И.Г. МАЛКИН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

И. Г. МАЛКИН

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

За последние годы значительно возрос интерес к теории устойчивости движения. Созданная в 90-х годах прошлого века гением А. М. Ляпунова эта теория нашла широкое применение в различных областях физики и техники. Ее широкому внедрению в практику способствовали многочисленные исследования главным образом советских ученых. Появилась настоятельная необходимость дать систематическое изложение теории, применяемых в ней методов, показать их приложение к решению конкретных практических задач. Этой цели и служит настоящая книга, как и ранее вышедшая книга Н. Г. Четаева «Устойчивость движения» (1946 г.).

Однако настоящая книга значительно превышает по объему книгу Н. Г. Четаева, что позволило автору остановиться не только на основных узловых вопросах теории, но и на некоторых подробностях отдельных вопросов. Для читателя-прикладника, на которого книга, в основном, и рассчитана, эти подробности, касающиеся часто методов вычислений, могут оказаться очень важными. Вместе с тем автор сознает, что увеличение объема книги затрудняет ее усвоение, в особенности для читателя, который впервые будет знакомиться с теорией устойчивости по этой книге и не обладает большой математической подготовкой. Чтобы облегчить усвоение книги такому читателю, автор придерживается концентрического метода изложения.

Первый концентр составляют главы I, II и III. В них излагается постановка вопроса, основные теоремы второго метода Ляпунова для установившихся движений и теория устойчивости по первому приближению тоже для установившихся движений. Эти три главы занимают небольшой объем и охватывают основной круг знаний, необходимых для каждого, занимающегося вопросами устойчивости движения. Изучение этих глав требует знания лишь основных элементов теории дифференциальных уравнений и вполне доступно для лиц, владеющих математикой в объеме программ втузов.

Глава VI — несколько более трудная по содержанию. В ней излагаются классические критические случаи для установившихся движений. Еще более трудной для изучения является глава V, в которой излагается теория устойчивости периодических движений. Изложение этой теории может быть значительно упрощено, если отказаться от рассмотрения всех случаев, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Однако автор не мог пойти на такое упрощение, учитывая интересы читателей, желающих более глубоко изучить теорию устойчивости движения. Автор учитывал также и то, что теория уравнений с периодическими коэффициентами (линейных и нелинейных) имеет очень важное практическое значение, и счел необходимым дать подробное и систематическое изложение этой теории, особенно тех ее частей, которые имеют непосредственное приложение к практике.

Главы IV и V составляют второй концентр. Хотя он и труднее для изучения, чем первый концентр, он все же доступен читателю, имеющему математическую подготовку в объеме программы втузов.

Глава VI посвящена общему случаю неустановившихся движений. Ее изучение требует знания теории дифференциальных уравнений в объеме, например, «Курса дифференциальных уравнений» В. В. Степанова.

Концентрическое построение книги отразилось, естественно, на стиле изложения. В первых главах сравнительно простые вопросы сопровождаются подробными разъяснениями, в то время как в последней главе вопросы значительно более сложные излагаются лаконичнее. Однако автор надеется, что этот недостаток искупается тем, что книга при таком изложении делается доступной значительно более широкому кругу читателей.

Как уже указывалось выше, книга рассчитана главным образом на прикладника. Поэтому практическим приемам решения задач устойчивости уделяется основное внимание. Все излагаемые методы сопровождаются поясняющими примерами. Часть этих примеров взята из текущей технической литературы. Однако автор не ставил себе целью решение тех или иных технических или физических задач. Его целью является изложение основных приемов решения задач устойчивости для того, чтобы дать возможность овладеть этими приемами лицам, которым приходится решать конкретные физические или технические задачи, связанные с вопросами устойчивости. Поэтому приводимые примеры носят иллюстративный характер. Они преследуют цель показать, как основные методы, излагаемые в книге, могут быть применены к решению конкретных задач и как эти методы действительно применялись отдельными исследователями на практике. Поэтому все эти задачи, как правило, излагаются значительно короче, чем в оригинальных статьях, и часто при некоторых упрощающих предположениях. Читатель, который пожелает с этими вопросами познакомиться более подробно, должен обратиться к цитируемой литературе.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. Г. Четаеву и А. И. Лурье, прочитавшим рукопись настоящей работы и сделавшим ряд ценных замечаний.

И. Малкин

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ВТОРОГО ИЗДАНИЯ.

Книга И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», первое издание которой вышло в 1952 году, является ценным научным руководством, получившим широкое признание. Несмотря на 12 лет, которые прошли со времени написания книги, эта монография, содержащая весьма доступное и в то же время строгое изложение основных положений теории устойчивости движения, сохраняет важное значение. Она продолжает пользоваться постоянным спросом у специалистов и у лиц, начинающих изучение предмета. Это служит веским основанием для переиздания книги, причем следует также учитывать большой интерес к основам теории устойчивости движения, вызванный развитием новых задач устойчивости и управления.

В настоящем, посмертном издании монографии И. Г. Малкина сохранен первоначальный текст книги. При редактировании внесены лишь небольшие изменения, связанные только с необходимостью устранить отдельные бесспорные неточности. Некоторые ссылки на литературу заменены более доступными сейчас источниками. Кроме того, редактор счел целесообразным добавить к тексту монографии материал, отражающий в известной мере развитие теории устойчивости в годы, прошедшие после выхода в свет первого издания. Этот ограниченный материал ни в коей мере не может, конечно, отразить со всей полнотой новые направления исследований и результатов. Были выбраны лишь некоторые исследования, относящиеся главным образом к теории метода функций Ляпунова и имеющие самое прямое отношение к данной монографии.

Добавления к книге распадаются на четыре основные части.

Первую часть добавлений составляют дополнение I и дополнение II, где даны с небольшими изменениями две важные работы И. Г. Малкина: «Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования» и «О существовании функции Ляпунова», опубликованные в журнале «Прикладная математика и механика» после выхода первого издания книги. Включение этих работ в настоящее издание обосновывается тем, что каждая из них находится у истоков двух направлений исследований, которые сыграли существенную роль в развитии теории устойчивости движения в пятидесятые годы.

Вторую часть добавлений составляет дополнение III, в котором приведены обобщения теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости на случаи функций со знакопостоянной производной. Включение этого материала представляется целесообразным по той причине, что эти теоремы находят применение при исследовании устойчивости нелинейных систем при больших начальных возмущениях.

Третью часть добавлений составляет дополнение IV, где дан краткий очерк о приложении методов теории устойчивости движения к задачам оптимальной стабилизации управляемых систем. Включение этого материала вызвано следующими обстоятельствами. С одной стороны, в последнее время несомненно весьма возрос интерес к задачам оптимального управления, и в частности — к задачам стабилизации управляемых движений. С другой стороны, широкий круг таких задач решается методами, которые тесно переплетаются с методами классической теории устойчивости. Теорию стабилизации управляемых движений можно рассматривать как развитие задач устойчивости, изученных в данной монографии, в приложении к новым проблемам для управляемых систем. Это определяет тесную связь и преемственность упомянутых проблем с материалом монографии.

В конце книги даны постраничные примечания, которые в весьма краткой форме упоминают новые результаты и литературу по вопросам, затронутым в монографии.

При редактировании книги деликатным моментом был выбор ссылок на новые работы. В первом издании автор предпочел весьма экономный стиль цитат, ограничившись лишь небольшим числом ссылок, которые он считал совершенно необходимыми. Мы не сочли себя вправе изменять этот стиль, считая его целесообразным для монографии подобного характера. В соответствии с этим добавочный материал также снабжен ссылками на довольно узкий круг работ. Читатель должен иметь в виду, что при этом многие важные исследования остались не упомянутыми. Отбор материала для добавлений, естественно, неизбежно был ограничен возможностями и интересами редактора. Только этим обстоятельством следует объяснить большой удельный вес ссылок на работы свердловских авторов.

В подготовке настоящего издания принял участие коллектив кафедры механики Уральского госуниверситета им. А. М. Горького, состоящий из учеников И. Г. Малкина. Особенно большая работа при подготовке дополнительного материала была проделана сотрудниками кафедры Э. Г. Альбрехтом, А. И. Огурцовым, Ю. С. Осиповым, В. Е. Третьяковым. При редактировании мы старались учесть все известные нам отзывы и замечания по книге. Особенно полезную службу сослужила острая рецензия Н. П. Еругина[1]), содержащая подробную критику книги.

Н. Красовский

---

[1]) См. Еругин Н. П., И. Г. Малкин «Теория устойчивости движения», Вестник ЛГУ, № 5, 1953.

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

§ 1. Постановка задачи.

Теория устойчивости движения занимается исследованием влияния возмущающих факторов на движение материальной системы. Под возмущающими факторами понимаются силы, не учитываемые при описании движения вследствие их малости по сравнению с основными силами. Эти возмущающие силы обычно неизвестны. Они могут действовать мгновенно, что сведется к малому изменению начального состояния материальной системы, т. е. начальных значений координат и скоростей. Но эти факторы могут действовать и непрерывно, что будет означать, что составленные дифференциальные уравнения движения отличаются от истинных, что в них не учтены некоторые малые поправочные члены.

Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на движение материальной системы будет неодинаковым для различных движений. На одни движения это влияние незначительно, так что возмущенное движение мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других движениях влияние возмущений сказывается весьма значительно, так что возмущенное движение значительно отличается от невозмущенного, как бы малы ни были возмущающие силы. Движения первого рода называются устойчивыми, движения второго рода — неустойчивыми.

Теория устойчивости движения и занимается установлением признаков, позволяющих судить, будет ли рассматриваемое движение устойчивым или неустойчивым. Так как в действительности возмущающие факторы всегда неизбежно существуют, то становится понятным, что задача устойчивости движения приобретает очень важное теоретическое и практическое значение.

Задачей устойчивости движения занимались многие виднейшие математики и механики. Основная теорема об устойчивости равновесия установлена еще Лагранжем. Она служила исходным пунктом для исследований Рауса, который установил признаки устойчивости движения для некоторых частных случаев движений. Задачей устойчивости занимались также Томсон и Тэт и Н. Е. Жуковский. Все эти авторы рассматривали весьма частные случаи движений и для решения задачи применяли нестрогие методы. Первое строгое решение задачи принадлежит Пуанкаре. Однако результаты Пуанкаре также носят весьма частный характер.

В 1892 году появилась знаменитая докторская диссертация А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» [1]). В этом замечательном труде задача об устойчивости движения была впервые поставлена во всей ее общности и были предложены мощные и вместе с тем строгие методы ее решения. Эта работа Ляпунова явилась отправным пунктом всех дальнейших исследований по теории устойчивости движения.

Выше мы дали весьма схематичное определение устойчивости и неустойчивости движения. Эти понятия требуют, разумеется, более точного определения. Различные авторы по-разному определяли эти понятия и вследствие этого по-разному ставили задачу устойчивости. Наиболее общая постановка задачи дана Ляпуновым. Эта постановка оказалась исключительно удачной и наиболее соответствующей нуждам приложений. Этим и объясняется тот особый интерес, который проявлен к теории Ляпунова в последние годы, когда современная техника, в которой приходится иметь дело с огромными скоростями и широким внедрением автоматики, сделала особо актуальной задачу об устойчивости движения.

Эта книга посвящена теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. В ней излагаются основные результаты Ляпунова и его последователей.

§ 2. Определение устойчивости.

Понятие об устойчивости движения является непосредственным обобщением понятия устойчивости равновесия, которое, как известно, заключается в следующем.

Рассмотрим произвольную динамическую систему с k степенями свободы, определяемую обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Допустим, что рассматриваемая система имеет положение равновесия, определяемое значениями α_i обобщенных координат, так что уравнения движения допускают частное решение $q_i = \alpha_i$. Выведем систему из положения равновесия, отклонив ее координаты на величины ε_i, и сообщим ей начальные скорости ε'_i, т. е. рассмотрим движение системы, определяемое начальными условиями:

$$q_i(t_0) = \alpha_i + \varepsilon_i, \quad \dot{q}_i(t_0) = \varepsilon'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

[1]) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892. 3-е изд., Гостехиздат, 1950. В дальнейшем при изложении тех или иных результатов А. М. Ляпунова всегда имеется в виду, если противное не оговорено, эта работа.

Если для всех такого рода движений отклонения координат $q_i - a_i$ и скорости будут все время оставаться численно меньшими сколь угодно малого положительного числа ε при условии, что начальные отклонения ε_i и начальные скорости ε_i' численно меньше достаточно малого положительного числа η, то равновесие называется устойчивым. В противном случае равновесие неустойчиво.

Простейшими известными примерами устойчивого и неустойчивого равновесия являются, соответственно, нижнее и верхнее вертикальные положения маятника, когда его центр тяжести не лежит на оси подвеса.

Отметим два основных момента, вытекающих из определения устойчивости:

1) Об устойчивости или неустойчивости равновесия судят по характеру тех *движений*, которые имеют место вблизи положения равновесия.

2) Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы подходящим выбором начальных отклонений системы от ее положения равновесия и начальных скоростей можно было добиться, чтобы эти отклонения и скорости оставались меньше *любого* наперед заданного числа. Так что, например, верхнее вертикальное положение маятника, показанного на рис. 1, будет неустойчивым, как бы мал ни был угол α, так как отклонение маятника от положения равновесия не может быть сделано меньше α, как бы ни были выбраны начальные условия движения.

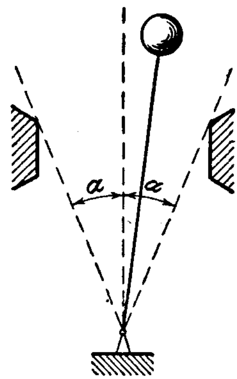

Рис. 1.

Совершенно аналогично устойчивости равновесия определяется по Ляпунову устойчивость движения.

Рассмотрим произвольную динамическую систему и допустим, что ее движение может быть описано системой дифференциальных уравнений, которая может быть приведена к нормальному виду:

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Здесь y_s — некоторые параметры, связанные с движением, как, например, координаты, скорости или вообще некоторые функции этих величин.

Рассмотрим какое-нибудь частное движение нашей системы, которому соответствует некоторое частное решение $y_s = f_s(t)$ уравнений (2.1). Мы будем это движение называть ***невозмущенным*** в отличие от других движений нашей системы, которые мы будем называть ***возмущенными***. Разности значений величин y_s в каком-нибудь возмущенном и в невозмущенном движениях будем называть *возмущениями.*

Определение. *Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к величинам y_s, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, найдется другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, такое, что для всех возмущенных движений $y_s = y_s(t)$, для которых в начальный момент $t = t_0$ выполняются неравенства*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{2.2}$$

будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Невозмущенное движение называется неустойчивым, если оно не является устойчивым. Таким образом, для неустойчивости движения достаточно, чтобы существовало какое-нибудь *фиксированное* число ε и при любом *сколь угодно малом* η хотя бы одно возмущенное движение, для которого выполняются неравенства (2.2) и для которого в некоторый момент времени хотя бы одно из неравенств (2.3) переходит в равенство.

В качестве примера рассмотрим снова обыкновенный маятник, но исследуем устойчивость не равновесия этого маятника, а какого-нибудь его движения, определяемого начальными условиями $\varphi(t_0) = \alpha$, $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, где φ — угол отклонения от вертикали, $\alpha > 0$. Покажем, что это движение неустойчиво по отношению к φ и $\dot{\varphi}$. Рассмотрим с этой целью какое-нибудь возмущенное движение, определяемое начальными условиями $\varphi(t_0) = \alpha + \delta$, $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, где δ — сколь угодно малая положительная величина. Как известно, период колебаний маятника зависит от начальных условий и при начальной скорости, равной нулю, будет тем больше, чем больше начальная амплитуда. Поэтому период T' колебаний возмущенного движения будет больше периода T колебаний невозмущенного движения. Следовательно, разность углов φ в обоих движениях, будучи в начальный момент равной δ, по истечении промежутка времени T' несколько увеличится. Это увеличение будет тем меньше, чем меньше δ. Но, как бы мало ни было δ, по истечении достаточно большого промежутка времени разность значений φ, постепенно накапливаясь, станет больше, чем, например, α. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Примером устойчивого движения может служить колебание циклоидального маятника. Устойчивость движения в рассматриваемом случае обусловливается тем, что период колебаний циклоидального маятника не зависит, как известно, от начальных условий.

Может случиться, что невозмущенное движение не только устойчиво, но и что все возмущенные движения, для которых начальные возмущения достаточно малы, при неограниченно возрастающем t стремятся асимптотически к невозмущенному. В этом случае мы будем говорить, что невозмущенное движение *устойчиво асимптотически*.

§ 3. Дифференциальные уравнения возмущенного движения.

Для исследования устойчивости целесообразно преобразовать уравнения движения к новым переменным:

$$x_s = y_s - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Здесь $f_s(t)$ — частное решение уравнений (2.1), соответствующее невозмущенному движению и, следовательно, x_s — возмущения.

Полученные таким образом преобразованные уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv Y_s(t, x_1 + f_1, \ldots, x_n + f_n) - Y_s(t, f_1, \ldots, f_n) \tag{3.2}$$

называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*. Каждому движению рассматриваемой системы соответствует частное решение уравнений (3.2). В частности, невозмущенному движению соответствует, очевидно, тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$, которое, следовательно, система (3.2) должна иметь. А для этого необходимо, чтобы функции $X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ обращались в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, что действительно имеет место, как это непосредственно видно из уравнений (3.2).

В переменных x_s неравенства (2.2) и (2.3) принимают соответственно вид

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{3.3}$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

и, следовательно, определение устойчивости формулируется следующим образом.

Невозмущенное движение устойчиво, если для всякого положительного числа ε, *как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число* $\eta(\varepsilon)$, *такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени* t_0 *выполняются неравенства* (3.3), *при всех* $t > t_0$ *будут выполняться неравенства* (3.4).

Если невозмущенное движение устойчиво и если число η можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам (3.3), будут выполняться условия

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0, \tag{3.5}$$

то невозмущенное движение называется устойчивым *асимптотически*[1]).

Рассмотрим несколько примеров на составление уравнений возмущенного движения.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим колебания математического маятника длиной l, описываемые, как известно, дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{3.6}$$

где φ — угол отклонения от вертикали. Пусть требуется исследовать устойчивость $\left(\text{относительно } \varphi \text{ и } \frac{d\varphi}{dt}\right)$ движения, определяемого начальными условиями $\varphi(0) = \alpha$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$. Соответствующее частное решение уравнения (3.6) имеет вид

$$\varphi = f(t),$$

где $f(t)$ — некоторая периодическая функция, которую нам нет необходимости выписывать явно.

Полагая $x = \varphi - f(t)$, получим дифференциальное уравнение возмущенного движения в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(x + f(t)) + \frac{g}{l}\sin f(t),$$

или, разлагая в ряд по степеням x,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x\cos f(t) + \frac{g}{2l}x^2\sin f(t) + \ldots \tag{3.7}$$

Это уравнение может быть, конечно, представлено в виде системы двух уравнений первого порядка.

Пример 2. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг закрепленной точки по инерции. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= 0,\\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= 0,\\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 515).

где p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости на подвижные оси координат, совпадающие с главными осями инерции тела в закрепленной точке, а A, B, C — моменты инерции относительно этих осей.

Уравнения (3.8) имеют частное решение

$$p = \omega = \text{const.}, \quad q = r = 0 \tag{3.9}$$

и два аналогичных частных решения, соответствующие двум другим осям координат. Принимая движение (3.8) за невозмущенное, положим:

$$x = p - \omega, \quad y = q, \quad z = r$$

и, подставляя в (3.8), получим дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt} + (C - B)\,yz &= 0, \\ B\frac{dy}{dt} + (A - C)(x + \omega)\,z &= 0, \\ C\frac{dz}{dt} + (B - A)(x + \omega)\,y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

В общем случае дифференциальные уравнения возмущенного движения содержат явно время t. Но может, однако, случиться, что эти уравнения не содержат t. Так, например, будет всегда, когда исследуется устойчивость относительно координат и скоростей равновесия какой-нибудь голономной системы со стационарными связями, подверженной действию сил, не зависящих явно от t. В этом случае уравнения движения (2.1) не содержат явно t, и поскольку функции $f_s(t)$ в рассматриваемом случае обращаются в постоянные, то и уравнения (3.2) возмущенного движения также не будут содержать t.

Но уравнения возмущенного движения могут не содержать t и тогда, когда исследуется устойчивость не равновесия, а движения. Действительно, поскольку в уравнениях (2.1) переменные y_s являются, вообще говоря, не координатами и скоростями, а некоторыми функциями этих величин, то вполне возможно, что для рассматриваемого невозмущенного движения они будут постоянными, несмотря на то, что координаты и скорости изменяются. Если при этом уравнения (2.1) не зависят от t, то и уравнения возмущенного движения также не будут зависеть от t.

Мы будем в дальнейшем называть невозмущенное движение *установившимся*, если соответствующие дифференциальные уравнения возмущенного движения не содержат явно t. Примером может служить рассмотренное выше движение (3.9) твердого тела вокруг закрепленной точки: соответствующие дифференциальные уравнения возмущенного движения (3.10) не содержат явно t.

Случай установившихся движений является наиболее простым при исследовании устойчивости. Вместе с тем к этому случаю приводятся очень многие практические задачи. Следующим по простоте случаем будет тот, когда правые части уравнений возмущенного движения являются по отношению к t периодическими функциями. К такого рода уравнениям приводятся обычно задачи устойчивости колебательных движений. Примером может служить рассмотренная выше задача устойчивости колебаний математического маятника. Правая часть уравнения (3.7) периодична относительно t, так как функция $f(t)$ — периодическая.

§ 4. Устойчивость по Ляпунову и некоторые другие определения устойчивости.

В данных выше определениях Ляпунова рассматривается устойчивость невозмущенного движения по отношению к возмущениям начальных условий. Физически это означает, что рассматривается устойчивость по отношению к мгновенно действующим возмущениям. Однако реальная механическая система находится обычно под постоянным воздействием небольших возмущающих сил, учесть которые при составлении уравнений движения практически невозможно. Поэтому представляет особый интерес исследование устойчивости рассматриваемого движения по отношению к таким постоянно действующим возмущениям. С точки зрения математической это означает, что необходимо рассматривать возмущения не только начальных условий, но и самих уравнений движения. Примем следующее определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях[1]).

Наряду с уравнениями движения (2.1) рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) + R_s(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (4.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

[1]) См. Дубошин Г. Н., К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. XIV, вып. 1, 1940.

Влияние малых возмущающих сил на устойчивость движения динамической системы рассмотрена впервые в работе: Четаев Н. Г., Об устойчивых траекториях динамики. Учен. зап. Казанского гос. ун-та, кн. 4, вып. 1 (см. также Сборник научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 5, 1936). Этому же вопросу посвящены работы: Артемьев Н. А., Осуществимые движения. Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1939; Малкин И. Г., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. VIII, № 3, 1944; Горшин С. И., Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях. Критические случаи, Известия АН Казахской ССР, № 56, серия математики и механики, вып. 2; Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казахской ССР, № 58, 1948.

где $R_s(t, y_1, \ldots, y_n)$ — некоторые неизвестные функции, характеризующие возмущающие факторы, относительно которых мы можем сказать только то, что они достаточно малы и удовлетворяют некоторым общим условиям, обусловливающим существование решений уравнений (4.1) в окрестности рассматриваемого невозмущенного движения.

Мы будем говорить, что невозмущенное движение $y_s = f_s(t)$ (частное решение уравнений (2.1)) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_2(\varepsilon)$, таких, что всякое решение $y_s(t)$ уравнений (4.1), удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенствам

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \eta_1(\varepsilon),$$

удовлетворяет при $t > t_0$ неравенствам

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были функции $R_s(t, y_1, \ldots, y_n)$, удовлетворяющие в области $t > t_0$, $|y_s - f_s(t)| < \varepsilon$, неравенствам

$$|R_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < \eta_2(\varepsilon).$$

Определенная таким образом устойчивость при постоянно действующих возмущениях является непосредственным обобщением устойчивости по Ляпунову и, как было указано выше, имеет наибольшее практическое значение. Может на первый взгляд показаться, что этим самым до некоторой степени обесценивается теория устойчивости по Ляпунову. Однако это неверно, ибо, во-первых, методы Ляпунова пригодны также для исследования устойчивости при постоянно действующих возмущениях и, во-вторых, по крайней мере в практически наиболее важных случаях, задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях непосредственно приводится к задаче об устойчивости по Ляпунову. Ниже (§ 74) будет показано, что, по крайней мере для установившихся и периодических движений, достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях является асимптотическая устойчивость по Ляпунову[1]).

Рассмотрим еще одно возражение, которое иногда приводится при оценке практической пригодности теории Ляпунова. С этой целью исследуем простейшую систему, описываемую одним дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha^2 - x^2), \tag{4.2}$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 516).

где α — некоторая постоянная. Для этой системы существует, очевидно, положение равновесия $x=0$. Это равновесие неустойчиво. В самом деле, общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$\alpha^2 (t-t_0) = \ln \left| \frac{x\sqrt{\alpha^2 - x_0^2}}{x_0 \sqrt{\alpha^2 - x^2}} \right|, \tag{4.3}$$

где x_0 — начальное значение x (при $t=t_0$).

Решение (4.3) дает вещественные значения для функции x как при $|x_0| < \alpha$, так и при $|x_0| > \alpha$. При этом в обоих случаях

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\alpha. \tag{4.4}$$

Отсюда непосредственно следует, что положение равновесия $x=0$ неустойчиво, ибо, как бы мало ни было отклонение в начальный момент, оно в конце концов делается больше некоторого фиксированного числа $\left(\text{например, } \frac{\alpha}{2}\right)$. Но, с другой стороны, если величина α в рассматриваемой задаче практически мала, так что отклонение от положения равновесия на величину α не имеет никакого практического значения, мы должны будем рассматриваемое положение равновесия считать практически устойчивым. Более того, мы должны будем считать, что имеет место очень сильная устойчивость, ибо условие (4.4) выполняется при любом x_0, как бы велика эта величина численно ни была. Однако нетрудно видеть, что «практическая» устойчивость в рассматриваемом случае обусловлена тем, что в окрестности неустойчивого положения равновесия $x=0$ имеются два асимптотически устойчивых по Ляпунову положения равновесия $x=\pm\alpha$. Следовательно, в рассматриваемом частном случае задача о «практической» устойчивости сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову. В общем случае вопрос о «практической» устойчивости в вышеуказанном смысле делается более сложным. Однако, как будет показано ниже (§ 44), по крайней мере для практически наиболее важных случаев, задача по-прежнему сводится к исследованию устойчивости по Ляпунову.

Все вышеуказанное заставляет считать, что данное Ляпуновым определение устойчивости имеет особо важное практическое значение. Вместе с тем последний пример показывает, что для практики важно не только выяснить, является ли движение устойчивым, но и определить область допустимых начальных возмущений. Последним вопросом Ляпунов не занимался, но развитые им методы дают возможность решать и эту задачу[1]).

---

[1]) См. примечание к стр. 18 в конце книги (стр. 515).

§ 5. О методах решения задачи устойчивости.

Исследование устойчивости не представляет обычно серьезных трудностей в тех случаях, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения удается проинтегрировать в замкнутой форме. Но такого рода случаи являются исключительными и на практике почти не встречаются. Поэтому усилия исследователей были направлены к тому, чтобы разработать методы решения задачи устойчивости, не прибегая к интегрированию уравнений движения. При этом предшественники Ляпунова пользовались обычно методом линеаризации. Этот метод заключается в следующем.

Разложим правые части уравнений возмущенного движения (3.2) в ряды по степеням x_s. Для большинства механических задач такое разложение возможно. Так как $X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0$, то разложения не будут содержать свободных членов, и мы можем писать

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s^*(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (5.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где X_s^* — совокупность членов выше первого порядка в функциях X_s. И вот, поскольку в задаче устойчивости приходится рассматривать решения уравнений (5.1) при малых начальных значениях величин x_s, естественно ожидать, что характер этих решений определяется совокупностью членов наинизшего измерения в уравнениях (5.1). Другими словами, естественно ожидать, что для решения задачи устойчивости достаточно рассмотреть систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5.2)$$

— так называемую систему уравнений первого приближения.

Так решали задачу устойчивости Томсон и Тэт[1]), Раус[2]) и Н. Е. Жуковский[3]). При этом задача значительно упрощалась, а для случая установившихся движений разрешалась элементарно, так как при p_{sj} постоянных уравнения (5.2) интегрируются в замкнутом виде.

Но такого рода решение задачи является нестрогим и, вообще говоря, неправильным. Замена нелинейных уравнений (5.1) линейными уравнениями (5.2) является, по существу, заменой одной задачи другой, с которой первая может не иметь ничего общего. Может случиться, что невозмущенное движение при исследовании лишь первого приближения окажется устойчивым, хотя оно в самом деле неустойчиво, и наоборот.

---

[1]) Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, т. I, 1879.

[2]) Routh, A Treatise on the Stability of a given State of motion.

[3]) Жуковский Н. Е., О прочности движения. Учен. зап. Моск. ун-та, отдел физ.-матем., вып. 4, 1882. См. также: Жуковский Н. Е., Собрание сочинений, т. I, Гостехиздат, 1948.

Поясним это примерами. Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3, \qquad \frac{dy}{dt} = x + ay^3, \tag{5.3}$$

где a — постоянная. Рассмотрим произвольное решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ этих уравнений и составим производную от выражения $x^2(t) + y^2(t)$. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям (5.3), то будем иметь:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{x^2(t) + y^2(t)\} = x(t)\{-y(t) + ax^3(t)\} + y(t)\{x(t) + ay^3(t)\} = \\ = a\{x^4(t) + y^4(t)\}. \tag{5.4}$$

Установив это, допустим сначала, что $a > 0$. Тогда производная от функций $x^2(t) + y^2(t)$ будет все время положительной, и, следовательно, эта функция будет с возрастанием t возрастать. При этом по мере возрастания этой функции ее производная, как это видно из (5.4), будет также возрастать. Отсюда непосредственно вытекает, что как бы малы ни были начальные значения $x(t_0)$ и $y(t_0)$, функция $x^2(t) + y^2(t)$ с неограниченным возрастанием t будет возрастать неограниченно, и, следовательно, невозмущенное движение неустойчиво. Напротив, при $a < 0$ невозмущенное движение будет устойчиво асимптотически, так как при этом $\frac{d}{dt}[x^2(t) + y^2(t)] < 0$, и функция $x^2(t) + y^2(t)$, оставаясь положительной, будет все время убывать, неограниченно стремясь к нулю.

С другой стороны, отбрасывая в уравнениях (5.3) члены третьего порядка, мы для общего решения полученных таким образом уравнений первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x \tag{5.5}$$

будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y &= x_0 \sin t + y_0 \cos t, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где x_0 и y_0 — начальные значения (при $t = 0$) величин x и y. Из (5.6) имеем, что

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < \varepsilon,$$

если только

$$|x_0| \leqslant \eta, \qquad |y_0| \leqslant \eta, \qquad \eta < \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon.$$

Следовательно, в первом приближении невозмущенное движение устойчиво. Однако устойчивость, как это вытекает из (5.6), не будет асимптотической. В действительности же, как мы видели, невозмущенное движение либо асимптотически устойчиво, если a отрицательно, либо неустойчиво, если a положительно. Таким образом, в рассматриваемом случае характер невозмущенного движения определяется членами высших порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

В качестве второго примера рассмотрим колебания математического маятника. За невозмущенное движение примем колебание, определяемое начальными условиями $\varphi(0)=\alpha$, $\dot{\varphi}(0)=0$, где φ — угол отклонения маятника. Дифференциальное уравнение возмущенного движения, как это мы видели в § 3, имеет вид (3.7). Отбрасывая члены высших порядков, получим уравнение первого приближения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{l}x\cos f(t). \tag{5.7}$$

Рассмотрим возмущенное движение, определяемое начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=\beta$. Период возмущенных колебаний отличается от периода невозмущенных колебаний, и поэтому, как мы это видели в § 3, настанет такой момент времени, когда разность значений φ в обоих колебаниях превзойдет некоторую не зависящую от β величину, как бы мала β ни была. Покажем, однако, что если эту разность значений φ, т. е. величину x, определять из уравнения первого приближения (5.7), то она при достаточно малой β будет оставаться меньше любой наперед заданной величины.

В самом деле, подставляя функцию $f(t)$ в уравнение (3.6), которому она удовлетворяет, и дифференцируя полученное тождество по t, будем иметь:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{df}{dt}\right)=-\frac{g}{l}\frac{df}{dt}\cos f.$$

Следовательно, функция $x=\frac{df}{dt}$ удовлетворяет уравнению (5.7). Так как при этом функция $f(t)$ удовлетворяет начальным условиям $f(0)=\alpha$, $\left(\frac{df}{dt}\right)_0=0$, то функция $\frac{df}{dt}$ будет удовлетворять начальным условиям $\left(\frac{df}{dt}\right)_0=0$, $\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_0=-\frac{g}{l}\sin\alpha$. Следовательно, искомое частное решение уравнения (5.7) имеет вид

$$x=-\frac{l\beta}{g\sin\alpha}\frac{df(t)}{dt}.$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{df}{dt}$ — функция ограниченная, убеждаемся, что величина x будет оставаться меньше любого наперед заданного числа ε, если величина β достаточно мала. Таким образом, и в рассматриваемом примере первое приближение дает неправильное описание характера движения.

Можно, однако, привести и такие примеры, когда первое приближение действительно решает задачу устойчивости. Отсюда возникает основная задача: установить необходимые и достаточные условия устойчивости по первому приближению. Эту задачу поставил Ляпунов, который дал полное ее решение для установившихся и периодических решений. Ляпунов дал также решение задачи и для широкого класса неустановившихся движений. Выяснив условия, при которых задача решается в первом приближении, Ляпунов рассмотрел также некоторые основные случаи, когда при исследовании устойчивости нельзя ограничиться рассмотрением первого приближения. Все эти капитальные результаты излагаются ниже.

Для решения поставленных задач Ляпунов разработал специальные приемы. Все эти приемы и вообще все способы решения задачи устойчивости Ляпунов разделяет на две категории. К первой категории он относит те способы, которые приводятся к непосредственному рассмотрению возмущенного движения, т. е. к определению общего или частного решения соответствующих дифференциальных уравнений. Эти решения приходится обычно искать под видом некоторых рядов. Совокупность всех способов первой категории Ляпунов называет *первым методом* [1]).

Можно, однако, указать и другие способы решения задачи устойчивости, которые не требуют нахождения частных или общих решений уравнений возмущенного движения, а приводятся к отысканию некоторых функций от t, $x_1, \ldots, x_n$, обладающих специальными свойствами. Примером может служить известная теорема Лагранжа об устойчивости равновесия, когда силовая функция обращается в максимум. Здесь устойчивость обеспечивается существованием силовой функции, обладающей специальными свойствами. Совокупность всех способов второй категории Ляпунов называет *вторым методом*.

В основу своего второго метода Ляпунов кладет несколько основных установленных им теорем. Эти теоремы оказались настолько эффективными, что при помощи их удалось исключительно просто разрешить задачу об устойчивости по первому приближению. Вместе с тем они позволили Ляпунову рассмотреть и некоторые основные случаи, когда первое приближение задачи не решает и, следовательно, когда эта задача делается особенно сложной.

Второй метод Ляпунова является и в настоящее время основным методом решения задачи устойчивости [2]).

Изложению основных теорем второго метода Ляпунова и его приложений посвящена следующая глава. При этом для простоты мы ограничиваемся сначала лишь установившимися движениями. Общий случай неустановившихся движений рассматривается в главах V и VI.

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 517).
[2]) См. примечание в конце книги (стр. 518).

ГЛАВА II.

ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 6. Основные определения.

Мы переходим теперь к изложению основных положений второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения. В этой главе мы ограничиваемся, однако, рассмотрением только установившихся движений. Мы будем, следовательно, предполагать, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.1}$$

где X_s не зависят явно от t.

В своем исследовании Ляпунов предполагал, что функции X_s представляют собой степенные ряды, расположенные по степеням $x_1, \ldots, x_n$, сходящиеся в области

$$|x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.2}$$

где H — некоторая постоянная. Однако все положения второго метода Ляпунова и все связанные с ними доказательства полностью сохраняют силу и при более общих предположениях. Мы заменим поэтому предположение Ляпунова об аналитичности функций X_s значительно более общим условием, а именно, мы будем только предполагать, что функции X_s в области (6.2) непрерывны и притом такие, что уравнения (6.1) для каждой системы начальных значений x_s^0 величин x_s, лежащих в области (6.2), допускают единственное решение.

Нам придется рассматривать в дальнейшем некоторые функции $V(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенные в некоторой окрестности начала координат. Относительно этих функций мы будем всегда предполагать, что они однозначны, обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и обладают непрерывными частными производными.

Определение 1. *Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакоопределенной (определенно-положительной или определенно-*

отрицательной), если она при

$$|x_s| \leqslant h, \tag{6.3}$$

где h — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определенного знака и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Определение 2. *Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области* (6.3) *может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль и при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$.*

Определение 3. *Функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ называется знакопеременной, если она не является ни знакоопределенной, ни знакопостоянной и, следовательно, как бы мало ни было число h, может принимать в области* (6.3) *как положительные, так и отрицательные значения.*

Поясним эти определения примерами. Допустим для определенности, что $n = 3$. Тогда функции

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4, \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

будут определенно-положительными, и при этом величина h в неравенствах (6.3) может быть взята сколь угодно большой. Функция

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^3,$$

как мы увидим ниже, будет также определенно-положительной, но теперь уже величина h должна быть взята достаточно малой. Функции

$$V = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2, \quad V = x_1^2 + x_2^2$$

будут обе знакопостоянными (положительными). Действительно, обе они могуть принимать кроме положительных еще и нулевые значения при значениях x_1, x_2, x_3, не равных нулю одновременно (вторая — при $x_1 = x_2 = 0$ и x_3 произвольном). Функции

$$V = x_1, \quad V = x_1^2 + x_2^2 - x_3^4$$

будут, очевидно, знакопеременными [1]).

§ 7. Признаки знакоопределенности и знакопеременности функций.

Как мы увидим ниже, для практического применения второго метода Ляпунова необходимо знать критерии знакоопределенности и и знакопеременности функций. К сожалению, общих критериев такого рода не существует, и задача в общем случае весьма сложна. Однако

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 518).

в частных случаях, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем, эта задача легко разрешается при помощи некоторых простых критериев, которые мы здесь приводим.

Допустим сначала, что $V(x_1, \ldots, x_n)$ представляет однородную форму m-го порядка. Так как при произвольном λ выполняется тождество

$$V(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, \ldots, x_n),$$

то совершенно очевидно, что если форма V является знакоопределенной, то знакоопределенность будет иметь место во всем пространстве, а не только вблизи начала координат. То же самое будет справедливо и относительно знакопеременности. При этом очевидно, что знакоопределенность может иметь место только при m четном. Следовательно, имеет место следующее предложение.

Лемма 1. *Любая форма нечетного порядка есть функция знакопеременная.*

Если m есть число четное, то форма V может быть как знакоопределенной, так и знакопеременной. Вопрос о том, какой из этих случаев действительно имеет место, является очень сложным для форм порядка выше второго, если число независимых переменных больше двух. Для форм же второго порядка (при любом числе независимых переменных) эта задача разрешается чрезвычайно просто следующим образом.

Пусть

$$2V = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (7.1)$$

— квадратичная форма. Тогда, как известно, существует бесчисленное множество линейных подстановок

$$y_s = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7.2)$$

с отличным от нуля определителем, которые преобразуют форму V к виду

$$V = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \qquad (7.3)$$

Если все коэффициенты λ_s отличны от нуля и одинакового знака, то форма V будет знакоопределенной. Действительно, в этом случае форма V может обратиться в нуль только при $y_1 = \ldots = y_n = 0$, что возможно только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, так как определитель подстановки (7.2) отличен от нуля. Если часть коэффициентов λ_s равна нулю, а остальные имеют одинаковые знаки, то форма V будет, очевидно, знакопостоянной. Если же среди коэффициентов λ_s имеются как положительные, так и отрицательные, то форма V будет знакопеременной.

Число отличных от нуля коэффициентов λ_s, а также число перемен знаков в ряду этих величин не зависит от выбора подстановки (7.2).

Само приведение формы к виду (7.3) производится совершенно элементарными приемами, на которых мы здесь не останавливаемся.

Знакоопределенность или знакопеременность квадратичной формы можно также установить и не прибегая к вышеуказанному линейному преобразованию. Имеет место следующая теорема Сильвестра, которую мы здесь приводим без доказательства.

Теорема Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма* (7.1) *была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее дискриминанта, т. е. величины*

$$c_{11}, \quad \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{12}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n} \\ c_{1n}, & c_{2n}, & \ldots, & c_{nn} \end{vmatrix},$$

были положительны.

Допустим снова, что $V(x_1, \ldots, x_n)$ есть форма произвольного m-го порядка. Рассмотрим произвольную функцию $W(x_1, \ldots, x_n)$, обращающуюся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и удовлетворяющую в области (6.3) неравенству

$$|W(x_1, \ldots, x_n)| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^m, \tag{7.4}$$

где A — некоторая постоянная. Имеет место следующее важное предложение.

Лемма 2. *Если V — знакоопределенная форма m-го порядка, то функция*

$$U(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_n) + W(x_1, \ldots, x_n) \tag{7.5}$$

будет также знакоопределенной того же знака при любом выборе функции $W(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей в области (6.3) *неравенству* (7.4), *где A — достаточно малое положительное число, зависящее исключительно от коэффициентов формы V. Если V есть форма знакопеременная, то при тех же условиях функция U будет также знакопеременной.*

Доказательство. Полагая

$$x_s = \rho\alpha_s, \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1, \tag{7.6}$$

будем иметь:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \rho^m V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + W(\rho\alpha_1, \ldots, \rho\alpha_n).$$

Допустим сначала, что V есть форма знакоопределенная, например определенно-положительная. Считая ρ настолько малым, что величины x_s лежат в области (6.3), можем на основании (7.4) и (7.6) писать:

$$|W(\rho\alpha_1, \ldots, \rho\alpha_n)| < A\rho^m\{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|\}^m < A\rho^m n^m. \tag{7.7}$$

Пусть l — нижняя граница величины $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, так что

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant l. \tag{7.8}$$

Число l будет обязательно положительным, так как определенно-положительная форма $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ может принимать на сфере (7.6) только положительные значения. Из (7.7) и (7.8) вытекает, что если число A меньше величины $\frac{l}{n^m}$, зависящей исключительно от формы V, то во всех точках области (6.3), кроме начала координат, функция U будет принимать только положительные значения, что и доказывает первую часть леммы.

Допустим теперь, что V — форма знакопеременная. Тогда на сфере (7.6) она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Допустим, что $V(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = a > 0$, а $V(\alpha''_1, \ldots, \alpha''_n) = -b < 0$. Тогда, считая, что $A < \frac{a}{n^m}$ и $A < \frac{b}{n^m}$, будем иметь, что при $\alpha_s = \alpha'_s$ функция U будет положительной, а при $\alpha_s = \alpha''_s$ функция U будет отрицательной, и это будет справедливо, как бы мало ни было ρ. Следовательно, функция U является знакопеременной.

Таким образом, лемма полностью доказана.

Лемма 3. *Знакоопределенность или знакопеременность формы сохраняется, если к ней добавить любую форму того же порядка с достаточно малыми коэффициентами.*

Справедливость этой леммы непосредственно вытекает из того обстоятельства, что всякая форма m-го порядка необходимо удовлетворяет неравенству (7.4), причем коэффициент A будет сколь угодно мал, если коэффициенты формы достаточно малы.

Пусть теперь $V(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает произвольную функцию, разлагающуюся в ряд по степеням $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности начала координат. Допустим, что это разложение начинается членами некоторого произвольного порядка m, так что мы можем писать:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V_m(x_1, \ldots, x_n) + V^*(x_1, \ldots, x_n), \tag{7.9}$$

где V_m — форма m-го порядка, а $V^*(x_1, \ldots, x_n)$ — совокупность членов более высоких порядков. Очевидно, что функцию $V^*(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать, и притом бесчисленным множеством способов, как форму m-го порядка, коэффициенты которой являются функциями от $x_1, \ldots, x_n$, обращающимися в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, если величина h, определяющая область (6.3), достаточно мала, то указанные коэффициенты будут сколь угодно малыми. Поэтому на основании предыдущего справедлива также следующая лемма.

Лемма 4. *Если V_m есть форма знакоопределенная, то и функция* (7.9) *будет знакоопределенной, и если V_m есть форма знакопеременная, то и функция* (7.9) *будет знакопеременной.*

Таким образом, знакоопределенность и знакопеременность аналитических функций определяются совокупностью членов наинизшего порядка в разложениях этих функций, за исключением того случая, когда эта совокупность членов наинизшего порядка представляет знакопостоянную форму. Так что, например, функция двух переменных

$$V(x,\ y) = x^2 + y^2 + xy^2 + y^3$$

будет знакоопределенной, а функция

$$V(x,\ y) = x^2 - y^2 + xy^2 + y^3$$

— знакопеременной.

Если совокупность членов наинизшего порядка в разложении аналитической функции представляет собой форму знакопостоянную, то вопрос о знакоопределенности или знакопеременности этой функции решается, очевидно, членами более высоких порядков. Рассмотрим в качестве примера следующие четыре функции переменных x и y:

$$\begin{aligned}
&V = x^2,\\
&V = x^2 - 2xy^2,\\
&V = x^2 - 2xy^2 + y^4 + x^4 = (x - y^2)^2 + x^4,\\
&V = x^2 - 2xy^2 + y^4 + x^4 + xy^5.
\end{aligned}$$

Первая из этих функций представляет собой постоянно-положительную квадратичную форму. Добавляя к ней член третьего порядка $-2xy^2$, получим вторую функцию, которая, очевидно, знакопеременна. Добавляя к полученной функции члены четвертого порядка $y^4 + x^4$, получим третью функцию, которая уже будет знакоопределенной. Наконец, добавляя член шестого порядка xy^5, мы получим четвертую функцию, которая уже снова является знакопеременной. Действительно, последняя функция на параболе $x = y^2$ принимает значение $y^7 + y^8$, которое при достаточно малом y будет либо положительным, либо отрицательным, в зависимости от знака y.

Последний пример показывает, что добавлением членов более высоких порядков можно нарушить знакоопределенность или знакопеременность функции, если последняя не является формой от всех переменных.

В заключение отметим, что лемма 4 остается, очевидно, в силе, если предположение, что функция V^* является аналитической с разложением, начинающимся членами не ниже $m+1$-го порядка, заменить более общим предположением, что V^* обращается в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и имеет при этом порядок малости более высокий, чем m, т. е. что V^* удовлетворяет в некоторой окрестности начала координат неравенству

$$|V^*(x_1, \ldots, x_n)| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^{m+\alpha},$$

где α — положительное число, которое, вообще говоря, может быть сколь угодно малым. Аналитичность функции V^* при этом не требуется.

§ 8. Геометрическая интерпретация знакоопределенных функций.

Рассмотрим для простоты знакоопределенную функцию трех переменных $V(x_1, x_2, x_3)$. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми и при $n > 3$. Допустим также для определенности, что V — функция положительная. Рассмотрим поверхность

$$V(x_1, x_2, x_3) = c, \tag{8.1}$$

где c — положительное число. При $c = 0$ в силу знакоопределенности V будем иметь $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, и, следовательно, поверхность $V = 0$ вырождается в точку, в начало координат. Покажем, что при c достаточно малом поверхность (8.1) будет замкнутой и будет содержать внутри себя начало координат.

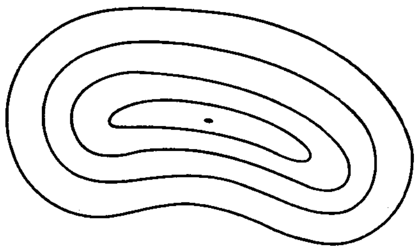

Рис. 2.

С этой целью покажем, что всякая непрерывная кривая, идущая из начала координат к какой-нибудь точке границы области (6.3), непременно пересекает поверхность (8.1), если только число c не превосходит некоторого, зависящего только от h, достаточно малого положительного числа l. В самом деле, пусть l — точный нижний предел функции V на границе области (6.3), так что на этой границе будем иметь $V \geqslant l$. Число l будет, очевидно, отличным от нуля и положительным. Если мы теперь рассмотрим произвольную непрерывную кривую, выходящую из начала координат к границе области (6.3), и проследим за изменением функции V вдоль этой кривой, то мы получим, что в начале кривой V обращается в нуль, а в конце кривой — в некоторую величину, не меньшую чем l. Следовательно, в некоторой точке этой кривой V необходимо принимает значение c, если только $c < l$, что мы и будем предполагать. Другими словами, указанная кривая необходимо пересекает поверхность (8.1). Таким образом, при достаточно малых значениях c все поверхности (8.1) будут замкнутыми и окружают начало координат[1]).

[1]) Поверхности $V = c$ могут быть довольно сложной формы. Они не обязательно гомеоморфны сфере.

Если мы теперь будем изменять c от нуля до некоторого достаточно малого значения, то получим семейство замкнутых, не пересекающихся между собой (в силу однозначности V) поверхностей, окружающих начало координат и стягивающихся в эту точку при $c = 0$ (рис. 2).

§ 9. Первая теорема Ляпунова об устойчивости движения.

Мы переходим теперь к изложению основных теорем второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения. Нам придется при этом рассматривать одновременно с функциями $V(x_1, \ldots, x_n)$ их производные по времени, составленные в предположении, что $x_1, \ldots, x_n$ являются некоторыми функциями времени, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям возмущенного движения (6.1). При таком предположении мы будем для этих производных по времени иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s = W(x_1, \ldots, x_n)$$

и, следовательно, $\frac{dV}{dt}$ будет также функцией $x_1, \ldots, x_n$, обращающейся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Первая теорема Ляпунова об устойчивости, которая в дальнейшем будет именоваться теоремой А, может быть выражена следующим образом:

Теорема А. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти знакоопределенную функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V, или тождественно обращается в нуль, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, мы можем предположить, что V есть функция определенно-положительная, так что во всех точках области

$$|x_s| \leqslant h \leqslant H, \tag{9.1}$$

за исключением начала координат, V принимает только положительные значения. В той же области согласно условию теоремы справедливо неравенство

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant 0. \tag{9.2}$$

Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число, меньшее h. Обозначим через x наибольшую из величин $|x_1|, \ldots, |x_n|$, т. е. положим

$$x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

и рассмотрим множество всех значений величин $x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$x = \varepsilon \tag{9.3}$$

(т. е. все точки, лежащие на гранях n-мерного куба со стороной 2ε, ребра которого параллельны осям координат и центр которого совпадает с началом координат).

Пусть l — точный нижний предел функции $V(x_1, \ldots, x_n)$ при условии (9.3), так что

$$V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant l \quad \text{при } x = \varepsilon. \tag{9.4}$$

Число l будет, очевидно, положительным, так как V может принимать на множестве (9.1) только положительные значения, и при этом в силу непрерывности V нижний предел этой функции на множестве (9.3) есть одно из значений, которые она на этом множестве принимает.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x_s(t)$ дифференциальных уравнений возмущенного движения, начальные значения $x_s^0 = x_s(t_0)$ которого лежат в области

$$|x_s^0| \leqslant \eta. \tag{9.5}$$

Мы будем при этом предполагать, что число η меньше, чем ε, и что оно настолько мало, что

$$V(x_1^0, \ldots, x_n^0) < l.$$

Такой выбор числа η, очевидно, возможен, так как V — функция непрерывная и $V(0, \ldots, 0) = 0$.

Подставляя решение $x_s(t)$ в функцию V, мы получим функцию от времени, которая в силу (9.2) будет не возрастающей, по крайней мере до тех пор, пока величины $x_s(t)$ будут оставаться в области (9.1). Следовательно, при всех t, при которых $x_s(t)$ лежат в области (9.1), будет выполняться неравенство

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant V(x_1^0, \ldots, x_n^0) < l. \tag{9.6}$$

Отсюда непосредственно следует, что при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства

$$|x_s| < \varepsilon. \tag{9.7}$$

В самом деле, так как $\eta < \varepsilon$, то неравенства (9.7) будут выполняться в силу непрерывности $x_s(t)$, по крайней мере при значениях t, достаточно близких к t_0. И если поэтому эти неравенства когда-нибудь вообще нарушаются, то должен существовать такой момент времени $t = T$, при котором хотя бы одна из величин x_s достигнет численно значения ε. Другими словами, должен существовать такой момент времени $t = T$, при котором будет выполняться условие (9.3), и, следовательно, на основании (9.4)

$$V(x_1(T), \ldots, x_n(T)) \geqslant l.$$

Это, однако, невозможно, так как в силу $\varepsilon < h$ множество (9.3) лежит в области (9.1) и, следовательно, при $x = \varepsilon$ должно выполняться неравенство (9.6).

Таким образом, для всех решений дифференциальных уравнений возмущенного движения, для которых выполняются неравенства (9.5), будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства (9.7), что и доказывает устойчивость невозмущенного движения.

Заметим, что из приведенного доказательства вытекает также и способ построения по числу ε соответствующего числа η. Для этого, как видно из предыдущего, необходимо: 1) задавшись числом ε, определить число $l(\varepsilon)$, являющееся точным нижним пределом функции V, при условии (9.3); 2) по полученному числу $l(\varepsilon)$ определить $\eta(\varepsilon)$ так, чтобы при выполнении (9.5) выполнялось неравенство $V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) < l$.

§ 10. Вторая теорема Ляпунова об устойчивости движения.

Рассмотренная в предыдущем параграфе основная теорема Ляпунова может быть дополнена следующей теоремой, принадлежащей также Ляпунову.

Теорема Б. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти знакоопределенную функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция также знакоопределенная, знака, противоположного с V, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, мы можем, так же как и раньше, предположить, что V есть функция определенно-положительная и, следовательно, $\frac{dV}{dt}$ — определенно-отрицательная, так что в области (9.1) выполняются условия

$$V \geqslant 0, \quad \frac{dV}{dt} \leqslant 0,$$

причем знаки равенства возможны только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее h. Так как в рассматриваемом случае выполняются условия предыдущей теоремы, то невозмущенное движение во всяком случае устойчиво. Поэтому найдется такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что для всякого решения $x_s(t)$ уравнений (6.1), для которого в начальный момент времени $t = t_0$ выполняются неравенства

$$|x_s^0| \equiv |x_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{10.1}$$

будут при всех $t > t_0$ выполняться неравенства

$$|x_s(t)| < \varepsilon.$$

Покажем, что при этом будем иметь:

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0, \tag{10.2}$$

т. е. что невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

В самом деле, так как рассматриваемое решение все время лежит в области (9.1), то производная по времени функции $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ будет по условию теоремы оставаться все время отрицательной, не обращаясь в нуль ни при каких значениях t. Последнее вытекает из того обстоятельства, что функции $x_s(t)$ не могут обратиться в нуль одновременно ни при каких значениях t, ибо если бы это имело место при каком-нибудь значении $t = T$, то, приняв T за начальный момент времени, мы имели бы два разных решения уравнений (6.1) с нулевыми начальными значениями: рассматриваемое $x_s(t)$ и тривиальное $x_1 = \ldots = x_n$. Это, однако, невозможно, так как уравнения (6.1) таковы, что для них при заданных начальных условиях существует только одно решение.

Итак, производная $\frac{dV}{dt}$ остается все время отрицательной. Следовательно, функция $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ будет монотонной убывающей и поэтому она при $t \to \infty$ будет необходимо стремиться к некоторому пределу α, оставаясь все время больше этого предела, так что все время будем иметь:

$$V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] > \alpha. \tag{10.3}$$

Докажем, что $\alpha = 0$. С этой целью допустим противное: что $\alpha \neq 0$ и, следовательно, в силу положительности V, $\alpha > 0$. Так как V есть функция непрерывная, то из (10.3) вытекает, что

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} > a, \tag{10.4}$$

где a — некоторое положительное число. Но так как $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная, то из (10.4) вытекает, что

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -b,$$

где b — также положительное число.

Следовательно, при всех $t > t_0$ будет выполняться неравенство

$$V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] = V[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)] + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant V[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)] - b(t - t_0),$$

что, очевидно, невозможно, так как правая часть этого неравенства при достаточно больших t делается отрицательной, что противоречит условию положительности $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$. Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$\lim_{t\to\infty} V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] = 0,$$

откуда вследствие знакоопределенности V вытекает (10.2), что и доказывает теорему.

Примечание. Назовем *областью асимптотической устойчивости* наибольшую область начальных значений x_s^0, при которых для решений уравнений (6.1) выполняются условия (10.2). Из предыдущего доказательства вытекает, что эта область во всяком случае не меньше области (10.1), где $\eta = \eta(\varepsilon)$, причем $\eta(\varepsilon)$ строится по числу ε так, как указано в примечании в конце предыдущего параграфа[1]).

§ 11. Геометрическая интерпретация предыдущих теорем.

Предыдущие теоремы имеют простое геометрическое истолкование. Это истолкование не только выясняет основное содержание теорем, но в последнее время широко используется для решения многих технических задач[2]).

Рассмотрим сначала первую теорему Ляпунова. Допустим, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, x_3)$, для которой $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Мы предполагаем при этом для простоты, что $n = 3$. Построим систему поверхностей

$$V(x_1, x_2, x_3) = c, \tag{11.1}$$

где c — положительный параметр, изменяющийся от нуля до некоторого достаточно малого значения. Как мы видели в § 8, поверхности (11.1) замкнуты, окружают начало координат и стягиваются в точку при $c = 0$. При этом если $c_1 < c_2$, то поверхность $V = c_1$ целиком заключена внутри поверхности $V = c_2$.

Рассмотрим какую-нибудь интегральную кривую уравнений (6.1), выходящую в начальный момент времени из какой-нибудь точки окрестности начала координат. Эта интегральная кривая при возрастающих значениях t никогда не пересечет ни одной из поверхностей (11.1) изнутри наружу. В самом деле, если бы такое пересечение в какой-нибудь точке имело место, то в этой точке или в окрест-

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 519).

[2]) Приводимая ниже геометрическая интерпретация стала нам известна из бесед с Н. Г. Четаевым и впервые была сформулирована в работе: Малкин И. Г., Проблема существования функций Ляпунова. Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, т. IV (1929—1930), т. V (1931).

ности этой точки функция $V[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ необходимо имела бы положительную производную, так как при переходе от какой-нибудь поверхности (11.1) к другой поверхности этого семейства, охватывающей первую, функция $V(x_1, x_2, x_3)$ возрастает. Но это, однако, невозможно в силу того, что $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Таким образом, если какая-нибудь интегральная кривая в начальный момент времени находилась внутри какой-нибудь поверхности (11.1), то она и в дальнейшем будет все время оставаться внутри нее. Но так как при достаточно малом c поверхности (11.1) ограничивают сколь угодно малую окрестность начала координат, то отсюда непосредственно вытекает устойчивость невозмущенного движения.

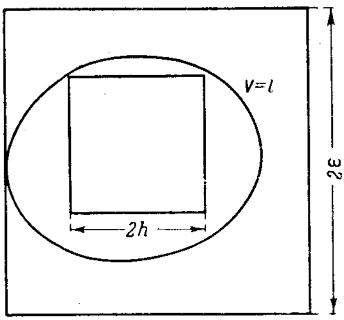

Рис. 3.

Легко также геометрически интерпретировать построение числа $\eta(\varepsilon)$ по числу ε. С этой целью рассмотрим наибольшую поверхность семейства (11.1), целиком расположенную внутри куба со стороной 2ε. Пусть это будет поверхность $V = l$ (рис. 3)[1]. Построим теперь куб со стороной 2η, целиком расположенный внутри указанной поверхности. Тогда любая интегральная кривая, начинающаяся внутри этого куба, т. е. такая, для которой $|x_s^0| \leqslant \eta$, будет все время оставаться внутри поверхности $V = l$, а следовательно, и подавно внутри куба со стороной 2ε. Мы будем, таким образом, для каждой такой интегральной кривой иметь $|x_s| < \varepsilon$, т. е. найденная нами величина η и будет той, которая фигурирует в условиях устойчивости.

Если $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная, то каждая интегральная кривая, выходящая из достаточно малой окрестности начала координат, будет непременно пересекать каждую из поверхностей (11.1) снаружи во внутрь, так как функция $V[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ должна непрерывно убывать. Но в таком случае интегральные кривые должны неограниченно приближаться к началу координат, т. е. невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Таким образом, с точки зрения геометрической второй метод Ляпунова исследования устойчивости сводится к построению семейства замкнутых поверхностей, окружающих начало координат и обладающих тем свойством, что интегральные кривые могут пересекать

[1]) Как легко видеть, l есть точный нижний предел функции V при условии $\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \varepsilon$.

каждую из этих поверхностей только снаружи во внутрь. Как только из каких-нибудь соображений удается установить существование такого рода семейства поверхностей, то этим самым сразу будет установлена устойчивость невозмущенного движения.

§ 12. Примеры приложения предыдущих теорем.

Пример 1. *Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия.* Простейшим случаем, когда теоремы Ляпунова дают возможность установить устойчивость невозмущенного движения, будет, очевидно, тот, когда уравнения (6.1) допускают первый интеграл

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

где $V(x_1, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная функция. Действительно, в этом случае $\frac{dV}{dt} = 0$, и функция V удовлетворяет условиям теоремы А, откуда сразу следует устойчивость невозмущенного движения. С этим случаем мы как раз имеем дело при исследовании устойчивости равновесия голономной консервативной системы, когда в положении равновесия силовая функция имеет максимум. Действительно, пусть $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты системы, которые выбраны так, что в положении равновесия они обращаются в нуль. Допустим, что силовая функция $U(q_1, \ldots, q_n)$ имеет в положении равновесия максимум, который мы, не нарушая общности, можем положить равным нулю. Тогда $U(q_1, \ldots, q_n)$ будет определенно-отрицательной функцией величин $q_1, \ldots, q_n$. Так как невозмущенным движением в рассматриваемом случае является положение равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$, то дифференциальными уравнениями возмущенного движения являются просто уравнения движения, которые мы можем записать в канонической форме:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.1}$$

где

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = T - U$$

и p_i — обобщенные импульсы. Так как кинетическая энергия T является по отношению к переменным p_s определенно-положительной квадратичной формой, а — U — определенно-положительной функцией переменных q_s, то H является определенно-положительной функцией переменных p_s и q_s. Но уравнения (12.1) допускают интеграл энергии $H = h$, откуда немедленно вытекает известная теорема Лагранжа об устойчивости равновесия (по отношению к координатам и скоростям), когда силовая функция в положении равновесия имеет максимум.

Пример 2. *Устойчивость вращательного движения снаряда.* В предыдущем примере первый интеграл уравнений возмущенного движения, который получился из общих теорем механики, оказался знакоопределенным, что сразу привело к решению задачи. В некоторых случаях общие теоремы механики дают возможность получить первые интегралы, которые сами не являются знакоопределенными, но из них удается скомбинировать новый интеграл, уже являющийся знакоопределенным. Таким путем Н. Г. Четаеву[1]) удалось получить решение важной технической задачи об устойчивости вращательного движения снаряда, к изложению которой мы сейчас и переходим.

При весьма настильной траектории стрельбы можно приближенно считать, что центр тяжести снаряда движется прямолинейно и равномерно. Пусть β — угол, который образует ось снаряда со своей проекцией на вертикальную плоскость стрельбы, а α — угол между этой проекцией и касательной к траектории центра тяжести. Эти два угла, очевидно, вполне определяют положение оси снаряда. Для этих углов имеют место следующие дифференциальные уравнения, установленные А. Н. Крыловым[2]):

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\beta}+A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-Cn\dot{\alpha}\cos\beta&=eR\sin\beta\cos\alpha,\\ A\ddot{\alpha}\cos\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+Cn\dot{\beta}&=eR\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(12.2)$$

Здесь C — аксиальный момент инерции снаряда, A — его момент инерции относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести, n — постоянная проекция угловой скорости вращения снаряда на его ось симметрии, e — расстояние между центром тяжести и центром давления (точкой приложения равнодействующей сил сопротивления воздуха) и R — лобовое сопротивление, которое в силу постоянства скорости центра тяжести снаряда будет также величиной постоянной.

Уравнения (12.2) допускают частное решение:

$$\alpha=\dot{\alpha}=\beta=\dot{\beta}=0,$$

которому отвечает винтовое движение снаряда вдоль собственной оси симметрии. Это движение мы примем за невозмущенное. Тогда уравнения (12.2) можно рассматривать как уравнения возмущенного движения. Общие теоремы механики дают для этих уравнений два первых интеграла (интеграл энергии и интеграл момента количества

---

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946. См. также: Четаев Н. Г., Об устойчивости вращательных движений снаряда. ПММ, т. X, вып. 1, 1946.

[2]) Крылов А. Н., О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета, Собрание трудов, т. IV, Изд-во АН СССР, 1937. Вывод дифференциальных уравнений движения снаряда можно найти также в книге: Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. II, § 153, изд. 4-е, Гостехиздат, 1948.

движения) вида

$$F_1(\alpha, \dot\alpha, \beta, \dot\beta) = \frac{1}{2} A (\dot\beta^2 + \dot\alpha^2 \cos^2\beta) + eR(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \text{const.} \tag{12.3}$$

и

$$F_2(\alpha, \dot\alpha, \beta, \dot\beta) = A(\dot\beta\sin\alpha - \dot\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha) + \\ + Cn(\cos\alpha\cos\beta - 1) = \text{const.} \tag{12.4}$$

Действительно, составляя производные $\frac{dF_1}{dt}$ и $\frac{dF_2}{dt}$, в силу уравнений (12.2) будем иметь:

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial\alpha}\dot\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial\dot\alpha}\ddot\alpha + \frac{\partial F_1}{\partial\beta}\dot\beta + \frac{\partial F_1}{\partial\dot\beta}\ddot\beta =$$
$$= -eR\dot\alpha\sin\alpha\cos\beta + \cos\beta(eR\sin\alpha - Cn\dot\beta + 2A\dot\alpha\dot\beta\sin\beta)\dot\alpha -$$
$$- A\dot\alpha^2\dot\beta\cos\beta\sin\beta - eR\dot\beta\cos\alpha\sin\beta +$$
$$+ \dot\beta(eR\sin\beta\cos\alpha - A\dot\alpha^2\sin\beta\cos\beta + Cn\dot\alpha\cos\beta) \equiv 0$$

и аналогично

$$\frac{dF_2}{dt} \equiv 0;$$

это и доказывает, что (12.3) и (12.4) действительно представляют первые интегралы уравнений (12.2). Каждый из этих интегралов не является знакоопределенным. Составим из них новый первый интеграл

$$V = F_1 - \lambda F_2 = \text{const.},$$

где λ — некоторая постоянная, и подберем эту постоянную таким образом, чтобы функция V получилась знакоопределенной (относительно α, $\dot\alpha$, β и $\dot\beta$). Выясним, при каком условии такой выбор постоянной λ возможен. Это и будет условием устойчивости.

Разлагая функцию V в ряд, будем иметь:

$$V = \frac{1}{2}\{A\dot\alpha^2 + (Cn\lambda - eR)\beta^2 + 2A\lambda\dot\alpha\beta\} + \\ + \frac{1}{2}\{A\dot\beta^2 + (Cn\lambda - eR)\alpha^2 - 2A\lambda\dot\beta\alpha\} + \ldots, \tag{12.5}$$

где ненаписанные члены имеют порядок не ниже третьего. Из этого разложения сразу видно, что если каждая из квадратичных форм

$$Ax^2 + (Cn\lambda - eR)y^2 \pm 2A\lambda xy \tag{12.6}$$

будет определенно-положительной, то функция V будет также определенно-положительной. В самом деле, при выполнении указанных условий выражение, стоящее в первой скобке разложения (12.5), будет определенно-положительной квадратичной формой относительно

$\dot\alpha$ и β, а выражение, стоящее во второй скобке, будет такой же формой относительно α и $\dot\beta$. Но тогда совокупность членов второго порядка в функции V будет определенно-положительной квадратичной формой всех четырех величин: α, $\dot\alpha$, β и $\dot\beta$, и на основании результатов § 7 функция V будет также определенно-положительной.

Таким образом, невозмущенное движение будет устойчиво, если удастся подобрать такое число λ, что обе формы (12.6) будут определенно-положительными, а для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$A > 0, \quad f(\lambda) = A\lambda^2 - Cn\lambda + eR < 0.$$

Первое из этих неравенств выполняется. Что же касается второго, то, поскольку $f(0) > 0$, ему можно будет удовлетворить подходящими значениями λ тогда и только тогда, когда уравнение $f(\lambda) = 0$ будет иметь два вещественных не равных между собой корня λ_1 и λ_2. В этом случае можно будет взять любое λ, заключенное между λ_1 и λ_2.

Итак, для устойчивости достаточно, чтобы уравнение $f(\lambda) = 0$ имело простые вещественные корни, т. е. чтобы выполнялось условие

$$C^2n^2 - 4AeR > 0.$$

Это неравенство дает нижнюю границу угловой скорости вращательного движения снаряда, при которой его ось будет «следить» за касательной к траектории центра тяжести. Ниже будет показано, что при

$$C^2n^2 - 4AeR < 0$$

невозмущенное движение будет неустойчиво.

Пример 3. *Устойчивость регулируемых систем.* Во многих технических задачах важно, чтобы невозмущенное движение было асимптотически устойчивым и чтобы эта устойчивость имела место при любых начальных возмущениях. Так как функция Ляпунова дает возможность не только установить асимптотическую устойчивость, но и определить область допустимых начальных возмущений, то естественно, что второй метод может быть с успехом применен к решению такого рода технических задач. При этом дело сведется к установлению условий, при которых в рассматриваемой задаче можно будет построить функцию V, удовлетворяющую всем условиям теоремы $Б_2$[1]). Иначе говоря, здесь надо построить функцию V, удовлетворяющую всем условиям теоремы Б при любых значениях переменных x_s и еще дополнительному условию

$$\lim V = \infty \quad \text{при} \quad \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \to \infty.$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 519).

В качестве примера мы приведем здесь исследование А. И. Лурье [1]) условий устойчивости одного класса регулируемых систем. Это исследование послужило отправной точкой для целого ряда других работ, посвященных тому же вопросу.

Как показал А. И. Лурье, широкий класс регулируемых систем с одним регулирующим органом может быть описан системой дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\rho_s x_s + f(\sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n - r f(\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

Здесь r — вещественная положительная постоянная, ρ_s суть n различных постоянных с положительной вещественной частью, β_s — также постоянные, а $f(\sigma)$ — некоторая функция от σ. Относительно этой функции, являющейся характеристикой сервомотора, предполагается только, что она является непрерывной, переходящей от отрицательных значений при $\sigma < 0$ к положительным при $\sigma > 0$.

Задача заключается в установлении условий, которым должны удовлетворять параметры системы (постоянные ρ_s и β_s), при которых состояние равновесия $x_1 = \ldots = x_n = \sigma = 0$ асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях и при любом виде функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей вышеуказанным условиям.

А. И. Лурье рассматривал общий случай, когда постоянные ρ_s и β_s комплексны. Мы, однако, для упрощения изложения ограничимся здесь рассмотрением лишь того случая, когда все постоянные ρ_s и β_s вещественны. Рассмотрим квадратичную форму

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \frac{1}{\rho_\alpha + \rho_\beta} x_\alpha x_\beta$$

и покажем, что она определенно-положительна. В силу того, что $\rho_k > 0$, имеем:

$$\frac{1}{\rho_\alpha + \rho_\beta} = \int_0^\infty e^{-(\rho_\alpha + \rho_\beta)\lambda}\, d\lambda$$

и, следовательно,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\infty \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} x_\alpha x_\beta e^{-(\rho_\alpha + \rho_\beta)\lambda}\, d\lambda = \int_0^\infty \left(\sum_{\alpha = 1}^{n} x_\alpha e^{-\rho_\alpha \lambda} \right)^2 d\lambda.$$

---

[1]) Лурье А. И., Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951; Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

Интеграл, стоящий в правой части, может обратиться в нуль лишь при таких значениях $x_1, \ldots, x_n$, при которых подынтегральное выражение обращается в нуль. Последнее же, в силу того, что все ρ_s различны, обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Отсюда непосредственно вытекает знакоопределенность формы F.

Установив это, рассмотрим функцию

$$V(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma + F(a_1x_1, \ldots, a_nx_n) + \frac{1}{2}(A_1x_1^2 + \ldots + A_nx_n^2),$$

где a_s и A_s — произвольные вещественные постоянные, причем все A_s положительны. При тех условиях, которые мы наложили на функцию $f(\sigma)$, величина

$$\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma$$

при всех отличных от нуля значениях σ положительна и обращается в нуль при $\sigma = 0$. Но тогда очевидно, что функция V определенно-положительна относительно переменных $x_1, \ldots, x_n, \sigma$, что имеет место при любых значениях этих переменных и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей указанным для нее условиям. Составляя производную от V в силу уравнений (12.7), будем иметь:

$$-\frac{dV}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha\rho_\alpha x_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\rho_\alpha a_\alpha a_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta} x_\alpha x_\beta + \\ + rf^2(\sigma) - f(\sigma)\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\left[A_\alpha + \beta_\alpha + 2a_\alpha\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta}\right],$$

откуда, учитывая, что

$$2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\rho_\alpha a_\alpha a_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta} x_\alpha x_\beta = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha x_\alpha\right)^2,$$

получим:

$$-\frac{dV}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha\rho_\alpha x_\alpha^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha x_\alpha\right)^2 + r^2f(\sigma) - \\ - f(\sigma)\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\left[A_\alpha + \beta_\alpha + 2a_\alpha\sum_{\beta=1}^{n}\frac{a_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta}\right].$$

Так как $r > 0$, то полученное выражение будет, очевидно, определенно-положительным, если коэффициент при $f(\sigma)$ обращается в нуль. Однако такое условие является слишком ограничительным, так как при этом $-\frac{dV}{dt}$ будет определенно-положительным при любом $r > 0$, а между тем ясно, что если r достаточно велико, то $-\frac{dV}{dt}$ получится определенно-положительным, каков бы ни был коэффициент при $f(\sigma)$. Для того чтобы получить более общие условия знакоопределенности, преобразуем $-\frac{dV}{dt}$ к следующему виду:

$$-\frac{dV}{dt} = \left[\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha x_\alpha + \sqrt{r}\, f(\sigma)\right]^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \rho_\alpha x_\alpha^2 - \\ - f(\sigma) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \left[A_\alpha + \beta_\alpha + 2\sqrt{r}\, a_\alpha + 2a_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta}\right].$$

Следовательно, если выполняются условия

$$A_s + \beta_s + 2a_s \left(\sqrt{r} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{a_\beta}{\rho_s + \rho_\beta}\right) = 0, \tag{12.8}$$

то $\frac{dV}{dt}$ будет определенно-отрицательной функцией от $\sigma, x_1, \ldots, x_n$, и это будет справедливо при любых значениях указанных переменных.

Для выполнения дополнительного условия

$$\lim_{x\to\infty} V(x_1, \ldots, x_n, \sigma) = \infty \qquad (x = |x_1|, \ldots, |x_n|, \sigma)$$

достаточно в данном случае, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{\sigma\to\pm\infty} \int_0^\sigma f(\xi)\, d\xi = \infty. \tag{12.9}$$

Таким образом, мы приходим к следующему предложению: если можно подобрать n положительных постоянных A_s таким образом, чтобы система уравнений (12.8) допускала вещественное решение для a_s, и если выполнено условие (12.9), то невозмущенное движение для системы (12.7) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Таким образом, задача нахождения области допустимых значений параметров регулируемых систем, описываемых уравнениями (12.7), сведена к алгебраической задаче определения области изменения коэффициентов системы квадратных уравнений (12.8), при которых эти уравнения допускают вещественное решение. Мы не останавливаемся здесь более подробно на этом вопросе, отсылая читателя к вышеназванным оригинальным работам, где указанный метод успешно применен к решению задачи устойчивости для целого ряда конкретных систем регулирования. Укажем лишь на одно неравенство, непосредственно вытекающее из уравнений (12.8) и выражающее, следовательно, одно из достаточных условий устойчивости, а именно: разделив уравнения (12.8) на ρ_s и сложив их, получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{A_\alpha}{\rho_\alpha} + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\rho_\alpha} + \sqrt{r}\right)^2 = r - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha},$$

откуда вытекает:

$$r - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} > 0. \tag{12.10}$$

Это и будет интересующее нас неравенство. Ниже мы увидим, что если $f(\sigma)$ является аналитической функцией, то неравенство (12.9) выражает необходимое и достаточное условие устойчивости[1]).

§ 13. Первая теорема Ляпунова о неустойчивости.

Мы переходим теперь к изложению теорем Ляпунова о неустойчивости. Первая из этих теорем, которую мы будем в дальнейшем называть теоремой B, формулируется следующим образом.

Теорема B. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, такую, что ее полная производная по времени $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу этих уравнений, есть функция знакоопределенная, а сама функция V не будет знакопостоянной, знака, противоположного с $\frac{dV}{dt}$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Пусть

$$|x_s| \leqslant h \leqslant H \tag{13.1}$$

— область знакоопределенности функции $\frac{dV}{dt}$. Мы будем предполагать число h настолько малым, чтобы в области (13.1) выполнялись все условия для уравнений (6.1) возмущенного движения, которые были оговорены в § 6. Допустим также, для определенности, что $\frac{dV}{dt}$ есть функция положительная.

Покажем, что, как бы мало ни было число η, всегда найдется такая система начальных значений x_s^0, лежащая в области

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{13.2}$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 520).

что решения $x_s(t)$ уравнений (6.1) с указанными начальными значениями выйдут в некоторый момент времени из области (13.1). Этим, очевидно, и будет доказана неустойчивость движения.

Выберем с этой целью величины x_s^0 таким образом, чтобы выполнялись не только неравенства (13.2), но и неравенство

$$V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) > 0.$$

Такой выбор величин x_s^0 возможен, так как по условию функция V не является знакопостоянной отрицательной и, следовательно, в любой сколь угодно малой окрестности начала координат она может принимать положительные значения. Рассмотрим теперь решение $x_s(t)$ уравнений (6.1) с выбранными таким образом начальными значениями. Это решение в некоторый момент времени необходимо покинет область (13.1). В самом деле, допустим противное: пусть величины $x_s(t)$ при всех $t > t_0$ удовлетворяют неравенствам (13.1). Тогда $\frac{dV}{dt}$ все время будет оставаться положительной и, следовательно, $V[x_1(t), \ldots$ $\ldots, x_n(t)]$ будет все время возрастать. Мы можем поэтому написать:

$$V\left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right] > V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right). \tag{13.3}$$

Отсюда необходимо получается, что

$$x(t) = \max\left\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\right\} \geqslant \lambda, \tag{13.4}$$

где λ — некоторое положительное число, ибо если бы мы имели $x(t) < \lambda$, то при достаточно малом λ неравенство (13.3) не могло бы выполняться, так как функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна и обращается в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Так как $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-положительная, то из неравенства (13.4) вытекает, что для рассматриваемого решения $x_s(t)$ все время выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geqslant l,$$

где l — достаточно малое положительное число. Следовательно,

$$V\left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right] = V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \geqslant$$
$$\geqslant V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) + l\left(t - t_0\right),$$

откуда вытекает, что $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ неограниченно возрастает. Но это противоречит условию, что решение $x_s(t)$ остается в области (13.1), так как в этой области функция V, будучи непрерывной, необходимо ограничена. Это и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

§ 14. Теорема Ляпунова о неустойчивости равновесия, когда силовая функция обращается в минимум.

В качестве первого примера приложения теоремы В рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия, когда силовая функция в положении равновесия имеет не максимум, как в случае Лагранжа, а минимум.

Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы и запишем уравнения движения этой системы в канонической форме:

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (14.1)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$H=T(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)-U(q_1,\ \ldots,\ q_n),$$

q_s — обобщенные координаты, p_s — обобщенные импульсы, T — кинетическая энергия, U — силовая функция. Допустим, что система имеет положение равновесия, которому соответствуют нулевые значения координат (а также, очевидно, и импульсов). В этом случае уравнения (14.1) будут уравнениями возмущенного движения. Силовую функцию мы выберем таким образом, чтобы в положении равновесия она обращалась в нуль. Тогда, разлагая эту функцию в ряд по степеням q_s (полагая, что такое разложение возможно), будем иметь:

$$U=U_m(q_1,\ \ldots,\ q_n)+U_{m+1}+\ \ldots,$$

где U_j обозначает совокупность членов j-го порядка. При этом, как известно, $m\geqslant 2$. Допустим теперь, что в положении равновесия силовая функция имеет минимум. Это, очевидно, означает, что U есть функция определенно-положительная. Тогда на основании результатов § 7 форма U_m будет по меньшей мере знакопостоянной положительной. Мы будем, однако, предполагать, что эта форма является знакоопределенной, что, как было доказано в § 7, обусловливает также знакоопределенность функции U.

Кинетическая энергия системы относительно импульсов p_s является квадратичной формой. Коэффициенты этой формы зависят от координат q_s. Обозначая значения этих коэффициентов при $q_1=\ldots=q_n=0$ через $a_{\alpha\beta}$, мы можем написать:

$$2T=\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta+\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(q_1,\ \ldots,\ q_n)\,p_\alpha p_\beta,$$

где $A_{\alpha\beta}(q_1,\ \ldots,\ q_n)$ — некоторые функции $q_1,\ \ldots,\ q_n$, обращающиеся в нуль при $q_1=\ldots=q_n=0$. Функция T по самому своему значению принимает при $p_1^2+\ldots+p_n^2\neq 0$ только положительные значения, каковы бы ни были значения переменных q_s. В частности, это будет также иметь место и при $q_1 = \ldots = q_n = 0$. Отсюда следует, что форма

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \tag{14.2}$$

будет определенно-положительной.

Рассмотрим теперь функцию

$$V = \sum_{\varepsilon=1}^{n} p_s q_s$$

и составим ее полную производную по времени в силу уравнений (14.1). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial H}{\partial q_s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial T}{\partial p_s} - \sum_{s,\, \alpha,\, \beta=1}^{n} q_s \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q_s} p_\alpha p_\beta + \sum_{s=1}^{n} q_s \left(\frac{\partial U_m}{\partial q_s} + \frac{\partial U_{m+1}}{\partial q_s} + \ldots \right),$$

или, применяя теорему Эйлера об однородных функциях,

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \left(A_{\alpha\beta} - \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q_s} \right) p_\alpha p_\beta \right\} +$$
$$+ \{ m U_m + (m+1) U_{m+1} + \ldots \}. \tag{14.3}$$

Выражение, стоящее в первой скобке формулы (14.3), будет на основании леммы 3 § 7 определенно-положительной функцией относительно $p_1, \ldots, p_n$, так как форма (14.2) определенно-положительна, а коэффициенты

$$A_{\alpha\beta} - \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q_s}$$

обращаются в нуль при $q_1 = \ldots = q_n = 0$, и следовательно, в достаточно малой окрестности начала координат они сколь угодно малы. Выражение, стоящее во второй скобке формулы (14.3), на основании леммы 4 § 7 является определенно-положительной функцией переменных $q_1, \ldots, q_n$, так как форма U_m по условию определенно-положительна. Следовательно, $\frac{dV}{dt}$ является определенно-положительной функцией всех $2n$ переменных q_s, p_s. С другой стороны, сама функция V является, очевидно, знакопеременной. Таким образом, V удовлетворяет всем условиям теоремы В, и поэтому исследуемое положение равновесия неустойчиво.

Итак, мы получили следующую теорему, принадлежащую Ляпунову:

Если в положении равновесия силовая функция имеет минимум и это определяется совокупностью членов наинизшего порядка в разложении этой функции, то равновесие неустойчиво.

Приведенное доказательство лишь незначительно отличается от классического доказательства Ляпунова.

§ 15. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости.

Докажем еще одну теорему Ляпунова о неустойчивости.

Теорема Г. *Если существует функция V такая, что ее полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения имеет в области* (13.1) *вид*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(x_1, \ldots, x_n), \tag{15.1}$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, знака, противоположного с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Допустим для определенности, что функция W положительна. Тогда из (15.1) получаем:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V. \tag{15.2}$$

Так же как и при доказательстве теоремы В, выберем начальные (при $t = t_0$) значения x_s^0 решения $x_s(t)$ таким образом, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \quad V(x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0,$$

где η сколь угодно малое положительное число. Покажем, что это решение необходимо покидает в некоторый момент времени область (13.1). Допустим противное: что неравенства (13.1) все время выполняются. Тогда все время будет выполняться неравенство (15.2) и, поскольку $V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ положительно, производная $\frac{dV}{dt}$ будет все время оставаться положительной и, следовательно, $V[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ будет функцией возрастающей. Но тогда из (15.2) находим:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \geqslant \lambda V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

и, следовательно,

$$V \geqslant \lambda V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)(t - t_0),$$

что невозможно, так как в области (13.1) функция V ограничена. Таким образом, для рассматриваемого решения неравенства (13.1) необходимо нарушаются, что и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

§ 16. Геометрическая интерпретация теоремы В. Теорема Н. Г. Четаева.

Теорема В, так же как и теоремы А и Б, допускает простое геометрическое истолкование.

Примем для простоты, что $n = 2$, и рассмотрим сначала тот случай, когда функция V не является знакоопределенной. В этом случае кривая $V = 0$ имеет одну (рис. 4) или несколько (рис. 5) вещественных ветвей, проходящих через начало координат.

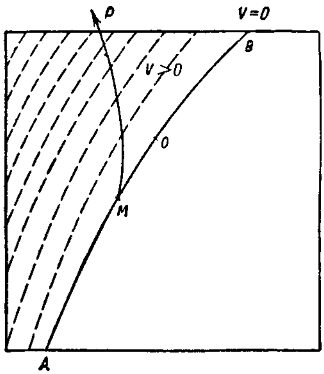

Рис. 4.

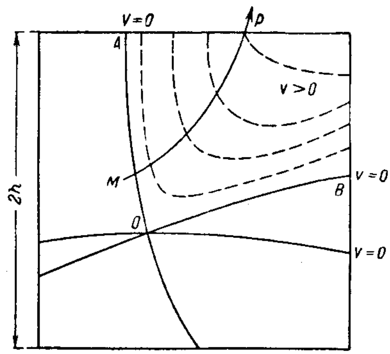

Рис. 5.

Допустим, что производная $\frac{dV}{dt}$ определенно-положительна. По условию теоремы в окрестности начала координат необходимо существует, по крайней мере, одна область, где $V > 0$. Эти области, очевидно, ограничены кривыми $V = 0$. Пусть на фиг. 4 и 5 сектор AOB представляет одну из этих областей и допустим, что пунктирные линии обозначают кривые $V = c > 0$, заполняющие эту область.

Рассмотрим интегральную кривую MP, выходящую из произвольной точки M границы области. Эта точка может быть взята сколь угодно близко от начала координат. Так как $\frac{dV}{dt} > 0$, то эта интегральная кривая при возрастании t необходимо входит внутрь области $V > 0$ и пересекает кривые семейства $V = c$ в сторону, соответствующую возрастанию c, т. е. удаляясь от границы $V = 0$. При этом интегральная кривая все время будет удаляться от начала координат и в конце концов покинет область (13.1), если только она в некоторый момент времени не достигнет другой границы области $V > 0$. Это, однако, невозможно, так как если бы такое пересечение в какой-нибудь точке N (рис. 6) имело место, то в этой точке, очевидно, было бы $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$, так как функция V, изменяясь от положительных значений к нулевому, необходимо уменьшалась бы.

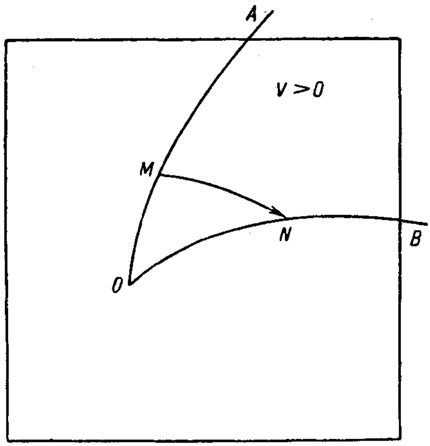

Рис. 6.

Таким образом, имеются интегральные кривые, выходящие из точек, сколь угодно близко расположенных к началу координат, и покидающие в некоторый момент времени область (13.1). Отсюда и вытекает неустойчивость движения.

Мы предположили, что функция V не является знакоопределенной. Ничто, однако, не изменится, если V и является знакоопределенной функцией. В этом случае областью $V > 0$ будет вся окрестность начала координат.

Приведенное геометрическое истолкование теоремы В сразу приводит к важному обобщению этой теоремы. Действительно, во всех предыдущих рассуждениях не играло никакой роли то обстоятельство, что производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной. Все предыдущие рассуждения останутся в силе, если вместо знакоопределенности предположить, что $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения во всех точках области $V > 0$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме, установленной Н. Г. Четаевым [1]).

Теорема Н. Г. Четаева. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти такую функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, что* 1) *в сколь угодно малой окрестности*

[1]) Четаев Н. Г., Одна теорема о неустойчивости, ДАН, т. I, № 9. 1934. См. также монографию: Четаев Н. Г., Устойчивость движения (Гостехиздат, 1946), где дана более точная формулировка теоремы.

начала координат существует область, где $V > 0$, на границе которой $V = 0$, и 2) во всех точках области $V > 0$ производная $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Точное аналитическое доказательство теоремы Н. Г. Четаева мы дадим в главе V, где эта теорема будет изложена в более общей формулировке.

§ 17. Пример приложения теоремы Н. Г. Четаева. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости равновесия.

Согласно теореме Лагранжа положение равновесия системы устойчиво, если в этом положении силовая функция имеет максимум. Наоборот, согласно теореме Ляпунова положение равновесия будет неустойчиво, если в этом положении силовая функция имеет минимум, и этот минимум определяется совокупностью членов наинизшего измерения в разложении силовой функции.

Исследуем теперь вопрос об устойчивости равновесия, когда силовая функция в положении равновесия не имеет ни максимума, ни минимума. Ограничимся при этом рассмотрением того частного случая, когда силовая функция U является формой какого-нибудь порядка m, так что

$$U = U_m(q_1, \ldots, q_n).$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения примем, как и в § 14, в форме (14.1). Рассмотрим функцию

$$V = -H \sum_{i=1}^{n} p_i q_i. \tag{17.1}$$

Так как по условию форма U_m при $q_1 = \ldots = q_n = 0$ не имеет максимума, то эта форма необходимо может принимать положительные значения. Отсюда следует, что в окрестности начала координат пространства $2n$ переменных q_i, p_i необходимо существует область, где

$$-H = -T + U_m > 0, \tag{17.2}$$

причем в этой области $U_m > 0$, так как $-T \leqslant 0$. Назовем областью C ту часть области (17.2), в которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i > 0.$$

На основании (17.1) в области C выполняется неравенство $V > 0$, а на границе ее, где, очевидно, либо $\sum p_i q_i = 0$, либо $H = 0$, функция V обращается в нуль.

Составим выражение производной $\frac{dV}{dt}$. Повторяя выкладки § 14 и принимая во внимание, что $\frac{dH}{dt} = 0$, найдем:

$$\frac{dV}{dt} = -H\left\{\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n}\left(A_{\alpha\beta} - \sum_{s=1}^{n} q_s \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial q_s}\right) p_\alpha p_\beta\right\} - mHU_m.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, как было показано в § 14, может принимать только положительные или равные нулю значения. Величина U_m, как указывалось выше, может принимать в области C только положительные значения. Отсюда следует, что в области C выполняется условие $\frac{dV}{dt} > 0$. Таким образом, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева, откуда вытекает неустойчивость исследуемого положения равновесия. Следовательно, имеет место следующая теорема, установленная Н. Г. Четаевым [1]).

Если в положении равновесия силовая функция не имеет максимума и эта функция является формой, то равновесие неустойчиво.

§ 18. Заключительные замечания.

В предыдущих параграфах мы изложили основные теоремы второго метода Ляпунова. Эти теоремы сводят задачу устойчивости к построению для уравнений возмущенного движения некоторых функций, обладающих специальными свойствами. Мы будем в дальнейшем эти функции, удовлетворяющие одной из основных теорем второго метода, называть *функциями Ляпунова*.

Мы рассмотрели ряд задач, которые удалось успешно разрешить при помощи второго метода. В каждой из этих задач было проведено конкретное построение функции Ляпунова. При этом мы видели, что это построение в каждом отдельном случае носило специфический характер, связанный с рассматриваемой конкретной задачей. Общих правил, позволяющих во всех случаях построить функцию Ляпунова, не существует. Если бы такие правила существовали, то этим самым задача устойчивости была бы полностью исчерпана. К сожалению, мы еще весьма далеки от этого.

---

[1]) Четаев Н. Г., К вопросу об обращении теоремы Лагранжа. Сборник научн. трудов Казанск. авиационного ин-та, № 2, 1934.

Тем не менее, Ляпуновым и его последователями разработаны некоторые общие приемы и идеи построения функций Ляпунова, которые с успехом применяются к конкретным задачам. Это позволило систематически рассмотреть некоторые основные задачи теории устойчивости при помощи второго метода. К такому систематическому рассмотрению указанных задач мы сейчас и приступаем. При этом мы начинаем с основной задачи об установлении необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению. Этой задаче посвящена следующая глава. Как уже указывалось раньше, мы ограничиваемся сначала установившимися движениями.

ГЛАВА III.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 19. Уравнения первого приближения.

В этой главе мы занимаемся установлением необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению для того случая, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \tag{19.1}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь p_{sj} — постоянные, X_s — не зависящие от t функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, разлагающиеся в области

$$|x| \leqslant H \tag{19.2}$$

в ряды по степеням этих переменных, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Рассмотрим уравнения первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{19.3}$$

Теория интегрирования такого рода уравнений хорошо известна. Напомним основные положения этой теории [1]).

Рассмотрим уравнение n-й степени

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{19.4}$$

---

[1]) См., например, Степанов В. В., Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а определитель $D(\lambda)$ — *характеристическим определителем*. Пусть λ_i — какой-нибудь корень этого уравнения. Этому корню отвечает частное решение системы (19.3) вида

$$x_s = A_s e^{\lambda_i t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{19.5}$$

где A_s — постоянные, определяемые однородными алгебраическими уравнениями

$$p_{s1}A_1 + \ldots + (p_{ss} - \lambda_i) A_s + \ldots + p_{sn}A_n = 0, \tag{19.6}$$

имеющими в силу $D(\lambda_i) = 0$ нетривиальное решение.

Если уравнение (19.4) имеет только простые корни, то, полагая в (19.5) $i = 1, 2, \ldots, n$, мы получим n частных решений системы (19.3). Эти решения будут притом независимы.

Допустим теперь, что λ_i является кратным корнем и что кратность этого корня равна l. Этому корню по-прежнему соответствует решение (19.5), где A_s по-прежнему удовлетворяют уравнениям (19.6). Но в рассматриваемом случае корню λ_i будут отвечать еще и другие частные решения системы (19.3), отличные от (19.5). Эти решения имеют вид

$$x_s = f_s(t)\, e^{\lambda_i t} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{19.7}$$

где $f_s(t)$ — некоторые полиномы относительно t. Степень этих полиномов никогда не превосходит $l - 1$, но может быть меньше этой величины. Здесь приходится различать два случая в зависимости от того, будет ли ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n - 1$ или меньше этой величины.

