_{K_p} \simeq \underline{\mathfrak{D}}^{N_1} / \underline{\mathfrak{R}}_1 \simeq \underline{\mathfrak{D}}^{N_2} / \underline{\mathfrak{R}}_2$$

порождают эквивалентные полунормы. Далее, для любого p существует каноническое отображение

$$H^0(V, \underline{\mathfrak{F}}) \rightarrow H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$$

(именно сужение на K_p). Группу $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ снабдим слабейшей топологией, при которой эти отображения непрерывны в данных полунормах (что можно также описать, говоря, что $f \in H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ стремится к нулю, если $\|f\|_p \rightarrow 0$ для любого p). Легко видеть, что топология, индуцированная $\|\dots\|_{p+1}$ на $H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$, сильнее топологии, даваемой $\|\dots\|_p$.

Следующие результаты покажут, что $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ — пространство Фреше. Достаточно показать, что это пространство хаусдорфово и полное.

а) Если $f_{p+1} \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathfrak{F}})$ и $\|f_{p+1}\|_{p+1} = 0$, то сужение f_{p+1} на K_p есть нуль.

(Как следствие получим, что топология $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ хаусдорфова.)

Доказательство. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_{p+1}}$ — Ω_a -погорождают $\underline{\mathfrak{F}}_a$ при $a \in K_{p+1}$ (теорема А для K_{p+1}) и (см. лемму в начале этого параграфа)

$$f_{p+1} = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} c_i \varphi_i$$

(c_i — голоморфные функции на K_{p+1}), то из определения полунормы $\|\dots\|_{p+1}$ и из того, что $\|f_{p+1}\|_{p+1} = 0$, следует, что при данном $\epsilon > 0$ существуют голоморфные

функции $c_1^\varepsilon, \dots, c_{N_{p+1}}^\varepsilon$ на K_{p+1} такие, что

$$\hat{f}_{p+1} = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} c_i^\varepsilon \varphi_i$$

и $\sup_{i; a \in K_{p+1}} |c_i^\varepsilon(a)| < \varepsilon$. Если $\gamma_i^\varepsilon = c_i - c_i^\varepsilon$, то $(c_1, \dots, c_{N_{p+1}})$

равномерно приближается на K_{p+1} посредством $(\gamma_1^\varepsilon, \dots, \gamma_{N_{p+1}}^\varepsilon)$, где $(\gamma_1^\varepsilon, \dots, \gamma_{N_{p+1}}^\varepsilon)$ есть элемент пучка $\underline{\mathfrak{M}}$ соотношений между $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_{p+1}}$. Из теоремы 1 (сформулированной на стр. 110) следует, что $\overset{\circ}{K_{p+1}} \supseteq K_p(c_1, \dots, c_{N_{p+1}}) \in \underline{\mathfrak{N}}$, и утверждение а) доказано.

б) Если f_1, \dots, f_k, \dots — последовательность элементов $H^0(K_{p+1}, \underline{\mathfrak{F}})$ такая, что

$$\sum_{k=1}^N \|f_k\|_{p+1} < +\infty,$$

то последовательность $\left\{ \sum_{k=1}^N f_k \right\}$ имеет предельную точку в $H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$. Сужения на K_{p-1} двух таких предельных точек совпадают.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_{p+1}}$ \mathfrak{D}_a -погорождает $\underline{\mathfrak{F}}_a$ при $a \in K_{p+1}$, и пусть

$$f_k = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} c_i^{(k)} \varphi_i.$$

Тогда, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p+1} < \infty,$$

то $c_i^{(k)}$ можно выбрать так, что

$$\sum_k \max_i \|c_i^{(k)}\|_{K_{p+1}} < \infty$$

(по определению $\|\dots\|_{p+1}$ можно взять, например, $c_i^{(k)}$ так, что $\|c_i^{(k)}\|_{K_{p+1}} \leq 2\|\hat{f}_K\|_{p+1}$). Тогда для каждого

$i \sum_k c_i^{(k)}$ сходится к голоморфной функции c_i на K_p ;
 ясно, что $\left\| \sum_{k=1}^N f_k - \sum_{i=1}^{N_{p+1}} c_i \varphi_i \right\|_p \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Это доказывает существование предельной точки.
 Единственность на K_{p-1} следует сразу же из а).

с) $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ — пространство Фреше.

Доказательство. Если дана последовательность Коши $\{s_k\}$, то $\|s_k - s_l\|_p \rightarrow 0$ при $k, l \rightarrow \infty$ и любом p . Если выбрать последовательность $\{n_k\}$ целых чисел таких, что

$$\|s_m - s_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{при } p \leq k$$

и $m \geq n_k$ (причем $n_{k+1} > n_k$), то

$$\sum_k \|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| < \infty$$

для любого p . Из б) непосредственно следует, что $\{s_k\}$ имеет предел в $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$, который единственен, поскольку $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ хаусдорфово.