Допустим сначала, что ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n - 1$, т. е. что хотя бы один из миноров $(n - 1)$-го порядка[1]) этого определителя отличен от нуля. В этом случае система (19.3) имеет хотя бы одно решение вида (19.7), в котором хотя бы один из полиномов $f_s(t)$ имеет степень $l - 1$. Заменяя в этом решении полиномы $f_s(t)$ их производными какого-нибудь порядка, мы снова получим решения системы (19.3). Таким путем получается l решений системы (19.3), имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(1)} &= f_s(t)\, e^{\lambda_i t}, \\ x_s^{(2)} &= \frac{df_s}{dt}\, e^{\lambda_i t}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_s^{(l)} &= \frac{d^{(l-1)} f_s}{dt^{l-1}}\, e^{\lambda_i t}. \end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

---

[1]) Минором $(n - k)$-го порядка мы называем определитель, получающийся из основного вычеркиванием k строк и колонок.

Все эти решения независимы. Последнее из них совпадает с (19.5). Мы будем говорить, что в рассматриваемом случае кратному корню λ_i отвечает одна группа решений.

Допустим теперь, что ранг определителя $D(\lambda_i)$ меньше $n-1$. Пусть, например, ранг этого определителя равен $n-2$, так что все миноры $(n-1)$-го порядка равны нулю, но хотя бы один из миноров $(n-2)$-го порядка отличен от нуля. В этом случае система (19.3) допускает два частных решения вида (19.7), в которых наивысшие степени полиномов $f_s(t)$ равны, соответственно, p и q, причем $p+q=l-2$. Эти решения таковы, что если, исходя из каждого из них, составлять новые решения путем замены полиномов $f_s(t)$ их производными какого-нибудь порядка, то все полученные таким образом решения будут независимы.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x_s &= f'_s e^{\lambda_i t}, \\ x_s &= f''_s e^{\lambda_i t} \end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

суть указанные частные решения. Степени полиномов $f'_s(t)$ не превосходят p, причем степень хотя бы одного из них достигает этого значения. Старшая степень полиномов f''_s равна q. При этом, как уже указывалось выше, $p+q=l-2$.

Заменяя в решениях (19.9) полиномы их последовательными производными, мы получим две группы решений уравнений (19.3), состоящих, соответственно, из $p+1$ и $q+1$ решений каждая и имеющих вид

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(\alpha)} &= \frac{d^{\alpha-1}f'_s}{dt^{\alpha-1}}\, e^{\lambda_i t} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ p+1), \\ x_s^{(\beta)} &= \frac{d^{\beta-1}f''_s}{dt^{\beta-1}}\, e^{\lambda_i t} \qquad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ q+1). \end{aligned}\right\} \tag{19.10}$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае корню λ_i соответствует $p+q+2=l$ частных решений. Среди этих решений имеются два (по одному в каждой группе) вида (19.5). Эти решения соответствуют двум независимым системам чисел A_s, удовлетворяющим однородным алгебраическим уравнениям (19.6). Последние действительно имеют два независимых решения, так как ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n-2$.

В общем случае, когда ранг определителя $D(\lambda_i)$ равен $n-k$, корню кратности l по-прежнему соответствует l независимых решений, но эти решения распадаются на k групп, подобных (19.10).

Ранг определителя $D(\lambda_i)$ не может быть меньше $n-l$. В противном случае, как это легко показать, кратность корня λ_i будет больше l. Поэтому число групп решений, соответствующих рассматриваемому корню, не может превосходить числа l, т. е. кратности корня. Если число групп равно l, то каждая группа будет состоять из одного решения и все решения будут вида (19.5).

Таким образом, во всех случаях число частных решений уравнений (19.3), соответствующих кратному корню, равно кратности этого корня. Действительное вычисление этих решений приводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Наиболее простой способ составления этих уравнений указан Н. Г. Четаевым[1]).

Рассматривая все корни уравнения (19.4), мы получим n независимых частных решений уравнений (19.3). Обозначая эти решения через $x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sn}$ (первый индекс — номер функции, второй индекс — номер решения), мы получим общее решение уравнений (19.3) в виде

$$x_s = C_1 x_{s1} + C_2 x_{s2} + \ldots + C_n x_{sn}, \tag{19.11}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Эти постоянные определяются из начальных условий и если начальные значения величин x_s в каком-нибудь решении малы, то и соответствующие значения постоянных C_j будут также малыми.

Если корень λ_i является комплексным, то решения вида (19.5) или (19.7) будут также комплексными, и так как нас интересуют только вещественные решения, то необходимо будет их преобразовать к вещественному виду. Для этого заметим, что так как коэффициенты p_{sj} являются вещественными, то если дифференциальным уравнениям (19.3) удовлетворяет какая-нибудь система комплексных функций, то им удовлетворяют также вещественные и мнимые части этих функций. Пусть $\lambda_i = \mu + i\nu$. Тогда в решении (19.5) или (19.7) величины A_s и $f_s(t)$ будут также комплексными. Положим $A_s = P_s + iQ_s$, $f_s = \varphi_s + i\psi_s$, где постоянные P_s, Q_s и функции φ_s и ψ_s будут вещественными. Выделяя в (19.5) и в (19.7) вещественные и мнимые части, мы получим, что рассматриваемому корню $\mu + i\nu$ отвечают два решения: либо вида

$$x_s = (P_s \cos \nu t - Q_s \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \quad x_s = (P_s \sin \nu t + Q_s \cos \nu t)\, e^{\mu t} \tag{19.12}$$

либо вида

$$x_s = (\varphi_s \cos \nu t - \psi_s \sin \nu t)\, e^{\mu t}, \quad x_s = (\varphi_s \sin \nu t + \psi_s \cos \nu t)\, e^{\mu t}. \tag{19.13}$$

Эти же самые решения отвечают и корню $\mu - i\nu$.

Все вышесказанное позволяет легко решить задачу устойчивости для того случая, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (19.3). Действительно, характер невозмущенного движения, его устойчивость или неустойчивость, полностью определяется корнями характеристического уравнения (19.4).

---

[1]) **Четаев Н. Г., Устойчивость движения**, Гостехиздат, 1946.

Допустим сначала, что все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае все рассмотренные выше частные решения независимо от того, имеют ли они вид (19.5) или (19.7), (19.12) или (19.13), стремятся к нулю при неограниченном возрастании t. То же самое будет справедливо и по отношению к общему решению (19.11), каковы бы ни были постоянные C_j. Кроме того, решения $x_s(t)$, отвечающие начальным условиям $|x_s(t_0)| \leqslant 1$, будут равномерно ограничены при всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически при любых начальных возмущениях.

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеется, по крайней мере, один с положительной вещественной частью. Этому корню отвечает частное решение, неограниченно возрастающее при $t \to \infty$. Умножая все функции этого решения на постоянную C, мы снова получим решение, для которого начальные значения функций x_s могут быть сделаны сколь угодно малыми, если C выбрать достаточно малым. Таким образом, в рассматриваемом случае система (19.3) имеет решение со сколь угодно малыми начальными значениями, неограниченно возрастающее при $t \to \infty$, и следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю. Это могут быть нулевые корни или корни чисто мнимые. Каждому нулевому корню отвечают решения вида

$$x_s = A_s, \tag{19.14}$$

если этот корень является простым или даже если он является кратным, но число групп решений равно кратности корня. В противном случае система (19.3) будет иметь решения вида

$$x_s = f_s(t), \tag{19.15}$$

где $f_s(t)$ — полиномы. Для каждой пары чисто мнимых корней $\pm \nu\sqrt{-1}$ будут получаться решения вида

$$x_s = P_s \cos \nu t - Q_s \sin \nu t, \quad x_s = P_s \sin \nu t + Q_s \cos \nu t, \tag{19.16}$$

если эти корни простые или если они кратные, но число групп решений, им соответствующих, равно их кратности. Если корни $\pm \nu\sqrt{-1}$ являются кратными и число групп решений, им соответствующих, меньше их кратности, то система (19.3) будет иметь решения вида

$$x_s = \varphi_s \cos \nu t - \psi_s \sin \nu t, \quad x_s = \varphi_s \sin \nu t + \psi_s \cos \nu t, \tag{19.17}$$

где φ_s и ψ_s — полиномы.

Наличие решений вида (19.14) или (19.16) не нарушает устойчивости, так как все входящие в эти решения функции ограничены. Правда, при этом устойчивость не будет, очевидно, асимптотической. Наличие же решений вида (19.15) или (19.17) вызывает, очевидно, неустойчивость.

Таким образом, для случая, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (19.3), мы приходим к следующим заключениям.

Для того чтобы невозмущенное движение было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Если среди корней этого уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво. Невозмущенное движение будет устойчивым, но не асимптотически, когда характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю, если эти корни простые или если они кратные, но число групп решений, им соответствующих, равно их кратности. Если характеристическое уравнение имеет кратные корни с нулевыми вещественными частями и если число групп решений, соответствующих этим корням, меньше их кратности, то невозмущенное движение неустойчиво.

Таким образом, задача устойчивости для линейных уравнений с постоянными коэффициентами решается просто. Здесь нет необходимости пользоваться вторым методом. Тем не менее мы займемся построением функций Ляпунова для уравнений (19.3), так как эти функции будут играть фундаментальную роль в дальнейшем. Нам придется для этого предварительно доказать некоторые вспомогательные предложения.

§ 20. Некоторые вспомогательные предложения.

Пусть $V(x_1, \ldots, x_n)$ — какая-нибудь форма m-го порядка. Рассмотрим производную этой формы по времени, составленную в силу уравнений (19.3), т. е. форму того же порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n),$$

и поставим задачу определить форму V таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \lambda V, \tag{20.1}$$

где λ — постоянная. Коэффициенты искомой формы должны удовлетворять некоторой системе уравнений, которые мы получим, приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях уравнения (20.1). Исследуем подробнее эти уравнения. Для этого допустим сначала, что $m = 1$, т. е. положим

$$V = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n. \tag{20.2}$$

Подставляя (20.2) в (20.1) и приравнивая коэффициенты при $x_1, \ldots, x_n$, получим следующую систему уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{gathered}
p_{11}a_1 + p_{21}a_2 + \ldots + p_{n1}a_n = \lambda a_1, \\
p_{12}a_1 + p_{22}a_2 + \ldots + p_{n2}a_n = \lambda a_2, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
p_{1n}a_1 + p_{2n}a_2 + \ldots + p_{nn}a_n = \lambda a_n.
\end{gathered}$$

Для того чтобы эта система линейных однородных уравнений имела решение, отличное от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

обращался в нуль. Таким образом, для того чтобы уравнение (20.1) могло быть удовлетворено линейной формой, необходимо и достаточно, чтобы λ было корнем характеристического уравнения. Каждому корню этого уравнения отвечает своя форма, и если характеристическое уравнение имеет n различных корней, то мы получим n различных линейных форм, удовлетворяющих уравнению (20.1).

Допустим теперь, что $m > 1$. Обозначим через N число членов формы m-го порядка[1]). Этих членов будет, очевидно, столько, сколько существует различных систем целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m. \tag{20.3}$$

Перенумеровав все члены формы V в каком-нибудь порядке, обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_N$ коэффициенты при этих членах. Тогда подставляя форму V в уравнение (20.1) и приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях этого урав-

[1]) Число N определяется формулой

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

нения, мы получим для определения a_j систему линейных однородных уравнений вида

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{iN}a_N = \lambda a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{20.4}$$

где A_{ij} — некоторые постоянные, являющиеся линейными комбинациями коэффициентов $p_{s\sigma}$. Так, например, при $m = 2$ и $n = 2$ система (20.4) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 2p_{11}a_1 + p_{21}a_2 &= \lambda a_1, \\ 2p_{12}a_1 + (p_{11} + p_{22})\,a_2 + 2p_{21}a_3 &= \lambda a_2, \\ p_{12}a_2 + 2p_{22}a_3 &= \lambda a_3, \end{aligned}$$

если

$$V = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2.$$

Для того чтобы система (20.4) имела решение, отличное от тривиального $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0$, необходимо и достаточно, чтобы λ удовлетворяло уравнению

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \ldots & A_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20.5}$$

Таким образом, для того чтобы уравнению (20.1) можно было удовлетворить формой m-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы величина λ была корнем алгебраического уравнения N-й степени (20.5).

Между корнями уравнения (20.5) и корнями характеристического уравнения существует простая зависимость, а именно, имеет место следующая изящная теорема, принадлежащая Ляпунову.

Теорема 1. *Все корни уравнения* (20.5) *определяются формулой*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n, \tag{20.6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *корни характеристического уравнения, а* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — *любые целые неотрицательные числа, связанные соотношением*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m. \tag{20.7}$$

Доказательство. Как мы видели выше, каждому корню λ_j характеристического уравнения отвечает, по крайней мере, одна *линейная* форма, удовлетворяющая уравнению (20.1). Пусть V_j —

линейная форма, отвечающая корню λ_j [1]), так что

$$\frac{dV_j}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_j}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)=\lambda_j V_j \qquad (20.8)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрим форму m-го порядка

$$V=V_1^{m_1}V_2^{m_2}\ldots V_n^{m_n},$$

где $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ — любые целые неотрицательные числа, связанные соотношением (20.7). Составляя производную этой функции по времени в силу уравнений (19.3), будем на основании (20.8) иметь:

$$\frac{dV}{dt}=m_1V_1^{m_1-1}V_2^{m_2}\ldots V_n^{m_n}\frac{dV_1}{dt}+m_2V_1^{m_1}V_2^{m_2-1}\ldots V_n^{m_n}\frac{dV_2}{dt}+\ldots+$$
$$+m_nV_1^{m_1}V_2^{m_2}\ldots V_n^{m_n-1}\frac{dV_n}{dt}=(m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_n\lambda_n)V.$$

Таким образом, форма m-го порядка V удовлетворяет уравнению (20.1) со значением λ, равным величине (20.6). Но для этого, как мы видели, необходимо, чтобы λ было корнем уравнения (20.5). Итак, доказано, что все величины (20.6) являются корнями уравнения (20.5).

Нам остается показать, что величины (20.6) исчерпывают все корни уравнения (20.5), т. е. что других корней это уравнение не имеет. Это обстоятельство совершенно очевидно для того случая, когда все числа (20.6) различны. Действительно, в этом случае формула (20.6) определяет столько различных корней уравнения (20.5), сколько существует различных систем целых неотрицательных чисел $m_1,\ \ldots,\ m_n$, связанных соотношением (20.7). Но таких систем существует как раз N, что равно степени уравнения (20.5).

Допустим теперь, что коэффициенты $p_{s\sigma}$ уравнений (19.3) таковы, что среди чисел (20.6) имеются одинаковые при разных системах значений $m_1,\ \ldots,\ m_n$, связанных соотношением (20.7). Покажем, что и в этом случае уравнение (20.5) не имеет корней, не содержащихся в выражении (20.6). Допустим противное, что $\lambda=\lambda^*$ является корнем уравнения (20.5), не содержащимся среди чисел (20.6). Обозначим через α модуль разности между корнем λ^* и наиболее близким к нему числом из системы (20.6). Изменим теперь коэффициенты $p_{s\sigma}$, заменив их величинами $p'_{s\sigma}$. Тогда уравнение (20.5) заменится новым уравнением $D'_m(\lambda)=0$, и корни нового характеристического уравнения будут уже другими величинами, которые мы обозначим через $\lambda'_1,\ \ldots,\ \lambda'_n$. Если величины $p'_{s\sigma}$ достаточно мало отличаются от $p_{s\sigma}$, то корни

[1]) Между этими формами могут быть одинаковые, если не все числа λ_j различны.

$\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ будут сколь угодно мало отличаться от корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и корни уравнения $D'_m(\lambda) = 0$ будут сколь угодно мало отличаться от корней уравнения (20.5). В частности, уравнение $D'_m(\lambda) = 0$ будет иметь корень, сколь угодно мало отличающийся от λ^*. Но $p'_{s\sigma}$ можно выбрать так, чтобы все числа

$$m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + \ldots + m_n\lambda'_n \tag{20.9}$$

были различны при любых целых неотрицательных m_j, связанных соотношением (20.7). Тогда все корни уравнения $D'_m(\lambda) = 0$, и в частности тот, который сколь угодно мало отличается от λ^*, будут находиться среди чисел (20.9). Следовательно, λ^* сколь угодно мало отличается от одного из чисел (20.9), которое в свою очередь сколь угодно мало отличается от соответствующего ему числа из системы (20.6), что невозможно, так как разность между λ^* и ближайшим к нему числом (20.6) равна конечной величине α.

Итак, и в случае, когда среди чисел (20.6) имеются равные, все корни уравнения (20.5) находятся среди этих чисел. Только в рассматриваемом случае уравнение (20.5) будет иметь кратные корни. Таким образом, теорема полностью доказана.

Пусть теперь $U(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная форма m-го порядка. Постараемся определить форму V того же порядка таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U. \tag{20.10}$$

Обозначим, как и прежде, через $a_1, \ldots, a_N$ коэффициенты формы V, а коэффициенты заданной формы U обозначим через $b_1, \ldots, b_N$. Приравнивая в уравнении (20.10) коэффициенты при подобных членах, мы получим для определения $a_1, \ldots, a_N$ уравнения, отличающиеся от (20.4) только правыми частями, которые теперь будут равны не величинам λa_i, а величинам b_i, так что эти уравнения имеют вид:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{iN}a_N = b_N \tag{20.11}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Определитель этой системы совпадает, очевидно, с $D_m(0)$, и если он отличен от нуля, то уравнения (20.11) будут допускать одно и только одно решение для $a_1, \ldots, a_N$. В этом случае будет существовать одна и только одна форма V, удовлетворяющая уравнению (20.10). Но все корни полинома $D_m(\lambda)$ определяются выражением (20.6), и мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 2. *Если корни λ_j характеристического уравнения таковы, что выражение* (20.6) *не обращается в нуль ни при* *каких целых неотрицательных* $m_1, \ldots, m_n$, *связанных соотношением* (20.7), *то какова бы ни была наперед заданная форма m-го порядка* $U(x_1, \ldots, x_n)$, *существует одна и только одна форма того же порядка* $V(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая уравнению* (20.10).

§ 21. Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Мы переходим теперь к построению функций Ляпунова для систем линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{21.1}$$

с постоянными коэффициентами.

Допустим сначала, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Это, как мы видели, будет тогда и только тогда, когда все корни λ_j характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Будет ли при этом существовать функция, удовлетворяюшая всем условиям теоремы Б предыдущей главы? Положительный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма* $U(x_1, \ldots, x_n)$, *существует одна и только одна форма* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *того же порядка, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = U, \tag{21.2}$$

и эта форма получится обязательно знакоопределенная, знака, противоположного с U.

Доказательство. Так как вещественные части всех корней λ_i отрицательны, то величина (20.6) не обращается в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, не равных нулю одновременно. Поэтому на основании теоремы 2 предыдущего параграфа существует одна и только одна форма V, удовлетворяющая уравнению (21.2). Остается показать, что если форма U — знакоопределенная, то и форма V будет также знакоопределенной, знака, противоположного с U.

Допустим для определенности, что форма U определенно-отрицательна. Рассмотрим форму V. Возможны три случая: 1) форма V может принимать отрицательные значения, 2) форма V — постоянно-положительная и 3) форма V — определенно-положительная.

Если бы имел место первый случай, то функция V удовлетворяла бы всем условиям теоремы В и невозмущенное движение было бы неустойчиво, что противоречит условию.

Что касается второго случая, то он вообще невозможен, каковы бы ни были корни характеристического уравнения. В самом деле, будем рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (21.1), и выберем их начальные значения x_s^0 таким образом, чтобы $V(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ равнялось нулю. Это возможно, так как форма V по условию — не знакоопределенная, а только знакопостоянная. Но так как производная $\frac{dV}{dt}$ отрицательна, то функция V должна уменьшаться и, следовательно, становиться отрицательной, что противоречит условию ее положительности.

Таким образом, остается только третий случай, что и доказывает теорему.

Рассмотренная в доказанной теореме функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б и является, следовательно, функцией Ляпунова для рассматриваемого случая [1]). Таким образом, для того чтобы построить функцию Ляпунова для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, необходимо задаться какой-нибудь знакоопределенной формой произвольного порядка и искать другую форму того же порядка, производная которой равнялась бы заданной форме. Как мы видели в предыдущем параграфе, задача сведется к решению системы линейных алгебраических уравнений. Вычисления при этом будут тем более громоздкими, чем больше порядок формы. Поэтому если в какой-нибудь задаче имеется необходимость действительно вычислить коэффициенты формы V, то в качестве формы U следует взять какую-нибудь знакоопределенную квадратичную форму, например сумму квадратов величин x_s.

Допустим теперь, что среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью. В этом случае невозмущенное движение для уравнений (21.1) неустойчиво. Вопрос о существовании и построении функций Ляпунова, т. е. функций, удовлетворяющих теореме В или теореме Г, решается нижеследующими теоремами.

Теорема 2. *Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью и если эти корни таковы, что величина*

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \tag{21.3}$$

не обращается в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, *связанных соотношением*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m, \tag{21.4}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 520).

то, какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма U порядка m, существует одна и только одна форма V того же порядка, удовлетворяющая уравнению (21.2), *и эта форма наверное не будет знакопостоянной (в частности, знакоопределенной), знака, противоположного с U.*

Доказательство. Пусть U — произвольная знакоопределенная форма m-го порядка. Допустим для определенности, что эта форма положительна. На основании теоремы 2 предыдущего параграфа существует одна и только одна форма V того же порядка, которая удовлетворяет уравнению (21.2). Нам остается показать, что эта форма не может быть ни определенно-отрицательной, ни постоянно-отрицательной. В самом деле, если бы форма V была определенно-отрицательной, то она удовлетворяла бы всем условиям теоремы Б и невозмущенное движение было бы асимптотически устойчиво, что противоречит условию. С другой стороны, форма V не может быть постоянно-отрицательной, каковы бы ни были корни характеристического уравнения. Чтобы в этом убедиться, достаточно, как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотреть какое-нибудь решение уравнений (21.1) с начальными значениями, обращающими форму V в нуль. Для этого решения форма V, возрастая в силу положительности $\frac{dV}{dt}$, необходимо приняла бы положительные значения, что противоречит условию. Таким образом, теорема полностью доказана.

Форма V, фигурирующая в доказанной теореме, представляет собой функцию Ляпунова, удовлетворяющую всем условиям теоремы В. Однако доказанная теорема дает возможность построить эту функцию лишь при некотором добавочном условии о необращении в нуль выражения (21.3). Это условие может не выполняться, как, например, в случае, когда характеристическое уравнение имеет нулевой корень. В этом случае, каково бы ни было число m, всегда существует комбинация целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением (21.4), при которой выражение (21.3) обращается в нуль. Действительно, если, например, $\lambda_1 = 0$, то достаточно положить

$$m_1 = m, \quad m_2 = \ldots = m_n = 0.$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае вообще не существует функции Ляпунова, удовлетворяющей теореме В. В самом деле, если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, то определитель системы однородных линейных уравнений

$$p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n = 0$$

обращается в нуль и эта система имеет решение, отличное от тривиального $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Но для этого решения выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

обращается в нуль, какова бы ни была функция V, будь то форма или более сложная функция, и следовательно, это выражение не является знакоопределенным. Следовательно, в рассматриваемом случае для уравнений (21.1) не может существовать функции со знакоопределенной производной, что является основным условием, фигурирующим в теореме В [1]).

Таким образом, для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда характеристическое уравнение имеет корень с положительной вещественной частью, не всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме В. Однако в этом случае всегда существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме Г. Существование этой функции и ее вид устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 3. *Если среди корней характеристического уравнения системы* (21.1) *существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то какова бы ни была наперед заданная знакоопределенная форма U произвольного порядка m, всегда найдется такая форма V того же порядка и такое положительное число α, что будет выполняться соотношение*

$$\frac{dV}{dt}=\alpha V+U \tag{21.5}$$

и при этом форма V наверно не будет знакопостоянной, знака, противоположного с U.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$D'(\rho)=\begin{vmatrix} p_{11}-\frac{\alpha}{m}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\frac{\alpha}{m}-\rho & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\frac{\alpha}{m}-\rho \end{vmatrix}=0, \tag{21.6}$$

где α — положительное число. Корни ρ_j этого уравнения связаны с корнями λ_j характеристического уравнения соотношениями

$$\rho_j=\lambda_j-\frac{\alpha}{m}.$$

Поэтому величину α можно выбрать настолько малой, чтобы и уравнение (21.6) имело, так же как и характеристическое уравнение, хотя бы один корень с положительной вещественной частью. При этом, задавшись каким-нибудь m, можно числом α распорядиться, так, чтобы величина

$$m_1\rho_1+m_2\rho_2+\ldots+m_n\rho_n$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 520).

не обращалась в нуль ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$, равных в сумме m.

Но тогда на основании предыдущей теоремы существует одна и только одна форма m-го порядка V, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}\left[p_{s1}x_1 + \ldots + \left(p_{ss} - \frac{\alpha}{m}\right)x_s + \ldots + p_{sn}x_n\right] = U, \qquad (21.7)$$

где U — любая наперед заданная знакоопределенная форма m-го порядка. При этом форма V наверно не будет знакопостоянной, знака, противоположного с U.

Из (21.7), учитывая, что на основании теоремы Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{s=1}^{m} x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} = mV,$$

получаем:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x + \ldots + p_{ss}x_s + \ldots + p_{sn}x_n) = \alpha V + U,$$

что и доказывает теорему.

Доказанные теоремы дают метод построения функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда характеристическое уравнение либо имеет все корни с отрицательными вещественными частями, либо хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Построение функций Ляпунова для случая, когда характеристическое уравнение, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю, мы здесь не рассматриваем, так как нам это не потребуется для дальнейшего.

Все доказанные в этом параграфе теоремы установлены А. М. Ляпуновым.

§ 22. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Допустим теперь, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (22.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где $X_s(x_1, \ldots, x_n)$ в области

$$|x_s| \leqslant H$$

разлагаются в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Теоремы, установленные в предыдущем параграфе, дают возможность чрезвычайно просто разрешить основную задачу об установлении необходимых и достаточных условий, при которых вопрос об устойчивости для системы (22.1) разрешается рассмотрением лишь уравнений первого приближения:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{22.2}$$

независимо от того или иного частного выбора функций X_s.

Имеют место следующие основные теоремы, установленные А. М. Ляпуновым.

Теорема 1. *Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $V(x_1, \ldots \ldots, x_n)$, определяемую уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

На основании теоремы 2 предыдущего параграфа такая форма V непременно существует и будет обязательно знакоопределенной положительной. Составим производную этой формы по времени в силу полной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (22.1). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) =$$

$$= -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Так как разложение функции $\sum X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$ начинается членами не ниже третьего порядка, то функция $\frac{dV}{dt}$ на основании леммы 4 § 7 будет знакоопределенной отрицательной, каковы бы ни были функции X_s. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б и невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2. *Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один* *с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво при любом выборе членов порядка выше первого в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x_1, \ldots, x_n),$$

определяемую уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \alpha V + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

где α — некоторое положительное число. На основании теоремы 3 предыдущего параграфа такая форма V обязательно существует и эта форма может принимать положительные значения. Составляя производную этой формы по времени в силу полной системы дифференциальных уравнений (22.1), получим:

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + W(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$W(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

на основании леммы 4 § 7 является функцией определенно-положительной при любом выборе функций X_s.

Форма V является, таким образом, функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Г. Следовательно, невозмущенное движение при любом выборе функций X_s неустойчиво, и теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 обратимы. Невозмущенное движение будет устойчиво при любом выборе функций X_s только тогда, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет корни только с отрицательными вещественными частями и при этом устойчивость будет асимптотической. В то же время неустойчивость при любом выборе функций X_s будет иметь место только тогда, когда среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, а именно: имеет место следующая теорема Ляпунова, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 3. *Если характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю, то члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения можно выбрать так, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость.*

Как мы видели в § 19, если характеристическое уравнение имеет часть корней с нулевыми, а остальные с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение в первом приближении может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Теорема 3 показывает, что какой бы из этих случаев ни имел место, вопрос об устойчивости решается исключительно членами выше первого порядка в уравнениях возмущенного движения, так что движение, устойчивое в первом приближении, может оказаться в действительности неустойчивым, и наоборот.

Таким образом, все случаи, которые могут представиться при исследовании задачи устойчивости, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (22.1), можно разбить на две категории: на случаи *некритические*, когда задача решается уравнениями первого приближения, и случаи *критические*, когда требуется рассмотрение членов более высоких порядков. Критические случаи имеют место тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение не имеет корней с положительными вещественными частями и имеет корни с вещественными частями, равными нулю. С точки зрения математической, критические случаи можно рассматривать как исключение. Но с точки зрения механической эти случаи являются особенно важными, как в этом легко убедиться из рассматриваемых ниже примеров.

§ 23. Примеры приложения предыдущих теорем.

Рассмотрим несколько примеров приложения теорем предыдущего параграфа.

Пример 1. Рассмотрим твердое тело, вращающееся по инерции вокруг неподвижной точки. Если такому телу сообщить в начальный момент времени вращение вокруг одной из главных осей инерции в закрепленной точке, то тело и в дальнейшем будет вращаться вокруг этой оси и притом равномерно. Исследуем устойчивость этих вращений.

Примем в качестве осей координат главные оси инерции в закрепленной точке, и пусть исследуемое невозмущенное движение соответствует вращению вокруг оси x. Дифференциальные уравнения возмущенного движения составлены нами в § 3 (уравнения (3.9)) и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt}+(C-B)\,yz &= 0,\\ B\frac{dy}{dt}+(A-C)(x+\omega)\,z &= 0,\\ C\frac{dz}{dt}+(B-A)(x+\omega)\,y &= 0. \end{aligned}\right\}\qquad(23.1)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & \frac{(C-A)\,\omega}{B} \\ 0 & \frac{(A-B)\,\omega}{C} & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

системы первого приближения имеет один корень, равный нулю, и два корня, определяемых формулой

$$\rho_{1,2} = \pm\,\omega \sqrt{\frac{(C-A)(A-B)}{CB}}. \tag{23.2}$$

Если $C < A < B$ или $C > A > B$, т. е. если вращение происходит вокруг средней оси инерции, то оба корня (23.2) будут вещественны и один из них будет обязательно положительным. Следовательно, невозмущенное движение будет неустойчиво.

Если вращение происходит вокруг малой или большой оси инерции, так что выполняются неравенства $A < B$, $A < C$ или $A > B$, $A > C$, то оба корня (23.2) будут чисто мнимыми. Так как при этом третий корень равен нулю, то мы имеем дело с критическим случаем и первое приближение задачи не решает.

Общее исследование случая трех критических корней очень сложно. Но в рассматриваемом примере задача решается просто.

Уравнения (23.1) имеют, как легко видеть, первый интеграл

$$B(B-A)\,y^2 + C(C-A)\,z^2 = \text{const.},$$

знакоопределенный относительно y и z. Отсюда сразу вытекает устойчивость по отношению к переменным y и z. Но тогда из первого интеграла

$$A(x+\omega)^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.},$$

которым система (23.1) также обладает[1]) и который является интегралом энергии, немедленно вытекает устойчивость и по отношению к переменной x.

Таким образом, вращение вокруг средней оси инерции неустойчиво, а вращения вокруг большой или малой оси инерции устойчивы.

Пример 2. Рассмотрим вопрос об устойчивости вращательных движений снаряда при настильной траектории стрельбы, которым мы уже занимались в § 12. Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (12.2). Отбрасывая члены высших порядков,

[1]) Этот интеграл не может быть принят за функцию Ляпунова, так как его левая часть не обращается в нуль при $x = y = z = 0$.

получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\beta} - Cn\dot{\alpha} - eR\beta = 0, \\ A\ddot{\alpha} + Cn\dot{\beta} - eR\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23.3)$$

Для того чтобы составить характеристическое уравнение без приведения системы (23.3) к нормальному виду, положим в ней

$$\alpha = Me^{\lambda t}, \quad \beta = Ne^{\lambda t}.$$

Для нахождения M и N получим систему линейных однородных уравнений:

$$-Cn\lambda M + (A\lambda^2 - eR)\, N = 0,$$
$$(A\lambda^2 - eR)\, M + Cn\lambda N = 0,$$

и следовательно, искомое характеристическое уравнение имеет вид

$$C^2n^2\lambda^2 + (A\lambda^2 - eR)^2 = 0.$$

Все четыре корня этого уравнения даются формулой

$$\lambda_{1,\,2,\,3,\,4} = \frac{\pm Cni \pm \sqrt{4AeR - C^2n^2}}{2A}.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$4AeR - C^2n^2 > 0,$$

то два корня имеют положительную вещественную часть и невозмущенное движение неустойчиво. При выполнении неравенства

$$4AeR - C^2n^2 < 0 \qquad (23.4)$$

все четыре корня характеристического уравнения будут чисто мнимые. Мы будем, следовательно, иметь дело с критическим случаем и для решения задачи необходимо будет рассмотреть и нелинейные члены в уравнениях (12.2).

Решение задачи устойчивости при четырех критических корнях очень сложно. Однако в рассматриваемом случае, как мы видели в § 12, задачу удалось полностью разрешить непосредственным построением функции Ляпунова. При этом оказалось, что при выполнении неравенства (23.4) невозмущенное движение устойчиво.

§ 24. Неустойчивость равновесия. Случай канонических систем.

В качестве следующего примера вернемся снова к вопросу об устойчивости равновесия, когда силовая функция в положении равновесия не обращается в максимум. В предыдущей главе была доказана неустойчивость равновесия для двух случаев отсутствия максимума:

для случая, когда силовая функция в положении равновесия имеет минимум, который определяется членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, и для случая, когда силовая функция не имеет ни максимума, ни минимума и является формой.

Мы рассмотрим сейчас случай, когда силовая функция в положении равновесия не имеет ни максимума, ни минимума, и это определяется членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, которое мы будем предполагать начинающимся членами второго порядка. Этот случай изучен Ляпуновым, доказавшим при этом неустойчивость равновесия.

Пусть $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ — значения обобщенных координат в положении равновесия,

$$2T = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (a_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad 2U = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} (c_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}) q_\alpha q_\beta$$

— кинетическая энергия и силовая функция, причем функции $A_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n)$ и $C_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n)$ обращаются в нуль при $q_1 = \ldots = q_n = 0$, а $a_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ — постоянные. По предположению квадратичная форма

$$2U_2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

не обращается тождественно в нуль.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения возьмем в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отбрасывая члены высших порядков, получим обычную систему уравнений малых колебаний:

$$a_{i1}\ddot{q}_1 + a_{i2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{in}\ddot{q}_n = c_{i1}q_1 + \ldots + c_{in}q_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристическое уравнение этой системы первого приближения имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 - c_{11} & a_{12}\lambda^2 - c_{12} & \ldots & a_{1n}\lambda^2 - c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 - c_{21} & a_{22}\lambda^2 - c_{22} & \ldots & a_{2n}\lambda^2 - c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\lambda^2 - c_{n1} & a_{n2}\lambda^2 - c_{n2} & \ldots & a_{nn}\lambda^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (24.1)$$

По предположению силовая функция в положении равновесия $q_1 = \ldots = q_n = 0$ не имеет ни максимума, ни минимума. Это значит, что функция $U(q_1, \ldots, q_n)$ является знакопеременной. С другой стороны, мы предположили, что эта знакопеременность определяется членами наинизшего порядка в разложении силовой функции, что означает, что знакопеременной является уже форма U_2. В теории малых колебаний доказывается, что уравнение (24.1), рассматриваемое как уравнение относительно λ^2, имеет только вещественные корни. В этой же теории доказывается, что если форма U_2 является знакопеременной, то среди этих корней имеются обязательно положительные. Но тогда уравнение (24.1), рассматриваемое как уравнение $2n$-го порядка относительно λ, также имеет положительные корни, что и доказывает неустойчивость равновесия.

Для того чтобы равновесие было устойчиво, необходимо, чтобы все корни λ_j^2 уравнения (24.1) были отрицательны. Это будет тогда и только тогда, когда форма U_2 является определенно-отрицательной. Тогда все корни λ_j будут чисто мнимыми. Мы будем, следовательно, иметь дело с критическим случаем. Но равновесие при этом будет устойчивым на основании теоремы Лагранжа.

Чтобы рассмотреть пример более общего характера, допустим, что предложена система $2n$-го порядка, которая имеет каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24.2}$$

где H — произвольная квадратичная форма $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$.

Уравнения (24.2) можно переписать в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=C_{i1}x_1+C_{i2}x_2+\ldots+C_{in}x_n+B_{i1}y_1+B_{i2}y_2+\ldots+B_{in}y_n,$$

$$\frac{dy_i}{dt}=-A_{i1}x_1-A_{i2}x_2-\ldots-A_{in}x_n-C_{1i}y_1-C_{2i}y_2-\ldots-C_{ni}y_n,$$

где

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_j}, \quad B_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_j}, \quad C_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_j}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$D(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda & C_{12} & \ldots & C_{1n} & B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ C_{21} & C_{22}-\lambda & \ldots & C_{2n} & B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn}-\lambda & B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \\ A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} & C_{11}+\lambda & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} & C_{12} & C_{22}+\lambda & \ldots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} & C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn}+\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{24.3}$$

Определитель $D(\lambda)$ можно преобразовать следующим образом:

$$D(\lambda)=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} & A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} & A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda & A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \\ B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} & C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} \\ B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} & C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} & C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} & C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} \\ B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} & C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} & C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda \\ C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} & A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} \\ C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} & A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda & A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} C_{11}+\lambda & C_{12} & \dots C_{1n} & B_{11} & B_{21} & \dots B_{n1} \\ C_{21} & C_{22}+\lambda & \dots C_{2n} & B_{12} & B_{22} & \dots B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots C_{nn}+\lambda & B_{1n} & B_{2n} & \dots B_{nn} \\ A_{11} & A_{21} & \dots A_{n1} & C_{11}-\lambda & C_{21} & \dots C_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots A_{n2} & C_{12} & C_{22}-\lambda & \dots C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots A_{nn} & C_{1n} & C_{2n} & \dots C_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (24.4)$$

(сначала делаем строки столбцами, затем меняем местами первые и последние n строк, после чего меняем местами первые и последние n колонок). Но так как

$$A_{ij}=A_{ji}, \quad B_{ij}=B_{ji},$$

то из (24.4) следует, что уравнение (24.3) не меняется при замене λ на $-\lambda$. Следовательно, уравнение (24.3) содержит только четные степени λ. Поэтому, если оно имеет корни с вещественными частями отрицательными, то оно будет иметь корни и с положительными вещественными частями и невозмущенное движение будет неустойчиво. Следовательно, для того чтобы движение было устойчиво, необходимо, чтобы все корни уравнения (24.3) были чисто мнимыми. Будет ли при этом действительно иметь место устойчивость, зависит от членов более высоких порядков в дифференциальных уравнениях возмущенного движения.

Если форма H является знакоопределенной, то, учитывая, что $H=\text{const}$. является интегралом уравнений (24.2), мы должны будем заключить на основании теоремы А, что невозмущенное движение в первом приближении устойчиво. Следовательно, в этом случае все корни уравнения (24.3) будет обязательно чисто мнимыми. Но уравнение (24.3) может иметь только чисто мнимые корни и тогда, когда H не является знакоопределенной.

§ 25. Теорема Гурвица.

Из предыдущего ясно, что для задачи устойчивости имеет большое значение вопрос о знаках вещественных частей корней алгебраических уравнений. В частности, важно знать необходимые и достаточные условия, при которых все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части. Эти необходимые и достаточные условия даются теоремой Гурвица, которую мы приводим здесь без доказательства[1]).

Теорема Гурвица. *Пусть предложено уравнение n-й степени*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{25.1}$$

Составим определители

$$\Delta_1=a_1,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots a_n\end{vmatrix}\equiv a_n\Delta_{n-1},$$

где $a_i=0$, *если* $i>n$.

---

[1]) Доказательство теоремы Гурвица можно найти в книге: Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1946, а также в книге: Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946. В технических приложениях теории устойчивости движения для проверки отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения часто используется не теорема Гурвица, а другие критерии. В частности, в теории автоматического регулирования, радиотехнике и электронике обычно применяются так называемые частотные критерии, базирующиеся на понятии передаточной функции системы (см., например, Попов Е. П., Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1954).

Для того чтобы все корни уравнения (25.1) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_{n-1} > 0,\ a_n > 0.$$

Для уравнения третьей степени

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

имеем условия:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3a_0 > 0,\ a_3 > 0. \tag{25.2}$$

Для уравнения четвертой степени

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{25.3}$$

имеем:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ a_4 > 0$$

или

$$a_1 > 0,\ a_1a_2 - a_3a_0 > 0,\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0.$$

Из третьего условия на основании четвертого вытекает $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > a_4a_1^2 > 0$, следовательно, второе условие может быть заменено неравенством $a_3 > 0$. Таким образом, условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (25.3) имеют вид

$$a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0.$$

§ 26. Обобщение теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Приложение к регулируемым системам.

Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению обобщались различными авторами. Целью этих обобщений являлось ослабление условий, налагаемых на функции X_s, которые Ляпунов, как мы видели, предполагал аналитическими с разложениями, начинающимися членами не ниже второго порядка. При этом был предложен ряд довольно сложных доказательств. Так, например, Коттон[1]) заменил систему дифференциальных уравнений (22.1) эквивалентной системой интегральных уравнений, которую он затем интегрировал методом последовательных приближений, приме-

---

[1]) Cotton E., Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, т. 28, 1911.

нив при этом громоздкий метод доказательства сходимости этих приближений. Аналогичным приемом пользовался Перрон[1]).

Однако метод доказательства, предложенный самим Ляпуновым, изложенный нами в § 22, показывает без всяких дополнительных исследований, что указанные теоремы сохраняют силу при значительно более общих предположениях относительно X_s. А именно, при доказательстве теоремы 1 § 22 условие, что функции X_s разлагаются в ряды, начинающиеся членами не ниже второго порядка, было использовано только для того, чтобы можно было утверждать, что функция

$$-\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{26.1}$$

является определенно-отрицательной. На основании леммы 2 § 7 для этого достаточно, чтобы в некоторой окрестности начала координат выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\right| < A\left\{|x_1|+\ldots+|x_n|\right\}^2, \tag{26.2}$$

где A — достаточно малая постоянная, а для этого, учитывая линейность функций $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, достаточно, чтобы функции X_s удовлетворяли неравенствам

$$|X_s(x_1, \ldots, x_n)| < \alpha\left\{|x_1|+\ldots+|x_n|\right\}, \tag{26.3}$$

где α — также достаточно малая постоянная, зависящая исключительно от коэффициентов формы V.

Таким образом, теорема 1 § 22 остается справедливой, если от функций X_s потребовать только, чтобы они в некоторой окрестности начала координат удовлетворяли неравенствам (26.3). Необходимо также потребовать, чтобы выполнялись общие предположения относительно дифференциальных уравнений возмущенного движения, сделанные нами в § 6.

Все сказанное относительно теоремы 1 справедливо также и для теоремы 2.

Указанные обобщения теорем Ляпунова являются наиболее общими из известных в литературе. И мы только что видели, как просто они доказываются при помощи функций Ляпунова. Однако ценность указанных доказательств заключается не только в их простоте. Главная ценность этих доказательств заключается в том, что они дают

---

[1]) Perron O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeit., т. 29, вып. 1, 1928.

возможность практически вычислить область устойчивости, когда последняя имеет место.

Действительно, область асимптотической устойчивости в случае теоремы 1 определяется (см. примечание в конце § 10) областью знакоопределенности функции (26.1). Что же касается последней, то она совпадает с областью, где выполняются условия (26.3). Это может быть все пространство, если, например, функции X_s являются линейными с достаточно малыми коэффициентами. Если функции X_s являются аналитическими, начинающимися членами не ниже второго порядка, то областью выполнимости условий (26.3) будет некоторая окрестность начала координат, которую нетрудно определить, если известно число α.

Во всех случаях дело сводится к определению числа α, а поскольку коэффициенты формы V известны, то задача сводится к вычислению числа A, т. е. числа, при котором функция (26.1) будет определенно-отрицательной при выполнении неравенства (26.2). Последняя задача элементарна. Действительно, нужно выбрать число A таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$A\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^2 < x_1^2+\ldots+x_n^2. \tag{26.4}$$

Поскольку обе части неравенства (26.4) представляют квадратичные формы, это неравенство будет выполняться всюду, если оно выполняется на сфере единичного радиуса. Таким образом, можно положить

$$A < \frac{1}{n},$$

так как $\sqrt{n}$ есть максимум величины $|x_1|+\ldots+|x_n|$ на сфере $\sum x_s^2 = 1$.

Вышеуказанный метод определения области устойчивости можно несколько видоизменить путем другого выбора функции V. Можно, очевидно, выбрать функцию V таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U(x_1, \ldots, x_n),$$

где U — любая наперед заданная определенно-отрицательная квадратичная форма, а не обязательно сумма отрицательных квадратов. Тогда неравенство (26.4) заменится неравенством

$$A\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^2 < -U(x_1, \ldots, x_n)$$

и для числа A имеем:

$$A < \frac{m}{n},$$

где m — наименьшее значение формы $-U$ на сфере единичного радиуса.

Таким образом, число A получится зависящим от коэффициентов заданной формы U. Этим можно воспользоваться для расширения области устойчивости.

Можно, наконец, определить α прямо из условия, что при выполнении (26.3) должно выполняться неравенство

$$\left|\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}\right| < -U(x_1, \ldots, x_n), \tag{26.5}$$

без перехода через неравенство (26.2).

Приведенные способы определения области устойчивости являются лишь некоторыми из тех, которые можно рекомендовать. Вообще здесь следует помнить, что область устойчивости определяется по правилам § 10, областью, где выполняется неравенство (26.5), и для определения последней следует воспользоваться любым способом, который в каждом отдельном случае окажется наиболее удобным.

Практически могут возникнуть следующие три основные задачи, связанные с определением области устойчивости:

1) заданы уравнения первого приближения (с отрицательными вещественными частями у корней характеристического уравнения), заданы нелинейные члены, требуется определить область устойчивости;

2) заданы уравнения первого приближения, задана требуемая область устойчивости, необходимо определить условия, которым должны удовлетворять нелинейные члены;

3) задана требуемая область устойчивости, известен характер нелинейных членов, необходимо определить условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений первого приближения.

Для пояснения всего вышеизложенного рассмотрим одну из задач этого рода, решенную М. А. Айзерманом [1]).

Допустим, что предложена регулируемая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n + f(x_k), \\ \frac{dx_i}{dt} &= p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n \\ &(i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{26.6}$$

где $f(x_k)$ — нелинейная функция одного аргумента x_k.

---

[1]) Айзерман М. А., О сходимости процессов автоматического регулирования после больших начальных отклонений. Автоматика и телемеханика, т. VII, № 2—3, 1946.

Относительно функции $f(x_k)$ предполагается, что при любом x_k кривая $f=f(x_k)$ лежит между прямыми $f=(a_0-a_1)x_k$ и $f=(a_0+a_2)x_k$, где a_1 и a_2 — некоторые постоянные. Предполагается далее, что для соответствующей линеаризованной системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt}=p_{11}x_1+\ldots+p_{1n}x_n+a_0x_k,\\ &\frac{dx_i}{dt}=p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n\\ &\qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n)\end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

характеристическое уравнение имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Требуется определить такие значения для чисел a_1 и a_2, при которых положение равновесия $x_1=\ldots=x_n=0$ регулируемой системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Мы видим, таким образом, что задача подобна задаче об определении числа α в неравенствах (26.3). Эту задачу М. А. Айзерман решает следующим образом.

Пусть $V(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ определенно-положительная квадратичная форма, производная которой в силу линейной системы (26.7) равна наперед заданной определенно-отрицательной квадратичной форме $U(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, так что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+a_0x_k\frac{\partial V}{\partial x_1}=U(x_1,\ \ldots,\ x_n). \tag{26.8}$$

Тогда квадратичная форма

$$U(x_1,\ \ldots,\ x_n)+ax_k\frac{\partial V}{\partial x_1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+(a_0+a)\,x_k\frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{26.9}$$

будет также определенно-отрицательной, если число $|a|$ достаточно мало. Пусть $-a_1$ и a_2 — наименьшее и наибольшее значения a, при которых форма (26.9) еще определенно-отрицательна. Эти величины легко определяются простым применением какого-нибудь признака знакоопределенности квадратичных форм. Полученные числа a_1 и a_2 и являются искомыми. Действительно, если форма (26.9) является определенно-отрицательной при $-a_1\leqslant a\leqslant a_2$, то функция

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n)+f(x_k)\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

будет также определенно-отрицательной, так как кривая $f(x_k)$ лежит между прямыми $f=(a_0-a_1)x_k$ и $f=(a_0+a_1)x_k$ и, следовательно, при любом x_k найдется такое число a, лежащее в интервале $(-a_1, a_2)$, что будем иметь: $f(x_k)=(a_0+a)x_k$.

Пример. Проведем все выкладки на примере автоматического регулирования числа оборотов силового двигателя, рассмотренном М. А. Айзерманом. Регулирование осуществляется по схеме, изображенной на рис. 7.

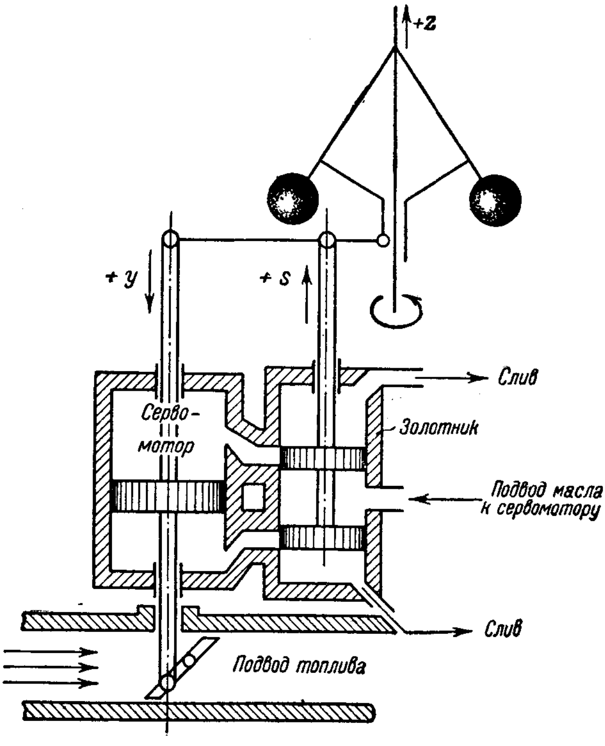

Рис. 7.

Обозначим через x отклонение числа оборотов от его значения, которое нужно поддерживать, считая эту величину положительной, когда число оборотов растет. Через z обозначим смещение муфты измерителя. Эту величину будем считать положительной, если ее изменение вызвано ростом x. Далее обозначим через s смещение золотника сервомотора от равновесного положения, считая эту величину положительной, когда она соответствует росту z. И наконец, обозначим через y смещение поршня сервомотора, считая эту величину положительной, когда смещение поршня сервомотора вызвано положительным смещением s.

При линейной идеализации имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{уравнение регулируемого объекта:} & \dfrac{dx}{dt} = -Nax - by; \\ \text{уравнение сервомотора:} & \dfrac{dy}{dt} = c_3 s; \\ \text{уравнение золотника:} & s = c_2 z - d_1 y; \\ \text{уравнение измерителя:} & z = c_1 x. \end{array}\right\} \qquad (26.10)$$

Здесь a, b, c_1, c_2, c_3, d_1 — положительные постоянные. Что же касается величины N, то она равна $+1$, если при отсоединенном регуляторе двигатель устойчиво держит обороты, т. е. обладает положительным самовыравниванием. Напротив, $N = -1$, если двигатель обладает отрицательным самовыравниванием, и, наконец, $N = 0$, если двигатель не обладает самовыравниванием.

Мы рассмотрим здесь случай, когда самовыравнивание нелинейно и характеризуется однозначной нелинейной функцией $f(x)$. Уравнение движения мы получим, заменяя в первом уравнении (26.10) член $-Nax$ членом $f(x)$. Тогда, исключая s и z, получим следующие уравнения задачи:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - by, \quad \frac{dy}{dt} = cx - dy, \qquad (26.11)$$

где $c = c_1 c_2 c_3$, $d = d_1 c_3$.

Мы будем предполагать, что самовыравнивание отрицательно. В этом случае функция $f(x)$, обращающаяся в нуль при $x = 0$, будет обладать в этой точке положительной производной, которую мы обозначим через a_0.

Тогда для системы первого приближения будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x - by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx - dy.$$

Для того чтобы характеристическое уравнение имело корни с отрицательными вещественными частями, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$d - a_0 > 0, \quad bc - a_0 d > 0. \qquad (26.12)$$

Мы будем предполагать, что эти условия выполняются.

Для решения задачи положим:

$$U = -M(x^2 + y^2), \quad 2V = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

где M — некоторая заданная положительная постоянная, и выберем

A, B, C таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a_0x-by)+\frac{\partial V}{\partial y}(cx-dy)=-M(x^2+y^2). \tag{26.13}$$

Приравнивая в (26.13) коэффициенты при подобных членах, мы получим следующие уравнения для этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0A+cB&=-M,\\ -bB-dC&=-M,\\ -bA+(a_0-d)B+cC&=0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \Delta A&=M[d(d-a_0)+c(b+c)],\\ \Delta B&=-M(a_0c+bd),\\ \Delta C&=M[b(b+c)-a_0(d-a_0)], \end{aligned}\right\} \tag{26.14}$$

где Δ определяется формулой

$$\Delta=(bc-a_0d)(d-a_0)$$

и является в силу (26.12) величиной положительной.

Рассмотрим теперь форму

$$-M(x^2+y^2)+ax\frac{\partial V}{\partial x}=(-M+aA)x^2+aBxy-My^2.$$

Для того чтобы эта форма была определенно-отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$B^2a^2+4M(-M+aA)<0.$$

Это неравенство будет выполняться при всех значениях a, лежащих в интервале $-a_1<a<a_2$, где a_1 и a_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a_2&=\frac{2M}{B^2}\left(-A+\sqrt{A^2+B^2}\right),\\ -a_1&=\frac{2M}{B^2}\left(-A-\sqrt{A^2+B^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{26.15}$$

Положим $M=\Delta$, после чего (26.15) примет вид

$$a_{1,2}=\frac{2\Delta}{B^2}\left(\pm A^*+\sqrt{A^{*2}+B^{*2}}\right), \tag{26.16}$$

где

$$A^*=d(d-a_0)+c(b+c),\qquad B^*=-(a_0c+bd).$$

Таким образом, если при всех значениях x кривая $f=f(x)$ лежит между прямыми $f=(a_0-a_1)x$ и $f=(a_0+a_2)x$, где a_1 и a_2 определяются формулами (26.16), то состояние равновесия регулируемой системы асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях [1]).

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 521).

§ 27. Заключительные замечания.

Итак, все случаи, которые могут представиться при решении задачи устойчивости, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (19.1), можно подразделить на *некритические*, когда задача решается первым приближением, и *критические*, когда рассмотрение лишь первого приближения недостаточно. Случаи будут критическими тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение системы первого приближения, не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с вещественными частями, равными нулю.

С точки зрения математической критические случаи можно рассматривать как исключительные. Однако с точки зрения механической эти случаи имеют очень важное значение. Так, во всех примерах, рассмотренных нами в §§ 23 и 24, устойчивость могла иметь место только в критических случаях. С другой стороны, для многих механических систем характеристическое уравнение системы первого приближения имеет критические корни в силу самого устройства этих систем. Такой, например, будет система регулирования, рассмотренная нами в § 12. Действительно, уравнения возмущенного движения (12.7) этой системы имеют один характеристический корень, равный нулю.

Таким образом, очень важно иметь методы, позволяющие решать задачу устойчивости в критических случаях. К сожалению, эта задача очень сложна и до сих пор нет общих методов ее решения. При этом задача делается тем сложнее, чем больше число критических корней. Ляпунов разрешил эту задачу для следующих трех случаев:

1) Характеристическое уравнение имеет один нулевой корень и n корней с отрицательными вещественными частями.

2) Характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней и n корней с отрицательными вещественными частями.

3) Характеристическое уравнение имеет два нулевых корня, и система имеет только второй порядок. При этом двойному нулевому корню соответствует только одна группа решений.

В следующей главе мы рассмотрим первые два случая. Случай двойного нулевого корня при несколько иных предположениях будет рассмотрен в главе VI, после того как будут установлены некоторые общие теоремы теории критических случаев. В этой же главе будут рассмотрены и критические случаи, когда характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней и когда оно имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней.

ГЛАВА IV.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 28. Случай одного нулевого корня. Приведение уравнений к специальному виду.

Допустим, что система уравнений возмущенного движения есть система $(n+1)$-го порядка и имеет вид

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1} + Y_j(y_1, \ldots, y_{n+1}) \qquad (28.1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

где q_{jl} — постоянные, а функции Y_j разлагаются в некоторой окрестности начала координат в ряды по степеням величин y_s, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Мы переходим к рассмотрению критического случая, когда характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1) \qquad (28.2)$$

имеет один нулевой корень при остальных n корнях с отрицательными вещественными частями.

Введем в уравнениях (28.2) вместо одной из переменных y_j переменную x при помощи подстановки

$$x = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_{n+1}y_{n+1},$$

где a_j — некоторые постоянные. Эти постоянные мы постараемся выбрать таким образом, чтобы преобразованное уравнение приняло вид

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Мы должны, следовательно, иметь тождественно

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j (q_{j1}y_1 + \ldots + q_{j,\,n+1}y_{n+1}) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при y_k, мы получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$q_{1k}a_1 + q_{2k}a_2 + \ldots + q_{n+1,\,k}a_{n+1} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1). \tag{28.3}$$

Так как характеристическое уравнение системы (28.2) имеет нулевой корень, то определитель системы (28.3) обращается в нуль и, следовательно, эта система имеет решение для a_j, в котором не все эти постоянные равны нулю. Допустим для определенности, что $a_{n+1} \neq 0$. Тогда мы можем принять переменную x вместо переменной y_{n+1}. Остальные переменные y_i сохраним прежние, но будем обозначать их в дальнейшем через x_i. Таким образом, мы преобразуем уравнения (28.2) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + a_{n+1}y_{n+1}, \\ x_i &= y_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

Теперь, обозначая

$$p_{sk} = q_{sk} - \frac{1}{a_{n+1}}\, q_{s,\,n+1}a_k,$$

$$p_s = \frac{1}{a_{n+1}}\, q_{s,\,n+1} \qquad (s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы приведем уравнения (28.2) к виду

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_sx,$$

где p_s, p_{sj} — постоянные. Характеристическое уравнение этой системы, имеющее вид

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} & p_1 \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} & p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda & p_n \\ 0 & 0 & & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

распадается на уравнение $\lambda = 0$ и уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28.5}$$

Так как характеристическое уравнение инвариантно по отношению к линейным преобразованиям и в рассматриваемом случае имеет n

корней с отрицательными вещественными частями, то *все корни уравнения* (28.5) *имеют отрицательные вещественные части.*

Если при помощи подстановки (28.4) преобразовать систему (28.1), то она, очевидно, примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=X(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ &\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+p_sx+X_s(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\\ &\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

где X и X_s — аналитические функции переменных x, x_1, ..., x_n, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Таковы будут дифференциальные уравнения возмущенного движения в интересующем нас критическом случае одного нулевого корня характеристического уравнения. Этот вид дифференциальных уравнений будет исходным для дальнейшего исследования.

§ 29. Исследование задачи для случая системы первого порядка.

Мы рассмотрим сначала случай, когда $n=0$ и, следовательно, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=X(x)=gx^m+g_{m+1}x^{m+1}+\ldots, \tag{29.1}$$

где $m\geqslant 2$, а g, g_{m+1}, ... — некоторые постоянные.

В рассматриваемом частном случае задача устойчивости решается сразу, а именно: если m является числом четным, то невозмущенное движение неустойчиво; если же m является числом нечетным, то при $g<0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $g>0$ оно неустойчиво.

Действительно, если m — число четное, то правая часть уравнения (29.1) в некоторой окрестности начала координат принимает значения одного знака, совпадающего со знаком g. Поэтому если рассматривать точку, движущуюся по оси x согласно уравнению (29.1), то скорость этой точки имеет определенное направление, независимо от того, будет ли точка находиться справа или слева от начала координат. Следовательно, если при $g>0$ движущаяся точка в начальный момент находится справа от начала координат, а при $g<0$ слева от начала координат, то она будет удаляться от этой точки пока не выйдет из области знакоопределенности функции X. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво вне зависимости от знака g.

Если m — число нечетное, то скорость движущейся точки меняет свое направление при переходе через начало координат. При этом при $g>0$ точка всегда удаляется от начала координат, а при $g<0$ она, напротив, к нему приближается. Следовательно, в первом случае невозмущенное движение неустойчиво, а во втором случае оно устойчиво и притом асимптотически.

Легко построить функции Ляпунова для рассматриваемой задачи, а именно, если m — число нечетное, то полагаем:

$$V=\frac{1}{2}gx^2.$$

Для $\frac{dV}{dt}$ имеем:

$$\frac{dV}{dt}=g^2x^{m+1}+gg_{m+1}x^{m+2}+\ldots$$

Обе функции как V, так и $\frac{dV}{dt}$ знакоопределенны. При этом, если $g>0$, то обе эти функции будут одинакового знака, и V удовлетворяет всем условиям теоремы В, откуда мы снова заключаем о неустойчивости движения. При $g<0$ V и $\frac{dV}{dt}$ имеют противоположные знаки и, следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Б, откуда вытекает асимптотическая устойчивость.

При m четном полагаем просто

$$V=x.$$

Тогда $\frac{dV}{dt}$ будет функцией знакоопределенной, а сама функция V, каков бы ни был знак g, может принимать значения того же знака, что и $\frac{dV}{dt}$. Следовательно, как при $g>0$, так и при $g<0$ V удовлетворяет всем условиям теоремы В, и невозмущенное движение неустойчиво.

§ 30. Исследование задачи для системы $(n+1)$-го порядка в частном случае.

Допустим теперь, что $n\neq 0$. Мы будем, однако, сначала предполагать, что правые части уравнений (28.6) связаны некоторым ограничительным условием. Это условие заключается в следующем.

Обозначим через $X^{(0)}(x)$ и $X_s^{(0)}(x)$ соответственно совокупности всех членов в функциях X и X_s, не содержащих $x_1, \ldots, x_n$, так что

$$\left.\begin{aligned}
&X^{(0)}(x)=X(x,\ 0,\ \ldots,\ 0)=gx^m+g^{(m+1)}x^{m+1}+\ldots,\\
&X_s^{(0)}(x)=X_s(x,\ 0,\ \ldots,\ 0)=g_sx^{m_s}+g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1}+\ldots\\
&\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}\right\}\qquad(30.1)$$

где g, $g^{(m+1)}$, g_s, $g_s^{(m_s+1)}$ — постоянные. Мы будем предполагать, что

1) $X^{(0)}(x)$ не обращается тождественно в нуль,
2) $m_s\geqslant m$,
3) все величины p_s в уравнениях (28.6) равны нулю.

При этих предположениях задача устойчивости решается сразу, а именно: *невозмущенное движение всегда неустойчиво, если m — число четное. Если m — число нечетное, то при $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g < 0$ оно устойчиво и притом асимптотически.* Другими словами, ответ получается такой же, как если бы решалась задача устойчивости для одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = X^{(0)}(x) = gx^m + \ldots$$

Таким образом, для решения задачи устойчивости при выполнении вышеуказанных ограничений можно отбросить все некритические уравнения, а в критическом уравнении отбросить все члены, содержащие некритические переменные, и исследовать полученное таким образом одно уравнение с одной неизвестной функцией.

Для доказательства высказанных предложений мы постараемся для уравнений возмущенного движения, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(0)}(x) + X'(x, x_1, \ldots, x_n) = gx^m + \ldots + X', \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

где функция $X'(x, x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль при $x_1 = \ldots \ldots = x_n = 0$, построить функции Ляпунова, удовлетворяющие условиям теоремы Б или В. Задача, следовательно, заключается в построении функции $V(x, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (30.2), была бы знакоопределенной.

Допустим сначала, что m — число нечетное. Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, выбранная согласно условию

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{30.3}$$

Так как все корни уравнения (28.5) имеют отрицательные вещественные части, то на основании теоремы 1 § 21 форма W существует и будет определенно-отрицательной.

Если бы функции X_s не зависели от x, то производная по времени от формы W, составленная в силу последних n уравнений системы (30.2), т. е. выражение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s), \tag{30.4}$$

являлась бы при достаточно малых $x_1, \ldots, x_n$ определенно-положительной функцией относительно $x_1, \ldots, x_n$.

С другой стороны, если бы функция X не зависела от $x_1, \ldots, x_n$, т. е. если бы $X'=0$, то производная по времени от функции $\frac{1}{2}gx^2$, составленная в силу первого уравнения (30.2), равная

$$gxX = g^2x^{m+1} + gg_{m+1}x^{m+2} + \ldots + gxX', \tag{30.5}$$

была бы при x достаточно малом определенно-положительной относительно x. Поэтому при указанных условиях производная по времени от функции

$$V_1 = \frac{1}{2}gx^2 + W(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.6}$$

составленная в силу полной системы уравнений (30.2), была бы определенно-положительной функцией всех $n+1$ переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ в некоторой достаточно малой окрестности начала координат. Эту производную можно было бы представить в виде

$$(g^2+f)\,x^{m+1} + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta, \tag{30.7}$$

где f — некоторая функция от x, обращающаяся в нуль при $x=0$, а $f_{\alpha\beta}$ — некоторые функции от $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Но так как функция X содержит $x_1, \ldots, x_n$, а функции X_s содержат x, то производная от V_1 в силу (30.2) не будет определенно-положительной. В ней появятся члены, нарушающие знакоопределенность.

Чтобы выяснить общий вид этих членов, заметим прежде всего, что выражение (30.7) останется, очевидно, знакоопределенным, если функция f содержит не только переменную x, но и переменные $x_1, \ldots, x_n$, а функции $f_{\alpha\beta}$ содержат не только переменные $x_1, \ldots, x_n$, но и переменную x. Важно только, чтобы функции f и $f_{\alpha\beta}$ обращались в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Учитывая это обстоятельство, запишем производную от V_1 в силу уравнений (30.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= gxX + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s) = \\ &= (g^2 + f(x, x_1, \ldots, x_n))\,x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\,x_\alpha x_\beta + P(x, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{30.8}$$

где функции f и $f_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$, а P — совокупность всех членов, которые не могут быть включены ни в выражение

$$f(x, x_1, \ldots, x_n)\, x^{m+1}, \tag{30.9}$$

ни в выражение

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\, x_\alpha x_\beta. \tag{30.10}$$

Рассмотрим подробнее функцию P. Все члены, входящие в выражение P, можно, очевидно, разбить на следующие четыре группы: на члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, на члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, на члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, и на члены, имеющие относительно $x_1, \ldots, x_n$ порядок выше второго. Очевидно, что все члены последней группы можно включить в выражение (30.10). Нам остается поэтому рассмотреть только первые три группы членов.

Все члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, содержатся, очевидно, только в выражении (30.5). Совокупность всех этих членов есть

$$gxX^{(0)}(x) = g^2 x^{m+1} + g g_{m+1} x^{m+2} + \ldots$$

Первый из них выписан в (30.8) явно, а остальные могут быть включены в выражение (30.9). Следовательно, функция P не содержит членов, свободных от $x_1, \ldots, x_n$.

Члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, входят в выражение производной (30.8) как через совокупность (30.4), так и через совокупность (30.5). Если эти члены имеют относительно x порядок, не меньший $m+1$, то они могут быть, очевидно, включены в выражение (30.9). Таким образом, в функции P содержатся лишь те линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$ члены, которые имеют относительно x порядок k, где $k = 2, \ldots, m$.

Рассмотрим, наконец, члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Если эти члены имеют общий порядок выше второго, то они могут быть включены в выражение (30.10) и, следовательно, в функцию P не входят. Члены же, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$ и имеющие только второй порядок, т. е. обладающие постоянными коэффициентами, содержатся, очевидно, все в выражении

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial W}{\partial x_s} \equiv \sum x_s^2$$

и, следовательно, в функцию P также не входят.

Таким образом, функция P имеет вид

$$P = x^2 P_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + x^m P_m(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.11}$$

где $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$.

Наличие в выражении производной слагаемого (30.11) нарушает ее знакоопределенность. Чтобы избавиться от этого слагаемого, поступим следующим образом.

Добавим к функции V_1 член $x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, где Q_k — подлежащая еще определению линейная форма переменных x_j. Другими словами, рассмотрим вместо V_1 функцию

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{2} g x^2 + W(x_1, \ldots, x_n) + x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n). \tag{30.12}$$

Член $x^k Q_k(x_1, \ldots, x_n)$ внесет в выражение производной два слагаемых: слагаемое

$$k x^{k-1} Q_k(x_1, \ldots, x_n) X(x, x_1, \ldots, x_n) \tag{30.13}$$

и слагаемое

$$x^k \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \tag{30.14}$$

Рассмотрим подробней все члены, входящие в эти слагаемые. Нас будут при этом интересовать лишь те из этих членов, которые влияют на знак производной, т. е. члены, не содержащие $x_1, \ldots, x_n$, члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, и члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, содержатся, очевидно, только в слагаемом (30.14). Совокупность этих членов мы получим, полагая в этом слагаемом $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, эта совокупность есть

$$x^k \sum_{s=1}^{n} X_s^{(0)}(x) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \tag{30.15}$$

Так как по условию $m_s \geqslant m$, то все члены, входящие в (30.15), имеют порядок не ниже $(m+k)$-го и, следовательно, могут быть включены в выражение (30.9). Таким образом, все новые члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, не влияют на знакоопределенность производной.

Рассмотрим теперь члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Покажем, что все эти члены (входящие в слагаемые (30.13) и (30.14)) имеют относительно x порядок, не меньший k, и притом совокупность всех членов k-го порядка относительно x имеет вид

$$x^k \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \tag{30.16}$$

Действительно, интересующие нас члены содержатся как в слагаемом (30.13), так и в слагаемом (30.14). Чтобы получить эти члены в слагаемом (30.13), необходимо в функции X взять члены, не содержащие $x_1, \ldots, x_n$. Эти члены имеют порядок не ниже m, причем $m \geqslant 2$. Следовательно, все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, содержащиеся в слагаемом (30.13), имеют порядок относительно x, не меньший $k+1$.

Обращаясь теперь к слагаемому (30.14), мы видим, что кроме (30.16) мы получим еще члены интересующего нас вида, если мы в функциях X_s выделим все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$. Но каждый из этих членов содержит, по крайней мере, первую степень x, так как все члены в X_s имеют порядок не ниже второго. Поэтому все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, содержащиеся в (30.14) и происходящие от функций X_s, имеют порядок относительно x, не меньший $k+1$.

Итак, все члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, которыми производная $\frac{d\overline{V}_1}{dt}$ отличается от производной $\frac{dV_1}{dt}$, имеют относительно x порядок не ниже k, причем совокупность всех членов, имеющих относительно x порядок k, дается выражением (30.16).

Что касается членов, квадратичных относительно $x_1, \ldots, x_n$, то нас могут интересовать лишь те из них, которые имеют общий порядок, равный двум, так как остальные могут быть включены в выражение (30.10). Но такого рода членов слагаемое $x^k Q_k$ в выражение производной не вносит. Действительно, слагаемое (30.13) содержит члены не ниже третьего порядка, а слагаемое (30.14) имеет множитель x^k, и следовательно, члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, будут иметь общий порядок, превышающий два.

Резюмируя вышесказанное, мы приходим к заключению, что производная функция (30.12) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = (g^2 + \overline{f})\, x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \overline{f}_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + x^2 P_2 + \ldots$$
$$\ldots + x^{k-1} P_{k-1} + x^k S + x^{k+1} \overline{P}_{k+1} + \ldots + x^m \overline{P}_m, \qquad (30.17)$$

где $\overline{f}$, $\overline{f}_{\alpha\beta}$ — функция такого же типа, как и f, $f_{\alpha\beta}$, $\overline{P}_{k+1}, \ldots, \overline{P}_m$ — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$, вообще говоря, отличные от $P_{k+1}, \ldots, P_m$, а

$$S = P_k + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial Q_k}{\partial x_s}. \qquad (30.18)$$

Выберем теперь линейную форму Q_k таким образом, чтобы выражение (30.18) обратилось тождественно в нуль. Это всегда возможно сделать на основании теоремы 2 § 20, так как все корни уравнения (28.5) имеют отрицательные вещественные части.

При таком выборе Q_k в выражении (30.17) уничтожится один из членов, нарушающих его знакоопределенность. При этом другие члены этого типа, имеющие относительно x меньший порядок, будут такими же, как и в выражении производной $\frac{dV_1}{dt}$. Мы можем поэтому последовательно, добавляя к функции V_1 члены xQ_1, x^2Q_2, ..., x^mQ_m и подбирая соответствующим образом линейные формы Q_i, уничтожить в выражении производной все члены, нарушающие ее знакоопределенность. Другими словами, мы можем линейные формы Q_i выбрать таким образом, чтобы производная от функции

$$V=\frac{1}{2}gx^2+W(x_1, \ldots, x_n)+x^2Q_2+\ldots+x^mQ_m \tag{30.19}$$

в силу системы (30.2) имела вид

$$\frac{dV}{dt}=(g^2+F(x, x_1, \ldots, x_n))\,x^{m+1}+\\+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x, x_1, \ldots, x_n)\,x_\alpha x_\beta,$$

где F, $F_{\alpha\beta}$ — некоторые функции от x, x_1, ..., x_n, обращающиеся в нуль при $x=x_1=\ldots=x_n=0$.

Функция $\frac{dV}{dt}$ получилась определенно-положительной. Рассмотрим функцию V. Как было указано выше, квадратичная форма $W(x_1, \ldots, x_n)$ определенно-отрицательна. Поэтому если $g<0$, то и квадратичная форма

$$\frac{1}{2}gx^2+W(x_1, \ldots, x_n) \tag{30.20}$$

$n+1$ переменных x, x_j будет также определенно-отрицательной. Но тогда определенно-отрицательной будет и функция (30.19), и она, следовательно, будет удовлетворять всем условиям теоремы Б, откуда вытекает асимптотическая устойчивость невозмущенного движения.

Напротив, если $g>0$, то квадратичная форма (30.20), а следовательно, и функция V будет знакопеременной. Функция V будет, следовательно, удовлетворять всем условиям теоремы В, и невозмущенное движение будет неустойчиво.

Допустим теперь, что m есть число четное и покажем, что невозмущенное движение независимо от знака g неустойчиво.

В рассматриваемом случае функцию Ляпунова пытаемся искать в виде

$$V_1=\alpha^2gx+W(x_1, \ldots, x_n), \tag{30.21}$$

где по-прежнему $W(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает квадратичную форму, удовлетворяющую уравнению (30.3), а α^2 — некоторое положительное число, выбором которого мы распорядимся позже. Функция (30.21), как и в случае нечетного m, представляет собой сумму функций Ляпунова, построенных по отдельности для одного первого уравнения системы (30.2), если в нем отбросить все члены, содержащие x_j, и для последних n уравнений этой системы, если в них отбросить все члены, содержащие x.

Производная от (30.21) по времени, составленная в силу полной системы (30.2), может быть представлена в виде

$$\frac{dV_1}{dt}=\alpha^2 g\,\frac{dx}{dt}+\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)\frac{\partial W}{\partial x_s}=$$
$$=(\alpha^2 g^2+f)\,x^m+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}f_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta+P, \qquad (30.22)$$

где f, $f_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x=x_1=\ldots=x_n=0$, а P—совокупность членов, которые не могут быть включены ни в выражение

$$(\alpha^2 g^2+f)\,x^m, \qquad (30.23)$$

ни в выражение (30.10).

Анализируя все члены, входящие в (30.22), мы видим, что те из них, которые не содержат $x_1, \ldots, x_n$, могут быть все включены в выражение (30.23). То же самое относится и к членам, линейным относительно $x_1, \ldots, x_n$, если они содержат x в степени, не меньшей m. Члены же вида

$$xP_1,\ x^2P_2,\ \ldots,\ x^{m-1}P_{m-1},$$

где P_i — линейные формы величин $x_1, \ldots, x_n$, должны быть отнесены к функции P.

Из членов более высоких порядков относительно x_j нас могут интересовать квадратичные, имеющие общий порядок, равный двум, т. е. обладающие постоянными коэффициентами. Все остальные члены, квадратичные относительно $x_1, \ldots, x_n$, могут быть включены в выражение (30.10).

В отличие от случая нечетного m выражение $\frac{dV_1}{dt}$ содержит квадратичные относительно x_j члены с постоянными коэффициентами, отличные от $\sum x_s^2$. Эти члены содержатся в $\alpha^2 g\,\frac{dx}{dt}$, и их совокупность имеет вид

$$\alpha^2 g X^{(2)}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (30.24)$$

где $X^{(2)}$ — квадратичная форма переменных x_j, представляющая собой совокупность членов второго порядка в разложении функции $X(0, x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом, функция P имеет вид

$$P = \alpha^2 g X^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + x P_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \\ \ldots + x^{m-1} P_{m-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Член (30.24), входящий в P, не нарушит знакоопределенности производной, если число α^2 выбрать настолько малым, чтобы форма

$$\alpha^2 g X^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + \sum x_s^2$$

была определенно-положительной. Что же касается остальных членов, входящих в P, то их можно уничтожить таким же точно приемом, какой мы применили в случае нечетного m. Для этого нужно вместо функции (30.21) рассмотреть функцию

$$V = \alpha^2 g x + W(x_1, \ldots, x_n) + x Q_1 + \ldots + x^{m-1} Q_{m-1},$$

где $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ — некоторые линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Эти формы можно подобрать таким образом, чтобы производная от V приняла вид

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha^2 g^2 + F) x^m + \alpha^2 g X^{(2)} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (30.25)$$

где F и $F_{\alpha\beta}$ — функции такого же вида, как и f и $f_{\alpha\beta}$.

Если α^2 достаточно мало, то производная (30.25) есть функция определенно-положительная. Сама же функция V, разложение которой начинается линейными членами, будет, очевидно, знакопеременной. Функция V удовлетворяет, таким образом, всем условиям теоремы В. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Таким образом, все утверждения о решении задачи устойчивости в рассматриваемом случае полностью доказаны.

§ 31. Исследование задачи для системы $(n+1)$-го порядка в общем случае.

Мы переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда правые части уравнений возмущенного движения (28.6) не подчинены никаким ограничительным условиям.

Для решения задачи постараемся преобразовать уравнения возмущенного движения к такому виду, для которого выполняются ограничительные условия предыдущего параграфа. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$f_s = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + p_s x + X_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (31.1)$$

определяющих переменные x_s как функции переменной x. Левые части этих уравнений обращаются в нуль при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Функциональный же определитель по переменным $x_1, \ldots, x_n$ этой системы уравнений при $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$ отличен от нуля. Действительно,

$$\left\{\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}\right\}_{x=x_j=0} = |p_{ik}| \neq 0,$$

так как уравнение (28.5) не имеет нулевого корня. Поэтому на основании известной теоремы существования неявных функций существует одно и только одно решение системы (31.1), при котором функции x_s обращаются в нуль при $x = 0$, и эти функции будут разлагаться в ряды по степеням x, сходящиеся при достаточно малых значениях этой величины. Пусть

$$u_s(x) = A_s^{(1)} x + A_s^{(2)} x^2 + \ldots \tag{31.2}$$

будут указанные функции, так что

$$p_{s1} u_1 + \ldots + p_{sn} u_n + p_s x + X_s(x, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0. \tag{31.3}$$

Сделаем теперь в уравнениях (28.6) преобразование переменных

$$x_s = \xi_s + u_s(x). \tag{31.4}$$

Будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \xi_1 + u_1(x), \ldots, \xi_n + u_n(x)),$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}(\xi_1 + u_1) + \ldots + p_{sn}(\xi_n + u_n) + p_s x + \\ + X_s(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \frac{du_s}{dx}\frac{dx}{dt},$$

или на основании (31.3)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \overline{X}(x, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \overline{X}_s(x, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{31.5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= X(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n), \\ \overline{X}_s &= X_s(x, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \\ &- X_s(x, u_1, \ldots, u_n) - \frac{du_s}{dx}\overline{X} \end{aligned}\right\} \tag{31.6}$$

— аналитические функции переменных x, ξ_j, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Так как новые переменные обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль старые переменные, то задача устойчивости по отношению к одним переменным эквивалентна задаче устойчивости по отношению к другим переменным. Мы можем поэтому для решения задачи рассматривать уравнения (31.5).

Уравнения (31.5) удовлетворяют второму и третьему ограничительному условиям, введенным в предыдущем параграфе. Действительно, коэффициенты при первой степени x в последних n уравнениях (31.5) равны нулю, а для функций $\overline{X}^{(0)}$ и $\overline{X}_s^{(0)}$ на основании (31.6) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}^{(0)}(x) &= \overline{X}(x, 0, \ldots, 0) = X(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)), \\ \overline{X}_s^{(0)}(x) &= \overline{X}_s(x, 0, \ldots, 0) \equiv -\frac{du}{dx}\overline{X}^{(0)}, \end{aligned}\right\} \tag{31.7}$$

откуда непосредственно следует, что разложение функций $\overline{X}_s^{(0)}$ начинается членами, порядок которых не ниже порядка младшего члена в разложении функции $\overline{X}^{(0)}$.

Следовательно, если функция $\overline{X}^{(0)}$ не обращается тождественно в нуль, то система (31.5) удовлетворяет всем условиям предыдущего параграфа и для решения задачи устойчивости мы можем воспользоваться полученными там результатами. Если же $\overline{X}^{(0)} \equiv 0$, то на основании (31.7) $\overline{X}_s^{(0)} \equiv 0$ и условия предыдущего параграфа не выполняются. Этот случай является особенным и требует специального рассмотрения. Мы этим займемся в § 33. Сейчас мы рассмотрим неособенный случай.

В этом случае согласно результатам предыдущего параграфа мы должны рассмотреть лишь первое из уравнений (31.5), отбросить в нем все члены, зависящие от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и решать задачу устойчивости для полученного таким образом уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \overline{X}^{(0)}(x). \tag{31.8}$$

Но на основании (31.7) правая часть этого уравнения есть результат подстановки в правую часть первого из уравнений (28.6) вместо величин x_j функций (31.2). Следовательно, уравнение (31.8) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)). \tag{31.9}$$

Задача устойчивости для этого уравнения решается младшим членом в разложении его правой части. Если степень этого младшего члена нечетная, а коэффициент при нем отрицателен, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически. Во всех остальных случаях оно неустойчиво.

Таким образом, для решения задачи устойчивости в интересующем нас случае, когда характеристическое уравнение системы первого приближения имеет один нулевой корень при остальных корнях с отрицательными вещественными частями, *можно* руководствоваться следующим правилом:

1) приводим уравнения возмущенного движения к виду (28.6);

2) приравниваем нулю правые части некритических уравнений и решаем относительно x_j полученные таким образом уравнения (31.1);

3) полученными функциями от x заменяем величины x_j в правой части критического уравнения, и если результат подстановки не обращается тождественно в нуль, то решаем задачу устойчивости для полученного таким образом одного уравнения с одной неизвестной функцией (31.9).

Для этого рассматриваем лишь младший член в разложении правой части уравнения (31.9). Пусть этот член будет gx^m. Тогда при m нечетном и $g < 0$ невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически. В других случаях оно неустойчиво.

§ 32. Примеры.

В предыдущем параграфе мы видели, что для решения задачи устойчивости в интересующем нас критическом случае необходимо прежде всего разрешить систему уравнений (31.1) относительно переменных x_s. Для действительного вычисления этого решения будем искать его в виде рядов

$$x_s(x) = B_s^{(1)}x + B_s^{(2)}x^2 + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{32.1}$$

с неопределенными коэффициентами $B_s^{(l)}$. Для определения этих коэффициентов подставим ряды (32.1) в уравнения (31.1) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x. Приравнивая нулю коэффициенты при первой степени x, мы получим систему уравнений

$$p_{s1}B_1^{(1)} + p_{s2}B_2^{(1)} + \ldots + p_{sn}B_n^{(1)} + p_s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{32.2}$$

для определения $B_s^{(1)}$. Эти уравнения линейны, обладают отличным от нуля определителем и дают одно и только одно решение для $B_s^{(1)}$. Точно так же, приравнивая нулю коэффициенты при x^l, мы получим для определения $B_s^{(l)}$ систему уравнений вида

$$p_{s1}B_1^{(l)} + p_{s2}B_2^{(l)} + \ldots + p_{sn}B_n^{(l)} + P_s^{(l)} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{32.3}$$

где $P_s^{(l)}$ — некоторые полиномы относительно $B_j^{(1)}, B_j^{(2)}, \ldots, B_j^{(l-1)}$.

Уравнения (32.3) дают возможность последовательно определять коэффициенты $B_s^{(l)}$ по мере возрастания их порядка.

После того как коэффициенты $B_s^{(l)}$ уже вычислены, необходимо подставить ряды (32.1) в функцию X вместо x_s. Младший член полученного таким образом ряда относительно x и решает, как мы видели, задачу устойчивости. Но так как нас интересует лишь младший член указанного ряда, то при действительном проведении вычислений достаточно в общем случае подсчитать в рядах (32.1) только первые члены $B_s^{(1)}x$, которые и определят младший член в функции X. Если, однако, окажется, что в результате подстановки (32.1) в функцию X коэффициент при младшем члене благодаря некоторым зависимостям между коэффициентами функций X и X_s обратится в нуль, то придется в рядах (32.1) учесть и члены $B_s^{(2)}x^2$, а в некоторых случаях и члены более высоких порядков.

Заметим, что если все величины p_s равны нулю, то уравнения (32.2) дают $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = \ldots = B_n^{(1)} = 0$ и, следовательно, разложение функций $x_s(x)$ начинаются членами не ниже второго порядка. Вообще, если во всех функциях $p_s x + X_s(x, 0, \ldots, 0)$ нет членов до k-го порядка включительно, но хотя бы в одной из этих функций имеются члены $(k+1)$-го порядка, то разложения (32.1) начнутся членами $(k+1)$-го порядка.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследуем устойчивость регулируемой системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\rho_s x_s + f(\sigma) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n - f(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{32.4}$$

где ρ_s и β_s — постоянные, причем ρ_s положительны, а $f(\sigma)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sigma f(\sigma) > 0. \tag{32.5}$$

В § 12 были установлены достаточные условия устойчивости положения равновесия $\sigma = x_1 = \ldots = x_n = 0$ рассматриваемой системы при любых начальных возмущениях и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (32.5). При этом было показано, что для выполнимости этих условий необходимо, чтобы удовлетворялось неравенство (12.9):

$$\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1 < 0. \tag{32.6}$$

Покажем сейчас[1]), что если $f(\sigma)$ является аналитической функцией, разложение которой начинается членами не ниже второго порядка, то условие (32.6) является необходимым для устойчивости. Более того, если требуется, чтобы равновесие было устойчиво при достаточно малых начальных возмущениях, то это условие является также и достаточным.

---

[1]) Лурье А. И., Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

В самом деле, пусть

$$f(\sigma) = a_m \sigma^m + a_{m+1}\sigma^{m+1} + \ldots,$$

где $m \geqslant 2$.

Из (32.5) вытекает, что число m является обязательно нечетным и $a_m > 0$.

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет n отрицательных корней $-\rho_s$ и один корень, равный нулю. Эта система первого приближения имеет первый интеграл

$$x = \sigma + \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n = \mathrm{const}.$$

Приняв его за новую переменную вместо σ, мы приведем уравнения (32.4) к виду (28.6):

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1\right) f\left(x - \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 - \ldots - \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n\right),$$

$$\frac{dx_s}{dt} = -\rho_s x_s + f\left(x - \frac{\beta_1}{\rho_1}x_1 - \ldots - \frac{\beta_n}{\rho_n}x_n\right).$$

Здесь

$$X^{(0)}(x) = \left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{\rho_n} - 1\right) f(x), \quad X_s^{(0)}(x) = f(x), \quad p_s = 0;$$

следовательно, разложения функций $X_s^{(0)}(x)$ начинаются членами того же порядка, что и разложение функции $X^{(0)}(x)$. Поэтому мы имеем дело с частным случаем, рассмотренным в § 30, и в дальнейших преобразованиях уравнений нет необходимости.

Для того чтобы движение было устойчиво, необходимо, чтобы младший член в разложении $X^{(0)}(x)$ был нечетного порядка и имел отрицательный коэффициент. Первое из этих условий выполняется, а второе приводит к неравенству (32.6).

П р и м е р 2[1]. Пусть предложена система дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx}{dt} = (3m-1)x^2 - (m-1)y^2 - (n-1)z^2 + \\ + (3n-1)yz - 2mzx - 2nxy = X(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + x + (x - y + 2z)(y + z - x) = -y + x + Y(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + x - (x + 2y - z)(y + z - x) = -z + x + Z(x, y, z).$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет корни -1, -1 и 0. Система уже приведена к виду (28.6). Усло-

[1]) Л я п у н о в А. М., Общая задача об устойчивости движения., Гостехиздат, 1950.

вия § 30 здесь не выполнены, и мы должны поэтому воспользоваться общим приемом предыдущего параграфа.

Полагая

$$-y+x+Y=-z+x+Z=0, \tag{32.7}$$

попытаемся удовлетворить этим уравнениям относительно y и z рядами, расположенными по степеням x. Коэффициенты при первой степени x будут, очевидно, равны единице, и мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} y(x)&=x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots, \\ z(x)&=x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{32.8}$$

Подставляя эти ряды в функцию X, получим, что член второго порядка в ней выпадает, и функция эта примет вид

$$X(x,\ y(x),\ z(x))=(n-2m+1)(A_2+B_2)x^3+Cx^4+Dx^5+\ldots \tag{32.9}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае необходимо подсчитать коэффициенты A_2 и B_2. Для их вычисления приравняем нулю коэффициенты при x^2 в уравнениях (32.7) после подстановки в них рядов (32.8). Тогда легко получим, что $A_2=2$, $B_2=-2$. Но тогда в выражении (32.9) обратится в нуль коэффициент при x^3 и необходимо поэтому вычислить C, а для этого придется вычислить коэффициенты A_3 и B_3. Приравнивая нулю в (32.7) коэффициенты при x^3, найдем: $A_3=B_3=-6$, после чего получим $C=4(5m-7n)$. Если этот коэффициент отличен от нуля, то невозмущенное движение неустойчиво, так как разложение функции (32.9) начинается четным порядком. Допустим, что $5m=7n$. Тогда, вычисляя A_4 и B_4, найдем $A_4=-30$, $B_4=30$, после чего получим $D=24(m-n)$. Этот коэффициент будет отрицательным при m и n отрицательных и положительным при m и n положительных. В первом случае невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а во втором случае оно неустойчиво.

Если $m=n=0$, то требуется рассмотреть дальнейшие приближения. Однако в этом случае справедливо тождество

$$2X=(z-2y-x)(-y+x+Y)+(y-2z-2x)(-z+x+Z),$$

следовательно, на основании (32.7) $X(x,\ y(x),\ z(x))=0$, и имеет место особенный случай.

Пример 3[1]). Пусть система уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=ax^2+bxy+cy^2=X(x,\ y),$$

$$\frac{dy}{dt}=-y+kx+lx^2+mxy+ny^2=-y+kx+Y(x,\ y),$$

где $a,\ b,\ c,\ k,\ l,\ m,\ n$ — постоянные.

[1]) Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

Составляя уравнение

$$-y+kx+lx^2+mxy+ny^2=0, \tag{32.10}$$

будем иметь:

$$y(x)=kx+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

и, подставляя этот ряд в $X(x, y)$, получим:

$$X(x, y(x))=A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots,$$

где

$$A_2=a+bk+ck^2, \quad A_3=(b+2ck)B_2,$$

$$A_4=(b+2ck)B_3+cB_2^2.$$

Для того чтобы движение было устойчивым, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$A_2=a+bk+ck^2=0. \tag{32.11}$$

Допустим, что это условие выполнено. Тогда необходимо рассмотреть коэффициент A_3, для определения которого нужно вычислить B_2. Вычисляя эту величину, найдем:

$$B_2=l+mk+nk^2. \tag{32.12}$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая, в зависимости от того, будет ли величина B_2 равна нулю или нет. Допустим сначала, что B_2 не нуль. Тогда если $b+2ck \neq 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при $B_2(b+2ck)<0$ и неустойчиво при $B_2(b+2ck)>0$. Если же $b+2ck=0$, то необходимо рассмотреть коэффициент A_4. Если $c \neq 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же $c=0$, то вследствие допущенных равенств будет $a=0$ и $b=0$. Следовательно, функция $X(x, y)$ обратится тождественно в нуль, и мы будем иметь дело с особенным случаем.

Допустим теперь, что $B_2=0$. Тогда на основании (32.12) уравнение (32.10) будет иметь решение $y=kx$, которое на основании (32.11) обратит функцию $X(x, y(x))$ тождественно в нуль. Следовательно, опять получится особенный случай.

§ 33. Особенный случай.

Рассмотрим теперь особенный случай. Допустим, следовательно, что при замене в функции $X(x, x_1, \ldots, x_n)$ величин x_s функциями $u_s(x)$, удовлетворяющими уравнениям (31.3), получится тождественно нуль. В этом случае при преобразовании уравнений (28.6) при помощи подстановки (31.4) мы будем иметь в полученных таким образом уравнениях (31.5) соотношения

$$\overline{X}^{(0)}(x, 0, \ldots, 0)=\overline{X}_s(x, 0, \ldots, 0)=0 \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{33.1}$$

Эти соотношения непосредственно вытекают из (31.6).

Но при выполнении соотношений (33.1) уравнения (31.5) имеют решение

$$x = c, \quad \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0,$$

где c — произвольная постоянная. Следовательно, уравнения (28.6) имеют решение

$$x = c, \quad x_s = u_s(c). \tag{33.2}$$

Тривиальное решение $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$ содержится в семействе (33.2) и соответствует нулевому значению постоянной c [1]).

Тривиальному решению соответствует исследуемое невозмущенное установившееся движение рассматриваемой динамической системы. Точно так же решению (33.2) соответствуют другие установившиеся движения рассматриваемой системы. Таким образом, в особенном случае исследуемое невозмущенное движение принадлежит к семейству установившихся движений.

Справедливо и обратное. Пусть предложенная динамическая система описывается уравнениями

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, \ldots, y_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{33.3}$$

где правые части не зависят явно от t, поскольку мы рассматриваем установившиеся движения. Допустим, что динамическая система имеет установившееся движение, т. е. что уравнения (33.3) имеют частное решение $y_i = a_i$, где a_i — постоянные. Эти постоянные определяются системой уравнений

$$Y_i(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{33.4}$$

Может случиться, что уравнения (33.4) имеют не изолированное решение, а целое семейство решений, зависящее от одного произвольного параметра λ, так что эти уравнения удовлетворяются при $y_i = a_i(\lambda)$, где $a_i(\lambda)$ — некоторые функции от λ. Следовательно, рассматриваемая динамическая система имеет однопараметрическое семейство установившихся движений. Примем одно из движений этого семейства, соответствующее, например, значению λ_0 параметра, за невозмущенное и составим дифференциальные уравнения возмущенного движения. Покажем, что при этом один корень характеристического уравнения будет обязательно равен нулю, и если остальные корни будут иметь отрицательные вещественные части, то рассматриваемый случай будет обязательно особенным.

Мы предполагаем при этом, как во всей этой главе, что уравнения (33.3) аналитичны в некоторой области и что исследуемое невозмущенное движение лежит в этой области.

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 521).

Искомые уравнения возмущенного движения получим, преобразуя (33.3) при помощи подстановки

$$x_i = y_i - a_i(\lambda_0).$$

Таким путем получаем:

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{i,\,n+1}x_{n+1} + X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{33.5}$$

где X_i — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка.

Рассмотрим уравнения

$$F_i = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{i,\,n+1}x_{n+1} + X_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{33.6}$$

Эти уравнения удовлетворяются при $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$. Если бы в этой точке функциональный определитель системы (33.6)

$$\left\{\frac{\partial(F_1, \ldots, F_{n+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+1})}\right\}_{x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,\,n+1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,\,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n+1,\,1} & q_{n+1,\,2} & \cdots & q_{n+1,\,n+1} \end{vmatrix} \tag{33.7}$$

был отличен от нуля, то никакого другого решения в окрестности начала координат уравнения (33.6) не имели бы. Однако в рассматриваемом случае это неверно. Действительно, поскольку дифференциальные уравнения (33.3) имеют решение $y_i = a_i(\lambda)$, то дифференциальные уравнения (33.5) должны иметь решение $x_i = a_i(\lambda) - a_i(\lambda_0)$. Поэтому уравнения (33.6) должны удовлетворяться при $x_i = a_i(\lambda) - a_i(\lambda_0)$. Это решение, зависящее от произвольного параметра, лежит при λ, достаточно близком к λ_0, в окрестности начала координат и переходит в тривиальное при $\lambda = \lambda_0$. Итак, решение $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ уравнений (33.6) не является изолированным, и поэтому определитель (33.7) необходимо равен нулю. Следовательно, характеристическое уравнение системы (33.5) имеет, по крайней мере, один нулевой корень.

Допустим, что остальные n корней характеристического уравнения отличны от нуля. Преобразуем систему (33.5) к виду (28.6):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{33.8}$$

где уравнение

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (33.9)$$

не имеет нулевого корня. При этом система (33.8) должна иметь решение $x_s=f_s(\lambda)$ $(s=1, 2, \dots, n)$, $x=f(\lambda)$, в которое переходит решение $x_i=a_i(\lambda)-a_i(\lambda_0)$ $(i=1, 2, \dots, n+1)$ системы (33.5). Здесь все функции f, f_s обращаются в нуль при $\lambda=\lambda_0$ и $f_s(\lambda)=a_s(\lambda)-a_s(\lambda_0)$ $(s=1, 2, \dots, n)$.

Следовательно, уравнения

$$\left.\begin{aligned} X(x, x_1, \dots, x_n)=0, \\ p_{s1}x_1+\dots+p_{sn}x_n+p_s x+X_s(x, x_1, \dots, x_n)=0 \\ (s=1, 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (33.10)$$

должны удовлетворяться решением $x=f(\lambda)$, $x_s=f_s(\lambda)$, содержащим тривиальное решение $x=x_1=\dots=x_n=0$.

Но так как $D(0)\neq 0$, то последние n уравнений (33.10) могут быть разрешены относительно x_s и дадут $x_s=u_s(x)$, где u_s — функции, рассмотренные в § 31. Подставляя эти функции в первое уравнение (33.10), мы получим одно уравнение для определения x. Это уравнение должно удовлетворяться при $x=f(\lambda)$, т. е. иметь бесчисленное множество решений, соответствующих различным значениям λ, что, очевидно, возможно лишь только тогда, когда $X(x, u_1(x), \dots, u_n(x))\equiv 0$. Если при этом все корни уравнения (33.9) имеют отрицательные вещественные части, то мы будем иметь особенный случай.

Примером динамической системы, имеющей семейство установившихся движений, зависящее от произвольного параметра, может служить твердое тело, вращающееся по инерции вокруг закрепленной точки. Уравнения движения такого тела

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0,$$

где p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости на оси координат, направленные по главным осям инерции в закрепленной точке, а A, B, C — моменты инерции относительно этих осей, имеют три семейства решений:

$$p=\omega, \quad q=r=0; \quad q=\omega, \quad r=p=0; \quad r=\omega, \quad p=q=0,$$

зависящих каждое от произвольной постоянной ω. Дифференциальные уравнения возмущенного движения, когда за невозмущенное движение принято одно из движений первого семейства, имеют вид (23.1)

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt}+(C-B)\,yz=0, \\ B\frac{dy}{dz}+(A-C)(x+\omega)\,z=0, \\ C\frac{dz}{dt}+(B-A)(x+\omega)\,y=0. \end{aligned}\right\} \qquad (33.11)$$

Характеристическое уравнение первого приближения действительно имеет один нулевой корень (см. § 22), и так как в переменных x, y, z рассматриваемому семейству движений отвечают нулевые значения переменных y и z, то уравнения (33.11) уже имеют форму (31.5). Действительно, правые части всех трех уравнений обращаются в нуль при $y=z=0$.

Необходимо, однако, указать, что вещественные части остальных двух корней характеристического уравнения не могут быть одновременно отрицательными, и потому уравнения (33.11) не принадлежат к типу сейчас рассматриваемых. Напомним, что полное решение задачи устойчивости для системы (33.11) дано в § 23.

§ 34. Решение задачи устойчивости в особенном случае.

Итак, в особенном случае невозмущенное движение принадлежит к семейству установившихся движений, которое в переменных x, x_s определяется формулами (33.2), а в переменных x, ξ_s, приводящих уравнения возмущенного движения к виду (31.5), — формулами

$$x=c, \quad \xi_1=\ldots=\xi_n=0. \qquad (34.1)$$

В особенном случае невозмущенное движение *всегда устойчиво*. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, не стремясь при $t\to\infty$ к невозмущенному движению, стремится все же к одному из установившихся движений вышеуказанного семейства. Другими словами, если пользоваться переменными x, ξ_s, то для всякого решения $x(t)$, $\xi_s(t)$ уравнений возмущенного движения, для которого начальные значения x^0 и ξ_s^0 достаточно малы, справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\alpha, \qquad \lim_{t\to\infty} \xi_s(t)=0,$$

где α — некоторая определенная постоянная (зависящая от взятого возмущенного движения).

Точно такими же свойствами, как и невозмущенное движение, обладают все движения семейства (34.1), достаточно близкие к невозмущенному.

Это предложение является частным случаем более общей теоремы Ляпунова, которую мы здесь и приводим[1]).

Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)\\
&\qquad\qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),\\
&\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)\\
&\qquad\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}\right\} \tag{34.2}
$$

где Y_i, X_s — ограниченные функции t при всех $t \geqslant 0$ и аналитические функции переменных y_i, x_s в некоторой не зависящей от t окрестности начала координат, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. При этом имеют место соотношения

$$Y_i(t,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ y_1,\ \ldots,\ y_k) = X_s(t,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ y_1,\ \ldots,\ y_k) = 0,$$

т. е. функции Y_i, X_s обращаются в нуль при равенстве нулю одних лишь переменных x_s.

Коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$
\begin{vmatrix}
p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n}\\
p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda
\end{vmatrix} = 0 \tag{34.3}
$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Уравнения (34.2) допускают частное решение:

$$y_1 = c_1,\ \ldots,\ y_k = c_k,\quad x_1 = \ldots = x_n = 0, \tag{34.4}$$

определяющее семейство установившихся движений, зависящее от k произвольных постоянных c_i и содержащее исследуемое невозмущенное движение. Если X_s и Y_i не содержат t и $k = 1$, то система (34.2) переходит в систему вида (31.5) в особенном случае.

Теорема. *Если уравнения возмущенного движения имеют вид* (34.2), *то невозмущенное движение устойчиво. При этом всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится с неограниченным возрастанием времени к одному из установившихся движений семейства* (34.4).

---

[1]) См. Малкин И. Г., Об устойчивости движения в смысле Ляпунова, Матем. сб., т. 3, вып. 1, 1938. Теорема Ляпунова обобщена нами в этой работе, из которой мы заимствуем приводимое здесь доказательство, совершенно отличающееся от доказательства Ляпунова.

Теми же свойствами обладают все движения семейства (34.4), если только численные значения параметров c_i достаточно малы.

Доказательство. Исследуем сначала невозмущенное движение.

По свойству корней уравнения (34.3) существует определенно-положительная квадратичная форма $V(x_1, \ldots, x_n)$ переменных x_s, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Преобразуем вторую группу уравнений (34.2) при помощи подстановки

$$\xi_s = e^{\alpha t} x_s, \tag{34.5}$$

где α — достаточно малая положительная постоянная. Преобразованная система примет вид

$$\begin{gathered}\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + (p_{ss} + \alpha)\xi_s + \ldots + p_{sn}\xi_n + \\ + e^{\alpha t} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k) \qquad (34.6) \\ (s = 1, 2, \ldots, n).\end{gathered}$$

Составим полную производную по времени функции $V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в силу уравнений (34.6). Будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \\ + e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k).\end{aligned}$$

Положительную постоянную α можно выбрать настолько малой, чтобы форма

$$-\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

была определенно-отрицательной. С другой стороны, так как функции X_s обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и по отношению к t они ограничены, то в области

$$t \geqslant 0, \quad |\xi_s| \leqslant \beta, \quad |y_i| \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, n) \tag{34.7}$$

будет выполняться неравенство

$$\left| e^{\alpha t} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} X_s(t, e^{-\alpha t}\xi_1, \ldots, e^{-\alpha t}\xi_n, y_1, \ldots, y_k) \right| < \\ < P\{|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|\}^2, \tag{34.8}$$

если только число β достаточно мало. При этом число β можно выбрать настолько малым, чтобы число P было сколь угодно малым. Это вытекает из того обстоятельства, что функции X_s не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка, и поэтому все члены левой части неравенства (34.8), имея по крайней мере второй порядок относительно ξ_s, будут иметь общий порядок не ниже третьего.

Поэтому на основании леммы 2 § 7 число β можно выбрать настолько малым, чтобы в области (34.7) функция $\frac{dV}{dt}$ принимала только отрицательные значения. Мы будем предполагать, что число β действительно выбрано указанным образом.

Установив это, рассмотрим произвольное решение $\xi_s(t)$, $y_i(t)$ уравнений возмущенного движения с начальными значениями (при $t=0$) ξ_s^0, y_i^0, удовлетворяющими неравенствам

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \quad |y_i^0| \leqslant \eta \quad (s=1, 2, \ldots, n;\ i=1, 2, \ldots, k), \tag{34.9}$$

где $\eta < \beta$.

Для этого решения условия

$$|\xi_s(t)| \leqslant \beta, \quad |y_i(t)| \leqslant \beta \tag{34.10}$$

будут выполняться по крайней мере для значений t, близких к начальному. Пусть t — такой момент времени, для которого условия (34.10) еще выполняются. Тогда во всем промежутке $(0, t)$ выражение $\frac{dV}{dt}$ будет отрицательным, и мы можем написать:

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = V(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) + \int_0^t \frac{dV}{dt}\,dt < V(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0). \tag{34.11}$$

Так как форма V определенно-положительна, то из (34.11) вытекает, что в рассматриваемом промежутке времени выполняются неравенства

$$|\xi_s(t)| < A \quad (s=1, 2, \ldots, n), \tag{34.12}$$

причем число A можно сделать сколь угодно малым подходящим выбором величин $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$, т. е. если число η в неравенствах (34.9) взять достаточно малым.

Из (34.12) вытекает, что в указанном промежутке времени переменные x_s удовлетворяют неравенствам

$$|x_s(t)| < Ae^{-\alpha t} \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{34.13}$$

Эти неравенства показывают, что для функций Y_i в указанном промежутке справедливы оценки

$$|Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))| < AMe^{-\alpha t}, \tag{34.14}$$

где M — некоторое положительное число, так как эти функции обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и ограничены относительно t.

Следовательно, первая группа уравнений (34.2), из которой вытекает

$$y_i(t) = y_i^0 + \int_0^t Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))\, dt,$$

дает:

$$|y_i(t)| < |y_i^0| + AM \int_0^t e^{-\alpha t} dt =$$
$$= |y_i^0| + \frac{AM(-e^{-\alpha t}+1)}{\alpha} < |y_i^0| + \frac{AM}{\alpha} \qquad (34.15)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Пусть теперь ε — произвольное сколь угодно малое число, которое мы во всяком случае будем считать меньше β. Выберем число η в неравенствах (34.9) таким образом, чтобы число A было меньше ε и чтобы правая часть неравенств (34.15) была также меньше ε. Тогда из (34.12) и (34.15) вытекает, что во всем промежутке времени, в течение которого выполняются неравенства (34.10), будут также выполняться неравенства

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \ |y_i(t)| < \varepsilon \ (s = 1, 2, \ldots, n; \ i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (34.16)$$

Но так как $\varepsilon < \beta$, то отсюда следует, что неравенства (34.10), а вместе с ними и неравенства (34.16) выполняются при всех значениях t. Действительно, если бы условия (34.10), которые в начальный момент времени выполняются со знаками неравенства, когда-нибудь нарушились, то в некоторый момент времени хотя бы одна из величин $|y_i(t)|$, $|\xi_s(t)|$ достигла бы значения β. Это, однако, невозможно, так как в этот момент времени условия (34.16) еще оставались бы в силе и, следовательно, все величины $|\xi_s(t)|$, $|y_i(t)|$ были бы меньше ε.

Итак, если в начальный момент времени выполняются условия (34.9), то в дальнейшем все время будут выполняться условия (34.16). Следовательно, невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным ξ_s, y_i. Но тогда оно и подавно устойчиво по отношению к переменным x_s, y_i.

Покажем теперь, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически приближается при $t = \infty$ к одному из движений семейства (34.4), т. е. что

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y_i(t) = \alpha_i, \qquad (34.17)$$

где α_i — некоторые постоянные.

Первая группа соотношений (34.17) непосредственно вытекает из (34.13). Для доказательства второй группы замечаем, что

$$\lim_{t\to\infty} y_i(t) = y_i^0 + \int_0^\infty Y_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))\,dt. \quad (34.18)$$

Интегралы, стоящие в правых частях (34.18), сходятся на основании оценок (34.14), которые остаются справедливыми, по доказанному, при всех значениях t. Отсюда непосредственно следует справедливость второй группы соотношений (34.17), причем величины α_i равны правым частям равенств (34.18).

Докажем теперь, что такими же свойствами, как и невозмущенное движение, обладают все движения семейства (34.4), если только величины $|c_i|$ достаточно малы. С этой целью, приняв какое-нибудь движение семейства (34.4) за невозмущенное, составим соответствующие дифференциальные уравнения возмущенного движения, положив в (34.2)

$$u_i = y_i - c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

где u_i — новые переменные. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= U_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k) + \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n, \\ \frac{dx_s}{dt} &= (p_{s1} + c_{s1})x_1 + \ldots + (p_{sn} + c_{sn})x_n + \\ &\qquad + \overline{X}_s(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_k), \end{aligned}\right\} \quad (34.19)$$

где U_i, $\overline{X}_s$ — функции такого же типа, как и Y_i, X_s, а величины α_{ij} и $c_{s\sigma}$ являются функциями от t и $c_1, \ldots, c_k$. По отношению к t функции α_{ij} и $c_{s\sigma}$ ограничены, а по отношению к $c_1, \ldots, c_k$ они аналитичны и обращаются в нуль при $c_1 = \ldots = c_k = 0$. Поэтому при $|c_i|$ достаточно малых величины α_{ij} и $p_{s\sigma}$ будут сколь угодно малы.

Уравнения (34.19) отличаются от уравнений (34.2) только тем, что в их правых частях добавились новые члены, линейные относительно x_s. Присутствие этих членов в правых частях первой группы уравнений (34.19) ничего не меняет в предыдущих рассуждениях, так как мы в них нигде не пользовались тем обстоятельством, что разложения функций Y_i не содержат линейных членов. Важно было только, чтобы функции Y_i обращались в нуль при равенстве нулю одних лишь переменных x_s, что для первой группы уравнений (34.19) по-прежнему выполняется.

Присутствие новых линейных относительно x_s членов во второй группе уравнений (34.19) также ничего не изменит, если только квадратичная форма

$$-\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + 2\alpha V + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n)$$

будет по-прежнему определенно-отрицательной, а это действительно будет иметь место, если только величины $|c_i|$ достаточно малы, что мы и будем предполагать.

Таким образом, к уравнениям (34.19) применимы все предыдущие рассуждения, и следовательно, при достаточно малых $|c_i|$ для движений (34.4) справедливы те же заключения, что и для первоначального невозмущенного движения $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$. Таким образом, теорема доказана.

Доказанная теорема полностью исчерпывает исследование особенного случая, вместе с ним исследование критического случая одного нулевого корня характеристического уравнения. В следующем параграфе мы начнем рассмотрение второго критического случая, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней при остальных корнях с отрицательными вещественными частями.

§ 35. Случай пары чисто мнимых корней. Приведение уравнений возмущенного движения к специальному виду.

Рассмотрим систему $(n+2)$-го порядка

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2}z_{n+2} + Z_j(z_1, \ldots, z_{n+2}) \qquad (35.1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n+2),$$

где Z_j — функции переменных $z_1, \ldots, z_{n+2}$, аналитические в некоторой окрестности начала координат, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. Мы будем предполагать, что характеристическое уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} q_{11} - \rho & q_{12} & \ldots & q_{1,\,n+2} \\ q_{21} & q_{22} - \rho & \ldots & q_{2,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n+2,\,1} & q_{n+2,\,2} & \ldots & q_{n+2,\,n+2} - \rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (35.2)$$

системы первого приближения

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2}z_{n+2} \qquad (35.3)$$

имеет пару чисто мнимых корней $\pm \lambda i$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Введем в уравнения (35.3) вместо двух каких-нибудь переменных z_j две новые переменные x и y при помощи подстановки:

$$x = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_{n+2} z_{n+2},$$
$$y = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n+2} z_{n+2},$$

где a_j и b_j — некоторые постоянные. Мы постараемся эти постоянные подобрать таким образом, чтобы два уравнения системы (35.3) приняли вид

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x.$$

Мы должны, следовательно, иметь:

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2} z_{n+2}) = -\lambda \sum_{j=1}^{n+2} b_j z_j,$$
$$\sum_{j=1}^{n+2} b_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2} z_{n+2}) = \lambda \sum_{j=1}^{n+2} a_j z_j.$$

Приравнивая в обеих частях этих равенств коэффициенты при z_k, мы получим для определения a_j и b_j систему $2n+4$ линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &q_{1k} a_1 + q_{2k} a_2 + \ldots + q_{n+2,\,k} a_{n+2} + \lambda b_k = 0, \\ &q_{1k} b_1 + q_{2k} b_2 + \ldots + q_{n+2,\,k} b_{n+2} - \lambda a_k = 0 \\ &\qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2). \end{aligned}\right\} \tag{35.4}$$

Эту систему легко привести к системе из $n+2$ уравнений, если ввести вместо неизвестных a_j и b_j комплексные неизвестные $c_j = a_j + ib_j$. Действительно, умножая уравнения второй группы системы (35.4) на i и складывая с соответствующими уравнениями первой группы, получим однородную систему из $n+2$ уравнений

$$q_{1k} c_1 + q_{2k} c_2 + \ldots + q_{n+2,\,k} c_{n+2} - \lambda i c_k = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+2).$$

Определитель этой системы, равный $D(\lambda i)$, обращается в нуль, так как уравнение (35.2) имеет, по условию, корень λi. Следовательно, эта система допускает нетривиальное решение для c_j. Выделяя в нем вещественные и мнимые части, мы получим решение системы (35.4).

Приняв найденные таким образом переменные x и y вместо двух каких-нибудь переменных z_j и обозначив остальные переменные z_j через x_j, мы приведем систему (35.3) к виду

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x,$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + p_s x + q_s y \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где p_{sj}, p_s, q_s — некоторые постоянные. Если указанную подстановку сделать в уравнениях (35.1), то они примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (35.5)$$

где X, Y, X_s — функции такого же вида, как и Z_j.

Полученный вид дифференциальных уравнений возмущенного движения будет исходным для дальнейшего исследования.

Так как характеристическое уравнение любой линейной системы не изменяется при линейном преобразовании, то характеристическое уравнение линейной части системы (35.5) должно совпадать с характеристическим уравнением (35.2). Но характеристическое уравнение линейной части системы (35.5) распадается на уравнение $\rho^2 + \lambda^2 = 0$, дающее корни $\pm \lambda i$, и уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \rho & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (35.6)$$

Следовательно, все корни уравнения (35.6) имеют отрицательные вещественные части.

§ 36. Системы второго порядка. Первый способ решения задачи.

Прежде чем исследовать общий случай, рассмотрим подробно частный случай, когда $n = 0$ и когда, следовательно, дифференциальные уравнения возмущенного движения образуют систему второго порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y), \quad (36.1)$$

где X и Y начинаются членами не ниже второго порядка.

В рассматриваемом случае можно не только исследовать характер невозмущенного движения, но и дать общую картину поведения интегральных кривых уравнений (36.1) в окрестности начала координат[1]).

---

[1]) Вид интегральных кривых, определяемых уравнениями (36.1), изучил впервые Пуанкаре. (См. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947).

С этой целью введем в рассмотрение полярные координаты r и ϑ при помощи подстановки

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta. \tag{36.2}$$

Уравнения (36.1) примут при этом вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= X(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\cos\vartheta + Y(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\sin\vartheta = \\ &\qquad\qquad = rR(r,\ \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{r}\{Y(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\cos\vartheta - \\ &\qquad - X(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\sin\vartheta\} = \lambda + \theta(r,\ \vartheta),\end{aligned}\right\} \tag{36.3}$$

где $R(r,\ \vartheta)$, $\theta(r,\ \vartheta)$ — функции переменных r и ϑ, разлагающиеся в ряды по степеням r, сходящиеся при r, достаточно малом, и обращающиеся в нуль при $r=0$. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями ϑ периода 2π, причем каждый из них является простым полиномом относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ и может быть поэтому представлен конечной суммой синусов и косинусов целых кратностей ϑ.

Для получения уравнения интегральных кривых исключим из (36.3) время t. Будем иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{Rr}{\lambda+\theta} = r^2R_2(\vartheta) + r^3R_3(\vartheta) + \ldots \tag{36.4}$$

Ряд, стоящий в правой части уравнения (36.4), сходится при r достаточно малом, причем коэффициенты $R_2(\vartheta)$, $R_3(\vartheta)$, ... также представляют собой полиномы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Уравнение (36.4) имеет тривиальное решение $r=0$. Следовательно, одной из интегральных кривых является начало координат. Так как правая часть уравнения (36.4) аналитична в окрестности начала координат, то через каждую точку этой окрестности на основании теоремы существования решений дифференциальных уравнений проходит одна и только одна интегральная кривая. Отсюда следует, что ни одна интегральная кривая, выходящая из какой-нибудь точки окрестности начала координат, не пересекает этой точки.

Из аналитичности правой части уравнения (36.4) вытекает также, что любое решение $r = r(\vartheta,\ c)$ этого уравнения, определяемое начальным условием

$$r(0,\ c) = c, \tag{36.5}$$

может быть разложено в ряд по степеням c:

$$r(\vartheta,\ c) = r_1(\vartheta)\,c + r_2(\vartheta)\,c^2 + \ldots, \tag{36.6}$$

сходящийся, если c достаточно мало. Радиус сходимости этого ряда зависит от интервала изменения ϑ. Но как бы велик ни был этот интервал, для него всегда найдется такое достаточно малое число γ, что ряд (36.6) будет сходиться при всех $|c| \leqslant \gamma$. Мы будем предполагать число γ настолько малым, чтобы ряд (36.6) сходился при $|\vartheta| \leqslant 2\pi$.

Для вычисления коэффициентов r_l подставим ряд (36.6) в обе части уравнения (36.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях c. Пусть F_l обозначает коэффициент при c^l в разложении по степеням c правой части уравнения (36.4) после подстановки в нее (36.6), так что имеем тождественно:

$$\{r^2R_2(\vartheta)+r^3R_3(\vartheta)+\ldots\}_{r=r_1(\vartheta)c+r_2(\vartheta)c^2+\ldots}= \\ =F_2c^2+F_3c^3+\ldots \qquad (36.7)$$

Функции F_l представляют собой, очевидно, полиномы от r_2, $r_3, \ldots, r_{l-1}$ с коэффициентами, зависящими от $R_2, R_3, \ldots, R_l$ и являющимися, следовательно, периодическими функциями ϑ периода 2π (полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$). В частности, имеем:

$$F_2=R_2r_1^2,\quad F_3=R_3r_1^3+2R_2r_1r_2.$$

Уравнения, определяющие функции r_l, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_1}{d\vartheta}=0,\quad \frac{dr_2}{d\vartheta}=R_2r_1^2=F_2,\quad \frac{dr_3}{d\vartheta}=R_3r_1^2+2R_2r_1r_2=F_3,\\ &\frac{dr_l}{d\vartheta}=F_l \qquad (l=4,\ 5,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (36.8)$$

Кроме того, из (36.5) имеем начальные условия

$$r_1(0)=1,\quad r_2(0)=r_3(0)=\ldots=0. \qquad (36.9)$$

Следовательно,

$$r_1=1,\quad r_2=\int_0^\vartheta R_2\,d\vartheta,\quad r_3=\int_0^\vartheta (R_3+2R_2r_2)\,d\vartheta,\quad \ldots,\quad r_l=\int_0^\vartheta F_l\,d\vartheta. \qquad (36.10)$$

Таким образом, все функции $r_l(\vartheta)$ последовательно определяются простыми квадратурами. Для функции $r_2(\vartheta)$ мы имеем квадратуру периодической функции. Отметим здесь одно общее свойство такого рода квадратур, которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $f(\vartheta)$ — произвольная непрерывная периодическая функция какого-нибудь периода ω. Тогда

$$F(\vartheta)=\int_0^\vartheta f(\vartheta)\,d\vartheta=g\vartheta+\varphi(\vartheta), \qquad (36.11)$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция того же периода, а g — постоянная, определяемая формулой

$$g = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{36.12}$$

Эта формула совершенно очевидна, если $f(\vartheta)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(\vartheta) = g + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{2\pi n}{\omega}\vartheta + B_n\sin\frac{2\pi n}{\omega}\vartheta\right),$$

где g определяется формулой (36.12).

Действительно, в этом случае мы имеем:

$$F(\vartheta) = g\vartheta + \frac{\omega}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\sin\frac{2\pi n}{\omega}\vartheta - \frac{B_n}{n}\cos\frac{2\pi n}{\omega}\vartheta\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость (36.11) для рассматриваемого случая. Но и в общем случае эта формула выводится без всякого труда, на чем мы не будем останавливаться.

Установив это, рассмотрим коэффициент r_2. Так как функция R_2 периодическая, то r_2 будет либо иметь вид (36.11), либо будет периодической, если соответствующий коэффициент g обращается в нуль. Во втором случае функция $R_3 + 2R_2r_2$ будет периодической, и поэтому коэффициент r_3 либо будет иметь вид (36.11), либо получится периодическим. Продолжая таким образом дальше, мы видим, что могут представиться два случая: либо все коэффициенты r_i, как бы велик ни был индекс i, являются периодическими функциями периода 2π, либо среди этих коэффициентов имеются непериодические. При этом, если r_m является первым непериодическим коэффициентом, то

$$r_m = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \quad g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_m\,d\vartheta, \tag{36.13}$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция периода 2π.

Допустим сначала, что все функции r_j являются периодическими. В этом случае решение (36.6) будет периодическим при всех значениях c (лежащих в области сходимости ряда). Следовательно, $r(2\pi, c) = r(0, c)$, и все интегральные кривые, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, замкнуты и окружают эту точку (рис. 8). Следуя Пуанкаре, начало координат называют в этом случае *центром*.

Допустим теперь, что не все коэффициенты r_l получаются периодическими. Пусть r_m — первый непериодический коэффициент в ряду $r_2, r_3, \ldots$, так что для него справедлива формула (36.13), где $g \neq 0$,

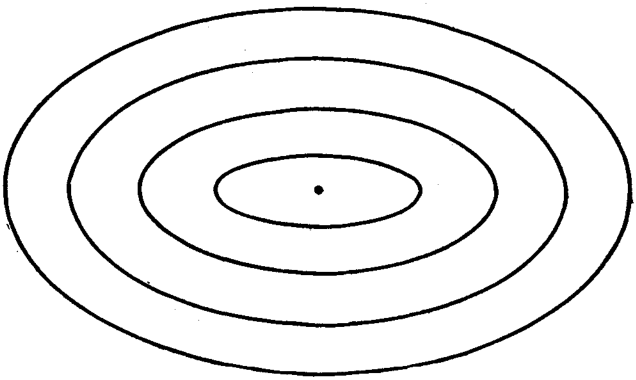

Рис. 8.

а все коэффициенты $r_2, r_3, \ldots, r_{m-1}$ периодичны. Преобразуем уравнение (36.4) при помощи подстановки

$$r = \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m \varphi(\vartheta) \equiv$$
$$\equiv \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m r_m(\vartheta) - g\vartheta\rho^m. \quad (36.14)$$

На основании (36.7) будем иметь:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) + \rho^2 \frac{dr_2}{d\vartheta} + \ldots + \rho^m \frac{dr_m}{d\vartheta} - g\rho^m =$$
$$= \rho^2 F_2 + \ldots + \rho^m F_m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots,$$

или, принимая во внимание (36.8),

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) = g\rho^m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots$$

Отсюда находим:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = g\rho^m + R^*_{m+1}(\vartheta)\rho^{m+1} + \ldots = \rho^m\left(g + \rho R^*_{m+1}(\vartheta) + \ldots\right), \quad (36.15)$$

где R^*_{m+n} — периодические функции ϑ периода 2π (так как коэффициенты преобразования (36.14) периодичны).

Из полученного уравнения вытекает, что в достаточно малой окрестности начала координат производная $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком g. Если $g < 0$, то при $\vartheta \to +\infty$ функция $\rho(\vartheta)$ непрерывно убывает и стремится к нулю. По характеру подстановки (36.14) то же самое будет иметь место и для радиуса-вектора r. Следовательно, все интегральные кривые, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, будут спиралями, делающими вокруг начала координат бесчисленное множество оборотов, асимптотически приближаясь к этой точке наподобие логарифмических спиралей (рис. 9). По терминологии Пуанкаре начало координат в этом случае называется *фокусом*.

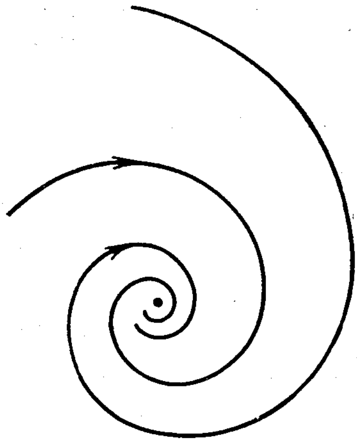

Рис. 9.

То же самое будет, очевидно, иметь место и при $g > 0$. Только в этом случае спирали будут приближаться к началу координат не при $\vartheta \to +\infty$, а при $\vartheta \to -\infty$.

Обращаемся теперь к вопросу устойчивости. Очевидно, что в случае центра невозмущенное движение устойчиво, так как r, а вместе с ним x и y будут оставаться сколь угодно малыми, если они были достаточно малы в начальный момент времени. Устойчивость при этом не будет асимптотической.

Рассмотрим теперь случай фокуса. Второе уравнение (36.3) показывает, что в достаточно малой окрестности начала координат, когда величина θ (обращающаяся в нуль при $r = 0$) меньше по модулю величины λ, производная $\frac{d\vartheta}{dt}$ будет больше некоторого положительного числа. Следовательно, с возрастанием t величина ϑ будет также возрастать, причем при $t \to \infty$ она будет возрастать неограниченно, если только при этом интегральная кривая остается в достаточно малой окрестности начала координат. Последнее будет как раз иметь место при $g < 0$. В этом случае при возрастании ϑ интегральные кривые приближаются к началу координат, стремясь к нему асимптотически при $\vartheta = +\infty$. Следовательно, при $g < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

При $g > 0$ интегральные кривые при возрастании ϑ, а следовательно, и t, удаляются от начала координат. Любая интегральная кривая покидает некоторую фиксированную не зависящую от начальных условий окрестность начала координат, как бы близка от него ни была точка, из которой она в начальный момент выходит. Мы имеем, очевидно, полную неустойчивость.

Итак, в случае центра невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. В случае фокуса невозмущенное движение асимптотически устойчиво при $g < 0$ и неустойчиво при $g > 0$.

Таким образом, для решения задачи устойчивости в интересующем нас случае мы можем поступать следующим образом:

1) Преобразованием (36.2) и исключением t приводим уравнения возмущенного движения (36.1) к одному уравнению (36.4).

2) Этому уравнению пытаемся удовлетворить рядом

$$r = c + c^2 r_2(\vartheta) + c^3 r_3(\vartheta) + \ldots,$$

где $r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0$. Подставляя этот ряд в (36.4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим уравнения, определяющие последовательно все функции $r_i(\vartheta)$ при помощи квадратур. При этом может оказаться, что либо все коэффициенты r_i являются периодическими, либо среди них имеются непериодические.

В первом случае невозмущенное движение будет устойчивым, но не асимптотически.

Во втором случае первый непериодический коэффициент в ряду $r_2, r_3, \ldots$, пусть это будет r_m, будет необходимо иметь вид (36.13). Тогда, если $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $g < 0$, то оно устойчиво и притом асимптотически.

Определение коэффициентов r_i приводится, как мы видели, к вычислению квадратур. Последняя задача не представляет никаких трудностей, так как подинтегральные выражения всегда представляют собой полиномы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. И если мы имеем дело с тем случаем, когда среди коэффициентов r_i имеются непериодические, то мы всегда конечным числом простых действий придем к решению задачи устойчивости. Правда, вычисления могут оказаться очень громоздкими, если первый непериодический коэффициент r_m имеет слишком большой индекс. Однако практически такие случаи встречаются весьма редко.

Гораздо сложнее обстоит дело в случае, когда все коэффициенты r_i оказываются периодическими, т. е. когда начало координат является центром. В этом случае мы имеем бесчисленное множество условий, и мы не можем непосредственной проверкой убедиться в их выполнимости. Поэтому усилия исследователей были направлены к установлению некоторых общих признаков, которые позволяли бы, не прибегая к вычислению коэффициентов r_i, а непосредственно по виду уравнений (36.1) судить о том, имеем ли мы дело с центром или фокусом. В этом направлении достигнуты некоторые успехи. Так, например, задача полностью разрешена для того случая, когда уравнения (36.1) не имеют членов выше второго порядка. Однако полного решения задачи до сих пор не получено. Мы не имеем, однако, возможности останавливаться подробнее на этом вопросе [1]). Отме-

---

[1]) Отсылаем интересующихся к книге: Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений (изд. 2-е, Гостехиздат, 1949), в которой дана и библиография вопроса. См. также примечание в конце книги (стр. 521).

тим здесь, однако, одно общее положение, имеющее важное значение.

Система первого приближения для уравнений (36.1) всегда имеет первый интеграл вида $x^2+y^2=\text{const}$. Может случиться, что система (36.1) с учетом нелинейных членов также имеет первый интеграл вида

$$F(x,\ y)=x^2+y^2+f(x,\ y)=\text{const.},\tag{36.16}$$

где $f(x,\ y)$ — аналитическая в окрестности начала координат функция от x и y, разложение которой по степеням этих переменных начинается членами не ниже третьего порядка. В этом случае начало координат будет центром. Действительно, интеграл (36.16) представляет уравнение интегральных кривых в окрестности начала координат, которые все будут замкнуты, так как функция $F(x,\ y)$ знакоопределенна.

Ляпунов доказал, что справедливо также обратное предложение: если начало координат для уравнений (36.1) является центром, то эти уравнения имеют первый интеграл вида (36.16).

Отметим также одно важное различие, которое получается в характере задачи в зависимости от того, имеем ли мы дело с фокусом или центром.

В выражение функции $F_l(\vartheta)$, определяющей коэффициент r_l и зависящей, как мы видели, от $r_2,\ \ldots,\ r_{l-1},\ R_1,\ \ldots,\ R_l$, входят лишь те члены правой части уравнения (36.4), которые имеют порядок, не превышающий l, а эти члены в свою очередь, как это видно из (36.3), зависят лишь от тех членов уравнений (36.1), которые также имеют порядок, не превышающий l. Поэтому если r_m является первым непериодическим коэффициентом в ряду $r_2,\ r_3,\ \ldots$, то он останется первым непериодическим коэффициентом, как бы мы ни изменяли члены выше m-го порядка в уравнениях (36.1). Следовательно, коэффициент g, знак которого определяет устойчивость или неустойчивость, также не зависит от членов выше m-го порядка в уравнениях (36.1). Другими словами, в случае фокуса устойчивость или неустойчивость определяется конечным числом членов в уравнениях возмущенного движения. Члены достаточно высокого порядка никакого значения для задачи не имеют.

Иначе обстоит дело в случае центра. В этом случае, как бы велико ни было число N, мы можем, очевидно, члены N-го порядка в уравнениях (36.1) изменить таким образом, чтобы функция r_N вышла непериодической и чтобы соответствующий коэффициент g был по желанию положительным или отрицательным. Следовательно, в случае центра членами сколь угодно высоких порядков в уравнениях возмущенного движения можно распорядиться таким образом, чтобы получить по желанию как асимптотическую устойчивость, так и неустойчивость.

Из этого следует, что если нам при исследовании уравнений вида (36.1) удалось каким-нибудь путем убедиться, что изменением членов сколь угодно высоких порядков можно добиться, чтобы невозмущенное движение было по желанию асимптотически устойчивым или неустойчивым, то начало координат является обязательно центром.

Когда начало координат является центром, то ряд (36.6) для r, представляющий общее решение уравнений (36.1), будет периодическим периода 2π. Подставляя это выражение для r в (36.2), мы получим решение уравнений (36.1), которое также будет периодическим по отношению к вспомогательному переменному ϑ с периодом 2π. Покажем, что если мы снова перейдем к переменной t и выразим через нее x и y, то полученные таким путем функции времени будут тоже периодическими, но период будет зависеть, и притом аналитически, от c.

С этой целью обращаемся ко второму уравнению (36.3), определяющему ϑ как функцию t. Подставляя в него выражение (36.6) для r, получим:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda\left[1 + \theta_1^*(\vartheta)\,c + \theta_2^*(\vartheta)\,c^2 + \ldots\right],$$

где $\theta_i^{(*)}(\vartheta)$ — некоторые периодические функции ϑ. Полагая, что ϑ и t одновременно обращаются в нуль, получим:

$$\lambda t(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{1 + \theta_1^* c + \ldots} = \int_0^{\vartheta} (1 + \theta_1(\vartheta)\,c + \theta_2(\vartheta)\,c^2 + \ldots)\,d\vartheta, \qquad (36.17)$$

где $\theta_i(\vartheta)$ — также периодические функции ϑ.

Из (36.17) получаем:

$$\lambda t(\vartheta + 2\pi) - \lambda t(\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} (1 + \theta_1 c + \theta_2 c^2 + \ldots)\,d\vartheta,$$

или, учитывая периодичность функций $\theta_i(\vartheta)$,

$$t(\vartheta + 2\pi) - t(\vartheta) = T, \qquad (36.18)$$

где T — постоянная, определяемая формулой

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots), \qquad h_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta_i(\vartheta)\,d\vartheta. \qquad (36.19)$$

Соотношение (36.18) показывает, что при изменении t на постоянную величину T величина ϑ изменяется на 2π и, следовательно, величины x и y не изменяются. Следовательно, x и y являются периодическими функциями времени с периодом T, зависящим аналитически от c.

Полученное таким путем периодическое решение уравнений (36.1) будет содержать произвольную постоянную c. Эта произвольная постоянная является, по условию, начальным значением величины r. Но так как отсчет полярного угла ϑ выбран таким образом, что он обращается в нуль при $t=0$, то из (36.2) вытекает, что c является вместе с тем начальным значением величины x. Начальное значение величины y равно при этом нулю. Таким образом, полученное периодическое решение уравнений (36.1) характеризуется начальными условиями

$$x(0)=c, \quad y(0)=0, \tag{36.20}$$

где произвольная постоянная c подчинена единственному условию, что она численно достаточно мала.

Полученное периодическое решение, содержащее только одну произвольную постоянную, является частным решением уравнений (36.1). Но учитывая, что эти уравнения не зависят явно от t, мы можем получить их общее решение, зависящее от двух произвольных постоянных, если в указанном периодическом решении мы заменим t на $t+h$, где h — произвольная постоянная.

Практический способ вычисления вышеуказанного периодического решения (когда оно существует, т. е. в случае центра) будет указан в § 38. Сейчас мы рассмотрим примеры решения задачи устойчивости для уравнений типа (36.1).

Пример 1. Уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+\beta x^2+\gamma x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \tag{36.21}$$

где α, β, γ — постоянные.

Записав это уравнение в виде системы

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3, \tag{36.22}$$

положим:

$$x=r\cos\vartheta, \quad y=r\sin\vartheta.$$

Уравнения (36.22) примут вид

$$\frac{dr}{dt}=-\beta r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta+(\alpha\sin^4\vartheta-\gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta)r^3,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=1-\beta\cos^3\vartheta\cdot r+(\alpha\sin^3\vartheta\cos\vartheta-\gamma\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta)r^2.$$

Исключая t, будем иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-\beta\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cdot r^2+(\alpha\sin^4\vartheta-\gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta-\beta^2\cos^5\vartheta\sin\vartheta)r^3+\ldots$$

Этому уравнению стараемся удовлетворить рядом

$$r=c+r_2c^2+r_3c^3+\ \ldots$$

при условии $r_2(0)=r_3(0)= \ldots =0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получим:

$$\frac{dr_2}{d\vartheta}=-\beta\cos^2\vartheta\sin\vartheta,$$

$$\frac{dr_3}{d\vartheta}=\alpha\sin^4\vartheta-\{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta+\beta^2\cos^5\vartheta+2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta,$$

откуда

$$r_2=\beta\left(\frac{\cos^3\vartheta}{3}-\frac{1}{3}\right),$$

$$r_3=\alpha\int_0^\vartheta\sin^4\vartheta\,d\vartheta-\int_0^\vartheta\{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta+\beta^2\cos^5\vartheta+2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Функция r_2 вышла периодической. Функция же r_3 имеет, очевидно. вид

$$r_3=g\vartheta+f(\vartheta),$$

где $f(\vartheta)$ — периодическая функция, а g определяется формулой

$$g=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta.$$

Следовательно, при $\alpha>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\alpha<0$ оно устойчиво асимптотически.

Пример 2. Уравнение (36.21) является частным случаем более общего уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1}+F\left[x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

исследованного А. М. Ляпуновым. Здесь n — целое положительное число, а F — аналитическая функция своих аргументов, не содержащая членов ниже второго порядка относительно x и $\frac{dx}{dt}$.

Полагая

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=-\frac{dx}{dt}=r\sin\vartheta,$$

олучим:

$$\frac{dr}{dt}=\alpha\sin^{2n+2}\vartheta\cdot r^{2n+1}-F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=1+\alpha\sin^{2n+1}\vartheta\cos\vartheta\cdot r^{2n}-\frac{1}{r}F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta.$$

Допустим сначала, что $\alpha=0$. Тогда, исключая t, получим:

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-\frac{F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)}{1-\frac{1}{r}F(r\cos\vartheta,\ r^2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta}\sin\vartheta=$$
$$=f_2(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^2+f_3(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^3+\ldots,\qquad(36.23)$$

где $f_i(\vartheta)$ являются, очевидно, полиномами относительно только $\cos\vartheta$. Ищем решение уравнения (36.23) в виде ряда

$$r=c+r_2(\vartheta)c^2+\ldots$$

при условии $r_2(0)=r_3(0)=\ldots=0$. Для коэффициентов $r_i(\vartheta)$ получаем уравнения

$$\frac{dr_2}{d\vartheta}=f_2(\vartheta)\sin\vartheta,\quad \frac{dr_3}{d\vartheta}=[f_3(\vartheta)+2f_2(\vartheta)r_2(\vartheta)]\sin\vartheta$$

и вообще

$$\frac{dr_i}{d\vartheta}=F_i(\vartheta)\sin\vartheta\qquad(i=3,\ 4,\ \ldots),\qquad(36.24)$$

где $F_i(\vartheta)$ — полиномы относительно $r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_{i-1}$, коэффициенты которых являются полиномами относительно только $\cos\vartheta$.

Функция r_2 получается, очевидно, периодической и притом полиномом относительно $\cos\vartheta$. Но тогда такой же будет и функция r_3 и все остальные функции r_i, в чем убеждаемся методом индукции. Действительно, если все функции $r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_{i-1}$ вышли полиномами относительно $\cos\vartheta$, то такой же получится и функция $F_i(\vartheta)$, а следовательно, и функция r_i.

Таким образом, при $\alpha=0$ мы имеем дело с центром, и невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Допустим теперь, что $\alpha\neq0$. Тогда будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dr}{d\vartheta}=f_2(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^2+\ldots+f_{2n}(\vartheta)\sin\vartheta\cdot r^{2n}+$$
$$+\{f_{2n+1}(\vartheta)\sin\vartheta+\alpha\sin^{2n+2}\vartheta\}\,r^{2n+1}+\ldots,$$

где $f_2(\vartheta),\ f_3(\vartheta),\ \ldots,\ f_{2n+1}(\vartheta)$ — те же функции, что и в (36.23). Для коэффициентов r_i получаем теперь

$$\frac{dr_2}{d\vartheta}=F_2(\vartheta)\sin\vartheta,\ \ldots,\quad \frac{dr_{2n}}{d\vartheta}=F_{2n}(\vartheta)\sin\vartheta,$$
$$\frac{dr_{2n+1}}{d\vartheta}=F_{2n+1}(\vartheta)\sin\vartheta+\alpha\sin^{2n+2}\vartheta,$$

где $F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_n$ — те же функции, что и в (36.24). Следовательно, коэффициенты $r_2,\ \ldots,\ r_{2n}$ получаются периодическими, а для коэффициента r_{2n+1} будем иметь:

$$r_{2n+1} = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \quad g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n+2}\vartheta\, d\vartheta,$$

где $\varphi(\vartheta)$ — периодическая функция.

Следовательно, при $\alpha < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ оно неустойчиво.

§ 37. Системы второго порядка. Второй способ решения задачи.

Изложим второй способ решения задачи устойчивости в интересующем нас случае, предложенный А. М. Ляпуновым. Этот способ основан на непосредственном построении для системы (36.1) функции Ляпунова.

Рассмотрим сначала следующую задачу. Пусть $u_m(x, y)$ — заданная форма m-го порядка переменных x и y. Будем искать другую форму $v_m(x, y)$ того же порядка, производная которой по времени, составленная в силу линейной части системы (36.1), т. е. уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x, \tag{37.1}$$

равнялась бы форме u_m. Другими словами, найдем форму v_m, удовлетворяющую уравнению

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y} - y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = u_m. \tag{37.2}$$

Задача эта является частным случаем задачи, рассмотренной нами в общем виде в § 20. Согласно полученным там результатам, поступаем следующим образом.

Полагая

$$v_m = a_1x^m + a_2x^{m-1}y + \ldots + a_{m+1}y^m,$$
$$u_m = b_1x^m + b_2x^{m-1}y + \ldots + b_{m+1}y^m$$

и приравнивая в (37.2) коэффициенты при подобных членах, мы получим систему линейных уравнений

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{i,m+1}a_{m+1} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{37.3}$$

определяющих коэффициенты a_j. Здесь A_{ij} — некоторые постоянные, которые нам нет необходимости выписывать.

Система (37.3) будет иметь решение и притом единственное, если определитель этой системы будет отличен от нуля, или, что то же самое, если уравнение

$$D_m(\rho)=\begin{vmatrix} A_{11}-\rho & A_{12} & \dots & A_{1,\,m+1} \\ A_{21} & A_{22}-\rho & \dots & A_{2,\,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m+1,\,1} & A_{m+1,\,2} & \dots & A_{m+1,\,m+1}-\rho \end{vmatrix} \tag{37.4}$$

не будет иметь нулевого корня.

Но на основании теоремы 1 § 20 все корни уравнения (37.4) определяются формулой

$$\rho=(m_1-m_2)\,i\lambda, \tag{37.5}$$

где m_1 и m_2 — любые целые неотрицательные числа (в частности, нули), связанные соотношением

$$m_1+m_2=m. \tag{37.6}$$

Если m — число нечетное, то не существует никакой комбинации для чисел m_1 и m_2, связанных соотношением (37.6), при которой величина (37.5) обращалась бы в нуль. Следовательно, при m нечетном определитель системы (37.3) отличен от нуля, эта система имеет единственное решение, которое определяет одну и только одну форму v_m, удовлетворяющую уравнению (37.2).

Допустим теперь, что m — число четное. В этом случае мы можем удовлетворить соотношению (37.6), полагая $m_1=m_2=\frac{m}{2}$. При такой комбинации, и очевидно, только при такой, выражение (37.5) обращается в нуль. Следовательно, уравнение (37.4) имеет один и только один нулевой корень, и определитель системы (37.3) обращается в нуль. Однако хотя бы один из миноров m-порядка этого определителя отличен от нуля. Действительно, если бы все указанные миноры равнялись нулю, то нулевой корень уравнения (37.4) был бы, по крайней мере, двукратным, так как он обращал бы в нуль не только $D_m(\lambda)$, но и $\frac{dD_m(\lambda)}{d\lambda}$.

Так как определитель системы (37.3) обращается в нуль, то эта система, вообще говоря, неразрешима. В этом случае левые части уравнений (37.3) связаны между собой линейным соотношением, т. е. существует такая система чисел $M_1, \dots, M_{m+1}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что, умножая соответственно левые части (37.3) на эти числа и складывая их, мы получим тождественно нуль. Для того чтобы система (37.3) была разрешима, необходимо, чтобы и ее правые части были связаны тем же самым линейным соотношением, т. е. чтобы выполнялось тождество

$$M_1b_1+M_2b_2+\dots+M_{m+1}b_{m+1}=0. \tag{37.7}$$

Этого условия будет также и достаточно для разрешимости системы (37.3), так как не все миноры m-го порядка определителя $D_m(0)$ равны нулю, и поэтому левые части этой системы связаны только одним линейным соотношением.

Таким образом, при m четном существует тогда и только тогда форма v_m, удовлетворяющая уравнению (37.2), когда коэффициенты формы u_m связаны соотношением (37.7).

В связи с этим при m четном изменим несколько постановку задачи, а именно: будем искать форму v_m таким образом, чтобы удовлетворялось не уравнение (37.2), а уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y}-y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right)=u_m+G(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{37.8}$$

где G — некоторая постоянная, которая должна быть подобрана таким образом, чтобы это уравнение имело решение.

Система (37.3) перейдет теперь в систему

$$A_{i1}a_1+\ldots+A_{i,m+1}a_{m+1}=b_i+k_iG,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$ — коэффициенты формы

$$(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}},$$

а условие ее разрешимости примет вид

$$\sum_{i=1}^{m+1} M_ib_i+G\sum_{i=1}^{m+1} k_iM_i=0. \tag{37.9}$$

Это уравнение однозначно определяет постоянную G. Для действительного ее вычисления нет необходимости составлять уравнение (37.9). Гораздо проще непосредственно исходить из уравнения (37.8). Для этого допустим, что постоянная G и форма v_m уже вычислены. Подставляя их в (37.8), получим тождество, которое, следовательно, должно удовлетворяться при любых x и y. В частности, оно должно удовлетворяться, если мы положим $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$. Сделаем действительно в (37.8) указанную замену, помножим полученное тождество на $d\vartheta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π. Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{dv_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}{d\vartheta}=\left\{-y\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial x}+x\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial y}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\left\{x\frac{\partial v_m}{\partial y}-y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}d\vartheta=v_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

будем иметь:

$$2\pi G + \int_0^{2\pi} u_m(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)\,d\vartheta = 0. \tag{37.10}$$

Мы получили таким образом соотношение между постоянной G и коэффициентами формы u_m, которое должно необходимо выполняться, если уравнение (37.8) имеет решение, а так как по доказанному таких соотношений может быть только одно, то оно необходимо совпадает с (37.9).

Формула (37.10) дает возможность сразу определить постоянную G.

Установив это, переходим к нашей задаче. Запишем уравнения возмущенного движения (36.1) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X_2(x,\ y) + X_3(x,\ y) + \ldots,\\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y_2(x,\ y) + Y_3(x,\ y) + \ldots,\end{aligned}\right\} \tag{37.11}$$

где X_k, Y_k — совокупности членов k-го порядка в функциях X и Y, и попытаемся подобрать для них функцию Ляпунова, удовлетворяющую теоремам Б или В, вида

$$V = x^2 + y^2 + f_3(x,\ y) + f_4(x,\ y) + \ldots, \tag{37.12}$$

где $f_k(x,\ y)$ — некоторые формы k-го порядка.

Для этого необходимо формы f_3, f_4, ... подобрать таким образом, чтобы производная от V в силу уравнений (37.11) была знакоопределенной.

Для этой производной имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = \left(2x + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial x} + \ldots\right)(-\lambda y + X_2 + X_3 + \ldots) +\\ + \left(2y + \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + \ldots\right)(\lambda x + Y_2 + Y_3 + \ldots).\end{aligned} \tag{37.13}$$

Полученное выражение начинается членами третьего порядка. Совокупность этих членов имеет вид

$$V_3 = \lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + 2xX_2 + 2yY_2. \tag{37.14}$$

Для членов четвертого порядка имеем:

$$V_4 = \lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) + X_2\frac{\partial f_3}{\partial x} + Y_2\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2xX_3 + 2yY_3,$$

и вообще совокупность членов m-го порядка в выражении (37.13) представляется выражением

$$V_m = \lambda\left(x\frac{\partial f_m}{\partial y} - y\frac{\partial f_m}{\partial x}\right) + F_m(x,\ y),$$

где $F_m(x, y)$ — форма m-го порядка, зависящая от форм f_3, f_4, ..., f_{m-1}. Эта форма, следовательно, будет известной, если формы f_3, f_4, ..., f_{m-1} из каких-нибудь условий определены.

Для того чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ была функцией знакоопределенной, необходимо прежде всего, чтобы она начиналась членами четного порядка. Поэтому необходимо форму f_3 выбрать так, чтобы члены третьего порядка (37.14) обратились в нуль, т. е. чтобы выполнялось уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y}-y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)=-2xX_2-2yY_2.$$

Как было показано выше, такая форма f_3 всегда существует и будет единственной. Выбрав таким образом форму f_3, подберем теперь f_4 так, чтобы совокупность членов четвертого порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ была формой знакоопределенной, а именно, приравняем эту совокупность членов форме $G_4(x^2+y^2)^2$. Таким путем для определения формы f_4 получаем уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y}-y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)=-F_4(x, y)+G_4(x^2+y^2)^2.$$

Так как сейчас речь идет о форме четного порядка, удовлетворяющей уравнению типа (37.8), то, как было показано выше, для того чтобы эта форма существовала, необходимо, чтобы G_4 была определенной величиной, а именно, на основании (37.10)

$$G_4=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_4(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Допустим, что полученная таким путем величина G_4 отлична от нуля. Тогда производная от функции

$$V=x^2+y^2+f_3+f_4,$$

имеющая вид

$$\frac{dV}{dt}=G_4(x^2+y^2)^2+\text{члены более высоких порядков},$$

будет знакоопределенной, знак которой совпадает со знаком G_4. Сама же функция V будет определенно-положительной. Поэтому на основании теорем Б и В невозмущенное движение будет неустойчиво при $G_4>0$ и асимптотически устойчиво при $G_4<0$.

Может, однако, случиться, что величина G_4 равна нулю. В этом случае разложение функции (37.13) начнется членами пятого порядка, и чтобы эта функция была знакоопределенной, необходимо эти члены обратить в нуль, а для этого необходимо форму f_5 выбрать согласно уравнению $V_5=0$, которое имеет вид (37.2), и так как речь идет о форме нечетного порядка, то это уравнение однозначно ее определяет.

Выбрав таким путем f_5, ищем f_6 из условия, что члены шестого порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ обращаются в знакоопределенную форму $G_6(x^2+y^2)^3$. Таким путем получаем для f_6 уравнение

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_6}{\partial y}-y\frac{\partial f_6}{\partial x}\right)=-F_6(x,\ y)+G_6(x^2+y^2)^3,$$

а для G_6 величину

$$G_6=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_6(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Если $G_6\neq 0$, то производная от (37.12) будет начинаться членами $G_6(x^2+y^2)^3$ и будет, следовательно, функцией знакоопределенной. Невозмущенное движение будет при этом неустойчиво при $G_6>0$ и асимптотически устойчиво при $G_6<0$.

Если $G_6=0$, то необходимо произвести дальнейшие определения форм f_k. Поступая подобно предыдущему, т. е. приравнивая в (37.13) члены нечетного порядка нулю, а члены четного порядка выражению $G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$ и определяя G_m по формуле

$$G_m=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F_m(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)\,d\vartheta, \tag{37.15}$$

мы можем встретиться с одним из двух возможных случаев: либо все коэффициенты G_m, как бы велик ни был индекс m, равны нулю, либо в конце концов мы придем к такому m, что $G_m\neq 0$.

Если мы имеем дело со вторым случаем, то задача устойчивости решается знаком G_m, а именно: при $G_m>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $G_m<0$ оно устойчиво и притом асимптотически.

Допустим теперь, что все коэффициенты G_m равны нулю. Конечно, убедиться в этом непосредственным вычислением этих коэффициентов не представляется возможным, но если каким-нибудь путем нам удалось установить этот факт, то задача устойчивости разрешается просто. Действительно, нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае начало координат является центром. В самом деле, если все коэффициенты G_m равны нулю, то как бы велико ни было число $2n$, члены $(2n-1)$-го порядка в уравнениях (37.11) можно изменить таким образом, чтобы величина G_{2n} получилась отличной от нуля и имела наперед заданный знак. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что в выражение $F_{2n}(x,\ y)$, определяющее согласно

(37.15) G_{2n}, входят члены $2xX_{2n-1}+2yY_{2n-1}$, и подбором X_{2n-1} и Y_{2n-1} мы можем, очевидно, сделать величину G_{2n} какой угодно. Следовательно, изменением членов сколь угодно высокого порядка в уравнениях (37.11) можно добиться, чтобы невозмущенное движение было по желанию устойчивым или неустойчивым, а это, как было показано в предыдущем параграфе, является признаком центра.

Итак, если все коэффициенты G_m равны нулю, то начало координат является центром и, следовательно, невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. При этом общее решение уравнений (37.11) является периодическим с периодом, зависящим от начальных условий.

При практическом применении метода можно коэффициенты G_m определять либо по формуле (37.15), либо непосредственно применяя метод, которым эта формула выведена. Для этого, определив в выражении $\frac{dV}{dt}$ члены m-го порядка, приравниваем их $G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$, полагаем в полученном уравнении $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ и интегрируем в пределах от 0 до 2π. При этом форма f_m исключится, и мы можем сразу не принимать ее в расчет при определении членов m-го порядка в $\frac{dV}{dt}$.

Примечание. Пусть G_{2N} — первая из величин G_m ($m=2$, 4, 6, ...), которая отлична от нуля. Как мы только что видели, наивысший порядок членов разложений функций X и Y, определяющих эту величину и решающих, таким образом, задачу устойчивости, есть $2N-1$. Следовательно, наивысший порядок членов, решающих задачу устойчивости, когда она решается конечным числом членов, всегда нечетный.

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3,$$

исследованную в предыдущем параграфе.

Полагая

$$V=x^2+y^2+f_3+f_4+\ldots,$$

подберем форму f_3 так, чтобы в выражении $\frac{dV}{dt}$ исчезли члены третьего порядка. Получим уравнение

$$x\frac{\partial f_3}{\partial y}-y\frac{\partial f_3}{\partial x}-2\beta yx^2=0.$$

Делая в нем

$$f_3=a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3$$

и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим уравнения

$$a_2=0, \quad 2a_3-3a_1-2\beta=0, \quad 3a_4-2a_2=0, \quad a_3=0$$

и, следовательно,

$$f_3 = -\frac{2}{3}\beta x^3.$$

Приравнивая члены четвертого порядка выражению $G_4(x^2+y^2)^2$, получим для определения f_4 уравнение

$$x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x} - 2\gamma xy^3 + 2\alpha y^4 = G_4(x^2+y^2)^2. \tag{37.16}$$

Прежде всего определяем постоянную G_4. Если она окажется отличной от нуля, то в определении f_4 не будет необходимости и все вычисления на этом закончатся. Если G_4 окажется равной нулю, то придется определять и f_4 и f_5 и, может быть, формы более высоких порядков. Для определения G_4 полагаем в (37.16) $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ и интегрируем по ϑ в пределах от 0 до 2π. При этом члены $x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}$ можно не рассматривать, так как они при указанной операции выпадут. Таким путем получаем:

$$G_4 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta - \frac{\gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta.$$

Если $\alpha<0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а если $\alpha>0$, то оно неустойчиво.

Если $\alpha=0$, то, как было показано в предыдущем параграфе, мы будем иметь случай центра.

§ 38. Системы второго порядка. Третий способ решения задачи.

Рассмотрим еще один способ решения задачи устойчивости для системы

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y), \tag{38.1}$$

предложенный также Ляпуновым.

В § 36 было показано, что начало координат для уравнений (38.1) является либо центром, либо фокусом и что вопрос о том, какой из этих случаев имеет место, является основным для задачи устойчивости. Если начало координат является центром, то невозмущенное движение устойчиво; если оно является фокусом, то устойчивость или неустойчивость определяется знаком введенной в § 36 постоянной g, определяющим направление движения по спиралям, которыми являются в этом случае интегральные кривые. Далее было показано, что в случае центра, и только в этом случае, общее решение уравнений (38.1) является периодическим. Поэтому для решения задачи устойчивости постараемся выяснить, будут ли решения уравнений (38.1) периодическими или нет. Если эти решения окажутся периодическими, то имеет место устойчивость, а если они окажутся непериодическими, то останется еще определить знак постоянной g.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим решение $x(t)$, $y(t)$ уравнений (38.1), определяемое начальными условиями

$$x(0)=c, \quad y(0)=0, \tag{38.2}$$

где c — достаточно малая произвольная постоянная.

Если начало координат является центром, то это решение будет периодическим с периодом, определяемым формулой (36.19):

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_1c+h_2c^2+\ldots), \tag{38.3}$$

где h_1, h_2, ... — некоторые постоянные, и ряд сходится при c достаточно малом.

Допустим, что мы действительно имеем дело со случаем центра. Заменим в уравнениях (38.1) переменную t переменной τ при помощи подстановки

$$t=\frac{\tau}{\lambda}(1+h_1c+h_2c^2+\ldots). \tag{38.4}$$

Тогда для полученных таким образом уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau}&=\left(-y+\frac{1}{\lambda}X\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots),\\ \frac{dy}{d\tau}&=\left(x+\frac{1}{\lambda}Y\right)(1+h_1c+h_2c^2+\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{38.5}$$

решение с начальными условиями (38.2) будет периодическим с периодом 2π.

Уравнения (38.5) содержат аналитически параметр c. Поэтому любое решение этих уравнений будет, по известной теореме, аналитическим относительно c. Кроме того, каждое такое решение будет аналитическим относительно своих начальных значений x^0 и y^0. Применяя это к рассматриваемому периодическому решению, для которого $x^0=c$, $y^0=0$, придем к заключению, что это решение будет аналитическим относительно c.

Следовательно, это решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x&=cx_1(\tau)+c^2x_2(\tau)+\ldots,\\ y&=cy_1(\tau)+c^2y_2(\tau)+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{38.6}$$

где ряды, стоящие в правых частях, сходятся при достаточно малом c. Так как это решение является периодическим с периодом 2π, то все функции $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$ являются также периодическими периода 2π. Кроме того, начальные условия (38.2) дают:

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=x_3(0)=\ \dots\ =y_1(0)=y_2(0)=\ \dots\ =0. \tag{38.7}$$

Таким образом, если начало координат является центром, то уравнения (38.5), в которых h_i — некоторые определенные постоянные, имеют решение вида (38.6) с периодическими $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$. Если окажется, что как бы ни были выбраны постоянные h_i, система (38.5) решения вида (38.6) с периодическими $x_m(\tau)$, $y_m(\tau)$ не имеет, то это будет свидетельствовать о том, что начало координат является фокусом.

Подставляя (38.6) в (38.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим уравнения, которым должны удовлетворять функции x_m и y_m. Таким путем прежде всего получаем:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=-y_1,\quad \frac{dy_1}{d\tau}=x_1,$$

откуда, принимая во внимание начальные условия (38.7), имеем:

$$x_1=\cos\tau,\quad y_1=\sin\tau.$$

После этого получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\tau}&=-y_2-h_1\sin\tau+\frac{1}{\lambda}X_2(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta),\\ \frac{dy_2}{d\tau}&=x_2+h_1\cos\tau+\frac{1}{\lambda}Y_2(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta),\end{aligned}\right\} \tag{38.8}$$

где $X_2(x,\ y)$ и $Y_2(x,\ y)$ — совокупность членов второго порядка в функциях X и Y.

Аналогичные уравнения мы получим и для функций X_k и Y_k $(k>2)$. Правые части этих уравнений будут содержать постоянные h_1, h_2, ..., h_{k-1}. Мы выпишем явно лишь те члены, которые содержат постоянную h_{k-1}. Тогда будем иметь:

$$\frac{dx_k}{d\tau}=-y_k-h_{k-1}\sin\tau+P_k,\quad \frac{dy_k}{d\tau}=x_k+h_{k-1}\cos\tau+Q_k, \tag{38.9}$$

где P_k и Q_k — некоторые полиномы относительно x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_{k-1}, y_{k-1}, коэффициенты которых зависят только от h_1, h_2, ..., h_{k-2}.

Уравнения (38.8) имеют вид

$$\frac{du}{d\tau}=-v+f(\tau),\quad \frac{dv}{d\tau}=u+F(\tau), \tag{38.10}$$

где $f(\tau)$ и $F(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π. Задача состоит в определении периодических решений этих уравнений. Это — хорошо известная элементарная задача определения вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы. В рассматриваемом случае имеет место резонанс, так как период свободных колебаний совпадает с периодом возмущающей силы. Поэтому уравнения (38.10) в общем случае не имеют периодического решения, и для того чтобы такое решение существовало, необходимо, чтобы функции f и F удовлетворяли некоторым условиям, которые легко установить.

Пусть

$$f = a_0 + a_1 \cos\tau + b_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau),$$

$$F = A_0 + A_1 \cos\tau + B_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau)$$

— разложения Фурье функций f и F, где, в частности,

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau\, d\tau, & b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau\, d\tau, \\ A_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\cos\tau\, d\tau, & B_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sin\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (38.11)$$

Пусть, далее,

$$u = c_0 + c_1 \cos\tau + d_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau),$$

$$v = C_0 + C_1 \cos\tau + D_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (C_n \cos n\tau + D_n \sin n\tau)$$

— разложения Фурье искомого периодического решения. Подставляя эти разложения в (38.10), мы получим $C_0 = a_0$, $c_0 = -A_0$ и следующие уравнения для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} nd_n &= -C_n + a_n, & nc_n &= D_n - b_n, \\ nD_n &= c_n + A_n, & -nC_n &= d_n + B_n. \end{aligned}$$

Эти уравнения дают вполне определенные решения для c_n, d_n, C_n, D_n при всех $n > 1$. При $n = 1$ эти уравнения неразрешимы, если только не выполняются соотношения

$$A_1 - b_1 = 0,$$

$$B_1 + a_1 = 0.$$

Если эти соотношения выполняются, то будем иметь:

$$D_1 = \alpha, \qquad d_1 = \beta,$$
$$C_1 = a_1 - \beta, \quad c_1 = \alpha - b_1,$$

где α и β — произвольные постоянные. Таким образом, принимая во внимание (38.11), мы приходим к следующему заключению.

Для того чтобы система (38.10) имела периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [f(\tau)\cos\tau + F(\tau)\sin\tau]\, d\tau = 0, \\ &\int_0^{2\pi} [F(\tau)\cos\tau - f(\tau)\sin\tau]\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.12}$$

Если эти соотношения выполняются, то указанное периодическое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v &= \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \bar{v}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{38.13}$$

где α и β — произвольные постоянные, а $\bar{u}(\tau)$, $\bar{v}(\tau)$ — периодические функции периода 2π. Это решение, содержащее две произвольные постоянные, является общим решением уравнений (38.10).

Если условия (38.12) не выполняются, то уравнения (38.10) не имеют периодического решения. Членам $a_1\cos\tau + b_1\sin\tau$ и $A_1\cos\tau + B_1\sin\tau$ будут соответствовать частные решения вида

$$u_1 = \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau - \frac{A_1 + b_1}{2}\cos\tau,$$

$$v_1 = \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \frac{a_1 - B_1}{2}\cos\tau,$$

и общее решение уравнений (38.10) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v &= \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{v}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{38.14}$$

где $\bar{u}(\tau)$ и $\bar{v}(\tau)$ — периодические функции, а α и β — произвольные постоянные.

Установив это, допустим, что все функции x_2, y_2, ..., x_{k-1}, y_{k-1} оказались периодическими и что все постоянные h_1, h_2, ..., h_{k-2}

известны. Тогда правые части уравнений (38.9), определяющих x_k и y_k, будут известными периодическими функциями τ. Эти уравнения будут, таким образом, иметь вид (39.10). Поэтому, для того чтобы функции x_k и y_k оказались периодическими, необходимо и достаточно на основании (38.12), чтобы выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi} (Q_k \cos\tau - P_k \sin\tau)\, d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} (P_k \cos\tau + Q_k \sin\tau)\, d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{38.15}$$

Первое из этих соотношений однозначно определяет величину h_{k-1}. Что же касается второго соотношения, то оно может как выполняться, так и не выполняться. Если оно не выполняется, то уравнения (38.5) не будут иметь периодических решений, как бы ни были выбраны постоянные h_i. Следовательно, в этом случае начало координат является фокусом.

Таким образом, для того чтобы начало координат было центром, необходимо, чтобы второе условие (38.15) выполнялось для любого k. И если нам каким-нибудь образом удастся установить это обстоятельство, то все функции x_k, y_k получатся периодическими. Все эти функции будут вида (38.13) и входящие в каждую из них две произвольные постоянные будут однозначно определяться начальными условиями $x_k(0) = y_k(0) = 0$. Ряды (38.6) будут при этом, как было установлено выше, сходиться и действительно представят периодическое решение системы (38.1). Начало координат будет в этом случае центром и невозмущенное движение будет устойчиво.

Допустим, однако, что при вычислении функций $x_k(\tau)$, $y_k(\tau)$ мы пришли в конце концов к такому значению индекса k, что для него второе соотношение (38.15) не выполняется. В этом случае, как мы уже говорили, начало координат является фокусом. Поэтому для решения задачи устойчивости остается установить знак величины g, введенной в § 36. Покажем, что

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_k \cos\tau + Q_k \sin\tau)\, d\tau = \frac{a_1 + B_1}{2}, \tag{38.16}$$

где a_1 — коэффициент при $\cos\tau$ в P_k, а B_1 — коэффициент при $\sin\tau$ в Q_k.

С этой целью рассмотрим значение величины x при $t = T$ или, что то же самое, при $\tau = 2\pi$. Мы предполагаем при этом, что ряд (38.3), определяющий величину T, обрывается на члене $(k-1)$-го порядка. Общее решение уравнений для x_k и y_k имеет на основании (38.14) вид

$$x_k = \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\cos\tau -$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi}(Q_k\cos\tau - P_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\sin\tau + \bar{x}_k(\tau),$$
$$y_k = \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi}(Q_k\cos\tau - P_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\cos\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau\right\}\tau\sin\tau + \bar{y}_k(\tau),$$

где $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$ — периодические функции. Для α и β из начальных условий (38.7) получаем:

$$\alpha + \bar{x}_k(0) = 0, \qquad -\beta + \bar{y}_k(0) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha + \bar{x}_k(2\pi) = 0, \qquad -\beta + \bar{y}_k(2\pi) = 0. \tag{38.17}$$

Отсюда, учитывая, что все функции x_2, y_2, ..., x_{k-1}, y_{k-1} — периодические, а также учитывая начальные условия (38.7) и соотношения (38.17), из (38.6)[1]) получим:

$$(x)_{t=T} = c + c^k\int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau + c^{k+1}(\ldots) + \ldots \tag{38.18}$$

Найдем теперь эту же величину, исходя из результатов § 36. Согласно этим результатам при $\vartheta = 2\pi$ на основании (36.6), (36.9) и (36.13) для величины r, а следовательно, также и для величины $x = r\cos\vartheta$, будем иметь:

$$(x)_{\vartheta=2\pi} = c + 2\pi g c^m + c^{m+1}(\ldots) + \ldots \tag{38.19}$$

В обеих формулах (38.18) и (38.19) c обозначает одну и ту же величину — значение r и x при $t = \vartheta = 0$. Сравнение этих формул показывает, что $m = k$, так как при $t = T$ полярный угол ϑ отличается от 2π на величину порядка (относительно c) не менее k, и что g действительно определяется формулой (38.16).

[1]) Так как мы ограничиваемся в подстановке (38.3) только конечным числом членов, то правые части уравнений (38.5) будут по-прежнему аналитическими (простыми полиномами) относительно c и ряды (38.6) будут сходиться на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$, если c достаточно мало.

Вопрос устойчивости решается знаком величины g. При $g>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g<0$ оно устойчиво асимптотически.

Таким образом, для решения задачи устойчивости мы можем руководствоваться следующим правилом.

Преобразуя уравнения (38.1) при помощи подстановки (38.4) к виду (38.5), пытаемся удовлетворить им рядами

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\tau + c^2x_2(\tau) + c^3x_3(\tau) + \ldots, \\ y &= c\sin\tau + c^2y_2(\tau) + c^3y_3(\tau) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{38.20}$$

где c — произвольная постоянная, а $x_j(\tau)$, $y_j(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям (38.7). Для определения функций x_k, y_k получим уравнения вида (38.9). Эти уравнения будут допускать периодические решения, если выполняются условия (38.15). Первое из этих условий однозначно определяет постоянную h_{k-1}, а второе условие может как выполняться, так и не выполняться. В первом случае уравнения (38.9) будут допускать периодическое решение, однозначно определяемое начальными условиями. И если это будет иметь место для всех значений k, как бы велико это число ни было, то невозмущенное движение будет устойчиво, ряды (38.20), а также ряд (38.3) будут сходиться и представят периодическое решение и период уравнений (38.1).

Если при вычислении функций x_k, y_k мы придем к такому значению индекса k, для которого второе условие (38.15) не выполняется, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если величина g, определяемая формулой (38.16), будет положительна, и асимптотически устойчиво, если она будет отрицательна.

Приведенное правило дает очень удобный способ определения периодических решений уравнений (38.1), когда они существуют, и периода этих решений. Сами решения при этом представляются в очень удобной для практики форме. Эти решения имеют большое значение в теории нелинейных колебаний[1]).

Заметим в заключение, что величина h_1 всегда получается равной нулю. Это непосредственно вытекает из (38.15) и (38.8). Можно доказать, что вообще первая отличная от нуля величина h_j имеет четный индекс.

П р и м е р 1. Рассмотрим снова систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - \beta x^2 - \gamma x y^2 + \alpha y^3.$$

Полагая

$$t = \tau(1 + h_2c^2 + \ldots),$$

[1]) См., например, М а л к и н И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

будем иметь:

$$\frac{dx}{d\tau} = -y(1 + h_2c^2 + \ldots),$$
$$\frac{dy}{d\tau} = (x - \beta x^2 - \gamma xy^2 + \alpha y^3)(1 - h_2c^2 + \ldots).$$

Этой системе пытаемся удовлетворить рядами (38.20). Для коэффициентов этих рядов получаем уравнения

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -y_2, \qquad \frac{dy_2}{d\tau} = x_2 - \beta\cos^2\tau = x_2 - \frac{\beta}{2}(1 + \cos 2\tau),$$
$$\frac{dx_3}{d\tau} = -y_3 - h_2\sin\tau, \quad \frac{dy_3}{d\tau} = x_3 + h_2\cos\tau - \gamma\sin^2\tau\cos\tau + \alpha\sin^3\tau.$$

Уравнения для x_2 и y_2 не содержат резонирующих гармоник, и потому x_2 и y_2 получаются периодическими. Функции же x_3 и y_3 не получатся периодическими, так как для них постоянная g на основании (38.16) имеет вид

$$g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau - \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\tau\cos\tau\,d\tau = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau$$

и, следовательно, отлична от нуля. Вопрос устойчивости решается при этом знаком g, т. е. знаком α.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin x = -\lambda^2 x + \frac{\lambda^2}{3!}x^3 - \frac{\lambda^2}{5!}x^5 + \ldots \tag{38.21}$$
$$\left(\lambda^2 = \frac{g}{l}\right),$$

определяющее, как известно, колебания математического маятника около его нижнего положения равновесия.

В рассматриваемом случае имеет место интеграл энергии

$$y^2 - 2(\cos x - 1) = x^2 + y^2 - \frac{1}{12}x^4 + \ldots = \text{const}$$
$$\left(y = -\frac{1}{\lambda}\frac{dx}{dt}\right),$$

и следовательно, начало координат $x = \frac{dx}{dt} = 0$ является центром. Равновесие, таким образом, устойчиво, и общее решение уравнения (38.21) будет периодическим. Найдем это решение.

Делая

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \ldots), \tag{38.22}$$

получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \left(-x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \ldots\right)(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \ldots),$$

которому стараемся удовлетворить рядом

$$x = c\cos\tau + c^3x_3(\tau) + c^5x_5(\tau) + \ldots, \tag{38.23}$$

где $x_k(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие условиям $x_k(0)=0$. При этом ряд (38.22) содержит только четные степени c, а ряд (38.23) только нечетные степени c, так как уравнение (38.21) не изменяется при замене x на $-x$.

Имеем:

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} = -x_3 - 2h_2\cos\tau + \frac{\cos^3\tau}{6} =$$

$$= -x_3 + \left(\frac{1}{8} - 2h_2\right)\cos\tau + \frac{1}{24}\cos 3\tau. \tag{38.24}$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо, чтобы коэффициент при $\cos\tau$ обращался в нуль. Таким образом, получаем:

$$h_2 = \frac{1}{16},$$

после чего из уравнения (38.24), принимая во внимание начальные условия, будем иметь:

$$x_3 = \frac{1}{192}\cos\tau - \frac{1}{192}\cos 3\tau.$$

Для x_5 имеем уравнение

$$\frac{d^2x_5}{d\tau^2} = -x_5 + \left(-2h_4 + \frac{11}{1536}\right)\cos\tau + \frac{1}{384}\cos 3\tau - \frac{3}{256}\cos 5\tau,$$

из которого находим:

$$h_4 = \frac{11}{3072},$$

$$x_5 = -\frac{1}{6144}\cos\tau - \frac{1}{3072}\cos 3\tau + \frac{1}{2048}\cos 5\tau.$$

Этим приближением мы и ограничиваемся. Таким образом, периодическое решение уравнения (38.21) и его период определяются формулами:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{11}{3072}c^4 + \ldots\right),$$

$$x = c\cos\tau + c^3x_3(\tau) + c^5x_5(\tau) + \ldots,$$

$$x_3(\tau) = \frac{1}{192}\cos\tau - \frac{1}{192}\cos 3\tau,$$

$$x_5 = -\frac{1}{6144}\cos\tau - \frac{1}{3072}\cos 3\tau + \frac{1}{2048}\cos 5\tau,$$

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{11}{3072}c^4 + \ldots\right)\tau.$$

Здесь c — начальная амплитуда колебаний. Начальная скорость равна нулю. Заменяя t на $t+\alpha$, где α — произвольная постоянная, получим общее решение уравнения (38.21).

§ 39. Вспомогательное предложение.

Нам понадобится в дальнейшем одно вспомогательное предложение, являющееся непосредственным обобщением теоремы 2 § 20. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ суть k заданных форм m-го порядка переменных $x_1, \ldots, x_n$. Требуется определить условия, при которых существуют k других форм $v_1, \ldots, v_k$ того же порядка, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial v_i}{\partial x_s} = q_{i1}v_1 + \ldots + q_{ik}v_k + u_i \qquad (39.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

где q_{ij} — некоторые постоянные.

Обозначим через $\rho_1, \ldots, \rho_n$ корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (39.2)$$

а через $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\varkappa & q_{12} & \ldots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-\varkappa & \ldots & q_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \qquad (39.3)$$

Имеет место следующее предложение.

Теорема. *Если между корнями уравнений* (39.2) *и* (39.3) *не существует никаких соотношений вида*

$$m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + \ldots + m_n\rho_n = \varkappa_i, \qquad (39.4)$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, связанные соотношением

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m, \qquad (39.5)$$

то существует одна и только одна система форм m-го порядка $v_1, \ldots, v_k$, удовлетворяющих уравнениям (39.1).

Доказательство. Имея в виду применить метод индукции, рассмотрим сначала случай $k=1$. Допустим, следовательно, что предложено одно уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v}{\partial x_s}=\varkappa v+u, \qquad (39.6)$$

где u — форма m-го порядка. Число $\varkappa$ будет, очевидно, в рассматриваемом случае единственным корнем уравнения (39.3). Так как

$$\sum_{s=1}^{n}x_s\frac{\partial v}{\partial x_s}=mv,$$

то уравнение (39.6) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{n}\left(p_{s1}x_1+\ldots+\left(p_{ss}-\frac{\varkappa}{m}\right)x_s+\ldots+p_{sn}x_n\right)\frac{\partial v}{\partial x_s}=u.$$

Применяя теорему 2 § 20, мы можем утверждать, что это уравнение имеет решение и притом единственное, если не существует зависимостей вида

$$m_1\rho_1'+m_2\rho_2'+\ldots+m_n\rho_n'=0, \qquad (39.7)$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, связанные соотношением (39.5), а ρ_s' — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{22} & p_{22}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\frac{\varkappa}{m}-\rho' \end{vmatrix}=0.$$

Но, очевидно, имеем:

$$\rho_s'=\rho_s-\frac{\varkappa}{m},$$

и следовательно, соотношение (39.7) переходит в соотношение

$$m_1\rho_1+\ldots+m_n\rho_n=\frac{1}{m}(m_1+\ldots+m_n)\varkappa=\varkappa,$$

откуда и вытекает справедливость нашей теоремы для $k=1$.

Рассмотрим теперь случай $k>1$. Если мы введем в рассмотрение формы $w_1, \ldots, w_k$, связанные с формами $v_1, \ldots, v_k$ неособенной линейной подстановкой

$$w_i=\alpha_{i1}v_1+\alpha_{i2}v_2+\ldots+\alpha_{ik}v_k \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

то из (39.1) получим для этих форм следующие уравнения:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial w_i}{\partial x_s}=r_{i1}w_1+\ldots+r_{ik}w_k+\bar{u}_i$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где $\bar{u}_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j$ будут также известными формами m-го порядка. Коэффициенты r_{ij} связаны с коэффициентами q_{ij} соотношением

$$r=\alpha^{-1}q\alpha,$$

где r — матрица коэффициентов r_{ij}, q — матрица коэффициентов q_{ij}, а α — матрица коэффициентов α_{ij}. Отсюда следует, что уравнение

$$|r-\varkappa E|=\begin{vmatrix} r_{11}-\varkappa & r_{12} & \ldots & r_{1k}\\ r_{21} & r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{k1} & r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0$$

(E — единичная матрица) имеет те же корни, что и уравнение (39.3). Действительно, имеем:

$$|r-\varkappa E|\equiv|\alpha^{-1}q\alpha-\varkappa E|\equiv|\alpha^{-1}(q-\varkappa E)\alpha|\equiv$$
$$\equiv|\alpha^{-1}|\cdot|q-\varkappa E|\cdot|\alpha|\equiv|q-\varkappa E|,$$

что и доказывает наше утверждение.

Установив это, допустим, что теорема доказана для системы с $k-1$ неизвестными функциями, и покажем, что она останется справедливой и для системы с k неизвестными функциями. С этой целью рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$q_{1i}\alpha_1+\ldots+(q_{ii}-\varkappa_1)\alpha_i+\ldots+q_{ki}\alpha_k=0\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Так как определитель этой системы равен нулю, то она имеет решение, в котором хотя бы одна из величин α_i отлична от нуля. Допустим для определенности, что $\alpha_1\neq 0$. Тогда, вводя вместо формы v_1 форму w, определяемую равенством

$$w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k,$$

мы вместо первого уравнения (39.1) получим уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial w}{\partial x_s}=\varkappa_1w+\bar{u}_1, \tag{39.8}$$

где $\bar{u}_1=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iu_i$ — известная форма m-го порядка.

Остальные уравнения (39.1) примут вид

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v_j}{\partial x_s}=r_{j2}v_2+\ldots+r_{jk}v_k+r_jw+u_j \quad (39.9)$$

$$(j=2,\ \ldots,\ k),$$

где r_{ij} — некоторые постоянные, которые нам нет необходимости выписывать явно.

Уравнение (39.3) для преобразованной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1-\varkappa & 0 & \ldots & 0 \\ r_1 & r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_k & r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=(\varkappa_1-\varkappa)\begin{vmatrix} r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

и так как по доказанному оно инвариантно относительно неособенного линейного преобразования, то корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} r_{22}-\varkappa & \ldots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k2} & \ldots & r_{kk}-\varkappa \end{vmatrix}=0$$

будут величины $\varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_k$.

Величина $\varkappa_1$, как и остальные корни уравнения (39.3), не связана, по условию, с величинами $\rho_1,\ \ldots,\ \rho_n$ никакими соотношениями вида (39.4), и поэтому, по доказанному, уравнение (39.8) допускает одно и только одно решение для w в виде формы m-го порядка. Подставив это решение в уравнения (39.9), мы получим для определения $v_2,\ \ldots,\ v_k$ систему вида (39.1) с $k-1$ неизвестными функциями. Эта система, по предположению, допускает одно и только одно решение для $v_2,\ \ldots,\ v_k$. Переходя к первоначальным переменным $v_1,\ \ldots,\ v_k$, мы получим, таким образом, одно и только одно решение системы (39.1).

Итак, допустив, что теорема справедлива при $k-1$ неизвестных функциях, мы доказали, что она остается справедливой и при k неизвестных функциях, и так как она доказана для $k=1$, то она справедлива для всякого k.

Пример. Пусть предложена следующая система:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial v_j}{\partial x_s}=\lambda(k-j+1)v_{j-1}-j\lambda v_{j+1}+u_j \quad (39.10)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ v_0=v_{k+1}=0),$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — заданные формы произвольного порядка m, а λ — положительное число. Предположим, что все корни уравнения (39.2) имеют отрицательные вещественные части. В этом случае система (39.10) имеет одно и только одно решение для $v_1, \ldots, v_k$ в виде форм m-го порядка.

Действительно, корни уравнения (39.3), как можно показать, в рассматриваемом случае будут

$$\pm \lambda i, \quad \pm 3\lambda i, \quad \ldots, \quad \pm (k-3)\lambda i, \quad \pm (k-1)\lambda i,$$

если k — число четное, и

$$0, \quad \pm 2\lambda i, \quad \pm 4\lambda i, \quad \ldots, \quad \pm (k-1)\lambda i,$$

если k — число нечетное. Очевидно, что в этом случае соотношения (39.4) не могут иметь место ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, не равных нулю одновременно, и потому теорема применима при любом m.

§ 40. Исследование системы $(n+2)$-го порядка в частном случае.

Мы переходим теперь к рассмотрению системы $(n+2)$-го порядка при $n>0$. Дифференциальные уравнения возмущенного движения, как мы видели в § 35, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\
\frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + \\
&\qquad + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\
&(s = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \tag{40.1}$$

причем коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$\begin{vmatrix}
p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\
p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho
\end{vmatrix} = 0 \tag{40.2}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

В этом параграфе мы дадим решение задачи устойчивости для системы (40.1) при некотором частном предположении. Как мы увидим в следующем параграфе, к этому частному случаю приводится задача и в общем случае.

Обозначим через $X^0(x, y)$, $Y^0(x, y)$, $X_s^0(x, y)$ функции переменных x и y, в которые обращаются функции X, Y и X_s, если в них отбросить все члены, зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, так что

$$X^0(x, y) = X(x, y, 0, \ldots, 0),$$
$$Y^0(x, y) = Y(x, y, 0, \ldots, 0),$$
$$X_s^0(x, y) = X_s(x, y, 0, \ldots, 0).$$

Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X^0(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y^0(x, y). \tag{40.3}$$

Решая задачу устойчивости для этой системы, мы встретимся с одним из двух случаев: с общим случаем, когда задача решается конечным числом первых членов в разложениях функций X^0 и Y^0 (случай фокуса), и особенным случаем, когда требуется рассмотрение членов сколь угодно высоких порядков (случай центра). Предположим, что мы имеем дело с первым из этих случаев. Пусть $2N-1$ — наивысший порядок членов разложений функций X^0 и Y^0, от которых зависит решение задачи устойчивости для системы (40.3). Как мы видели (§ 37, примечание), этот порядок всегда нечетный. Тогда мы будем предполагать, что для уравнений (40.1) выполняются следующие два условия:

1) все постоянные p_s и q_s равны нулю;

2) разложения функций X_s^0 начинаются членами не ниже $(2N-1)$-го порядка.

Покажем, что если эти условия выполняются, то задача устойчивости для системы $(n+2)$-го порядка (40.1) решается системой второго порядка (40.3), а именно: если для системы (40.3) получается неустойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место неустойчивость и, наоборот, устойчивость для системы (40.3) обусловливает устойчивость и для системы (40.1).

Таким образом, при выполнении указанных условий для решения задачи устойчивости мы попросту отбрасываем все уравнения, соответствующие некритическим корням, а в уравнениях, соответствующих критическим корням, отбрасываем все члены, содержащие некритические переменные.

Для доказательства справедливости наших предложений поступим так же, как и в случае одного нулевого корня. Попытаемся построить для уравнений (40.1) функцию Ляпунова в виде суммы функций Ляпунова, построенных отдельно для системы (40.3) и для системы последних n уравнений (40.1).

Задача заключается в построении функции $V(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, обладающей знакоопределенной производной.

Как было показано в § 37, функция Ляпунова для системы (40.3) имеет вид

$$U = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \ldots + f_{2N-1}(x, y),$$

где f_i — формы i-го порядка переменных x и y. Для производной этой функции, составленной в силу уравнений (40.3), будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(-\lambda y + X^0) + \frac{\partial U}{\partial y}(\lambda x + Y^0) =$$
$$= G(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta}(x, y)\, x^\alpha y^\beta,$$

где $\varphi_{\alpha\beta}(x, y)$ обращаются в нуль при $x = y = 0$. Задача устойчивости для системы (40.3) решается при этом знаком G. Невозмущенное движение будет неустойчиво при $G > 0$ и асимптотически устойчиво при $G < 0$. Нам нужно показать, что то же самое будет и для системы (40.1).

Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$—квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{40.4}$$

Так как все корни уравнения (40.2) имеют отрицательные вещественные части, то форма W будет определенно-отрицательная.

Рассмотрим функцию

$$V = G[x^2 + y^2 + f_3(x, y) + \ldots + f_{2N-1}(x, y)] + W(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \varphi(x, y) + W(x_1, \ldots, x_n) \tag{40.5}$$

и составим ее производную по t в силу уравнений (40.1). Для этой производной имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}[-\lambda y + X^0(x, y) + X'(x, y, x_1, \ldots, x_n)] +$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}[\lambda x + Y^0(x, y) + Y'(x, y, x_1, \ldots, x_n)] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}[p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s^0(x, y) + X_s'(x, y, x_1, \ldots, x_n)],$$

где функции X', Y', X_s' обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и обозначают совокупности тех членов в разложениях X, Y и X_s, которые зависят от $x_1, \ldots, x_n$.

Если бы функции X', Y', а также функции X_s^0 обращались тождественно в нуль, то производная имела бы вид

$$G^2(x^2+y^2)^N+G\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{i,\,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j,$$

где f_{ij} — аналитические функции переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$. Эта производная была бы, очевидно, определенно-положительной функцией $n+2$ переменных x, y, x_s. Но так как вышеуказанные соотношения, вообще говоря, не выполняются, то производная $\frac{dV}{dt}$ не получится определенно-положительной. Эта производная будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt}=G^2(x^2+y^2)^N+\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta+ \\ +\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{i,\,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j+P(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad (40.6)$$

где теперь уже $\varphi_{\alpha\beta}$ содержат и переменные $x_1, \ldots, x_n$ и обращаются в нуль при $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$, а P — совокупность всех членов, которые не могут быть отнесены ни к группе

$$G^2(x^2+y^2)^N+\sum_{\alpha+\beta=2N}\varphi_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad (40.7)$$

ни к группе

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}f_{ij}x_ix_j.$$

Исследуем подробнее функцию P. Эта функция не будет содержать члены ниже третьего порядка, так как единственными членами второго порядка в выражении $\frac{dV}{dt}$ будут члены (40.4). Функция P не содержит в своем разложении членов, свободных от $x_1, \ldots, x_n$, так как все такие члены в $\frac{dV}{dt}$ содержатся в выражении

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-\lambda y+X^0)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\lambda x+Y^0)$$

и, следовательно, могут быть включены в группу (40.7).

Из членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_n$, в функции P будут содержаться лишь такие, порядок которых относительно x и y меньше $2N$. Остальные члены этого типа могут быть включены в группу (40.7). Члены, имеющие относительно $x_1, \ldots, x_n$ второй и более высокие порядки, могут быть все включены в (40.7) и поэтому в P не содержатся.