д) (Свойство приближений.) Если дана $f_p \in H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$ и $\varepsilon > 0$, то существует $f \in H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ такое, что

$$\|f_p - f\|_p < \varepsilon.$$

Доказательство. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_{p+1}}$ \mathfrak{O}_a -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_a$ при $a \in K_{p+1}$, то их сужение на K_p , очевидно, \mathfrak{O}_a -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_a$ при $a \in K_p$. Отсюда по лемме

$$f_p = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} c_i \varphi_i,$$

где c_i голоморфны на K_p . По теореме из § 15 c_i могут быть равномерно приближены на K_p голоморфными функциями на V . Это показывает, что f_p может быть приближено на K_p (по $\|\dots\|_p$) сечением

$$f_{p+1} \in H^0(K_{p+1}, \underline{\mathfrak{F}}).$$

Приближая f_{p+1} на K_{p+1} сечением $\hat{f}_{p+2} \in H^0(K_{p+2}, \underline{\mathfrak{F}})$ (по $\|\dots\|_{p+1}$) и продолжая этот процесс, построим последовательность $\hat{f}_{p+1}, \hat{f}_{p+2}, \dots$ такую, что

$$\|\hat{f}_{p+k+1} - \hat{f}_{p+k}\|_{p+k} \leq \varepsilon_k.$$

При достаточно малых ε_k мы видим, что

$$\sum_{m=k}^{\infty} \|\hat{f}_{p+m-1} - \hat{f}_{p+m}\|_{p+m} < \infty$$

(поскольку $\|\dots\|_{n+1}$ сильнее, чем $\|\dots\|_n$ на K_m), так что

$$f'_{p+k} = \hat{f}_{p+k} + \sum_{k}^{\infty} (\hat{f}_{p+m-1} - \hat{f}_{p+m})$$

определяется однозначно на K_{p+k-2} . Ясно, что $f'_{p+k+1} = f'_{p+k}$ на K_{p+k-2} и что существует $f \in H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$, для которой $\hat{f} = f'_{p+k}$ на K_{p+k-2} . Если ε_k достаточно малы, f_p приближает f по $\|\dots\|_p$. (Если говорить, что последовательность $\{s_m\}$, где $s_m \in H^0(K_m, \underline{\mathfrak{F}})$, сходится к $s \in H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$, когда выполнено условие $\|s - s_m\|_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то можно перефразировать предыдущее доказательство так: $\hat{f}_{p+m} \rightarrow f$ при $m \rightarrow \infty$.)

3. Доказательство фундаментальной теоремы.

Доказательство теоремы А. Пусть $a \in V$; предположим, что $a \in \overset{\circ}{K}_p$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_p}$ \mathfrak{O}_b -порождают $\underline{\mathfrak{F}}_b$ при $b \in K_p$. Теорема А утверждает, что множество систем N_p элементов (a_1, \dots, a_{N_p}) , где $a_i \in \mathfrak{O}_a$, таких, что $\sum a_i \varphi_i$ принадлежит подмодулю $\underline{\mathfrak{F}}_a$, порожденному $H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$, есть $\mathfrak{O}_a^{N_p}$. Такие системы образуют подмодуль \mathfrak{M} (над \mathfrak{O}_a) в $\mathfrak{O}_a^{N_p}$, и, по теореме 1, достаточно лишь доказать, что в некоторой открытой окрестности U точки a каждая система N_p голоморфных на U функций есть равномерный предел

систем N_p элементов (b_1, \dots, b_{N_p}) таких, что $\sum_1^{N_p} b_i \varphi_i$ порождает в точке a элемент $\tilde{\mathfrak{F}}_a$. Но это сразу следует из свойства приближений.

Доказательство теоремы В. Мы докажем вначале, что

$$H^p(V, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$$

при $p > 1$. Пусть α есть p -коцепь из V . На K_m мы имеем $\alpha = \delta\beta_m$, где β_m — коцепь K_m по теореме В для K_m ($m = 1, 2, \dots$). Далее, на K_m

$$\delta(\beta_{m+1} - \beta_m) = 0,$$

так что

$$\beta_{m+1} - \beta_m = \delta\gamma'_m,$$

где γ'_m есть $(p-2)$ -коцепь K_m .

По определению коцепи можем предположить, что γ'_m — сужение на K_m $(p-2)$ -коцепи γ_m на V , так что $\beta_m = \beta_{m+1} - \delta\gamma_m$ на K_m , в то время как

$$\delta(\beta_{m+1} - \delta\gamma_m) = \alpha$$

на K_{m+1} . Ясно, что, повторяя этот процесс при $m = 1, 2, \dots$, мы получаем $(p-1)$ -коцепь β из V такую, что $\delta\beta = \alpha$ и что

$$H^p(V, \underline{\mathfrak{F}}) = 0.$$

Наконец, обратимся к доказательству того, что $H^1(V, \underline{\mathfrak{F}}) = 0$. Пусть α есть 1-коцикл V и $\alpha = \delta\beta'_p$ на K_p , где β'_p есть 0-коцепь K_p . Далее

$$\beta'_{p+1} - \beta'_p \in H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}}),$$

т. е. есть коцикл. По свойству приближений существует коцикл $c'_{p+1} \in H^0(V, \underline{\mathfrak{F}})$ такой, что

$$\|c'_{p+1} + \beta'_{p+1} - \beta'_p\|_p < \varepsilon_p,$$

где ε_p может быть выбрано сколь угодно малым. Ясно, что можно найти, действуя таким образом,

коцепь β_p в K_p с $\delta\beta_p = a$ на K_p и $\|\beta_{p+1} - \beta_p\|_p < \epsilon_p$ для любого $p \geq 1$.