Таким образом, функция P имеет вид

$$P = P_2(x_1, \ldots, x_n, x, y) + P_3(x_1, \ldots, x_n, x, y) + \ldots$$
$$\ldots + P_{2N-1}(x_1, \ldots, x_n, x, y), \qquad (40.8)$$

где P_k — формы k-го порядка относительно x и y, коэффициентами которых являются линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Наличие в $\frac{dV}{dt}$ слагаемого P нарушает ее знакоопределенность. Нам нужно будет поэтому функцию V изменить таким образом, чтобы в выражении ее производной не содержалось членов, входящих в P, т. е. линейных относительно x_j и имеющих порядок относительно x и y, меньший $2N$. С этой целью введем в функцию V добавочное слагаемое вида

$$Q_k(x_1, \ldots, x_n, x, y) =$$
$$= v_1 x^k + v_2 x^{k-1} y + \ldots + v_k x y^{k-1} + v_{k+1} y^k, \qquad (40.9)$$

где $2 \leqslant k \leqslant 2N-1$, а v_j — линейные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$. Исследуем те новые члены, которые внесет это слагаемое в выражение $\frac{dV}{dt}$. Члены, свободные от $x_1, \ldots, x_n$, могут получиться лишь за счет производных от первых множителей, т. е. за счет функций X_s^0, и так как разложения этих функций начинаются членами не ниже $(2N-1)$-го порядка, то указанные члены будут иметь порядок не ниже $2N+k-1 \geqslant 2N+1$ и могут быть включены в группу (40.7). Новые члены, линейные относительно $x_1, \ldots, x_n$, будут иметь относительно x, y порядок, не меньший k, так как общий порядок членов, вносимых слагаемым (40.9) в производную, будет, очевидно, не меньше $k+1$.

Таким образом, производная от функции

$$V = \varphi(x, y) + W(x_1, \ldots, x_n) + Q_k$$

будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = G^2(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi^*_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{i, j=1}^{n} f^*_{ij} x_i x_j +$$
$$+ P_2 + \ldots + P_{k-1} + P_k^* + P_{k+1}^* + \ldots + P_{2N-1}^*,$$

где $\varphi^*_{\alpha\beta}$, f^*_{ij} — функции такого же вида, как и $\varphi_{\alpha\beta}$, f_{ij}, а P_k^*, P_{k+1}^*, $\ldots$, P_{2N-1}^* — формы относительно x, y, порядок которых равен их индексу и коэффициенты которых являются линейными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. Функции $P_k^*, \ldots, P_{2N-1}^*$ отличаются, вообще говоря, от функций $P_k, \ldots, P_{2N-1}$. Выпишем подробней функцию P_k^*. Пусть

$$P_k = u_1 x^k + u_2 x^{k-1} y + \ldots + u_k x y^{k-1} + u_{k+1} y^k,$$

где $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда, как легко видеть, будем иметь:

$$P_k^* = f_1 x^k + f_2 x^{k-1} y + \ldots + f_k x y^{k-1} + f_{k+1} y^k,$$

где

$$f_j = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial v_j}{\partial x_s} + \lambda j v_{j+1} - (k - j + 2) \lambda v_{j-1} + u_j$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k+1,\quad v_0 = v_{k+2} = 0).$$

Выберем теперь функцию (40.9) таким образом, чтобы функция P_k^* обратилась в нуль. Для этого придется линейные формы $v_1, \ldots, v_{k+1}$ выбрать так, чтобы выполнялись уравнения

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_{k+1} = 0. \tag{40.10}$$

Эти уравнения имеют как раз тот вид, который мы рассмотрели с качестве примера в предыдущем параграфе. Мы видели, что в рассматриваемом нами случае, когда уравнение (40.2) имеет корни только в отрицательными вещественными частями, уравнения (40.10) имеют одно и только одно решение для v_j.

Выбрав таким образом функцию (40.9), мы уничтожим в выражении $\frac{dV}{dt}$ то слагаемое функции P, которое является формой k-го порядка относительно x и y, не изменяя при этом тех слагаемых, которые имеют меньший порядок. Отсюда следует, что, добавляя к V последовательно слагаемые вида Q_k ($k = 2, 3, \ldots, 2N-1$), мы можем последовательно уничтожить в функции P все члены. Другими словами, мы можем так подобрать функции $Q_2, \ldots, Q_{2N-1}$, каждая из которых является формой соответствующего порядка относительно x и y и линейной относительно $x_1, \ldots, x_n$, что производная от функции

$$V = G(x^2 + y^2 + f_3 + \ldots + f_{2N-1}) + W(x_1, \ldots, x_n) + \\ + Q_2(x, y, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + Q_{2N}(x, y, x_1, \ldots, x_n),$$

составленная в силу уравнений (40.1), будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = G^2 (x^2 + y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \Phi_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} F_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

где $\Phi_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль при $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Производная $\frac{dV}{dt}$ будет функцией определенно-положительной. Сама функция V имеет вид

$$V = G(x^2 + y^2) + W(x_1, \ldots, x_n) + F(x, y, x_1, \ldots, x_n),$$

где F — аналитическая функция переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка.

Так как форма W определенно-отрицательна, то V будет определенно-отрицательной функцией всех $n+2$ переменных x, y, x_s, если $G<0$, и знакопеременной функцией, если $G>0$. Отсюда на основании теорем Б и В заключаем, что, так же как и для системы второго порядка (40.3), невозмущенное движение для полной системы (40.1) будет асимптотически устойчиво при $G<0$ и неустойчиво при $G>0$. Таким образом, наши утверждения доказаны.

§ 41. Исследование системы $(n+2)$-го порядка в общем случае.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели систему (40.1) при некоторых частных предположениях. Чтобы решить задачу в общем случае, преобразуем эту систему к такому виду, чтобы для нее выполнялись ограничения предыдущего параграфа. Для этого необходимо систему преобразовать так, чтобы она сохранила вид (40.1), но чтобы разложения правых частей уравнений, соответствующих некритическим переменным, после того как в них отбросить все члены, содержащие эти переменные, начинались членами достаточно высокого порядка.

С этой целью введем в уравнениях (40.1) новые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ при помощи подстановки

$$\xi_s = x_s - v_s(x, y) \qquad (s=1, \ldots, n), \tag{41.1}$$

где $v_s(x, y)$ — аналитические функции переменных x и y, обращающиеся в нуль при $x=y=0$. Преобразованные уравнения будут

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \overline{X}(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\
&= -\lambda y + X(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n), \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + \overline{Y}(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\
&= \lambda x + Y(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n), \\
\frac{d\xi_s}{dt} &= \Xi_s(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n) = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \\
&+ p_s x + q_s y + X_s(x, y, \xi_1+v_1, \ldots, \xi_n+v_n) - \\
&- \left[\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + \overline{X}) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + \overline{Y})\right] + p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n.
\end{aligned}\right\} \tag{41.2}$$

Обозначим через $\Xi_s^{(0)}(x, y)$ совокупность всех членов в функциях Ξ_s, не зависящих от некритических переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Будем, очевидно, иметь:

$$\Xi_s^{(0)}(x, y) = [p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + \\ + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n) - \left\{\frac{\partial v_s}{\partial x}[-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n)] + \right. \\ \left. + \frac{\partial v_s}{\partial y}[\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n)]\right\}. \quad (41.3)$$

Подберем теперь функции $v_1, \ldots, v_n$ таким образом, чтобы разложения функций $\Xi_s^{(0)}$ начинались членами не ниже m-го порядка, где m — достаточно большое число. Тогда система (41.2) будет иметь желаемый вид и для решения задачи устойчивости отбросим в первых двух уравнениях этой системы все члены, содержащие $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и рассмотрим полученную таким образом систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y)), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y)). \end{aligned}\right\} \quad (41.4)$$

Может случиться, что как бы велико ни было число m, задача устойчивости для системы (41.4) не решается членами порядка ниже m. Этот случай будет исключительным, особенным, и мы его рассмотрим в § 43.

Но может, однако, случиться, и это будет общим случаем, что при m достаточно большом задача устойчивости для системы (41.4) решается членами не выше m-го порядка (m при этом будет обязательно нечетным), так что члены порядка выше m на решении задачи не скажутся. В этом случае задача устойчивости и для исходной системы $(n+2)$-го порядка (40.1) решается системой второго порядка (41.4), а именно, если для системы (41.4) имеет место неустойчивость, то и для системы (40.1) имеет место неустойчивость, и если для системы (41.4) получается асимптотическая устойчивость, то и для системы (40.1) получится асимптотическая устойчивость.

Действительно, так как по условию задача устойчивости для системы (41.4) решается членами порядка не выше m и разложения функций (41.3) начинаются членами не ниже m-го порядка, то система (41.2) удовлетворяет всем ограничениям предыдущего параграфа. Согласно полученным там результатам система (41.4) полностью решает задачу устойчивости для системы (41.2) и, следовательно, для эквивалентной ей системы (40.1).

Остается показать, как определить функции $v_s(x, y)$, обращающие в нуль в выражениях (41.3) все члены до порядка $m-1$ включительно. С этой целью положим:

$$v_s(x, y) = v_s^{(1)}(x, y) + v_s^{(2)}(x, y) + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (41.5)$$

где $v_s^{(k)}(x, y)$ — формы k-го порядка переменных x и y. Тогда члены первого порядка в (41.3) будут

$$\Xi_{s1}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(1)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(1)} + p_s x + q_s y$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (41.6)$$

а совокупность членов какого-нибудь k-го порядка имеет вид

$$\Xi_{sk}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x, y)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (41.7)$$

Здесь $u_s^{(k)}(x, y)$ — формы k-го порядка, зависящие от форм $v_s^{(1)}, \ldots, v_s^{(k-1)}$.

Для того чтобы в функциях (41.3) не было членов первого порядка, необходимо линейные формы $v_s^{(1)}(x, y)$ выбрать так, чтобы удовлетворялись уравнения $\Xi_{s1}^{(0)} = 0$, а для того чтобы разложения функций (41.3) начинались членами не ниже m-го порядка, необходимо, чтобы выполнялись уравнения

$$\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) = p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x, y) \qquad (41.8)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Так как функции $u_s^{(k)}$ зависят только от тех $v_s^{(j)}$, для которых $j < k$, то уравнения (41.8) дают возможность последовательно определять формы $v_s^{(k)}$, начиная с $k = 1$, причем для определения $v_s^{(1)}$ получаются уравнения с известными правыми частями, так как на основании (41.6) $u_s^{(1)} = p_s x + q_s y$. Всего в рядах (41.5) нужно определить члены до $(m-1)$-го порядка, если мы желаем, чтобы разложения (41.3) начинались членами не ниже m-го порядка.

Допустим, что все функции $v_s^{(1)}, v_s^{(2)}, \ldots, v_s^{(k-1)}$ уже определены. Тогда для нахождения $v_s^{(k)}$ мы получим уравнения (41.8) с известными правыми частями. Уравнения (41.8) имеют вид уравнений (39.1), рассмотренных нами в § 39. Корнями уравнения (39.2) являются сейчас величины $\pm\lambda i$, а корнями уравнения (39.3) — корни $\rho_1, \ldots, \rho_n$ уравнения (40.2). Соотношение (39.4) принимает сейчас вид

$$(m_1 - m_2)\lambda i = \rho_j,$$

и так как оно не выполняется ни при каких целых неотрицательных m_1, m_2, то на основании теоремы § 39 система (41.8) имеет решение для $v_s^{(k)}$, каков бы ни был индекс k. Это решение нужно искать в виде форм с неопределенными коэффициентами, для определения которых получатся линейные неоднородные алгебраические уравнения.

Выясним теперь, сколько членов нужно определить в рядах (41.5) при практическом решении задачи. Для этого вспомним, что если задача устойчивости для системы второго порядка решается членами не свыше какого-нибудь конечного порядка, то этот порядок всегда нечетный. В простейшем случае, который на практике и будет наиболее частым, задача решается членами третьего порядка. Следовательно, нужно, чтобы в разложениях (41.3) отсутствовали члены первого и второго порядков, для чего в функциях v_s нужно взять лишь линейные члены $v_s^{(1)}(x, y)$ и члены второго порядка $v_s^{(2)}(x, y)$. Определив эти члены, подставим полученные таким образом функции v_s в уравнения (41.4) и решаем для них задачу устойчивости. Если при этом окажется, что задача членами третьего порядка не решается и требует, следовательно, рассмотрения членов, по крайней мере, четвертого и пятого порядка, то придется определить также формы $v_s^{(3)}$ и $v_s^{(4)}$, а может быть и формы более высоких порядков, если окажется, что и члены пятого порядка не решают задачи устойчивости для системы (41.4).

Заметим, наконец, что уравнения (41.4) получаются из первых двух уравнений (40.1) заменой переменных x_s функциями $v_s(x, y)$, а уравнения (41.8) мы получим, если попытаемся найти решение системы уравнений с частными прозводными

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n)) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n)) =$$
$$= p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n) \qquad (41.9)$$

в виде рядов (41.5). Поэтому все вышесказанное приводит нас к следующему правилу.

Для того чтобы решить задачу устойчивости для системы (40.1), составляем систему уравнений с частными производными (41.9), которой стараемся удовлетворить рядами (41.5). Такие ряды (формальные) всегда найдутся и будут единственными. Этими рядами заменяем величины x_s в первых двух уравнениях (40.1), после чего получим систему второго порядка (41.4). Допустим, что задача устойчивости для этой системы решается конечным числом членов. Тогда если для системы (41.4) получается неустойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место неустойчивость, а если для системы (41.4) получится асимптотическая устойчивость, то и для системы (40.1) будет иметь место асимптотическая устойчивость.

О количестве членов, которые необходимо взять в рядах (41.5) для решения задачи устойчивости, мы уже говорили выше[1]).

Поясним выкладки примерами.

Пример 1. Пусть предложена система:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=-y+\alpha xz, \quad \frac{dy}{dt}=x+\alpha yz, \\ &\frac{dz}{dt}=-z+x^2+y^2+f(x,\ y,\ z), \end{aligned}\right\} \tag{41.10}$$

где разложение функции $f(x,\ y,\ z)$ начинается членами не ниже третьего порядка. Составим уравнение с частными производными

$$(-y+\alpha xv)\frac{\partial v}{\partial x}+(x+\alpha yv)\frac{\partial v}{\partial y}=-v+x^2+y^2+f(x,\ y,\ v),$$

которому стараемся удовлетворить рядом

$$v=v_1(x,\ y)+v_2(x,\ y)+\ \ldots,$$

где $v_j(x,\ y)$ — формы j-го порядка. Сначала определим формы v_1 и v_2. Формы более высоких порядков будем определять лишь в том случае, если в этом будет необходимость. Для v_1 и v_2 имеем уравнения

$$-y\frac{\partial v_1}{\partial x}+x\frac{\partial v_1}{\partial y}=-v_1,$$

$$-y\frac{\partial v_2}{\partial x}+x\frac{\partial v_2}{\partial y}=-v_2+x^2+y^2-\alpha yv_1\frac{\partial v_1}{\partial y}-\alpha xv_1\frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

Первое уравнение дает $v_1=0$, после чего второе уравнение принимает вид

$$-y\frac{\partial v_2}{\partial x}+x\frac{\partial v_2}{\partial y}=-v_2+x^2+y^2. \tag{41.11}$$

Полагая

$$v_2=Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

мы получим из (41.11) уравнения

$$-A+B+C=0, \quad A+2B=1, \quad -2B+C=1,$$

откуда находим, что $v_2=x^2+y^2$.

[1]) Решение задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней, а также в случае одного нулевого корня, когда уравнения возмущенного движения не аналитичны, дано в работе: Ведров В. С., Об устойчивости движения. Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.

Подставляя теперь в первые два уравнения (41.10) вместо z величину $v = v_1 + v_2 + \ldots$, получим систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \alpha x (x^2 + y^2) + \varphi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \quad x + \alpha y (x^2 + y^2) + \psi(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (41.12)$$

где разложения φ и ψ начинаются членами не ниже четвертого порядка. Будем теперь решать задачу устойчивости для системы (41.12). Здесь лучше всего воспользоваться методом § 37. При этом сразу видно, что система (41.12) допускает функцию Ляпунова $2V = x^2 + y^2$, производная которой, имеющая вид

$$\frac{dV}{dt} = \alpha (x^2 + y^2)^2 + x\varphi + y\psi,$$

будет функцией знакоопределенной, если только $\alpha \neq 0$. Невозмущенное движение для системы (41.12), а вместе с ней и для системы (41.10) будет неустойчиво при $\alpha > 0$ и асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$.

При $\alpha = 0$ задача устойчивости для системы (41.12) членами третьего порядка не решается. Однако вычисление форм v_3, v_4 и членов более высоких порядков в разложении функции v излишне, так как при $\alpha = 0$ первые два уравнения (41.10) не содержат переменной z. Этот случай, очевидно, принадлежит к числу особенных.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим одну из задач устойчивости систем автоматического регулирования, исследованную А. И. Лурье[1]).

Допустим, что дифференциальные уравнения движения системы (регулируемого объекта, измерительных органов, сервоприводов и т. д.) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} b_{i\alpha}\eta_\alpha + h_i f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} j_\alpha \eta_\alpha \\ (i &= 1, 2, \ldots, n+2), \end{aligned}\right\} \qquad (41.13)$$

где $b_{i\alpha}$, h_i, j_α — постоянные, а $f(\sigma)$ — некоторая нелинейная функция, обращающаяся в нуль при $\sigma = 0$. Рассмотренные нами ранее в §§ 12 и 26 уравнения систем регулирования являются, очевидно, частным случаем системы (41.13).

---

[1]) Лурье А. И., О характере границ области устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.

Предположим, что $f(\sigma)$ является аналитической функцией σ и имеет вид

$$f(\sigma)=c\sigma+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ldots$$

Рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{d\eta_i}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n+2}a_{i\alpha}\eta_\alpha, \qquad a_{i\alpha}=b_{i\alpha}+h_ij_\alpha c \tag{41.14}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2).$$

Для того чтобы положение равновесия $\eta_1=\ldots=\eta_{n+2}=0$ рассматриваемой системы было устойчивым, достаточно, чтобы вещественные части всех корней уравнения

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n+2} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots & a_{2,\,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+2,\,1} & a_{n+2,\,2} & \ldots & a_{n+2,\,n+2}-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{41.15}$$

имели отрицательные вещественные части. При этом величина области устойчивости, как это легко усмотреть из рассуждений § 26, зависит от величины этих вещественных частей. Если вещественные части хотя бы некоторых корней уравнения (41.15) численно малы, то область устойчивости может оказаться слишком малой и с точки зрения практической исследуемое положение равновесия надо будет рассматривать как неустойчивое. Как будет показано в § 44, вопрос о поведении системы в такого рода случаях будет зависеть от того, будет ли иметь место устойчивость или неустойчивость в предельном случае, когда указанные вещественные части будут равны нулю. Таким образом, задача приводится к исследованию критических случаев. Мы рассмотрим эту задачу для системы (41.13) в предположении, что уравнение (41.15) имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda_i$ при остальных корнях с отрицательными вещественными частями.

Допустим, что все корни $\rho_1,\ \ldots,\ \rho_{n+2}$ уравнения (41.15) являются простыми. Рассмотрим линейную подстановку

$$x_i=A_{i1}\eta_1+A_{i2}\eta_2+\ldots+A_{i,\,n+2}\eta_{n+2}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2), \tag{41.16}$$

где A_{ij} определяются уравнениями

$$a_{1s}A_{i1}+a_{2s}A_{i2}+\ \ldots\ +a_{n+2,\,s}A_{i,\,n+2}=\rho_iA_{is}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2)$$

и, следовательно,

$$A_{ij}=C_i\,\Delta_{ij}(\rho_i).$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента β-й строки и α-го столбца определителя (41.15), а C_i — произвольные постоянные. Подстановка (41.16) преобразует уравнения (41.14) к виду

$$\frac{dx_i}{dt}=\rho_i x_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2),$$

а уравнения (41.13) — к виду

$$\frac{dx_i}{dt}=\rho_i x_i+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ \ldots,$$

если только постоянные C_i выбраны согласно условиям

$$\frac{1}{C_i}=\sum_{\alpha=1}^{n+2}\Delta_{1\alpha}(\rho_i)\,h_\alpha,$$

что мы и будем предполагать. Переменная σ примет при этом вид

$$\sigma=\sum_{\alpha=1}^{n+2}a_\alpha x_\alpha,$$

где a_α — некоторые постоянные, явное выражение которых мы здесь не приводим.

Пусть $\rho_{n+1}=i\lambda$, $\rho_{n+2}=-i\lambda$, а остальные корни ρ_s имеют отрицательные вещественные части. Тогда, полагая

$$x_{n+1}=x+iy, \quad x_{n+2}=x-iy,$$

мы приведем уравнения движения к следующему окончательному виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ \ldots,\\
\frac{dy}{dt}&=\lambda x,\\
\frac{dx_s}{dt}&=\rho_s x_s+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ \ldots,\\
\sigma&=ax-by+a_1x_1+\ \ldots\ +a_nx_n,
\end{aligned}\right\} \tag{41.17}$$

где a и b — вещественная и мнимая части коэффициента $2a_{n+1}$ (коэффициент a_{n+2} будет, очевидно, комплексно сопряжен с a_{n+1}).

Составляя уравнения

$$\lambda x\frac{\partial v_s}{\partial y}+(-\lambda y+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ \ldots)\frac{\partial v_s}{\partial x}=\rho_s v_s+\psi_2\sigma^2+\psi_3\sigma^3+\ \ldots$$

$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

пытаемся им удовлетворить рядами

$$v_s = v_s^{(1)} + v_s^{(2)} + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{41.18}$$

Для функций $v_s^{(1)}$ получаем уравнения

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y} - y\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}\right) = \rho_s v_s^{(1)},$$

откуда $v_s^{(1)} = 0$. Вследствие этого уравнения для $v_s^{(2)}$ имеют вид

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial y} - y\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial x}\right) = \rho_s v_s^{(2)} + \psi_2 (ax - by)^2.$$

Полагая в этих уравнениях

$$v_s^{(2)} = \frac{1}{2}(M_s x^2 + 2P_s xy + N_s y^2),$$

приравнивая коэффициенты при xy, x^2, y^2 и решая полученные таким образом уравнения, для M_s, P_s, N_s найдем:

$$\frac{1}{2}M_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[-2ab\lambda + \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2+b^2)}{2\rho_s},$$

$$P_s = \frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}[2\lambda(a^2 - b^2) + 2ab\rho_s],$$

$$\frac{1}{2}N_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[2ab\lambda - \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2+b^2)}{2\rho_s}.$$

Имея в виду решать в дальнейшем задачу методом § 36, положим в форме $v_s^{(2)}$ $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. Тогда, принимая во внимание значения коэффициентов M_s, P_s, N_s, получим:

$$v_s^{(2)} = r^2\left(\alpha_s + \beta_s \cos 2\vartheta + \gamma_s \sin 2\vartheta\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s &= -\frac{\psi_2(a^2+b^2)}{2\rho_s}, \\ \beta_s &= -\frac{\psi_2[\rho_s(a^2-b^2) - 4\lambda ab]}{2\left(4\lambda^2+\rho_s^2\right)}, \\ \gamma_s &= \frac{\psi_2[2\lambda(a^2-b^2) + 2ab\rho_s}{2\left(4\lambda^2+\rho_s^2\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{41.19}$$

Подставляя в первые два уравнения (41.17) вместо x_s ряды (41.18), переходя к полярным координатам и исключая t, получим:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_2 r^2 + R_3 r^3 + \ldots, \tag{41.20}$$

где

$$R_2 = \frac{\psi_2}{\lambda}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^2\cos\vartheta,$$

$$R_3 = \frac{\psi_2^2}{\lambda_2}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^4\sin\vartheta\cos\vartheta + \\ + \frac{1}{\lambda}\{2\psi_2(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)(\alpha + \beta\cos 2\vartheta + \gamma\sin 2\vartheta) + \\ + \psi_3(a_3\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^3\}\cos\vartheta.$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \sum_{s=1}^{n} a_s\alpha_s, \quad \beta = \sum_{s=1}^{n} a_s\beta_s, \quad \gamma = \sum_{s=1}^{n} a_s\gamma_s$$

и, следовательно, на основании (41.19)

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}\psi_2(a^2+b^2)S_1, \\ \beta &= 2\lambda ab\psi_2 S_2 - \frac{1}{2}(a^2-b^2)\psi_2 S_3, \\ \gamma &= \lambda(a^2-b^2)\psi_2 S_2 + ab\psi_2 S_3, \end{aligned}\right\} \tag{41.21}$$

где

$$S_1 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{\rho_\alpha}, \quad S_2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2}, \quad S_3 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha\rho_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2}.$$

Полагая в (41.20)

$$r = c + r_2(\vartheta)c^2 + r_3(\vartheta)c^3 + \ldots,$$

найдем:

$$r_2 = \int_0^\vartheta R_2\,d\vartheta, \quad r_3 = \int_0^\vartheta (R_3 + 2R_2r_2)\,d\vartheta.$$

Функция $r_2(\vartheta)$ получится, очевидно, периодической. Но тогда то же самое будет и для функции

$$\int_0^\vartheta R_2r_2\,d\vartheta = \int_0^\vartheta r_2\,dr_2 = \frac{1}{2}r_2^2.$$

Вследствие этого постоянная g, фигурирующая в соотношении

$$r_3 = g\vartheta + \text{периодическая функция},$$

определяется формулой

$$g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_3\,d\vartheta,$$

которая дает:

$$g = -\frac{ab(a^2+b^2)}{4\lambda^2}\psi_2^2 + \frac{1}{2\lambda}(2a\alpha + a\beta - b\gamma)\psi_2 + \frac{3(a^2+b^2)}{8\lambda}\psi_3,$$

или, принимая во внимание (41.21),

$$g = \frac{a^2+b^2}{4\lambda^2}\left[\psi_2^2(-ab - 2\lambda a S_1 + 2\lambda^2 b S_2 - a\lambda S_3) - \frac{3}{2}a\lambda\psi_3\right].$$

Если теперь входящие сюда величины выразить через коэффициенты исходной системы (41.13) и опустить несущественный положительный множитель $\frac{1}{2\lambda}(a^2+b^2)$, то, как показал А. И. Лурье, получим:

$$g = Re\frac{D(i\lambda)}{\Delta'(i\lambda)}\left\{\left(\frac{\psi_2}{c}\right)^2\left[\frac{D(2i\omega)}{\Delta(2i\omega)} - 3 + 2\frac{D(0)}{\Delta(0)}\right] + \frac{3}{2}\frac{\psi_3}{c}\right\}, \quad (41.22)$$

где $D(\rho)$ — значение определителя (41.15) при $c=0$.

§ 42. Другой способ решения задачи.

Решение задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней по методам, изложенным в предыдущих параграфах, приводит обычно к очень громоздким вычислениям. Уже для системы второго порядка, если, например, решать задачу приемом § 36, приводящим обычно к наиболее простым вычислениям, приходится определять при помощи квадратур коэффициенты r_i из уравнений (36.8), имеющих вид

$$\frac{dr_i}{dt} = F_i(\vartheta, r_2, \ldots, r_{i-1}),$$

где F_i являются полиномами относительно $r_2, \ldots, r_{i-1}$. Хотя функции F_i будут получаться полиномами от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, вычисление указанных квадратур приводит к громоздким выкладкам, в особенности когда задача устойчивости решается членами порядка выше третьего, ввиду быстрого усложнения функций F_i по мере возрастания i.

Задача значительно усложняется для систем $(n+2)$-го порядка. В этом случае приходится проделывать дополнительные громоздкие вычисления, связанные с необходимостью действительного определения форм $v_s^{(k)}(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям (41.8). Для каждого k эти формы содержат $n(k+1)$ коэффициентов, для нахождения которых мы получим из (41.8) систему из $n(k+1)$ линейных неоднородных уравнений. Даже в простейшем случае, когда задача устойчивости решается членами не выше третьего порядка, необходимо, как мы видели, определить формы $v_s^{(1)}$ и $v_s^{(2)}$ и, следовательно, решать две системы линейных уравнений, содержащих, соответственно, $2n$ и $3n$ неизвестных.

Определение форм $v_s^{(k)}$ значительно упрощается, если, следуя Ляпунову, уже в уравнениях (41.9) ввести вместо x и y полярные координаты r и ϑ, имея в виду решать затем задачу для системы второго порядка методом § 36. Еще больших упрощений можно добиться приемом, указанным автором[1]). Однако, вся задача значительно упрощается, если ее решать иным приемом[2]), к рассмотрению которого мы сейчас и переходим.

Рассмотрим сначала систему второго порядка. Во всех вышеизложенных приемах мы приводили уравнения возмущенного движения к виду (36.1). Мы будем сейчас исходить из другого вида уравнений возмущенного движения, а именно: мы будем предполагать, что эти уравнения преобразованы к виду

$$\frac{dx}{dt} = i\lambda x + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -i\lambda y + Y(x, y), \tag{42.1}$$

что всегда может быть выполнено при помощи линейного преобразования. Если уравнения, как это часто бывает на практике, были сразу заданы в виде (36.1), то для приведения их к виду (42.1) достаточно в качестве новых переменных принять величины $x + iy$ и $x - iy$.

Если уравнения движения приведены к виду (42.1), то переменные x и y будут комплексно сопряженными, и поэтому второе из этих уравнений может быть получено из первого заменой i на $-i$, x на y и y на x.

Для решения задачи устойчивости введем в уравнения (42.1) вместо переменных x и y переменные u и v при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= u + x^{(2)}(u, v) + x^{(3)}(u, v) + \ldots, \\ y &= v + y^{(2)}(u, v) + y^{(3)}(u, v) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{42.2}$$

где $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ — некоторые формы j-го порядка, которыми мы постараемся распорядиться таким образом, чтобы уравнения для u и v приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i\lambda u + A_3u^2v + A_5u^3v^2 + \ldots + A_{2k+1}u^{k+1}v^k + \ldots, \\ \frac{dv}{dt} &= -i\lambda v + \bar{A}_3uv^2 + \bar{A}_5u^2v^3 + \ldots + \bar{A}_{2k+1}u^kv^{k+1} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{42.3}$$

---

[1]) Малкин И. Г., О решении задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.

[2]) Малкин И. Г., Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней, ПММ, т. XV, вып. 4, 1951.

Здесь A_j и $\bar{A}_j$ — некоторые подлежащие определению постоянные, причем $\bar{A}_j$ комплексно сопряжены с A_j. При таком условии второе уравнение (42.3) получится из первого заменой i на $-i$, u на v и v на u, вследствие чего переменные u и v будут также комплексно сопряженными.

Подставляя в уравнения (42.1) вместо x и y их выражения (42.2) и принимая во внимание (42.3), получим:

$$\begin{gathered}
\left(1+\frac{\partial x^{(2)}}{\partial u}+\frac{\partial x^{(3)}}{\partial u}+\ldots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\ldots)+\\
+\left(\frac{\partial x^{(2)}}{\partial v}+\frac{\partial x^{(3)}}{\partial v}+\ldots\right)(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\ldots)=\\
=i\lambda(u+x^{(2)}+\ldots)+X(u+\ldots,\ v+\ldots),\\
\left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u}+\frac{\partial y^{(3)}}{\partial u}+\ldots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\ldots)+\\
+\left(1+\frac{\partial y^{(2)}}{\partial v}+\frac{\partial y^{(3)}}{\partial v}+\ldots\right)(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\ldots)=\\
=-i\lambda(v+y^{(2)}+\ldots)+Y(u+\ldots,\ v+\ldots).
\end{gathered}$$

Приравнивая в обеих частях совокупности членов одинаковых порядков, получим для нахождения форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
-i\lambda x^{(j)}+i\lambda\left(\frac{\partial x^{(j)}}{\partial u}u-\frac{\partial x^{(j)}}{\partial v}v\right)&=-A_ju^{\frac{1}{2}(j+1)}v^{\frac{1}{2}(j-1)}+X^{(j)}(u,v),\\
i\lambda y^{(j)}+i\lambda\left(\frac{\partial y^{(j)}}{\partial u}u-\frac{\partial y^{(j)}}{\partial v}v\right)&=-\bar{A}_ju^{\frac{1}{2}(j-1)}v^{\frac{1}{2}(j+1)}+Y^{(j)}(u,v).
\end{aligned}\right\}\quad(42.4)$$

Здесь A_j при j четном равно нулю и $X^{(j)}(u,\ v)$, $Y^{(j)}(u,\ v)$ — формы j-го порядка, зависящие от форм $X^{(b)}$ и $Y^{(b)}$ и постоянных A_b, для которых $b<j$. Уравнения (42.4) дают возможность без всяких вычислений последовательно определять как формы $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$, так и постоянные A_j.

В самом деле, допустим, что все формы $x^{(b)}$, $y^{(b)}$ и постоянные A_b, для которых $b<j$, уже определены. Тогда $X^{(j)}(u,\ v)$ будет известной формой. Пусть

$$X^{(j)}=\sum_{p+q=j}A_{pq}u^pv^q,\quad x^{(j)}=\sum_{p+q=j}a_{pq}u^pv^q,$$

где A_{pq} — известные коэффициенты, а a_{pq} — подлежащие определению. Тогда, приравнивая в первом уравнении (42.4) коэффициенты при u^pv^q, получим, что при j четном коэффициент a_{pq} определяется по формуле

$$(p-q-1)\,i\lambda a_{pq}=A_{pq}. \tag{42.5}$$

Той же формулой определяются коэффициенты и при нечетном j, за исключением коэффициента a_{pq}, для которого $p=\frac{1}{2}(j+1)$, $q=\frac{1}{2}(j-1)$. Для этого коэффициента получается уравнение

$$0\cdot a_{pq}=-A_j+A_{pq}\quad\left(p=\frac{1}{2}(j+1),\ q=\frac{1}{2}(j-1)\right). \tag{42.6}$$

Следовательно, коэффициент a_{pq}, для которого $p=\frac{1}{2}(j+1)$, $q=\frac{1}{2}(j-1)$, остается произвольным. Мы положим его равным нулю. Вместе с тем уравнение (42.6) однозначно определяет величину A_j, для которой находим:

$$A_j=A_{pq}\quad\left(p=\frac{1}{2}(j+1),\quad q=\frac{1}{2}(j-1)\right). \tag{42.7}$$

Точно таким же путем определяются коэффициенты форм $y^{(j)}$. Однако ни в вычислении этих коэффициентов, ни в составлении для них уравнений нет необходимости, так как в силу сопряженности переменных x, y, а также переменных u и v, мы можем сразу писать:

$$y^{(j)}=\sum_{p+q=j}\bar{a}_{pq}u^q v^p.$$

Таким путем можно подсчитать любое число форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$, а также постоянных A_j. Вычисления нужно производить до тех пор, пока мы не придем к постоянной A_j с отличной от нуля вещественной частью. Дело в том, что знаком этой вещественной части и решается задача устойчивости.

В самом деле, пусть A_k — первая из постоянных $A_3, A_5, \ldots$, вещественная часть которой отлична от нуля, так что

$$A_3=iB_3,\ A_5=iB_5,\ \ldots,\ A_{k-2}=iB_{k-2},\quad A_k=g+iB_k, \tag{42.8}$$

где постоянные $B_3, \ldots, B_k$, g вещественны. Покажем, что при $g>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g<0$ оно устойчиво асимптотически. Преобразуем с этой целью уравнения (42.3) при помощи подстановки

$$u=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),\qquad v=r(\cos\vartheta-i\sin\vartheta).$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+i(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\,r\frac{d\vartheta}{dt}=\\ =i\lambda r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+A_3r^3(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+\ldots\\ \ldots+A_kr^k(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)+\ldots,\end{aligned}$$

где ненаписанные члены имеют порядок, больший k. При этом мы предполагаем, что в подстановке (42.2) ряды оборваны на членах k-го порядка. Выделяя в полученном уравнении вещественные и мнимые части, найдем:

$$\frac{dr}{dt}=gr^k+\ldots,\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+B_3r^3+\ldots+B_kr^k+\ldots \tag{42.9}$$

Все сделанные нами преобразования таковы, что задача устойчивости для исходных уравнений эквивалентна той же задаче для уравнений (42.9). Что же касается последней задачи, то она, очевидно, решается знаком величины g. Таким образом, наше предложение доказано.

Если бы $\operatorname{Re}(A_k)=0$ при любом k, то это свидетельствовало бы о том, что задача устойчивости не решается конечным числом членов. В этом случае начало координат было бы центром, невозмущенное движение было бы устойчиво, но не асимптотически.

Приведенный способ решения задачи устойчивости требует только составления уравнения (42.4) для последовательных приближений. Это может оказаться утомительным, если задача устойчивости решается членами высоких порядков. Однако такие выкладки приходится делать при любом способе решения задачи, после чего в других способах приходится либо вычислять громоздкие квадратуры (метод § 36), либо разрешать сложные системы линейных алгебраических уравнений (метод § 37).

Рассмотрим теперь систему $(n+2)$-го порядка. Уравнения возмущенного движения берем не в форме (40.1), как в предыдущем параграфе, а в форме

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=i\lambda x+X(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dy}{dt}=-i\lambda y+Y(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+p_sx+q_sy+X_s(x,\ y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\
&\qquad\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \tag{42.10}$$

Для решения задачи устойчивости мы можем теперь воспользоваться изложенным в предыдущем параграфе методом Ляпунова и привести систему (42.10) к системе второго порядка. Для этого нужно будет взять только первые два уравнения (42.10) и заменить в них величины x_s формальными решениями $v_s(x,\ y)$ уравнений с частными производными (41.9). При этом, вследствие того что уравнения возмущенного движения взяты в виде (42.10), а не в виде (40.1), вычисления значительно упрощаются.

В самом деле, уравнения (41.9) принимают сейчас вид

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}(i\lambda x+X)+\frac{\partial v_s}{\partial y}(-i\lambda y+Y)=p_{s1}v_1+\ldots+p_{sn}v_n+p_s x+q_s y+X_s,$$

и вследствие этого уравнения (41.8), определяющие формы $v_s^{(k)}(x, y)$, имеют теперь вид

$$i\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}x-\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}y\right)=p_{s1}v_1^{(k)}+\ldots+p_{sn}v_n^{(k)}+X_s^{(k)}(u, v).$$

Если в этих уравнениях положить:

$$x_s^{(k)}=\sum_{p+q=k} b_{pq}^{(s)}x^p y^q,\qquad X_s^{(k)}=\sum_{p+q=k} B_{pq}^{(s)}x^p y^q,$$

где $B_{pq}^{(s)}$ — известные, а $b_{pq}^{(s)}$ — подлежащие определению коэффициенты, то будем иметь:

$$p_{s1}b_{pq}^{(1)}+\ldots+\left[p_{ss}-(p-q)\,i\lambda\right]b_{pq}^{(s)}+\ldots+p_{sn}b_{pq}^{(n)}+B_{pq}^{(s)}=0$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, для определения коэффициентов $b_{pq}^{(s)}$ мы получаем не систему из $n(k+1)$ уравнений, как это было бы, если бы мы пользовались уравнениями (40.1), а $k+1$ самостоятельных систем, состоящих из n уравнений каждая. Это, разумеется, вносит существенные упрощения в вычисления. Но этим дело не ограничивается. Если пользоваться уравнениями в форме (40.1), то определители систем $n(k-1)$-го порядка, определяющих коэффициенты $b_{pq}^{(s)}$, будут разными для форм разных порядков, т. е. они будут зависеть от индекса k. Если же пользоваться уравнениями (42.10), то придется все время решать системы одного и того же порядка n, определители которых отличаются лишь диагональными членами. И если

$$C_s(\mu)=\sum_{j=1}^{n} c_{js}(i\mu)\,a_j$$

является решением уравнений

$$p_{s1}C_1+\ldots+(p_{ss}-i\mu)\,C_s+\ldots+p_{sn}C_n+a_s=0, \tag{42.11}$$

выраженным явно через μ, то для формы $v_s^{(k)}$ любого порядка k можно сразу писать:

$$v_s^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{p+q=k} c_{js}\left[(p-q)\,i\lambda\right]B_{pq}^{(s)}x^p y^q.$$

Таким образом, для нахождения всех форм $v_s^{(k)}$ достаточно разрешить лишь одну систему n-го порядка (42.11), т. е. вычислить определитель

$$D(i\mu)=\begin{vmatrix} p_{11}-i\mu & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-i\mu & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-i\mu \end{vmatrix}$$

и его миноры.

Отметим в заключение, что изложенный сейчас метод можно видоизменить таким образом, что можно будет сразу исходить из системы (35.1), не приводя ее предварительно к виду (42.10), т. е. не выделяя критических корней. Мы не останавливаемся, однако, на этом вопросе, отсылая интересующихся к уже цитированной работе[1]).

Пример. Рассмотрим снова уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1}+F\left[x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

исследованное уже в § 36. Здесь F — аналитическая функция своих аргументов, разложение которой не имеет членов ниже второго порядка относительно x и $\frac{dx}{dt}$. Полагая $\xi=x-i\frac{dx}{dt}$, $\eta=x+i\frac{dx}{dt}$, получим систему

$$\frac{d\xi}{dt}=i\xi+\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1}+iF^*(\xi,\ \eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-i\eta-\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1}-iF^*(\eta,\ \xi),$$

где F^* — вещественная функция.

Делая подстановку

$$\xi=u+\xi^{(2)}(u,\ v)+\xi^{(3)}(u,\ v)+\dots,$$
$$\eta=v+\eta^{(2)}(u,\ v)+\eta^{(3)}(u,\ v)+\dots,$$

будем на основании (42.3) иметь:

$$\left(1+\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial u}+\dots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\dots)+$$
$$+\left(\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial v}+\dots\right)(-i\lambda v+\overline{A}_3uv^2+\dots)=i(u+\xi^{(2)}+\dots)+$$
$$+\frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(u-v+\dots)^{2n+1}+iF^*(u+\dots,\ v+\dots).$$

Отсюда сразу видно, что все формы $\xi^{(2)},\ \dots,\ \xi^{(2n)}$ получатся вещественными, а все числа $A_3,\ A_5,\ \dots,\ A_{2n-1}$ — чисто мнимыми. То же самое будет справедливо для форм $\xi^{(k)}$ и чисел A_k при

[1]) См. сноску [2]) на стр. 170.

любом k, если только $\alpha = 0$. Поэтому при $\alpha = 0$ будем иметь устойчивость, но не асимптотическую.

Допустим, что $\alpha \neq 0$. Тогда уравнение для $\xi^{(2n+1)}$ будет:

$$i\left(u \frac{\partial \xi^{(2n+1)}}{\partial u} - v \frac{\partial \xi^{(2n+1)}}{\partial v}\right) = i\xi^{(2n+1)} + iF^{(2n+1)}(u, v) - \\ - A_{2n+1}u^{n+1}v^n + \frac{(-1)^n \alpha}{2^{2n+1}}(u-v)^{2n+1},$$

где $F^{(2n+1)}$ — вещественная форма $(2n+1)$-го порядка. Приравнивая коэффициент при $u^{n+1}v^n$, найдем:

$$\operatorname{Re}(A_{2n+1}) = A_{2n+1} = \frac{(2n+1)\,2n \ldots (n+2)}{2^{2n+1} \cdot n!}\alpha.$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\alpha < 0$ оно устойчиво асимптотически.

§ 43. Особенный случай.

Мы переходим теперь к рассмотрению особенного случая. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{43.1}$$

суть дифференциальные уравнения возмущенного движения. Следуя установленному правилу решения задачи устойчивости, составляем уравнения с частными производными

$$(-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n))\frac{\partial v_s}{\partial x} + (\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n))\frac{\partial v_s}{\partial y} = \\ = p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n). \tag{43.2}$$

Этим уравнениям можно удовлетворить формальными рядами

$$v_s(x, y) = v_s^{(1)}(x, y) + v_s^{(2)}(x, y) + \ldots \tag{43.3}$$

Ограничившись в этих рядах членами $(m-1)$-го порядка, заменим полученными таким образом целыми рациональными функциями $v_s(x, y)$ величины x_s в первых двух уравнениях (43.1) и рассмотрим систему второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x,\ y,\ v_1,\ \ldots,\ v_n). \end{aligned}\right\} \tag{43.4}$$

Может оказаться, что при m достаточно большом задача устойчивости для системы (43.4) решается членами не выше m-го порядка. Это будет общий случай, рассмотренный выше. В этом случае задача устойчивости для системы (43.1) решается системой (43.4).

Но может случиться, что как бы велико ни было число m и, следовательно, как бы велико ни было число членов, взятых в рядах (43.3), задача устойчивости для системы (43.4) не решается членами порядка, не превосходящего m, т. е. что, изменив в этих уравнениях члены выше m-го порядка, можно получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость. Этот случай и является особенным. В особенном случае правило решения задачи устойчивости, установленное в § 41, неприменимо.

Однако, как мы сейчас покажем, и в особенном случае задача устойчивости для системы (43.1) эквивалентна задаче устойчивости для системы второго порядка (43.4). При этом предполагается, что в уравнениях (43.4) функции $v_s(x,\ y)$ обозначают не конечное число первых членов в рядах (43.3), а эти ряды целиком. Но тогда, очевидно, эти уравнения лишь тогда имеют смысл, когда указанные ряды сходятся. Будут ли эти ряды действительно сходиться?

Вопрос о сходимости рядов (43.3) разрешен А. М. Ляпуновым. Он показал, что эти ряды могут быть расходящимися. Об этом свидетельствует уравнение

$$\left[-\lambda y - \frac{1}{2}x(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial x} + \left[\lambda x - \frac{1}{2}y(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial y} = -v+x^2+y^2,$$

для которого формальный ряд (43.3) имеет вид

$$v = x^2+y^2+(x^2+y^2)^2+2!\,(x^2+y^2)^3+3!\,(x^2+y^2)^4+\ \ldots$$

Этот ряд, очевидно, расходится.

Отсюда, однако, не следует, что ряды (43.3) всегда расходятся. Напротив, Ляпунов показал, что когда мы имеем дело с особенным случаем, то ряды (43.3) будут обязательно получаться сходящимися. Это замечательное предложение Ляпунова мы здесь приводим без доказательства.

На основании предложения Ляпунова уравнения (43.4) будут вполне определенными. И так как для них задача устойчивости не решается конечным числом членов, то на основании результатов §§ 36—38, точка $x=y=0$ для уравнений (43.4) будет центром. Невозмущенное движение для уравнений (43.4) будет при этом устойчивым (не асимптотически), а их общее решение будет периодическим.

Это периодическое решение может быть представлено в виде

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \lambda\,(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots)^{-1}\,t, \\ x &= c\cos\tau + c^2x^{(2)}(\tau) + \ldots, \\ y &= c\sin\tau + c^2y^{(2)}(\tau) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{43.5}$$

где $x^{(k)}(\tau)$, $y^{(k)}(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, обращающиеся в нуль при $\tau = 0$, h_j — некоторые вполне определенные постоянные, а c — произвольная постоянная, являющаяся начальным значением величины x. Все фигурирующие в (43.5) ряды сходятся при достаточно малом c.

Аналогичные обстоятельства имеют место в особенном случае и для полной системы (43.1), а именно: эта система также допускает периодическое решение, зависящее от одного произвольного постоянного[1]), являющегося начальным значением величины x, и невозмущенное движение $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ для этой системы также устойчиво. При этом в указанном периодическом решении величины x и y определяются формулами (43.5), а для величин x_s будем иметь:

$$x_s = v_s(x,\ y) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{43.6}$$

где $v_s(x,\ y)$ — функции (43.3).

Для доказательства заметим прежде всего, что если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ являются каким-нибудь частным решением уравнений (43.4), то функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x_s = v_s[x(t),\ y(t)]$ определяют частное решение уравнений (43.1). Действительно, подставляя эти функции в уравнения (43.1), мы на основании (43.2) и (43.4) убедимся, что они тождественно удовлетворяются. Отсюда непосредственно вытекает, что уравнения (43.1) обладают периодическим решением, определяемым формулами (43.5) и (43.6).

Покажем теперь, что для полной системы (43.1) имеет место устойчивость. С этой целью введем в этой системе вместо переменных x, y, x_s переменные ρ, φ, ξ_s при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi + \rho^2x^{(2)}(\varphi) + \ldots, \\ y &= \rho\sin\varphi + \rho^2y^{(2)}(\varphi) + \ldots, \\ x_s &= \xi_s + v_s(x,\ y). \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

---

[1]) Заменив в этом решении t на $t + h$, где h — произвольное постоянное, мы получим периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных.

Тогда первые два уравнения (43.1) примут вид

$$\left.\begin{aligned}&[\cos\varphi+2\rho x^{(2)}(\varphi)+\ldots]\frac{d\rho}{dt}+\\&\qquad+\left[-\sin\varphi+\frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}\rho+\ldots\right]\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_1(\rho,\ \varphi,\ \xi_s),\\&[\sin\varphi+2\rho y^{(2)}(\varphi)+\ldots]\frac{d\rho}{dt}+\\&\qquad+\left[\cos\varphi+\rho\frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+\ldots\right]\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_2(\rho,\ \varphi,\ \xi_s),\end{aligned}\right\}\qquad(43.8)$$

где R_1, R_2 — аналитические функции переменных ρ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, разложения которых не содержат свободных членов. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями φ периода 2π.

Разрешим уравнения (43.8) относительно $\frac{d\rho}{dt}$ и $\rho\frac{d\varphi}{dt}$. Определитель Δ этих линейных относительно указанных величин уравнений имеет вид

$$\Delta=1+\rho\left[\cos\varphi\frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+2\cos\varphi x^{(2)}(\varphi)-\sin\varphi\frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}+\right.$$
$$\left.+2\sin\varphi y^{(2)}(\varphi)\right]+\rho^2(\ldots)+\ldots,$$

откуда вытекает, что величина $\frac{1}{\Delta}$ будет аналитической функцией ρ, разложение которой по степеням этой переменной имеет периодические относительно φ коэффициенты. Следовательно, имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\rho}{dt}=R(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\\&\rho\frac{d\varphi}{dt}=\Phi(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\end{aligned}\right\}\qquad(43.9)$$

где R и Φ — функции такого же вида, как и R_1, R_2, т. е. аналитические относительно ρ и ξ_s, периодические относительно φ и обращающиеся в нуль при $\rho=\xi_1=\ldots=\xi_n=0$.

Последние n уравнений (43.1) после подстановки (43.7) примут вид

$$\frac{d\xi_s}{dt}=p_{s1}\xi_1+\ldots+p_{sn}\xi_n+P_s(\varphi)\rho+\Xi_s(\rho,\ \varphi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),\qquad(43.10)$$

где $P_s(\varphi)$ — некоторые периодические функции φ периода 2π, а Ξ_s — аналитические функции переменных ρ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями φ периода 2π.

Периодическое решение (43.5) и (43.6) уравнений (43.1) в переменных ρ, φ, ξ_s принимает, очевидно, вид

$$\rho=c,\quad \varphi=\tau,\quad \xi_s=0\qquad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\qquad(43.11)$$

Следовательно, уравнения (43.9) и (43.10) имеют частное решение (43.11), а для этого, очевидно, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$P_s(\varphi) \equiv 0, \quad R(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = \Xi_s(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Но в таком случае система $(n+1)$-го порядка, состоящая из первого уравнения (43.9) и уравнений (43.10), в которых τ является некоторой неизвестной функцией времени, является частным случаем систем (34.2), рассмотренных нами в § 34. Согласно результатам этого параграфа невозмущенное движение $\rho = \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ вышеуказанной системы $(n+1)$-го порядка устойчиво. Но тогда по характеру подстановки (43.7) устойчивым будет и невозмущенное движение $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (43.1).

Итак, мы показали, что в особенном случае невозмущенное движение устойчиво и уравнения возмущенного движения допускают периодическое решение, определяемое формулами (43.5) и (43.6).

Таким образом, задача устойчивости в особенном случае решается просто. Но, к сожалению, у нас нет общего приема, который позволил бы нам заранее узнать, что рассматриваемый случай является особенным. В самом деле, если мы имеем особенный случай, то сколько бы членов в уравнениях (43.4) мы ни рассмотрели, у нас не будет уверенности, что, рассмотрев члены еще более высокого порядка, мы не придем к случаю фокуса.

Можно, однако, указать один общий признак, при выполнении которого можно не сомневаться, что рассматриваемый случай будет особенным.

Допустим, что уравнения (43.1) допускают первый интеграл вида

$$x^2 + y^2 + F(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}, \tag{43.12}$$

где F — аналитическая функция переменных x, y, x_s, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка. Покажем, что если это выполняется, то рассматриваемый случай будет особенным.

В самом деле, заменив в интеграле (43.12) величины x_s рядами (43.3), которые дают, по крайней мере, формальное решение системы (43.2), мы получим ряд, который, по крайней мере, формально является первым интегралом системы (43.4), т. е. все члены ряда

$$[-\lambda y + X(x, y, v_s)] \frac{\partial H}{\partial x} + [\lambda x + Y(x, y, v_s)] \frac{\partial H}{\partial y},$$

где

$$H = x^2 + y^2 + F(x, y, v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y))$$

уничтожаются. Но в таком случае для системы (43.4), как это вытекает из рассуждений § 37, точка $x = y = 0$ является центром, что и доказывает наше предложение.

А. М. Ляпунов показал, что справедливо и обратное предложение, т. е. что в особенном случае система (43.1) необходимо имеет первый интеграл вида (43.12).

А. М. Ляпунов далее показал, что если уравнения (43.1) имеют первый интеграл вида (43.12), то эти уравнения обладают периодическим решением, определяемым формулами (43.5), (43.6), вне зависимости от того, будут ли вещественные части корней уравнения (40.2) отрицательными или нет. Важно только, чтобы ни один из этих корней не был вида $\pm N\lambda i$, где N — целое положительное число или нуль.

Указанные периодические решения играют большую роль в теории нелинейных колебаний. Мы не останавливаемся здесь на этом вопросе, отсылая читателей к нашей книге[1]), где он подробно освещен.

§ 44. «Опасные» и «безопасные» границы области устойчивости.

В заключение этой главы рассмотрим вопрос о так называемых «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости. Этот вопрос непосредственно связан с тем понятием «практической» устойчивости, о котором мы говорили в § 4.

Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{44.1}$$

— дифференциальные уравнения возмущенного движения, где, как и обычно, разложения функций X_s начинаются членами не ниже второго порядка. Рассмотрим неравенства

$$\operatorname{Re}(\rho_s) < 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{44.2}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического уравнения системы первого приближения. Эти корни являются функциями некоторых параметров, характеризующих рассматриваемую динамическую систему. Если рассматривать пространство этих параметров, то неравенства (44.2) определяют в этом пространстве некоторую область. Это будет область устойчивости системы по отношению к исследуемому невозмущенному движению, так как при выполнении (44.2) невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Напротив, совокупность всех точек пространства параметров, в которых хотя бы один из корней ρ_s имеет положительную вещественную часть, определяет область неустойчивости.

Границей, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости, является совокупность всех тех точек пространства параметров, в которых хотя бы одно из неравенств (44.2) переходит

[1]) Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

в равенство, т. е. на границе хотя бы некоторые корни ρ_s являются критическими. При значениях параметров, соответствующих точкам границы, невозмущенное движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от вида функций X_s.

Допустим, что параметры системы лежат в области устойчивости, так что вещественные части всех корней ρ_s отрицательны. Невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. При этом, если все функции X_s обращаются в нуль, то устойчивость будет иметь место, каковы бы ни были начальные возмущения. Но если хотя бы некоторые из функций X_s отличны от нуля, то устойчивость будет иметь место, вообще говоря, при начальных возмущениях, не превышающих некоторых пределов. В § 26 мы указали некоторые приемы, позволяющие оценить эти весьма важные для практики величины. Из рассуждений этого параграфа легко усмотреть, что если величины вещественных частей хотя бы некоторых из корней численно малы, другими словами, если система находится вблизи границы области устойчивости, то максимальные значения допускаемых начальных возмущений могут оказаться очень малыми. В справедливости этого мы сейчас убедимся и из других соображений. Если такое обстоятельство действительно имеет место, то рассматриваемую систему с точки зрения практической придется рассматривать как неустойчивую.

Аналогичные обстоятельства могут иметь место и в случае, когда система находится в области неустойчивости, но очень близко от границы. В этом случае, несмотря на то, что невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову, его иногда с точки зрения практической можно будет считать устойчивым, вследствие того что максимальные отклонения системы от невозмущенного движения могут оказаться очень малыми.

С такого рода практической устойчивостью, несмотря на неустойчивость по Ляпунову, мы встретились в § 4 на примере уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^2 x - x^3.$$

Корень характеристического уравнения первого приближения равен здесь α^2 и, следовательно, положителен. Невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову. Однако, каково бы ни было начальное значение величины x, эта величина, как было показано в § 4, с неограниченным возрастанием t стремится либо к $+\alpha$, либо к $-\alpha$, т. е. практически к положению равновесия $x = 0$, если α очень мало.

Напротив, если уравнение движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha^2 x + x^3,$$

то корень характеристического уравнения будет отрицателен и невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Однако если величина α очень мала, то с точки зрения практической это движение нужно будет считать неустойчивым, так как $\lim\limits_{t\to\infty} x = \pm\infty$, если начальное значение x численно больше α. В этом сразу убеждаемся, если заметим, что при $|x| > \alpha$ справедливо неравенство $x \frac{dx}{dt} > 0$.

Таким образом, возникает практически важный вопрос о поведении динамической системы вблизи границ области устойчивости. Этот вопрос исследован Н. Н. Баутиным[1]), который рассматривал лишь такие участки границы области устойчивости, на которых либо только один корень, либо только два корня являются критическими, причем во втором случае предполагается, что оба корня отличны от нуля и, следовательно, являются чисто мнимыми. В первом случае, когда имеется один критический корень, он, очевидно, обращается в нуль. Н. Н. Баутин показал, что в этих случаях поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется их поведением на самой границе.

В обоих рассматриваемых случаях дифференциальные уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \mu(r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sn}x_n) + X_s \qquad (44.3)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $p_{s\sigma}$ и $r_{s\sigma}$ — некоторые постоянные, причем $p_{s\sigma}$ такие, что уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (44.4)$$

имеет либо один нулевой корень, либо пару чисто мнимых корней при остальных корнях с отрицательными вещественными частями. Величина μ является малым параметром, характеризующим степень близости системы к границе области устойчивости. Этот параметр предполагается настолько малым, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}+\mu r_{11}-\rho & p_{12}+\mu r_{12} & \cdots & p_{1n}+\mu r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}+\mu r_{n1} & p_{n2}+\mu r_{n2} & \cdots & p_{nn}+\mu r_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

---

[1]) Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1950. К рассматриваемому вопросу примыкает также работа: Кузьмин П. А., Замечание о смене устойчивости установившихся движений, Сборник трудов Казанского авиац. ин-та, № 10, 1939.

имеет столько же корней с отрицательными вещественными частями, как и уравнение (44.4), т. е. либо $n-1$, либо $n-2$. Остальные корни этого уравнения могут иметь как отрицательные, так и положительные вещественные части, т. е. система (44.3) может находиться как в области устойчивости, так и в области неустойчивости.

Допустим сначала, что на границе рассматриваемая система асимптотически устойчива. Другими словами, допустим, что невозмущенное движение для системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \tag{44.5}$$

асимптотически устойчиво. Тогда, как мы видели, будем ли мы иметь дело с одним нулевым корнем или с парой чисто мнимых корней, для уравнений (44.5) будет существовать функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям теоремы Б. Обозначим эту функцию через $V(x_1, \ldots, x_n)$. Предполагая для определенности, что эта функция положительная, будем иметь, что выражение

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{44.6}$$

представляет собой функцию определенно отрицательную. Воспользуемся геометрической интерпретацией теоремы Б, данной в § 11. Рассмотрим систему замкнутых поверхностей $V=h$. Поверхности этого семейства, расположенные достаточно близко от начала координат, пересекаются интегральными кривыми уравнений (44.5) снаружи во внутрь. Пусть $V=h_1$ и $V=h_2$ — две такого рода поверхности. При этом первую из этих поверхностей, которую мы предполагаем расположенной внутри второй (рис. 10), мы можем взять сколь угодно близкой к началу координат. Напротив, вторую поверхность мы можем взять сколь угодно близкой к наибольшей из поверхностей семейства, которая еще пересекается интегральными кривыми уравнений (44.5) во внутрь.

Составим теперь производную от функции V по t в силу уравнений (44.3). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = W + \mu\sum_{s=1}^{n}(r_{s1}x_1 + \ldots + r_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}. \tag{44.7}$$

Так как функция W является определенно-отрицательной, то для всех точек, расположенных между поверхностями $V=h_1$ и $V=h_2$, выполняется неравенство $W < -l$, где l — отличное от нуля положительное число. Отсюда следует, что во всех этих точках выражение (44.7) будет принимать отрицательные значения, если только число μ достаточно мало. Следовательно, при достаточно малом μ

все поверхности $V = h$, расположенные между $V = h_1$ и $V = h_2$, пересекаются интегральными кривыми полной системы (44.3) снаружи во внутрь. И это будет иметь место независимо от того, находится ли система (44.3) в области неустойчивости или в области устойчивости.

Следовательно, если точка $x_1, \ldots, x_n$, изображающая систему (44.3), попадает в область между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, то она будет приближаться к началу координат, по крайней мере, до области, ограниченной поверхностью $V = h_1$. Эта область, однако, может быть сделана сколь угодно малой, если μ достаточно мало, т. е. если система находится достаточно близко от границы области устойчивости. И если даже при этом система находится в области неустойчивости, мы можем все же считать, что невозмущенное движение практически устойчиво, так как возмущения, будучи в начальный момент очень малыми, хотя и будут нарастать, все же останутся практически очень малыми (сколь угодно малыми при μ, достаточно малом). Более того, если начальные возмущения не будут очень малыми, то они будут уменьшаться, делаясь в конце концов очень малыми (сколь угодно малыми при μ, достаточно малом). И лишь только когда начальные возмущения достаточно велики и выходят за область, ограниченную поверхностью $V = h_2$, они могут в дальнейшем не уменьшаться.

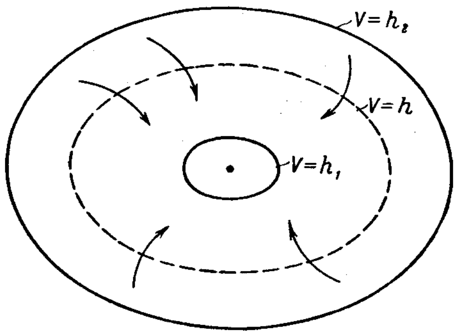

Рис. 10.

Если система находится в области устойчивости, то можно показать, что функцию V можно выбрать таким образом, чтобы не только выражение (44.6), но и выражение (44.7) было определенно-отрицательным [1]). Следовательно, можно положить $h_1 = 0$. Невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым, причем для допускаемых возмущений будут существовать определенные конечные границы, не зависящие от μ, т. е. от степени близости системы к границе области устойчивости.

Таким образом, если на границе области устойчивости система асимптотически устойчива, то вблизи этой границы устойчивость,

[1]) Построенные нами функции Ляпунова для случая одного нулевого корня и для случая пары чисто мнимых корней останутся функциями Ляпунова для системы, которая получится, если, непрерывно меняя коэффициенты первого приближения, сделать вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательными. Для этого нужно будет только подходящим образом выбрать независимые переменные.

если она имеет место, не может перейти в «практическую» неустойчивость. Напротив, неустойчивость, если она имеет место, может рассматриваться с точки зрения практической как устойчивость.

Вышеприведенные геометрические соображения могут быть доказаны строго аналитически. Мы это сделаем в главе VI, где они получатся как частный случай более общей теоремы. Там же будет показано, что все вышеуказанное будет справедливо и в общем случае, когда на границе области устойчивости имеется любое число критических корней.

Допустим теперь, что на рассматриваемом участке границы области устойчивости невозмущенное движение неустойчиво. Тогда как в случае одного нулевого корня, так и в случае пары чисто мнимых корней для уравнений (44.5) будет существовать функция Ляпунова $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы В. Следовательно, выражение (44.6) будет по-прежнему знакоопределенным. Что же касается самой функции V, то она в окрестности начала координат может принимать значения того же знака, что и (44.6). Примем для определенности, что выражение (44.6) определенно-положительно, и рассмотрим область, в которой $V > 0$ (рис. 11). Эта область ограничена поверхностью $V = 0$. Построим в этой области семейство поверхностей $V = h$, где $h > 0$. Так как производная (44.6) положительна, то эти поверхности пересекаются интегральными кривыми уравнений (44.5) в сторону возрастания V.

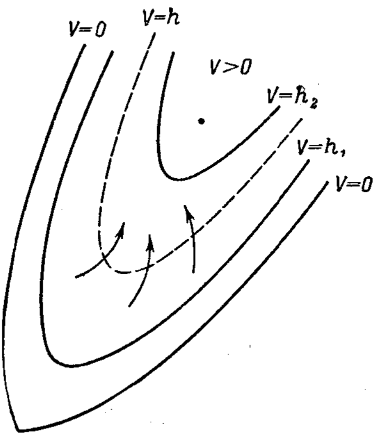

Рис. 11.

Выделим из семейства $V = h$ две поверхности $V = h_1$ и $V = h_2$, где h_1 можно взять сколь угодно малым, так что поверхность $V = h_1$ сколь угодно близка к поверхности $V = 0$. Так как функция (44.6) определенно-положительна, то в области, заключенной между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, она имеет отличный от нуля положительный нижний предел [1]). Но тогда в этой области производная (44.7) будет также положительной, если только величина μ достаточно мала. Следовательно, все поверхности $V = h$, заключенные между поверхностями $V = h_1$ и $V = h_2$, пересекаются интегральными кри-

[1]) Мы рассматриваем, разумеется, во всех наших рассуждениях только те точки, которые лежат в некоторой окрестности начала координат, в которой функция V обладает своими свойствами.

выми не только уравнений (44.5), но и уравнений (44.3) в сторону возрастания V. Поэтому изображающая точка, попав в область между поверхностями $V=h_1$ и $V=h_2$, будет все дальше отбрасываться от начала координат, пока она не выйдет за пределы поверхности $V=h_2$, расположенной на конечном расстоянии от начала координат. Очевидно, мы имеем дело с неустойчивостью, по крайней мере, с точки зрения практической. В самом деле, если даже невозмущенное движение устойчиво, что будет иметь место, если система (44.3) находится в области устойчивости, то область допускаемых начальных возмущений должна быть во всяком случае настолько малой, чтобы поверхность $V=h_1$ была расположена вне ее. Что касается последней, то она при μ, достаточно малом, т. е. при достаточной близости системы к границе области устойчивости, будет расположена сколь угодно близко к началу координат.

Итак, когда на границе области устойчивости невозмущенное движение неустойчиво, то если система находится вблизи указанной границы, безразлично, в области неустойчивости или в области устойчивости, всегда найдутся очень малые (сколь угодно малые при достаточной близости к границе) начальные возмущения, которые будут с течением времени нарастать так, что соответствующее возмущенное движение будет значительно отличаться от невозмущенного.

Все предыдущие рассуждения показывают, что невозмущенное движение системы при близости к границе области устойчивости будет с точки зрения практической устойчивым или неустойчивым, в зависимости от того, будет ли это движение на самой границе устойчивым или неустойчивым в смысле Ляпунова.

В связи с этим те границы области устойчивости, на которых невозмущенное движение устойчиво, называют «безопасными», а те границы, на которых оно неустойчиво, — «опасными». Нахождение «опасных» и «безопасных» границ сводится к решению задачи устойчивости в критических случаях.

Пример. Рассмотрим в качестве примера систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+M\frac{d\varphi}{dt}+k\varphi=-N\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt}=F(\psi),$$

$$\psi=\varphi+\beta\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{a}\eta,$$

описывающих при некоторых упрощающих предположениях движение самолета с автопилотом. Не останавливаясь на выводе этих уравнений [1]), укажем лишь значения входящих в эти уравнения величин.

[1]) Его можно найти, например, в работе: Бутенин Н. В., Автоколебания стенда с автопилотом. Труды Ленингр. воен.-возд. акад., т. 3, 1943.

Эти значения суть следующие: φ — угол рыскания самолета, η — угол поворота руля, ψ — аргумент сервомотора (например, открытие золотника), управляющего рулем, $F(\psi)$ — характеристика сервомотора. Все постоянные M, k, N, β, a положительны. При этом M характеризует естественное демпфирование самолета, N характеризует рулевое устройство, k характеризует статическую устойчивость самолета, β — коэффициент искусственного демпфирования, $\frac{1}{a}$ — коэффициент обратной связи.

Характеристику сервомотора примем в виде

$$F(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3.$$

Тогда, вводя переменные

$$\eta = x_1, \quad \varphi = x_2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = x_3,$$

мы будем иметь следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F(\psi) = \alpha\psi + \gamma\psi^3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -Nx_1 - kx_2 - Mx_3, \\ \psi &= -\frac{1}{a}x_1 + x_2 + \beta x_3. \end{aligned}\right\} \tag{44.8}$$

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет вид

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + p\rho^2 + q\rho + r = 0, \tag{44.9}$$

где

$$p = \frac{\alpha}{a} + M, \quad q = k + \frac{M\alpha}{a} + N\alpha\beta, \quad r = \frac{\alpha k}{a} + N\alpha. \tag{44.10}$$

Для того чтобы это уравнение имело корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства (25.2) Гурвица:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad R = pq - r > 0. \tag{44.11}$$

Эти неравенства определяют область устойчивости. На границе этой области хотя бы одно из неравенств (44.11) обращается в равенство. Из (44.10) видно, что это возможно лишь для последнего из указанных неравенств. Таким образом, граница области устойчивости определяется уравнением

$$R = pq - r = 0. \tag{44.12}$$

При выполнении этого условия уравнение (44.9) имеет, как легко видеть, пару чисто мнимых корней $\pm i\sqrt{q}$. Следовательно, чтобы выделить «опасные» и «безопасные» участки границы, необходимо решить задачу устойчивости для системы (44.8) в критическом случае пары чисто мнимых корней.

Уравнения (44.8) представляют частный случай уравнений (42.11), рассмотренных А. И. Лурье (§ 41). Мы можем поэтому воспользоваться для определения g формулой (42.20). Так как в рассматриваемом случае

$$c=\alpha, \quad \psi_3=\gamma, \quad D(\rho)=\rho^3+M\rho^2+k\rho, \quad \lambda=\sqrt{q},$$

то указанная формула дает:

$$g=\frac{3\gamma}{4(p^2+q)}\left\{\frac{Mq}{\alpha}-p\left(\frac{M}{a}+N\beta\right)\right\}.$$

Вводя безразмерные параметры

$$A=M\beta, \quad B=\frac{M^2}{Na}, \quad \varkappa=\frac{k}{M^2}, \quad \sigma=\frac{N\alpha}{M^3},$$

найдем, что знак g совпадает со знаком величины

$$L=\gamma\left[\varkappa-\sigma^2B(A+B)\right].$$

Если $L<0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а если $L>0$, то оно неустойчиво.

Для величины $R=pq-r$ находим:

$$R=M^3\left[\varkappa-\sigma+\sigma(A+B)(1+\sigma B)\right].$$

Фиксируя параметры $\varkappa$ и σ, рассмотрим плоскость параметров A и B. Нам достаточно при этом рассматривать только первую четверть, так как A и B могут принимать только положительные значения. Предположим, что $\sigma-\varkappa>0$. При этом условии кривая $R=0$, ограничивающая область устойчивости, имеет вид, изображенный на рис. 12. Кривая $L=0$ пересекает кривую $R=0$ в точке W, которая и отделяет «безопасные» участки границы от «опасных». При $\gamma>0$ величина L имеет отрицательные значения справа от кривой $L=0$. Поэтому при $\gamma>0$ участок границы WU является «безопасным», а участок WV — «опасным». При $\gamma<0$ «опасная» и «безопасная» части границы меняются местами.

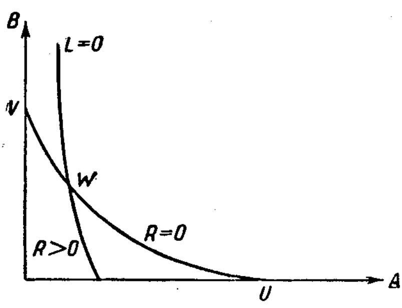

Рис. 12.

При $\sigma-\varkappa<0$ кривая $R=0$ не проходит в области положительных A и B.

ГЛАВА V.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ.

А. ТЕОРЕМЫ ВТОРОГО МЕТОДА ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ.

§ 45. Некоторые определения.

Периодические движения, изучению которых посвящена настоящая глава, являются наиболее простым классом неустановившихся движений. Основным методом исследования устойчивости такого рода движений будет по-прежнему второй метод Ляпунова. Нам нужно будет поэтому изложить сначала основные теоремы второго метода Ляпунова в их общей формулировке, которую они имеют для неустановившихся движений.

Введем некоторые определения. Рассмотрим функцию $V(t, x_1, \ldots \ldots, x_n)$, заданную в области

$$t \geqslant t_0 > 0, \quad |x_s| \leqslant h, \tag{45.1}$$

где t_0 и h — постоянные. Мы будем предполагать, что функция V обладает в указанной области непрерывными частными производными по всем переменным и что она обращается в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Следуя Ляпунову, будем говорить, что V допускает *бесконечно малый высший предел*, если для любого положительного числа λ можно найти другое положительное число μ, такое, что при всех значениях $t, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant \mu,$$

будет выполняться неравенство

$$|V(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \lambda.$$

Другими словами, функция V допускает бесконечно малый высший предел, если она стремится к нулю при $\sum x_s^2 \to 0$ равномерно относительно t. Так, например, функция

$$V = (x_1 + \ldots + x_n) \sin t$$

допускает бесконечно малый высший предел, а функция

$$V = \sin[t(x_1 + \ldots + x_n)]$$

такого предела не допускает, несмотря на то, что она ограничена.

Функция V называется *знакопостоянной*, если при t_0 достаточно большом и h достаточно малом она не может принимать в области (45.1) значений какого-либо определенного знака.

Таким образом, знакопостоянство для функций, зависящих от t, определяется так же, как и для функций, не зависящих от t. Несколько иначе обстоит дело с понятием *знакоопределенности*, а именно: функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ называется *определенно-положительной*, если она в области (45.1) при t_0 достаточно большом и h достаточно малом удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{45.2}$$

где $W(x_1, \ldots, x_n)$ — не зависящая от t определенно-положительная функция. Аналогично функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ называется *определенно-отрицательной*, если она при тех же условиях удовлетворяет неравенству

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant -W(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, необращение в нуль в области (45.1) не является достаточным условием знакоопределенности для функций, зависящих от t, так что, например, функция

$$V = e^{-t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

несмотря на то, что она обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, не является знакоопределенной, так как она при фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ стремится к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, для нее не может выполняться неравенство (45,2). Напротив, функции

$$V_1 = (2 + \sin t) \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \quad V_2 = (-2 + \sin t) \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

будут знакоопределенными, причем первая из них будет определенно-положительной, а вторая определенно-отрицательной, так как

$$V_1 \geqslant \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \quad V_2 \leqslant -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Легко дать геометрическую интерпретацию знакоопределенных функций, зависящих от t. С этой целью рассмотрим пространство переменных $x_1, \ldots, x_n$ и построим систему поверхностей $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$, рассматривая t как параметр. Пусть c_1 — какое-нибудь достаточно малое значение c. Тогда уравнение $V = c_1$ представит при каждом значении t замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Придавая t все возможные для него значения, мы получим систему поверхностей, которую мы можем рассматривать как одну подвижную поверхность. Наряду с ней рассмотрим неподвижную поверхность $W(x_1, \ldots, x_n) = c_1$. Допустим, что V — функция определенно-положительная. Легко видеть, что поверхность $V = c_1$ при своем движении все время остается внутри поверхности $W = c_1$. Действительно, во всех точках, где W принимает значения c_1, функция V на основании (45.2) принимает значения, большие или равные c_1, и следовательно, все эти точки лежат вне поверхности $V = c_1$ или на ней.

Если функция V, будучи знакоопределенной, допускает еще бесконечно малый высший предел, то поверхность $V = c_1$ при своем движении будет все время оставаться вне некоторой достаточно малой окрестности начала координат. Действительно, если бы указанная поверхность в какой-нибудь момент времени пересекала сколь угодно малую окрестность начала координат, то это означало бы, что при указанном значении t на этой поверхности имеются точки, для которых выполняется неравенство

$$|x_s| \leqslant \mu, \tag{45.3}$$

где μ — сколь угодно малая положительная постоянная. Но так как V допускает бесконечно малый высший предел, то она при выполнении (45.3) и при любом значении $t \geqslant t_0$ будет сколь угодно малой, если только μ достаточно мало и, следовательно, будет меньше, чем c_1. Это и показывает, что все точки поверхности $V = c_1$ лежат вне области (45.3), если μ достаточно мало.

§ 46. Теоремы Ляпунова об устойчивости для неустановившихся движений.

Мы переходим теперь к изложению основных теорем второго метода Ляпунова для неустановившихся движений.

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{46.1}$$

где функции X_s определены в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H. \tag{46.2}$$

Мы будем предполагать, что в указанной области функции X_s являются непрерывными и удовлетворяют некоторым общим условиям, обеспечивающим существование для уравнений (46.1) единственного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Первая основная теорема Ляпунова, которую мы в дальнейшем будем называть теоремой I, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема I. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (46.1) *можно найти знакоопределенную функцию* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *для которой производная по времени, составленная в силу этих уравнений, т. е. выражение*

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s, \tag{46.3}$$

есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V, *или тождественно обращается в нуль, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Допустим для определенности, что V — функция положительная. Следовательно, существует такое достаточно большое число t_0 и такое достаточно малое число $h \leqslant H$, что в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{46.4}$$

выполняется неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{46.5}$$

где W — некоторая не зависящая от t определенно-положительная функция. Кроме того, в этой же области выражение (46.3) может принимать только отрицательные или равные нулю значения.

Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Мы будем предполагать, что во всяком случае $\varepsilon < h$. Рассмотрим совокупность всевозможных значений величин $x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \varepsilon, \tag{46.6}$$

и обозначим через l точный нижний предел функции W при этом условии. В силу знакоопределенности W число l положительно и отлично от нуля. В силу (46.5) имеем:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant l \quad \text{при } x = \varepsilon. \tag{46.7}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения. Предположим, что начальные значения x_s^0 этих функций при $t = t_0$ выбраны согласно неравенствам

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \tag{46.8}$$

где η настолько мало, что

$$V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) < l. \tag{46.9}$$

В силу того, что $V(t_0, 0, \ldots, 0) = 0$, такой выбор числа η, очевидно, возможен. Мы будем предполагать, что число η во всяком случае меньше ε. Тогда неравенства

$$|x_s| < \varepsilon, \tag{46.10}$$

выполняясь в начальный момент времени, будут выполняться, по крайней мере, при $t - t_0$ достаточно малом, так как функции $x_s(t)$ изменяются с течением времени непрерывно. Покажем, что эти неравенства будут выполняться при всех $t > t_0$. В самом деле, если бы эти неравенства когда-нибудь нарушились, то должен был бы существовать такой момент времени $t = T$, для которого хотя бы одно из этих неравенств перешло бы в равенство. Другими словами, мы имели бы

$$x(T) = \max\{|x_1(T)|, \ldots, |x_n(T)|\} = \varepsilon$$

и, следовательно, на основании (46.7)

$$V(T, x_1(T), \ldots, x_n(T)) \geqslant l. \tag{46.11}$$

С другой стороны, так как $\varepsilon < h$, то во всем интервале времени (t_0, T) выполняются неравенства (46.4), а следовательно, во всем этом интервале $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Это дает:

$$V(T, x_1(T), \ldots, x_n(T)) \leqslant \leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

что на основании (46.9) противоречит (46.11). Таким образом, неравенства (46.10) должны выполняться при всех $t > t_0$, откуда и вытекает устойчивость движения.

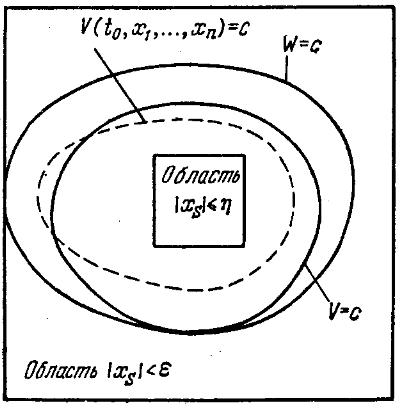

Рис. 13.

Доказанная теорема, так же как и в случае установившегося движения, допускает простое геометрическое истолкование. С этой целью рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ область $|x_s| \leqslant \varepsilon$ (рис. 13). Выберем c настолько малым, чтобы замкнутая поверхность $W(x_1, \ldots, x_n) = c$ целиком лежала в указанной области. Рассмотрим, далее, движущуюся поверхность $V(t, x_1, \ldots, x_n) = c$. Как было показано в предыдущем параграфе, эта поверхность все время лежит внутри поверхности $W = c$, а следовательно, и подавно внутри области $|x_s| \leqslant \varepsilon$. Допустим, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$, движение которой определяется уравнениями (46.1), в какой-нибудь момент времени находилась внутри поверхности $V = c$. Тогда она будет все время оставаться внутри этой поверхности. Действительно, если бы она вышла наружу, то в тот момент времени, когда она пересекала бы указанную поверхность, производная $\frac{dV}{dt}$ в точке пересечения была бы положительной, что противоречит условию теоремы. Отсюда непосредственно вытекает, что всякое движение, начавшееся в области $|x_s| \leqslant \eta$, целиком расположенной внутри поверхности $V(t_0, x_1, \ldots, x_n) = c$, будет всегда оставаться в области $|x_s| \leqslant \varepsilon$.

Переходим теперь к доказательству второй основной теоремы Ляпунова, являющейся обобщением теоремы Б. Эту теорему мы будем в дальнейшем называть теоремой II.

Теорема II. *Если при выполнении условий теоремы* I *производная* $\frac{dV}{dt}$ *является знакоопределенной, а сама функция* V *допускает бесконечно малый высший предел, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.*

Доказательство. Допустим, что V есть функция определенно-положительная и, следовательно, $\frac{dV}{dt}$ — определенно-отрицательная. Таким образом, в области (46.4) будет выполняться не только неравенство (46.5), но и неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{46.12}$$

где W_1 — не зависящая от t определенно-положительная функция.

Будем рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения, предполагая, что начальные значения $x_s^0 = x_s(t_0)$ этих величин удовлетворяют неравенствам (46.8). Так как невозмущенное движение во всяком случае устойчиво, то величину η можно выбрать настолько малой, чтобы при всех $t > t_0$ величины x_s оставались в области (46.4). Тогда на основании (46.12) производная от функции $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет все время отрицательной и, следовательно, эта функция с неограниченным возрастанием t будет стремиться к некоторому пределу, оставаясь все время больше этого предела. Покажем, что этот предел равен нулю. Допустим противное, что этот предел равен некоторой положительной величине α, отличной от нуля. Тогда при всех $t > t_0$ будет выполняться неравенство

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > \alpha. \tag{46.13}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то из этого неравенства вытекает, что

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{46.14}$$

где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Действительно, если бы такого числа λ не существовало, т. е. если бы величина $x(t)$ была меньше любого сколь угодно малого числа, то и величина $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, как это следует из определения бесконечно малого высшего предела, была бы также сколь угодно малой, что противоречит (46.13).

Но если при всех $t > t_0$ выполняется неравенство (46.14), то (46.12) показывает, что все время будет также выполняться неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l_1,$$

где l_1 — отличное от нуля положительное число, являющееся точным нижним пределом функции $W_1(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при условии (46.14). Следовательно, при всех $t > t_0$ будем иметь:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) - l_1(t - t_0),$$

что, очевидно, находится в противоречии с (46.13). Полученное противоречие показывает, что функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ с неограниченным возрастанием t стремится к нулю. Следовательно, то же самое будет и для функции $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, откуда непосредственно следует

$$\lim_{t \to \infty} x_s(t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

что и доказывает теорему [1]).

§ 47. Теорема Ляпунова о неустойчивости для неустановившихся движений.

Переходим теперь к изложению третьей основной теоремы Ляпунова, дающей критерий неустойчивости.

Теорема III. *Если существует допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения, есть функция знакоопределенная, а сама функция V при значениях x_s, сколь угодно малых, и при значениях t, сколь угодно больших, может принимать значения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Примем для определенности, что производная $\frac{dV}{dt}$ положительна. Следовательно, в области

$$t \geqslant t_0 > 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{47.1}$$

выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{47.2}$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 522).

где $W(x_1, \ldots, x_n)$ — не зависящая от t определенно-положительная функция.

Пусть η — произвольное сколь угодно малое положительное число. Рассмотрим решение $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения, для которого начальные значения $x_s^0 = x_s(t_0)$ выбраны согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta, \quad V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) > 0.$$

Согласно условиям теоремы такой выбор величин x_s^0 возможен, как бы мало ни было число η. Покажем, что рассматриваемое решение обязательно выйдет в некоторый момент времени из области (47.1).

В самом деле, допустим, что это решение все время остается в области (47.1). Тогда на основании (47.2) производная от функции $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет во всяком случае положительной, и мы, следовательно, имеем:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{47.3}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то из (47.3) следует:

$$x(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda, \tag{47.4}$$

где λ — достаточно малое положительное число. Но тогда из (47.2) вытекает, что

$$\frac{dV(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \tag{47.5}$$

где отличное от нуля положительное число l есть точный нижний предел функции $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при условии (47.4).

Неравенство (47.5) дает:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \geqslant$$
$$\geqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + l(t - t_0),$$

что невозможно, так как функция V, допуская бесконечно малый высший предел, будет во всяком случае ограниченной.

Из полученного противоречия вытекает, что решение $x_s = x_s(t)$ в некоторый момент времени обязательно покинет не зависящую от начальных значений x_s^0 область (47.1), и так как эти начальные значения сколь угодно малы, то невозмущенное движение неустойчиво. Таким образом, теорема доказана.

Функции, удовлетворяющие теоремам I, II или III, мы будем, так же как и в случае установившихся движений, называть *функциями Ляпунова*.

§ 48. Теорема Н. Г. Четаева.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема III, дающая критерий неустойчивости, обладает одним принципиальным недостатком. Этот недостаток заключается в том, что функция V должна обладать определенными свойствами во всей области (47.1). В частности, во всей этой области производная $\frac{dV}{dt}$ должна быть положительной, что обозначает, что все интегральные кривые, расположенные в области (47.1), должны пересекать поверхности $V=c$ в определенную сторону. Между тем, для того чтобы обнаружить неустойчивость движения в тех случаях, когда она действительно имеет место, достаточно обнаружить в сколь угодно малой окрестности начала координат хотя бы одну неустойчивую интегральную кривую, а для того чтобы обнаружить такого рода интегральную кривую, достаточно знать поведение интегральных кривых не во всей области (47.1), а только в некоторой ее части. В связи с этим необходимо, таким образом, обобщить теорему Ляпунова, чтобы приходилось рассматривать только некоторые части окрестности начала координат. Такого рода обобщение было дано Н. Г. Четаевым[1]).

Назовем областью $V>0$ какую-нибудь область окрестности

$$|x_s| \leqslant h \tag{48.1}$$

начала координат пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, ограниченную поверхностью $V=0$, в которой функция V принимает положительные значения.

Допустим, что функция V обладает следующими свойствами:

1) При сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V>0$.

2) В области $V>0$ функция V ограничена.

3) В области $V>0$ производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу уравнений возмущенного движения, принимает положительные значения и при этом для всех значений t, $x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha,$$

где α — какое-нибудь положительное число, выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} \geqslant l,$$

где l — также некоторое положительное число, зависящее от α.

Мы можем теперь теорему Н. Г. Четаева сформулировать следующим образом.

---

[1]) Четаев Н. Г., Одна теорема о неустойчивости. ДАН, т. I, № 9, 1934.

Теорема. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию, удовлетворяющую условиям* 1), 2), 3), *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Зададимся окрестностью (48.1) начала координат. Согласно условию, если h достаточно мало, то в этой окрестности имеется область $V > 0$. При этом в указанной области при всяком значении t имеются точки, сколь угодно близкие к началу координат.

Рассмотрим решение $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения с начальными значениями $x_s^0 = x_s(t_0)$, выбранными численно сколь угодно малыми и такими, что

$$V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = V_0 > 0.$$

Так как в области $V > 0$ производная $\frac{dV}{dt}$ положительна, то функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ будет возрастать и, следовательно, величины $x_s(t)$ будут оставаться в области $V > 0$, по крайней мере, до тех пор, пока не нарушаются неравенства (48.1). Покажем, что в некоторый момент времени неравенства (48.1) действительно нарушаются.

Допустим противное, что неравенства (48.1) никогда не нарушаются. Следовательно, все время выполняется условие

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V_0,$$

откуда по свойству функции V вытекает, что

$$\frac{dV(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt} \geqslant l, \tag{48.2}$$

где l — некоторое отличное от нуля положительное число. Из (48.2) находим:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqslant V_0 + l(t - t_0),$$

что невозможно, так как в области $V > 0$ функция V ограничена.

Таким образом, в некоторый момент времени решение $x_s(t)$ непременно покинет область (48.1), и так как величины x_s^0 могут быть взяты сколь угодно малыми, то невозмущенное движение неустойчиво.

Б. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

§ 49. Постановка задачи.

Мы переходим теперь к рассмотрению устойчивости периодических движений. Мы будем предполагать, что правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (46.1) являются по отношению к t периодическими функциями некоторого заданного периода ω, Мы будем, кроме того, предполагать, что эти уравнения могут быть представлены в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X'_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (49.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где p_{si} — непрерывные периодические функции t периода ω, а функции X'_s в том или ином смысле малы по сравнению с линейными членами.

Так же как и в случае установившихся движений, нам предстоит разрешить три следующих вопроса:

1) установить критерии устойчивости и неустойчивости для системы линейных уравнений первого приближения;

2) установить необходимые и достаточные условия, при которых задача устойчивости для полной системы (49.1) решается первым приближением;

3) указать методы решения задачи устойчивости в критических случаях, когда рассмотрения одного лишь первого приближения недостаточно.

Мы начинаем с рассмотрения первого вопроса. Для этого нам придется изложить теорию линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Так как эта теория имеет большое значение в различных вопросах техники и физики, то мы остановимся на ней подробно.

§ 50. Характеристическое уравнение системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (50.1)$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции t периода ω.

Пусть $x_{sj}(t)$ — фундаментальная система решений уравнений (50.1). Здесь, как и в дальнейшем, первый индекс обозначает номер функции в каком-нибудь решении, а второй индекс — номер решения. Если мы во всех функциях $x_{sj}(t)$ какого-нибудь j-го решения заменим t на $t+\omega$, то в силу периодичности коэффициентов p_{sj} мы снова получим решение, так как функции $x_{sj}(t+\omega)$ будут по-прежнему удовлетворять уравнениям (50.1), если им удовлетворяли функции $x_{sj}(t)$. Полученное решение не будет совпадать с первоначальным решением $x_{sj}(t)$, но как всякое решение уравнений (50.1) оно необходимо должно являться линейной комбинацией фундаментальной системы решений $x_{sj}(t)$. Следовательно, имеем:

$$x_{sj}(t+\omega) = a_{1j}x_{s1}(t) + a_{2j}x_{s2}(t) + \ldots + a_{nj}x_{sn}(t), \qquad (50.2)$$

где $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ — некоторые постоянные. Меняя j от 1 до n, мы получим n^2 величин a_{sj}.

Составим уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0. \qquad (50.3)$$

Это уравнение, играющее основную роль в теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, называется *характеристическим уравнением, соответствующим периоду* ω, или, короче, *характеристическим уравнением*.

Установим некоторые основные свойства характеристического уравнения.

1. *Характеристическое уравнение не зависит от выбранной фундаментальной системы.*

Выберем вместо фундаментальной системы x_{sj} другую фундаментальную систему y_{sj}. Для нее будем иметь:

$$y_{sj}(t+\omega) = c_{1j}y_{s1}(t) + c_{2j}y_{s2}(t) + \ldots + c_{nj}y_{sn}(t), \qquad (50.4)$$

где c_{sj}, вообще говоря, отличны от a_{sj}. Покажем, однако, что корни характеристического уравнения, составленного из коэффициентов c_{sj}, совпадают с корнями уравнения (50.3).

В самом деле, так как величины y_{sj} образуют фундаментальную систему, то должно быть:

$$y_{sj}(t) = b_{1j}x_{s1}(t) + b_{2j}x_{s2}(t) + \ldots + b_{nj}x_{sn}(t) \qquad (50.5)$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где b_{sj} — некоторые постоянные, причем определитель матрицы $\{b_{sj}\}$ отличен от нуля. Обозначим через $x(t)$ матрицу функций $x_{sj}(t)$, через $y(t)$ — матрицу функций $y_{sj}(t)$ и, соответственно, через a, b, c — матрицы коэффициентов a_{sj}, b_{sj}, c_{sj}. Тогда зависимости (50.2), (50.4) и (50.5) могут быть представлены следующим образом:

$$x(t+\omega) = x(t)\,a, \quad y(t+\omega) = y(t)\,c, \quad y(t) = x(t)\,b.$$

Далее имеем:

$$y(t+\omega) = x(t+\omega)\,b = x(t)\,ab = y(t)\,b^{-1}ab$$

и, следовательно,

$$c \equiv b^{-1}ab.$$

Поэтому, если E — единичная матрица, то характеристический определитель из коэффициентов c_{sj} может быть представлен следующим образом:

$$|c-\rho E| \equiv |b^{-1}ab-\rho E| \equiv |b^{-1}(a-\rho E)\,b| \equiv$$
$$\equiv |b^{-1}|\cdot|a-\rho E|\cdot|b| \equiv |a-\rho E|,$$

что и доказывает наше предложение.

2. *Характеристическое уравнение не изменится, если систему* (50.1) *подвергнуть неособенному линейному преобразованию с периодическими коэффициентами периода* ω.

В самом деле, преобразуем уравнения (50.1) при помощи подстановки

$$y_s = q_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + q_{sn}(t)\,x_n \qquad (s=1, 2, \ldots, n), \tag{50.6}$$

где q_{sj} — непрерывные и дифференцируемые периодические функции t периода ω и притом такие, что определитель $|q_{sj}|$ отличен от нуля при всех значениях t на отрезке $[0, \omega]$.

Подставляя в (50.6) фундаментальную систему $x_{sj}(t)$, мы получим следующую фундаментальную систему решений преобразованных уравнений:

$$y_{sj}(t) = q_{s1}(t)\,x_{1j}(t) + q_{s2}(t)\,x_{2j}(t) + \ldots + q_{sn}(t)\,x_{nj}(t),$$

или в матричном обозначении

$$y(t) = q(t)\,x(t),$$

где q — матрица коэффициентов q_{sj}. Отсюда находим, что

$$x(t) = q^{-1}(t)\,y(t),$$
$$y(t+\omega) = q(t+\omega)\,x(t+\omega) = q(t)\,x(t)\,a = q(t)\,q^{-1}(t)\,y(t)\,a = y(t)\,a$$

и, следовательно, характеристическое уравнение преобразованной системы совпадает с характеристическим уравнением исходной системы.

Допустим, что рассматриваемая фундаментальная система определяется начальными условиями

$$x_{sj}(0) = \begin{cases} 1 & (s=j), \\ 0 & (s\neq j). \end{cases}$$

Тогда, полагая в (50.2) $t=0$, будем иметь:

$$x_{sj}(\omega) = a_{sj} \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n),$$

и следовательно, характеристическое уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x_{11}(\omega)-\rho & x_{12}(\omega) & \ldots & x_{1n}(\omega) \\ x_{21}(\omega) & x_{22}(\omega)-\rho & \ldots & x_{2n}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(\omega) & x_{n2}(\omega) & \ldots & x_{nn}(\omega)-\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{50.7}$$

Этим видом характеристического уравнения мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Воспользуемся им, в частности, для вывода важной формулы, дающей выражение свободного члена характеристического уравнения. С этой целью рассмотрим детерминант Вронского

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Как известно, при любых t_0 и t справедливо соотношение

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Полагая в этом соотношении $t_0 = 0$, $t = \omega$, получим:

$$\Delta(\omega) = \exp \int_{0}^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Сравнивая с (50.7), найдем, что если характеристическое уравнение представить в виде

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\rho + A_n = 0,$$

то свободный член A_n определяется формулой

$$(-1)^n A_n = \exp \int_{0}^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt. \tag{50.8}$$

§ 51. Аналитический вид решений в случае простых корней характеристического уравнения.

Система (50.1) не интегрируется в замкнутой форме. Можно, однако, указать общий аналитический вид ее решений.

Пользуясь каким-нибудь определением логарифмов, рассмотрим величины

$$\alpha_k = \frac{1}{\omega} \ln \rho_k, \tag{51.1}$$

где ρ_k — корни характеристического уравнения. Эти величины называются *характеристическими показателями* системы (50.1).

Покажем, что для каждого корня ρ_k характеристического уравнения можно подобрать частное решение уравнений (50.1) вида

$$x_s(t)=e^{\alpha_k t}\varphi_s(t) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n,), \tag{51.2}$$

где φ_s — некоторые периодические функции времени периода ω.

Это решение обладает тем свойством, что для него выполняются соотношения

$$x_s(t+\omega)=\rho_k x_s(t). \tag{51.3}$$

В самом деле, имеем:

$$x_s(t+\omega)=e^{\alpha_k t}\cdot e^{\alpha_k \omega}\varphi_s(t+\omega)=\rho_k e^{\alpha_k t}\varphi_s(t).$$

Наоборот, если для какого-нибудь решения $x_s(t)$ выполняются соотношения (51.3), то это решение необходимо имеет вид (51.2). Это непосредственно следует из того, что при выполнении (51.3) функции $x_s e^{-\alpha_k t}$ будут периодическими и, следовательно, функции x_s будут иметь вид (51.2).

Таким образом, задача сводится к определению решения, удовлетворяющего соотношениям (51.3). Это решение, если оно существует, должно являться линейной комбинацией фундаментальной системы. Таким образом, имеем:

$$x_s(t)=\beta_1 x_{s1}(t)+\beta_2 x_{s2}(t)+\ \ldots\ +\beta_n x_{sn}(t),$$

где $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ — некоторые постоянные. Подставляя (51.3), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{si}(t+\omega)=\rho_k\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{si}(t)$$

и, следовательно, на основании (50.2)

$$\sum_{i,\ l=1}^{n}\beta_i a_{li} x_{sl}(t)=\rho_k\sum_{l=1}^{n}\beta_l x_{sl}(t).$$

Приравнивая коэффициенты при $x_{sl}(t)$, получим, что постоянные $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$a_{l1}\beta_1+\ \ldots\ +(a_{ll}-\rho_k)\beta_l+\ \ldots\ +a_{ln}\beta_n=0. \tag{51.4}$$

Так как ρ_k является корнем характеристического уравнения, то система (51.4) допускает, по крайней мере, одно решение, отличное от тривиального $\beta_1=\ \ldots\ =\beta_n=0$. Таким образом, каждому корню характеристического уравнения отвечает, по крайней мере, одно частное решение дифференциальных уравнений (50.1), имеющее вид (51.2). Корню ρ_k может отвечать более чем одно решение вида (51.2). Этих решений будет, очевидно, столько, сколько независимых решений имеет линейная алгебраическая система (51.4). Следовательно, этих решений будет $n-p$, если ранг определителя $D(\rho_k)$ равен p. Ранг указанного определителя может быть меньше чем $n-1$ лишь только в том случае, когда корень ρ_k является кратным. Поэтому каждому простому корню характеристического уравнения отвечает одно и только одно решение вида (51.2).

Установив это, допустим сначала, что все корни характеристического уравнения являются простыми. Тогда каждому такому корню будет отвечать одно и только одно решение вида (51.2). Рассматривая все корни характеристического уравнения, мы получим n различных частных решений уравнений (50.1). Эти решения будут, очевидно, независимыми и образуют, следовательно, фундаментальную систему.

§ 52. Аналитический вид решений в случае кратных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Допустим для определенности, что кратность корня ρ_k равна μ. Если этот корень не обращает в нуль, по крайней мере, одного из миноров $(n-1)$-го порядка характеристического определителя, т. е. если ранг этого определителя равен $n-1$, то, как мы сейчас покажем, для этого корня может быть построено μ независимых частных решений уравнений (50.1) вида

$$x_{si}(t)=e^{\alpha_k t}P_{si}(t) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu). \tag{52.1}$$

Здесь P_{si} — полиномы относительно t с периодическими (периода ω) коэффициентами. При этом степени полиномов P_{s1} не превосходят $\mu-1$, и степень хотя бы одного из них равна $\mu-1$. Таким образом, можно написать:

$$P_{s1}=\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\varphi_{s1}(t)+\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\varphi_{s2}(t)+\ \ldots\ +t\varphi_{s,\,\mu-1}(t)+\varphi_{s\mu}(t),$$

где $\varphi_{sj}(t)$ — периодические функции t, причем хотя бы одна из функций φ_{s1} не равна тождественно нулю.

Что же касается полиномов $P_{s2},\ \ldots,\ P_{s\mu}$, то они могут быть получены из P_{s1} последовательным дифференцированием по t в предположении, что φ_{sj} являются постоянными. Имеем:

$$P_{s2}=\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\varphi_{s1}(t)+\ \ldots\ +\varphi_{s,\,\mu-1},$$
$$P_{s3}=\frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\varphi_{s1}(t)+\ \ldots\ +\varphi_{s,\,\mu-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{s\mu}=\varphi_{s1}(t).$$

Пусть

$$P = t^m\varphi_1(t) + t^{m-1}\varphi_2(t) + \ldots + t\varphi_m(t) + \varphi_{m+1}(t)$$

— произвольный полином с периодическими коэффициентами $\varphi_i(t)$. Обозначим через $\frac{D}{Dt}$ оператор, определяемый соотношением

$$\frac{DP}{Dt} = mt^{m-1}\varphi_1(t) + (m-1)t^{m-2}\varphi_2(t) + \ldots + 2t\varphi_{m-1}(t) + \varphi_m(t).$$

Тогда решения (52.1) могут быть записаны в виде

$$x_{si}(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(i-1)}P_s}{Dt^{i-1}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \mu), \quad (52.2)$$

где $P_s = P_{s1}$. Мы будем говорить, что решения (52.2) образуют одну группу и что в рассматриваемом случае кратному корню отвечает одна группа решений.

Допустим теперь, что кратный корень ρ_k обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка $n-p+1$ включительно, не обращая в нуль хотя бы один из миноров $(n-p)$-го порядка, так что ранг характеристического определителя равен $n-p$. В этом случае рассматриваемому корню будет по-прежнему соответствовать μ решений, но эти решения разбиваются на p самостоятельных групп. И если мы обозначим через n_j число решений в j-й группе $(n_1 + n_2 + \ldots + n_p = \mu)$, то решения этой группы имеют вид

$$x_{si}^{(j)}(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(i-1)}P_s^{(j)}}{Dt^{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_j;\ s = 1, 2, \ldots, n), \quad (52.3)$$

где

$$P_s^{(j)} = \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\varphi_{s1}^{(j)} + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\varphi_{s2}^{(j)} + \ldots + \varphi_{sn_j}^{(j)}$$

и $\varphi_{si}^{(j)}$ — периодические функции t периода ω, причем хотя бы одна из функций $\varphi_{s1}^{(j)}$ не обращается тождественно в нуль.

Число p не может, очевидно, превзойти кратности μ рассматриваемого корня, но может этого предела достигать. В последнем случае каждая группа будет состоять из одного решения. Каждое такое решение будет при этом иметь вид (51.2).

Все эти утверждения можно считать доказанными при $\mu = 1$.

Поэтому, чтобы доказать их в общем случае, мы можем применить метод индукции, а именно: мы допустим, что все эти утверждения справедливы, если кратность корня равна $\mu - 1$, и покажем, что они остаются справедливыми, если эта кратность равна μ.

С этой целью заметим прежде всего, что корню ρ_k соответствует по доказанному, по крайней мере, одно решение системы (50.1) вида

$$x_s(t) = e^{\alpha_k t}\varphi_s(t) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{52.4}$$

где φ_s—периодические функции. Эти функции не могут одновременно обратиться в нуль ни при каких значениях t. Действительно, если бы при каком-нибудь значении $t = T$ все функции φ_s обратились в нуль, то, принимая это значение t за начальное, мы имели бы два различных частных решения уравнений (50.1) с нулевыми начальными значениями: решение (52.4) и тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$, что невозможно.

Перейдем теперь в уравнениях (50.1) от переменных x_s к переменным y_s при помощи подстановки

$$x_s = \varphi_s y_1 + b_{s2}y_2 + \ldots + b_{sn}y_n, \tag{52.5}$$

где $b_{s\alpha}$ — произвольные непрерывные периодические функции t периода ω, подчиненные лишь условию, что подстановка (52.5) не является особенной, т. е. что определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ни при каких значениях t не обращается в нуль. В силу того, что функции φ_s не могут обращаться в нуль одновременно, такой выбор функций $b_{s\alpha}$ может быть сделан бесчисленным множеством способов.

Преобразованная система примет вид

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + q_{s2}y_2 + \ldots + q_{sn}y_n \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{52.6}$$

где $q_{s\alpha}$—периодические функции t периода ω. Так как система (50.1) допускает частное решение (52.4), то преобразованная система должна допускать частное решение

$$y_1 = e^{\alpha_k t},\ y_2 = \ldots = y_n = 0. \tag{52.7}$$

Подставляя это решение в (52.6), найдем, что все коэффициенты $q_{21}, q_{31}, \ldots, q_{n1}$ равны нулю, а коэффициент q_{11} равен α_k. Следовательно, система (52.6) распадается на систему

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s2}y_2 + q_{s3}y_3 + \ldots + q_{sn}y_n \quad (s = 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{52.8}$$

состоящую из $n - 1$ уравнений, и на одно уравнение

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha_k y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n. \tag{52.9}$$

Уравнения (52.8) образуют самостоятельную систему, определяющую $n-1$ функций $y_2, \ldots, y_n$. После того как эти функции будут найдены, мы сумеем найти y_1 из уравнения (52.9) при помощи простой квадратуры. В частности, если мы найдем q $(q \leqslant n-1)$ линейно независимых решений $y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ уравнений (52.8), то функции $y_{1i}(t), y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$, где y_{1i} определяются формулами

$$y_{1i} = e^{\alpha_k t} \int_0^t e^{-\alpha_k t} (q_{12} y_{2i} + \ldots + q_{1n} y_{ni})\, dt, \tag{52.10}$$

определяют q независимых решений полной системы (52.8) и (52.9). Присоединяя к ним уже известное решение (52.7), мы получим $q+1$ решений этой системы, которые будут, очевидно, также независимыми.

Составим характеристическое уравнение полной системы (52.8) и (52.9). Рассмотрим с этой целью фундаментальную систему решений $y_{2i}(t), y_{3i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ уравнений (52.8), определяемую начальными условиями

$$y_{si}(0) = \begin{cases} 1 & (s = i+1), \\ 0 & (s \neq i+1). \end{cases}$$

Тогда система функций $y_{1i}(t), y_{2i}(t), \ldots, y_{ni}(t)$, где $y_{1i}(t)$ определяются формулами (52.10), вместе с решением (52.7) образуют фундаментальную систему решений системы (52.8) и (52.9) как раз того вида, который фигурирует в форме (50.7) характеристического уравнения. Поэтому характеристическое уравнение системы (52.8) и (52.9) может быть представлено в виде

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \rho_k - \rho & 0 & \ldots & 0 \\ y_{11}(\omega) & y_{21}(\omega) - \rho & \ldots & y_{n1}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,n-1}(\omega) & y_{2,n-1}(\omega) & \ldots & y_{n,n-1}(\omega) - \rho \end{vmatrix} =$$
$$= (\rho_k - \rho) D'(\rho) = 0, \tag{52.11}$$

где $D'(\rho)$ — характеристический определитель системы (52.8).

Как было показано в § 50, характеристическое уравнение остается инвариантным при линейном преобразовании переменных. Поэтому уравнение (52.11) совпадает с характеристическим уравнением исходной системы (50.1). Что же касается последнего, то для него ρ_k является корнем μ-й кратности. Следовательно, из (52.11) вытекает, что ρ_k является корнем $(\mu-1)$-й кратности характеристического уравнения системы (52.8).

Но тогда, по предположению, этому корню отвечает $\mu-1$ частных решений уравнений (52.8), распадающихся на группы вышеуказанного типа. Допустим для определенности, что имеются две такого рода группы. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми при любом числе групп. Пусть первая группа состоит из l решений

$$y_{s\alpha}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}u_{s1}+\ldots+tu_{s,\,l-1}+u_{sl}\right)$$
$$(s=2,\ \ldots,\ n;\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{52.12}$$

а вторая группа из m решений

$$\overset{*}{y}_{s\beta}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}v_{s1}+\ldots+tv_{s,\,m-1}+v_{sm}\right) \tag{52.13}$$
$$(s=2,\ \ldots,\ n;\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Здесь u_{sj}, v_{sj} — периодические функции t и $l+m=\mu-1$. Как было указано выше, функции (52.12) и (52.13) вместе с функциями

$$\left.\begin{aligned}
y_{1\alpha}&=e^{\alpha_k t}\int_0^t e^{-\alpha_k t}\left(q_{12}y_{2\alpha}+\ldots+q_{1n}y_{n\alpha}\right)dt,\\
y_{1\beta}^{*}&=e^{\alpha_k t}\int_0^t e^{-\alpha_k t}\left(q_{12}y_{2\beta}^{*}+\ldots+q_{2n}y_{n\beta}^{*}\right)dt\\
&(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m)
\end{aligned}\right\} \tag{52.14}$$

образуют систему $\mu-1$ независимых решений уравнений (52.8) и (52.9).

На основании (52.12) и (52.13) подинтегральные выражения в функциях (52.14) не содержат показательных функций, и мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned}
y_{1\alpha}&=e^{\alpha_k t}\int_0^t\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}u_1+\ldots+tu_{l-1}+u_l\right)dt,\\
y_{1\beta}^{*}&=e^{\alpha_k t}\int_0^t\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}v_1+\ldots+tv_{m-1}+v_m\right)dt\\
&(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),
\end{aligned}\right\} \tag{52.15}$$

где u_j, v_j — периодические функции периода ω.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная периодическая функция с периодом ω. Как мы уже знаем, справедливо соотношение

$$\int_0^t\varphi(t)\,dt=gt+\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — некоторая периодическая функция, а g есть постоянная, определяемая соотношением

$$g=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\varphi(t)\,dt \tag{52.16}$$

и представляющая собой среднее значение функции φ за период.

Интегрируя по частям, легко находим:

$$\int_0^t \frac{t^p}{p!}\varphi(t)\,dt=\frac{gt^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{t^p}{p!}\psi(t)-\int_0^t \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\psi(t)\,dt,$$

откуда вытекает, что если $P(t)$ — полином p-й степени с периодическими коэффициентами

$$P(t)=\frac{t^p}{p!}\varphi(t)+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi_2(t)+\ldots+\varphi_p(t),$$

то квадратура от него будет полиномом $(p+1)$-й степени вида

$$Q(t)=\int_0^t P(t)\,dt=\frac{gt^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{t^p}{p!}\psi_2+\ldots+\psi_{p+1}, \tag{52.17}$$

где $\psi_2, \ldots, \psi_{p+1}$ — некоторые периодические функции, а g — постоянная, определяемая формулой (52.16), т. е. среднее значение коэффициента при старшей степени полинома $P(t)$.

Докажем, что имеет место тождество

$$\frac{D^s}{Dt^s}\int_0^t P(t)\,dt-\int_0^t \frac{D^sP}{Dt^s}\,dt=A, \tag{52.18}$$

где A — некоторая постоянная. В самом деле, дифференцируя левую часть (52.18) по времени и принимая во внимание, что операторы $\frac{d}{dt}$ и $\frac{D^s}{Dt^s}$, очевидно, переместимы, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{D^s}{Dt^s}\int_0^t P(t)\,dt-\int_0^t \frac{D^sP}{Dt^s}\,dt\right\}=\frac{D^s}{Dt^s}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t P(t)\,dt\right\}-\frac{D^sP}{Dt^s}\equiv 0,$$

откуда и вытекает справедливость (52.18).

Принимая во внимание (52.17) и (52.18), находим, что выражения (52.15) могут быть представлены в виде

$$y_{1\alpha}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\frac{t^l}{l!}+\overline{U}(t)\right)+Ae^{\alpha_k t},$$

$$y_{1\beta}^{*}=e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{t^m}{m!}+\overline{U}^*(t)\right)+A^*e^{\alpha_k t}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где A, A^* — постоянные, G и G^* — также постоянные, определяемые формулами

$$G = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_1(t)\,dt,$$

$$G^* = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v_1(t)\,dt,$$

а $\bar{U}$ и $\bar{U}^*$ суть полиномы с периодическими коэффициентами, причем степень первого не превосходит $l-1$, а степень второго не превосходит $m-1$. Но так как

$$A = \frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(A\,\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right), \qquad A^* = \frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(A^*\,\frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\right),$$

то мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} y_{1\alpha} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\,\frac{t^l}{l!} + U(t)\right),\\ y^*_{1\beta} &= e^{\alpha_k t}\,\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\,\frac{t^m}{m!} + U^*(t)\right)\\ &(\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{52.19}$$

где U и U^* — также полиномы с периодическими коэффициентами, степени которых не превосходят, соответственно, $l-1$ и $m-1$.

Подставляя (52.12), (52.13) и (52.19) в (52.5), мы получим для системы (50.1) l решений вида

$$x_{s\alpha} = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}}{Dt^{\alpha-1}}\left(G\varphi_s\,\frac{t^l}{l!} + X_s(t)\right) \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ l) \tag{52.20}$$

и m решений вида

$$x^*_{s\beta} = e^{\alpha_k t}\,\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\varphi_s\,\frac{t^m}{m!} + X^*_s(t)\right) \quad (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{52.21}$$

где $X_s(t)$ и $X^*_s(t)$ — некоторые полиномы с периодическими коэффициентами, степени которых не превосходят, соответственно, $l-1$ и $m-1$. Вместе с решением (52.4) мы получаем, таким образом, для рассматриваемого корня $l+m+1=\mu$ независимых решений системы (50.1).

Допустим сначала, что обе величины G и G^* отличны от нуля. Допустим также для определенности, что $l \geqslant m$. Тогда, если мы к решениям (52.20) присоединим решение (52.4), умножив его предварительно на G, то получим $l+1$ решений, составляющих группу.

Действительно, очевидно, имеем:

$$Ge^{\alpha_k t}\varphi_s(t) = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(l)}}{Dt^l}\left(C\varphi_s\frac{t^l}{l!} + X_s(t)\right),$$

а следовательно, решение (52.4), умноженное на G, принадлежит группе (52.20) и соответствует $\alpha = l+1$. Что же касается решений (52.21), то, комбинируя их с m последними решениями (52.20), мы получим m новых решений:

$$\bar{x}_{s\beta} = Gx_{s,\, l-m+\beta} - Gx^*_{s\beta} = e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\beta-1)}}{Dt^{\beta-1}}\left(G^*\frac{D^{(l-m)}}{Dt^{l-m}}X_s - GX^*_s\right)$$

$$(\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

также образующих группу. В самом деле, степень хотя бы одного из полиномов, заключенных в скобках, в выражении для $\bar{x}_{s\beta}$ равна $m-1$, ибо, если бы все указанные полиномы имели меньшие степени, то во всяком случае имели бы место тождества

$$\bar{x}_{sm} = G^* x_{sl} - Gx^*_{sm} \equiv 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, следовательно, не все решения (52.20) и (52.21) были бы независимыми, что противоречит условию.

Таким образом, в рассматриваемом случае наше утверждение о виде решений, отвечающих кратному корню характеристического уравнения, справедливо.

Допустим теперь, что $G=0$, но G^* отлично от нуля. В этом случае степень хотя бы одного из полиномов $X_s(t)$ равна $l-1$, так как в противном случае все функции x_{sl} равнялись бы нулю и, следовательно, в (52.20) содержалось бы меньше чем l решений. Поэтому уравнения (52.20) образуют группу нужного нам вида. Присоединяя решение (52.4), умноженное предварительно на G^*, к решениям (52.21), мы получим еще одну группу. Следовательно, так же как и в предыдущем случае, мы будем иметь μ решений, разбивающихся на две группы. Если, наконец, G^* также равно нулю, то решения (52.21) также образуют группу, и решение (52.4) следует рассматривать как отдельную третью группу, состоящую из одного решения.

Таким образом, во всех случаях наши утверждения об аналитическом виде решений системы (50.1) можно считать доказанными.

Нам остается еще только показать, что число групп решений, отвечающих кратному корню, в точности равно p, где $n-p$ — ранг характеристического определителя для рассматриваемого корня. Это утверждение легко доказать следующим образом.

Число групп решений, отвечающих рассматриваемому кратному корню, равно, очевидно, числу независимых решений вида (52.4) (так как в каждой группе имеется по одному такому решению), которыми этот корень обладает, а это число, как мы видели в предыдущем параграфе, равно числу независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (51.4), т. е. $n-p$.

Таким образом, все наши утверждения полностью доказаны.

§ 53. Обратное предложение.

Справедливо также обратное предложение. Если для системы (50.1) удалось найти μ частных решений, разбивающихся на p групп вида (52.3), то величина ρ_k является корнем характеристического уравнения, кратность которого не менее μ, причем этот корень обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка, по крайней мере, $n-p+1$.

Допустим для определенности, что имеются две такого рода группы, состоящие, соответственно, из l и m решений. Все наши рассуждения останутся, однако, справедливыми при любом числе групп. Пусть эти решения будут

$$\left.\begin{aligned} x_{s\alpha}^{(1)} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}P_s^{(1)}}{Dt^{\alpha-1}} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l), \\ x_{s\beta}^{(2)} &= e^{\alpha_k t}\frac{D^{(\alpha-1)}P_s^{(2)}}{Dt^{\alpha-1}} \qquad (\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{53.1}$$

где

$$P_s^{(1)} = \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\varphi_{1s}(t) + \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}\varphi_{2s}(t) + \ldots + \varphi_{ls}(t),$$

$$P_s^{(2)} = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\psi_{1s}(t) + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\psi_{2s}(t) + \ldots + \psi_{ms}(t)$$

и $\varphi_{1s}, \ldots, \varphi_{ls}, \psi_{1s}, \ldots, \psi_{ms}$ — периодические функции периода ω. Нам нужно показать, что величина ρ_k является корнем характеристического уравнения, кратность которого не менее $l+m$, и что этот корень обращает в нуль, по крайней мере, все миноры $(n-1)$-го порядка характеристического уравнения.

С этой целью возьмем для составления характеристического уравнения такую фундаментальную систему решений $x_{sj}(t)$ уравнений (50.1), которая содержит все решения (53.1). Мы предположим при этом, что решения (53.1) являются первыми $l+m$ решениями рассматриваемой фундаментальной системы и примем следующий порядок нумерации:

$$x_{s1} = x_{sl}^{(1)},\quad x_{s2} = x_{s,\,l-1}^{(1)},\quad \ldots,\quad x_{sl} = x_{s1}^{(1)},$$

$$x_{s,\,l+1} = x_{sm}^{(2)},\quad x_{s,\,l+2} = x_{s,\,m-1}^{(2)},\quad \ldots,\quad x_{s,\,l+m} = x_{s1}^{(2)}.$$

Тогда, принимая во внимание, что для всякого полинома

$$P(t) = \frac{t^q}{q!}f_1(t) + \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}f_2(t) + \ldots + f_{q+1}(t)$$

с периодическими периода ω коэффициентами f_i справедливо очевидное соотношение

$$P(t+\omega)=\frac{(t+\omega)^q}{q!}f_1(t)+\ldots+f_{q+1}(t)=$$
$$=P(t)+\omega\frac{DP}{Dt}+\frac{\omega^2}{2!}\frac{D^2P}{Dt^2}+\ldots+\frac{\omega^q}{q!}\frac{D^qP}{Dt^q},$$

а также, что на основании (51.1)

$$e^{\alpha_k(t+\omega)}=e^{\omega\alpha_k}e^{\alpha_k t}=\rho_k e^{\alpha_k t},$$

легко находим:

$$x_{s1}(t+\omega)=\rho_k x_{s1}(t),$$
$$x_{s2}(t+\omega)=\rho_k\omega x_{s1}(t)+\rho_k x_{s2}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{sl}(t+\omega)=\rho_k\frac{\omega^{l-1}}{(l-1)!}x_{s1}(t)+\rho_k\frac{\omega^{l-2}}{(l-2)!}x_{s2}(t)+\ldots+\rho_k x_{sl}(t),$$
$$x_{s,\,l+1}(t+\omega)=\rho_k x_{s,\,l+1}(t),$$
$$x_{s,\,l+2}(t+\omega)=\rho_k\omega x_{s,\,l+1}(t)+\rho_k x_{s,\,l+2}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{s,\,l+m}(t+\omega)=\rho_k\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!}x_{s,\,l+1}(t)+$$
$$+\rho_k\frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!}x_{s,\,l+2}(t)+\ldots+\rho_k x_{s,\,l+m}(t).$$

Сравнивая с (50.2), получим:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}=\rho_k,\quad a_{21}=a_{31}=\ldots=a_{n1}=0,\\
a_{12}=\rho_k\omega,\quad a_{22}=\rho_k,\quad a_{32}=\ldots=a_{n2}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{1l}=\rho_k\dfrac{\omega^{l-1}}{(l-1)!},\quad a_{2l}=\rho_k\dfrac{\omega^{l-2}}{(l-2)!},\ \ldots,\ a_{ll}=\rho_k,\\
a_{l+1,\,l}=\ldots=a_{nl}=0,\\
a_{1,\,l+1}=\ldots=a_{l,\,l+1}=0,\quad a_{l+1,\,l+1}=\rho_k,\\
a_{l+2,\,l+1}=\ldots=a_{n,\,l+1}=0,\\
a_{1,\,l+2}=\ldots=a_{l,\,l+2}=0,\quad a_{l+1,\,l+2}=\rho_k\omega,\\
a_{l+2,\,l+2}=\rho_k,\quad a_{l+3,\,l+2}=a_{n,\,l+2}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{l+1,\,l+m}=\rho\dfrac{\omega^{m-1}}{(m-1)!},\\
a_{l+2,\,l+m}=\rho_k\dfrac{\omega^{m-2}}{(m-2)!},\ \ldots,\ a_{l+m,\,l+m}=\rho_k,\\
a_{s,\,l+m}=0\quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,l,\ l+m+1,\,\ldots,\,n).
\end{array}\right\}\qquad(53.2)$$

Следовательно, характеристическое уравнение (50.3) имеет вид

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} \rho_k-\rho & 0 & \dots & 0\\ \rho_k\omega & \rho_k-\rho & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \rho_k\frac{\omega^{l-1}}{(l-1)!} & \rho_k\frac{\omega^{l-2}}{(l-2)!} & \dots & \rho_k-\rho \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \rho_k-\rho & 0 & \dots & 0\\ \rho_k\omega & \rho_k-\rho & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \rho_k\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} & \rho_k\frac{\omega^{m-2}}{(m-2)!} & \dots & \rho_k-\rho \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{l+m+1,\,l+m+1}-\rho & \dots & a_{l+m+1,\,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n,\,l+m+1} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=$$

$$=(\rho_k-\rho)^l(\rho_k-\rho)^m\begin{vmatrix} a_{l+m+1,\,l+m+1}-\rho & \dots & a_{l+m+1,\,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n,\,l+m+1} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что величина ρ_k является корнем характеристического уравнения с кратностью, не меньшей $l+m$. Кроме того, как это видно из (53.2), все элементы 1-й и $(l+1)$-й колонок характеристического уравнения обращаются в нуль при $\rho=\rho_k$. Следовательно, корень ρ_k обращает в нуль, по крайней мере, все миноры $(n-1)$-го порядка характеристического уравнения.

Таким образом, предложение полностью доказано.

§ 54. Теорема Ляпунова о приводимости линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

А. М. Ляпунов показал, что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать при помощи линейной подстановки с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Для выполнения этого преобразования рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt}+p_{1s}y_1+p_{2s}y_2+\dots+p_{ns}y_n=0 \quad (s=1,\ 2,\ \dots,\ n), \qquad (54.1)$$

сопряженную с системой (50.1). Если $y_s(t)$ — какое-нибудь решение системы (54.1), то линейная форма

$$y_1(t)\,x_1+y_2(t)\,x_2+\ldots+y_n(t)\,x_n \tag{54.2}$$

переменных x_s определяет, как известно, первый интеграл уравнений (50.1). Подставляя в эту форму вместо $y_s(t)$ какие-нибудь n независимых частных решений уравнений (54.1), мы получим n независимых первых интегралов системы (50.1).

Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ — корни характеристического уравнения системы (54.1)[1]) и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — соответствующие характеристические показатели. При этом каждый кратный корень мы выписываем столько раз, сколько групп решений ему соответствует. Таким образом, среди чисел ρ_j могут быть и равные, но каждому из них соответствует только одна группа решений.

Обозначим через n_p число решений в группе, отвечающей корню ρ_p. При этом, очевидно,

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n.$$

Тогда, как было показано в § 52, система (54.1) имеет n независимых решений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} y_{s1}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\,\varphi_{s1}^{(p)}(t),\\ y_{s2}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\left(t\varphi_{s1}^{(p)}(t)+\varphi_{s2}^{(p)}(t)\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{sn_p}^{(p)} &= e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\varphi_{s1}^{(p)}(t)+\ldots+t\varphi_{s,\,n_p-1}^{(p)}+\varphi_{s,\,n_p}^{(p)}(t)\right)\\ &(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{54.3}$$

где $\varphi_{sj}^{(p)}(t)$ — периодические функции t периода ω. Мы придерживаемся при этом следующей системы обозначения решений: верхний индекс в $y_{sj}^{(p)}$ обозначает номер группы (номер корня), к которой принадлежит решение, а второй нижний индекс — номер решения в группе. Положим

$$y_j^{(p)}=\varphi_{1j}^{(p)}x_1+\varphi_{2j}^{(p)}x_2+\ldots+\varphi_{nj}^{(p)}x_n$$

$$(p=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_p). \tag{54.4}$$

---

[1]) Обращаем внимание читателя, что в отличие от предыдущих параграфов через ρ_j обозначены корни характеристического уравнения системы (54.1), а не системы (50.1).

Тогда, подставляя решения (54.3) в (54.2), мы получим следующие n первых интегралов уравнений (50.1):

$$\left.\begin{aligned} e^{\alpha_p t}\, y_1^{(p)} &= \text{const.},\\ e^{\alpha_p t}\left(t y_1^{(p)} + y_2^{(p)}\right) &= \text{const.},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ e^{\alpha_p t}\left(\frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\, y_1^{(p)} + \frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!}\, y_2^{(p)} + \ldots + y_{n_p}^{(p)}\right) &= \text{const.}\\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).& \end{aligned}\right\} \tag{54.5}$$

Соотношения (54.4) определяют линейную подстановку с периодическими коэффициентами, которая ни при каких значениях t не является особенной. В самом деле, определитель, составленный из n^2 функций (54.3), отличен от нуля, так как эти функции образуют фундаментальную систему решений линейных уравнений. Но этот определитель, как легко видеть, отличается никогда не обращающимся в нуль множителем

$$e^{(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_p\alpha_p)\, t}$$

от определителя подстановки (54.4), и следовательно, подстановка (54.4) не является особенной ни при каких значениях t.

Установив это, преобразуем систему (50.1) при помощи подстановки (54.4). Учтем, что выражения (54.5) являются первыми интегралами системы (50.1). Дифференцируя эти интегралы по t и приравнивая производные нулю, легко получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_1^{(p)},\\ \frac{dy_2^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_2^{(p)} - y_1^{(p)},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_{n_p}^{(p)}}{dt} &= -\alpha_p y_{n_p}^{(p)} - y_{n_p-1}^{(p)}\\ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).& \end{aligned}\right\} \tag{54.6}$$

Это и будут преобразованные уравнения, обладающие постоянными коэффициентами. Таким образом, при помощи неособенной линейной подстановки с периодическими коэффициентами (54.4) система уравнений (50.1) преобразована в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Полученная система (54.6) будет иметь комплексные коэффициенты, так как величины α_p будут, вообще говоря, комплексными.

Поэтому, если мы желаем иметь дело только с вещественными уравнениями, то необходимы будут дальнейшие преобразования. Покажем, как это сделать.

Величина α_p будет комплексной либо тогда, когда соответствующий корень ρ_p характеристического уравнения является комплексным, либо когда этот корень является вещественным, но отрицательным.

Рассмотрим сначала первый случай. Допустим, что корень ρ_i является комплексным. Так как коэффициенты уравнений (50.1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (54.1) распадаются на пары сопряженных. Пусть ρ_l комплексно сопряжен с ρ_i. Тогда решения системы (54.1), отвечающие корню ρ_l, т. е. функции $y_{sj}^{(l)}$, будут комплексно сопряженными с решениями $y_{sj}^{(i)}$ и, следовательно, $n_l = n_i$ и переменные $y_j^{(l)}$ будут комплексно сопряжены с переменными $y_j^{(i)}$. Пусть

$$\alpha_i = \lambda_i + \sqrt{-1}\,\mu_i, \qquad \alpha_l = \lambda_i - \sqrt{-1}\,\mu_i,$$
$$y_j^{(i)} = u_j^{(i)} + \sqrt{-1}\,v_j^{(i)}, \qquad y_j^{(l)} = u_j^{(i)} - \sqrt{-1}\,v_j^{(i)}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и примем $u_j^{(i)}$ и $v_j^{(i)}$ в качестве новых переменных вместо $y_j^{(i)}$ и $y_j^{(l)}$. Тогда, выделяя в i-й и l-й группах уравнений (54.6) вещественные и мнимые части, мы получим вместо двух указанных групп, состоящих из $n_i = n_l$ уравнений каждая и обладающих комплексными коэффициентами, одну группу, состоящую из $2n_i$ уравнений с вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_1^{(i)}}{dt} = \lambda_i u_1^{(i)} - \mu_i v_1^{(i)}, \qquad \frac{dv_1^{(i)}}{dt} = \lambda_i v_1^{(i)} + \mu_i u_1^{(i)},\\
&\frac{du_j^{(i)}}{dt} = \lambda_i u_j^{(i)} - \mu_i v_j^{(i)} - u_{j-1}^{(i)},\\
&\frac{dv_j^{(i)}}{dt} = \lambda_i v_j^{(i)} + \mu_i v_j^{(i)} - v_{j-1}^{(i)}\\
&\qquad\qquad (j = 2,\ \ldots,\ n_i).
\end{aligned}\right\} \tag{54.7}$$

Допустим теперь, что ρ_i является отрицательным вещественным числом. В этом случае, взяв арифметическое значение логарифма, мы можем писать:

$$\alpha_i = \frac{1}{\omega}\ln(-\rho_i) + \frac{(2q+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega} = \lambda_i + \frac{(2q+1)\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

где q — целое число и величина λ_i вещественна. Решения (54.3), отвечающие корню ρ_i, будут получаться комплексными. Но так как коэффициенты уравнений (54.1) вещественны, то вещественные части этих решений будут также являться решениями. Следовательно, корню ρ_i отвечают решения

$$y_{s1}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\psi_{s1}^{(i)}(t),$$
$$y_{s2}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\left(t\psi_{s1}^{(i)}(t) + \psi_{s2}^{(i)}(t)\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{sn_i}^{(i)} = e^{\lambda_i t}\left\{\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\psi_{s1}^{(i)}(t) + \dots + t\psi_{s,\,n_i-1}^{(i)}(t) + \psi_{sn_i}^{(i)}(t),\right\},$$

где

$$\psi_{sj}^{(i)} = \operatorname{Re}\left\{\left(\cos\frac{(2q+1)\pi t}{\omega} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2q+1)\pi t}{\omega}\right)\varphi_{sj}^{(i)}\right\}, \qquad (54.8)$$

и мы получаем для этого корня дифференциальные уравнения с вещественными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_1^{(i)}}{dt} = \lambda_i z_1^{(i)},\\ &\frac{dz_j^{(i)}}{dt} = \lambda_i z_j^{(i)} - z_{j-1}^{(i)}\\ &\quad (j = 2, \dots, n_i). \end{aligned}\right\} \qquad (54.9)$$

Здесь переменные $z_j^{(i)}$ отличаются от переменных $y_j^{(i)}$, определяемых формулами (54.4), только тем, что функции $\varphi_{sj}^{(i)}$ заменены функциями $\psi_{sj}^{(i)}$.

Таким образом, можно считать доказанным, что систему уравнений (50.1) при помощи вещественной неособенной линейной подстановки можно привести к системе уравнений с постоянными коэффициентами. При этом, если характеристическое уравнение системы (54.1) не имеет вещественных отрицательных корней, то коэффициенты подстановки будут периодическими функциями периода ω. Если же указанное характеристическое уравнение имеет вещественные отрицательные корни, то коэффициенты подстановки будут также периодическими функциями, но период этих функций будет, вообще, равен 2ω. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что период функции (54.8) будет, вообще говоря, 2ω, так как этим периодом обладает множитель

$$\left(\cos(2q+1)\frac{\pi t}{\omega} + \sqrt{-1}\sin(2q+1)\frac{\pi t}{\omega}\right).$$

Пусть предложена система линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \dots + q_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \dots, n), \qquad (54.10)$$

где q_{sj} — какие-нибудь непрерывные ограниченные функции t при всех $t \geqslant t_0$. Допустим, что эта система может быть преобразована в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи линейного преобразования

$$y_s = f_{s1}x_1 + \ldots + f_{sn}x_n,$$

обладающего тем свойством, что его коэффициенты f_{sj}, так же как и коэффициенты обратного преобразования, являются непрерывными и ограниченными функциями t при всех $t \geqslant t_0$. В этом случае систему (54.10) А. М. Ляпунов предложил называть *приводимой*. Таким образом, любая линейная система уравнений с непрерывными периодическими коэффициентами является приводимой[1]).

§ 55. Определяющее уравнение приведенной системы. Теорема Ляпунова о корнях характеристических уравнений сопряженных систем.

Рассмотрим какую-нибудь систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_s}{dt} = a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn}y_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{55.1}$$

Составим ее характеристическое уравнение:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{55.2}$$

Но система уравнений (55.1) может быть рассматриваема как частный случай системы уравнений с периодическими коэффициентами произвольного периода ω, и, следовательно, для нее может быть построено характеристическое уравнение в смысле § 50. Это уравнение будет отличаться от уравнения (55.2). Поэтому во избежание путаницы мы будем в дальнейшем, где эта путаница возможна, называть уравнение (55.2) *определяющим* уравнением.

В предыдущем параграфе мы показали, что систему уравнений с периодическими коэффициентами (50.1) можно неособенной линейной подстановкой с периодическими коэффициентами преобразовать в систему уравнений с постоянными коэффициентами (54.6). Так как при таком преобразовании корни характеристического уравнения не изменяются, то корни характеристического уравнения системы (50.1) совпадают с корнями *характеристического* уравнения системы (54.6). Найдем корни этого последнего уравнения.

---

[1]) Подробное исследование приводимых систем содержится в работе: Еругин Н. П., Приводимые системы. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.

С этой целью заметим, что уравнения (54.6) допускают, очевидно, фундаментальную систему решений, распадающихся на m групп, таких, что первое решение в какой-нибудь p-й группе имеет вид

$$
\begin{gathered}
z_{11}^{(p)} = e^{-\alpha_p t},\\
z_{21}^{(p)} = -te^{-\alpha_p t},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_{n_p 1}^{(p)} = \frac{(-t)^{n_p-1}}{(n_p-1)!}e^{-\alpha_p t},\\
z_{11}^{(k)} = z_{21}^{(k)} = \ldots = z_{n_k 1}^{(k)} = 0\\
(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,\ p+1,\ \ldots,\ m),
\end{gathered}
$$

а остальные решения этой группы могут быть получены из первого последовательным применением оператора $\frac{D}{Dt}$ к коэффициентам при $e^{-\alpha_p t}$. Так, например, второе решение указанной группы имеет вид

$$
\begin{gathered}
z_{12}^{(p)} = 0,\\
z_{22}^{(p)} = -e^{\alpha_p t},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_{n_p 2}^{(p)} = \frac{(-t)^{n_p-2}}{(n_p-2)!}e^{-\alpha_p t},\\
z_{12}^{(k)} = z_{22}^{(k)} = \ldots = z_{n_k 2}^{(k)} = 0\\
(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,\ p+1,\ \ldots,\ m).
\end{gathered}
$$

Всего решений в p-й группе будет n_p. Таким образом, для каждой величины $-\alpha_p$ получается группа с n_p решениями. При этом среди величин $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_m$ могут быть и одинаковые, так как по условию каждая из величин α_p выписывается столько раз, сколько групп решений соответствует корню ρ_k характеристического уравнения системы (54.1).

Полученные решения системы (54.6) будут как раз такими, какие фигурируют в предложении, установленном в § 53. Поэтому на основании этого предложения мы можем утверждать, что величины $-\alpha_p$ являются характеристическими показателями и, следовательно, величины $\frac{1}{\rho_k}$ — корнями характеристического уравнения системы (54.6) и эквивалентной ей системы (50.1). Кроме того, из предложения § 53 вытекает также, что корень $\frac{1}{\rho_k}$ характеристического уравнения системы (50.1) имеет такую же кратность, как и корень ρ_k характеристического уравнения системы (54.1), и что этим корням в обеих системах отвечает одинаковое число групп с одинаковым числом решений в каждой группе. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме, установленной А. М. Ляпуновым.

Теорема. *Если ρ_k — корень характеристического уравнения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами, то величина $\frac{1}{\rho_k}$ будет корнем характеристического уравнения сопряженной системы. При этом кратности обоих корней, числа групп решений, им соответствующие, и числа решений в соответствующих группах одинаковы.*

Рассмотрим теперь *определяющее* уравнение системы (54.6). Оно, очевидно, имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M_m} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$M_p = \underbrace{\begin{vmatrix} -\alpha_p - \lambda & 0 & \ldots 0 & 0 \\ -1 & -\alpha_p - \lambda & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots -1 & -\alpha_p - \lambda \end{vmatrix}}_{n_p}.$$

Отсюда непосредственно убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема. *При преобразовании системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами корни определяющего уравнения преобразованной системы являются характеристическими показателями исходной системы.*

§ 56. Критерии устойчивости.

Переходим теперь к вопросу об устойчивости решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Из общего вида этих решений, установленного в § 52, вытекает сразу, что если вещественные части всех характеристических показателей отрицательны, то все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, имеет место асимптотическая устойчивость. Напротив, если вещественная часть хотя бы одного характеристического показателя положительна, то система имеет частные решения, неограниченно возрастающие при $t \to \infty$ и, следовательно, будет иметь место неустойчивость. Если же вещественные части некоторых характеристических показателей отрицательны, а остальных равны нулю, то может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость, а именно: если характеристические показатели с вещественными частями, равными нулю, являются простыми, то соответствующие им решения будут ограниченными и невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически. То же самое будет справедливо и в случае кратных характеристических показателей с нулевыми вещественными частями, если число групп решений, соответствующих таким показателям, равно их кратности. Но если имеется характеристический показатель с нулевой вещественной частью, кратность которого превышает число групп решений, ему соответствующих, то рассматриваемая система будет иметь решения, содержащие *вековые члены*. При этом *вековыми членами* мы называем члены вида $t^m\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — ограниченные функции времени. В рассматриваемом случае невозмущенное движение будет неустойчиво.

Но на основании (51.1) характеристическому показателю с отрицательной вещественной частью соответствует корень характеристического уравнения с модулем, меньшим единицы, характеристическому показателю с положительной вещественной частью соответствует корень с модулем, большим единицы, и характеристическому показателю с нулевой вещественной частью отвечает корень с модулем, равным единице. Поэтому условия устойчивости для линейных уравнений с периодическими коэффициентами могут быть выражены следующим образом: если все корни характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически; если имеется хоть один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение неустойчиво; если модули некоторых корней меньше единицы, а остальные равны единице, то невозмущенное движение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Устойчивость будет иметь место тогда, когда все корни с модулями, равными единице, будут простыми или когда они являются кратными, но кратность их равна числу отвечающих им групп решений. Если кратность хотя бы одного из корней с модулем, равным единице, превышает число соответствующих ему групп решений, то невозмущенное движение неустойчиво.

Пусть

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\rho + A_n = 0 \tag{56.1}$$

— характеристическое уравнение рассматриваемой системы. Мы выразили условия устойчивости через корни этого уравнения. Можно, однако, выразить эти условия непосредственно через коэффициенты A_i. С этой целью произведем в уравнении (56.1) подстановку

$$\rho = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}. \tag{56.2}$$

Эта подстановка преобразует круг единичного радиуса с центром в начале координат плоскости комплексного переменного ρ в левую полуплоскость комплексного переменного λ. Поэтому условия устойчивости, выражающиеся в том, что модули всех корней уравнения (56.1) не должны превосходить единицы, могут быть выражены следующим образом: для устойчивости необходимо, чтобы вещественные части всех корней уравнения

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^n + A_1\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) + A_n = 0$$

не были положительными. При этом, если эти вещественные части все отрицательны, то устойчивость действительно будет иметь место и притом асимптотическая.

Таким образом, задача, так же как и для случая уравнений с постоянными коэффициентами, сводится к установлению условий отрицательности вещественных частей всех корней алгебраического уравнения. Эти условия даются теоремой Гурвица.

В отличие, однако, от случая уравнений с постоянными коэффициентами рассматриваемая сейчас задача значительно усложняется тем, что коэффициенты A_j, кроме коэффициента A_n, который дается формулой (50.8), неизвестны. Для их определения необходимо знать какую-нибудь фундаментальную систему решений исследуемых дифференциальных решений. Но как показывает форма (50.7) характеристического уравнения, нет необходимости знать эту фундаментальную систему для всех значений t, а лишь только для одного значения $t = \omega$. Кроме того, условия устойчивости определяются неравенствами, и поэтому достаточно знать лишь приближенные значения коэффициентов характеристического уравнения. Все это позволяет для определения указанных коэффициентов с успехом пользоваться различными приближенными приемами интегрирования. В нижеследующих параграфах мы подробно останавливаемся на некоторых основных приемах приближенного вычисления корней характеристического уравнения.

§ 57. Характеристическое уравнение канонических систем.

В некоторых случаях по самому виду дифференциальных уравнений можно сделать некоторые заключения о корнях характеристического уравнения. Одним из важнейших случаев такого рода будет тот, когда рассматриваемая система уравнений имеет канонический вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{57.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $H(t_1, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, коэффициенты которой являются непрерывными периодическими функциями t периода ω. Более подробно эта система может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_\alpha} x_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_\alpha} y_\alpha, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_\alpha} x_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_\alpha} y_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (57.1')$$

Имеет место следующая теорема Ляпунова.

Теорема. *Пусть ρ — корень характеристического уравнения системы* (57.1). *Тогда если $\rho = \pm 1$, то кратность этого корня будет обязательно четная. Если $\rho \neq \pm 1$ и этот корень имеет кратность m и ему отвечает p групп решений, то величина $\frac{1}{\rho}$ будет также корнем характеристического уравнения и этот корень будет иметь ту же кратность m и ему будет отвечать то же число p групп решений.*

Доказательство. Рассмотрим линейную систему, сопряженную с (57.1). Эта система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial y_\alpha \partial x_i} u_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_i} v_\alpha, \\ \frac{dv_i}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial y_\alpha \partial y_i} u_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial y_i} v_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (57.2)$$

Пусть ρ — какой-нибудь корень m-й кратности характеристического уравнения системы (57.1). Допустим сначала, что $\rho \neq \pm 1$. На основании теоремы о корнях характеристических уравнений сопряженных систем (§ 55) величина $\frac{1}{\rho}$ будет корнем m-й кратности характеристического уравнения системы (57.2). Следовательно, эта система имеет m независимых решений вида

$$u_{ij} = e^{-\alpha t} U_{ij}(t), \quad v_{ij} = e^{-\alpha t} V_{ij}(t) \quad \left(\alpha = \frac{1}{\omega} \ln \rho\right), \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

распадающихся на некоторое число групп известного вида. Здесь U_{ij} V_{ij} — некоторые полиномы относительно t с периодическими коэффициентами.

Но система (57.2), как это сразу видно из ее структуры, переходит в систему (57.1), если величины u_i заменить величинами y_i, а величины v_i — величинами $-x_i$. Следовательно, если $u_i(t)$, $v_i(t)$ являются решением системы (57.2), то функции $x_i = -v_i(t)$,

$y_i = u_i(t)$ определяют решение системы (57.1). Отсюда непосредственно следует, что система (57.1) имеет m независимых частных решений

$$x_{ij} = -e^{-\alpha t}V_{ij}(t), \quad y_{ij} = e^{-\alpha t}U_{ij}(t)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

и, следовательно (§ 53), величина $-\alpha$ является характеристическим показателем, а $\frac{1}{\rho}$ — корнем характеристического уравнения этой системы с кратностью, не меньшей m. Эта кратность, очевидно, не может быть больше m, так как в противном случае, применяя только что доказанное предложение к корню $\frac{1}{\rho}$, мы получим, что вопреки предположению кратность корня ρ превосходит m.

Из наших рассуждений вытекает также сразу, что корню $\frac{1}{\rho}$ соответствует такое же число групп решений и такое же число решений в каждой группе, как и корню ρ.

Итак, теорема доказана для каждого корня, отличного от $+1$ или -1. Чтобы полностью доказать теорему, достаточно установить, что если характеристическое уравнение системы (57.1) имеет корень, равный $+1$, то кратность такого корня обязательно четная и что то же самое справедливо и для корня, равного -1. Для этого прежде всего заметим, что сумма кратностей корней, равных ± 1, будет обязательно четным числом, так как на основании доказанного сумма кратностей всех корней, отличных от ± 1, будет четной и порядок $2n$ характеристического уравнения является также четным.

Далее, произведение всех корней характеристического уравнения равно на основании (50.8) величине

$$\exp \int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt.$$

Но в рассматриваемом случае

$$\sum p_{ss} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i\, \partial y_i} \right) = 0,$$

и, следовательно, произведение всех корней характеристического уравнения равно 1. Но так как произведение всех корней, отличных от ± 1, по доказанному равно 1, то и произведение корней, равных ± 1, тоже равно 1. Следовательно, если характеристическое уравнение имеет корень, равный -1, то кратность этого корня будет обязательно четной. Но тогда то же самое будет справедливо и по отношению к корню, равному $+1$, если такой корень существует.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что для уравнений вида (57.1) устойчивость может иметь место лишь только тогда, когда все корни характеристического уравнения имеют модули, равные единице.

§ 58. Вычисление корней характеристического уравнения методом разложения по степеням параметра.

Допустим, что коэффициенты системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (58.1)$$

зависят от p параметров $\mu_1, \ldots, \mu_p$, по отношению к которым они голоморфны в области, определяемой неравенствами

$$|\mu_i| \leqslant E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \qquad (58.2)$$

где $E_1, \ldots, E_p$ — некоторые постоянные числа. Мы предполагаем при этом, что период ω от этих параметров не зависит.

Тогда, как известно, в любом решении $x_s = x_s(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ уравнений (58.1), начальные значения которого не зависят от параметров, функции $x_s(t, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ будут также голоморфными относительно $\mu_1, \ldots, \mu_p$ в области (58.2). Поэтому, принимая во внимание форму (50.7) характеристического уравнения, мы приходим сразу к следующей теореме Ляпунова.

Теорема. *Коэффициенты характеристического уравнения системы* (58.1) *являются в области* (58.2) *голоморфными функциями параметров* $\mu_1, \ldots, \mu_p$.

Здесь существенным является то обстоятельство, что область голоморфности коэффициентов характеристического уравнения совпадает с областью голоморфности коэффициентов исследуемых дифференциальных уравнений. В частности, если коэффициенты исследуемых уравнений являются целыми функциями параметров, то и коэффициенты характеристического уравнения являются также целыми функциями параметров.

Доказанную теорему можно использовать для приближенного вычисления коэффициентов характеристического уравнения. Покажем, как это сделать.

Допустим с этой целью, что коэффициенты системы (58.1) зависят только от одного параметра μ, так что можно написать:

$$p_{si} = q_{si}(t) + \mu p_{si}^{(1)}(t) + \mu^2 p_{si}^{(2)}(t) + \ldots,$$

где $q_{si}(t)$, $p_{si}^{(1)}(t)$, $p_{si}^{(2)}(t)$, ... — непрерывные периодические функции t периода ω и ряды сходятся при $|\mu| \leqslant E$.

Рассмотрим фундаментальную систему решений $x_{sj}(t, \mu)$ системы (58.1), определяемую начальными условиями

$$x_{sj}(0, \mu) = \begin{cases} 1 & (s = j) \\ 0 & (s \neq j) \end{cases} \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{58.3}$$

Как указывалось выше, мы можем написать:

$$x_{sj} = x_{sj}^{(0)}(t) + \mu x_{sj}^{(1)}(t) + \mu^2 x_{sj}^{(2)}(t) + \ldots, \tag{58.4}$$

где ряды при всех значениях t сходятся в области $|\mu| \leqslant E$. Начальные условия (58.3) дают:

$$\left.\begin{aligned} & x_{sj}^{(0)}(0) = \begin{cases} 1 & (s = j), \\ 0 & (s \neq j), \end{cases} \\ & x_{sj}^{(1)}(0) = x_{sj}^{(2)}(0) = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58.5}$$

Подставляя ряды (58.4) в уравнения (58.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы получим для определения неизвестных функций $x_{sj}^{(0)}$, $x_{sj}^{(1)}$, ... следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dx_{sj}^{(0)}}{dt} = q_{s1}x_{1j}^{(0)} + q_{s2}x_{2j}^{(0)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(0)}, \\ & \frac{dx_{sj}^{(1)}}{dt} = q_{s1}x_{1j}^{(1)} + q_{s2}x_{2j}^{(1)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}^{(1)}x_{\alpha j}^{(0)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \frac{dx_{sj}^{(k)}}{dt} = q_{s1}x_{1j}^{(k)} + \ldots + q_{sn}x_{nj}^{(k)} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{k-1} p_{s\alpha}^{(k-\beta)}x_{\alpha j}^{(\beta)} \\ & \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{58.6}$$

У всех этих систем линейных неоднородных уравнений одинаковая однородная часть. Допустим, что мы можем проинтегрировать в замкнутой форме однородную систему уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n,$$

в которую переходит (58.1) при $\mu = 0$.

Тогда уравнения (58.6) дадут возможность последовательно определять все функции $x_{sj}^{(k)}$, начиная с $k = 0$. Начальные условия (58.5) делают их при этом вполне определенными.

Следовательно, решения (58.4) могут быть вычислены с какой угодно степенью точности. Полагая в этих решениях $t = \omega$ и подставляя в (50.7), мы получим приближенные значения коэффициентов характеристического уравнения.

Мы получили, таким образом, способ приближенного вычисления коэффициентов характеристического уравнения для того частного случая, когда исследуемые уравнения содержат некоторый параметр μ, причем при $\mu=0$ уравнения интегрируются в замкнутой форме. Мы можем, однако, к этому частному случаю свести и самый общий.

Пусть нам необходимо вычислить коэффициенты характеристического уравнения заданной системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=r_{s1}(t)\,x_1+\ldots+r_{sn}(t)\,x_n \tag{58.7}$$

с периодическими коэффициентами, не содержащими никаких параметров. Заменим систему (58.7) системой

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}(t,\ \mu)\,x_1+\ldots+p_{sn}(t,\ \mu)\,x_n, \tag{58.8}$$

где содержащие аналитически параметр μ функции $p_{sj}(t,\ \mu)$ выбраны таким образом, что при $\mu=0$ система (58.8) интегрируется в замкнутой форме (обращается, например, в систему с постоянными коэффициентами), а при $\mu=\mu^*$, где μ^* — некоторое фиксированное число, лежащее в области сходимости коэффициентов $p_{sj}(t,\ \mu)$, она обращается в заданную систему (58.7), т. е.

$$p_{sj}(t,\ \mu^*)=r_{sj}(t)\qquad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Можно, например, положить:

$$p_{sj}=\mu r_{sj},\quad \mu^*=1.$$

Полученная таким образом система будет как раз того частного вида, который мы рассмотрели, и для нее могут быть вычислены коэффициенты характеристического уравнения вышеуказанным приемом. Положив затем $\mu=\mu^*$, мы получим коэффициенты характеристического уравнения заданной системы.

Приведенный прием особенно удобен тогда, когда величина μ^* мала, т. е. когда рассматриваемая система мало отличается от системы, интегрируемой в замкнутой форме. В этом случае для вычисления коэффициентов характеристического уравнения можно будет ограничиться небольшим числом приближений.

§ 59. Приложение к системе второго порядка.

Мы переходим теперь к подробному рассмотрению системы, описываемой одним уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+Q\frac{dy}{dt}+Py=0, \tag{59.1}$$

где Q и P — периодические функции t периода ω. Несмотря на частный характер этой системы, к ней приводятся многие важные технические задачи.

Заменой

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int Q\,dt\right) x$$

уравнение (59.1) приводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{59.2}$$

где

$$p = P - \frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}$$

— также периодическая функция периода ω. Мы будем поэтому в дальнейшем рассматривать только уравнения вида (59.2).

Записав уравнение (59.2) в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -px,$$

мы видим, что характеристическое уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} f(\omega) - \rho & f'(\omega) \\ \varphi(\omega) & \varphi'(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

где $f(t)$ и $\varphi(t)$ — два частных решения уравнения (59.2), определяемых начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{59.3}$$

Кроме того, свободный член характеристического уравнения на основании (50.8) обращается в единицу, и потому характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \tag{59.4}$$

где

$$A = \frac{1}{2}[f(\omega) + \varphi'(\omega)]. \tag{59.5}$$

Так как произведение корней характеристического уравнения равно единице, то либо оба корня имеют модули, равные единице, либо модуль одного из корней больше единицы, а модуль другого меньше этой величины, а именно: из соотношения

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

мы видим, что если $A^2 \leqslant 1$, то оба корня будут комплексными и иметь модули, равные единице, а если $A^2 > 1$, то оба корня будут вещественны и один из них будет численно более, а другой численно менее единицы.

Таким образом, основная задача устойчивости для уравнения (59.2) сводится к установлению условий, при которых имеет место каждый из двух возможных случаев: 1) $A^2 \leqslant 1$ и 2) $A^2 > 1$.

Некоторые признаки наличия того или другого случая могут быть получены методом предыдущего параграфа. С этой целью рассмотрим вместо уравнения (59.2) уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu p y, \tag{59.6}$$

где μ — вспомогательный параметр, и найдем сначала коэффициент $A^*(\mu)$ для этого уравнения. Положив затем $\mu = -1$, мы получим коэффициент A для уравнения (59.2). Пусть $f(t, \mu)$ и $\varphi(t, \mu)$ — два частных решения уравнения (59.6), определяемые начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, \mu) = 1, \quad f'(0, \mu) = 0, \\ &\varphi(0, \mu) = 0, \quad \varphi'(0, \mu) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{59.7}$$

Мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} &f(t, \mu) = f_0(t) + \mu f_1(t) + \mu^2 f_2(t) + \ldots, \\ &\varphi(t, \mu) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{59.8}$$

Подставляя в (59.6), находим:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2f_0}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi_0}{dt^2} = 0, \\ &\frac{d^2f_n}{dt^2} = pf_{n-1}, \quad \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = p\varphi_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{59.9}$$

Начальные условия (59.8) дают:

$$f_0(0) = 1, \quad f_0'(0) = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0) = 1,$$

$$f_n(0) = f_n'(0) = \varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &f_0(t) = 1, \qquad \varphi_0(t) = t, \\ &f_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t pf_{n-1}\,dt, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p\varphi_{n-1}\,dt \\ &\qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{59.10}$$

Следовательно, на основании (59.5) коэффициент $A^*(\mu)$ для уравнения (59.6) имеет вид

$$A^*(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)] \mu^n. \tag{59.11}$$

На основании теоремы предыдущего параграфа ряд (59.11) сходится при всех значениях μ. Полагая $\mu = -1$, мы получим коэффициент A для уравнения (59.2) в виде сходящегося ряда

$$A = A^*(-1) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)] (-1)^n. \tag{59.12}$$

Установив это, допустим, что функция $p(t)$ может принимать только отрицательные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно. Тогда все функции $f_n(t)$, $f_n'(t)$, $\varphi_n(t)$, $\varphi_n'(t)$ при n нечетном будут отрицательны, а при n четном — положительны. Вследствие этого все члены ряда (59.12) будут положительны, и мы приходим к следующей теореме Ляпунова.

Теорема. *Если в уравнении* (59.2) *функция p может принимать только отрицательные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно, то соответствующее этому уравнению характеристическое уравнение имеет два вещественных корня, из которых один численно более, а другой численно менее единицы.*

Допустим теперь, что функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, не обращаясь тождественно в нуль. Будут ли при этом корни характеристического уравнения иметь модули, равные единице? Этот вопрос естественно возникает, ибо в случае, когда p постоянно, ответ на него получается положительный. Однако, как мы увидим ниже, если функция p не обращается в постоянную, то ответ на указанный вопрос может получиться отрицательный. Может оказаться, что несмотря на то, что функция p может принимать только положительные значения, характеристическое уравнение будет иметь вещественные корни, из которых один более, а другой менее единицы. Имеет, однако, место следующая теорема, принадлежащая также Ляпунову.

Теорема. *Если функция p может принимать только положительные или равные нулю значения, не обращаясь в нуль тождественно, и если при этом выполняется неравенство*

$$\omega \int_0^{\omega} p\,dt \leqslant 4, \tag{59.13}$$

то характеристическое уравнение системы (59.2) *имеет комплексные корни, равные по модулю единице.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что при $p \geqslant 0$ все функции f_n и φ_n, а также их производные f'_n и φ'_n положительны при всех $t \geqslant 0$. Докажем, что при всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$S_n = (f_{n-1} + \varphi'_{n-1}) t \int_0^t p\, dt - 2n(f_n + \varphi'_n) > 0. \tag{59.14}$$

Мы можем, очевидно, писать:

$$S_n = \int_0^t \frac{dS_n}{dt}\, dt,$$

откуда, учитывая (59.9), находим:

$$S_n = \int_0^t (F_n + p\Phi_n)\, dt,$$

где

$$F_n = tf'_{n-1}\int_0^t p\, dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\int_0^t p\, dt - 2nf'_n,$$

$$\Phi_n = t\varphi_{n-2}\int_0^t p\, dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})t - 2n\varphi_{n-1}.$$

Если мы докажем, что при $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$F_n > 0, \quad \Phi_n > 0, \tag{59.15}$$

то этим самым, очевидно, будет доказано и неравенство (59.14). Чтобы доказать неравенства (59.15), запишем функции F_n и Φ_n через интегралы от их производных. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= \int_0^t \left(2f'_{n-1}\int_0^t p\, dt + pu_n\right) dt, \\ \Phi_n &= \int_0^t (2pt\varphi_{n-2} + v_n)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{59.16}$$

где

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2})\int_0^t p\, dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1) f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2})\int_0^t p\, dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\varphi'_{n-1}.$$

Если функции u_n и v_n также представить в виде интегралов, то легко найдем:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \int_0^t [2p(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1}]\,dt, \\ v_n &= \int_0^t \left(2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2}\int_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1}\right)dt. \end{aligned}\right\} \qquad (59.17)$$

Учитывая, что все функции f_n, f'_n, φ_n, φ'_n положительны, мы из (59.16) и (59.17) найдем, что если при всех $t \geqslant 0$ имеют место неравенства $F_{n-1} > 0$, $\Phi_{n-1} > 0$, то при тех же значениях t будут иметь место и неравенства (59.15). Таким образом, неравенства (59.15) будут доказаны для любого n, если мы их докажем для $n=2$. Но для $n=2$ выражения (59.16) дают:

$$F_2 = 2\int_0^t \left\{\left(\int_0^t p\,dt\right)^2 + 2p\varphi'_1\right\}dt, \qquad \Phi_2 = 2\int_0^t (pt^2 + 2f_1)\,dt.$$

Величины F_2 и Φ_2, очевидно, положительны, и поэтому мы можем считать неравенства (59.15) доказанными.

Из этих неравенств, полагая $t = \omega$, находим:

$$f_n(\omega) + \varphi'_n(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi'_{n-1}(\omega)]\,\frac{\omega}{2n}\int_0^\omega p\,dt.$$

Заменяя n на $2n$, получим:

$$f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega) < [f_{2n-1}(\omega) + \varphi'_{2n-1}(\omega)]\,\frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt, \qquad (59.18)$$

а заменяя n на $2n+1$ и обращая знаки неравенств, будем иметь:

$$-[f_{2n+1}(\omega) + \varphi'_{2n+1}(\omega)] > -[f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega)]\,\frac{\omega}{4n+2}\int_0^\omega p\,dt. \qquad (59.19)$$

Установив это, рассмотрим коэффициент A, соответствующий уравнению (59.2), определяемый, как мы видели, рядом (59.12). Если в этом ряде заменить все четные члены правыми частями неравенств (59.18), то будем иметь:

$$A < 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n}\int_0^\omega p\,dt\right)[f_{2n-1}(\omega) + \varphi'_{2n-1}(\omega)]. \qquad (59.20)$$

Если же воспользоваться неравенствами (59.19), то получим:

$$A > 1 - \frac{\omega}{2}\int_0^\omega p\,dt + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n+2}\int_0^\omega p\,dt\right)\left[f_{2n}(\omega) + \varphi'_{2n}(\omega)\right]. \tag{59.21}$$

Если теперь функция p удовлетворяет неравенству (59.13), то все члены, стоящие под знаком суммы в неравенствах (59.20) и (59.21), будут положительны, и эти неравенства дадут

$$-1 < A < 1,$$

что и доказывает теорему.

Если $p \geqslant 0$, но неравенство (59.13) не выполняется, то, как мы уже указывали, возможны оба случая: 1) $A^2 \leqslant 1$ и 2) $A^2 > 1$. Для выяснения, какой из них в каждой конкретной задаче будет иметь место, требуется более подробное исследование ряда (59.12). В специальной работе, посвященной этому вопросу, А. М. Ляпунов[1]) установил ряд признаков наличия того или другого случая. Этому же вопросу посвящена работа Н. Е. Жуковского[2]), в которой дается обобщение критерия (59.13). Некоторые другие обобщения этого критерия даны в работах Н. В. Адамова, Н. П. Еругина, Р. С. Гусаровой, В. А. Якубовича, М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского[3]). Случай, когда $p(t)$ может менять знак, рассмотрен в большой работе А. М. Ляпунова[4]).

---

[1]) Ляпунов А. М., Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficientes periodiques. Зап. Акад. наук по физ.-мат. отделению, 8-я сер., т. XIII, № 2, 1902.

[2]) Жуковский Н. Е., Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$. Матем. сборник, т. XVI, 1892. См. также: Жуковский Н. Е., Собрание сочинений, т. I, Гостехиздат, 1948.

[3]) Адамов Н. В., О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости. Матем. сборник, т. XLII, вып. 6, 1935.

Еругин Н. П., Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948.

Гусарова Р. С., Об ограниченности решения линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.

Якубович В. А., Об ограниченности решения уравнения $y'' + p(t)\,y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$. Докл. Акад. наук СССР, т. LXXIV, № 5, 1950.

Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б., Об ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Докл. Акад. наук СССР, т. LXXVII, № 2, 1951.

[4]) Ляпунов А. М., Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Сообщ. Харьк. матем. об-ва, 2-я сер., т. V, №№ 3—4 и 5—6, 1896. См. также примечание в конце книги (стр. 522).

§ 60. Некоторые технические задачи, приводящиеся к уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, и связанные с этим вопросы теории.

В предыдущем параграфе мы показали, как при помощи искусственного введения параметра можно найти приближенные значения корней характеристического уравнения. Однако во многих важных технических вопросах такого рода параметры содержатся в дифференциальных уравнениях по существу самой задачи, и при этом требуется определить, будет ли иметь место устойчивость или неустойчивость не при определенном значении параметра, а при любом его значении. Чтобы лучше уяснить, какого рода математические проблемы здесь возникают, рассмотрим некоторые вопросы, приводящиеся к исследованию устойчивости решений линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Мы рассматриваем при этом только такие вопросы, которые приводятся к исследованию одного уравнения второго порядка вида (59.2).

Пример 1. *Маятник с колеблющейся точкой подвеса.* В качестве простейшего примера рассмотрим маятник длиной l, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой a и частотой ω. Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\omega t\right)\sin\varphi, \tag{60.1}$$

где φ — угол отклонения от вертикали. Полагая $\omega t = \tau$ и отбрасывая нелинейные члены, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{g}{l\omega^2}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\tau\right)\varphi. \tag{60.2}$$

Так же как и для маятника с неподвижной осью подвеса, вертикаль является положением равновесия. Но в отличие от случая маятника с неподвижной осью это положение равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым, а именно: в зависимости от значения ω величина A для уравнения (60.2) может удовлетворять как неравенству $A^2 < 1$, так и неравенству $A^2 > 1$. Задача заключается в том, чтобы выделить значения частоты ω, для которых получается первый из указанных случаев, и те критические значения этой частоты, для которых получается второй случай. В этом втором случае будут иметь место поперечные колебания маятника с неограниченно возрастающей амплитудой[1]). Говорят, что в этом случае имеет место *параметрический резонанс.*

[1]) В действительности амплитуда колебаний будет оставаться конечной, так как точное уравнение (60.1) этих колебаний не является линейным.

Пример 2. *Крутильные колебания коленчатых валов.* Рассмотрим крутильные колебания коленчатых валов силового двигателя с учетом инерции шатунов и поршней. Дифференциальные уравнения колебаний составлены Э. Треффтцом[1]). Эти колебания обстоятельно исследованы Н. Е. Кочиным[2]). Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая одноцилиндрового двигателя с маховиком (рис. 14).

Мы будем считать, что масса маховика достаточно велика, так что вращение вала можно считать равномерным. Пусть ω — угловая скорость маховика. Обозначим через φ угол вращения кривошипа. Тогда кинетическая энергия кривошипа вместе со связанными с ним движущимися массами (шатуном и поршнем) может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} J(\varphi)\,\dot{\varphi}^2.$$

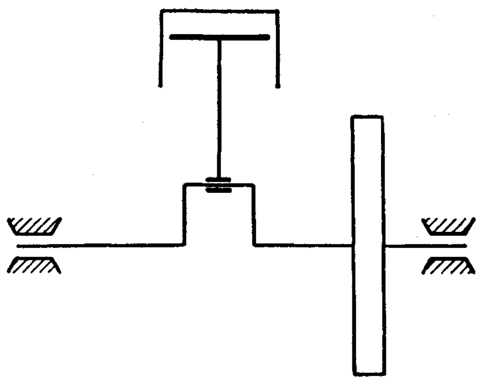

Рис. 14.

Функцию $J(\varphi)$ можно вычислить, если известны размеры и распределение масс кривошипа, шатуна и поршня. Это будет, очевидно, периодическая функция φ периода 2π. При приближенном вычислении принято величину J считать постоянной, равной ее среднему значению J_0 за период. При более точном расчете мы можем положить:

$$J = J_0(1 + \mu F(\varphi)),$$

где F — некоторая периодическая функция периода 2π, а μ—постоянная величина, которую мы будем считать малой.

Потенциальная энергия упругих сил, действующих на кривошип, равна

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c\psi^2 = \frac{1}{2} c(\varphi - \omega t)^2,$$

где ψ — угол закручивания, а c — коэффициент жесткости вала при кручении. Кроме того, на кривошип действует внешний крутящий

[1]) Trefftz E., Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verw. Gebiete, Berlin, 1930.

[2]) Кочин Н. Е., О крутильных колебаниях коленчатых валов. ПММ, II, вып. 1, 1934.

момент $M(\varphi)$ с потенциальной энергией

$$\Pi_2 = \int_0^{\varphi} M(\varphi)\, d\varphi.$$

Функция $M(\varphi)$ будет также периодической. Период этой функции равен 2π, если двигатель двухтактный, и 4π, если двигатель четырехтактный, так как в последнем случае рабочий ход поршня приходится на два оборота вала.

Составляя теперь дифференциальное уравнение Лагранжа, получим:

$$J(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = -M(\varphi) - c(\varphi - \omega t). \qquad (60.3)$$

Для упрощения этого уравнения введем вместо обобщенной координаты φ обобщенную координату q при помощи соотношения

$$q = \int_{\omega t}^{\varphi} \sqrt{J(\varphi)}\, d\varphi.$$

Будем иметь:

$$\dot{q} = \sqrt{J(\varphi)}\,\dot{\varphi} - \omega\sqrt{J(\omega t)},$$

$$\ddot{q} = \sqrt{J(\varphi)}\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{J(\varphi)}}\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Следовательно, уравнение (60.3) может быть переписано в следующем виде:

$$\ddot{q} = -\frac{M(\varphi)}{\sqrt{J(\varphi)}} - \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\varphi)}} - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Считая угол закручивания $\varphi - \omega t$ малым, примем:

$$q = \int_{\omega t}^{\varphi} \sqrt{J(\varphi)}\, d\varphi = (\varphi - \omega t)\sqrt{J(\omega t)},$$

$$\frac{M(\varphi)}{\sqrt{J(\varphi)}} = \frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}}, \quad \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\varphi)}} = \frac{c(\varphi - \omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}},$$

после чего получим:

$$\ddot{q} + \frac{c}{J(\omega t)}q = -\frac{M(\omega t)}{\sqrt{J(\omega t)}} - \frac{\omega^2}{2\sqrt{J(\omega t)}}\frac{dJ(\omega t)}{d(\omega t)}.$$

Таким образом, колебания описываются неоднородным линейным уравнением с периодическими коэффициентами. Поведение его решений в смысле устойчивости и неустойчивости определяется однородным уравнением

$$\ddot{q}+\frac{c}{J(\omega t)}q=0.$$

Полагая в этом уравнении $\omega t=\tau$, окончательно найдем, что задача сводится к исследованию уравнения второго порядка

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+\frac{c}{\omega^2}p(\tau)q=0, \tag{60.4}$$

где

$$p(\tau)=\frac{1}{J(\tau)}$$

— периодическая функция периода 2π.

Уравнение (60.4), так же как и уравнение (60.2), содержит параметр ω — угловую скорость вращения вала. И так же как и в случае

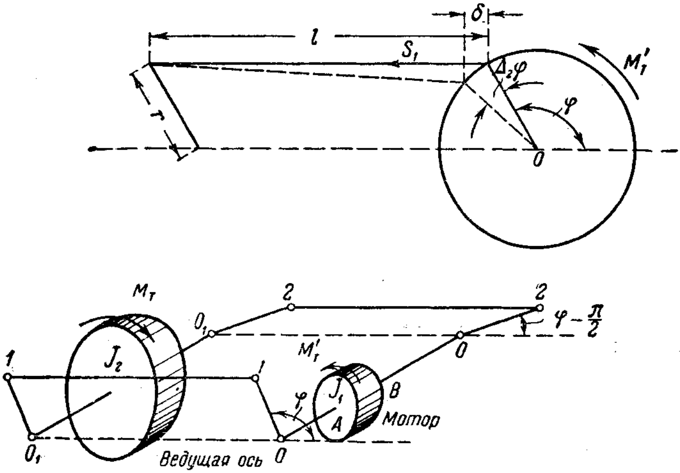

Рис. 15.

маятника, в зависимости от значений ω может иметь место параметрический резонанс. Задача как раз и заключается в определении критических значений угловой скорости, т. е. тех значений ω, при которых величина A для уравнения (60.4) будет иметь модуль, больший единицы.

Пример 3. *Колебания в спарниках электровозов*[1]). В качестве третьего примера рассмотрим колебания, обусловленные пара-

[1]) Мы излагаем здесь эту задачу по книге: Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, Гостехиздат, 1931. В этой книге приведена подробная литература вопроса.

метрическим резонансом, в электровозах с передачей вращения спарниками. Гибкость системы между валом мотора и ведущими осями является переменной, зависящей от положения валов и изменяющейся периодически с периодом, зависящим от угловой скорости вращения мотора. Это и дает возможность возникновения параметрического резонанса.

Рассмотрим простейший пример. Допустим, что крутящий момент M_T мотора передается на ведущую ось электровоза при помощи кривошипов $O-1$ и O_1-1, спарников $1-1$ и $2-2$ и кривошипов $O-2$ и O_1-2 (рис. 15). Кривошипы $O-2$ и O_1-2 повернуты по отношению к кривошипам $O-1$ и O_1-1 на угол $\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через $\Delta\varphi$ угол поворота мотора по отношению к ведущей оси O_1-O_1. Мы можем написать:

$$M_T = \theta\,\Delta\varphi, \tag{60.5}$$

где θ — гибкость передачи. Определим эту величину.

Пусть $\Delta_1\varphi$ — угол поворота, вызванный скручиванием конца OA вала мотора, а $\Delta_2\varphi$ — угол поворота, вызванный сжатием δ спарника $1-1$. Тогда

$$\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi, \tag{60.6}$$

причем, как это видно из чертежа,

$$\Delta_2\varphi = \frac{\delta}{r\sin\varphi}. \tag{60.7}$$

Обозначим через M_T' крутящий момент, передаваемый кривошипом $O-1$:

$$\Delta_1\varphi = \frac{M_T'}{k_1}, \tag{60.8}$$

где k_1 — характеристика пружинности конца OA вала. Далее, если S_1 — сила, сжимающая спарник $1-1$, то

$$\delta = \frac{S_1 l}{AE},$$

где A — площадь сечения спарника, а E — модуль упругости его материала. Но, очевидно,

$$S_1 = \frac{M_T'}{r\sin\varphi}$$

и, следовательно, на основании (60.7)

$$\Delta_2\varphi = \frac{M_T'}{k_2\sin^2\varphi}, \tag{60.9}$$

где

$$k_2 = \frac{AEr^2}{l}.$$

Формулы (60.6), (60.8) и (60.9) дают:

$$\Delta\varphi = M_T'\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \sin^2\varphi}\right). \tag{60.10}$$

Точно так же, обозначая через M_T'' момент, передаваемый концом BO вала, и предполагая, что устройство симметрично относительно продольной оси электровоза, находим:

$$\Delta\varphi = M_T''\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2 \cos^2\varphi}\right). \tag{60.11}$$

Но

$$M_T = M_T' + M_T'',$$

и поэтому формулы (60.10) и (60.11) дают:

$$M_T = \Delta\varphi \frac{\frac{2}{k_1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{1}{k_2}}{\left(\frac{1}{k_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{k_2}\right)} = \Delta\varphi \frac{a - b\cos 4\varphi}{c - d\cos 4\varphi},$$

где

$$a = \frac{2}{k_1} + \frac{8}{k_2}, \qquad b = \frac{2}{k_1}, \qquad c = \frac{8}{k_2^2} + \frac{8}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1^2}, \qquad d = \frac{1}{k_1^2}.$$

Таким образом, обозначая через ω угловую скорость вращения вала (считая приближенно эту скорость постоянной), мы получим для гибкости системы выражение

$$\theta = \frac{a - b\cos 4\omega t}{c - d\cos 4\omega t}. \tag{60.12}$$

Заметим, что если бы система не была симметрична относительно продольной оси, то коэффициенты в формуле (60.11) отличались бы от коэффициентов в формуле (60.10), и для гибкости получилось бы выражение вида

$$\theta = \frac{a + b\cos 2\omega t + c\cos 4\omega t}{p + q\cos 2\omega t + r\cos 4\omega t}. \tag{60.13}$$

Составим теперь дифференциальные уравнения колебаний. Пусть φ_1 и φ_2 — углы поворота оси мотора и ведущей оси, J_1 и J_2 — моменты инерции вращающихся вокруг этих осей масс, M_T и M_r — действующие на них внешние моменты. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} J_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= -\theta(\varphi_1 - \varphi_2) + M_T, \\ J_2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= \theta(\varphi_1 - \varphi_2) - M_r. \end{aligned}\right\} \tag{60.14}$$

Обозначая через x величину $\varphi_1-\varphi_2$, из уравнений (60.14) находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\psi(\omega t)\,x=\frac{M_T}{J_1}+\frac{M_r}{J_2},$$

где $\psi(\omega t)$ в общем случае несимметричной системы определяется формулой

$$\psi(\omega t)=\frac{a+b\cos 2\omega t+c\cos 4\omega t}{p+q\cos 2\omega t+r\cos 4\omega t}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}. \qquad (60.15)$$

Характер колебаний с точки зрения устойчивости определяется однородной частью уравнения. Эта однородная часть может быть представлена в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{1}{\omega^2}\psi(\tau)\,x=0, \qquad (60.16)$$

где положено $\tau=\omega t$.

Мы опять получили линейное уравнение с периодическими коэффициентами, содержащее в качестве параметра величину ω. При тех значениях этого параметра, при которых величина A для уравнения (60.16) будет удовлетворять неравенству $A^2>1$, будет иметь место параметрический резонанс, т. е. будут возникать колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Это и будут критические значения угловой скорости. Таким образом, задача определения критических скоростей вращения вала сводится к определению значений параметра, при которых для уравнения (60.16) имеет место неустойчивость.

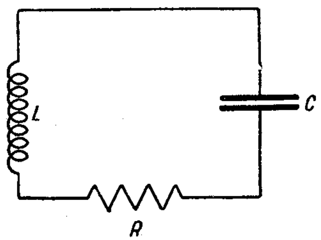

Рис. 16.

П р и м е р 4. *Параметрический резонанс в электрическом колебательном контуре.*

Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 16), состоящий из емкости C, самоиндукции L и сопротивления R. Если через q обозначить заряд, то для него, как известно, имеет место дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=0. \qquad (60.17)$$

Допустим теперь, что один из параметров системы, например емкость C, периодически изменяется. Пусть, например,

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_0}(1+m\cos\omega t).$$

Тогда уравнение (60.17) примет вид

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C_0}(1+m\cos\omega t)\,q=0.$$

Полагая в этом уравнении

$$q = xe^{-\frac{R}{2L}t}, \quad t' = \omega t,$$

получим:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \frac{4L - R^2C_0}{4L^2C_0\omega^2}(1 + \mu\cos t')\,x = 0, \qquad (60.18)$$

где

$$\frac{4Lm}{4L - R^2C_0} = \mu.$$

Отсюда видно, что при подходящем выборе частоты ω изменения емкости, несмотря на отсутствие в системе внешних источников тока, в ней могут возникнуть интенсивные электрические колебания. Этим можно воспользоваться для устройства генератора электрического тока, совершенно отличающегося от обычного и основанного на механическом изменении емкости (или самоиндукции). Такого рода генератор был впервые осуществлен Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [1]).

Задача определения необходимой частоты изменения емкости C сводится к определению параметра ω в уравнении (60.18) таким образом, чтобы решения этого уравнения были неустойчивы, т. е. чтобы для него величина A удовлетворяла неравенству $A^2 > 1$.

Во всех рассмотренных примерах задача сводилась к исследованию уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda p(t)\,x = 0, \qquad (60.19)$$

где $p(t)$ — периодическая функция времени, а λ — некоторый параметр. Необходимо определить те значения параметра λ, при которых для этого уравнения будет иметь место устойчивость или неустойчивость. Так как условия устойчивости и неустойчивости определяются неравенствами, то значения λ, при которых будет иметь место устойчивость или неустойчивость, будут, вообще говоря, заполнять некоторые интервалы. Те интервалы значений λ, при которых имеет место устойчивость, мы будем называть *областями устойчивости* уравнения (60.19). Аналогично определяются и *области неустойчивости*.

Итак, во всех предыдущих примерах задача сводилась к определению областей устойчивости и неустойчивости для уравнения вида (60.19). К этой же задаче приводятся и многочисленные другие важнейшие вопросы техники, физики и астрономии. Решению этой задачи

[1]) Для того чтобы амплитуда колебаний в такого рода генераторах оставалась конечной, необходимо в систему ввести нелинейность.

посвящены работы А. М. Ляпунова [1]), в которых получен ряд очень важных результатов. Некоторые из этих результатов были повторены О. Хауптом [2]). Существенное обобщение результатов А. М. Ляпунова получено М. Г. Крейном [3]), который рассмотрел систему уравнений второго порядка. Этому же вопросу посвящены также работы И. М. Рапопорта [4]).

Мы рассмотрим подробно указанную задачу при некоторых частных предположениях, а именно, мы будем предполагать, что функция $p(t)$ в уравнении (60.19) мало отличается от своего среднего значения, так что мы можем писать:

$$p(t) = a(1 + \mu f(t)),$$

где $f(t)$ — периодическая функция периода ω, для которой

$$\int_0^\omega f(t)\,dt = 0,$$

a — постоянная, а μ — постоянная величина, численное значение которой мало по сравнению с единицей.

При указанном ограничении функция p будет принимать при всех t значения одного знака, совпадающего со знаком величины a. На основании первой из теорем, установленных в § 59, для уравнения (60.19) всегда имеет место неустойчивость, если $\lambda a < 0$. Поэтому нам предстоит исследовать только тот случай, когда $\lambda a > 0$. Мы можем поэтому уравнение (60.19) записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2(1 + \mu f(t))\,x = 0. \tag{60.20}$$

В нижеследующих параграфах мы занимаемся подробным исследованием уравнения (60.20). Можно считать с достаточной степенью точности, что все примеры параметрического резонанса, рассмотренные выше, описываются уравнением вида (60.20).

---

[1]) Liapounoff A., Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Comptes Rendus de l'Acad. de sciences. Paris, т. 128, 1899, стр. 910—913.

Liapounoff A., Sur une équation transcendente et les équations différentielles linéaires du second ordre á coefficients périodiques. Comptes rendus, Paris, т. 128, 1899, стр. 1085—1088.

[2]) См. по этому поводу: Коваленко К. Р. и Крейн М. Г., О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXV, № 4, 1950.

[3]) Крейн М. Г., Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXIII, № 3, 1950.

[4]) Рапопорт И. М., О линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН, т. LXXVI, № 6, 1951; Рапопорт И. М., К вопросу об устойчивости колебаний материальной системы. ДАН, т. LXXVII, № 1, 1951.

§ 61. Области устойчивости и неустойчивости для уравнений второго порядка.

Итак, рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2(1 + \mu f)\,x = 0, \tag{61.1}$$

где f — периодическая функция времени. Для удобства дальнейших выкладок мы будем предполагать, что период этой функции равен π, чего, очевидно, всегда можно добиться подходящим выбором единицы времени. Предположим для общности, что параметр μ входит не только в качестве множителя перед f, но и что от него зависит также сама функция f. Мы будем предполагать, что эта зависимость является аналитической, так что

$$f = f_1(t) + \mu f_2(t) + \mu^2 f_3(t) + \ldots, \tag{61.2}$$

где функции $f_i(t)$ не зависят от μ и являются периодическими с периодом π и ряд сходится при $|\mu| < a$, где a — некоторая постоянная величина.

Необходимо определить области устойчивости и неустойчивости для уравнения (61.1) в зависимости от значений параметра λ. Будем изменять этот параметр, придавая ему всевозможные вещественные значения. При этом достаточно рассматривать только положительные значения, так как уравнение (61.1) не изменится при замене λ на $-\lambda$ и, следовательно, распределение интересующих нас областей будет при $\lambda < 0$ таким же, как и при $\lambda > 0$. Областям устойчивости соответствуют те значения λ, при которых коэффициент A для уравнения (61.1) удовлетворяет неравенству $A^2 < 1$, а областям неустойчивости — те значения, для которых $A^2 > 1$. Отсюда непосредственно вытекает, что области устойчивости и неустойчивости разделяются теми значениями λ, для которых выполняются либо уравнение

$$A = +1, \tag{61.3}$$

либо уравнение

$$A = -1. \tag{61.4}$$

Исследуем подробней эти уравнения. Уравнение (61.1) содержит параметр λ^2, по отношению к которому оно аналитично (линейно) при всех значениях, и параметр μ, по отношению к которому оно аналитично в области $|\mu| < a$. Отсюда на основании теоремы § 58 коэффициент A является целой функцией параметра λ^2 и аналитической функцией параметра μ в области $|\mu| < a$. Для этого коэффициента мы имеем:

$$A = \frac{1}{2}\{x_1(\pi) + \dot{x}_2(\pi)\},$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — два частных решения уравнения (61.1), определяемых начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &x_1(0)=1, \quad \dot{x}_1(0)=0,\\ &x_2(0)=0, \quad \dot{x}_2(0)=1. \end{aligned}\right\} \tag{61.5}$$

Эти решения являются целыми функциями λ^2 и аналитическими функциями μ в области $|\mu|<a$. Мы можем поэтому написать:

$$x_1=x_1^{(0)}(t)+\mu x_1^{(1)}(t)+\ldots,$$
$$x_2=x_2^{(0)}(t)+\mu x_2^{(1)}(t)+\ldots,$$

где ряды сходятся при $|\mu|<a$ и являются, кроме того, целыми функциями параметра λ^2. Подставляя эти ряды в (61.1) и принимая во внимание (61.2), получим для определения неизвестных функций $x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}$, ... $(i=1,\ 2)$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(0)}}{dt^2}=-\lambda^2x_i^{(0)},\\ &\frac{d^2x_i^{(1)}}{dt^2}=-\lambda^2x_i^{(1)}-\lambda^2f_1(t)\,x_i^{(0)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad (i=1,\ 2). \end{aligned}\right\} \tag{61.6}$$

Кроме того, начальные условия (61.5) дают:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^{(0)}(0)=1, \quad \dot{x}_1^{(0)}(0)=0, \quad x_2^{(0)}(0)=0, \quad \dot{x}_2^{(0)}(0)=1,\\ &x_1^{(j)}(0)=\dot{x}_1^{(j)}(0)=x_2^{(j)}(0)=\dot{x}_2^{(j)}(0)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{61.7}$$

Уравнения (61.6) вместе с начальными условиями (61.7) однозначно определяют все функции $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$.

В частности, имеем:

$$x_1^{(0)}=\cos\lambda t, \quad x_2^{(0)}=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t,$$

и следовательно, для коэффициента A получаем:

$$A=\cos\lambda\pi+\frac{1}{2}\left\{x_1^{(1)}(\pi)+\dot{x}_2^{(1)}(\pi)\right\}\mu+\ldots \tag{61.8}$$

Установив это, рассмотрим уравнения (61.3) и (61.4). Из (61.8) сразу видно, что эти уравнения удовлетворяются при $\mu=0$ и $\lambda=n$, где n — целое число. При этом при n нечетном удовлетворяется уравнение (61.4). а при n четном — уравнение (61.3). Поэтому можно ожидать, что при $\mu\neq 0$, но достаточно малом уравнение (61.4) имеет решение относительно λ в окрестности любого целого нечетного числа, а уравнение (61.3) имеет решение в окрестности любого четного числа, обращающиеся в эти целые числа при $\mu=0$. Для выяснения вопроса о существовании этих решений положим в выражении для A:

$$\lambda = n + \alpha \tag{61.9}$$

и приравняем полученное выражение при n нечетном -1, а при n четном 1. Тогда мы получим следующее уравнение для величины α:

$$(-1)^{n+1}\left\{\frac{\alpha^2\pi^2}{2!}-\frac{\alpha^4\pi^4}{4!}+\ldots\right\}+ \\ +\frac{1}{2}\left\{x_1^{(1)}(\pi)+\dot{x}_2^{(1)}(\pi)\right\}_{\lambda=n+\alpha}\cdot\mu+\ldots=0. \tag{61.10}$$

Левая часть этого уравнения является аналитической функцией величин α и μ, обращающейся в нуль при $\alpha=\mu=0$. Если бы производная от этой функции по α не обращалась в нуль при $\alpha=\mu=0$, то на основании теоремы существования неявных функций уравнение (61.10) при μ, отличном от нуля, но достаточно малом, допускало бы одно и только одно решение $\alpha(\mu)$, обращающееся в нуль при $\mu=0$. Однако производная от левой части (61.10) по α обращается при $\alpha=\mu=0$ в нуль, и поэтому указанная теорема существования в рассматриваемом случае неприменима.

Но общая теория неявных функций, определяемых аналитическими уравнениями [1]), показывает, что в рассматриваемом случае уравнение (61.10) допускает два и только два решения, обращающихся в нуль при $\mu=0$, и эти решения при μ, достаточно малом, являются аналитическими функциями либо величины μ, либо величины $\sqrt{\mu}$.

Эти предложения легко доказать следующим образом.

Выделив в уравнении (61.10) члены, свободные от α, члены, линейные относительно этой величины, и члены, содержащие эту величину в степени не ниже второй, мы можем указанное уравнение записать следующим образом:

$$\mu^m(M+\varphi(\mu))+\alpha\mu^k(N+\psi(\mu))+\alpha^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\alpha)\right]=0, \tag{61.11}$$

где $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$, $F(\mu,\alpha)$ — аналитические функции своих аргументов, обращающиеся в нуль при $\alpha=\mu=0$, а M и N — постоянные. Если постоянная M равна нулю, что означает, что уравнение (61.10) не содержит членов, свободных от μ, то это уравнение распадается на два: на уравнение $\alpha=0$ и уравнение

$$\alpha\left[(-1)\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\alpha)\right]+\mu^k(N+\psi(\mu))=0.$$

Последнее уравнение имеет одно и только одно решение для $\alpha(\mu)$, обращающееся в нуль при $\mu=0$, так как к нему применима обычная теорема существования неявных функций. Полученное решение будет при этом

[1]) См. Гурса Е., Курс математического анализа, т. II, глава XVII §§ 355, 356, стр. 241—248, ОНТИ, 1936.

аналитическим относительно μ. Присоединяя к нему решение $\alpha=0$, мы получим два и только два решения уравнения (61.10), и эти решения будут аналитическими относительно μ.

Таким образом, при $M=0$ интересующее нас предложение доказано. Допустим теперь, что $M\neq 0$. Здесь необходимо рассмотреть три случая:

1) $k>\frac{m}{2}$,

2) $k<\frac{m}{2}$,

3) $k=\frac{m}{2}$.

Допустим сначала, что имеет место случай 1). Тогда, полагая в уравнении (61.11)

$$\alpha=\mu^{\frac{m}{2}}\beta, \tag{61.12}$$

где β — новая неизвестная, и сокращая на μ^m, получим:

$$\Phi(\beta,\mu)=M+\varphi(\mu)+\beta\mu^{k-\frac{m}{2}}(N+\psi(\mu))+\\+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F\left(\mu,\beta\mu^{\frac{m}{2}}\right)\right]=0. \tag{61.13}$$

Это уравнение имеет при $\mu=0$ два простых корня $\beta=\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$ и $\beta=-\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$. Следовательно, производная $\frac{d\Phi}{d\beta}$ для каждого из этих корней при $\mu=0$ отлична от нуля. Поэтому на основании обычной теоремы неявных функций существует при μ, достаточно малом, два и только два решения уравнения (61.13), из которых одно обращается при $\mu=0$ в $\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$, а второе в $-\frac{1}{\pi}\sqrt{(-1)^{n+1}2M}$. Так как функция Φ аналитична либо относительно $\sqrt{\mu}$ (при m нечетном), либо относительно μ (при m четном), то и указанные решения будут аналитичны либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ. Подставляя эти решения в (61.12), мы получим два решения уравнения (61.11), обращающиеся в нуль при $\mu=0$, и эти решения будут аналитичны либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ.