Если будем говорить, что последовательность коцепей $\{\beta_p\}$, где β_p — коцепь K_p , стремится к коцепи β из V в случае, когда

$$\beta - \beta_p \in H^0(K_p, \underline{\mathfrak{F}})$$

и

$$\|\beta - \beta_p\|_p \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, то повторение доказательства свойства приближения (с незначительными изменениями) показывает, что последовательность $\{\beta_p\}$, определенная выше, стремится к коцепи β на V , если ϵ_p достаточно малы; легко видеть, что

$$\delta\beta = a.$$

Это доказывает теорему В для $p = 1$, и доказательство фундаментальной теоремы закончено.

Литература

Литература к гл. 1

- [1] H. Cartan, Séminaire E. N. S.*), 1951/52 (особенно лекции VII—X).
- [2] H. Cartan, P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Ann. **106** (1932), 617—647.
- [3] F. Harboggs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen, Math. Ann. **62** (1906), 1—88.
- [4] L. Schwartz, Lectures on Complex Analytic Manifolds, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1955 **).

Литература к гл. 2

- [1] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, Journal de Mathématiques, 9^e série, **19** (1940), 1—26.
- [2] H. Cartan, Séminaire E. N. S.*), 1951/52 (в особенности лекция XVII, Ж. Френкель).
- [3] H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1953/54 (в особенности лекция XVIII, Ж. П. Сеpp).
- [4] J. L. Koszul, B. L. Malgrange, Sur certaines structures fibrées complexes, Archiv der Mathematik **9** (1958), 102—109.
- [5] J. L. Lions, Lectures on elliptic partial differential equations, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [6] G. de Rham, Variétés différentielles, Hermann, Paris, 1955 ***).

Литература к гл. 3

- [1] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Annales de l'E. N. S., 3^e série, **61** (1944), 149—197.
- [2] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. Math. de France **78** (1950), 29—64.

*) École Normale Supérieure. (Прим. перев.)

**) См. также Лоран Шварц, Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, «Мир», 1964.

***) Есть русский перевод: Де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956. (Прим. перев.)

- [3] H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1951/52 (в особенности лекции XV—XIX).
- [4] H. Cartan, Variétés analytiques réels et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. Math. de France 85 (1957), 77—99.
- [5] J. Dieudonné, Une généralisation des espaces compacts, Journ. Math., Pure et Appl. (9) 23 (1944), 65—76.
- [6] G. H. Dowker, Lectures on Sheaf Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1956.
- [7] K. Oka, Sur les fonctions analytiques des plusieurs variables, VII, Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. Math. de France 78 (1950), 1—27.
- [8] J. P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math. 61 (1955), 197—278.

Дополнительная литература

В статьях, перечисленных ниже, читатель найдет приложения теорем, доказанных в этой книге, и несколько важных результатов, которые не могли рассматриваться здесь. По поводу дальнейшей литературы см. Scientific report on the second summer Institute: Several Complex Variables, by W. T. Martin, S. S. Chern and O. Zariski, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 79—141.

- H. Bremermann, Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphengebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 128 (1954), 69—91.
- H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1951/52 (лекция XX).
- H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1953/54 (лекция XVII).
- H. Cartan, Espaces fibrés analytiques, vol. consacré au Symposium international de Mexico de 1956.
- J. Frénel, Cohomologie non-abélienne et espaces fibrés. Bull. Soc. Math. de France 85 (1957), 135—220.
- H. Grauert, Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume, Math. Ann. 129 (1955), 233—259.
- H. Grauert, Approximationssätze für holomorphic Funktionen mit Werten in komplexen Räumen, Math. Ann. 133 (1957), 139—159.
- H. Grauert, Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Leischen Gruppen, Math. Ann. 133 (1947), 450—472.
- H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. 135 (1958), 263—273.
- F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math. Springer, 1956.
- F. Norguet, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), Bull. Soc. Math. de France 82 (1954), 137—159.
- K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI, Domaines pseudoconvexes, Tôhoku Math. J. 49 (1942), 15—52.

- K. O k a, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX,
Domaines finis sans point critique interieur, Jap., J. Math.
23 (1953/54), 97—155.
- R. Remmert, Sur les espaces analytiques holomorphiquement
séparables et holomorphiquement convexes, C. R. Acad. Sci.
Paris 243 (1956), 118—121.
- J. P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés
de Stein, Colloque de Bruxelles sur les fonctions de plusieurs
variables (1953), 56—68.
- K. S t e i n, Überlagerung holomorph-vollständigen komplexer Räume,
Arch. der Math. 7 (1956), 354—361.