Допустим теперь, что имеет место случай 2). Положим в уравнении (61.11)

$$\alpha=\mu^{m-k}\beta. \tag{61.14}$$

Тогда уравнение, определяющее β, будет иметь вид

$$M+\varphi(\mu)+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\mu^{m-2k}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\beta\mu^{m-k})\right]=0.$$

Это уравнение имеет при $\mu=0$ простой корень $\beta=-\frac{M}{N}$ [1]), и следовательно, при μ, отличном от нуля, но достаточно малом, оно допускает одно

[1]) Величина N отлична от нуля, ибо если бы она равнялась нулю, что означало бы, что $k=\infty$, то мы имели бы случай 1).

и только одно решение для β, обращающееся в $-\frac{M}{N}$ при $\mu=0$. Это решение будет аналитическим относительно μ, так как таким является само уравнение. Подставляя это решение в (61.14), мы получим решение уравнения (61.11), обращающееся в нуль при $\mu=0$, и это решение будет аналитическим относительно μ. Полагая затем в (61.11)

$$\alpha=\mu^k\beta, \tag{61.15}$$

мы получим для β уравнение

$$\mu^{m-2k}(M+\varphi(\mu))+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\mu^k\beta)\right]=0,$$

которое имеет одно и только одно решение, обращающееся в $\frac{2(-1)^{n+1}N}{\pi^2}$ при $\mu=0$. Подставляя это решение в (61.15), мы получим второе решение уравнения (61.11), обращающееся в нуль при $\mu=0$. Это решение будет также аналитическим относительно μ.

Допустим, наконец, что имеет место случай 3). Положим:

$$\alpha=\mu^k\beta=\mu^{\frac{m}{2}}\beta.$$

Тогда уравнение, определяющее β, будет иметь вид

$$\Psi(\beta,\mu)=M+\varphi(\mu)+\beta(N+\psi(\mu))+\beta^2\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}+F(\mu,\mu^k\beta)\right]=0. \tag{61.16}$$

Это уравнение при $\mu=0$ имеет два корня, определяемые квадратным уравнением

$$(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{2}\beta^2+N\beta+M=0. \tag{61.17}$$

Если это квадратное уравнение имеет простые корни, то уравнение (61.16) будет при $\mu=0$ иметь два решения, аналитических относительно μ и обращающихся, соответственно, при $\mu=0$ в указанные корни квадратного уравнения. Этим двум решениям уравнения (61.16) соответствуют два решения уравнения (61.11), также аналитических относительно μ и обращающихся в нуль при $\mu=0$.

Но если квадратное уравнение (61.17) имеет два равных корня $\beta=\beta^*$, то вопрос делается несколько сложнее, так как производная $\frac{d\psi}{d\beta}$ обращается в нуль при $\beta=\beta^*$, $\mu=0$, и обычная теорема существования для уравнения (61.16) неприменима. Для решения вопроса в этом особом случае положим в уравнении (61.16)

$$\beta=\gamma+\beta^*,$$

после чего мы получим уравнение для γ, которое будет аналитическим относительно γ и μ и которое будет допускать при $\mu=0$ двойной корень $\gamma=0$. Следовательно, это уравнение относительно γ будет такой же структуры, как и уравнение (61.11) для α. Прилагая к этому уравнению предыдущие рассуждения, мы получим два решения для γ, если только мы снова не встретимся со случаем 3), притом с тем его частным видом, который мы отметили как особенный. В последнем случае для неизвестной γ мы должны будем проделать такую же подстановку, как и с неизвестной β, и получить для новой неизвестной, пусть это будет δ, уравнение вида (61.11). Если для неизвестной δ не получится особенного случая, то мы получим два решения для δ, которые дадут два решения для α нужного вида. Если же уравнение для δ будет принадлежать к числу особенных, то указанный процесс придется продолжить далее. Если этот процесс окажется конечным, то мы получим два решения уравнения (61.11) нужного вида. Может, однако, случиться, что процесс окажется бесконечным. Не останавливаясь на этом исключительном случае, укажем лишь, что в этом случае уравнение (61.11) будет иметь двойное решение, обращающееся в нуль при $\mu = 0$.

Итак, уравнение (61.11) при μ, достаточно малом, всегда имеет два корня, обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Эти решения будут притом аналитическими либо относительно $\sqrt{\mu}$, либо относительно μ. Легко видеть, что при μ, достаточно малом, указанное уравнение не имеет других корней, обращающихся в нуль при $\mu = 0$. Действительно, если бы такие корни существовали, то, переходя к пределу при $\mu \to 0$, мы получили бы, что уравнение (61.11) имеет при $\mu = 0$ нулевой корень, кратность которого превышает два.

Подставляя решения для α в (61.9), мы получим решения уравнений (61.3) и (61.4). Придавая n всевозможные целые значения, мы получим все решения уравнений (61.3) и (61.4). При этом при n нечетном мы получим решения уравнения (61.4), а при n четном — решения уравнения (61.3).

Покажем теперь, что все полученные таким образом решения уравнений (61.3) и (61.4) являются вещественными. С этой целью заметим прежде всего, что если λ удовлетворяет уравнению (61.3), то уравнение (61.1) имеет периодическое решение с периодом, равным периоду коэффициента, т. е. π. Действительно, в этом случае корни характеристического уравнения равны единице, откуда непосредственно вытекает существование указанного решения. Если λ удовлетворяет уравнению (61.4), то корни характеристического уравнения будут равны -1 и, следовательно, будет существовать решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее условию

$$\varphi(t + \pi) = -\varphi(t).$$

Функция $\varphi(t)$ будет также периодической, но с периодом 2π. Установив это, допустим, что $\lambda = \lambda^*$ является корнем уравнения (61.3) и пусть $\varphi(t)$ — соответствующее периодическое решение уравнения (61.1). Имеем:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda^{*2}(1 + \mu f)\varphi \equiv 0.$$

Умножим это тождество на $\bar{\varphi}\,dt$, где $\bar{\varphi}$ — величина, комплексно сопряженная с φ, и проинтегрируем в пределах от 0 до π. Тогда, интегрируя по частям и принимая во внимание, что в силу периодичности

$$\left|\bar{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right|^{\pi} = 0,$$

получим:

$$-\int_0^\pi \frac{d\bar{\varphi}}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\,dt + \lambda^{*2}\int_0^\pi (1+\mu f)\,\varphi\bar{\varphi}\,dt \equiv 0. \qquad (61.18)$$

Выражения, стоящие под знаками интегралов, вещественны и положительны, и следовательно, такими же будут и сами интегралы. Но тогда тождество (61.18) показывает, что и величина λ^{*2} будет вещественной и положительной, и следовательно, величина λ^* будет вещественной.

Точно так же доказывается вещественность корней уравнения (61.4). Разница будет заключаться лишь в том, что теперь в тождестве (61.18) интегралы будут браться в пределах от 0 до 2π.

Покажем теперь, что все корни уравнений (61.3) и (61.4) будут при μ, достаточно малом, аналитическими функциями этой величины. В самом деле, из предыдущего следует, что все корни уравнений (61.3) и (61.4) являются либо аналитическими функциями величины $\sqrt{\mu}$, либо аналитическими функциями величины μ. Но если хотя бы один из указанных корней являлся аналитической функцией величины $\sqrt{\mu}$, то он обязательно был бы комплексным либо при положительных значениях μ, либо при отрицательных значениях этой величины. Но мы только что показали, что все корни уравнений (61.3) и (61.4) являются вещественными, и это будет справедливо вне зависимости от того, будет ли параметр μ положительным или отрицательным. Таким образом, все корни уравнений (61.3) и (61.4) будут аналитическими функциями величины μ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, т. е. они будут разлагаться в ряды по целым положительным степеням μ, сходящиеся при μ, достаточно малом.

Будем теперь рассматривать всевозможные значения λ и построим график кривой $A(\lambda)$ (считая μ фиксированным). С этой целью отложим на оси λ все корни уравнений (61.3) и (61.4). Как мы видели, все эти корни распадаются на пары, расположенные вблизи целочисленных значений λ. Обозначим через $\bar{\lambda}_n'$, $\bar{\lambda}_n''$ корни, расположенные вблизи целого нечетного числа n, и через λ_n', λ_n'' — корни, расположенные вблизи целого четного числа n. Все эти корни разбивают ось λ на интервалы двух типов (рис. 17). Интервалы первого типа ограничены с обеих сторон корнями одного вида, т. е. такими, которые либо оба удовлетворяют уравнению (61.3), либо оба удовлетворяют уравнению (61.4). К такого рода интервалам принадлежат, например, интервалы $(\bar{\lambda}_1', \bar{\lambda}_1'')$ и $(\lambda_2', \lambda_2'')$. Интервалы первого типа мы будем называть *однородными*. Интервалы второго типа, как, например, интервал $(\bar{\lambda}_1'', \lambda_2')$, ограничены, с одной стороны, корнем уравнения (61.3), а с другой стороны — корнем уравнения (61.4). Интервалы такого вида мы будем называть ***разнородными***. Как видно из чертежа, интервалы однородные и разнородные чередуются. Некоторые однородные интервалы могут выродиться в точку. Это будет в том случае, если уравнение (61.3) или (61.4) имеет кратные корни.

Теперь легко видеть, что в каждом однородном (невырожденном) интервале имеет место неравенство $A^2 > 1$, а в каждом разнородном интервале — неравенство $A^2 < 1$. Другими словами, области неустойчивости совпадают с однородными интервалами, а области устойчивости — с неоднородными интервалами. Действительно, рассмотрим какой-нибудь неоднородный интервал, например $(\overline{\lambda}_1'', \lambda_2')$. В этом интервале величина A изменяется от -1 в начале интервала до $+1$

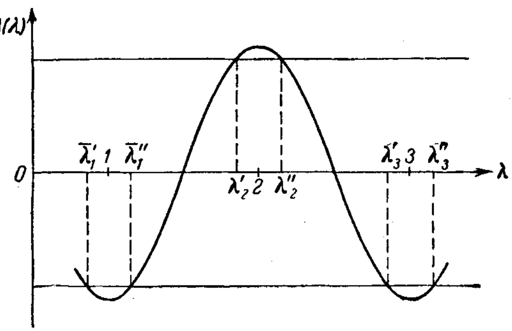

Рис. 17.

в конце интервала. И так как при этом величина A внутри интервала нигде не может обратиться в ± 1, так как все корни уравнений (61.3) и (61.4) расположены в концах интервалов, то во всех точках внутри рассматриваемого интервала необходимо должно выполняться неравенство $A^2 < 1$. Рассмотрим теперь какой-нибудь однородный невырожденный интервал, на концах которого $A = +1$. Пусть это будет, например, интервал $(\lambda_2', \lambda_2'')$. Так как в этом интервале A изменяется от $+1$ до $+1$, то во всех точках внутри интервала выполняется либо неравенство $A > 1$, либо неравенство $A < 1$. Чтобы выяснить, какой из этих случаев действительно имеет место, рассмотрим точки, лежащие вблизи одного из концов интервала. Пусть это будет конец λ_2'. Так как интервал по условию не вырожден, то корень λ_2' является простым и, следовательно, $\frac{dA}{d\lambda}$ не обращается в нуль при $\lambda = \lambda_2'$. И так как левее точки λ_2' величина A меньше единицы, то отсюда следует, что правее указанной точки величина A больше единицы. Предложение, таким образом, доказано. Точно так же доказывается это предложение и для тех однородных интервалов, на концах которых $A = -1$.

Итак, придавая в уравнении (61.1) параметру λ всевозможные значения, мы получим бесконечную последовательность чередующихся областей устойчивости и неустойчивости. Границами этих областей являются корни уравнений (61.3) и (61.4), которые делят ось λ на интервалы двух видов: однородные, которые ограничены с обоих концов либо корнями уравнения (61.3), либо корнями уравнения (61.4), и разнородные, которые с одной стороны ограничены корнем уравнения (61.3), а с другой стороны — корнем уравнения (61.4). Области устойчивости совпадают с неоднородными интервалами, а области неустойчивости с однородными интервалами. Корни уравнения (61.4) расположены вблизи целых[1]) нечетных чисел по два корня вблизи каждого такого числа, причем при $\mu=0$ эти корни сливаются и делаются равными указанному числу[2]). Корни уравнения (61.3) располагаются аналогичным образом вблизи целых четных чисел. Все указанные корни являются при μ, достаточно малом, аналитическими функциями этой величины.

§ 62. Практический способ определения областей устойчивости и неустойчивости для уравнения второго порядка.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что все области неустойчивости уравнения (61.1) расположены в окрестности целых чисел. При этом в окрестности каждого целого числа n расположена одна область неустойчивости. Эта область при n четном ограничена корнями уравнения (61.3), а при n нечетном—корнями уравнения (61.4). При $\mu=0$ каждая область неустойчивости стягивается в точку.

В настоящем параграфе мы рассматриваем один из приемов практического определения областей неустойчивости, т. е. корней уравнений (61.3) и (61.4).

Допустим, что в уравнении (61.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2(1+\mu f(t,\ \mu))\,x=0, \tag{62.1}$$

где

$$f(t,\ \mu)=f_1(t)+\mu f_2(t)+\ \ldots,$$

λ является корнем уравнения (61.3) или (61.4). Пусть для определенности речь идет о корне, обращающемся при $\mu=0$ в заданное

---

[1]) Необходимо иметь в виду, что период функции f в уравнении (61.1) принят равным π. Если бы этот период равнялся какому-нибудь другому числу ω, то корни уравнений (61.3) и (61.4) располагались бы вблизи чисел вида $\frac{n\pi}{\omega}$, где n — целое число.

[2]) Не следует думать, что каждая такая пара корней непременно разделяется соответствующим ей целым числом. Может случиться, что оба корня находятся по одну сторону от указанного числа.

целое число n. Как мы видели в предыдущем параграфе, при μ, достаточно малом, указанный корень является аналитической функцией μ, и мы можем писать:

$$\lambda^2 = n^2 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots \tag{62.2}$$

При сделанном предположении уравнение (62.1), как это уже указывалось в предыдущем параграфе, имеет периодическое решение с периодом, равным 2π, если n — число нечетное, и равным π, если n — число четное. Будет ли указанное решение также являться аналитической функцией μ?

Так как коэффициенты уравнения (62.1) являются аналитическими функциями μ, то всякое решение этого уравнения, начальные значения которого не зависят от μ, будет аналитическим относительно μ. То же самое будет справедливо и по отношению к любому решению, начальные значения которого зависят от μ, но являются аналитическими функциями этой величины. Пусть $x = x(t)$ — решение уравнения (62.1), определяемое начальными условиями:

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{62.3}$$

Характеристическое уравнение для (62.1) при сделанном предположении относительно λ имеет двойной корень, равный 1 (при n четном) или -1 (при n нечетном). Поэтому любое решение уравнения (62.1) и, в частности, рассматриваемое решение $x(t)$ будет либо периодическим, либо вида

$$x(t) = t\varphi(t) + \psi(t), \tag{62.4}$$

где φ и ψ — периодические функции времени[1]). В последнем случае функция φ также определяет решение уравнения (62.1), которое и является искомым периодическим решением. Но в силу того, что начальные условия (62.3) решения (62.4) не зависят от μ, это решение является аналитическим относительно μ. Поэтому функция $\varphi(t)$, определяющая искомое периодическое решение, является аналитической относительно μ.

Итак, мы показали, что в рассматриваемом случае уравнение (62.1) допускает периодическое решение, аналитическое относительно μ. Если мы это решение умножим на $C(\mu)$, где $C(\mu)$ — произвольная неаналитическая функция μ, то мы получим новое периодическое решение уравнения (62.1). Отсюда с очевидностью вытекает, что не всякое периодическое решение уравнения (62.1) является аналитиче-

---

[1]) Период этих функций равен π, если n — число четное, и 2π, если n — число нечетное. Вообще в этом параграфе, говоря о периодических решениях уравнения (62.1), мы будем иметь в виду, не оговаривая это особо, что речь идет о решениях с периодом π или 2π в зависимости от четности или нечетности n.

ским относительно μ. Рассмотрим, однако, аналитическое периодическое решение. Пусть это решение имеет вид

$$x = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \tag{62.5}$$

где x_i — периодические функции времени, и ряд сходится при достаточно малом μ [1]). Чтобы сделать решение определенным, нужно будет указать некоторые дополнительные условия, определяющие произвольный постоянный множитель, входящий в это решение. Это может быть сделано следующим образом.

Если решение (62.5) не обращается в нуль при $t = 0$, то, умножив его на подходящим образом выбранный множитель, мы можем получить решение, обращающееся при $t = 0$ в наперед заданную величину

$$M = M_0 + \mu M_1 + \mu^2 M_2 + \ldots \tag{62.6}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае уравнение (62.1) допускает периодическое решение вида (62.5), в котором функции $x_i(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$x_i(0) = M_i, \tag{62.7}$$

где M_i — постоянные, удовлетворяющие лишь единственному условию, что ряд (62.6) сходится. Мы можем поэтому первые N постоянных M_i, где N—сколь угодно большое число, выбирать совершенно произвольно.

Если решение (62.5) обращается в нуль при $t = 0$, то производная от него по t при $t = 0$ будет отличной от нуля, и мы можем потребовать, чтобы выполнялись начальные условия

$$\dot{x}_i(0) = N_i, \tag{62.8}$$

где N_i — произвольные постоянные, для которых ряд

$$N_0 + \mu N_1 + \mu^2 N_2 + \ldots \tag{62.9}$$

сходится.

Для того чтобы в каждом конкретном случае выяснить, каким из начальных условий (62.7) или (62.8) можно удовлетворить, достаточно определить функцию x_0. Если $x_0(0) \neq 0$, то решение (62.5) при μ, достаточно малом, не будет обращаться в нуль при $t = 0$, и мы будем иметь начальные условия (62.7). Если же $x_0(0) = 0$, но $\dot{x}_0(0) \neq 0$, то можно удовлетворить условиям (62.8). Если $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, то, как будет видно ниже из вида $x_0(t)$, будем иметь тождественно $x_0(t) = 0$. Этот случай может быть исключен, так как, разделив, в случае необходимости, решение (62.5) на подходящую степень μ, мы можем всегда добиться, чтобы оно имело свободный член.

[1]) Радиус сходимости этого ряда совпадает с радиусом сходимости левой части уравнения (62.1).

Условия (62.7) или (62.8) однозначно определяют решение (62.5), если мы только не имеем дело с тем исключительным случаем, когда все решения уравнения (62.1) являются периодическими. Этот случай возможен, так как характеристическое уравнение имеет двукратный корень, которому могут соответствовать две группы решений (§ 52). В этом последнем случае, для того чтобы решение (62.5) было вполне определенным, необходимо задать начальные значения как самого решения, так и его производной.

Установив это, подставим в уравнение (62.1) вместо λ^2 ряд (62.2), и постараемся ему удовлетворить формальным рядом вида (62.5) с периодическими коэффициентами. Из предыдущего следует, что такой ряд всегда найдется, если только коэффициенты α_i в (62.2) выбраны определенным образом, а именно таким, что ряд (62.2) удовлетворяет либо уравнению (61.3), либо уравнению (61.4). При этом можно будет удовлетворить либо начальным условиям (62.7), либо начальным условиям (62.8), либо тем и другим одновременно. Рассмотрим те уравнения, которым должны удовлетворять функции $x_i(t)$.

Подставляя в (62.1) ряды (62.2) и (62.5), будем иметь:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2x_i}{dt^2}\mu^i + \left(n^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\mu^j\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j\mu^j\right)\sum_{i=0}^{\infty} x_i\mu^i = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{dt^2} + n^2x_0 = 0,\\ &\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = -n^2f_1x_0 - \alpha_1x_0,\\ &\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2x_2 = -(n^2f_1 + \alpha_1)\,x_1 - (n^2f_2 + \alpha_1f_1)\,x_0 - \alpha_2x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (62.10)$$

и вообще

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + n^2x_k = -(n^2f_1 + \alpha_1)\,x_{k-1} - \alpha_kx_0 + F_k(t, x_0, \ldots, x_{k-2}), \qquad (62.11)$$

где F_k — линейные функции от $x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}$ с периодическими коэффициентами. Эти функции зависят от постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ и не содержат постоянной α_k.

Уравнения (62.10) и (62.11) дают возможность последовательно определять неизвестные функции x_k. Однако для того чтобы эти функции получались периодическими, необходимо, чтобы правые части указанных уравнений удовлетворяли некоторым условиям. Эти условия дают возможность определить неизвестные коэффициенты α_i в выражении для λ^2. Покажем, как это делается.

Общее решение для x_0 имеет вид

$$x_0 = A_0 \cos nt + B_0 \sin nt.$$

Оно всегда является периодическим и содержит две произвольные постоянные A_0 и B_0. Обращаемся к уравнению, определяющему x_1. Правая часть этого уравнения является периодической функцией t. Для того чтобы это уравнение допускало периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье правой части не содержало членов с $\cos nt$ и $\sin nt$. Найдем коэффициенты при этих членах.

Так как, по условию, функция f_1 является периодической с периодом π, то эта функция разлагается в ряд Фурье по косинусам и синусам целых (четных) кратностей t. Но тогда функции $f_1 \cos nt$ и $f_1 \sin nt$ также разлагаются по синусам и косинусам целых (четных, если n — четное, и нечетных, если n — число нечетное) кратностей t, и мы можем писать:

$$\left.\begin{aligned} n^2 f_1 \cos nt &= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt), \\ n^2 f_1 \sin nt &= \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos mt + d_m \sin mt), \end{aligned}\right\} \qquad (62.12)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta}{2}, \quad b_n = \frac{\gamma}{2}, \\ c_n &= \frac{\gamma}{2}, \quad d_n = -\frac{\beta}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (62.13)$$

где β и γ — коэффициенты при $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$ в разложении функции $n^2 f_1$ [1]).

Из формул (62.12) и (62.13) сразу находим коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в правой части уравнения для x_1. Приравнивая эти коэффициенты нулю, получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (\beta + 2\alpha_1) A_0 + \gamma B_0 &= 0, \\ \gamma A_0 + (2\alpha_1 - \beta) B_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (62.14)$$

которым должны удовлетворять величины A_0 и B_0. Для того чтобы эти уравнения имели решение, отличное от тривиального $A_0 = B_0 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы величина α_1 удовлетворяла квадратному

---

[1]) Разложение Фурье функции $f_1(t)$ не содержит свободного члена, так как, по условию, среднее значение функции $f(t)$ равно нулю. Вследствие этого члены, содержащие $\cos nt$ и $\sin nt$, в выражениях (62.12) могут появиться лишь за счет членов с $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$ в разложении функции $f_1(t)$.

уравнению

$$(2\alpha_1+\beta)(2\alpha_1-\beta)-\gamma^2=0.$$

Отсюда находим:

$$\alpha_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли $\beta^2+\gamma^2\neq 0$ или $\beta^2+\gamma^2=0$. Рассмотрим сначала первый из указанных случаев. В этом случае уравнение для α_1 имеет два простых вещественных корня. Приравняем α_1 одному из этих корней. Так как он является простым, то он не обращает в нуль хотя бы один из миноров определителя системы (62.14), вследствие чего только одна из величин A_0 и B_0 может быть выбрана произвольно. Допустим, что этой величиной является A_0, для чего необходимо, чтобы она получилась отличной от нуля. Это условие будет, например, наверняка выполнено, если $\gamma\neq 0$. При сделанном предположении величина $x_0(0)$ будет отличной от нуля. Поэтому на основании вышесказанного мы можем при вычислении функций $x_i(t)$ удовлетворить начальным условиям (62.7). Мы можем, в частности, положить $A_0=1$. Тогда уравнения (62.14) дадут для B_0 определенное значение.

Выбрав, таким образом, α_1, A_0 и B_0, мы будем иметь, что уравнение для x_1 будет допускать периодическое решение. Но тогда и общее решение этого уравнения, имеющее вид

$$x_1=\overset{*}{x}_1(t)+A_1\cos nt+B_1\sin nt,$$

где $\overset{*}{x}_1$ — частное периодическое решение, а A_1 и B_1 — произвольные постоянные, будет также периодическим. Величину A_1 мы можем положить равной нулю. Это будет обозначать, что в условиях (62.7) величина M_1 принята равной $\overset{*}{x}_1(0)$.

Переходим теперь к вычислению дальнейших приближений. Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в уравнении для x_2, получим систему линейных неоднородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2A_0\alpha_2+\gamma B_1+2p_2&=0,\\ 2B_0\alpha_2+(2\alpha_1-\beta)B_1+2q_2&=0,\end{aligned}\right\}$$

где p_2 и q_2 — вполне определенные постоянные, представляющие собой коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в выражении $n^2f_1\overset{*}{x}_1+(\alpha_1f_1+n^2f_2)\,x_0$. Определитель Δ этой системы, равный

$$\Delta=2(2\alpha_1-\beta)A_0-2\gamma B_0\equiv 8\alpha_1A_0=8\alpha_1,$$

отличен от нуля, и потому эта система однозначно определяет величины α_2 и B_1.

После того как α_2 и B_1 вычислены указанным способом, уравнение для x_2 будет допускать только периодические решения, и мы можем написать:

$$x_2 = x_2^*(t) + A_2 \cos nt + B_2 \sin nt,$$

где $x_2^*(t)$ — некоторая периодическая функция, а A_2 и B_2 — произвольные постоянные. Постоянную A_2, так же как и A_1, можно положить равной нулю. Что же касается постоянной B_2, то она определится вместе с постоянной α_3 из условия периодичности функции x_3.

Действительно, допустим, что постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ и функции $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ уже определены и что указанные функции вышли периодическими. При этом мы можем написать:

$$x_{k-1} = x_{k-1}^*(t) + B_{k-1} \sin nt,$$

где x_{k-1}^* — некоторая периодическая функция, а B_{k-1} — оставшаяся еще неопределенной постоянная, которая должна быть вычислена вместе с постоянной α_k из условия периодичности функции x_k. Эти последние условия мы получим, приравнивая нулю коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в правой части уравнения для x_k. Таким путем мы, как легко видеть, получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 2A_0\alpha_k + \gamma B_{k-1} + 2p_k = 0, \\ 2B_0\alpha_k + (2\alpha_1 - \beta) B_{k-1} + 2q_k = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (62.15)$$

где p_k и q_k — коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в выражении $-n^2 f_1 x_{k-1}^* + F_k$, в котором F_k, являясь, как указывалось выше, линейной функцией величин $x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}$ с периодическими коэффициентами, будет вполне определенной периодической функцией времени. Уравнения (62.15) однозначно определяют величины α_k и B_{k-1}.

Мы предположили, что уравнения (62.14) дают для A_0 величину, отличную от нуля. Допустим, что $A_0 = 0$ и, следовательно, $B_0 \neq 0$.

В этом случае $x_0(0) = 0$, но $\dot{x}_0(0) \neq 0$, и поэтому вместо начальных условий (62.7) будут фигурировать начальные условия (62.8). В связи с этим в выражениях для x_k можно будет отбрасывать члены с $\sin nt$, и эти выражения будут иметь вид

$$x_k = x_k^* + A_k \cos nt,$$

где A_k — произвольные постоянные. Отбрасывание членов $B_k \sin nt$ равносильно предположению, что в начальных условиях (62.8) величины N_k приняты равными $\dot{x}_k^*(0)$. Постоянная A_k, так же как и в предыдущем случае, определится вместе с постоянной α_{k+1} из условия периодичности x_{k+1}.

Таким образом, в рассматриваемом случае, исходя из какого-нибудь корня квадратного уравнения для α, мы получим одно и только одно формальное разложение вида (62.2) для λ^2, при котором уравнение (62.1) допускает формальное периодическое решение вида (62.5), удовлетворяющее начальным условиям (62.7) или (62.8). Рассмотрев оба значения для α_1, мы получим два различных формальных разложения для λ^2 и периодического решения. Но, с другой стороны, по доказанному, для каждого целого n существует два и только два значения для λ^2, ограничивающие соответствующую область неустойчивости и представляемые *сходящимися* рядами вида (62.2), при которых уравнение (62.1) допускает периодическое решение вида (62.5), удовлетворяющее начальным условиям (62.7) или (62.8). Отсюда непосредственно следует, что полученные выше формальные разложения для λ^2 как раз и представляют искомые границы области неустойчивости и, следовательно, сходятся.

Отсюда, однако, не вытекает, что разложения (62.5) для периодического решения будут также сходиться. Для того чтобы последнее действительно имело место, необходимо, чтобы ряды (62.6) и (62.9) сходились. Вопрос о том, будут ли эти условия выполнены при нашем выборе величин M_k и N_k, требует еще дальнейшего исследования. Однако, как мы уже отмечали выше, первые N величин M_k и N_k, где N — сколь угодно большое число, могут быть выбраны совершенно произвольно и, следовательно, так, как это сделано выше. Поэтому сумма первых N членов формального ряда (62.5) отличается от действительного периодического решения на величину порядка малости (относительно μ) выше N. Мы могли бы, конечно, вести вычисления таким образом, чтобы получить заведомо сходящиеся ряды. Для этого, например, достаточно было бы в выражениях для x_k, вместо того чтобы отбрасывать члены $A_k \cos nt$ или $B_k \sin nt$, выбирать постоянные A_k и B_k таким образом, чтобы при $k \geqslant 1$ выполнялись либо условия $x_k(0) = 0$, либо условия $\dot{x}_k(0) = 0$. Однако при этом вычисления значительно усложнятся, так как каждый лишний член в каком-нибудь приближении значительно усложняет выражение для последующего приближения. В таком усложнении вычислений нет никакой необходимости, так как для нашей задачи периодическое решение уравнения (62.1) играет лишь вспомогательную роль и его точное выражение нас не интересует.

Допустим теперь, что $\beta^2 + \gamma^2 = 0$, что будет иметь место в том случае, когда разложение функции $f_1(t)$ не содержит членов с $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$. В этом случае квадратное уравнение для α_1 будет иметь двойной корень (равный нулю), который обращает в нуль все миноры определителя системы уравнений (62.14). Эти уравнения не определяют поэтому никакой зависимости между A_0 и B_0. Однако не следует думать, что A_0 и B_0 могут быть взяты совершенно произвольно. Эти величины, так же как и в случае $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, вообще говоря, связаны между собой, но эта зависимость установится при рассмотрении следующих приближений.

В самом деле, рассмотрим уравнение для x_1. Правая часть этого уравнения содержит множитель x_0. Поэтому общее решение этого уравнения, которое согласно выбору α_1 будет периодическим, имеет вид

$$x_1 = A_1 \cos nt + B_1 \sin nt + A_0 \varphi_1(t) + B_0 \psi_1(t),$$

где φ_1 и ψ_1 — периодические функции, а A_1 и B_1 — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь уравнение для x_2 и приравняем нулю коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в правой части этого уравнения. Полученные таким образом уравнения будут необходимо однородными относительно A_0 и B_0 и не будут содержать A_1 и B_1. Эти уравнения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} (P - \alpha_2) A_0 + Q B_0 = 0, \\ R A_0 + (S - \alpha_2) B_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (62.16)$$

где P, Q, R и S — некоторые определенные постоянные. Действительно, так как $\alpha_1 = 0$, то единственным членом в правой части уравнения для x_2, не содержащим A_0 и B_0, будет $-n^2 f_1 (A_1 \cos nt + B_1 \sin nt)$, а этот член по условию не содержит ни $\cos nt$, ни $\sin nt$.

Приравняв нулю определитель уравнений (62.16), мы получим квадратное уравнение для α. Если это уравнение имеет простые корни, то для каждого из них получится вполне определенный ряд для λ^2, совершенно так же как и в случае $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. При этом можно будет положить либо $A_1 = 0$, либо $B_1 = 0$ в зависимости от того, какая из величин A_0 и B_0, определяемая уравнениями (62.16), заведомо отлична от нуля. Вторая из этих постоянных вместе с α_3 определится из условия периодичности x_3. Уравнения для этих постоянных получатся линейными и дадут для них вполне определенные значения. Аналогично вычисляются и дальнейшие приближения. Вычисления при этом будут совершенно такими же, как и в случае $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. Разница будет заключаться лишь в том, что входящие в k-е приближение постоянные A_k или B_k будут определяться из условия периодичности не $(k+1)$-го, а $(k+2)$-го приближения.

Если окажется, что и уравнение для α_2 имеет кратные корни, то исследование усложняется. Мы не будем здесь рассматривать этих более сложных случаев в общем виде, так как в каждом отдельном частном случае их исследование не представит никаких трудностей. Как бы разнообразны ни были эти частные случаи, мы можем на основании вышесказанного быть всегда уверенными, что всегда получатся, по крайней мере, два формальных разложения для интересующей нас величины λ^2. Можно показать, на чем мы здесь не останавливаемся, что таких разложений никогда не получится больше двух и что, следовательно, они и будут искомыми разложениями и будут сходиться. Может, конечно, случиться, как это вытекает из общей теории, что оба разложения совпадут. Характер вычислений во всех случаях мало отличается от рассмотренных выше более простых случаев и достаточно выясняется на приводимых ниже примерах.

§ 63. Примеры приложения метода предыдущего параграфа.

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих метод предыдущего параграфа.

Пример 1. Определим первую область неустойчивости (т. е. соответствующую $n=1$) в задаче колебаний спарников электровоза. Как было показано в § 60, дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{1}{\omega^2}\psi(\tau)\,x=0, \tag{63.1}$$

где

$$\psi(\tau)=\frac{a+b\cos 2\tau+c\cos 4\tau}{p+q\cos 2\tau+r\cos 4\tau}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}.$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты b, c, q, r малы по сравнению с a и b. Тогда, представляя ψ в виде

$$\psi=\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\left\{\frac{a}{p}+\frac{b}{p}\cos 2\tau+\frac{c}{p}\cos 4\tau\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\left(\frac{q}{p}\cos 2\tau+\frac{r}{p}\cos 4\tau\right)+\left(\frac{q}{p}\cos 2\tau+\frac{r}{p}\cos 4\tau\right)^2+\ldots\right\}$$

и вводя обозначения

$$\frac{a}{p}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}=g_0,\quad \frac{b}{p}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}=g_1\mu,\quad \frac{c}{p}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}=g_2\mu,$$
$$\frac{q}{p}=g_3\mu,\quad \frac{r}{p}=g_4\mu,$$

мы можем записать уравнение (63.1) в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{g_0}{\omega^2}\{1+(a_1\cos 2\tau+a_2\cos 4\tau)\,\mu+$$
$$+(a_3\cos 2\tau+a_4\cos 4\tau+a_5\cos 6\tau+a_6\cos 8\tau)\,\mu^2+\ldots\}\,x=0, \tag{63.2}$$

где a_j — постоянные, которые могут быть выражены через g_0, g_1, g_2, g_3, g_4. В частности, имеем:

$$a_1=\frac{g_1-g_3g_0}{g_0},\quad a_2=\frac{g_2-g_4g_0}{g_0},\quad a_3=\frac{2g_3g_4g_0-g_1g_4-g_2g_3}{2g_0}.$$

Для нахождения первой области неустойчивости полагаем в уравнении (63.2)

$$\frac{g_0}{\omega^2}=1+\alpha_1\mu+\alpha_2\mu^2+\ldots \tag{63.3}$$

и пытаемся ему удовлетворить формальным рядом вида

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots=A_0\cos\tau+B_0\sin\tau+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots,$$

где A_0 и B_0 — постоянные, а x_j — периодические функции τ (периода 2π). Для x_1 и x_2 получаем следующие уравнения:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-(a_1\cos 2\tau+a_2\cos 4\tau)\,x_0-\alpha_1 x_0=$$
$$=-\left(\frac{a_1}{2}+\alpha_1\right)A_0\cos\tau+\left(\frac{a_1}{2}-\alpha_1\right)B_0\sin\tau-$$
$$-\frac{1}{2}(a_1+a_2)\,A_0\cos 3\tau-\frac{1}{2}(a_1-a_2)\,B_0\sin 3\tau-$$
$$-\frac{A_0a_2}{2}\cos 5\tau-\frac{B_0a_2}{2}\sin 5\tau,$$
$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+x_2=-(a_1\cos 2\tau+a_2\cos 4\tau)\,x_1-$$
$$-(a_3\cos 2\tau+a_4\cos 4\tau+a_5\cos 6\tau+a_6\cos 8\tau)x_1-\alpha_1 x_0-$$
$$-\alpha_1(a_1\cos 2\tau+a_2\cos 4\tau)\,x_0-\alpha_2 x_0.$$

Для того чтобы функция x_1 вышла периодической, необходимо и достаточно, чтобы в правой части уравнения, определяющего эту функцию, не содержалось членов ни с $\cos\tau$, ни с $\sin\tau$. Приравнивая коэффициенты при этих величинах нулю, получим систему линейных и однородных уравнений для определения A_0 и B_0, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left(\frac{a_1}{2}+\alpha_1\right)A_0=0,\quad \left(\frac{a_1}{2}-\alpha_1\right)B_0=0. \tag{63.4}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим для α_1 два различных решения:

$$\alpha_1=-\frac{a_1}{2},\quad \alpha_1=\frac{a_1}{2}.$$

Каждое из этих решений дает начало ряду (63.3). Рассматривая оба эти решения, мы получим два ряда (63.3), которые, по доказанному, сходятся и определяют границы области неустойчивости.

Примем сначала $\alpha_1=-\frac{a_1}{2}$. В этом случае уравнения (63.4) дают для B_0 значение, равное нулю. Величину A_0, остающуюся произвольной, мы можем согласно общей теории принять равной единице. При этих предположениях уравнение для x_1 принимает вид

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+x_1=-\frac{a_1+a_2}{2}\cos 3\tau-\frac{a_2}{2}\cos 5\tau.$$

Для общего решения этого уравнения имеем:

$$x_1=A_1\cos\tau+B_1\sin\tau+\frac{a_1+a_2}{16}\cos 3\tau+\frac{a_2}{48}\cos 5\tau. \tag{63.5}$$

Это решение является периодическим и содержит две произвольные постоянные A_1 и B_1. Так как $x_0(0)=A_0\neq 0$, то согласно общей теории мы можем положить $A_1=0$. Что же касается постоянной B_1, то она определится вместе с α_2 из условия периодичности x_2. Чтобы получить эти условия, подставим в уравнение для x_2 найденные значения x_0, x_1 и α_1 и приравняем нулю коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$. Таким путем мы должны согласно общей теории получить два линейных неоднородных уравнения для B_1 и α_2, из которых они однозначно определяются. В рассматриваемом случае мы получим:

$$B_1=0, \quad \alpha_2=-\frac{(a_1+a_2)^2}{32}-\frac{a_2^2}{96}+\frac{a_1^2}{4}-\frac{a_3}{2}.$$

Таким путем можно найти и дальнейшие приближения, но мы ограничимся первыми двумя.

Положим теперь $\alpha_2=\frac{a_1}{2}$. В этом случае из уравнений (63.4) находим: $A_0=0$, $B_0=1$. Так как теперь $A_0=0$, но $B_0\neq 0$, то в выражении (63.5) для x_1 мы не можем полагать $A_1=0$, но можем положить $B_1=0$. Если теперь найденные значения x_0, x_1 и α_1 подставить в уравнение для x_2, то, приравнивая в нем нулю коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$, мы будем иметь:

$$A_1=0,$$
$$\alpha_2=-\frac{(a_2-a_1)^2}{32}+\frac{a_1^2}{4}-\frac{a_2^2}{96}+\frac{a_3}{2}.$$

Таким образом, первая область критических значений угловой скорости ω вала определяется неравенствами

$$1-\frac{a_1}{2}\mu+\frac{1}{96}\left(21a_1^2-4a_2^2-6a_1a_2-48a_3\right)\mu^2+\ldots\leqslant\frac{g_0}{\omega^2}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{1}{2}a_1\mu+\frac{1}{96}\left(21a_1^2-4a_2^2+6a_1a_2+48a_3\right)\mu^2+\ldots$$

Пример 2. Определим вторую область неустойчивости для колебаний в электрическом контуре с переменной емкостью, рассмотренных в § 60. Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt'^2}+\frac{4L-R^2C_0}{4L^2C_0\omega^2}\cdot(1+\mu\cos t')\,x=0, \tag{63.6}$$

где

$$\mu=\frac{4Lm}{4L-R^2C_0}.$$

Мы будем предполагать, что величина μ мала. Чтобы можно было приложить без всяких изменений правила предыдущего параграфа, необходимо изменить независимую переменную таким образом, чтобы период правой части уравнения (63.6) был равен π. Для этого, очевидно, достаточно положить $t'=2\tau$, после чего уравнение (63.6) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \lambda^2(1 + \mu\cos 2\tau)\,x = 0, \tag{63.7}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{4L - R^2C_0}{L^2C_0\omega^2}.$$

Для определения области неустойчивости, расположенной вблизи $\lambda = 2$, полагаем в уравнении (63.7)

$$\lambda^2 = 4 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots$$

и стараемся удовлетворить ему формальным рядом

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots$$

с периодическими (периода π) коэффициентами. При этом

$$x_0 = A_0\cos 2\tau + B_0\sin 2\tau.$$

Далее,

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + 4x_1 = -4x_0\cos 2\tau - \alpha_1 x_0 =$$
$$= -2A_0 - 2A_0\cos 4\tau - 2B_0\sin 4\tau - \alpha_1(A_0\cos 2\tau + B_0\sin 2\tau),$$
$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + 4x_2 = -4x_1\cos 2\tau - \alpha_2 x_0,$$
$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + 4x_3 = -4x_2\cos 2\tau - \alpha_2 x_1 - \alpha_2\cos 2\tau\cdot x_0 - \alpha_3 x_0 -$$
$$-\alpha_1 x_2 - \alpha_1\cos 2\tau\cdot x_1.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos 2\tau$ и $\sin 2\tau$ в уравнении для x_1, находим:

$$\alpha_1 = 0, \tag{63.8}$$

причем величины A_0 и B_0 остаются произвольными. Мы имеем как раз дело с отмеченным в предыдущем параграфе случаем, когда введенная там величина $\beta^2 + \gamma^2$ обращается в нуль. Как мы там указывали, величины A_0 и B_0 будут, вообще говоря, связанными между собой, но эта связь установится при рассмотрении дальнейших приближений. Вычислим эти приближения. На основании (63.8) имеем:

$$x_1 = -\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{6}\cos 4\tau + \frac{B_0}{6}\sin 4\tau + A_1\cos 2\tau + B_1\sin 2\tau, \tag{63.9}$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Так как мы еще не знаем, какая из величин A_0 и B_0 заведомо отлична от нуля, то мы не можем пока ни одну из постоянных A_1 и B_1 принять равной нулю. Подставив x_0 и x_1 в уравнение для x_2, получим:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + 4x_2 = \left(\frac{5}{3} - \alpha_2\right)A_0\cos 2\tau - \left(\frac{1}{3} + \alpha_2\right)B_0\sin 2\tau -$$
$$-2A_1\cos 4\tau - 2B_1\sin 4\tau - \frac{A_0}{3}\cos 6\tau - \frac{B_0}{3}\sin 6\tau - 2A_1.$$

Условия периодичности дают:

$$\left(\frac{5}{3}-\alpha_2\right)A_0=0, \quad \left(\frac{1}{3}+\alpha_2\right)B_0=0,$$

и следовательно, для α_2 получаются два различных решения. Имеем, таким образом, два варианта. При первом варианте

$$\alpha_2=\frac{5}{3}, \quad A_0=1, \quad B_0=0,$$

а при втором варианте

$$\alpha_2=-\frac{1}{3}, \quad A_0=0, \quad B_0=1.$$

Рассмотрим сначала первый вариант. Так как в этом варианте $A_0 \neq 0$, то мы можем положить в (63.9) величину A_1 равной нулю. После этого получим:

$$x_2=\frac{1}{6}B_1\sin 4\tau+\frac{1}{96}\cos 6\tau+B_2\sin 2\tau,$$

где B_2 — произвольная постоянная. Подставляя найденные приближения в уравнение для x_3 и выписывая условия периодичности этой функции, получим два линейных неоднородных уравнения для α_3 и B_1. Эти уравнения имеют вид

$$B_1=0, \quad \alpha_3=0.$$

Аналогично подсчитываются и дальнейшие приближения. При этом в отличие от предыдущего примера, соответствующего случаю $\beta^2+\gamma^2 \neq 0$, постоянные B_k, входящие в x_k, определяются не из условия периодичности функций x_{k+1}, а из условия периодичности функций x_{k+2}.

Рассмотрим теперь второй вариант. В этом случае

$$x_1=\frac{1}{6}\sin 4\tau+A_1\cos 2\tau,$$

$$x_2=-\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{6}A_1\cos 4\tau+\frac{1}{96}\sin 6\tau+A_2\cos 2\tau,$$

и условия периодичности для x_3 дают:

$$\alpha_3=0, \quad A_1=0.$$

Таким образом, с точностью до величин третьего порядка относительно μ вторая область значений частоты ω изменения емкости, при которых уравнение (63.7) имеет неустойчивые решения, определяется неравенствами

$$4-\frac{1}{3}\mu^2+\ldots \leqslant \frac{4L-R^2C_0}{L^2C_0\omega^2} \leqslant 4+\frac{5}{3}\mu^2+\ldots \tag{63.10}$$

Из этих неравенств видно, что, для того чтобы указанная область неустойчивости существовала, необходимо прежде всего, чтобы выполнялось условие

$$4L - R^2C_0 > 0.$$

Мы будем предполагать, что это условие выполняется. Но и при выполнении этого условия еще нельзя быть уверенным, что в указанной области в рассматриваемом электрическом контуре действительно возникнут неустойчивые колебания. Дело в том, что переменная x, фигурирующая в уравнении (63.7), является вспомогательной. Для тока q имеем, как мы это видели в § 60, выражение

$$q = e^{-\frac{R}{2L}t}x.$$

Следовательно, на границах области (63.10), где вещественная часть характеристических показателей уравнения (63.7) равна нулю, колебания тока будут затухающими. Если при этом величина $\frac{R}{2L}$ достаточно мала, а именно меньше наибольшего значения вещественной части характеристического показателя уравнения (63.7) в области (63.10), то будет существовать область неустойчивости для тока q, расположенная внутри области (63.10). Если это условие относительно $\frac{R}{2L}$ не выполняется, то во всей области (63.10) колебания тока будут затухающими.

Пример 3. Рассмотрим снова уравнение (63.7) и определим границы области неустойчивости, расположенной вблизи $\lambda = 3$.

Полагая

$$\lambda^2 = 9 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots$$

и

$$x = A_0\cos 3\tau + B_0\sin 3\tau + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots,$$

будем теперь иметь:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + 9x_1 = -9\cos 2\tau\cdot x_0 - \alpha_1 x_0,$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + 9x_2 = -9\cos 2\tau\cdot x_1 - \alpha_1(x_1 + \cos 2\tau\cdot x_0) - \alpha_2 x_0,$$

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + 9x_3 = -9\cos 2\tau\cdot x_2 - \alpha_1(x_2 + \cos 2\tau\cdot x_1) - \alpha_2(x_1 + \cos 2\tau\cdot x_0) - \alpha_3 x_0,$$

$$\frac{d^2x_4}{d\tau^2} + 9x_4 = -9\cos 2\tau\cdot x_3 - \alpha_1(x_3 + \cos 2\tau\cdot x_2) - \alpha_2(x_2 + \cos 2\tau\cdot x_1) - \alpha_3(x_1 + \cos 2\tau\cdot x_0) - \alpha_3 x_0.$$

Условие периодичности x_1 дает:

$$\alpha_1 = 0.$$

причем A_0 и B_0 остаются неопределенными. Для x_1 получаем выражение

$$x_1 = -\frac{9}{16}A_0\cos\tau - \frac{9}{16}B_0\sin\tau + \frac{9}{32}A_0\cos 5\tau + \frac{9}{32}B_0\sin 5\tau + A_1\cos 3\tau + B_1\sin 3\tau,$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Так же как и в предыдущем примере, ни одну из этих постоянных мы не можем пока приравнять нулю. Подставляя в уравнение для x_2 найденные значения α_1 и x_1, получим:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + 9x_2 = \frac{9}{2}\left(\frac{9}{16}A_0 - A_1\right)\cos\tau - \frac{9}{2}\left(\frac{9}{16}B_0 + B_1\right)\sin\tau - \frac{9}{2}A_1\cos 5\tau - \frac{9}{2}B_1\sin 5\tau - \frac{81}{64}A_0\cos 7\tau - \frac{81}{64}B_0\sin 7\tau + \left(\frac{81}{64} - \alpha_2\right)A_0\cos 3\tau + \left(\frac{81}{64} - \alpha_2\right)B_0\sin 3\tau, \quad (63.11)$$

и следовательно, условия периодичности x_2 имеют вид

$$\left(\frac{81}{64} - \alpha_2\right)A_0 = 0, \quad \left(\frac{81}{64} - \alpha_2\right)B_0 = 0.$$

Получающееся отсюда решение для α_2:

$$\alpha_2 = \frac{81}{64}$$

будет опять двухкратным, причем A_0 и B_0 по-прежнему остаются неопределенными. Из (63.11) находим:

$$x_2 = \frac{9}{16}\left(\frac{9}{16}A_0 - A_1\right)\cos\tau - \frac{9}{16}\left(\frac{9}{16}B_0 + B_1\right)\sin\tau + \frac{9}{32}A_1\cos 5\tau + \frac{9}{32}B_1\sin 5\tau + \frac{81}{2560}A_0\cos 7\tau + \frac{81}{2560}B_0\sin 7\tau + A_2\cos 3\tau + B_2\sin 3\tau,$$

где A_2 и B_2 — постоянные, остающиеся пока неопределенными.

Уравнение для x_3 после подстановки найденных значений x_1, x_2, α_1 и α_2 принимает вид

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + 9x_3 = -\frac{9}{2}\left(\frac{153}{512}A_0 - \frac{9}{16}A_1 + A_2\right)\cos\tau - \frac{9}{2}\left(\frac{153}{512}B_0 + \frac{9}{16}B_1 + B_2\right)\sin\tau - \left(\alpha_3 + \frac{729}{512}\right)A_0\cos 3\tau + \left(\frac{729}{512} - \alpha_3\right)B_0\sin 3\tau - \frac{5103}{10\,240}A_0\cos 5\tau - \frac{5103}{10\,240}B_0\sin 5\tau - \frac{9}{2}A_2\cos 5\tau - \frac{9}{2}B_2\sin 5\tau + a_7\cos 7\tau + b_7\sin 7\tau + a_9\cos 9\tau + b_9\sin 9\tau,$$

где a_7, a_9, b_7, b_9 — некоторые вполне определенные коэффициенты, которые нам нет необходимости выписывать. Следовательно, условия периодичности x_3 имеют вид

$$\left(\alpha_3+\frac{729}{512}\right)A_0=0, \quad \left(\alpha_3-\frac{729}{512}\right)B_0=0.$$

Эти условия дают два различных значения для α_3, и дальнейшие вычисления нужно вести в двух вариантах. При первом варианте мы имеем:

$$\alpha_3=-\frac{729}{512}, \quad B_0=0, \quad A_0=1.$$

Теперь уже мы можем положить $A_1=A_2=0$ и во всех дальнейших приближениях в выражения для x_k не вводить членов с $\cos 3\tau$. При этих предположениях будем иметь:

$$x_3=-\frac{1377}{8192}\cos\tau-\frac{9}{16}\left(\frac{9}{16}B_1+B_2\right)\sin\tau+ \\ +\frac{5103}{163\,840}\cos 5\tau+\frac{9}{32}B_2\sin 5\tau-\frac{a_7}{40}\cos 7\tau-\frac{b_7}{40}\sin 7\tau- \\ -\frac{a_9}{72}\cos 9\tau-\frac{b_9}{72}\sin 9\tau+B_3\sin 3\tau,$$

где B_3 — неопределенная постоянная. Подставляя найденные приближения в уравнение для x_4 и составляя условия периодичности этой функции, мы получим два линейных неоднородных уравнения для определения B_1 и α_4. Получим:

$$B_1=0, \quad \alpha_4=-\frac{235\,467}{327\,680}.$$

Если вычисление приближений продолжить, то последовательно определятся постоянные α_5, α_6, ... При этом каждая постоянная α_k определится одновременно с постоянной B_{k-2} из условий периодичности функции x_k, которые дадут для этих двух величин разрешимую систему линейных неоднородных уравнений.

При втором варианте будем иметь:

$$\alpha_3=\frac{729}{512}, \quad B_0=1, \quad A_0=0,$$

и все дальнейшие вычисления будут такими же, как и при первом варианте, с той лишь разницей, что теперь уже нужно будет положить равными нулю все величины B_k, а величины A_k определять из условий периодичности функций x_{k+2}. Для величин A_1 и α_4 мы получим следующие значения:

$$A_1=0, \quad \alpha_4=\frac{260\,953}{327\,680}.$$

Таким образом, искомая область неустойчивости определяется следующими неравенствами:

$$9+\frac{81}{64}\mu^2-\frac{729}{512}\mu^3-\frac{235\,467}{327\,680}\mu^4+\ldots\leqslant\lambda^2\leqslant$$
$$\leqslant 9+\frac{81}{64}\mu^2+\frac{729}{512}\mu^3+\frac{260\,953}{327\,680}\mu^4+\ldots$$

В. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

§ 64. Критерии устойчивости по первому приближению.

Мы переходим теперь к рассмотрению устойчивости периодических движений, когда в дифференциальных уравнениях возмущенного движения учитываются также и нелинейные члены. Допустим, что эти уравнения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}(t)\,x_1+\ldots+p_{sn}(t)\,x_n+X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad (64.1)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где p_{sj} — непрерывные периодические функции периода ω, а X_s — нелинейные добавки. Первая основная задача, которая здесь возникает, заключается в установлении необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению, т. е. условий, при которых задача устойчивости для уравнений (64.1) решается уравнениями первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (64.2)$$

Решению этой задачи и посвящен настоящий параграф. При этом мы будем предполагать, что нелинейные добавки X_s в уравнениях (64.1) удовлетворяют следующим общим условиям:

1) Существует область

$$t\geqslant t_0,\quad |x_s|\leqslant H, \quad (64.3)$$

в которой выполняются неравенства

$$|X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)|\leqslant A\,\{\,|x_1|+\ldots+|x_n|\,\}, \quad (64.4)$$

где A — некоторая постоянная.

2) В области (64.3) функции X_s непрерывны и удовлетворяют некоторым общим условиям, при которых уравнения (64.1) имеют единственное решение для всякой системы начальных условий, взятых в указанной области.

Из (64.4) вытекает, что функции X_s удовлетворяют также обычному условию $X_s(t,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0$.

Хотя мы сейчас рассматриваем устойчивость периодических движений, мы не будем в этом параграфе предполагать, что функции X_s по отношению к t являются периодическими, так как все выкладки этого параграфа остаются справедливыми без этого ограничения.

Докажем теперь следующие теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 1. *Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения* (64.2) *имеют модули, меньшие единицы, то невозмущенное движение для уравнений* (64.1) *асимптотически устойчиво при любом выборе функций X_s, удовлетворяющих указанным для них условиям, если только постоянная A в неравенствах* (64.4) *достаточно мала*[1].

Доказательство. Как было показано в § 54, существует линейная подстановка

$$y_j = f_{j1}(t)\,x_1 + \ldots + f_{jn}(t)\,x_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{64.5}$$

с периодическими (периода ω или 2ω) коэффициентами, преобразующая систему линейных уравнений (64.2) с периодическими коэффициентами в систему линейных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{64.6}$$

с постоянными коэффициентами. При этом детерминант преобразования (64.5) не обращается в нуль ни при каких значениях t, вследствие чего задача устойчивости по отношению к переменным x_s эквивалентна задаче устойчивости по отношению к переменным y_s. Если преобразование (64.5) применить к уравнениям (64.1), то они примут вид

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n + Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{64.7}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где Y_s — функции такого же вида, как и X_s. В частности, имеем, что в области, в которую преобразуется область (64.3), выполняются неравенства

$$|Y_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < B\{|y_1| + \ldots + |y_n|\}, \tag{64.8}$$

где B — также постоянная, которая будет сколь угодно мала, если A достаточно мало.

---

[1]) А. М. Ляпунов предполагал, что функции X_s являются аналитическими по отношению к $x_1, \ldots, x_n$ и их разложения по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка. Однако рассуждения Ляпунова остаются справедливыми и при вышеуказанных общих условиях.

Согласно § 55 корни определяющего уравнения

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (64.9)$$

системы (64.6) являются характеристическими показателями системы (64.2). Так как, по условию, все корни характеристического уравнения системы (64.2) имеют модули, меньшие единицы, то характеристические показатели этой системы будут иметь отрицательные вещественные части.

Таким образом, все корни уравнения (64.9) имеют отрицательные вещественные части. Но тогда существует одна и только одна квадратичная форма $V(y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s}(q_{s1}y_1 + \dots + q_{sn}y_n) = -\sum_{s=1}^{n} y_s^2,$$

и эта форма будет обязательно определенно-положительной. Составим теперь производную по t от формы V в силу уравнений (64.7). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} Y_s.$$

Эта производная будет определенно-отрицательной при любом выборе функций Y_s, если только величина B в неравенствах (64.8) будет достаточно малой, т. е. если достаточно малой будет величина A в неравенствах (64.4). Но при этом условии функция V удовлетворяет всем условиям теоремы II Ляпунова (§ 46), что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если характеристическое уравнение системы первого приближения* (64.2) *имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение для системы* (64.1) *будет неустойчиво при любом выборе функций* X_s, *удовлетворяющих указанным для них условиям, если только величина* A *в неравенствах* (64.4) *достаточно мала.*

Доказательство. Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем рассматривать вместо системы (64.1) эквивалентную ей систему (64.7). В рассматриваемом случае определяющее уравнение (64.9) имеет, по крайней мере, один корень с положительной вещественной частью. Вследствие этого (теорема 3 § 21) можно найти квадратичную форму $V(y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} (q_{s1} y_1 + \ldots + q_{sn} y_n) = \alpha V + \sum_{s=1}^{n} y_s^2,$$

где α — некоторое положительное число, причем форма V может принимать положительные значения, т. е. существует область, где $V > 0$. Производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу уравнений (67.7), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + W(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{64.10}$$

где

$$W = \sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} Y_s$$

есть функция определенно-положительная, каковы бы ни были функции Y_s, если только величина A в неравенствах (64.4) достаточно мала. Форма V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости (§ 48). В самом деле, из (64.10) вытекает, что в области $V > 0$ выполняется также неравенство $\frac{dV}{dt} > 0$. Кроме того, как легко видеть, выполняются все остальные условия теоремы Н. Г. Четаева. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

§ 65. Критические случаи.

Из теорем предыдущего параграфа вытекает, что задача устойчивости для систем вида (64.1) решается уравнениями первого приближения (64.2) во всех случаях, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет все корни с модулями, меньшими единицы, либо хотя бы один корень с модулем, большим единицы. Сомнительными, следовательно, будут те случаи, когда указанное характеристическое уравнение, не имея корней с модулями, большими единицы, имеет корни с модулями, равными единице. В этом случае определяющее уравнение (64.9) системы (64.6), в которую преобразуются уравнения (64.2), будет иметь часть корней с отрицательными вещественными частями и часть корней с вещественными частями, равными нулю, а именно: корням, равным единице, характеристического уравнения системы (64.2) соответствуют корни, равные нулю, определяющего уравнения (64.9). Корням же характеристического уравнения, равным —1, а также комплексным корням с модулями, равными 1, соответствуют чисто мнимые корни определяющего уравнения (64.9). Таким образом, если в указанных сомнительных случаях пользоваться вместо уравнений (64.1) эквивалентными им уравнениями (64.7), то задача устойчивости в этих случаях будет отличаться от задачи устойчивости в критических случаях для установившихся движений только тем, что нелинейные члены Y_s будут содержать явно t. И поскольку в критических случаях для установившихся движений нелинейными членами можно распорядиться таким образом, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость, то тем более это будет справедливо и в рассматриваемых сейчас случаях, так как эти нелинейные члены мы можем, в частности, выбрать не зависящими от t. Другими словами, если характеристическое уравнение системы первого приближения (64.2) не имеет корней с модулями, большими единицы, но имеет корни с модулями, равными единице, то для решения задачи устойчивости нельзя ограничиться первым приближением и необходимо рассмотреть члены более высоких порядков в уравнениях возмущенного движения. Все такого рода случаи будут, следовательно, принадлежать к числу критических.

Мы рассмотрим в этой главе два критических случая:

1) когда характеристическое уравнение первого приближения имеет только один критический корень и этот корень равен единице;

2) когда характеристическое уравнение имеет два критических корня и эти корни оба комплексны и обладают модулями, равными единице.

Мы будем пользоваться уравнениями возмущенного движения, приведенными к виду (64.7). При этом мы вынуждены будем отказаться от решения задачи при тех весьма общих предположениях относительно функций X_s, которые были высказаны в предыдущем параграфе, и подчинить эти функции более ограничительным условиям, а именно: мы будем предполагать, что функции X_s периодичны относительно t с периодом ω и что эти функции разлагаются в ряды по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка и сходящиеся в области $|x_s| \leqslant H$, где H — некоторое положительное число.

В первом из указанных критических случаев определяющее уравнение (64.9) будет иметь один нулевой корень при остальных корнях с отрицательными вещественными частями. Предполагая, что рассматриваемая система имеет $(n+1)$-й порядок, мы можем уравнения возмущенного движения привести в этом случае к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(t, x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n + q_s x + Y_s(t, x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (65.1)$$

Во втором критическом случае определяющее уравнение (64.9) имеет пару чисто мнимых корней вида $\pm\lambda i$, а остальные корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части. Считая, что порядок системы равен $n+2$, мы можем уравнения возмущенного движения привести к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(t,\ x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(t,\ x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\\
\frac{dy_s}{dt} &= q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n + p_s x + q_s y + Y_s(t,\ x,\ y,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\\
&\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \quad (65.2)$$

В уравнениях (65.1) и (65.2) функции X, Y и Y_s будут такого же вида, как и функции X_s, а величины q_{sj}, p_s и q_s являются постоянными, причем q_{sj} таковы, что уравнение (64.9) имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Для того чтобы привести уравнения (64.1) к виду (64.7), а следовательно, также к виду (65.1) или (65.2), необходимо, конечно, знать общее решение уравнений (64.2). Мы будем предполагать, что это решение нам действительно известно и что уравнения задачи уже приведены к виду (65.1) или (65.2).

В этой главе мы не будем рассматривать уравнений (65.1) и (65.2) в их общем виде, а ограничимся случаем $n=0$. Другими словами, мы будем предполагать, что в первом критическом случае система имеет первый порядок и, следовательно, имеется только одно уравнение возмущенного движения вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,\ x),$$

а во втором критическом случае система имеет второй порядок и состоит, следовательно, из двух уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(t,\ x,\ y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(t,\ x,\ y).$$

Общий случай $n>0$ будет рассмотрен в следующей главе, где будут установлены некоторые общие теоремы о критических случаях. Как мы увидим, исследование случая $n>0$ приводится к случаю $n=0$. В следующей главе будут рассмотрены также некоторые другие критические случаи.

§ 66. Критический случай, когда характеристическое уравнение имеет один равный единице корень.

Мы переходим к рассмотрению критического случая, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет один равный единице корень в предположении, что система уравнений возмущенного движения имеет первый порядок. Исследуемое дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) = f_k(t) x^k + f_{k+1}(t) x^{k+1} + \ldots, \tag{66.1}$$

где $k \geqslant 2$ и f_i — периодические функции t периода ω.

Если бы коэффициент f_k был постоянной величиной, то задача устойчивости для уравнения (66.1) разрешалась бы чрезвычайно просто. В самом деле, пусть

$$f_k = g = \text{const}. \tag{66.2}$$

Тогда, если k является числом четным, то правая часть уравнения (66.1) будет знакоопределенной функцией и функция $V = x$ будет удовлетворять всем условиям теоремы III Ляпунова (§ 47) и, следовательно, невозмущенное движение будет неустойчиво.

При k нечетном знакоопределенным будет выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} x^2\right) = g x^{k+1} + f_{k+1} x^{k+2} + \ldots,$$

и функция $V = \frac{1}{2} x^2$ будет при $g < 0$ удовлетворять условиям теоремы II Ляпунова, а при $g > 0$ — условиям теоремы III. Следовательно, в первом случае невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а во втором случае оно неустойчиво.

Итак, при выполнении условия (66.2) невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво при k нечетном и $g < 0$, а при k нечетном и $g > 0$, а также при k четном оно неустойчиво. Если условие (66.2) не выполняется, то для решения задачи устойчивости необходимо будет подвергнуть уравнение (66.1) некоторому преобразованию, целью которого является приведение уравнения к такому виду, для которого указанное условие выполнялось бы. Это может быть достигнуто двумя различными способами, вследствие чего мы имеем два способа решения задачи устойчивости в интересующем нас случае.

Первый способ решения задачи. Задавшись некоторым числом $N \geqslant k$, преобразуем уравнение (66.1) при помощи подстановки

$$y = x + \psi_k(t) x^k + \psi_{k+1}(t) x^{k+1} + \ldots + \psi_N(t) x^N, \tag{66.3}$$

где $\psi_k, \ldots, \psi_N$ — некоторые периодические, периода ω, функции t, которые мы постараемся выбрать таким образом, чтобы в преобразованном уравнении первые N коэффициентов были постоянными. Преобразованное уравнение должно, следовательно, иметь вид

$$\frac{dy}{dt} = a_k y^k + \ldots + a_N y^N + f^*_{N+1}(t) y^{N+1} + \ldots, \tag{66.4}$$

где $a_k, \ldots, a_N$ — некоторые постоянные, а $f^*_{N+1}, \ldots$ — периодические функции t. Для нашей цели, как мы видели, достаточно, чтобы в уравнении (66.4) был постоянным коэффициент только при младшей степени x. Однако, как мы сейчас увидим, некоторые из коэффициентов a_j могут оказаться равными нулю, и поэтому вычисление этих коэффициентов нужно будет производить до тех пор, пока мы не придем к первому отличному от нуля коэффициенту. Если этим коэффициентом будет a_m, то для нашей цели достаточно будет положить $N = m$.

Подставляя в уравнение (66.4) вместо y его выражение (66.3), будем иметь:

$$\begin{aligned}(1 + k\psi_k x^{k-1} + \ldots + N\psi_N x^{N-1})(f_k x^k + f_{k+1}x^{k+1} + \ldots) + \\ + \frac{d\psi_k}{dt}x^k + \ldots + \frac{d\psi_N}{dt}x^N = a_k(x + \psi_k x^k + \ldots + \psi_N x^N)^k + \\ + a_{k+1}(x + \psi_k x^k + \ldots + \psi_N x^N)^{k+1} + \ldots \quad (66.5)\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующие уравнения для функций ψ_j:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\psi_k}{dt} = a_k - f_k,\\ &\frac{d\psi_l}{dt} = a_l - F_l(t, \psi_k, \ldots, \psi_{l-1})\\ &\quad (l = k+1, \ldots, N).\end{aligned}\right\} \quad (66.6)$$

Здесь F_l — полиномы относительно $\psi_k, \ldots, \psi_{l-1}$ с периодическими коэффициентами. Эти полиномы зависят от постоянных $a_k, \ldots, a_{l-1}$, но не зависят от постоянной a_l. Из полученных уравнений функции последовательно определяются одна за другой, но, для того чтобы эти функции вышли периодическими, необходимо, чтобы правые части этих уравнений удовлетворяли некоторым условиям. Эти условия и определяют постоянные a_l. Действительно, для того чтобы функция ψ_k вышла периодической, необходимо и достаточно, чтобы среднее значение функции $a_k - f_k$ равнялось нулю. Это дает:

$$a_k = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_k(t)\,dt.$$

Таким образом, постоянная a_k получилась вполне определенной. Если она отлична от нуля, то в дальнейших вычислениях нет необходимости, т. е. мы можем в преобразовании (66.3) положить $N = k$. Если же $a_k = 0$, то потребуются дальнейшие вычисления.

Допустим для определенности, что все постоянные $a_k, \ldots, a_{j-1}$ и все функции $\psi_k, \ldots, \psi_{j-1}$ уже вычислены и что последние вышли периодическими. Тогда функция F_j будет также периодической и условие периодичности ψ_j однозначно определяет постоянную a_j и дает для нее следующее значение:

$$a_j = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega F_j\,dt. \tag{66.7}$$

Таким путем мы можем вычислить любое число постоянных a_j. Но для нашей цели, как мы уже говорили, достаточно определить лишь первую из них, отличную от нуля. Допустим для определенности, что этой постоянной является a_m, так что

$$a_m = g \neq 0, \quad a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{m-1} = 0. \tag{66.8}$$

Тогда, полагая в (66.3) $N = m$, мы приведем уравнение (66.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = gy^m + \ldots \tag{66.9}$$

Преобразование (66.3), очевидно, обладает тем свойством, что задача устойчивости относительно переменной x эквивалентна задаче устойчивости относительно переменной y. Мы можем поэтому вместо уравнения (66.1) рассматривать уравнение (66.9). Но для последнего, как мы видели, задача устойчивости решается сразу, а именно, при m четном, а также при m нечетном и g положительном невозмущенное движение неустойчиво, а при m нечетном и g отрицательном оно устойчиво и притом асимптотически.

Мы приходим, следовательно, к следующему правилу решения задачи устойчивости в интересующем нас случае.

Делая в уравнении (66.1) подстановку (66.3), стараемся функции ψ_i подобрать таким образом, чтобы они вышли периодическими[1]) и чтобы уравнение приняло вид (66.4). Для функций ψ_i получаются уравнения (66.6) и постоянные a_i однозначно определяются формулами (66.7). Эти постоянные определяем до тех пор, пока не встретим отличную от нуля. Пусть a_m — первая такая отличная от нуля постоянная. Тогда при m четном невозмущенное движение всегда неустойчиво, а при m нечетном оно неустойчиво при $g > 0$ и асимптотически устойчиво при $g < 0$.

Сформулированное сейчас правило может быть несколько видоизменено. К этому видоизменению мы придем, рассматривая задачу

[1]) Для нашей задачи нет, конечно, необходимости, чтобы функции ψ_i были периодическими. Достаточно, чтобы они были ограниченными. Но, как показывают уравнения (66.5), определяющие эти функции, они будут ограниченными только тогда, когда они будут периодическими.

нахождения для уравнения (66.1) первого интеграла. Попытаемся найти для уравнения (66.1) первый интеграл вида

$$x + \Phi_k x^k + \Phi_{k+1} x^{k+1} + \ldots = \text{const.}, \tag{66.10}$$

где Φ_i — некоторые периодические функции времени. Необходимо, следовательно, чтобы выполнялось тождественно условие

$$(1 + k\Phi_k x^{k-1} + \ldots)(f_k x^k + \ldots) + \frac{d\Phi_k}{dt} x^k + \frac{d\Phi_{k+1}}{dt} x^{k+1} + \ldots = 0.$$

Сравнение с (66.5) показывает, что функции Φ_i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = -F_i, \tag{66.11}$$

в которые переходят уравнения (66.6) при $a_i = 0$. Из уравнений (66.11) функции Φ_i будут получаться, вообще говоря, непериодическими. Однако, как это следует из (66.8), функции $\Phi_k, \ldots, \Phi_{m-1}$ совпадут с функциями $\psi_k, \ldots, \psi_{m-1}$ и получатся периодическими. Что же касается функции Φ_m, то, как показывают те же равенства (66.8), она наверняка получится непериодической, а именно, для нее будем иметь:

$$\Phi_m = -gt + \Phi(t), \tag{66.12}$$

где $\Phi(t)$ — некоторая периодическая функция, а g — та же постоянная, которая фигурирует в (66.8). Отсюда непосредственно видно, что при решении задачи устойчивости мы можем руководствоваться следующим правилом.

Стараемся подобрать для уравнения (66.1) первый интеграл вида (66.10) с периодическими коэффициентами Φ_i. Эта попытка не увенчается в общем случае успехом, так как коэффициенты Φ_i не получатся, вообще говоря, периодическими. Пусть Φ_m — первый непериодический коэффициент в ряду $\Phi_k, \Phi_{k+1}, \ldots$ Этот коэффициент необходимо будет иметь вид (66.12). Тогда при m четном невозмущенное движение всегда неустойчиво, а при m нечетном оно неустойчиво при $g > 0$ и асимптотически устойчиво при $g < 0$.

Сформулированное сейчас правило является, очевидно, лишь незначительным видоизменением правила, приведенного выше.

Число m и знак величины g являются, очевидно, некоторыми специфическими характеристиками дифференциального уравнения (66.1). Они не могут поэтому зависеть от способа приведения уравнения (66.1) к виду (66.9), и если это приведение может быть осуществлено различными приемами, то указанные величины получатся при этом одинаковыми. Изложенный нами способ приведения обладает известной неопределенностью, вызванной тем, что функции ψ_i, определяемые из (66.6) при помощи квадратур, содержат произвольные постоянные. Из вышеизложенного следует, что ни величина m, ни знак величины g от этих постоянных не зависят и поэтому они могут быть выбраны совершенно произвольно.

Мы предполагали, что, вычисляя функции ψ_i и постоянные a_i, мы придем к такому значению $i=m$, что величина a_m получится отличной от нуля. Может, однако, случиться, что все величины a_i, как бы велик ни был индекс i, получатся равными нулю. В этом случае предыдущие рассуждения неприменимы. Однако, как мы это увидим при рассмотрении второго способа решения задачи устойчивости, в рассматриваемом случае невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Второй способ решения задачи. Первый способ решения задачи, как мы видели, связан с вопросом о возможности построения для уравнения (66.1) периодического *первого интеграла* вида (66.10). Второй способ, к изложению которого мы сейчас переходим, связан с возможностью построения для уравнения (66.1) периодического *решения* вида

$$x=c+\varphi_k(t)c^k+\varphi_{k+1}(t)c^{k+1}+\ldots, \tag{66.13}$$

где c — произвольная постоянная, а φ_k, φ_{k+1}, ... — периодические функции периода ω.

Подставляя ряд (66.13) в правую часть уравнения (66.1), будем иметь:

$$\begin{aligned} f_k(c+\varphi_k c^k+\varphi_{k+1}c^{k+1}+\ldots)^k+ \\ +f_{k+1}(c+\varphi_k c^k+\varphi_{k+1}c^{k+1}+\ldots)^{k+1}+\ldots \equiv \\ \equiv \sum_{n=k}^{\infty} X_n(t, \varphi_k, \ldots, \varphi_{n-1})c^n \quad (X_k\equiv f_k), \end{aligned} \tag{66.14}$$

где X_n — полиномы относительно φ_k, ..., φ_{n-1} с периодическими коэффициентами. Отсюда вытекает, что, для того чтобы уравнение (66.1) допускало решение вида (66.13), необходимо, чтобы функции φ_i удовлетворяли уравнениям

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=X_i(t, \varphi_k, \ldots, \varphi_{i-1}). \tag{66.15}$$

Так как выражения X_i содержат только те из φ_j, для которых $j<i$, то уравнения (66.15) дают возможность последовательно определять функции φ_i. Однако эти функции не будут, вообще говоря, получаться периодическими. Пусть φ_m — первая непериодическая функция в ряду φ_k, φ_{k+1}, ... Тогда эта функция необходимо имеет вид

$$\varphi_m=gt+\Phi(t), \tag{66.16}$$

где g — постоянная, а Φ — периодическая функция.

Сделаем теперь в уравнении (66.1) замену переменной

$$x = y + \varphi_k y^k + \ldots + \varphi_{m-1} y^{m-1} + \Phi y^m = \\ = y + \varphi_k y^k + \ldots + \varphi_{m-1} y^{m-1} + \varphi_m y^m - gty^m. \quad (66.17)$$

Будем на основании (66.14) иметь:

$$\frac{dy}{dt}(1 + k\varphi_k y^{k-1} + \ldots + m\Phi y^{m-1}) + \frac{d\varphi_k}{dt} y^k + \ldots + \frac{d\varphi_m}{dt} y^m - gy^m = \\ = f_k(y + \varphi_k y^k + \ldots)^k + f_{k+1}(y + \varphi_k y^k + \ldots)^{k+1} + \ldots \equiv \\ \equiv X_k y^k + X_{k+1} y^{k+1} + \ldots + X_m y^m + \ldots,$$

или, принимая во внимание (66.15),

$$\frac{dy}{dt}(1 + k\varphi_k y^{k-1} + \ldots + m\Phi y^{m-1}) = \\ = gy^m + f^*_{m+1}(t)\, y^{m+1} + \ldots, \quad (66.18)$$

где $f^*_{m+1}(t)$ — некоторая периодическая функция, а ненаписанные члены имеют порядок, больший $m+1$, и периодические коэффициенты. Из (66.18) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = gy^m + \ldots, \quad (66.19)$$

где ненаписанные члены имеют порядок, больший m, и периодические коэффициенты.

Сделанное преобразование обладает, очевидно, тем свойством, что задача устойчивости для уравнения (66.1) совпадает с задачей устойчивости для уравнения (66.19). Но для последнего уравнения задача устойчивости решается сразу, и мы приходим к следующему правилу.

Для решения задачи устойчивости для уравнения (66.1) пытаемся удовлетворить ему решением вида (66.13) с периодическими коэффициентами. Эта попытка не увенчается, вообще говоря, успехом, так как коэффициенты φ_i в общем случае не получатся периодическими. Пусть φ_m — первый такой непериодический коэффициент. Он необходимо будет иметь вид (66.16). Тогда, если m четное или если m нечетное, но $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если m нечетное и $g < 0$, то это движение устойчиво и притом асимптотически.

Так же как и при первом способе решения задачи, функции φ_i содержат постоянные интегрирования, выбором которых мы можем распорядиться совершенно произвольно. При этом ни величина m, ни знак величины g не будут зависеть от выбора этих постоянных.

Мы предположили, что среди функций φ_i встречаются непериодические. Может, однако, случиться, что все функции φ_i, как бы велико ни было l, будут периодическими. Покажем, что в этом случае, если постоянные интегрирования, входящие в функции φ_i, выбирать таким образом, чтобы выполнялись условия $\varphi_i(0)=0$, то ряд (66.13) будет получаться сходящимся и действительно представит периодическое решение уравнения (66.1).

В самом деле, так как правая часть уравнения (66.1) аналитична относительно x, то решение этого уравнения, определяемое начальным условием $x(0)=c$, может быть разложено в ряд по c, сходящийся при $|c|<\alpha$, где α — достаточно малое положительное число. Это число может быть выбрано таким образом, чтобы указанный ряд сходился при всех значениях t на отрезке $[0, \omega]$. Пусть

$$x=c+\varphi_k^* c^k+\varphi_{k+1}^* c^{k+1}+\ldots \tag{66.20}$$

— рассматриваемое решение. Из $x(0)=c$ вытекает, что $\varphi_i^*(0)=0$. Подставляя (66.20) в (66.1), мы получим для φ^* те же уравнения

$$\frac{d\varphi_i^*}{dt}=X_i(t, \varphi_k^*, \ldots, \varphi_{i-1}^*),$$

что и для функций φ_i, из которых функции φ_i^* в силу $\varphi_i^*(0)=0$ однозначно определяются. Следовательно, если постоянные интегрирования, входящие в функции φ_i, выбрать таким образом, чтобы и для этих функций выполнялись условия $\varphi_i(0)=0$, то функции φ_i совпадут с функциями φ_i^*, и ряд (66.13), который совпадет с (66.20), будет также сходиться при достаточно малых значениях c. И это будет справедливо вне зависимости от того, являются ли функции φ_i периодическими или нет. В рассматриваемом нами случае все эти функции являются периодическими и, следовательно, ряд (66.13) представляет периодическое решение уравнения (66.1). Так как оно содержит произвольную постоянную, то оно является общим решением уравнения (66.1). Это решение будет, очевидно, устойчивым, но не асимптотически. Таким образом, если окажется, что все функции φ_i, как бы велик ни был индекс i, являются периодическими, то невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Разрешая равенство (66.13) относительно c, получим:

$$c=x+\bar{\varphi}_k(t)\,x^k+\bar{\varphi}_{k+1}(t)\,x^{k+1}+\ldots, \tag{66.21}$$

где $\bar{\varphi}_k$ — периодические функции времени. Соотношение (66.21) определяет, очевидно, первый интеграл уравнения (66.1). Таким образом, если все функции φ_i получаются периодическими, то уравнение (66.1) имеет не только аналитическое периодическое решение, но и аналитический периодический первый интеграл. Отсюда очевидно, что если мы для решения задачи устойчивости в рассматриваемом случае воспользуемся изложенным выше первым методом, то и все функции ψ_i, фигурирующие в этом методе, выйдут также периодическими. Справедливо и обратное заключение: если при решении задачи первым методом все функции ψ_i получатся периодическими, то при решении задачи вторым методом все функции φ_i выйдут также периодическими. В самом деле, если бы не все функции φ_i вышли периодическими, то задача устойчивости решалась бы конечным числом членов в уравнении (66.1) независимо от членов достаточно высокого порядка, что, очевидно, находится в противоречии с предположением, что все функции ψ_i являются периодическими. Отсюда непосредственно вытекает, что если при решении задачи устойчивости первым методом все функции ψ_i получатся периодическими, то невозмущенное движение будет устойчиво, но не асимптотически.

Пример 1. Пусть уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\sin^3 t\cdot x^2+\beta\cos^2 t\cdot x^4, \tag{66.22}$$

где α и β — постоянные.

Для исследования устойчивости по первому способу полагаем:

$$y=x+\psi_2x^2+\psi_3x^3+\psi_4x^4+\ldots$$

и стараемся функции ψ_i выбрать таким образом, чтобы они были периодическими и чтобы уравнение (66.22) приняло вид

$$\frac{dy}{dt}=a_2y^2+a_3y^3+a_4y^4+\ldots,$$

т. е. чтобы выполнялось тождество

$$(\alpha\sin^3 t\cdot x^2+\beta\cos^2 t\cdot x^4)(1+2\psi_2x+3\psi_3x^2+\ldots)+$$
$$+\frac{d\psi_2}{dt}x^2+\frac{d\psi_3}{dt}x^3+\ldots=$$
$$=a_2(x+\psi_2x^2+\ldots)^2+a_3(x+\psi_2x^2+\ldots)^3+\ldots$$

Отсюда находим:

$$\frac{d\psi_2}{dt}=a_2-\alpha\sin^3 t,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt}=a_3+2a_2\psi_2-2\alpha\sin^3 t\cdot\psi_2,$$

$$\frac{d\psi_4}{dt}=a_4+3a_3\psi_2+a_2\psi_2^2+2a_2\psi_3-\beta\cos^2 t-3\alpha\sin^3 t\cdot\psi_3.$$

Из условия периодичности ψ_2 находим, что $a_2=0$, после чего получаем:

$$\psi_2=\alpha\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right).$$

Далее имеем:

$$a_3=0, \quad \psi_3=-\frac{\alpha^2}{3}\left(\sin^4 t+\frac{1}{3}\sin^6 t\right).$$

Подставляя полученные величины a_2, a_3 и функции ψ_2, ψ_3 в уравнение для ψ_4, получаем:

$$\frac{d\psi_4}{dt}=a_4-\beta\cos^2 t+\alpha^3\left(\sin^7 t+\frac{1}{3}\sin^9 t\right),$$

откуда непосредственно следует, что

$$a_4=\frac{\beta}{2}.$$

Таким образом, первый отличный от нуля коэффициент a_i имеет четный индекс, откуда вытекает, что невозмущенное движение неустойчиво.

Решим теперь задачу вторым способом. С этой целью пытаемся удовлетворить уравнению (66.22) решением вида

$$x=c+\varphi_2 c^2+\varphi_3 c^3+\ \ldots,$$

где c — произвольная постоянная, а φ_i — периодические функции времени. Подставляя это решение в (66.22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получим:

$$\frac{d\varphi_2}{dt}=\alpha\sin^3 t, \quad \frac{d\varphi_3}{dt}=2\alpha\sin^3 t\cdot\varphi_2,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dt}=\beta\cos^2 t+\alpha\sin^3 t\cdot\varphi_2^2+2\alpha\sin^3 t\cdot\varphi_3.$$

Отсюда находим:

$$\varphi_2=-\alpha\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right),$$

$$\varphi_3=\frac{\alpha^2}{3}\sin^4 t-\frac{\alpha^2}{9}\sin^6 t,$$

$$\varphi_4=\frac{\beta}{2}t+\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть периодическая функция. Таким образом, первая непериодическая функция φ_i имеет четный индекс, откуда вытекает неустойчивость движения.

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим систему уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$. Эта задача подробно рассматривалась нами в §§ 36—38. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X(x,\ y), \quad \frac{du}{dt}=\lambda x+Y(x,\ y), \qquad (66.23)$$

где X и Y — аналитические функции переменных x, y, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Введением полярных координат

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

система (66.23) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \bar{R}(r, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \lambda + \theta(r, \vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{66.24}$$

откуда исключением dt находим:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R(r, \vartheta). \tag{66.25}$$

В уравнениях (66.24) и (66.25) функции $\bar{R}$, θ и R будут аналитическими относительно r, обращающимися в нуль при $r=0$, причем разложения $\bar{R}$ и R начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты в разложениях этих функций являются полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ и, следовательно, будут периодическими функциями ϑ.

Из второго уравнения (66.24) следует, что при r, достаточно малом, величина ϑ является монотонной функцией времени, неограниченно возрастающей вместе с последним (если при этом r остается достаточно малым). Отсюда непосредственно вытекает, что при решении задачи устойчивости переменная ϑ может играть роль времени. Следовательно, задача устойчивости по отношению к переменным x и y для уравнений (66.23) эквивалентна той же задаче по отношению к переменной r для уравнения (66.25). Но последнее уравнение является, очевидно, частным случаем уравнения (66.1), и мы можем его исследовать вышеуказанными методами. В частности, мы можем применить второй метод, что приведет нас, очевидно, к результатам § 36.

§ 67. Критический случай, когда характеристическое уравнение имеет два комплексных корня с модулями, равными единице.

Мы переходим к рассмотрению случая, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет два комплексных корня с модулями, равными единице. Как уже указывалось выше, мы ограничиваемся в этой главе системами второго порядка. Дифференциальные уравнения задачи установлены в § 65 и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(t, x, y), \end{aligned}\right\} \tag{67.1}$$

где $X(t, x, y)$ и $Y(t, x, y)$ — аналитические функции переменных x и y, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают коэффициентами, являющимися периодическими функциями времени.

Допустим сначала, что функции X и Y не зависят от t. Тогда мы будем иметь критический случай для установившихся движений, когда определяющее уравнение системы первого приближения имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$, и порядок системы равен двум. Эта задача подробно рассматривалась нами в §§ 36—38. В этих параграфах было показано, что кроме особо исключительных случаев, которые мы сейчас не будем рассматривать, задача устойчивости решается конечным числом членов в разложениях правых частей уравнений возмущенного движения. Допустим для определенности, что задача устойчивости решается первыми m членами, где m, как было показано, всегда нечетно, так что можно положить $m = 2N-1$. Это значит, что если мы вместо уравнений (67.1), которые по предположению не зависят от t, рассмотрим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X_2(x, y) + \ldots + X_{2N-1}(x, y) + \varphi, \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y_2(x, y) + \ldots + Y_{2N-1}(x, y) + \psi, \end{aligned}\right\} \tag{67.2}$$

где X_k и Y_k — совокупности членов k-го порядка в разложениях функций X и Y, то невозмущенное движение будет устойчивым или неустойчивым при любом выборе функций φ и ψ, если последние являются аналитическими и их разложения начинаются членами не ниже $2N$-го порядка. При этом, как было показано в § 37, существует функция Ляпунова $V(x, y)$ вида

$$V(x, y) = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + \ldots + f_{2N}(x, y), \tag{67.3}$$

производная которой, составленная в силу уравнений (67.2), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = G(x^2 + y^2)^N + \ldots \tag{67.4}$$

Здесь f_k — формы k-го порядка, не зависящие от φ и ψ, G — постоянная и ненаписанные члены имеют порядок, больший $2N$. Если $G > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $G < 0$, то оно устойчиво асимптотически. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что V есть функция определенно-положительная, а $\frac{dV}{dt}$ есть функция также знакоопределенная, знак которой совпадает со знаком G, каковы бы ни были функции φ и ψ, удовлетворяющие указанным для них условиям.

Из существования для уравнений (67.2) функции Ляпунова (67.3) можно сделать, однако, более общие выводы. Допустим, что функции φ и ψ зависят также от t, по отношению к которому они ограничены, но не обязательно периодичны.

При указанных предположениях выражение (67.4) остается попрежнему знакоопределенным; следовательно, V по-прежнему является функцией Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям теоремы II § 46 или теоремы III § 47. Поэтому невозмущенное движение для уравнений (67.2) будет по-прежнему асимптотическим устойчиво или неустойчиво вне зависимости от функций φ и ψ, удовлетворяющих вышеуказанным условиям. Это непосредственно приводит нас к следующему заключению.

Допустим, что в уравнениях (67.1) все члены до некоторого порядка m включительно имеют постоянные коэффициенты, так что время t входит лишь в те члены, порядок которых превосходит m. Отбросив в этих уравнениях все члены выше m-го порядка, рассмотрим полученную таким образом систему уравнений с постоянными коэффициентами. Эта система представляет собой частный случай системы, рассмотренной в §§ 36—38. Допустим, наконец, что задача устойчивости для этой системы с постоянными коэффициентами решается членами порядка не выше m. Тогда если для этой системы получится неустойчивость, то и для системы (67.1) получится неустойчивость, а если для этой системы получится устойчивость (асимптотическая), то и для системы (67.1) будет также иметь место устойчивость (асимптотическая).

Рассмотрим теперь уравнения (67.1) в общем случае. Из вышесказанного следует, что если нам удастся при помощи подходящего преобразования привести уравнения (67.1) к такому виду, в котором t содержалось бы только в членах достаточно высокого порядка, то задача сведется к исследованию системы с постоянными коэффициентами, которую получим, если эти члены высокого порядка, содержащие t, попросту отбросим. Что же касается последней задачи, то она может быть разрешена одним из тех трех приемов, которые были установлены в главе IV.

Таким образом, задача приводится к разысканию такого преобразования переменных x и y в уравнениях (67.1), чтобы преобразованные уравнения сохранили такой же вид, но чтобы в них коэффициенты членов до сколь угодно высокого порядка m были постоянными. Такое преобразование, как показал Ляпунов, может быть действительно выполнено, если только число $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ иррационально, что мы и будем предполагать [1]). Вычисления Ляпунов располагает таким образом, что задача устойчивости для преобразованных уравнений решается одновременно с выполнением самого преобразования. При этом задача устойчивости решается методом § 36. Однако все вычисления значительно упрощаются, если следовать иному методу, представляющему собой непосредственное развитие метода § 42. К изложению этого метода мы сейчас и переходим.

Так же как и в § 42, мы будем предполагать, что линейная часть уравнений возмущенного движения приведена к комплексному каноническому виду, так что эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= i\lambda x + X^{(2)}(t,\ x,\ y) + X^{(3)}(t,\ x,\ y) + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= -i\lambda y + Y^{(2)}(t,\ x,\ y) + Y^{(3)}(t,\ x,\ y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{67.5}$$

где $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных x и y с периодическими коэффициентами. Если уравнения были заданы в форме (67.1), то, чтобы перейти к виду (67.5), достаточно будет принять в качестве новых переменных величины $x+iy$ и $x-iy$. Переменные x и y будут в уравнениях (67.5) комплексно сопряженными, так что второе из этих уравнений получится из первого заменой i на $-i$, x на y и y на x.

Задавшись теперь числом m, преобразуем уравнения (67.5) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= u + u^{(2)}(t,\ u,\ v) + u^{(3)}(t,\ u,\ v) + \ldots + u^{(m)}(t,\ u,\ v), \\ y &= v + \bar{u}^{(2)}(t,\ v,\ u) + \bar{u}^{(3)}(t,\ v,\ u) + \ldots + \bar{u}^{m}(t,\ v,\ u), \end{aligned}\right\} \tag{67.6}$$

где $u^{(k)}(t,\ u,\ v)$ и $\bar{u}^{(k)}(t,\ v,\ u)$ — формы k-го порядка с периодическими коэффициентами. При этом формы $\bar{u}^{(k)}(t,\ v,\ u)$ комплексно сопряжены с формами $u^{(k)}(t,\ u,\ v)$ и могут быть, следовательно, получены из $u^{(k)}(t,\ u,\ v)$ заменой i на $-i$, u на v и v на u. Отсюда следует, что переменные u и v являются также комплексно сопряженными.

Преобразование (67.6) мы постараемся подобрать таким образом, чтобы в преобразованных уравнениях члены до порядка m имели постоянные коэффициенты. Эти уравнения должны, следовательно, иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i\lambda u + U^{(2)}(u,\ v) + \ldots + U^{(m)}(u,\ v) + U(t,\ u,\ v), \\ \frac{dv}{dt} &= -i\lambda v + \bar{U}^{(2)}(v,\ u) + \ldots + \bar{U}^{(m)}(v,\ u) + \bar{U}(t,\ v,\ u), \end{aligned}\right\} \tag{67.7}$$

[1]) Относительно этого предположения см. примечание в конце параграфа.

где $U^{(k)}(u, v)$ и $\overline{U}^{(k)}(v, u)$ — формы k-го порядка с постоянными коэффициентами, а функции $U(t, u, v)$ и $\overline{U}(t, v, u)$ имеют порядок, больший m, и зависят, вообще говоря, от t, по отношению к которому они периодичны. При этом функции $\overline{U}^{(k)}(v, u)$ и $\overline{U}(t, v, u)$ комплексно сопряжены с $U^{(k)}(u, v)$ и $U(t, u, v)$.

Подставляя в первое уравнение (67.5) вместо x и y их выражения (67.6) и принимая во внимание (67.7), будем иметь:

$$\left(1+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial u}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}}{\partial u}\right)\left(i\lambda u+U^{(2)}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial v}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}}{\partial v}\right)\left(-i\lambda v+\overline{U}^{(2)}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t}=$$
$$=i\lambda\left(u+u^{(2)}+\ldots\right)+X^{(2)}(t,\ u+\ldots,\ v+\ldots)+\ldots$$

Отсюда, приравнивая члены одинаковых порядков, получим для форм $u^{(k)}(t, u, v)$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}+i\lambda\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial u}u-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial v}v\right)+U^{(k)}(u, v)=$$
$$=i\lambda u^{(k)}+F^{(k)}(t, u, v) \qquad (67.8)$$
$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ m).$$

Здесь $F^{(k)}$ — некоторые формы k-го порядка переменных u, v, зависящие от тех форм $u^{(i)}$, $U^{(i)}$, для которых $i<k$. В частности, $F^{(2)}(t, u, v)=X^{(2)}(t, u, v)$. Уравнения (67.8) дают возможность последовательно определять как формы $u^{(k)}$, так и формы $U^{(k)}$. Покажем, как это делать.

Допустим с этой целью, что все $u^{(i)}$ и $U^{(i)}$, для которых $i<k$, уже вычислены и коэффициенты форм $u^{(i)}$ вышли при этом периодическими. Тогда $F^{(k)}$ будут известными формами k-го порядка с периодическими коэффициентами. Пусть

$$F^{(k)}=\sum_{\alpha+\beta=k} f_{\alpha\beta}(t)\,u^{\alpha}v^{\beta},$$

где $f_{\alpha\beta}(t)$ — известные периодические функции времени периода ω. Положим

$$u^{(k)}(t, u, v)=\sum_{\alpha+\beta=k} u_{\alpha\beta}(t)\,u^{\alpha}v^{\beta}, \qquad U^{(k)}(u, v)=\sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta},$$

где $A_{\alpha\beta}$ — неизвестные постоянные, а $u_{\alpha\beta}(t)$ — неизвестные периодические функции времени. Тогда, приравнивая в уравнении для $u^{(k)}$

коэффициенты при подобных членах, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{du_{\alpha\beta}}{dt}+(\alpha-\beta-1)\,i\lambda u_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}-A_{\alpha\beta}. \tag{67.9}$$

Нам нужно найти периодическое решение этих уравнений. Здесь приходится различать два случая в зависимости от того, будет ли величина $\alpha-\beta-1$ равна нулю или нет. Допустим сначала, что $\alpha-\beta-1=0$. Это, очевидно, возможно только при k нечетном. Пусть $k=2n+1$. Тогда из $\alpha-\beta-1=0$ следует: $\alpha=n+1$, $\beta=n$. Уравнение для $u_{\alpha\beta}(t)$ принимает вид

$$\frac{du_{n+1,\,n}}{dt}=f_{n+1,\,n}-A_{n+1,\,n},$$

и для того чтобы оно имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{n+1,\,n}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_{n+1,\,n}(t)\,dt. \tag{67.10}$$

При этом для $u_{n+1,\,n}$ получаем:

$$u_{n+1,\,n}=\int f_{n+1,\,n}(t)\,dt-A_{n+1,\,n}t.$$

Входящую сюда постоянную интегрирования выберем по произволу.

Допустим теперь, что $\alpha-\beta-1\neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\varphi+\psi(t), \tag{67.11}$$

где a — постоянная, а $\psi(t)$ — произвольная непрерывная периодическая функция t, периода ω. Допустим, что $a\omega\neq p\pi i$, где p — целое число. Тогда уравнение (67.11) имеет частное решение

$$\varphi^*=e^{at}\left\{\frac{e^{a\omega}}{1-e^{a\omega}}\int_0^\omega e^{-at}\psi(t)\,dt+\int_0^t e^{-at}\psi(t)\,dt\right\}. \tag{67.12}$$

Это решение является периодическим с периодом ω. В самом деле, из периодичности $\psi(t)$ вытекает:

$$\int_\omega^{t+\omega} e^{-at}\psi(t)\,dt=\int_0^t e^{-a(t+\omega)}\psi(t+\omega)\,dt=e^{-a\omega}\int_0^t e^{-at}\psi(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$\varphi^*(t+\omega)=\frac{e^{a\omega}}{1-e^{a\omega}}e^{a(t+\omega)}\int\limits_0^{\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt+e^{a(t+\omega)}\int\limits_0^{t+\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt=$$

$$=\frac{e^{a\omega}}{1-e^{a\omega}}e^{a(t+\omega)}\int\limits_0^{\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt+$$

$$+e^{a(t+\omega)}\left(\int\limits_{\omega}^{t+\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt+\int\limits_0^{\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{a\omega}}e^{a(t+\omega)}\int\limits_0^{\omega}e^{-at}\psi(t)\,dt+e^{at}\int\limits_0^{t}e^{-at}\psi(t)\,dt=\varphi^*(t),$$

что и доказывает справедливость нашего утверждения. При этом из условия относительно a вытекает, что общее решение $\overline{\varphi}=e^{at}$ однородной части уравнения (67.11) не может быть периодическим периода ω, и поэтому формула (67.12) дает единственное периодическое решение уравнения (67.11).

Так как по условию число $\frac{\lambda\pi}{\omega}$ иррационально и, следовательно, $i\lambda(\alpha+\beta-1)\neq\frac{p\pi i}{\omega}$, то уравнение (67.9) при $\alpha+\beta-1\neq 0$ имеет одно и только одно периодическое решение, какова бы ни была постоянная $A_{\alpha\beta}$. Мы будем полагать:

$$A_{\alpha\beta}=0\quad(\alpha\neq\beta+1). \tag{67.13}$$

Выбрав таким образом постоянную $A_{\alpha\beta}$, мы получим вполне определенное решение для $u_{\alpha\beta}$. Это решение может быть вычислено по формуле (67.12). На практике, однако, функции $f_{\alpha\beta}$ чаще всего бывают конечными тригонометрическими суммами. В этом случае функции $u_{\alpha\beta}$ проще всего определять методом неопределенных коэффициентов, так как эти функции также получатся конечными тригонометрическими суммами.

Таким образом, мы можем последовательно определить все формы $u^{(k)}$ и $U^{(k)}$. При этом из (67.13) вытекает, что все формы $U^{(k)}$ при k четном будут тождественно равны нулю, а при k нечетном в этих формах будут отличными от нуля лишь по одному коэффициенту вида (67.10). Следовательно, преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\lambda iu+A_3u^2v+A_5u^3v^2+\ldots+A_{2p+1}u^{p+1}v^p+U(t,u,v),\\ \frac{dv}{dt}&=-\lambda iv+\overline{A}_3uv^2+\overline{A}_5u^2v^3+\ldots+\overline{A}_{2p+1}u^pv^{p+1}+\overline{U}(t,v,u),\end{aligned}\right\}\quad(67.14)$$

где положено $A_{n+1,\,n}=A_{2n+1}$, $m=2p+1$.

Отбрасывая в уравнениях (67.14) члены U и $\overline{U}$, мы получим уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\lambda iu+A_3u^2v+\ldots+A_{2p+1}u^{p+1}v^p,\\ \frac{dv}{dt}&=-\lambda iv+\overline{A}_3uv^2+\ldots+\overline{A}_{2p+1}u^pv^{p+1}.\end{aligned}\right\}\quad(67.15)$$

Как было показано выше, задача устойчивости для исходной системы (67.5) решается уравнениями (67.15), если для этих последних задача устойчивости решается членами не выше $(2p+1)$-порядка. Задача устойчивости для уравнений (67.15) решается сразу без каких бы то ни было дополнительных вычислений. Действительно, уравнения (67.15) имеют как раз вид уравнений (42.3), рассмотренных в § 42. И как было показано в этом параграфе, если A_k — первый из коэффициентов A_3, A_5, ..., вещественная часть которого отлична от нуля, то при $\operatorname{Re}(A_k)>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\operatorname{Re}(A_k)<0$ оно устойчиво асимптотически. Отсюда следует, что в преобразовании (67.6) можно положить $m=k$.

Таким образом, мы приходим к следующему правилу для решения задачи устойчивости в интересующем нас случае.

Делаем в уравнениях (67.5) подстановку

$$\begin{aligned}x&=u+u^{(2)}(t,\ u,\ v)+u^{(3)}(t,\ u,\ v)+\ldots,\\ y&=v+\overline{u}^{(2)}(t,\ v,\ u)+\overline{u}^{(3)}(t,\ v,\ u)+\ldots\end{aligned}$$

и стараемся формы $u^{(k)}$ подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид (67.15) и чтобы коэффициенты этих форм вышли периодическими. Такое преобразование всегда найдется, и при этом коэффициенты A_j получатся вполне определенными. Эти коэффициенты определяем до тех пор, пока не встретимся с таким, пусть это будет A_k, — для которого $\operatorname{Re}(A_k)\neq 0$. Тогда при $\operatorname{Re}(A_k)>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\operatorname{Re}(A_k)<0$ оно устойчиво асимптотически.

Может случиться, что при любом значении k, как бы велико оно ни было, $\operatorname{Re}(A_k)=0$. Этот исключительный случай мы здесь не рассматриваем.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\varphi(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+F\left[t,\ x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция времени, периода ω, несоизмеримого с π, обладающая отличным от нуля средним значением, а F — аналитическая функция от x и $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, разложение которой не имеет членов ниже третьего порядка относительно x и $\frac{dx}{dt}$. Коэффициенты этого разложения являются периодическими функциями t, периода ω.

Полагая $\xi=x-i\frac{dx}{dt}$, $\eta=x+i\frac{dx}{dt}$, получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=\ \ i\xi-\frac{1}{8}\varphi(t)(\xi-\eta)^3+if(t,\ \xi,\ \eta),\\ \frac{d\eta}{dt}&=-i\eta+\frac{1}{8}\varphi(t)(\xi-\eta)^3+if(t,\ \xi,\ \eta),\end{aligned}\right\}\tag{67.16}$$

где f — вещественная функция.

Делаем далее подстановку

$$\left.\begin{aligned}\xi&=u+u^{(3)}(t,\ u,\ v)+\ldots,\\ \eta&=v+\bar{u}^{(3)}(t,\ v,\ u)+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{67.17}$$

Так как в уравнениях (67.16) нет членов второго порядка, то можно положить, что и в подстановке (67.17) эти члены отсутствуют. Эту подстановку стараемся подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения имели вид (67.15). Из этого условия находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(3)}}{\partial t}&+\ldots+\left(1+\frac{\partial u^{(3)}}{\partial u}+\ldots\right)(iu+A_3u^2v+\ldots)+\\ &+\left(\frac{\partial u^{(3)}}{\partial v}+\ldots\right)(-iv+\bar{A}_3uv^2+\ldots)=i(u+u^{(3)}+\ldots)+\\ &\qquad+\frac{1}{8}\varphi(t)(u-v+\ldots)^3+if(t,\ u+\ldots,\ v+\ldots).\end{aligned}$$

Приравнивая члены третьего порядка, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(3)}}{\partial t}&+i\left(u\frac{\partial u^{(3)}}{\partial u}-v\frac{\partial u^{(3)}}{\partial v}\right)+A_3u^2v=\\ &=iu^{(3)}-\frac{1}{8}\varphi(t)(u-v)^3+if^{(3)}(t,\ u,\ v),\end{aligned}\tag{67.18}$$

где $f^{(3)}(t,\ u,\ v)$ — совокупность членов третьего порядка в функции $f(t,\ u,\ v)$. Пусть

$$u^{(3)}=u_{30}(t)u^3+u_{21}(t)u^2v+u_{12}(t)uv^2+u_{03}v^3.$$

Тогда приравнивая в (67.18) коэффициенты при u^2v, получим:

$$\frac{du_{21}}{dt}+A_3=\frac{3}{8}\varphi(t)+i\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — коэффициент при u^2v в $f^{(3)}(t, u, v)$.

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы величина A_3 определялась формулой

$$A_3=\frac{3}{8\omega}\int_0^\omega \varphi(t)\,dt+i\int_0^\omega \psi(t)\,dt.$$

Так как по условию вещественная часть A_3 отлична от нуля, то в дальнейших вычислениях нет надобности. Невозмущенное движение будет неустойчиво, если величина

$$\int_0^\omega \varphi(t)\,dt$$

положительна, и асимптотически устойчиво, если эта величина отрицательна.

Примечание. Мы предположили, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число иррациональное. Допустим теперь противное: пусть

$$\lambda=\frac{p\pi}{q\omega},$$

где p и q — целые числа. Сделаем в уравнениях (67.1) преобразование переменных

$$\begin{aligned} x&=\quad \xi\sin\frac{p\pi}{q\omega}t+\eta\cos\frac{p\pi}{q\omega}t,\\ y&=-\xi\cos\frac{p\pi}{q\omega}t+\eta\sin\frac{p\pi}{q\omega}t, \end{aligned}$$

коэффициенты которого являются, очевидно, периодическими функциями периода $2q\omega$. Преобразованные уравнения, как легко видеть, примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}&=\Xi(t, \xi, \eta),\\ \frac{d\eta}{dt}&=\Upsilon(t, \xi, \eta), \end{aligned}\right\} \qquad (67.19)$$

где Ξ и Υ — аналитические функции ξ и η, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, причем коэффициенты разложений являются периодическими функциями периода $2q\omega$, Определяющее уравнение линейной части системы (67.19) имеет двойной корень, равный нулю. Таким образом, задача сводится к исследованию критического случая двойного нулевого корня. Этот случай как для установившихся движений, так и для периодических движений будет исследован нами в следующей главе.

§ 68. Устойчивость периодических движений автономных систем.

На практике часто приходится исследовать устойчивость периодических движений динамических систем, описываемых уравнениями, не содержащими явно времени. Такого рода случаи всегда принадлежат к числу критических.

В самом деле, пусть уравнения движения динамической системы имеют вид

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{68.1}$$

где функции Y_s не содержат явно t. Относительно этих функций мы будем для простоты предполагать, что они аналитичны в некоторой области пространства G. Допустим, что рассматриваемая система имеет периодическое движение, так что уравнения (68.1) имеют в области G частное решение

$$y_s^* = \varphi_s(t), \tag{68.2}$$

где $\varphi_s(t)$ — периодические функции, период которых мы обозначим через ω. Принимая движение (68.2) за невозмущенное, составим дифференциальные уравнения возмущенного движения, т. е. преобразуем уравнения (68.1) при помощи подстановки

$$x_s = y_s - \varphi_s(t). \tag{68.3}$$

Будем иметь:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{68.4}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где X_s — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений, так же как и коэффициенты $p_{s\sigma}$, являются периодическими функциями времени, периода ω.

Так как уравнения (68.1) не содержат явно t, то, заменяя в каком-нибудь решении t на $t + h$, где h — произвольная постоянная, мы снова получим решение. Таким образом, уравнения (68.1) имеют решение:

$$\overline{y}_s = \varphi_s(t+h), \tag{68.5}$$

и следовательно, уравнения (68.4) имеют решение

$$\overline{x}_s = \varphi_s(t+h) - \varphi_s(t).$$

Так как правые части уравнений (68.1) аналитичны, то функции $\varphi_s(t+h)$ непременно разлагаются в ряд по h, и мы можем писать:

$$\overline{x}_s = h\dot{\varphi}_s(t) + \frac{1}{2} h^2 \ddot{\varphi}_s(t) + \ldots \tag{68.6}$$

Подставляя это решение в уравнения (68.4), которым оно должно удовлетворять, и приравнивая коэффициенты при первой степени h, получим:

$$\frac{d\dot{\varphi}_s}{dt} = p_{s1}\dot{\varphi}_1 + \ldots + p_{sn}\dot{\varphi}_n.$$

Эти соотношения показывают, что функции $\dot{\varphi}_s(t)$ являются решением уравнений первого приближения системы (68.4). Но так как эти функции, очевидно, периодичны, то мы получили, что система первого приближения уравнений (68.4) имеет периодическое решение. Отсюда следует, что характеристическое уравнение этой системы имеет, по крайней мере, один корень, равный единице. Этот результат установлен впервые Пуанкаре.

Допустим, что остальные $n-1$ корней характеристического уравнения системы первого приближения уравнений (68.4) имеют модули, меньшие единицы. Тогда мы будем как раз иметь дело с критическим случаем одного корня характеристического уравнения, равного единице. Как мы знаем, в этом случае задача устойчивости решается нелинейными членами в уравнениях возмущенного движения (68.4). Однако в рассматриваемом случае эти нелинейные члены не являются совершенно произвольными. То обстоятельство, что рассматриваемое периодическое движение принадлежит семейству (68.5), зависящему от произвольной постоянной h_1, накладывает определенные зависимости не только на первое приближение уравнений возмущенного движения, но и на нелинейные части этих уравнений. Эти зависимости получаются как раз такими, что для устойчивости движения достаточно, чтобы остальные $n-1$ корней характеристического уравнения имели модули, меньше единицы. В этом и заключается теорема, установленная Андроновым и Виттом, которая может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. *Периодическое движение динамической системы, описываемой уравнениями вида* (68.1), *будет устойчиво, если*

$n-1$ корней характеристического уравнения первого приближения дифференциальных уравнений возмущенного движения имеют модули, меньшие единицы.

Доказательство. Итак, допустим, что характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n \tag{68.7}$$

имеет $n-1$ корней с модулями, меньшими единицы. Один корень этого уравнения, по доказанному, равен единице. Тогда система (68.4) при помощи линейного преобразования с периодическими коэффициентами может быть преобразована к виду

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=X(x,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_m,\ t),\\&\frac{d\xi_s}{dt}=a_{s1}\xi_1+\ldots+a_{sm}\xi_m+\Xi_s(x,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_m,\ t)\end{aligned}\right\} \tag{68.8}$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Здесь $m=n-1$, a_{sj} — постоянные, для которых уравнение

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2m}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{68.9}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, и Ξ_s и X — функции такого же вида, как и X_s.

Указанное преобразование преобразует периодическое решение (68.6) уравнений (68.4) в периодическое решение уравнений (68.8). Это решение будет, очевидно, иметь вид

$$\left.\begin{aligned}x&=h\psi_1(t)+h^2\psi_2(t)+\ldots,\\ \xi_s&=h\psi_{s1}(t)+h^2\psi_{s2}(t)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{68.10}$$

где ψ_i, ψ_{si} — периодические функции. Линейная часть этого решения будет являться периодическим решением линейной системы

$$\frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{d\xi_s}{dt}=a_{s1}\xi_1+\ldots+a_{sm}\xi_m. \tag{68.11}$$

Но по свойству корней уравнения (68.9) единственным периодическим решением системы (68.11) будет

$$x=h,\quad \xi_1=\ldots=\xi_m=0,$$

и поэтому решение (68.10) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= h + h^2\psi_2(t) + \ldots, \\ \xi_s &= h^2\psi_{s2}(t) + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{68.12}$$

Установив это, сделаем в уравнениях (68.8) подстановку

$$\left.\begin{aligned} x &= u + u^2\psi_2(t) + \ldots, \\ \xi_s &= v_s + u^2\psi_{s2}(t) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{68.13}$$

Преобразованная система будет, очевидно, иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U(t, u, v_1, \ldots, v_m), \\ \frac{dv_s}{dt} &= a_{s1}v_1 + \ldots + a_{sm}v_m + V_s(t, u, v_1, \ldots, v_m), \end{aligned}\right\} \tag{68.14}$$

где U и V — функции такого же типа, как и X и Ξ_s. Все сделанные преобразования таковы, что задача устойчивости для уравнений (68.1) эквивалентна задаче устойчивости для уравнений (68.14). Поэтому мы можем рассматривать эти последние уравнения.

Так как уравнения (68.8) имеют частное решение (68.12), то уравнения (68.14) должны допускать частное решение

$$u = h, \quad v_1 = \ldots = v_m = 0,$$

а для этого, очевидно, необходимо, чтобы функции U и V_s обращались в нуль при $v_1 = \ldots = v_m = 0$. Но в таком случае уравнения (68.14) представляют собой частный случай уравнений (34.2), фигурирующих в теореме, доказанной в § 34. Из последней немедленно вытекает, что невозмущенное движение устойчиво. Более того, можно утверждать, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \to \infty$ к одному из движений семейства (68.5) и что такими же свойствами, как и невозмущенное движение, обладает всякое движение указанного семейства, если только h достаточно мало.

Примечание. Доказанная теорема может быть обобщена [1]). Допустим, что динамическая система описывается уравнениями вида

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n),$$

[1]) См. Малкин И. Г., Об устойчивости периодических движений. ПММ, т. VIII, вып. 4, 1944; Отроков Н. Ф., К устойчивости периодических интегралов. Учен. зап. Горьковского гос. ун-та, вып. 6, 1938.

отличающимися от (68.1) тем, что они могут содержать t, по отношению к которому они периодичны с периодом ω. Допустим, что эта система допускает периодическое решение

$$y_s^* = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k), \tag{68.15}$$

периода ω, зависящее от $k \leqslant n$ произвольных постоянных. Если Y_s не содержат t, то предполагается, что период решения не зависит от h_j. Если исследовать устойчивость какого-нибудь движения семейства (68.15), то окажется, что характеристическое уравнение системы первого приближения уравнений возмущенного движения имеет, по крайней мере, k корней, равных единице. Можно показать, что если остальные $n-k$ корней этого уравнения имеют модули, меньшие единицы, то невозмущенное движение устойчиво.

ГЛАВА VI.

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ.

А. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

§ 69. Постановка задачи.

Мы переходим теперь к рассмотрению общего случая неустановившихся движений, т. е. к случаю, когда правые части уравнений возмущенного движения содержат явно время t, по отношению к которому они, вообще говоря, не периодичны. Задача при этом делается значительно сложнее, чем в рассмотренных случаях периодических и установившихся движений. Однако к этой задаче приводятся многие важные технические вопросы, в связи с чем за последние годы она привлекает многих исследователей. В настоящей главе мы приводим основные результаты, полученные в теории неустановившихся движений как самим Ляпуновым, так и в последующих исследованиях.

В разделе А этой главы мы рассматриваем некоторые общие вопросы теории. Сюда относится проблема существования функций Ляпунова (проблема обращения теорем второго метода), устойчивость при постоянно действующих возмущениях и связанный с нею вопрос об опасных и безопасных границах области устойчивости.

В разделе Б рассматривается с точки зрения задачи устойчивости теория линейных уравнений с зависящими от t коэффициентами, т. е. теория первого приближения.

В разделе В рассматриваются критерии устойчивости по первому приближению.

Наконец, в разделе Г рассматривается общая теория критических случаев. Эта теория затем прилагается к установившимся и периодическим движениям. Здесь дается решение задачи устойчивости установившихся движений в критических случаях двух нулевых корней, двух пар чисто мнимых корней, одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения. Аналогичные задачи рассматриваются и для периодических движений.

§ 70. Теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

В § 4 мы уже указывали, что большой практический интерес представляет исследование устойчивости движения не только по отношению к мгновенным возмущениям, но и по отношению к возмущениям, действие которых не прекращается. С точки зрения математической устойчивость по отношению к таким постоянно действующим возмущениям отличается от устойчивости по Ляпунову тем, что возмущаются не только начальные условия движения, но и самые дифференциальные уравнения движения.

Рассматривая невозмущенное движение какой-нибудь системы, составим по обычным правилам дифференциальные уравнения возмущенного движения. Пусть эти уравнения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{70.1}$$

Относительно правых частей этих уравнений мы будем предполагать, что они в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H \tag{70.2}$$

непрерывны и допускают существование единственного решения при заданных начальных условиях. Разумеется, при этом выполняются обычные соотношения $X_s(t,\ 0,\ \ldots,\ 0) = 0$.

Наряду с уравнениями (70.1) рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) + R_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{70.3}$$

где функции R_s характеризуют постоянно действующие возмущающие факторы. Эти функции R_s также определены в области (70.2), где они также непрерывны и удовлетворяют условию, что уравнения (70.3), так же как и уравнения (70.1), имеют при заданных начальных условиях единственное решение.

Функции R_s в отличие от функций X_s практически никогда неизвестны. Относительно них можно лишь предполагать, что они удовлетворяют вышеуказанным общим условиям и достаточно малы. В частности, *эти функции не обращаются, вообще говоря, в нуль при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Это объясняется тем, что невозмущенное движение является частным решением тех дифференциальных уравнений, которые не учитывают возмущающих факторов, т. е. уравнений (70.1) (если пользоваться переменными $x_1,\ \ldots,\ x_n$), а не уравнений (70.3).

Невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, когда величины x_s остаются все время малыми при условии, что они были малыми в начальный момент времени и что возмущения R_s также малы. Более точное определение было дано в § 4. Это определение в переменных x_s формулируется следующим образом.

Определение. *Невозмущенное движение* (тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (70.1)) *называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного* ε, *как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа* $\eta_1(\varepsilon)$ *и* $\eta_2(\varepsilon)$, *таких, что всякое решение уравнений* (70.3) *с начальными значениями* x_s^0 (при $t = t_0$), *удовлетворяющими неравенствам*

$$|x_s^0| \leqslant \eta_1(\varepsilon),$$

при произвольных R_s, *удовлетворяющих в области* $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant \varepsilon$, *неравенствам*

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2(\varepsilon),$$

удовлетворяет при всех $t > t_0$ *неравенствам*

$$|x_s| < \varepsilon.$$

В § 46 была установлена основная теорема второго метода Ляпунова (теорема II) об асимптотической устойчивости. Согласно этой теореме невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, если для уравнений (70.1) существует функция Ляпунова V со знакоопределенной производной, допускающая бесконечно малый высший предел. Оказывается, что если последнее условие заменить условием, несколько более жестким, что функция V обладает ограниченными частными производными, то невозмущенное движение будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Покажем, что имеет место следующая теорема[1]).

Теорема. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (70.1) *существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, и если в области* (70.2) *частные производные* $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ *ограничены, то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы в области (70.2) выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{70.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{70.5}$$

[1]) Малкин И. Г., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.

где W_1 и W_2 — определенно-положительные функции, не зависящие от t. Кроме того, применяя теорему о среднем значении, мы можем написать:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = x_1\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \ldots + x_n\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right),$$

где производные вычислены в точке $(\theta x_1, \ldots, \theta x_n)$ $(0 < \theta < 1)$. Так как производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ ограничены, то отсюда следует, что для всякого положительного числа h_1, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число h_2, что

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) < h_2 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant h_1, \tag{70.6}$$

т. е. что функция V допускает бесконечно малый высший предел. Пусть x — наибольшая из величин $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Обозначим через α точный нижний предел функции $W_1(x_1, \ldots, x_n)$ при условии $H \geqslant x \geqslant \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, меньшее H. Имеем, следовательно, на основании (70.4)

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \alpha \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad x \geqslant \varepsilon. \tag{70.7}$$

Пусть l — положительное число, меньшее α. Рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ подвижную поверхность

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) - l = 0. \tag{70.8}$$

Из (70.6) следует, что для всех точек этой поверхности выполняется условие $x \geqslant \lambda$, где λ — некоторое достаточно малое положительное число. Кроме того, из (70.7) следует, что во всех точках этой поверхности выполняется условие $x < \varepsilon$ и, следовательно, во всех этих точках и при всех значениях $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство (70.5). Мы можем поэтому написать:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s\right\}_{V=l} \leqslant -k^2,$$

где k^2, в силу того что $x \geqslant \lambda$, отлично от нуля.

Но тогда в силу ограниченности $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, можно найти настолько малое число $\eta_2(\varepsilon)$, чтобы при

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2(\varepsilon) \tag{70.9}$$

выполнялось неравенство

$$\left\{\frac{dV}{dt}\right\}_{V=l} = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (X_s + R_s)\frac{\partial V}{\partial x_s}\right\}_{V=l} < 0. \tag{70.10}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (70.3) в предположении, что выполняются неравенства (70.9). Начальные значения x_s^0 величин x_s

(при $t=t_0$) выбираем согласно условиям

$$|x_s^0| \leqslant \eta_1(\varepsilon), \tag{70.11}$$

где положительное число $\eta_1(\varepsilon)$ настолько мало, что выполняются неравенства

$$\eta_1 < \varepsilon, \quad V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) < l \quad \text{при} \quad |x_s^0| < \eta_1. \tag{70.12}$$

Покажем, что при всех $t > t_0$ будем иметь:

$$|x_s| < \varepsilon. \tag{70.13}$$

В самом деле, функции x_s не могут перестать удовлетворять неравенствам (70.13) иначе, как достигнув таких значений, при которых выполняется неравенство $x \geqslant \varepsilon$. Но тогда на основании (70.7) функция $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ станет большей, чем l, так как $l < \alpha$. Так как в начальный момент эта функция меньше l, то должен быть и такой момент времени, при котором эта функция принимает значение l, переходя от значений, меньших l, к значениям, большим l. Но тогда в этот момент времени $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} \geqslant 0$, что противоречит (70.10).

Следовательно, при условиях (70.9) и (70.11) выполняются условия (70.13), что и требовалось доказать.

Примечание. Покажем, что при условиях теоремы имеет место своего рода асимптотическая устойчивость.

Выбрав в неравенствах (70.9) число η_2 так, чтобы выполнялось неравенство (70.10), мы будем в силу непрерывности иметь также и неравенства

$$\left\{\frac{dV}{dt}\right\}_{V=c} = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (X_s + R_s)\frac{\partial V}{\partial x_s}\right\}_{V=c} < 0, \tag{70.14}$$

где $l_1 \leqslant c \leqslant l$, а $l_1 < l$ — положительное число, достаточно близкое к l. С уменьшением η_2 число l_1 будет также уменьшаться, и при $\eta_2 = 0$ это число может быть принято равным нулю. Таким образом, при всех $t > t_0$ производная $\frac{dV}{dt}$, составленная в силу системы (70.3), будет принимать отрицательные значения для всех значений переменных, лежащих в области, определяемой неравенствами $l_1 \leqslant v(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant l$. Для этой области выполняется неравенство $x > \mu$, где μ — достаточно малое положительное число. Вследствие этого мы можем написать, что в указанной области и при всех значениях $t > t_0$ выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s + R_s) \leqslant -m^2, \tag{70.15}$$

где m — отличная от нуля постоянная. Что постоянная m получается отличной от нуля, несмотря на то, что t изменяется в бесконечном интервале, вытекает непосредственно из неравенств (70.5), (70.9) и условия теоремы, что для $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ существуют не зависящие от t верхние пределы.

Из (70.15) вытекает, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$, находившаяся согласно (70.12) в начальный момент внутри области $V < l$, попадает в некоторый момент времени в область $V < l_1$, где и будет затем оставаться. В самом деле, по доказанному выше, точка все время остается внутри области $V < l$, и если бы она все время находилась вне области $V < l_1$, то все время выполнялось бы неравенство (70.15), а отсюда бы следовало неравенство

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) - m^2(t - t_0),$$

что невозможно, так как левая часть положительна, а правая при достаточно большом t отрицательна, Таким образом, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ непременно попадет в некоторый момент времени в область $V < l_1$. Но попав в эту область, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ будет в ней все время оставаться, так как $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l_1} < 0$.

Таким образом, при достаточно малых начальных возмущениях точка $(x_1, \ldots, x_n)$ хотя и не будет асимптотически приближаться к началу координат, но будет отбрасываться в некоторую окрестность начала координат, которая может быть сделана сколь угодно малой, если постоянно действующие возмущения достаточно малы.

§ 71. Проблема существования функций Ляпунова.

Таким образом, условия теоремы II второго метода Ляпунова при некоторых небольших добавочных ограничениях (требование ограниченности частных производных вместо условия о бесконечно малом высшем пределе) обеспечивают не только асимптотическую устойчивость в смысле Ляпунова, но и устойчивость более сильную, а именно, устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Отсюда, естественно, возникает вопрос, не являются ли условия теоремы II чрезмерно узкими. Другими словами, возникает вопрос об обратимости теоремы II. Этот вопрос представляет интерес не только в связи с разбираемой сейчас задачей, и он в равной степени относится как к теореме II, так и к остальным основным теоремам второго метода. Действительно, если вторым методом пользоваться как основным для решения задачи устойчивости, т. е. если эту задачу сводить к попыткам построения функций Ляпунова, то должна быть уверенность, что такие функции каждый раз действительно существуют.

Поставленная таким образом проблема существования функций Ляпунова является очень трудной и до сих пор не получила полного разрешения[1]). Впервые занимаясь этой задачей, автор[2]) рассматривал только установившиеся движения для систем второго порядка. Было показано, что теорема I Ляпунова необратима, т. е. было показано, что невозмущенное движение может быть устойчиво и в то же время может не существовать знакоопределенной функции, для которой производная в силу уравнений возмущенного движения была бы знакопостоянной, противоположного знака. При этом речь шла о функциях, не зависящих от t. Было, однако, показано, что можно всегда найти функцию другого вида, являющуюся обобщением функций Ляпунова.

Обращением теоремы I занимался также К. П. Персидский[3]), который рассматривал произвольные системы уравнений возмущенного движения. К. П. Персидский показал, что в случае устойчивости для уравнений возмущенного движения всегда существуют особые функции, являющиеся обобщением функций Ляпунова.

Обращению теоремы II также посвящено несколько работ. Автором была показана[4]) обратимость этой теоремы для систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Им же были установлены[5]) достаточные условия существования функций, удовлетворяющих всем условиям теоремы II для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. К. П. Персидский показал[6]), что эти условия являются также необходимыми. При этом установлено, что одной лишь асимптотической устойчивости недостаточно для существования указанной функции. Эти результаты, имеющие непосредственную связь с теорией устойчивости по первому приближению, излагаются ниже, в § 75.

И. Л. Массера[7]) подверг детальному анализу теоремы I и II Ляпунова, а также их различные обобщения. Им было, в частности, показано, что теорема II обратима для установившихся и периоди-

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 523)

[2]) Малкин И. Г., Das Existenzproblem von Liapounoffschen Funktionen. Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, т. IV, 1929—1930.

[3]) Персидский К. П., Об одной теореме Ляпунова. ДАН, т. XIV, № 9, 1937.

[4]) Малкин И. Г., Проблема существования функций Ляпунова. Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, т. V, 1931.

[5]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 3, 1935.

[6]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

[7]) Massera I. L., On Liapounoff's condition of stability. Annals of Mathematics, т. 50, № 3, 1949.

ческих движений. Показано, более того, что при асимптотической устойчивости в указанных случаях существует функция V, удовлетворяющая не только условиям теоремы II, но и более жестким условиям теоремы предыдущего параграфа об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, т. е. что функция V обладает ограниченными частными производными. Отсюда вытекает, что установившиеся и периодические движения резко отличаются в отношении обратимости теоремы II от общего случая неустановившихся движений, для которых, как указано выше, теорема не обратима даже для линейных уравнений.

Результаты И. Л. Массера относительно установившихся и периодических движений приводятся в двух следующих параграфах. Эти результаты, как мы увидим, позволяют установить некоторые важные общие предложения. Для случая установившихся движений результаты И. Л. Массера уточнены Е. А. Барбашиным[1]).

§ 72. Некоторые свойства установившихся и периодических движений.

Допустим, что правые части уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{72.1}$$

являются по отношению к t периодическими функциями, периода ω. Мы не исключаем при этом из рассмотрения тот частный случай, когда X_s совсем не зависят от t. Мы будем предполагать, что в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant H$ функции X_s обладают непрерывными частными производными первого порядка по переменным x_s.

Пусть

$$x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

— решение системы (72.1), определяемое начальными условиями

$$F_s(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = x_s^0.$$

Согласно известной теореме о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий[2]) функции F_s будут обладать непрерывными частными производными первого порядка по переменным t_0, x_1^0, ..., x_n^0 для всех значений этих переменных, лежащих в области $|t_0| \leqslant \omega$, $|x_s^0| \leqslant H' < H$, и при всех значениях t,

[1]) Барбашин Е. А., О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными. ДАН, т. XXII, № 3, 1950; см. также примечание в конце книги (стр. 524)

[2]) См., например, Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, стр. 298, изд. 5-е, Гостехиздат, 1950.

при которых еще выполняются условия $|F_s| \leqslant H$. Далее, из самого определения функций F_s вытекает, что для всяких t_1 и $t_2 > t_1$ имеют место тождества

$$\left.\begin{aligned} x''_s = F_s(t_2, x'_1, \ldots, x'_n, t_1) = F_s(t_2, x^0_1, \ldots, x^0_n, t_0), \\ \text{где} \qquad x'_s = F_s(t_1, x^0_1, \ldots, x^0_n, t_0). \end{aligned}\right\} \tag{72.2}$$

В самом деле, точка $(x_1, \ldots, x_n)$, выходящая в момент времени t_0 из положения $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$, достигнет в момент t_1 положения $(x'_1, \ldots, x'_n)$ и вместе с другой точкой, выходящей в этот же момент времени t_1 из этого же положения $(x'_1, \ldots, x'_n)$, достигнет к моменту времени t_2 положения $(x''_1, \ldots, x''_n)$, так как начальные условия однозначно определяют движение.

Кроме того, так как уравнения (72.1) не изменяются при замене t на $t + \omega$, то имеют также место тождества

$$F_s(t \pm m\omega, x^0_1, \ldots, x^0_n, t_0 \pm m\omega) = F_s(t, x^0_1, \ldots, x^0_n, t_0), \tag{72.3}$$

где m — произвольное целое число.

Допустим теперь, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Тогда в области

$$|x^0_s| \leqslant \alpha, \tag{72.4}$$

где α — достаточно малое положительное число, выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to\infty} F_s(t, x^0_1, \ldots, x^0_n, 0) = 0. \tag{72.5}$$

И. Л. Массера показал, что эти соотношения выполняются равномерно относительно x^0_j, т. е. что для всякого ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое не зависящее от x^0_j число $T(\varepsilon)$, что при всех $t > T$ будут выполняться неравенства $|F_s(t, x^0_1, \ldots, x^0_n, 0)| < \varepsilon$.

Чтобы это показать, определим прежде всего число $\eta(\varepsilon)$ из условия

$$|F_s(t, x^0_1, \ldots, x^0_n, 0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x^0_j| < \eta(\varepsilon). \tag{72.6}$$

Это всегда возможно в силу устойчивости невозмущенного движения. Далее, допустим противное, что вышеуказанное число $T(\varepsilon)$ не существует. Тогда, как бы велико ни было целое число m, всегда найдется такое $t_m > m\omega$ и такая система начальных значений x^0_{sm}, лежащих в области (72.4), что

$$F = \max\{|F_1(t_m, x^0_{1m}, \ldots, x^0_{nm}, 0)|, \ldots, \\ |F_n(t_m, x^0_{1m}, \ldots, x^0_{nm}, 0)|\} \geqslant \varepsilon. \tag{72.7}$$

Так как последовательность точек $\left(x^0_{sm}\right)$ лежит в замкнутой области (72.4), то в той же области лежит и предельная точка указанной последовательности. Пусть это будет точка x^*_s. Для этой точки выполняются, следовательно, соотношения (72.5), из которых вытекает, что существует такое достаточно большое целое число N, что будут иметь место неравенства

$$\left|F_s\left(N\omega,\ x^*_1,\ \ldots,\ x^*_n,\ 0\right)\right| < \frac{1}{2}\eta(\varepsilon). \tag{72.8}$$

Но тогда найдутся сколь угодно большие значения m, для которых будут выполняться неравенства

$$\left|x^{(N)}_s\right| = \left|F_s\left(N\omega,\ x^0_{1m},\ \ldots,\ x^0_{nm},\ 0\right)\right| < \eta(\varepsilon). \tag{72.9}$$

Действительно, в последовательности $\left(x^0_{sm}\right)$ найдутся точки со сколь угодно большим значением индекса m, которые будут настолько близки к предельной точке, что разности $F_s\left(N\omega,\ x^0_{jm},\ 0\right) - F_s\left(N\omega,\ x^*_j,\ 0\right)$ в силу непрерывности F_s будут меньше $\frac{\eta}{2}$. Из (72.9) и (72.6) следует, что при всех $t > 0$

$$\left|F_s\left(t,\ x^{(N)}_1,\ \ldots,\ x^{(N)}_n,\ 0\right)\right| < \varepsilon,$$

или, принимая во внимание (72.3) и (72.2),

$$\begin{aligned}\varepsilon > \left|F_s\left(t,\ x^{(N)}_1,\ \ldots,\ x^{(N)}_n,\ 0\right)\right| \equiv \left|F_s\left(t+N\omega,\ x^{(N)}_1,\ \ldots,\ x^{(N)}_n,\ N\omega\right)\right| \equiv \\ \equiv \left|F_s\left(t+N\omega,\ x^0_{1m},\ \ldots,\ x^0_{nm},\ 0\right)\right|.\end{aligned}$$

Полученные неравенства противоречат (72.7), так как существуют такие t_m, для которых $t_m > N\omega$. Полученное противоречие и доказывает справедливость предложения о том, что соотношения (72.5) выполняются равномерно относительно величин x^0_j.

Покажем теперь, что соотношения

$$\lim F_s\left(t,\ x^0_1,\ \ldots,\ x^0_n,\ t_0\right) = 0 \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{72.10}$$

выполняются также равномерно относительно величин x^0_s и t_0, лежащих в области

$$\left|x^0_s\right| \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant t_0 \leqslant \omega, \tag{72.11}$$

где β — достаточно малое число.

Действительно, имеем в силу (72.2) тождественно

$$F_s\left(t,\ x^0_1,\ \ldots,\ x^0_n,\ t_0\right) = F_s\left(t,\ x'_1,\ \ldots,\ x'_n,\ 0\right),$$

где величины x'_s определяются из уравнений

$$x^0_s = F_s\left(t_0,\ x'_1,\ \ldots,\ x'_n,\ 0\right). \tag{72.12}$$

Поэтому справедливость интересующего нас сейчас предложения непосредственно вытекает из уже доказанного предложения о соотношениях (72.5), если только величину β в (72.11) взять настолько малой, чтобы величины x'_s, определяемые уравнениями (72.12), лежали при всех $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$ в области (72.4).

§ 73. Теорема о существовании функций Ляпунова для периодических и установившихся движений в случае асимптотической устойчивости.

Мы переходим теперь к доказательству следующей теоремы И. Л. Массера.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид* (72.1) *и если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *производная которой* $\frac{dV}{dt}$, *составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная. При этом* V *будет по отношению к* t *периодической функцией, периода* ω, *и не будет, в частности, совсем зависеть от* t, *если эта величина не содержится явно в функциях* X_s.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$, где $t \geqslant t_0$ — точный верхний предел функции

$$F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) = \sum_{s=1}^{n} F_s^2\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

по переменным x_j^0 и t_0 в области (72.11), так что

$$F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) \leqslant \varphi(t) \text{ при } |x_j^0| \leqslant \beta,\ 0 \leqslant t_0 \leqslant \omega,\ t_0 \leqslant t. \quad (73.1)$$

Функция $\varphi(t)$ будет, очевидно, положительной. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0. \quad (73.2)$$

В самом деле, пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Выберем $T(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при $t > T$ и всех значениях x_j^0 и β, лежащих в области (72.11), выполнялось неравенство

$$F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) < \varepsilon, \quad (73.3)$$

что по доказанному в предыдущем параграфе всегда возможно. Так как $\varphi(t)$ является точным нижним пределом непрерывной функции в замкнутой области, то оно будет одним из значений, которое эта функция в указанной области принимает. Другими словами, в области (72.11) существует система чисел $\overline{x}_j^0$ и $\overline{t}_0$, для которой

$$F\left(t,\ \overline{x}_1^0,\ \ldots,\ \overline{x}_n^0,\ \overline{t}_0\right)=\varphi(t)$$

и, следовательно, на основании (73.3) $\varphi(t)<\varepsilon$ при $t>T$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь функцию, определяемую равенством

$$V(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)=\int\limits_t^\infty G\left[F(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\right]d\tau. \tag{73.4}$$

Здесь $G(\eta)$ — некоторая функция от η, определенная при $\eta\geqslant 0$, принимающая при $\eta>0$ только положительные значения и обращающаяся в нуль вместе со своей производной $G'(\eta)$ при $\eta=0$. Кроме того, эта функция обладает тем свойством, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty G\left[\varphi^*(t)\right]dt \tag{73.5}$$

сходится для любой положительной функции $\varphi^*(t)$, удовлетворяющей неравенству $\varphi^*(t)<\varphi(t)$, причем сходимость будет равномерной относительно выбора функции $\varphi^*(t)$. Ниже мы покажем, что такая функция $G(\eta)$ может быть действительно построена.

Покажем прежде всего, что функция V во всех точках области

$$|x_s|\leqslant\beta,\qquad t\geqslant 0, \tag{73.6}$$

действительно существует и непрерывна.

В самом деле, пусть x_j и t лежат в области (73.6), $\tau\geqslant t$, $\tau'=\tau-m\omega\geqslant t-m\omega$, где m — такое целое число, что $0\leqslant t-m\omega<\omega$. Тогда на основании (72.3) мы можем написать:

$$F(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)=F(\tau',\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t-m\omega)=\varphi^*(\tau'),$$

причем функция $\varphi^*(\tau')$ при любом t и x_j и области (73.6) удовлетворяет на основании (73.1) неравенству $\varphi^*(\tau')\leqslant\varphi(\tau')$. Вводя в (73.4) вместо переменной интегрирования τ переменную τ', будем иметь:

$$V(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)=\int\limits_{t-m\omega}^\infty G\left[\varphi^*(\tau')\right]d\tau'. \tag{73.7}$$

Но согласно выбору функции G интеграл, стоящий в (73.7), сходится равномерно относительно $\varphi^*(\tau')$, т. е. равномерно относительно x_j и t в области (73.6). Отсюда вытекает, что в области (73.6) функция V существует и непрерывна.

Найдем теперь частные производные от V по t и x_s, выполняя дифференцирование под знаком интеграла. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_s} &= \int_t^\infty G'\left[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)\right] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_s}\, d\tau, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -G\left[F(t, x_1, \ldots, x_n, t)\right] + \\ &\quad + \int_t^\infty G'\left[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)\right] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t}\, d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (73.8)$$

Однако, для того чтобы эти выражения действительно представляли частные производные функции V в области (73.6), необходимо, чтобы входящие в них интегралы сходились и притом равномерно для всех значений x_s и t в указанной области. Для этого необходимо на функцию G наложить еще одно условие, которое может быть получено следующим образом.

В силу условий, наложенных на правые части уравнений (72.1), частные производные

$$\frac{\partial F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)}{\partial x_s^0}, \qquad \frac{\partial F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)}{\partial t_0}$$

будут существовать и будут непрерывными при всех значениях переменных в области $|x_j^0| \leqslant \beta$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$, $t_0 \leqslant t$, так как в силу устойчивости при указанных значениях переменных функции F_s будут оставаться в области определения функций X_s. Мы можем поэтому для всякого t назначить для этих производных некоторый положительный верхний предел $M(t)$. Мы можем при этом предполагать, что функция $M(t)$ непрерывна и не убывает при возрастании t. Тогда, если потребовать, чтобы интеграл

$$\int_0^\infty G'\left[\varphi^*(\tau)\right] M(\tau)\, d\tau \qquad (73.9)$$

сходился при любом выборе функции $\varphi^*(\tau)$, для которой $\varphi^*(\tau) < \varphi(\tau)$, и чтобы сходимость была равномерной относительно $\varphi^*(\tau)$, то интегралы, входящие в выражения (73.8), будут равномерно сходиться в области (73.6). Мы будем предполагать, что функция $G(\eta)$ действительно удовлетворяет указанному условию. Тогда функция V будет определенной и непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка во всех точках области (73.6).

Рассмотрим подробнее свойства функции V. В силу (72.3) имеем:

$$V(x_1, \ldots, x_n, t+\omega) = \int_{t+\omega}^{\infty} G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t+\omega)]\, d\tau =$$
$$= \int_{t}^{\infty} G[F(\tau+\omega, x_1, \ldots, x_n, t+\omega)]\, d\tau =$$
$$= \int_{t}^{\infty} G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\, d\tau = V(x_1, \ldots, x_n, t),$$

т. е. функция V является периодической относительно t с периодом ω. Если X_s не содержат явно t, то функция V совсем не будет зависеть от t. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что в этом случае ω можно считать произвольным числом.

Функция V положительна во всех точках области (73.6) и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Будучи же по отношению к t периодической, она необходимо является определенно-положительной, так как мы можем писать:

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n),$$

где W — определенно-положительная функция, представляющая собой точный нижний предел функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ по переменной t на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

Составим производную от V по t в силу уравнений (72.1). Мы будем иметь, что $\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt}$, где $\overline{V}$ — результат подстановки в функцию V произвольного решения уравнений (72.1). Но

$$\overline{V} = \int_{t}^{\infty} G\left[F\left(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)\right] d\tau,$$

так как в силу (72.2)

$$F\left[\tau, F_1\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t\right), \ldots, F_n\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right), t\right] \equiv$$
$$\equiv F\left(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right).$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt} = -G\left[F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t\right)\right] =$$
$$= -G\left[\sum_{s=1}^{n} F_s^2\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)\right] = -G\left[\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right],$$

т. е. $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная.

Таким образом, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы, и для того чтобы последняя была полностью доказана, необходимо еще показать, что существует функция G, удовлетворяющая всем указанным для нее условиям. Необходимо, следовательно, показать, что существует положительная функция $G(\eta)$, определенная для $\eta \geqslant 0$, обращающаяся вместе со своей производной $G'(\eta)$ в нуль при $\eta = 0$ и обладающая тем свойством, что интегралы (73.5) и (73.9) сходятся при любом выборе функций $\varphi^*(\tau)$, удовлетворяющих условию $\varphi^*(\tau) \leqslant \varphi(\tau)$, причем сходимость является равномерной относительно $\varphi^*(\tau)$. Фигурирующая в (73.9) величина $M(\tau)$ является положительной, неубывающей, непрерывной функцией τ, определенной при всех $\tau \geqslant 0$. Функция $G(\eta)$ может быть построена следующим образом.

Выберем последовательность чисел t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ таким образом, чтобы при $t \geqslant t_n$ выполнялось соотношение $\varphi(t) \leqslant \frac{1}{n+1}$. В силу (73.2) такая последовательность существует. Мы будем при этом предполагать, что $t_1 \geqslant 1$, $t_{n+1} \geqslant t_n + 1$. Далее строим функцию $\eta(t)$, полагая $\eta(t_n) = \frac{1}{n}$; $\eta(t)$ линейна в каждом интервале между t_n и t_{n+1} и $\eta(t) = \left(\frac{t_1}{t}\right)^p$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где p — целое число,

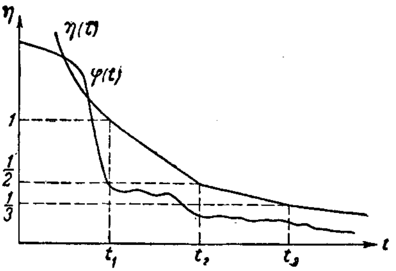

Рис. 18.

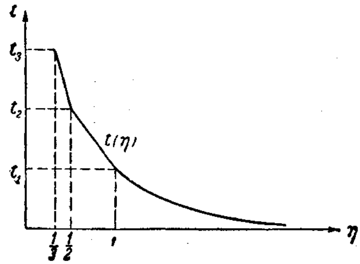

Рис. 19.

выбранное настолько большим, что $\eta'(t_1 - 0) < \eta'(t_1 + 0)$. Очевидно, что $\lim\limits_{t=\infty} \eta(t) = \lim\limits_{\eta \to \infty} t(\eta) = 0$ и $\varphi(t) \leqslant \eta(t)$ при $t \geqslant t_1$. График функции $\eta(t)$ изображен на рис. 18.

Пусть $t(\eta)$ — функция, обратная $\eta(t)$. График этой функции показан на рис. 19. Тогда полагаем:

$$G(\eta) = \int\limits_0^\eta \frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]} d\eta. \tag{73.10}$$

Функция $G(\eta)$, очевидно, положительна при любом $\eta > 0$, и для нее $G(0) = G'(0) = 0$. Далее имеем:

$$G'[\varphi^*(t)] = \frac{e^{-t[\varphi^*(t)]}}{M[t(\varphi^*(t))]}. \tag{73.11}$$

При $t \geqslant t_1$ справедлива оценка $\varphi^*(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \eta(t)$, и, так как $t(\eta)$ — функция убывающая, $t(\varphi^*(t)] \geqslant t[\eta(t)] = t$. Поэтому, учитывая, что $M(t)$ — функция неубывающая, из (73.11) находим:

$$G'[\varphi^*(t)] \leqslant \frac{e^{-t}}{M(t)},$$

откуда сразу получается равномерная сходимость интеграла (73.9). Что же касается интеграла (73.5), то, заменяя в нем нижний предел числом t_1, что для вопроса о сходимости не имеет значения, получим для него выражение

$$I = \int_{t_1}^{\infty} dt \int_{0}^{\varphi^*(t)} \frac{e^{-t(\eta)}}{M[t(\eta)]} d\eta,$$

для которого справедлива оценка

$$I < \int_{t_1}^{\infty} dt \int_{0}^{\eta(t)} \frac{e^{-t(\eta)}}{M(0)} d\eta.$$

Заменяя во внутреннем интеграле переменную η переменной $t(\eta)$, найдем:

$$I < \int_{t_1}^{\infty} dt \int_{\infty}^{t} \eta'(t) \frac{e^{-t}}{M(0)} dt.$$

Полученный интеграл, очевидно, сходится, так как, по крайней мере при $t \geqslant t_1$, имеем $|\eta'(t)| < 1$. Отсюда вытекает равномерная относительно $\varphi^*(t)$ сходимость интеграла (73.5).

Таким образом, функция V обладает всеми необходимыми свойствами, и теорема полностью доказана.

§ 74. Основная теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для периодических и установившихся движений. Приложение к вопросу об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости.

Построенная в предыдущем параграфе функции V, будучи периодической относительно t, не только допускает бесконечно малый высший предел, но обладает ограниченными частными производными по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы § 70. Это приводит сразу к следующей теореме.

Теорема. *Для того чтобы установившееся или периодическое движение было устойчиво при постоянно действующих возмущениях, достаточно, чтобы оно было устойчиво асимптотически в смысле Ляпунова. При этом предполагается, что правые части уравнений возмущенного движения (без членов, характеризующих постоянные возмущения) обладают непрерывными частными производными первого порядка.*

Эта теорема показывает, какое важное значение имеет устойчивость в смысле Ляпунова не только в задачах устойчивости, но и во всякой другой задаче, когда точные уравнения по тем или иным причинам приходится заменять приближенными и когда независимое переменное изменяется в бесконечном интервале. Действительно, по крайней мере для уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами, рассматриваемое решение приближенных уравнений будет мало отличаться от решения точных уравнений, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова.

Рассмотрим частный случай. Допустим, что уравнения возмущенного движения (72.1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{74.1}$$

где X_s — аналитические функции, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Если характеристические показатели первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво и, следовательно, устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Этот результат для случая, когда уравнения (74.1) не содержат явно t, установлен Г. Н. Дубошиным[1]), а для общего случая периодических коэффициентов — И. А. Артемьевым[2]).

В качестве приложения теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для установившихся и периодических движений рассмотрим вопрос об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости, на котором мы уже останавливались в § 44. Допустим, что уравнения возмущенного движения (72.1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \eta(r_{s1}x_1 + \ldots r_{sn}x_n) + \\ + X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{74.2}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

[1]) Дубошин Г. Н.. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. XIV, вып. 1, 1940.

[2]) Артемьев И. А., Осуществимые движения. Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1939.

где μ — малый параметр, p_{sj} и r_{sj} — периодические функции времени, периода ω (в частности, постоянные), а X_s — функции, удовлетворяющие общим условиям § 72 и имеющие порядок малости выше первого. Мы будем предполагать, что система первого приближения при $\mu = 0$ не имеет характеристических показателей с положительной вещественной частью, но имеет характеристические показатели с вещественными частями, равными нулю. Таким образом, при $\mu = 0$ система находится на границе области устойчивости[1]), а при $\mu \neq 0$ она находится вблизи этой границы. Величина параметра μ и характеризует степень близости системы к границе области устойчивости. Мы предполагаем при этом, что коэффициенты r_{sj} таковы, что система первого приближения при $\mu \neq 0$ может иметь характеристические показатели с положительной вещественной частью, так что система может находиться в области неустойчивости.

Допустим, что при $\mu = 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова. Тогда оно, по доказанному, будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Следовательно, при μ, достаточно малом, величины $|x_s|$ будет оставаться малыми, если они были малы в начальный момент времени. При этом, как было показано в примечании в § 70, точка $(x_1, \ldots, x_n)$ будет отбрасываться в некоторую окрестность начала координат, которая, может быть сделана сколь угодно малой при μ, достаточно малом, т. е. если система находится достаточно близко от границы области устойчивости.

Таким образом, если пользоваться терминологией § 44, мы можем сказать, что участки границы области устойчивости, на которых невозмущенное движение асимптотически устойчиво, являются «безопасными». При этом не имеет никакого значения, сколько критических характеристических показателей имеет система первого приближения на границе области устойчивости.

§ 75. Условия существования функций Ляпунова для линейных уравнений в случае асимптотической устойчивости.

Мы переходим теперь к вопросу об обратимости теоремы II для уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\, x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{75.1}$$

где p_{sj} — произвольные непрерывные и ограниченные при $t \geqslant 0$ функции времени. Задача заключается в определении условий, необходимых и достаточных, при которых существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция

[1]) Определение границы области устойчивости дано в § 44.

$V(t, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (75.1), есть функция определенно-отрицательная. Эти условия даются двумя нижеследующими теоремами, из которых первая установлена К. П. Персидским[1]), а вторая — автором[2]).

Обозначим через $x_{1j}(t, t_0), \ldots, x_{nj}(t, t_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ фундаментальную систему решений уравнений (75.1), определяемую начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} x_{sj}(t_0, t_0) &= 0 \quad (s \neq j), \\ x_{ss}(t_0, t_0) &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{75.2}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — произвольная постоянная. Эти решения мы рассматриваем как функции t и t_0. Пусть a и b — произвольные положительные величины. Тогда n^2 функций $x_{sj}(t, a)$ и n^2 функций $x_{sj}(t, b)$ образуют две фундаментальные системы решений уравнений (75.1). Следовательно, между ними существуют линейные соотношения

$$x_{sk}(t, a) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha k} x_{s\alpha}(t, b) \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_{\alpha k}$ — некоторые постоянные. Полагая в этих соотношениях $t = b$ и принимая во внимание (75.2), находим:

$$x_{sk}(b, a) = c_{sk}$$

и, следовательно, имеют место следующие тождества:

$$x_{sk}(t, a) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t, b)\, x_{\alpha k}(b, a). \tag{75.3}$$

Докажем теперь следующие теоремы.

Теорема 1. *Если для уравнений* (75.1) *существует определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то при всех* $t \geqslant t_0$ и $t_0 \geqslant 0$ *выполняются неравенства*

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{75.4}$$

где B и α — некоторые не зависящие от t_0 положительные постоянные.

Доказательство. Согласно условиям теоремы существует такое достаточно малое положительное число h, что в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant h \tag{75.5}$$

---

[1]) См. сноску [6]) на стр. 306.

[2]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 3, 1935.

выполняются неравенства

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{75.6}$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) + \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n), \tag{75.7}$$

где W_1 и W_2—не зависящие от t определенно-положительные функции.

Так как согласно теореме II невозмущенное движение во всяком случае устойчиво, то при ρ, достаточно малом, для любого решения $x_s(t, t_1)$ уравнений (75.1), начальные значения $x_s^0 = x_s(t_1, t_1)$ которого связаны соотношением

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^{02} = \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t_1, t_1) = \rho^2, \tag{75.8}$$

будут при всех $t > t_1$ выполняться неравенства $|x_s| < h$. Здесь t_1 — произвольное положительное число. Следовательно, для этого решения все время будет выполняться условие (75.7), из которого вытекает, что функция $V[t, x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)]$ будет убывающей, и можем поэтому для всех $t > t_1$ написать неравенство

$$W_1[x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)] \leqslant V[t, x_1(t, t_1), \ldots, x_n(t, t_1)] < \\ < V(t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0) \leqslant l(\rho). \tag{75.9}$$

Здесь l есть верхний предел $V(t_1, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ при условии (75.8). Это число не зависит от t_1, так как функция V, допуская бесконечно малый высший предел, будет во всяком случае ограниченной. Так как W_1 есть функция определенно-положительная, то из (75.9) вытекает, что при всех $t > t_1$ выполняются неравенства

$$|x_s(t, t_1)| < C^*(\rho), \tag{75.10}$$

где C^* — некоторая не зависящая от t_1 постоянная.

Пусть теперь L — произвольная сколь угодно малая постоянная. Рассмотрим множество значений x_s, лежащих в области (75.5) и удовлетворяющих неравенству $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant L$. Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то при этом необходимо будет $x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} > \lambda(L)$, где $\lambda(L)$ — некоторая достаточно малая постоянная. Но тогда при этом условии мы будем также иметь $W_2(x_1, \ldots, x_n) > l_1(L)$, где $l_1(L)$ — также некоторая постоянная. Таким образом, мы можем писать:

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -W_2 < -l_1(L) \text{ при } V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant L. \tag{75.11}$$

Покажем теперь, что если $T = \frac{l}{l_1}$, то к моменту времени t_1+T мы будем иметь:

$$V[t,\ x_1(t,\ t_1),\ \ldots,\ x_n(t,\ t_1)] < L. \tag{75.12}$$

Допустим противное, что это неверно. Тогда на всем отрезке $[t_1,\ t_1+T]$ будет выполняться неравенство $V \geqslant L$, ибо если бы неравенство (75.12) выполнялось при каком-нибудь $t_1 < t < t_1+T$, то оно выполнялось бы и при $t = t_1+T$, так как $V[t,\ x_1(t,\ t_1),\ldots$ $\ldots,\ x_n(t,\ t_1)]$ есть функция убывающая. Но если при всех $t_1 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant t_1+T$ выполняется $V \geqslant L$, то на основании (75. 11)

$$L \leqslant V[t_1+T,\ x_1(t_1+T,\ t_1),\ \ldots,\ x_n(t_1+T,\ t_1)] =$$
$$= V(t_1,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) + \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{dV}{dt}\,dt < l - l_1 T = 0,$$

что невозможно, так как L — число положительное.

Таким образом, при $t = t_1+T$ выполняется условие (75.12). Выберем теперь L настолько малым, чтобы из (75.12) вытекало

$$|x_s(t,\ t_1)| < \frac{M\rho}{n}, \tag{75.13}$$

где M — положительное число, меньшее единицы. Это возможно, так как V допускает бесконечно малый высший предел. При этом число L не будет зависеть от t_1. Но тогда и $T = \frac{l}{l_1(L)}$ не будет зависеть от t_1. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: для любого решения $x_s(t,\ t_1)$ уравнений (75.1), для начальных значений которого выполняется условие (75.8), будут при всех $t > t_1$ выполняться неравенства (75.10) и при $t = t_1+T$, где T — некоторое не зависящее от t_1 число, — неравенства (75.13).

Установив это, положим $x_s(t,\ t_1) = \rho x_{sj}(t,\ t_1)$. Условие (75.8) при этом, очевидно, выполняется. Тогда из (75.10) и (75.13) находим, что при любом t_1 и $t > t_1$

$$|x_{sj}(t,\ t_1)| < \frac{C^*(\rho)}{\rho} = c \quad (s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{75.14}$$

где c не зависит от t_1, и

$$|x_{sj}(t_1+T_1,\ t_1)| < \frac{M}{n}. \tag{75.15}$$

Покажем теперь, что если m — любое целое число, то

$$|x_{sj}(t_1+mT,\ t_1)| < M^m. \tag{75.16}$$

Так как эти неравенства во всяком случае выполняются при $m = 1$, то нам достаточно показать их справедливость, предположив, что

$|x_{sj}[t_1+(m-1)T,\ t_1]| < M^{m-1}$. Но, сделав такое предположение и положив в тождествах (75.3) $t=mT+t_1$, $a=t_1$, $b=(m-1)T+t_1$, будем иметь:

$$|x_{sj}(mT+t_1,\ t_1)| =$$
$$= \left|\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}[mT+t_1,\ (m-1)T+t_1]\, x_{\alpha j}[(m-1)T+t_1,\ t_1]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} |x_{\alpha j}[t_1+(m-1)T,\ t_1]| < M\cdot M^{m-1} = M^m,$$

что и доказывает наше предложение.

Рассмотрим теперь произвольные числа $t_0>0$ и $t>t_0$. Пусть $mT\leqslant t-t_0=mT+\tau<(m+1)T$, где m — целое число. Полагая в (75.3) $a=t_0$, $b=t_0+mT$, получим:

$$x_{sj}(t,\ t_0)=\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t,\ t_0+mT)\, x_{\alpha j}(t_0+mT,\ t_0),$$

и так как $t\geqslant t_0+mT$, то, применяя (75.14) и (75.16), найдем:

$$|x_{sj}(t,\ t_0)| < ncM^m = ncM^{\frac{t-t_0-\tau}{T}} \leqslant \frac{nc}{M} M^{\frac{t-t_0}{T}}.$$

Отсюда, полагая $B=\frac{nc}{M}$, $M^{\frac{1}{T}}=e^{-\alpha}$, где $\alpha>0$, в силу того что $M<1$, окончательно найдем, что при всех t_0 и $t>t_0$ выполняются неравенства (75.4), что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если выполняются неравенства* (75.4), *то существует определенно-положительная функция* $V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, *допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой, составленная в силу уравнений* (75.1), *есть функция определенно-отрицательная. При этом*[1]), *если* $W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *есть произвольная определенно-положительная форма какого-нибудь порядка* m, *коэффициенты которой являются ограниченными и непрерывными функциями времени, то функция* V *может быть выбрана в виде формы того же порядка, для которой*

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)+\frac{\partial V}{\partial t}=-W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n). \tag{75.17}$$

[1]) Эта часть теоремы является уточнением формулировки, данной в работе, цитированной на стр. 318.

Доказательство. Обозначим через $x_s(t)=F_s(t,\ x_1^0, \ldots, \ldots, x_n^0,\ t_0)$ решение уравнений (75.1) с начальными условиями $x_s(t_0)=x_s^0$. Очевидно, имеем:

$$x_s(t)=F_s(t,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ t_0)=\sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(t,\ t_0)\,x_\alpha^0. \tag{75.18}$$

Пусть $W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — произвольная форма m-го порядка переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$, коэффициенты которой являются непрерывными и ограниченными функциями времени. Рассмотрим форму m-го порядка, определяемую равенством

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=$$
$$=\int_t^\infty W[\tau,\ F_1(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t),\ \ldots,\ F_n(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)]\,d\tau, \tag{75.19}$$

и покажем, что эта форма удовлетворяет всем условиям теоремы.

В самом деле, коэффициенты формы V представляют собой суммы членов вида

$$P(t)=\int_t^\infty f(\tau)\,x_{s_1j_1}^{m_1}(\tau,\ t)\ \ldots\ x_{s_nj_n}^{m_n}(\tau,\ t)\,d\tau, \tag{75.20}$$

где $f(t)$ — некоторые непрерывные и ограниченные функции t, представляющие собой линейные комбинации с целочисленными коэффициентами коэффициентов формы $W(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, а $m_1,\ \ldots,\ m_n$ — целые неотрицательные числа, для которых $m_1+m_2+\ldots+m_n=m$.

Из условий (75.4) сразу вытекает, что все интегралы (75.20) сходятся и, следовательно, форма V действительно существует. Более того, из этих неравенств сразу вытекает, что все функции (75.20) ограничены при $t\geqslant 0$. Действительно, имеем:

$$|P(t)|<B^m\int_t^\infty |f(\tau)|\,e^{-m\alpha(\tau-t)}\,dt<B^mM\int_t^\infty e^{-m\alpha(\tau-t)}\,d\tau=\frac{B^mM}{m\alpha},$$

где M — верхний предел функции $f(\tau)$. Таким образом, форма V обладает ограниченными коэффициентами, и, следовательно, допускает бесконечно малый высший предел.

Форма V, как это непосредственно следует из (75.19), будет во всяком случае положительной. Покажем, что она является определенно-положительной.

Обозначим с этой целью через $\Delta(\tau,\ t)$ определитель $|x_{sj}(\tau,\ t)|$, через $\Delta_{sj}(\tau,\ t)$ — его минор, соответствующий элементу x_{sj}, и рассмотрим форму m-го порядка переменных y_s:

$$W(\tau,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau,\ t)\, y_\beta \right\}^m, \tag{75.21}$$

где λ — вещественное число. Из (75.4) следует, что для величин $\Delta_{\beta\alpha}$ при $\tau \geqslant t$ могут быть назначены некоторые, независящие ни от τ, ни от t, постоянные верхние пределы. И так как W есть форма определенно-положительная, то отсюда следует, что постоянную λ можно выбрать настолько малой, чтобы форма (75.21) была также определенно-положительной. Мы будем предполагать, что λ действительно выбрано согласно этому условию. Следовательно, если в выражение (75.21) подставим вместо y_s любые величины, то оно будет принимать положительные значения. В частности, если положим:

$$y_s = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{s\alpha}(\tau,\ t)\, x_\alpha = F_s(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t),$$

то будем иметь:

$$W[\tau,\ F_1(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t),\ \ldots,\ F_n(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)] - \\ - \lambda^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau,\ t)\, F_\beta(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t) \right\}^m > 0.$$

Но

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau,\ t)\, F_\beta = \sum_{\beta,\ \gamma=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha}(\tau,\ t)\, x_{\beta\gamma}(\tau,\ t)\, x_\gamma = \Delta(\tau,\ t)\, x_\alpha,$$

так как

$$\sum_{\beta=1}^{n} \Delta_{\beta\alpha} x_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\Delta,$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера: $\delta_{\alpha\gamma} = 0$ при $\alpha \neq \gamma$ и $\delta_{\alpha\gamma} = 1$ при $\alpha = \gamma$. Следовательно,

$$W[\tau,\ F_1(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t),\ \ldots,\ F_n(\tau,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)] - \\ - \lambda^2 \Delta^m(\tau,\ t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m > 0,$$

откуда на основании (75.19) находим:

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) > \lambda^2 Q(t) \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^m, \tag{75.22}$$

где

$$Q(t) = \int_t^\infty \Delta^m(\tau,\ t)\, d\tau = \int_t^\infty \exp\left(m \sum_{s=1}^{n} \int_t^\tau p_{ss}(t)\, dt \right) d\tau.$$

Далее имеем тождественно

$$\int_t^\infty \sum_{s=1}^n p_{ss}(\tau)\exp\left(m\int_t^\tau \sum_{s=1}^n p_{ss}(t)\,dt\right)d\tau = -\frac{1}{m}.$$

Применяя теорему о среднем значении, найдем:

$$\left(\sum_{s=1}^n p_{ss}\right)^* Q(t) = -\frac{1}{m}, \tag{75.23}$$

где $\left(\sum p_{ss}\right)^*$ — среднее значение функции $\sum p_{ss}$ в интервале (t, ∞).

Но так как функции p_{ss} ограничены, а функция $Q(t)$ положительна, то из (75.23) следует, что функция $Q(t)$ превосходит при любом $t \geqslant 0$ некоторую положительную постоянную a^2. Следовательно, из (75.22) находим:

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > \lambda^2 a^2 \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^m,$$

что показывает, что форма V определенно-положительна.

Остается показать, что выполняется уравнение (75.17). С этой целью, поступая так же, как и в § 73, обозначим через $\overline{V}(t)$ функцию, в которую обратится V для произвольного решения уравнений (75.1), т. е. результат подстановки в V вместо x_s функций (75.18). Тогда будем иметь $\frac{dV}{dt} = \frac{d\overline{V}}{dt}$. Но имеем тождественно (см. § 72, формулы (72.2))

$$F_s\left[\tau, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), t\right] = \\ = F_s(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0),$$

следовательно,

$$\overline{V}(t) = \int_t^\infty W\left[\tau, F_1(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\right]d\tau,$$

$$\frac{dV}{dt} = -W\left[t, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\right] = \\ = -W(t, x_1, \ldots, x_n),$$

что и доказывает наше предложение.

Справедливость (75.17) может быть, конечно, непосредственно проверена прямым дифференцированием. Для этого понадобится воспользоваться легко доказываемыми тождествами

$$\frac{dx_{sj}(\tau, t)}{dt} + \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha j}(t)\, x_{s\alpha}(\tau, t) \equiv 0. \tag{75.24}$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 1 и 2 показывают, что необходимым и достаточным условием существования для уравнений (75.1) функции Ляпунова, удовлетворяющей всем условиям теоремы II об асимптотической устойчивости, является выполнение неравенств (75.4). Это более жесткое требование, чем асимптотическая устойчивость, так как при выполнении неравенств (75.4) функции x_s будут с неограниченным возрастанием t стремиться к нулю как показательные функции, а между тем для уравнений с переменными коэффициентами функции x_s могут при $t \to \infty$ стремиться к нулю, не удовлетворяя этому условию. Это легко видеть хотя бы из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+t}x,$$

для которого общее решение

$$x = \frac{x_0}{1+t}$$

стремится к нулю как степенная функция. Отсюда следует, что *теорема* II *А. М. Ляпунова необратима.*

Из доказанных теорем вытекает справедливость также и следующей теоремы.

Теорема 3. *Если для уравнений* (75.1) *существует какая-нибудь функция Ляпунова, удовлетворяющая всем условиям теоремы* II *об асимптотической устойчивости, то для них существует функция Ляпунова, обладающая такими же свойствами и представляющая собой форму заданного порядка.*

Б. ТЕОРИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

§ 76. Характеристичные числа Ляпунова.

В этом разделе мы занимаемся изучением с точки зрения устойчивости системы линейных уравнений с переменными коэффициентами, подобно тому как мы это делали для уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами. Задача при этом делается, конечно, значительно сложнее. Тем не менее и здесь получены некоторые важные для практики и для теории общие результаты.

Для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами можно подобрать некоторые числа, играющие для них такую же роль, как корни характеристического уравнения для систем с постоянными коэффициентами и характеристические показатели для систем с периодическими коэффициентами. Это — так называемые *характеристичные числа* решений, введенные Ляпуновым. Но прежде чем рассматривать характеристичные числа решений, дадим определение характеристичного числа функции.

Мы будем рассматривать вещественные или комплексные функции $f(t)$ вещественного переменного t, определенные на всей вещественной полуоси $t \geqslant 0$. Для простоты мы будем рассматривать только непрерывные функции. Функции $f(t)$ могут быть как ограниченные, так и неограниченные. В первом случае для всех $t > 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < A$, где A — достаточно большое положительное число, а во втором случае, как бы велико ни было A, найдутся такие значения t, для которых $|f(t)| > A$, что, очевидно, может быть записано таким образом: $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f(t)| = \infty$.

Ограниченную функцию $f(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, будем называть *исчезающей*.

Докажем прежде всего следующую лемму.

Лемма. *Допустим, что для функции $f(t)$ существуют два вещественных числа λ и μ, таких, что функция $f(t)e^{\mu t}$ является неограниченной, а функция $f(t)e^{\lambda t}$ — исчезающей. Тогда существует вещественное число a, такое, что при любом положительном числе ε, как бы мало оно ни было, функция $f(t)e^{(a+\varepsilon)t}$ будет неограниченной, а функция $f(t)e^{(a-\varepsilon)t}$ — исчезающей, так что*

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{t\to\infty}} |f(t)| e^{(a+\varepsilon)t} = +\infty, \\ &\lim_{t\to\infty} f(t) e^{(a-\varepsilon)t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{76.1}$$

Доказательство. Допустим сначала, что в интервале (λ, μ) имеется число a, такое, что функция $f(t)e^{at}$ является ограниченной, но не исчезающей. Тогда это число a и будет искомым, так как для него, очевидно, выполняются условия (76.1). Допустим теперь, что такого числа a не существует. Тогда для всякого числа λ_0 в интервале (λ, μ) функции $f(t)e^{\lambda_0 t}$ будет либо неограниченной, либо исчезающей. При этом очевидно, что число λ_0, для которого функция $f(t)e^{\lambda_0 t}$ является исчезающей, меньше любого λ_0, при котором эта функция является неограниченной. Мы можем поэтому в интервале (λ, μ) вставить две последовательности чисел $\lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ и $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \ldots$ так, чтобы любое число первой последовательности было меньше любого числа второй последовательности, чтобы разность $\lambda_n - \mu_n$ стремилась с возрастанием n к нулю и чтобы при любом n функция $f(t)e^{\lambda_n t}$ была исчезающей, а функция $f(t)e^{\mu_n t}$ неограниченной. Полученные последовательности определяют сечение a, не меньшее ни одного из чисел λ_n и не большее ни одного из чисел μ_n. Это число a и будет искомым. Таким образом, лемма доказана.

Число a, удовлетворяющее условиям (76.1) т. е. условиям, что функция $f(t)e^{(a+\varepsilon)t}$ при любом сколь угодно малом положительном ε

будет неограниченной, а функция $f(t)\,e^{(a-\varepsilon)t}$ — исчезающей, называется по Ляпунову *характеристичным числом* функции $f(t)$.

Если функция $f(t)\,e^{\lambda t}$ является исчезающей при любом λ, то мы будем говорить, что характеристичное число $f(t)$ равно $+\infty$. Если же, напротив, $f(t)\,e^{\lambda t}$ есть функция, неограниченная при любом λ, то мы будем говорить, что характеристичное число $f(t)$ равно $-\infty$. При этом условии любая функция $f(t)$ имеет конечное или бесконечное характеристичное число.

Характеристичное число функции $f(t)$ мы будем в дальнейшем обозначать символом $X\{f\}$.

Покажем, что имеем тождественно

$$X\{f\} = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|f(t)|}{t}. \tag{76.2}$$

В самом деле, пусть $X\{f\} = a$, так что при сколь угодно малом положительном ε выполняются условия (76.1). Первое из этих условий показывает, что существует последовательность $t_1, t_2, \ldots \to\infty$, для которой $|f(t_n)|\,e^{(a+\varepsilon)t_n}\to\infty$, так что, начиная с достаточно большого n, будут во всяком случае выполняться неравенства

$$|f(t_n)|\,e^{(a+\varepsilon)t_n} > 1. \tag{76.3}$$

С другой стороны, из второго условия (76.1) вытекает, что при *всех* $t>T$, где T — достаточно большое число, выполняется

$$|f(t)|\,e^{(a-\varepsilon)t} < 1. \tag{76.4}$$

Из (76.3) находим:

$$\ln|f(t_n)| + (a+\varepsilon)\,t_n > 0,$$

или

$$\frac{\ln|f(t_n)|}{t_n} > -a-\varepsilon. \tag{76.5}$$

Точно так же из (76.4) получаем:

$$\frac{\ln|f(t)|}{t} < -a+\varepsilon. \tag{76.6}$$

Выполнение неравенства (76.6) при любом $t>T$ и одновременное существование последовательности, для которой выполняется неравенство (76.5), и показывают, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|f(t)|}{t} = -a$, т. е. справедливость (76.2).

Формула (76.2) дает наиболее простой способ вычисления характеристичного числа заданной функции. В частности, она показывает, что если выражение $-\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ стремится к определенному пределу при $t\to\infty$, то этот предел и будет характеристичным числом функции

$f(t)$. Отсюда между прочим следует, что *характеристичное число степенной функции при любом показателе степени равно нулю.*

В самом деле, имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t^m}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{m\ln t}{t}=0.$$

Приведем еще несколько примеров, заимствованных у А. М. Ляпунова. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ X\left\{e^{t\cos\frac{1}{t}}\right\}=-1,\\ &2)\ X\left\{e^{-t\cos\frac{1}{t}}\right\}=+1,\\ &3)\ X\left\{e^{\pm t\sin t}\right\}=-1,\\ &4)\ X\left\{t^t\right\}=-\infty. \end{aligned}\right\} \tag{76.7}$$

В самом деле, имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln e^{\pm t\cos\frac{1}{t}}}{t}=\lim_{t\to\infty}\left[\pm\cos\frac{1}{t}\right]=\pm 1,$$

откуда сразу вытекает справедливость первых двух примеров.

Далее,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln e^{\pm t\sin t}}{t}=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,[\pm\sin t]=+1,$$

откуда вытекает справедливость третьего примера. Точно так же легко убеждаемся и в справедливости четвертого примера.

Отметим в заключение, что если характеристичное число функции положительно, то функция стремится к нулю как показательная функция. Если же характеристичное число функции отрицательно, то эта функция будет неограниченной.

§ 77. Основные свойства характеристичных чисел.

Докажем сейчас некоторые основные свойства характеристичных чисел функций, установленные А. М. Ляпуновым.

Теорема 1. *Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не менее их, когда они равны.*

Доказательство. Пусть $\lambda=X\{f\}$, $\mu=X\{\varphi\}$ и допустим сначала, что $\lambda<\mu$. Тогда для всякого положительного ε функция

$$(f+\varphi)\,e^{(\lambda-\varepsilon)\,t}=fe^{(\lambda-\varepsilon)\,t}+\varphi e^{(\lambda-\varepsilon)\,t} \tag{77.1}$$

будет исчезающей, так как исчезающими будут оба слагаемых. Напротив, функция

$$(f+\varphi)\, e^{(\lambda+\varepsilon)\, t} = f e^{(\lambda+\varepsilon)\, t} + \varphi e^{(\lambda+\varepsilon)\, t} \tag{77.2}$$

будет неограниченной при $\varepsilon < \mu - \lambda$, так как первое слагаемое будет функцией неограниченной, а второе — исчезающей. Отсюда следует, что $X\{f+\varphi\} = \lambda$.

Допустим теперь, что $\lambda = \mu$. Тогда при любом ε сумма (77.1) будет по-прежнему исчезающей, так как исчезающими будут оба слагаемых этой суммы. Что же касается суммы (77.2), то теперь оба слагаемых будут неограниченными, вследствие чего сумма может оказаться исчезающей. Поэтому при $\lambda = \mu$ мы можем лишь утверждать, что $X\{f+\varphi\} \geqslant \lambda$.

Теорема 2. *Характеристичное число произведения двух функций не менее суммы их характеристичных чисел.*

Доказательство. Пусть $X\{f\} = \lambda$, $X\{\varphi\} = \mu$. Тогда для всякого положительного ε функция

$$\varphi e^{\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right) t} \cdot f e^{\left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}\right) t} = f\varphi e^{(\lambda+\mu-\varepsilon)\, t}$$

будет исчезающей. Отсюда следует, что $X\{f\varphi\} \geqslant \lambda + \mu$, что и требовалось доказать.

Что характеристичное число произведения может быть больше суммы характеристичных чисел множителей, легко видеть на следующем примере. Характеристичное число произведения двух функций $e^{t \sin t} e^{-t \sin t}$, равного единице, есть нуль. В то же время характеристичное число каждого из множителей, как это видно из (76.7), равно -1, и, следовательно, их сумма равна -2.

Следствие. *Сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ не более нуля.*

Теорема 3. *Для того чтобы сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{1}{t} \ln |f(t)|$ стремилось к определенному пределу при $t \to \infty$.*

Доказательство. Если по условию $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)| = a$, то на основании (76.2)

$$X\{f\} = -a, \quad X\left\{\frac{1}{f}\right\} = a,$$

что доказывает достаточность высказанного в теореме условия.

Напротив, если $X\{f\}+X\left\{\frac{1}{f}\right\}=0$, то

$$0=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}-\overline{\lim_{t\to\infty}}\left[-\frac{\ln|f(t)|}{t}\right]=$$
$$=-\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}+\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t},$$

что показывает, что функции $\frac{1}{t}\ln|f(t)|$ при $t\to\infty$ имеет определенный предел. Этим доказывается необходимость высказанного в теореме условия.

Теорема 4. *Если сумма характеристичных чисел функций f и $\frac{1}{f}$ равна нулю, то характеристичное число произведения из функции f и какой-либо функции φ равно сумме характеристичных чисел множителей.*

Доказательство. С одной стороны, имеем:

$$X\{f\varphi\}\geqslant X\{f\}+X\{\varphi\}.$$

С другой стороны, по условию теоремы

$$X\{\varphi\}=X\left\{f\varphi\cdot\frac{1}{f}\right\}\geqslant X\{f\varphi\}+X\left\{\frac{1}{f}\right\}=X\{f\varphi\}-X\{f\},$$

или

$$X\{f\varphi\}\leqslant X\{\varphi\}+X\{f\},$$

откуда

$$X\{\varphi f\}=X\{\varphi\}+X\{f\},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим интеграл

$$F(t)=\int_a^t f(t)\,dt,$$

где a — произвольная постоянная, если характеристичное число функции $f(t)$ отрицательно или равно нулю, и интеграл

$$F(t)=\int_t^\infty f(t)\,dt,$$

если характеристичное число функции $f(t)$ положительно. При таком условии о пределах интегрирования имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Характеристичное число интеграла не менее характеристичного числа подынтегральной функции.*

Доказательство. Пусть $\lambda=X\{f\}$. Тогда при всяком положительном η функция $fe^{(\lambda-\mu)t}$ будет исчезающей и, следовательно, ограниченной. Пусть M — верхний предел модуля этой функции.

Допустим сначала, что $\lambda > 0$. Тогда, полагая $\eta < \lambda$, будем иметь:

$$|F(t)| < M \int_t^\infty e^{-(\lambda-\eta)t}\,dt = \frac{M}{\lambda-\eta}\,e^{-(\lambda-\eta)t},$$

откуда вытекает, что функция $F(t)\,e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ есть исчезающая при любом $\varepsilon > \eta$ и, следовательно, при любом ε, так как η можно считать сколь угодно малым. Это показывает, что $X\{F\} \geqslant \lambda$.

Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$. Тогда

$$|F(t)| < M \int_a^t e^{-(\lambda-\eta)t}\,dt = \frac{M}{\eta-\lambda}\,e^{-(\lambda-\eta)t} + \text{const.},$$

что показывает, что функция $F(t)\,e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ будет исчезающей при любом $\varepsilon > \eta$ и, следовательно, при любом ε. Поэтому и в рассматриваемом случае $X\{F\} \geqslant \lambda$.

§ 78. Характеристичные числа решений линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{78.1}$$

где p_{sj} — вещественные, непрерывные и ограниченные функции t, определенные при всех $t \geqslant 0$. Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — какое-нибудь решение уравнений (78.1). Мы будем называть характеристичным числом рассматриваемого решения наименьшее из характеристичных чисел функций $x_s(t)$. Вообще характеристичным числом какой-нибудь группы функций $f_1(t), \ldots, f_k(t)$ мы будем называть наименьшее из характеристичных чисел $X\{f_i\}$. Характеристичное число группы функций $f_1, \ldots, f_k$ мы будем обозначать символом $X\{f_1, \ldots, f_k\}$.

Докажем следующую теорему Ляпунова.

Теорема 1. *Всякое решение уравнений* (78.1), *отличное от* $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *имеет конечное характеристичное число.*

Доказательсто. Рассмотрим сначала вещественные решения уравнений (78.1). Преобразуем эти уравнения при помощи подстановки

$$y_s = x_s e^{\lambda t}, \tag{78.2}$$

где λ — некоторая постоянная. Преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + (p_{ss} + \lambda)\,y_s + \ldots + p_{sn}y_n.$$

Из этих уравнений находим:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 = \sum_{s=1}^{n}(p_{ss}+\lambda)\, y_s^2 + \sum_{i\neq k}(p_{ik}+p_{ki})\, y_i y_k = W. \quad (78.3)$$

Очевидно, что существует такое число $\lambda = \lambda_1$, при котором форма, стоящая в правой части (78.3), будет определенно-положительной, удовлетворяя неравенству

$$W > \frac{\alpha}{2}(y_1^2 + \ldots + y_n^2),$$

где α — некоторая положительная постоянная.

При $\lambda = \lambda_1$ будем иметь, что при $t > 0$ для любого решения $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2(t) > \sum_{s=1}^{n} y_s^2(0)\, e^{\alpha t}. \quad (78.4)$$

С другой стороны, существует и такое значение $\lambda = \lambda_2 < \lambda_1$, при котором правая часть (78.3) будет формой определенно-отрицательной, удовлетворяя неравенству

$$W < -\frac{\alpha}{2}(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

При $\lambda = \lambda_2$ будем иметь:

$$\sum_{s=1}^{n} y_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} y_s^2(0)\, e^{-\alpha t}. \quad (78.5)$$

Неравенства (78.4) и (78.5) показывают, что для любого нетривиального решения уравнений (78.1) все функции (78.2) будут исчезающими при $\lambda = \lambda_2$ и хотя бы одна из этих функций будет неограниченной при $\lambda = \lambda_1$. Отсюда следует, что характеристичное число любого нетривиального решения уравнений (78.1) заключено в интервале (λ_2, λ_1), что и доказывает теорему для вещественных решений.

Остается показать справедливость теоремы для комплексных решений. Для этого достаточно заметить, что всякое комплексное решение

$$u_s + iv_s$$

уравнений (78.1) складывается из двух вещественных решений u_s и v_s. Таким образом, теорема полностью доказана.

Рассмотрим какую-нибудь фундаментальную систему решений

$$x_{1j}(t),\ x_{2j}(t),\ \ldots,\ x_{nj}(t) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

уравнений (78.1). Обозначим через λ_j характеристичное число решения x_{sj}. Допустим сначала, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны.

Найдем характеристичное число решения

$$x_s = C_1 x_{si_1} + C_2 x_{si_2} + \ldots + C_k x_{si_k}, \tag{78.6}$$

являющегося линейной комбинацией с постоянными коэффициентами каких-нибудь k решений $x_{si_1}, \ldots, x_{si_k}$ рассматриваемой фундаментальной системы. Так как все числа $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ различны, то на основании теоремы о характеристичном числе суммы функций характеристичное число решения (78.6) будет равно наименьшему из чисел $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$, т. е. характеристичному числу одного из решений, входящих в комбинацию. Таким образом, если все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны, то характеристичное число любого решения уравнений (78.1) будет одним из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Имеем, таким образом, теорему:

Теорема 2. *Система* (78.1) *не может иметь более n решений с различными характеристичными числами.*

Допустим теперь, что среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеются равные. Тогда может оказаться, что при комбинации решений с одинаковыми характеристичными числами характеристичное число нового решения окажется больше, чем характеристичные числа решений, входящих в комбинацию. Если это случится, то полученное новое решение мы включим в состав фундаментальной системы вместо одного из комбинируемых решений. Если новая фундаментальная система опять будет иметь решения, комбинация которых даст решение с характеристичным числом, большим характеристичных чисел группируемых решений, то с этой новой системой поступаем так же, как с первой. Так как число различных характеристичных чисел не превосходит n, то ясно, что, поступая вышеуказанным способом, мы в конце концов придем к такой фундаментальной системе, что характеристичное число решения, скомбинированного из каких угодно решений этой системы, будет совпадать с характеристичным числом одного из решений, входящих в комбинацию. Полученная таким образом фундаментальная система называется *нормальной*. Характеристичные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нормальной системы решений (среди которых могут быть и равные) называются характеристичными числами системы дифференциальных уравнений. Характеристичное число любого решения этих уравнений равно одному из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Действительно, каждое такое решение является линейной комбинацией решений, входящих в нормальную систему.

Из предыдущих рассуждений следует, что если характеристичные числа какой-нибудь фундаментальной системы решений все различны, то эта система является нормальной. Имеет также место и следующая теорема, дающая признак нормальности фундаментальной системы решений.

Теорема 3. *Всякая фундаментальная система решений, для которой сумма характеристичных чисел всех входящих* *в нее решений достигает своего высшего предела, есть нормальная.*

В самом деле, если бы рассматриваемая фундаментальная система не была нормальной, то из некоторых ее решений можно было бы скомбинировать новые решения с большими характеристичными числами и, следовательно, получить фундаментальную систему с суммой характеристичных чисел большей, чем в рассматриваемой, что противоречит условию.

Допустим, что система уравнений (78.1) подвергнута линейному преобразованию

$$y_s = a_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{sn}(t)\,x_n, \qquad x_s = b_{s1}(t)\,y_1 + \ldots + b_{sn}(t)\,y_n, \tag{78.7}$$

обладающему следующими свойствами: 1) коэффициенты a_{sj} и их производные ограничены; 2) коэффициенты b_{sj} обратного преобразования также ограничены. Преобразования, обладающие этими свойствами, мы будем называть *преобразованиями Ляпунова*. При таких преобразованиях коэффициенты $q_{sj}(t)$ преобразованной системы

$$\frac{dy_s}{dt} = q_{s1}y_1 + \ldots + q_{sn}y_n, \tag{78.8}$$

определяемые формулами

$$q_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{da_{s\alpha}}{dt} b_{\alpha j} + \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} a_{s\alpha} p_{\alpha\beta} b_{\beta j}, \tag{78.9}$$

будут также ограниченными функциями времени.

Теорема 4. *Если систему уравнений* (78.1) *подвергнуть преобразованию Ляпунова, то группа характеристичных чисел преобразованной системы будет тождественной с группой характеристичных чисел первоначальной.*

Доказательство. Пусть $x_s(t)$ — какое-нибудь решение системы (78.1). Тогда формулы (78.7) определят решенне $y_s(t)$ системы (78.8) из этих формул находим:

$$X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} \geqslant X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\},$$

так как характеристичные числа ограниченных функций $a_{sj}(t)$ во всяком случае не менее нуля. С другой стороны, из (78.7) таким же путем находим:

$$X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\} \geqslant X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\},$$

так как функции $a_{sj}(t)$ также ограничены. Это дает:

$$X\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} = X\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}.$$

Таким образом, каждому решению одной системы соответствует решение другой системы с таким же точно характеристичным числом. Отсюда непосредственно следует, что группа характеристичных чисел одной системы совпадает с группой характеристичных чисел другой системы, что и доказывает теорему.

Допустим, что коэффициенты p_{sj} уравнений (78.1) являются постоянными. Пусть λ — корень характеристического уравнения

$$|p_{ik} - \delta_{ik}\lambda| = 0$$

этой системы. Если кратность этого корня равна l, то ему отвечает l независимых решений этой системы вида

$$x_{si}(t) = e^{\lambda t} P_{si}(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{78.10}$$

где P_{si} — некоторые полиномы относительно t с постоянными коэффициентами. Характеристичное число каждого из решений вида (78.10) равно $-\operatorname{Re}(\lambda)$. Таким же будет и характеристичное число решения, являющегося линейной комбинацией решений (78.10). Отсюда следует, что если решения вида (78.10) построить для каждого корня характеристического уравнения, то полученная фундаментальная система решений будет нормальной. Кроме того, получаем:

Характеристичные числа системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами равны взятым с обратными знаками вещественным частям корней ее характеристического уравнения.

Если коэффициенты p_{sj} системы (78.1) являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом ω, то решения этих уравнений имеют также вид (78.10) с той лишь разницей, что величины λ будут являться характеристичными показателями системы, а коэффициенты полиномов P_{sj} будут не постоянными, а периодическими функциями времени, что не влияет на характеристичное число. Поэтому имеем:

Характеристичными числами системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами являются взятые с обратными знаками вещественные части ее характеристических показателей.

§ 79. Правильные и неправильные системы.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристичные числа системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{79.1}$$

с непрерывными и ограниченными при $t \geqslant 0$ коэффициентами p_{sj}. Докажем следующую теорему Ляпунова.

Теорема 1. *Сумма* $S=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ *характеристичных чисел системы* (79.1) *не превосходит характеристичного числа функции.*

$$\exp\int_0^t\sum_{s=1}^n p_{ss}\,dt. \tag{79.2}$$

Доказательство. Пусть $x_{1j},\ldots,x_{nj}$ $(j=1,2,\ldots,n)$ — нормальная система решений уравнений (79.1) и $|x_{sj}|=\Delta(t)$ — ее определитель Вронского. Имеем:

$$\Delta(t)=\Delta(0)\exp\int_0^t\sum_{s=1}^n p_{ss}\,dt.$$

Но, применяя к определителю Δ теоремы о характеристичном числе суммы и произведения, находим:

$$X\left\{e^{\int_0^t\sum p_{ss}\,dt}\right\}=X\{\Delta\}\geqslant\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n,$$

что и доказывает теорему.

Доказанная теорема устанавливает верхний предел для суммы характеристичных чисел системы линейных дифференциальных уравнений. Этот предел, действительно, достигается для многих систем. Это, например, всегда будет иметь место в случае уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, при p_{sj} постоянных имеем:

$$X\left\{\exp\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right\}=-\operatorname{Re}(p_{11}+\ldots+p_{nn})=-(a_1+\ldots+a_n),$$

где a_i — вещественные части корней характеристического уравнения, которые, как было показано в предыдущем параграфе, отличаются лишь знаками от характеристичных чисел.

Можно, однако, привести примеры, когда сумма характеристичных чисел решений не достигает указанного для них в теореме предела. Вот один из таких примеров, указанный Ляпуновым. Система уравнений имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1\cos\ln(t+1)+x_2\sin\ln(t+1),$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_1\sin\ln(t+1)+x_2\cos\ln(t+1).$$

Для нее

$$\exp\int_0^t\sum p_{ss}\,dt=\exp\{(t+1)[\sin\ln(t+1)+\cos\ln(t+1)]-1\}. \tag{79.3}$$

Характеристичное число этой функции равно $-\sqrt{2}$. С другой стороны, эти уравнения имеют фундаментальную систему решений

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= \exp[(t+1)\sin\ln(t+1)],\\
x_{12} &= \exp[(t+1)\cos\ln(t+1)],\\
x_{21} &= \exp[(t+1)\sin\ln(t+1)],\\
x_{22} &= -\exp[(t+1)\cos\ln(t+1)],
\end{aligned}
$$

которая, как нетрудно убедиться, является нормальной. Характеристичное число каждого из этих решений равно -1, и следовательно, их сумма менее характеристичного числа функции (79.3).

Системы линейных уравнений, для которых сумма характеристичных чисел равна характеристичному числу функции (79.2) и для которой, кроме того, выполняется условие

$$X\left\{\exp\left(\int_0^t \sum p_{ss}\,dt\right)\right\} + X\left\{\exp\left(-\int_0^t \sum p_{ss}\,dt\right)\right\} = 0, \tag{79.4}$$

называются, по Ляпунову, *правильными*.

Система уравнений с постоянными коэффициентами является правильной, так как для нее дополнительное условие (79.4), очевидно, также выполняется.

Если правильную систему подвергнуть линейному преобразованию, удовлетворяющему условиям Ляпунова (§ 78), то преобразованная система будет также правильной.

В самом деле, как было показано в предыдущем параграфе, при такого рода преобразовании характеристичные числа и, следовательно, их сумма не меняются. С другой стороны, если x_{sj} — фундаментальная система решений уравнений (79,1), $y_{sj}(t)$ — соответствующая ей фундаментальная система решений преобразованной системы, $D=|a_{sj}|$ — определитель преобразования, то

$$|y_{sj}| = D\,|x_{sj}|, \quad X\{|y_{sj}|\} = X\{|x_{sj}|\}, \tag{79.5}$$

так как по свойству преобразования функция D — ограниченная и не исчезающая. Применяя теорему Лиувилля, находим:

$$\left.\begin{aligned}
|y_{sj}| &= C_1\exp\int_0^t \sum q_{ss}\,dt,\\
|x_{sj}| &= C_2\exp\int_0^t \sum p_{ss}\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{79.6}$$

где C_1 и C_2 — постоянные и q_{sj} — коэффициенты преобразованной системы. Из (79.5) и (79.6) следует, что характеристичное число функции (79.2) также инвариантно относительно рассматриваемого преобразования, что и показывает, что преобразованная система будет также правильной.

Из доказанного предложения вытекает, что всякая система, которая вышеуказанным преобразованием может быть преобразована в систему уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. всякая приводимая (§ 54) система является правильной. В частности, на основании результатов § 54 имеем такое предложение:

Всякая система линейных уравнений с периодическими коэффициентами является правильной.

Для общих систем вида (79.1) нет критериев, которые позволяли бы во всех случаях по виду коэффициентов определить, является ли рассматриваемая система правильной или нет. Эта задача решена лишь для уравнений с треугольной матрицей коэффициентов, т. е. для уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{ss}x_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{79.7}$$

Для этих уравнений имеет место следующее предложение, установленное Ляпуновым, которое мы здесь приводим без доказательства:

Для того чтобы система вида (79.7) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы все функции

$$\frac{1}{t}\int_0^t p_{ss}\,dt \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

стремились к определенным пределам при $t\to\infty$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + p_{ns}y_n = 0, \tag{79.8}$$

сопряженную с (79.1). Имеет место следующая теорема, установленная О. Перроном[1]):

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n$ — характеристичные числа системы (79.1), а $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ — характеристичные числа системы (79.8), ей сопряженной. Для того чтобы система (79.1) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lambda_s + \mu_s = 0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{79.9}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность условия. Допустим, следовательно, что выполняются условия (79.9), и дока-

---

[1]) Perron O., Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme. Mathem. Zeitschrift, т. 31, 1929.

жем, что в этом случае система (79.1) является правильной. Пусть $S=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ и $S'=\mu_1+\ldots+\mu_n$. Применяя к обеим системам теорему 1, получим:

$$\left.\begin{aligned} S &\leqslant X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\},\\ S' &\leqslant X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{79.10}$$

и, следовательно, на основании (79.9)

$$0\leqslant X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}+X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}, \tag{79.11}$$

причем знак равенства возможен лишь тогда, когда оба соотношения (79.10) выполняются со знаками равенства. Но по теореме о характеристичных числах обратных функций

$$X\left\{\exp\left(\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}+X\left\{\exp\left(-\sum\int_0^t p_{ss}\,dt\right)\right\}\leqslant 0,$$

откуда вытекает, что соотношение (79.11) и оба соотношения (79.10) выполняются со знаками равенства. Следовательно, обе системы (79.1) и (79.8) являются правильными.

Допустим теперь, что система (79.1) является правильной, и докажем справедливость соотношений (79.9). Рассмотрим с этой целью какую-нибудь нормальную систему решений $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ ($j=1, 2, \ldots, n$) уравнений (79.1) и пусть $\Delta=|x_{sj}|$ — ее определитель Вронского. Пусть, далее,

$$y_{sj}=\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}, \tag{79.12}$$

где Δ_{sj} — минор элемента x_{sj} определителя Δ. Покажем, что

$$\frac{dy_{sj}}{dt}=-(p_{1s}y_{1j}+p_{2s}y_{2j}+\ldots+p_{ns}y_{nj})\quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{79.13}$$

т. е. что функции y_{sj} образуют фундаментальную систему решений уравнений (79.8).

Имеем очевидные тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i}y_{\alpha j}=\delta_{ij}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Дифференцируя эти тождества по t и учитывая, что функции $x_{\alpha i}$ удовлетворяют уравнениям (79.1), получим:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} p_{\alpha\beta} x_{\beta i} y_{\alpha j} + \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha i} \frac{dy_{\alpha j}}{dt} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (79.14)$$

Отсюда однозначно определяются производные $\frac{dy_{sj}}{dt}$. Чтобы показать, что они совпадают с правыми частями (79.13), достаточно, очевидно, проверить, что равенства (79.14) выполняются тождественно, если в них $\frac{dy_{sj}}{dt}$ заменить правыми частями (79.13). Но, выполняя указанную подстановку, легко убеждаемся, что равенства (79.14) при этом действительно тождественно выполняются.

Пусть

$$\mu_j = X\{y_{1j}, \ldots, y_{nj}\}.$$

Применяя к тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha j} y_{\alpha j} = 1$$

теоремы о характеристичных числах суммы и произведения, получаем

$$\lambda_j + \mu_j \leqslant 0.$$

Но, с другой стороны, те же теоремы дают:

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n - \lambda_j + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\},$$

или, так как система (79.1) по условию правильная,

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant -\lambda_j$$

и, следовательно,

$$\mu_j \geqslant -\lambda_j.$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость (79.9). Кроме того, отсюда находим:

$$S' = \mu_1 + \ldots + \mu_n = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) =$$
$$= -X\left\{\exp\left(\sum \int_0^t p_{ss}\, dt\right)\right\} = X\left\{\exp\left(-\sum \int_0^t p_{ss}\, dt\right)\right\};$$

следовательно, S' достигает своего верхнего предела. Поэтому решения (79.12) образуют нормальную систему и величины μ_j действительно являются характеристичными числами системы (79.8).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Допустим, что рассматриваемая система линейных уравнений имеет каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{79.15}$$

где $H=H(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ — квадратичная форма переменных x_j, y_j, коэффициенты которой являются непрерывными ограниченными функциями времени. Имеет место следующая теорема, установленная К. П. Персидским[1]).

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{2n}$ — *характеристичные числа системы* (79.15). *Для того чтобы эта система была правильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lambda_i+\lambda_{2n-i+1}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{79.16}$$

Доказательство. Система (79.15) более подробно запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial x_n}x_n+\\
&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,dy_1}y_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_n}y_n,\\
\frac{dy_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_1}x_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_n}x_n-\\
&\qquad-\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial y_1}y_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{79.17}$$

Система, ей сопряженная, есть

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial y_1\,\partial x_i}u_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_n\,\partial x_i}u_n+\\
&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\,\partial x_i}v_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial x_n\,\partial x_i}v_n,\\
\frac{dv_i}{dt}&=-\frac{\partial^2 H}{\partial y_1\,\partial y_i}u_1-\ldots-\frac{\partial^2 H}{\partial y_n\,\partial y_i}u_n+\\
&\qquad+\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\,\partial y_i}v_1+\ldots+\frac{\partial^2 H}{\partial x_n\,\partial y_i}v_n.
\end{aligned}\right\} \tag{79.18}$$

Эта система переходит в систему (79.17) при замене u_i на y_i и v_i на $-x_i$. Следовательно, если $u_i(t)$, $v_i(t)$ есть какое-нибудь решение системы (79.18), то функции $x_i=-v_i(t)$, $y_i=u_i(t)$ определяют

[1]) Персидский К. П., О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, сер. матем. и мех., вып. 1, 1947.

решение системы (79.17). Но оба эти решения обладают, очевидно, одинаковыми характеристичными числами. Следовательно, группа характеристичных чисел системы (79.15) совпадает с группой характеристичных чисел системы, ей сопряженной. Поэтому необходимые и достаточные условия правильности (79.9) принимают сейчас вид (79.16), что и доказывает теорему.

Доказанная теорема является, очевидно, обобщением теорем §§ 24 и 57.

Если система (79.15) не является правильной, то, как показал Н. Г. Четаев[1]) и как это вытекает из предыдущих рассуждений, равенства (79.16) заменяются неравенствами

$$\lambda_i + \lambda_{2n-i+1} < 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда и из (79.16) вытекает, что если система (79.15) вне зависимости от того, является ли она правильной или нет, обладает положительными характеристичными числами, то она будет обладать также и отрицательными характеристичными числами. Следовательно, справедливо следующее предложение Н. Г. Четаева: *для того чтобы для системы* (79.15) *имела место устойчивость, необходимо, чтобы все ее характеристичные числа равнялись нулю.* При этом, как показал Н. Г. Четаев, система (79.15) будет необходимо приводимой.

§ 80. Устойчивость характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений.

Результаты предыдущих параграфов показывают, что характеристичные числа систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами играют для них такую же роль, как характеристические показатели для уравнений с периодическими коэффициентами и корни характеристического уравнения для уравнений с постоянными коэффициентами. Эти числа характеризуют порядок роста решений при $t \to \infty$ и имеют поэтому основное значение в вопросах устойчивости. Если все характеристичные числа положительны, то все решения рассматриваемой системы линейных уравнений стремятся к нулю при $t \to \infty$ и, следовательно, для этих уравнений имеет место асимптотическая устойчивость. Напротив, если хотя бы одно из характеристичных чисел отрицательно, то система допускает неограниченные решения и для нее, следовательно, имеет место неустойчивость.

Таким образом, при решении задачи устойчивости для линейных уравнений с переменными коэффициентами необходимо определить знаки ее характеристичных чисел или, по крайней мере, знак наимень-

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.

шего из них. Эта задача представляет очень большие трудности, и до сих пор нет достаточно эффективных методов ее решения. Мы имеем, конечно, в виду те случаи, когда уравнения не разрешаются в замкнутой форме. С частным случаем этой задачи мы уже встречались в предыдущей главе, где были показаны некоторые приемы приближенного определения характеристических показателей уравнений с периодическими коэффициентами. Наиболее эффективными из этих методов, хотя и имеющими ограниченную область применения, были те, в которых так или иначе применялся малый параметр. Сущность всех этих методов заключается в том, что определение характеристических показателей заданной системы сводят к определению этих величин для другой системы (например, для системы с постоянными коэффициентами), которая мало отличается от заданной и для которой эти величины могут быть определены. При этом используется то обстоятельство, что малое изменение коэффициентов в случае, когда эти коэффициенты периодичны, вызывает малое изменение характеристических показателей.

Это свойство характеристичных чисел уравнений с периодическими коэффициентами не имеет, вообще говоря, места в общем случае уравнений с любыми переменными коэффициентами. Можно привести примеры, когда коэффициенты одной системы уравнений сколь угодно мало отличаются при всех $t \geqslant 0$ от коэффициентов другой системы уравнений и в то же время характеристичные числа одной системы отличаются на конечные величины от характеристичных чисел другой системы. Таким образом, возникает прежде всего задача о так называемой *устойчивости* характеристичных чисел систем линейных уравнений. Это понятие может быть определено следующим образом.

Пусть предложена система уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{80.1}$$

одновременно с которой мы будем рассматривать другую систему:

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\, x_n. \tag{80.2}$$

Коэффициенты p_{sj} и φ_{sj} предполагаются ограниченными и непрерывными при $t \geqslant 0$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — характеристичные числа системы (80.1) и $\lambda_1' \geqslant \lambda_2' \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n'$ — характеристичные числа системы (80.2). Примем следующее определение:

Определение. *Характеристичные числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *системы* (80.1) *называются устойчивыми, если для любого сколь угодно малого положительного* ε *можно найти такое положительное число* $\eta(\varepsilon)$, *что характеристичные числа* λ_i'

системы (80.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i' - \lambda_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{80.3}$$

при любом выборе функций φ_{sj}, *удовлетворяющих при* $t \geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{80.4}$$

Если характеристичные числа системы (80.1) устойчивы, то неравенства (80.3) останутся в силе, когда неравенства (80.4) выполняются не при $t \geqslant 0$, а при $t \geqslant T$, где T — сколь угодно большое число. Это непосредственно вытекает из того, что характеристичные числа системы уравнений, определяемые поведением ее решений при $t \to \infty$, зависят лишь от вида коэффициентов этих уравнений при $t \geqslant T$.

Отсюда следует, что если характеристичные числа системы (80.1) устойчивы и если

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_{sj} = 0 \qquad (s, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{80.5}$$

то характеристичные числа системы (80.2) совпадают с характеристичными числами системы (80.1). Действительно, если выполняется (80.5), то можно выбрать настолько большое T, чтобы при $t \geqslant T$ неравенства (80.4) выполнялись со сколь угодно малым η. Следовательно, величина ε в неравенствах (80.3) может быть взята сколь угодно малой, что и доказывает, что $\lambda_i' = \lambda_i$.

§ 81. Некоторые признаки устойчивости характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений[1].

Рассмотрим снова систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{81.1}$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами и мало отличающуюся от нее систему

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\,x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\,x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{81.2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристичные числа системы (81.1) и $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$—характеристичные числа системы (81.2). Обозначим, далее, через $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ нормальную систему решений уравнений (81.1), занумерованную таким образом, что характеристичное число решения x_{sj} есть λ_j. Кроме этой системы решений,

[1]) Малкин И. Г., О характеристических числах систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

рассмотрим другую фундаментальную систему $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ решений уравнений (81.1), определяемую начальными условиями:

$$\bar{x}_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}) \tag{81.3}$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Система решений $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ не будет обязательно нормальной. Характеристичные числа решений $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$ обозначим, соответственно, через μ_j. При этом каждое из чисел μ_j равно одному из чисел λ_i.

Допустим, что система (81.1) такова, что при любом положительном γ выполняются неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j+\gamma)(t-t_0)}, \tag{81.4}$$

если $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, и неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < Ce^{(-\mu_j-\gamma)(t-t_0)}, \tag{81.5}$$

если $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Здесь C — некоторая постоянная, зависящая только от γ и не зависящая от t_0. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (81.4) и (81.5), *то для всякого положительного* ε *можно найти такое* $\eta(\varepsilon)$, *что характеристичные числа* λ_i' *системы* (81.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_i' \geqslant \lambda_i - \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{81.6}$$

при любом выборе функций φ_{sj}, *удовлетворяющих при* $t \geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)| \leqslant \eta. \tag{81.7}$$

Доказательство. 1°. *Замена системы* (81.2) *интегральными уравнениями.* Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t), \tag{81.8}$$

где $f_s(t)$ — некоторые непрерывные функции t. Согласно Коши функции

$$x_s'(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) f_\alpha(\tau)\, d\tau \tag{81.9}$$

определяют частное решение этих уравнений. При этом в методе Коши все постоянные a_α принято считать одинаковыми, и если положить $a_\alpha = a$, то функции (81.9) определяют то решение уравнений (81.8), для которого все неизвестные обращаются в нуль при $t = a$. Однако легко видеть, что функции $x_s'(t)$ будут удовлетворять уравнениям (81.8) при любом выборе постоянных a_α, причем некоторые из этих постоянных можно положить равными бесконечности, если только соответствующие интегралы сходятся. В самом деле, непосредственным дифференцированием, принимая во внимание (81.3), находим:

$$\frac{dx'_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{x}_{s\alpha}(t, t) f_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \frac{d\bar{x}_{s\alpha}(t, \tau)}{dt} f_\alpha(\tau)\, d\tau =$$

$$= f_s(t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} [p_{s1}(t)\bar{x}_{1\alpha}(t, \tau) + \ldots + p_{sn}(t)\bar{x}_{n\alpha}(t, \tau)] f_\alpha(\tau)\, d\tau =$$

$$= f_s(t) + p_{s1}(t) \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{1\alpha}(t, \tau) f_\alpha(\tau)\, d\tau + \ldots +$$

$$+ p_{sn}(t) \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{n\alpha}(t, \tau) f_\alpha(\tau)\, d\tau = f_s(t) + p_{s1}x'_1 + \ldots + p_{sn}x'_n,$$

что и доказывает наше утверждение. Если теперь к решению (81.9) добавить любое частное решение однородных уравнений (81.1), то снова получится решение уравнений (81.8).

Установив это, будем рассматривать в уравнениях (81.2) члены, зависящие от φ_{sj}, как неоднородную часть уравнений (81.8). Тогда мы можем утверждать, что решение интегральных уравнений

$$x_s(t) = x_{sk}(t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\, d\tau \tag{81.10}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

если оно существует, будет являться решением уравнений (81.2). Здесь

$$L_\alpha = \varphi_{\alpha 1}x_1 + \ldots + \varphi_{\alpha n}x_n \tag{81.11}$$

а $a_\alpha = 0$ для тех значений α, для которых $\mu_\alpha \geqslant \lambda_k$, и $a_\alpha = \infty$ при $\mu_\alpha < \lambda_k$.

Изменяя индекс k от 1 до n, мы получим n решений уравнений (81.2).

2°. *Доказательство существования решений интегральных уравнений.* Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Так как характеристичные числа функций x_{sk} не менее λ_k, то

$$|x_{sk}(t)| < Ae^{(-\lambda_k + \varepsilon)t}, \tag{81.12}$$

где A — некоторая постоянная. Покажем, что интегральные уравнения (81.10) допускают решение, удовлетворяющее неравенствам

$$|x_s(t)| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \tag{81.13}$$

если только величина η в неравенствах (81.7) достаточно мала.

Будем искать решение уравнений (81.10) методом последовательных приближений, полагая

$$\left.\begin{aligned} x_s^{(0)} &= x_{sk}(t), \\ x_s^{(m)} &= x_{sk} + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, x_n^{(m-1)}(\tau)\right) d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{81.14}$$

Покажем, прежде всего, что все приближения удовлетворяют неравенствам

$$|x_s^{(m)}| < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \tag{81.15}$$

если η настолько мало, что выполняется неравенство

$$\frac{4n^2\eta C}{\varepsilon} < 1, \tag{81.16}$$

что мы и будем предполагать.

В самом деле, неравенства (81.15) во всяком случае выполняются при $m=0$. Допустим, что они выполняются для $(m-1)$-го приближения, и покажем, что они выполняются также и для m-го приближения.

Пусть α — такой индекс, для которого $\mu_\alpha \geqslant \lambda_k$ и для которого, следовательно, $a_\alpha = 0$. Тогда, полагая в условиях (81.4) $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$ и принимая во внимание (81.11), будем иметь:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right| = \\ &\qquad = \left| \int_{0}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right| < \\ &\qquad < 2n\eta AC \int_{0}^{t} e^{\left(-\mu_\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \cdot e^{(-\lambda_k+\varepsilon)\tau} d\tau = \\ &= \frac{2n\eta AC}{\mu_\alpha-\lambda_k+\frac{\varepsilon}{2}} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}\left(1-e^{\left(\lambda_k-\mu_\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)t}\right) < \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}. \end{aligned} \tag{81.17}$$

При том же значении γ, считая ε настолько малым, что при $\lambda_k > \mu_\alpha$ выполняется неравенство

$$\lambda_k - \mu_\alpha > 2\varepsilon,$$

из (81.5) получим, что для значений α, для которых $\mu_\alpha < \lambda_k$, справедливы оценки

$$\left| \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_{t}^{\infty} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots, x^{(m-1)}\right) d\tau \right| <$$

$$< -2n\eta AC \int_{t}^{\infty} e^{\left(-\mu_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)} \cdot e^{(-\lambda_k+\varepsilon)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{2n\eta AC}{-\mu_\alpha + \lambda_k - \frac{3}{2}\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} < \frac{4n\eta AC}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}. \qquad (81.18)$$

Принимая во внимание (81.12), (81.17), (81.18) и (81.16), из (81.14) находим:

$$|x_s^{(m)}| < Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} + \frac{4n^2\eta CA}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} < 2Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}. \qquad (81.19)$$

Оценим теперь величины $|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}|$. Пусть

$$|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}| < Pe^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}.$$

Тогда, применяя к равенствам

$$x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}| =$$

$$= \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m)} - x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m)} - x_n^{(m-1)}\right) d\tau \right|$$

оценки (81.17) и (81.18), в которых лишь придется заменить $2A$ на P, получим:

$$|x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)}| < \frac{2n^2\eta CP}{\varepsilon} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t} = P\theta e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}, \qquad (81.20)$$

где на основании (81.16)

$$\theta = \frac{2n^2C\eta}{\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Так как на основании (81.15) и (81.12) во всяком случае

$$|x_s^{(1)} - x_s^{(0)}| < 3Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t},$$

то из (81.20) следует, что

$$\left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right| < 3A\theta^m e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что с неограниченным возрастанием m последовательные приближения равномерно стремятся к некоторым функциям $f_s(t)$. Так как все последовательные приближения удовлетворяют неравенствам (81.15), то этим же неравенствам удовлетворяют и функции $f_s(t)$. Остается показать, что полученные таким образом функции $f_s(t)$ удовлетворяют уравнениям (81.10). Имеем:

$$\begin{aligned}\left| x_s^{(m)} - f_s \right| = \left| \left(x_s^{(m)} - x_s^{(m+1)}\right) + \left(x_s^{(m+1)} - x_s^{(m+2)}\right) + \ldots \right| < \\ < \left| x_s^{(m+1)} - x_s^{(m)} \right| + \left| x_s^{(m+2)} - x_s^{(m+1)} \right| + \ldots < \\ < 3Ae^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}\left(\theta^m + \theta^{m+1} + \ldots\right) = \frac{3A\theta^m}{1-\theta} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t},\end{aligned}$$

и поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, f_1 - x_1^{(m)}, \ldots, f_n - x_n^{(m)}\right) d\tau < \frac{3\theta^{m+1}A}{1-\theta} e^{(-\lambda_k+\varepsilon)t}.$$

Правая часть этих неравенств стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, f_1, \ldots, f_n\right) d\tau = \\ = \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{a_\alpha}^{t} \bar{x}_{s\alpha}(t, \tau) L_\alpha\left(\tau, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) d\tau = \\ = \lim_{m\to\infty}\left(x_s^{(m+1)} - x_{sk}\right) = f_s - x_{sk},\end{aligned}$$

что и доказывает, что функции f_s удовлетворяют уравнениям (81.10).

3°. *Оценка характеристичных чисел.* Таким образом, мы получили решение уравнений (81.10), которое является в то же самое время решением и уравнений (81.2). Как уже указывалось, изменяя в (81.10) индекс k от 1 до n, мы получим n решений системы (81.2). Все эти решения образуют фундаментальную систему. Действительно, при $t=0$ полученные решения, как это следует из оценок (81.18), будут сколь угодно мало отличаться от решений x_{sk} системы (81.1), если только η достаточно мало, и следовательно, определитель Вронского полученной системы будет при $t=0$ сколь угодно мало отличаться от определителя Вронского системы x_{sj}, который заведомо отличен от нуля.

Обозначим через $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ характеристичные числа полученной фундаментальной системы решений уравнений (81.1). Из (81.13) вытекает, что

$$\lambda_k^* \geqslant \lambda_k - \varepsilon.$$

Если мы теперь рассмотрим нормальную систему решений уравнений (81.2), то она будет отличаться от полученной фундаментальной системы тем, что некоторые решения последней заменены другими решениями с большими характеристичными числами. Следовательно, характеристичные числа $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ нормальной системы будут и подавно удовлетворять неравенствам (81.6).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Если при выполнении условий предыдущей теоремы система* (81.1) *является правильной, то ее характеристичные числа устойчивы*[1]).

Доказательство. По условию теоремы имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t p_{\alpha\alpha}\,dt\right\}.$$

Далее, на основании теоремы 1 § 79

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_n' \leqslant X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t p_{\alpha\alpha}\,dt\cdot\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\,dt\right\}.$$

Но из (81.7), очевидно, имеем:

$$X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\,dt\right\} \leqslant n\eta.$$

Кроме того, теорема 4 § 77 дает:

$$X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t p_{\alpha\alpha}\,dt\cdot\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\,dt\right\} = \\ = X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t p_{\alpha\alpha}\,dt\right\} + X\left\{\exp\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t \varphi_{\alpha\alpha}\,dt\right\},$$

так как для правильных систем выполняется условие (79.4). Следовательно,

$$\lambda_1' + \ldots + \lambda_n' \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + n\eta. \tag{81.21}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 524).

Положим $\lambda'_i = \lambda_i - \varepsilon + \gamma_i$. Из (81.6) вытекает, что $\gamma_i \geqslant 0$. Поэтому (81.21) дает $\gamma_i \leqslant n(\varepsilon + \eta)$ и, следовательно,

$$\lambda'_i \leqslant \lambda_i + (n-1)\varepsilon + n\eta.$$

Полученные неравенства вместе с (81.6) и доказывают теорему[1]).

Доказанная сейчас теорема аналогична теореме 2, установленной Б. Ф. Быловым[2]).

Рассмотрим частный случай. Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными. Тогда для системы (81.1) условия (81.4) и (81.5), очевидно, выполняются. И так как система с постоянными коэффициентами является правильной, то мы приходим к следующей теореме, установленной К. П. Персидским[3]).

Теорема 3. *Характеристичные числа системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами всегда устойчивы.*

Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными, а коэффициенты φ_{sj} удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_{sj} = 0. \tag{81.22}$$

Тогда, как об этом было указано в предыдущем параграфе, из теоремы 3 непосредственно вытекает справедливость также и следующего предложения:

Теорема 4. *Если коэффициенты* φ_{sj} *являются постоянными и выполняются условия* (81.22), *то характеристичные числа системы* (81.2) *совпадают с характеристичными числами системы* (81.1).

Эта теорема, установленная при некоторых ограничениях Пуанкаре[4]), в общем виде высказана О. Перроном[5]).

§ 82. Критерий положительности характеристичных чисел.

Допустим, что характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{82.1}$$

---

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 525).

[2]) Былов Б. Ф., О характеристичных числах решений систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.

[3]) Персидский К. П., О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, серия матем. и мех., вып. 1, 1947. Метод, которым мы доказывали теоремы 1 и 2, имеет много общего с методом доказательства К. П. Персидского.

[4]) Poincaré A., Sur les équations linéaires aux differentielles ordinaires et aux differences finies Oeuvres, т. 1, Gauthier Villars, 1928.

[5]) Perron O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten. Atti del Congresso Intern. dei Mat., 1928.

все положительны. Тогда, если выполняются условия теоремы 1 предыдущего параграфа, характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt}=(p_{s1}+\varphi_{s1})x_1+\ldots+(p_{sn}+\varphi_{sn})x_n\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\quad (82.2)$$

будут также положительны, по крайней мере, тогда, когда все величины $|\varphi_{sj}(t)|$ не превышают некоторого достаточно малого положительного числа. Знание этого наибольшего предела для функций $|\varphi_{sj}(t)|$ является, очевидно, для практики наиболее существенным. Одну из оценок этого предела дает нижеследующая теорема[1]), в которой условия теоремы 1 § 81 несколько обобщены, а именно, вместо условий (81.4) и (81.5) мы будем предполагать, что для решений $\bar{x}_{sj}(t,\ t_0)$ уравнений (82.1), определяемых начальными условиями $\bar{x}_{sj}(t_0,\ t_0)=\delta_{sj}$, выполняются неравенства

$$|\bar{x}_{sj}(t,\ t_0)|<Me^{-\alpha(t-t_0)}\quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\quad (82.3)$$

где $M\geqslant 1$ и α — некоторые не зависящие от t_0 положительные постоянные.

Теорема. *Если для уравнений* (82.1) *выполняются условия* (82.3), *то характеристичные числа системы* (82.2) *будут положительны при любом выборе функций* $\varphi_{sj}(t)$, *удовлетворяющих при* $t\geqslant 0$ *неравенствам*

$$|\varphi_{sj}(t)|<\frac{\alpha}{mM}\quad (s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\quad (82.4)$$

где $m\leqslant n^2$ — *наибольшее число членов в каждом из выражений*

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{x}_{s\alpha}(t,\ \tau)(\varphi_{\alpha 1}x_1+\ \ldots\ +\varphi_{\alpha n}x_n).\quad (82.5)$$

Доказательство. Пусть $x_s(t)$—произвольное решение уравнений (82.2) с начальными значениями $x_s(0)=C_s$, удовлетворяющими неравенствам

$$|C_s|\leqslant 1\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\quad (82.6)$$

Рассматривая $x_s(t)$ как неизвестные, но вполне определенные функции времени, мы из (82.2) находим, что эти функции необходимо удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x_s(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}C_\alpha\bar{x}_{s\alpha}(t,\ 0)+\\ +\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t\bar{x}_{s\alpha}(t,\ \tau)\left[\varphi_{\alpha 1}x_1(\tau)+\ \ldots\ +\varphi_{\alpha n}x_n(\tau)\right]d\tau,\quad (82.7)$$

[1]) Малкин И. Г., О характеристических числах систем линейных дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

которые, следовательно, имеют решение[1]). Для того чтобы доказать справедливость теоремы, достаточно, очевидно, показать, что найдется такое достаточно большое положительное число A и такое достаточно малое положительное число ε, что при всех $t>0$ будут выполняться условия

$$|x_s(t)| \leqslant A e^{-\varepsilon t}. \tag{82.8}$$

Но, считая $A>1$, мы будем на основании (82.6) иметь, что условия (82.8) выполняются при $t=0$ со знаками неравенства. Следовательно, эти условия будут выполняться, по крайней мере, при $t>0$, достаточно малом. Допустим, что эти условия при некоторых значениях t нарушаются. Тогда должен существовать такой момент времени $t=T$, при котором впервые хотя бы одно из условий (82.8) выполняется со знаком равенства. Так как при $0 \leqslant t \leqslant T$ условия (82.8) во всяком случае выполняются, то, полагая $\varepsilon<\alpha$, из (82.7) на основании (82.6) и (82.3) получим:

$$|x_s(T)| < nMe^{-\alpha T} + mMAQ \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} e^{-\varepsilon\tau}\, d\tau =$$

$$= nMe^{-\alpha T} + \frac{mMAQ}{a-\varepsilon} e^{-\varepsilon T}\left(1 - e^{-(\alpha-\varepsilon)T}\right) < A\left(\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha-\varepsilon}\right) e^{-\varepsilon T},$$

где Q — наибольшее значение, принимаемое функциями $|\varphi_{sj}(t)|$ на отрезке $[0, T]$, а m — число членов в выражениях (82.5). Но на основании (82.4) $Q < \frac{\alpha}{Mm}$, и поэтому число ε может быть взято настолько малым, а число A настолько большим, что будет выполняться неравенство

$$\frac{nM}{A} + \frac{mMQ}{\alpha-\varepsilon} < 1.$$

Но тогда мы будем иметь:

$$|x_s(T)| < Ae^{-\varepsilon T},$$

что противоречит предположению, что при $t=T$ хотя бы одно из условий (82.8) будет выполняться со знаком равенства. Таким образом, условия (82.8) будут выполняться при всех $t>0$, что и доказывает теорему.

Относительно фигурирующей в условиях теоремы величины m заметим следующее. Эта величина, равная наибольшему числу членов, входящих в каждое из выражений (82.5), не превосходит n^2. Но она может быть и меньше, чем n^2. Так, например, если в правую часть

[1]) В отличие от уравнений (81.10) в уравнениях (82.7) все нижние пределы интегрирования приняты равными нулю. Вследствие этого отпадает необходимость в доказательстве существования решения этих уравнений.

каждого из уравнений (82.2) входит только по одному поправочному члену, т. е. если при каждом значении s только одна из функций $\varphi_{s1}, \varphi_{s2}, \ldots, \varphi_{sn}$ отлична от нуля, то $m \leqslant n$. То же самое будет и в том случае, если при каждом s только одна из функций $\bar{x}_{s1}(t, t_0), \ldots, \bar{x}_{sn}(t, t_0)$ отлична от нуля. Вообще, если при каждом s число отличных от нуля функций $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sn}$ не превосходит $p \leqslant n$, а число отличных от нуля функций $\bar{x}_{s1}, \ldots, \bar{x}_{sn}$ не превосходит $q \leqslant n$, то $m \leqslant pq$.

Рассмотрим частный случай. Допустим, что коэффициенты p_{sj} являются постоянными. Пусть λ — наименьшая из величин $\operatorname{Re}(-\lambda_1)$, $\operatorname{Re}(-\lambda_2), \ldots, \operatorname{Re}(-\lambda_n)$, где λ_i — корни характеристического уравнения

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\lambda| = 0. \tag{82.9}$$

Тогда характеристичные числа системы (82.2) будут положительны при выполнении неравенств

$$|\varphi_{sj}(t)| < \frac{\lambda}{mM}. \tag{82.10}$$

В самом деле, в рассматриваемом случае мы можем в условиях (82.3) положить $\alpha = \lambda - \eta$, где η — сколь угодно малое положительное число.

§ 83. Оценка характеристичных чисел методом построения функций Ляпунова.

Рассмотрим снова уравнения (82.1) и (82.2) в предположении, что коэффициенты p_{sj} постоянны. В предыдущем параграфе мы указали предел для величин $|\varphi_{sj}(t)|$, при котором знак наименьшего характеристичного числа системы (82.2) совпадает со знаком наименьшего характеристичного числа системы (82.1). При этом мы предполагали, что указанный знак положителен. Можно указать другой способ оценки интересующего нас предела, который одинаково применим как в случае, когда наименьшее характеристичное число рассматриваемых систем положительно, так и в случае, когда это число отрицательно. Этот способ, предложенный Н. Г. Четаевым, основан на построении для уравнений (82.1) функции Ляпунова[1]).

Допустим сначала, что все корни характеристического уравнения системы (82.1) имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, ее характеристичные числа положительны. Найдем квадратичную форму $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = W(x_1, \ldots, x_n), \tag{83.1}$$

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, стр. 194. Гостехиздат, 1946.

где W—некоторая наперед заданная определенно-положительная квадратичная форма. Форма V при этом получится определенно-отрицательной. Если мы теперь составим производную от V по t в силу уравнений (82.2), то будем иметь:

$$\frac{dV}{dt}=W+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(\varphi_{s1}x_1+\ldots+\varphi_{sn}x_n). \tag{83.2}$$

Если функции $\varphi_{sj}(t)$ таковы, что квадратичная форма

$$W+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(\varphi_{s1}x_1+\ldots+\varphi_{sn}x_n) \tag{83.3}$$

по-прежнему определенно-положительна, то характеристичные числа системы (82.2) будут положительны. Форма (83.3) будет определенно-положительной, если величины $|\varphi_{sj}(t)|$ достаточно малы, и практически никогда не представляет труда определить верхние пределы для $|\varphi_{sj}(t)|$, при которых знакоопределенность (83.3) сохраняется. Эти пределы будут зависеть от выбранной формы W, чем можно воспользоваться для получения для этих пределов возможно больших значений.

Допустим теперь, что характеристическое уравнение системы (82.1) имеет корни с положительными вещественными частями. Тогда, если равенство

$$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_n\lambda_n=0, \tag{83.4}$$

где λ_i — корни характеристического уравнения, не выполняется ни при каких целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, связанных соотношением $m_1+m_2+\ldots+m_n=2$, то форма V, удовлетворяющая уравнению (83.1), по-прежнему существует, но она не будет ни определенно-отрицательной, ни знакопостоянной отрицательной. При этом, если форма (83.3) определенно-положительна, то наименьшее характеристичное число системы (82.2) будет отрицательным. Таким образом, и в рассматриваемом случае предел для $|\varphi_{sj}(t)|$, при котором знаки наименьших характеристичных чисел систем (82.1) и (82.2) совпадают, определяется из условия знакоопределенности формы (83.3).

Если существует система целых неотрицательных m_i, связанных соотношением $m_1+\ldots+m_n=2$, для которых удовлетворяется равенство (83.4), то можно построить форму V, удовлетворяющую уравнению

$$\sum\frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)=\lambda V+W(x_1, \ldots, x_n),$$

где λ — положительное число, W—определенно-положительная форма, и при этом форма V может принимать положительные значения. Если форма (83.3) будет определенно-положительной, то, так же как и в предыдущем случае, наименьшее характеристичное число системы (82.2) будет отрицательным.

Пример. Пусть предложена система

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 + \varphi(t)\, x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_2 + \varphi(t)\, x_2, \tag{83.5}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция времени. Полагая $2V = x_1^2 + x_2^2$, получим:

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda x_1^2 - (\lambda - \varphi)\, x_2^2 + \varphi x_1 x_2.$$

Условие знакоопределенности $\frac{dV}{dt}$ дает:

$$4\lambda(\lambda - \varphi) > \varphi^2$$

или

$$|\varphi| < \left(\sqrt{8} - 2\right)\lambda. \tag{83.6}$$

Если $\lambda > 0$, то можно применить оценку предыдущего параграфа. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11}(t,\ t_0) &= e^{-\lambda(t-t_0)}, & \bar{x}_{21}(t,\ t_0) &= 0, \\ \bar{x}_{12}(t,\ t_0) &= 0, & \bar{x}_{22}(t,\ t_0) &= e^{-\lambda(t-t_0)} \end{aligned}$$

и, следовательно, $M = 1$, $m = 1$, и формула (82.10) дает:

$$|\varphi| < \lambda.$$

Полученный предел несколько выше даваемого формулой (83.6) и является для рассматриваемого случая наибольшим. В самом деле, при $\varphi = \text{const} > \lambda$ наименьшее характеристичное число системы (83.5) отрицательно.

Определение знака наименьшего характеристичного числа при помощи функций Ляпунова может быть иногда проведено и при p_{sj} переменных. Укажем здесь на один прием, предложенный Н. Г. Четаевым[1]) и заключающий вышеизложенный как частный случай.

Допустим, что коэффициенты p_{sj} в уравнениях (82.1) являются непрерывными и ограниченными функциями t. Допустим, что корни уравнения (82.9), которые теперь являются функциями t, ни при каком $t > 0$ не связаны соотношением (83.4). Тогда по-прежнему будет существовать квадратичная форма $V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, коэффициенты которой являются функциями времени, удовлетворяющая уравнению (83.1). Допустим, что коэффициенты p_{sj} таковы, что форма

$$\frac{\partial V}{\partial t} + W(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

---

[1]) Четаев Н. Г., О наименьшем характеристичном числе. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.

будет также определенно-положительной. Тогда, если форма V окажется определенно-отрицательной, что будет, например, иметь место, когда при всех достаточно больших значениях t вещественные части всех корней уравнения (82.9) меньше некоторого отрицательного числа, то невозмущенное движение для уравнений (82.1) будет устойчиво и, следовательно, характеристичные числа этих уравнений будут во всяком случае не менее нуля. Если окажется, что при любом $t > T$, где T — достаточно большое положительное число, форма V может принимать положительные значения, и если, кроме того, она допускает бесконечно малый высший предел, т. е. ее коэффициенты являются ограниченными, то невозмущенное движение будет неустойчиво.

§ 84. Применение метода малого параметра.

Результаты предыдущих параграфов показывают, что при практическом определении знака наименьшего характеристичного числа системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами можно последние в некоторых случаях заменить подходящим образом выбранными постоянными. Если при этом отклонения этих коэффициентов от соответствующих им постоянных не превосходят некоторых установленных в предыдущих параграфах пределов, то знак наименьшего характеристичного числа системы с переменными коэффициентами будет совпадать со знаком наименьшего характеристичного числа системы с постоянными коэффициентами. Этот прием не может быть, очевидно, применен в том случае, когда наименьшее характеристичное число системы с постоянными коэффициентами равно нулю. То же самое будет и в том случае, когда указанное наименьшее характеристичное число будет численно очень мало. В этом случае верхние пределы для отклонений коэффициентов сравниваемых систем, даваемые правилами предыдущих параграфов, будут также очень малыми, вследствие чего метод может потерять всякий практический интерес. В этом параграфе мы изложим один прием[1]), который позволяет для широкого класса систем дать практически пригодные оценки наименьшего характеристичного числа для вышеуказанных критических случаев.

Допустим, что рассматриваемая система имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \mu\left(\varphi^*_{s1}x_1 + \ldots + \varphi^*_{sn}x_n\right) \qquad (84.1)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

где p_{sj} — постоянные, φ^*_{sj} — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени, μ — малый параметр, характеризующий степень отклонения от системы с постоянными коэффициентами. Мы будем

[1]) См. работу автора, цитированную в сноске на стр. 352.

предполагать, что характеристическое уравнение

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0 \tag{84.2}$$

системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{84.3}$$

имеет корни с нулевыми вещественными частями и не имеет корней с положительными вещественными частями. Таким образом, наименьшее характеристичное число системы (84.3) равно нулю. Случай, когда это число отлично от нуля, но очень мало, приводится к рассматриваемому путем отнесения малых поправочных членов к тем членам уравнений (82.1), которые имеют множителем μ. Для упрощения дальнейших выкладок мы предположим, кроме того, что уравнение (84.2) не имеет кратных корней.

Сущность предлагаемого метода решения задачи состоит в том, что систему (84.1) при помощи подходящим образом выбранного линейного преобразования вида

$$y_s = x_s + \mu(f_{s1}x_1 + \ldots + f_{sn}x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{84.4}$$

где $f_{sj}(t)$ — некоторые ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени, приводят к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \mu(a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn}y_n) + \\ + \mu^2(\psi_{s1}x_1 + \ldots + \psi_{sn}x_n). \tag{84.5}$$

Здесь a_{sj} — постоянные, а $\psi_{sj}(t)$ — ограниченные и непрерывные при $t \geqslant 0$ функции времени. Эти функции зависят, вообще говоря, от μ, относительно которого они аналитичны.

Если теперь в системе (84.5) отбросить члены с переменными коэффициентами, то может оказаться, что полученная система с постоянными коэффициентами будет иметь наименьшее характеристичное число, отличное от нуля. Это число будет, конечно, иметь порядок малости μ, но в отличие от системы (84.1) порядок малости переменных коэффициентов будет не меньше μ^2, и поэтому к полученной системе могут быть применены методы предыдущих параграфов [1]).

[1]) Таким образом, сущность метода заключается в повышении порядка малости членов с переменными коэффициентами. Этот метод широко используется в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по нелинейным колебаниям. Для случая периодических коэффициентов этот прием применялся Ляпуновым при решении задачи устойчивости в критических случаях (см. § 67). При этом Ляпунов рассматривал нелинейные уравнения; малыми являлись члены, нелинейные относительно x_s, и задача сводилась к преобразованию уравнений к такому виду, чтобы переменные коэффициенты были у членов сколь угодно высокого порядка.

Чтобы вышеуказанное преобразование действительно могло быть выполнено, необходимо, чтобы коэффициенты φ^*_{sj} удовлетворяли следующим условиям:

1) Существуют такие постоянные α_{sj}, что функции

$$\int_0^t \varphi^*_{sj}\,dt - \alpha_{sj}t \quad (s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

ограничены. При этом условии, очевидно, имеем:

$$\alpha_{sj} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^*_{sj}(t)\,dt.$$

2) Если разность каких-нибудь двух корней ρ_p и ρ_q уравнения (84.2) есть чисто мнимое число ib, то функции

$$\int_0^t \varphi^*_{sj}\cos bt\,dt, \qquad \int_0^t \varphi^*_{sj}\sin bt\,dt$$

ограничены.

Условия 1) выполняются для любых периодических и квазипериодических функций. Для этих же функций будут выполняться и условия 2), если только разложения этих функций не содержат «резонирующих» гармоник $\cos bt$ и $\sin bt$.

Мы переходим теперь к определению преобразования (84.4). С этой целью заменим в правой и левой частях уравнений (84.5) величины y_s их значениями (84.4). Тогда, принимая во внимание (84.1), получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi^*_{s\alpha}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{df_{s\alpha}}{dt}x_\alpha + \mu\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} f_{s\alpha}p_{\alpha\beta}x_\beta =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu\sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu\sum_{\alpha=1}^{n} a_{s\alpha}\left(x_\alpha + \mu\sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}x_\beta\right) + \mu^2(\ldots).$$

Приравнивая члены с первой степенью μ, будем иметь:

$$\frac{df_{sk}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}f_{\alpha k} - \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\alpha k}f_{s\alpha} + a_{sk} - \varphi^*_{sk} \quad (s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{84.6}$$

Мы получили, таким образом, для определения коэффициентов n^2 линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Из этих уравнений функции f_{sk} могут быть определены при помощи квадратур. Необходимо, однако, чтобы эти функции вышли ограниченными, и мы сейчас покажем, что при сделанных допущениях постоянными a_{sk} можно так распорядиться, чтобы это обстоятельство действительно имело место.

С этой целью допустим, что система (84.3) при помощи неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами приведена предварительно к каноническому виду. Так как, по предположению, уравнение (84.2) не имеет кратных корней, то канонический вид системы (84.3) будет следующий:

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь ρ_s — корни уравнения (84.2). Мы будем предполагать, что такое преобразование было выполнено с самого начала и будем придерживаться прежнего обозначения переменных. Указанное предварительное преобразование не только упрощает выкладки, но и облегчает значительно вычисление коэффициентов f_{sj}, и поэтому его действительно целесообразно выполнить.

Уравнения (84.1) имеют теперь вид

$$\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \mu(\varphi_{s1}x_1 + \ldots + \varphi_{sn}x_n), \tag{84.7}$$

где функции φ_{sj} являются линейными комбинациями функций φ^*_{sj} с постоянными коэффициентами и поэтому удовлетворяют тем же условиям, что и функции φ^*_{sj}.

Уравнения (84.6) имеют теперь следующий простой вид:

$$\frac{df_{sk}}{dt} = (\rho_s - \rho_k) f_{sk} + a_{sk} - \varphi_{sk} \qquad (s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{84.8}$$

Для того чтобы эти уравнения имели ограниченное решение, положим

$$a_{ss} = \lim \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_{ss}\,dt \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$a_{sk} = 0 \qquad (s \neq k;\ s,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда функции f_{ss}, определяемые равенствами

$$f_{ss} = \int_0^t (a_{ss} - \varphi_{ss})\,dt$$

согласно условиям, которым удовлетворяют φ_{sj}, будут ограниченными. Покажем, что то же самое будет справедливо и по отношению к функциям f_{sk} $(s \neq k)$, если в уравнениях (84.8), которым они удовлетворяют, надлежащим образом распорядиться постоянными интегрирования. Действительно, обозначая

$$\rho_s - \rho_k = \alpha_{sk} + i\beta_{sk},$$

мы можем положить:

$$f_{sk} = -e^{\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t + i\sin\beta_{sk}t)\int_a^t e^{-\alpha_{sk}t}(\cos\beta_{sk}t - i\sin\beta_{sk}t)\,\varphi_{sk}\,dt, \tag{84.9}$$

где a — произвольная постоянная. Эту постоянную мы положим равной нулю при $\alpha_{sk} \leqslant 0$ и равной ∞ при $\alpha_{sk} > 0$. Тогда мы будем иметь:

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t}\int_0^t e^{-\alpha_{sk}t}\,dt = -\frac{M}{\alpha_{sk}}\left(1 - e^{\alpha_{sk}t}\right), \tag{84.10}$$

если $\alpha_{sk} < 0$, и

$$|f_{sk}| < Me^{\alpha_{sk}t}\int_t^\infty e^{-\alpha_{sk}t}\,dt = \frac{M}{\alpha_{sk}}, \tag{84.11}$$

если $\alpha_{sk} > 0$. Здесь M — верхний предел функций $|\varphi_{sk}|$. Из (84.10) и (84.11) вытекает ограниченность функций (84.9) при $\alpha_{sk} \neq 0$. Ограниченность этих функций при $\alpha_{sk} = 0$ непосредственно вытекает из условия 2), которому удовлетворяют функции φ_{sk}.

Таким образом, мы действительно можем найти ограниченные функции f_{sk}, при которых подстановка (84.4) преобразует систему (84.1) к виду (84.5). При этом входящие в определение функций f_{sk} произвольные постоянные могут быть выбраны по произволу. При μ, достаточно малом, определитель подстановки (84.4) превосходит при любом $t > 0$ некоторую положительную постоянную, вследствие чего характеристичные числа системы (84.1) совпадают с характеристичными числами системы (84.5).

Выбрав функции f_{sk} и постоянные a_{sk} вышеуказанным образом, мы приведем систему (84.7) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \rho_s y_s + \mu a_{ss} y_s + \mu^2(\psi_{s1}y_1 + \ldots + \psi_{sn}y_n). \tag{84.12}$$

Допустим, что наименьшее характеристичное число системы

$$\frac{dy_s}{dt} = (\rho_s + \mu a_{ss})\,y_s \tag{84.13}$$

с постоянными коэффициентами отлично от нуля. Тогда на основании теоремы об устойчивости характеристичных чисел систем с постоянными коэффициентами величину μ можно всегда выбрать настолько малой, чтобы знак наименьшего характеристичного числа системы (84.12) совпадал со знаком наименьшего характеристичного числа системы (84.13). Оценка верхнего предела для $|\mu|$ может быть сделана по методам предыдущих параграфов. При этом если эту оценку делать при помощи функций Ляпунова, то после определения коэффициентов f_{sk} можно уже не производить самого преобразования (84.4) и исходить непосредственно из уравнений (84.7). Действительно, функцией Ляпунова для системы (84.12) будет выражение

$$2V = \sum_{\alpha=1}^{n} (\rho_\alpha + \mu a_{\alpha\alpha}) y_\alpha^2,$$

и следовательно, функцией Ляпунова для системы (84.7) будет выражение

$$2V = \sum_{\alpha=1}^{n} (\rho_\alpha + \mu_{\alpha\alpha}) \left(x_\alpha + \mu \sum_{\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta} x_\beta \right)^2. \tag{84.14}$$

При этом верхний предел значений μ определится из условия, что производная от (84.14) в силу уравнений (84.7) является определенно-положительной [1]).

Пример. Пусть предложена система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu(-1 + 2\sin t)\, x_1 + \mu x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + \mu x_1, \end{aligned}\right\} \tag{84.15}$$

где $\mu > 0$. Характеристическое уравнение соответствующей системы с постоянными коэффициентами имеет, с точностью до величин второго порядка, отрицательные корни $-\mu$ и -1. Однако методы предыдущих параграфов не дают возможности сделать каких-либо заключений о знаках характеристичных чисел полной системы (84.15), так как эти методы дают пределы для модулей переменных коэффициентов, меньшие модулей корней характеристического уравнения. В рассматриваемом случае переменный коэффициент $2\mu \sin t$ может вдвое превосходить модуль корня $-\mu$.

Для системы (84.15) уравнения, определяющие коэффициенты f_{sk} преобразования (84.4)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \mu(f_{11}x_1 + f_{12}x_2), \\ y_2 &= x_2 + \mu(f_{21}x_1 + f_{22}x_2), \end{aligned}\right\} \tag{84.16}$$

имеют вид

$$\frac{df_{11}}{dt} = a_{11} + 1 - 2\sin t, \qquad \frac{df_{22}}{dt} = a_{22},$$

$$\frac{df_{12}}{dt} = f_{12} - 1, \qquad \frac{df_{21}}{dt} = -f_{21} - 1.$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 527).

Эти уравнения имеют такие ограниченные решения

$$f_{11} = 2\cos t, \quad f_{22} = 0,$$

$$f_{12} = 1, \quad f_{21} = -1,$$

причем

$$a_{11} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

Подставляя в (84.16) и выполняя преобразование, получим вместо (84.15) следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\mu y_1 + \mu^2(\psi_{11}y_1 + \psi_{12}y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 + \mu^2(\psi_{21}y_1 + \psi_{22}y_2), \end{aligned}\right\} \qquad (84.17)$$

где

$$\psi_{11} = \frac{1}{\Delta}[1 + 2\sin 2t + \mu(1 + 2\cos t)],$$

$$\psi_{12} = \frac{1}{\Delta}[1 + 2\cos t + \mu(-1 + 4\cos^2 t - \sin 2t + 2\cos t)],$$

$$\psi_{21} = \frac{1}{\Delta}[1 - 2\sin t - \mu],$$

$$\psi_{22} = \frac{1}{\Delta}[-1 + \mu(-1 + 2\sin t - 2\cos t)],$$

$$\Delta = 1 + 2\mu\cos t + \mu^2.$$

Характеристичные числа системы (84.17) будут положительны, если величины $\mu^2|\psi_{sj}|$ достаточно малы. Для оценки верхнего предела этих величин воспользуемся формулой (82.10). В рассматриваемом случае $\lambda = \mu$, $m = 2$ и $M = 1$. Поэтому, для того чтобы характеристичные числа системы (84.17) были положительны, достаточно, чтобы функции $\mu^2|\psi_{sj}|$ удовлетворяли неравенствам $|\mu^2\psi_{sj}| < \frac{\mu}{2}$. Грубая оценка показывает, что это во всяком случае будет выполнено, если $\mu < \frac{1}{9}$.

Примечание. Если коэффициенты ψ_{sj} в преобразованных уравнениях (84.5) обладают такими же свойствами, как и коэффициенты φ^*_{sj}, то эти уравнения можно подвергнуть такому же преобразованию и получить новые уравнения, у которых переменные коэффициенты будут иметь порядок малости μ^3. Аналогичным образом можно продолжать и дальше. В частности, если коэффициенты φ^*_{sj} являются квазипериодическими функциями, то можно построить любое число приближений и привести уравнения (84.1) к виду

$$\frac{dy_s}{dt}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sn}y_n+\sum_{\alpha=1}^{k}\mu^\alpha\left(a_{s1}^{(\alpha)}y_1+\ldots+a_{sn}^{(\alpha)}y_n\right)+ \\ +\mu^{k+1}\left[f_{s1}(t)\,y_1+\ldots+f_{sn}(t)\,y_n\right],$$

где $a_{sj}^{(\alpha)}$ — постоянные. Этот прием использовал И. З. Штокало [1]) для установления критериев устойчивости линейных систем с квазипериодическими коэффициентами. Однако И. З. Штокало не устанавливает пределов для μ и ограничивается доказательством, что при μ, достаточно малом, невозмущенное движение будет устойчиво, если корни характеристического уравнения системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_s}{dt}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sn}y_n+\sum_{\alpha=1}^{k}\mu^\alpha\left(a_{s1}^{(\alpha)}y_1+\ldots+a_{sn}^{(\alpha)}y_n\right)$$

имеют отрицательные вещественные части. Более просто и в более общем виде это предложение доказано Н. П. Еругиным [1]).

В. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ.

§ 85. Теорема об устойчивости по первому приближению.

Мы переходим сейчас к рассмотрению нелинейных уравнений, зависящих явно от t, и к установлению условий, при которых задача устойчивости решается совокупностью членов наинизшего порядка в этих уравнениях. В этом параграфе мы будем рассматривать систему вида

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s^{(m)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\varphi_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{85.1}$$

где $X_s^{(m)}$ — некоторые не зависящие от t формы m-го порядка ($m\geqslant 1$) переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Функции φ_s зависят также от t. Эти функции определены в области

$$t\geqslant 0,\quad |x_s|\leqslant H, \tag{85.2}$$

где они непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_s(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)|<A\,\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^m, \tag{85.3}$$

[1]) Штокало И. З., Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Матем. сб., т. 19, № 2, 1946.

[2]) Еругин Н. П., Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.

причем A — некоторая постоянная. Кроме того, предполагается, что уравнения (85.1) допускают в области (85.2) единственное решение при заданных начальных условиях.

Рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{85.4}$$

которая, вообще говоря, нелинейна. При каких условиях устойчивость для уравнений (85.4) обусловливает устойчивость для полной системы (85.1)? Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой [1]).

Теорема. *Если невозмущенное движение для уравнений* (85.4) *асимптотически устойчиво, то то же самое будет справедливо и для уравнений* (85.1) *при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих неравенствам* (85.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Доказательство. На основании теоремы § 73 существует определенно-положительная функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, производная которой, составленная в силу уравнений (85.4), т. е. выражение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s^{(m)}, \tag{85.5}$$

есть функция определенно-отрицательная. Рассмотрим в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ семейство поверхностей $V = h > 0$. При h, достаточно малом, все эти поверхности замкнуты, окружают начало координат и пересекаются интегральными кривыми уравнений (85.4) снаружи во внутрь. Пусть $V = h^*$ одна из этих поверхностей. Обозначим эту поверхность через S. В силу знакоопределенности выражения (85.5) каждая интегральная кривая системы (84.5) пересекает поверхность S снаружи во внутрь под углом, превосходящим некоторую положительную величину α.

Соединим радиусами-векторами все точки поверхности S с началом координат и уменьшим все эти радиусы-векторы в k раз. Мы получим замкнутую поверхность, окружающую начало координат, подобную поверхности S. Обозначим эту поверхность через S_k. Изменяя k от 1 до 0, мы получим семейство такого рода поверхностей [2]), стягивающихся при $k = 0$ в начало координат.

Пусть A — какая-нибудь точка поверхности S и A_k — соответствующая ей точка поверхности S_k. Так как эти поверхности подобны, то касательные плоскости к ним в точках A и A_k параллельны. С другой стороны, касательные к интегральным кривым уравнений (85.4)

---

[1]) Малкин И. Г., Теорема об устойчивости по первому приближению. ДАН СССР, т. LXXVI, № 6, 1951.

[2]) Эти поверхности, вообще говоря, пересекаются между собой.

в точках A и A_k также параллельны, так как в силу однородности этих уравнений имеем:

$$\left(\frac{dx_s}{dt}\right)_{A_k} = X_s^{(m)}[k(x_1)_A, \ldots, k(x_n)_A] = k^m \left(\frac{dx_s}{dt}\right)_A .$$

Таким образом, интегральная кривая уравнений (85.4), проходящая через точку A_k, пересекает поверхность S_k под таким же углом, под каким интегральная кривая тех же уравнений, проходящая через точку A, пересекает поверхность S. Следовательно, так же как и поверхность S, все поверхности S_k пересекаются интегральными кривыми уравнений (85.4) снаружи во внутрь под углами, превосходящими α.

Рассмотрим теперь полную систему уравнений (85.1). Предположим, что величина A в неравенствах (85.3) настолько мала, что во всей области (85.2) поле касательных к интегральным кривым уравнений (85.1) повернуто относительно поля касательных к интегральным кривым уравнений (85.4) на угол, меньший α. Тогда, очевидно, все интегральные кривые системы (85.1) будут пересекать поверхности S_k снаружи во внутрь, откуда непосредственно вытекает справедливость теоремы [1]).

§ 86. Некоторые особенности задачи устойчивости по первому приближению для неустановившихся движений.

Таким образом, если члены наинизшего порядка в уравнениях возмущенного движения не зависят явно от t, то для устойчивости невозмущенного движения достаточно, чтобы для первого приближения имела место асимптотическая устойчивость. Можно показать, что, по крайней мере, при $n=2$ справедливо и обратное предложение, а именно, невозмущенное движение для уравнений (85.1) будет только тогда устойчиво при любом выборе функций φ_s, имеющих порядок малости выше m, когда для уравнений первого приближения имеет место асимптотическая устойчивость [2]).

Значительно сложнее обстоит дело в случае, когда члены наинизшего порядка в уравнениях возмущенного движения также зависят от t. В этом случае условия асимптотической устойчивости для уравнений первого приближения недостаточно для обеспечения устойчивости для полной системы уравнений. С другой стороны, это условие не является необходимым.

Рассмотрим, например, следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = px_s + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n). \qquad (86.1)$$

---

[1]) См примечание в конце книги (стр. 528).

[2]) Тем более это условие будет необходимым, если функции φ_s удовлетворяют неравенствам (85.3).

К. П. Персидский показал[1]), что, для того чтобы для этой системы уравнений имела место устойчивость при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих в области (85.2) условию

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2), \tag{86.2}$$

где A — некоторая постоянная, достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\exp\int_0^t p\,dt < B, \quad \int_0^t \exp\int_0^\tau p(\tau)\,d\tau < B, \tag{86.3}$$

где B — также постоянная.

В самом деле, полагая

$$y_s = x_s \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right),$$

получим:

$$\frac{dy_s}{dt} = \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right)\varphi_s\left(t,\ y_1\exp\int_0^t p\,dt,\ \ldots,\ y_n\exp\int_0^t p\,dt\right),$$

откуда

$$y_s = c_s + \int_0^t \exp\left(-\int_0^t p\,dt\right)\varphi_s\left(t,\ y_1\exp\int_0^t p\,dt,\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\ y_n\exp\int_0^t p\,dt\right)dt, \tag{86.4}$$

где c_s — начальные значения величин y_s, а следовательно, также и величин x_s.

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Мы будем предполагать, что

$$\varepsilon < \frac{1}{2nA}. \tag{86.5}$$

Выберем η согласно условию

$$\eta < \frac{\varepsilon}{2B}. \tag{86.6}$$

Тогда, если $|c_s| \leqslant \eta$, то при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $|y_s| < \frac{\varepsilon}{B}$. В самом деле, эти неравенства, выполняясь в начальный момент, будут выполняться и при t, достаточно малом.

---

[1]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанском гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

Пусть T — первый момент времени, при котором хотя бы одна из величин $|y_s|$, пусть это будет $|y_k|$, достигает значения $\frac{\varepsilon}{B}$. Тогда из (86.4), (86.2), (86.3), (86.5) и (86.6) получим:

$$|y_k(T)| < \eta + \frac{nA\varepsilon^2}{B^2}\int_0^T \exp\left[\int_0^t p\,dt\right]dt < \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{nA}{B}\varepsilon^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon}{B}\left(\frac{1}{2} + nA\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{B}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{B},$$

что противоречит условию $|y_k(T)| = \frac{\varepsilon}{B}$. Таким образом, при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $|y_s| < \frac{\varepsilon}{B}$, а следовательно, и неравенства $|x_s| < \varepsilon$, что доказывает устойчивость невозмущенного движения для уравнений (86.1).

Но условия (86.3) будут выполнены, если положить

$$p(t) = \frac{2t^3 \sin t \cos t - 3t^2 \cos^2 t}{1 + t^3 \cos^2 t} = -\frac{d}{dt}\ln(1 + t^3\cos^2 t).$$

При таком выборе функции p уравнения первого приближения для системы (86.1) имеют общее решение

$$x_s = \frac{c_s}{1 + t^3 \cos^2 t},$$

из которого следует, что невозмущенное движение для первого приближения устойчиво, но не асимптотически. В то же время невозмущенное движение для полной системы (86.1) будет по доказанному устойчиво при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих условиям (86.3).

Рассмотрим теперь систему уравнений[1])

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]\,x_2 + x_1^2, \tag{86.7}$$

где

$$1 < 2a < 1 + \frac{1}{2}e^{-\pi}. \tag{86.8}$$

Общее решение уравнений первого приближения имеет вид

$$x_1 = c_1 e^{-at}, \quad x_2 = c_2 \exp[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at].$$

Это решение не только асимптотически устойчиво, но обладает положительным характеристичным числом. Тем не менее, невоз-

---

[1]) Perron O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Mathem. Zeitschrift, т. 32, 1930.

мущенное движение для полной системы уравнений (86.7) неустойчиво. Действительно, это общее решение имеет вид

$$x_1 = c_1 e^{-at},$$

$$x_2 = \exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right] \times \\ \times \left(c_2 + c_1^2 \int_0^t \exp\left[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)\right] d\tau\right).$$

Полагая $t+1 = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, где $n > 0$ — целое число, будем иметь:

$$\exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right] = e\cdot e^{(1-2a)t}, \quad (1+t)e^{-\pi} - 1 > 0$$

и следующие оценки:

$$\int_0^t \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau > \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} \exp[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)]d\tau >$$

$$> \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} e^{\frac{1}{2}(\tau+1)}d\tau > \int_{(1+t)e^{-\pi}-1}^{(1+t)e^{-\frac{2}{3}\pi}-1} e^{\frac{1}{2}(t+1)e^{-\pi}}d\tau =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t+1)e^{-\pi}}(t+1)\left(e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi}\right).$$

Поэтому при указанных значениях t второе слагаемое в выражении для x_2 удовлетворяет неравенству

$$c_1^2 \exp\left[(t+1)\sin\ln(t+1) - 2at\right]\int_0^t \exp\left[-(\tau+1)\sin\ln(\tau+1)\right]d\tau >$$

$$> e^{\frac{1}{2}(2+e^{-\pi})}\left(e^{-\frac{2}{3}\pi} - e^{-\pi}\right)e^{\left(1-2a+\frac{1}{2}e^{-\pi}\right)t}$$

и, следовательно, на основании (86.8) с неограниченным возрастанием t неограниченно возрастает. Первое же слагаемое в выражении x_2 с неограниченным возрастанием t стремится к нулю. И это будет справедливо, каковы бы ни были начальные значения $c_1 \neq 0$ и c_2 величин x_1 и x_2. Таким образом, при любых начальных значениях, при которых $c_1 \neq 0$, функция x_2 будет неограниченной и, следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Приведенные примеры показывают, что если уравнения первого приближения зависят явно от t, то условие асимптотической устойчивости решений этих уравнений не является ни необходимым, ни достаточным для устойчивости невозмущенного движения при любом выборе членов высших порядков.

Необходимых и достаточных условий устойчивости по первому приближению неустановившихся движений для общего случая не найдено. Установлен, однако, ряд достаточных критериев, которые мы ниже и излагаем. Мы будем при этом заниматься только критериями устойчивости. Критериями неустойчивости по первому приближению занимался Н. Г. Четаев[1]).

Мы будем также предполагать, что уравнения первого приближения линейны.

§ 87. Критерий Ляпунова.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+\varphi_s(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_n) \qquad (87.1)$$
$$(s=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

где p_{sj} ограничены и непрерывны при $t\geqslant 0$, и соответствующую систему уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n. \qquad (87.2)$$

Первым, установившим достаточные условия устойчивости по первому приближению для уравнений вида (87.1), был сам А. М. Ляпунов. При этом Ляпунов предполагал, что функции φ_s, ограниченные по отношению к t, разлагаются в ряды по степеням переменных $x_1,\ldots,x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Критерий Ляпунова обобщен Э. Коттоном и К. П. Персидским[2]), наложившими на φ_s менее ограничительные условия. Мы докажем теорему Ляпунова в предположении, что функции φ_s удовлетворяют в области

$$|x_s|\leqslant H, \quad t\geqslant 0 \qquad (87.3)$$

неравенствам

$$|\varphi_s(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_n)|<A\,\{|x_1|+\ldots+|x_n|\}^m, \qquad (87.4)$$

где A и m — положительные числа, из которых второе больше единицы. Кроме того, предполагается, как обычно, что уравнения (87.1) допускают в рассматриваемой области единственное решение при заданных начальных условиях. Наложенные на φ_s ограничения зна-

[1]) Четаев Н. Г., Теорема о неустойчивости для правильных систем. ПММ, т. XII, вып. 5, 1944; Четаев Н. Г., О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем. ПММ, т. XII, вып 5, 1948; Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.

[2]) См. работу, цитированную на стр. 367.

чительно слабее, чем у Э. Коттона, и несколько сильнее, чем у К. П. Персидского.

Критерий Ляпунова выражается следующей теоремой.

Теорема. *Если система уравнений первого приближения* (87.2) *правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение для уравнений* (87.1) *асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (87.3) *неравенствам* (87.4).

Доказательство. Обозначим через $x_{sj}(t)$ нормальную систему решений уравнений (87.2), а через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ее характеристичные числа, так что

$$X\{x_{1j}, \ldots, x_{nj}\} = \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{87.5}$$

По условию теоремы все величины λ_j положительны. Обозначим далее через $\bar{x}_{sj}(t)$ фундаментальную систему решений уравнений (87.2), определяемую начальными условиями $\bar{x}_{si}(0) = \delta_{sj}$ (δ_{sj} — символ Кронекера). Тогда, если

$$\lambda = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

то во всяком случае

$$X\{\bar{x}_{sj}\} \geqslant \lambda. \tag{87.6}$$

Пусть $\Delta = |x_{sj}|$ — определитель Вронского решений x_{sj}, а Δ_{sj} — минор этого определителя, соответствующий элементу x_{sj}. Оценим характеристичное число функций Δ_{sj}/Δ. Применяя теоремы о характеристичных числах произведения и суммы, получим:

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant X\{\Delta_{sj}\} + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \lambda_j + X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\}.$$

Но, так как система (87.2) — правильная, то

$$X\left\{\frac{1}{\Delta}\right\} = X\left\{\frac{1}{\Delta(0)} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \int p_{ii} dt}\right\} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

и, следовательно,

$$X\left\{\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right\} \geqslant -\lambda_j. \tag{87.7}$$

Из (87.5), (87.6) и (87.7) находим, что при всех $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\left.\begin{gathered} |\bar{x}_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda+\alpha)t}, \quad |x_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda_j+\alpha)t}, \\ \left|\frac{\Delta_{sj}}{\Delta}\right| < Be^{(\lambda_j+\alpha)t}, \end{gathered}\right\} \tag{87.8}$$

где α — сколь угодно малое положительное число, а $B \geqslant 1$ — некоторая постоянная (зависящая от α).

Сделаем теперь в уравнениях (87.1) замену переменных

$$y_s = x_s e^{\gamma t}, \tag{87.9}$$

где $\gamma < \lambda$. Получим:

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s + e^{\gamma t}\varphi_s(t,\ e^{-\gamma t}y_1,\ \ldots,\ e^{-\gamma t}y_n), \tag{87.10}$$

причем система первого приближения (87.2) перейдет в систему

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s. \tag{87.11}$$

Пусть $\bar{y}_{sj}(t)$ — фундаментальная система решений уравнений (87.11), определяемая начальными условиями $\bar{y}_{sj}(0) = \delta_{sj}$, $y_{sj}(t)$ — нормальная система решений этих уравнений, соответствующая системе x_{sj} уравнений (87.2), $D = |y_{sj}|$ и D_{sj} — минор определителя D, соответствующий элементу y_{sj}. Тогда, очевидно,

$$\bar{y}_{sj} = e^{\gamma t}\bar{x}_{sj}, \quad y_{sj} = e^{\gamma t}x_{sj}, \quad \frac{D_{sj}}{D} = e^{-\gamma t}\frac{\Delta_{sj}}{\Delta},$$

и из (87.8) находим:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{y}_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t},\quad |y_{sj}(t)| < Be^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t},\\ \left|\frac{D_{sj}}{D}\right| < Be^{(\lambda_j+\alpha-\gamma)t}. \end{aligned}\right\} \tag{87.12}$$

Мы будем предполагать, что α настолько мало, что

$$-\lambda_j + \alpha + \gamma \leqslant -\lambda + \alpha + \gamma < 0.$$

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s_1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \gamma y_s + f_s(t),$$

где f_s — произвольные непрерывные функции времени. Частное решение этих уравнений, если его искать по методу вариации произвольных постоянных Лагранжа, имеет вид

$$y_s = \sum_{i,j=1}^{n} y_{sj}\int_0^t \frac{D_{ij}}{D} f_i(t)\,dt.$$

Поэтому общее решение этих уравнений определяется равенствами

$$y_s = \sum_{i=1}^{n} c_i\bar{y}_{si}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} y_{sj}\int_0^t \frac{D_{ij}}{D} f_i(t), \tag{87.13}$$

где c_s — начальные значения величин y_s.

Установив это, рассмотрим произвольное решение $y_s(t)$ уравнений (87.10) с начальными условиями $y_s(t) = y_s^0$. На основании (87.13) мы можем писать:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 \bar{y}_{si}(t) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij} \int_0^t \frac{D_{ij}}{D} e^{\gamma t} \varphi_i [t, e^{-\gamma t} y_1(t), \ldots, e^{-\gamma t} y_n(t)]\, dt. \quad (87.14)$$

Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Мы будем при этом предполагать, что оно настолько мало, что выполняется неравенство

$$n^{m+1} B^2 A \varepsilon^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_j + \alpha - m\gamma|} < \frac{1}{2}. \quad (87.15)$$

Так как $m > 1$, то это будет выполняться при всяком $\varepsilon < h$, где h достаточно мало. Выберем теперь $\eta(\varepsilon)$ согласно неравенству

$$\eta < \frac{1}{2nB} \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} \quad (87.16)$$

и покажем, что если $|y_s^0| \leqslant \eta$, то при всех $t > 0$ будет $|y_s(t)| < \varepsilon$, т. е. что невозмущенное движение относительно переменных y_s устойчиво.

В самом деле, пусть $t = T$ — первый момент времени, при котором хотя бы одна из величин $|y_s|$ достигает значения ε. На всем отрезке $[0, T]$ на основании (87.4) справедливы оценки

$$|\varphi_i(t, e^{-\gamma t} y_1(t), \ldots, e^{-\gamma t} y_n(t))| < n^m A e^{-m\gamma t} \varepsilon^m.$$

Поэтому, принимая во внимание (87.12), из (87.14) найдем:

$$|y_s(T)| < nB\eta e^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t} + \sum_{j=1}^{n} n^{m+1} B^2 A \varepsilon^m e^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t} \int_0^t e^{(\lambda_j+\alpha-m\gamma)t}\, dt = \\ = nB\eta e^{(-\lambda+\alpha+\gamma)t} + n^{m+1} B^2 A \varepsilon^m \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j+\alpha-m\gamma} \left(e^{(2\alpha+\gamma-m\gamma)t} - e^{(-\lambda_j+\alpha+\gamma)t}\right).$$

Так как $m > 1$, то α можно выбрать настолько малой, чтобы $2\alpha + \gamma - m\gamma < 0$. Тогда на основании (87.13) показатели степеней в правых частях полученных неравенств будут отрицательны. Поэтому указанные неравенства принимают вид

$$|y_s(T)| < nB\eta + n^{m+1} B^2 A \varepsilon^m \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_j + \alpha - m\gamma|}$$

и, следовательно, на основании (87.15) и (87.16)

$$|y_s(T)| < \varepsilon,$$

что противоречит условию, что хотя бы одна из величин $|y_s(T)|$ равна α.

Таким образом, невозмущенное движение по отношению к переменным y_s устойчиво. Но тогда оно на основании (87.9) будет асимптотически устойчиво по отношению к переменным x_s, что и доказывает теорему.

Примечание 1. Из устойчивости невозмущенного движения по отношению y_s и равенств (87.9) вытекает, что характеристичное число функций $x_s(t)$ не менее величины γ, которая является любым положительным числом, меньшим наименьшего из характеристичных чисел системы первого приближения.

Примечание 2. Допустим, что система (87.2) не является правильной, так что

$$X\left\{e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t} p_{ii}dt}\right\} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = a > 0.$$

Ляпунов показал, что доказанная теорема останется в силе, если a меньше наименьшего характеристического числа системы (87.2).

§ 88. Другая группа критериев.

Мы рассмотрим сейчас три других критерия устойчивости по первому приближению, отличных от критерия Ляпунова и играющих важную роль в теории критических случаев. Во всех этих трех критериях предполагается, что функции $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ в дифференциальных уравнениях возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{88.1}$$

удовлетворяют в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H, \tag{88.2}$$

неравенствам

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}, \tag{88.3}$$

где A — некоторая постоянная.

Первый из указанных критериев выражается следующей теоремой [1]).

[1]) См. Малкин И. Г., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 2, 1934.

Теорема 1. *Если для уравнений первого приближения*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \tag{88.4}$$

существует функция Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая всем условиям теоремы* II *об асимптотической устойчивости, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Доказательство. Мы воспользуемся для доказательства результатами § 75. Согласно последним (теорема 3) при выполнении условий теоремы существует определенно-положительная квадратичная форма $V^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ с ограниченными коэффициентами, производная которой, составленная в силу уравнений (88.4), равна наперед заданной определенно-отрицательной квадратичной форме. Мы можем, в частности, положить:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2.$$

Составим теперь производную от V по t в силу полной системы уравнений (88.1). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \varphi_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Эта производная, в силу того что коэффициенты формы V ограничены, будет определенно-отрицательной при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих в области (88.2) неравенствам (88.3), если только постоянная A достаточно мала. Следовательно, форма V является функцией Ляпунова для полной системы (88.1), удовлетворяющей всем условиям теоремы II об асимптотической устойчивости. Поэтому невозмущенное движение асимптотически устойчиво, что и доказывает теорему.

Пусть $x_{sj}(t, t_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — фундаментальная система решений уравнений (88.4), определяемая начальными условиями

$$x_{ss}(t_0, t_0) = 1, \quad x_{sj}(t_0, t_0) = 0 \quad (s \neq j)$$
$$(s, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда имеет место также следующий критерий устойчивости по первому приближению, установленный К. П. Персидским[1]).

[1]) См. работу, цитированную на стр. 367.

Теорема 2. *Если для уравнений первого приближения* (88.4) *при любых* $t_0 \geqslant 0$ *и* $t > t_0$ *выполняются неравенства*

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{88.5}$$

где B *и* α — *положительные постоянные, не зависящие от* t_0, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций* φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Согласно результатам § 75 (теорема 1 и 2) этот критерий, который может быть доказан и непосредственно, полностью эквивалентен критерию, даваемому теоремой 1, и поэтому в отдельном доказательстве не нуждается.

Отметим, наконец, еще третий критерий, который также эквивалентен первым двум. Этот критерий установлен О. Перроном[1]) и выражается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если уравнения первого приближения* (88.4), *обладают тем свойством, что при любых непрерывных и ограниченных при* $t \geqslant 0$ *функциях* f_s *система неоднородных уравнений*

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t) \tag{88.6}$$

допускает только ограниченные решения, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любом выборе функций φ_s, *удовлетворяющих в области* (88.2) *неравенствам* (88.3), *если только постоянная* A *достаточно мала.*

Как уже указывалось выше, этот критерий полностью эквивалентен критериям, даваемым теоремами 1 и 2.

Действительно, общее решение уравнений (88.6) имеет вид

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{sj}(t, 0) + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} x_{sj}(t, \tau) f_j(\tau)\, d\tau,$$

где c_j — произвольные постоянные. Если выполняются условия теоремы 1, или, что то же самое, неравенства (88.5), то при любом $t \geqslant 0$ будут справедливы оценки

$$x_s < B(|c_1| + \ldots + |c_n|) + nBM \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, dt =$$
$$= B(|c_1| + \ldots + |c_n|) + \frac{nBM}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}),$$

где M — верхний предел функций $|f_s(t)|$, что и доказывает ограниченность функций x_s. Наоборот, если уравнения (88.6) при любых ограниченных и непрерывных $f_s(t)$ допускают только ограниченные

[1]) См. работу, цитированную на стр. 368.

решения, то можно показать[1]), что выполняются условия теоремы 1, а следовательно, также и теоремы 2.

Доказанными теоремами выделяется определенный класс линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эти уравнения обладают тем свойством, что для них одновременно выполняются условия всех трех теорем, причем если выполняются условия хотя бы одной из этих теорем, то выполняются условия и двух других теорем. Из (88.5) вытекает, что все характеристичные числа этих уравнений положительны.

Частным случаем такого рода уравнений являются уравнения с постоянными коэффициентами, если вещественные части всех корней его характеристического уравнения отрицательны, и уравнения с периодическими коэффициентами, если их характеристические показатели также имеют отрицательные вещественные части[2]).

§ 89. Связь с критерием Ляпунова. Обобщенный критерий.

В предыдущем параграфе установлены три эквивалентных между собой критерия устойчивости по первому приближению. Естественно, возникает вопрос, будут ли указанные критерии эквивалентны критерию Ляпунова или они дают более широкие условия устойчивости по первому приближению, или, напротив, более узкие условия. Нижеприводимые примеры показывают, что ни одно из этих предположений неверно. Может случиться, что для системы первого приближения выполняются условия Ляпунова и не выполняются условия теорем предыдущего параграфа, и наоборот, существуют системы, для которых выполняются условия указанных теорем и не выполняются условия Ляпунова. Чтобы это показать, рассмотрим сначала систему[3])

$$\frac{dx_1}{dt} = -(2 - \sin[\ln(t+1)])\, x_1 = p x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2.$$

Эта система имеет положительные характеристичные числа, но она не является правильной, так как выражение

$$\frac{1}{t}\int_0^t p\,dt = -2 + \frac{1}{2}[\sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1)] + \\ + \frac{1 + \sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1)}{2t}$$

[1]) Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению. Сб. научных трудов Казанск. авиац. ин-та, № 3, 1935.

[2]) См. примечание в конце книги (стр. 528).

[3]) См. работу автора, цитированную в сноске [1]).

не стремится ни к какому пределу при $t \to \infty$, что является (см. § 79) необходимым и достаточным условием правильности такого рода систем. Вместе с тем, производная от функции $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, составленная в силу этих уравнений, равная

$$\frac{dV}{dt} = -[2 - \sin \ln (t+1)]\, x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2,$$

будет определенно-отрицательной, и следовательно, выполняются условия теоремы 1, а также и двух других теорем предыдущего параграфа.

Рассмотрим теперь систему[1]), состоящую из одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -(1 + 2\pi \cos \sqrt{t})\, x = px.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p\, dt = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left[-t - 4\pi \cos \sqrt{t} - 4\pi \sqrt{t} \sin \sqrt{t} + 4\pi\right] = -1,$$

то система правильна и обладает положительным характеристичным числом, равным единице. Следовательно, выполняются условия критерия Ляпунова. Вместе с тем легко показать, что для этого уравнения не выполняются неравенства (88.5) и, следовательно, критерии предыдущего параграфа. Действительно, в рассматриваемом случае

$$x(t, t_0) = \exp\left[-(t - t_0) - 4\pi\left(\cos \sqrt{t} - \cos \sqrt{t_0}\right) - \right.$$
$$\left. - 4\pi\left(\sqrt{t} \sin \sqrt{t} - \sqrt{t_0} \sin \sqrt{t_0}\right)\right].$$

Полагая $t_0 = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2$ и $t = (2k\pi + \pi)^2 > t_0$, где k — целое число, будем иметь:

$$x_s(t, t_0) = \exp\left[-\left(4k\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\frac{\pi}{2} + 4\pi + 4\pi\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] > e^{6k\pi^2}.$$

С неограниченным возрастанием k правая часть этого неравенства неограниченно возрастает и, следовательно, условия (88.5) не выполняются.

Приведем, наконец, еще один критерий устойчивости по первому приближению, указанный автором[2]). Этот критерий утверждает, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво при любом

---

[1]) Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937.

[2]) Малкин И. Г., Об устойчивости движения по первому приближению. ДАН, т. XVIII, № 3, 1938.

выборе функций $\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих в области (88.2) условию (87.4), если вместо неравенств (88.5), фигурирующих в теореме 2 предыдущего параграфа, будут выполняться при всех $t_0 > 0$ и $t > t_0$ неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Be^{\beta t_0}e^{-\alpha(t-t_0)},$$

где B и α — не зависящие от t_0 положительные постоянные, а β — также положительная постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$\beta < (2m-1)\alpha.$$

Г. ТЕОРИЯ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ.

§ 90. Постановка задачи. Основные определения.

В предыдущем разделе установлен ряд теорем, дающих достаточные условия устойчивости по первому приближению. Эти условия, являясь достаточными, не являются необходимыми, и поэтому при невыполнении их еще не следует делать заключения, что для решения задачи устойчивости необходимо исследовать члены более высоких порядков в уравнениях возмущенного движения. Однако можно указать такие уравнения, для которых исследование членов более высоких порядков является безусловно необходимым. Такими будут, очевидно, уравнения следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &(i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (90.1)$$

Здесь Y_i и X_s — аналитические функции переменных $y_1, \ldots, y_k$, $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений, а также коэффициенты q_{ij}, r_{sj} и p_{sj} являются непрерывными и ограниченными функциями времени. При этом коэффициенты p_{sj} таковы, что для линейной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (90.2)$$

выполняется какой-нибудь критерий устойчивости по первому приближению, так что для нелинейной системы, которая получится из (90.2) путем прибавления нелинейных членов, зависящих только от $x_1, \ldots, x_n$, будет иметь место асимптотическая устойчивость. В дальнейшем мы будем предполагать, что для системы (90.2) выполняются критерии § 88. Это будет необходимо для справедливости излагаемых ниже результатов.

Коэффициенты q_{ij}, напротив, таковы, что задача устойчивости для уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k), \tag{90.3}$$

где φ_i — нелинейные добавки, зависящие только от $y_1, \ldots, y_k$, не решается первым приближением. Таким будет, например, случай, когда коэффициенты q_{ij} постоянны, а характеристическое уравнение системы (90.3) имеет корни с вещественными частями, равными нулю, и не имеет корней с положительными вещественными частями.

Все случаи, для которых задача устойчивости не решается членами первого порядка, мы будем называть *критическими*. В настоящем разделе мы устанавливаем несколько основных предложений общего характера о решении задачи устойчивости для критических случаев и применяем затем эти предложения к некоторым критическим случаям для установившихся и периодических движений.

Отбросим в системе $(n+k)$-го порядка (90.1) последние n уравнений, а в первых k уравнениях отбросим все члены, зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, и рассмотрим полученную таким образом систему k-го порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{90.4}$$

Эту систему мы будем в дальнейшем называть «укороченной».

Допустим, что задачу устойчивости для «укороченной» системы удалось разрешить. Возникает вопрос: при каких условиях этим самым решается задача устойчивости и для полной системы (90.1)? В главе IV, где были рассмотрены два простейших критических случая для установившихся движений, было показано, что в этих простых случаях ответ на задачу устойчивости для полной системы совпадает с ответом на задачу устойчивости для «укороченной» системы, если последняя решается конечным числом членов и если выполняются следующие условия: 1) все коэффициенты r_{sj} равны нулю; 2) разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами достаточно высокого порядка.

Это дало возможность свести решение задачи устойчивости полной системы к решению задачи для «укороченной» системы (состоящей в рассмотренных случаях из одного или двух уравнений) путем преобразования полной системы к такому виду, для которого условия 1) и 2) выполняются. Эти результаты удалось, однако, получить путем действительного решения задачи устойчивости для «укороченной» системы и притом вполне определенным методом — построением функций Ляпунова, причем это удалось сделать лишь только потому, что для «укороченной» системы удалось построить функции Ляпунова очень простого вида, а именно — целые рациональные. Использованные методы дали возможность надеяться, что аналогичные результаты удастся получить и в других критических случаях, если для «укороченной» системы удастся построить такие же простые функции Ляпунова. Таким путем действительно удалось исследовать[1]) некоторые критические случаи, не рассмотренные Ляпуновым. Однако такой метод является очень неудобным и сложным, так как построение функций Ляпунова представляет иногда непреодолимые трудности, даже в тех случаях, когда заранее известно решение задачи устойчивости для «укороченной» системы. Более того, нет вообще уверенности, что такие простые функции Ляпунова действительно существуют. Поэтому, естественно, возникает вопрос: всегда ли вообще задача устойчивости для полной системы при выполнении условий 1) и 2) решается «укороченной» системой? Можно показать[2]), что ответ на поставленный вопрос получается всегда утвердительный, если задача устойчивости для «укороченной» системы решается конечным числом членов. Это предложение доказывается в следующем параграфе. В § 92 показывается, что полная система может быть всегда преобразована к такому виду, для которого условия 1) и 2) выполняются. Результатами этих двух параграфов задача устойчивости для системы $(n+k)$-го порядка с k критическими переменными всегда приводится к исследованию системы k-го порядка, если задача решается конечным числом членов.

Последнее понятие требует уточнения. Рассмотрим произвольную систему какого-нибудь r-го порядка

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i^{(m)}(t, z_1, \ldots, z_r) + \ldots + Z_i^{(N)}(t, z_1, \ldots, z_r) + \\ + \varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r) \quad (90.5)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

определенную в области

$$t \geqslant 0, \quad |z_i| \leqslant H. \quad (90.6)$$

Здесь $Z_i^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных $z_1, \ldots, z_r$, коэффициенты которых являются непрерывными и ограниченными функциями времени, а φ_i обозначают совокупность всех членов порядка выше N.

Мы примем следующие определения.

[1]) Малкин И. Г., Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 7, 1937; Каменков Г. В., Об устойчивости движения. Сб. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 9, 1939.

[2]) Малкин И. Г., Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, т. VI, вып. 6, 1942.

Определение 1. *Невозмущенное движение* $z_1 = z_2 = \ldots = z_r = 0$ *называется устойчивым вне зависимости от вида членов порядка выше, чем* N, *если для всякого положительного* ε, *как бы мало оно ни было, существует такое положительное число* $\eta(\varepsilon, A)$, *зависящее только от* ε *и* A, *что для всех решений уравнений* (90.5), *начальные значения* z_i^0 *которых в начальный момент времени* $t = 0$ *выбраны согласно условиям*

$$|z_i^0| < \eta(\varepsilon, A),$$

выполняются при всех $t > 0$ *неравенства*

$$|z_i| < \varepsilon$$

при всяком выборе функций $\varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r)$, *удовлетворяющих в области* (90.6) *условиям*

$$|\varphi_i(t, z_1, \ldots, z_r)| < A\{|z_1| + \ldots + |z_r|\}^{N+1},$$

где N — *некоторая постоянная.*

Определение 2. *Невозмущенное движение* $z_1 = \ldots = z_r = 0$ *называется неустойчивым вне зависимости от членов порядка выше, чем* N, *если при тех же условиях относительно функций* φ_i *существует положительное число* $\varepsilon(A)$, *зависящее только от* A, *что внутри любой сколь угодно малой* η-*окрестности точки* $z_1 = \ldots = z_r = 0$ *существует, по крайней мере, одна система величин* $\alpha_1(A, \eta), \ldots, \alpha_r(A, \eta)$, *зависящих только от* A *и* η, *что хотя бы одна из величин* $|z_i|$ *для решения уравнений* (90.5), *определенного начальными условиями*

$$z_i^0 = \alpha_i,$$

достигает в некоторый момент времени значения ε.

§ 91. Первая основная теорема о критических случаях.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения $(n+k)$-го порядка следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + r_{i1}x_1 + \ldots + r_{in}x_n + \\ &\qquad\qquad + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &(i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \quad (91.1)$$

Здесь Y_i и X_s — ряды по степеням переменных $y_1, \ldots, y_k$, $x_1, \ldots, x_n$, сходящиеся в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H, \quad |y_i| \leqslant H \qquad (91.2)$$

и начинающиеся членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих рядов, а также коэффициенты q_{ij}, r_{ij} и p_{sj} суть ограниченные и непрерывные функции времени. Коэффициенты p_{sj} таковы, что для системы линейных уравнений (90.2) выполняются критерии устойчивости по первому приближению, установленные в § 88. Мы можем, следовательно, предположить, что существует определенно-положительная квадратичная форма $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты которой являются ограниченными функциями времени, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2. \tag{91.3}$$

Для самой же формы V в силу ее знакоопределенности мы можем писать

$$V(t, x_1, \ldots, x_n)\geqslant a^2\sum_{s=1}^{n}x_s^2, \tag{91.4}$$

где a — вещественная постоянная.

Рассмотрим далее «укороченную» систему

$$\frac{dy_i}{dt}=q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k+Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)=$$
$$=Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) \tag{91.5}$$
$$(i=1, 2, \ldots, k)$$

и докажем следующую теорему.

Теорема. *Допустим, что невозмущенное движение $y_1=\ldots=y_k=0$ для «укороченной» системы устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше, чем N. Тогда, если разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами порядка не ниже $N+1$, то и невозмущенное движение $y_1=\ldots=y_k=x_1=\ldots=x_n=0$ для полной системы (91.1) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво*[1].

Доказательство. 1°. Для упрощения доказательства[2] мы сделаем относительно уравнений (91.1) некоторые дополнительные ограничения. Мы предположим, прежде всего, что все коэффициенты r_{ij}

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 529).

[2]) Это упрощение сделано В. Н. Постниковым (Постников В. Н., К теории устойчивости движения в критических случаях. Диссертация, 1942). Он же исправил и неточность в формулировке теоремы, данной в работе автора (см. сноску [2]) на стр. 381), где вместо условия, что разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка, указывалось, что это разложение должно начинаться членами не ниже N-го порядка.

равны нулю. Это ограничение не существенно, и его легко добиться простым преобразованием переменных. Второе ограничение заключается в следующем.

Так как коэффициенты q_{ij} ограничены, то мы можем писать:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} y_i(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)\right| \leqslant b^2(y_1^2+\ldots+y_k^2), \tag{91.6}$$

где b — некоторая вещественная постоянная. Мы будем предполагать, что эта постоянная настолько мала, что квадратичная форма

$$-\sum_{s=1}^{n} x_s^2+2Nb^2V \tag{91.7}$$

определенно-отрицательна. Как мы увидим ниже, во всех тех случаях, для которых мы будем применять теорему, это ограничение будет выполняться.

При этом ограничении, мы можем писать неравенство

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n-Nx_s\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)}{y_1^2+\ldots+y_k^2}\right)\leqslant$$
$$\leqslant -\alpha^2\sum_{s=1}^{n} x_s^2, \tag{91.8}$$

где α — вещественная постоянная, справедливое при любых значениях $t\geqslant 0$, y_i и x_s. Действительно, в силу (91.3) и (91.6) левая часть этого неравенства не превосходит формы (91.7), которая, по условию, определенно-отрицательна.

Сделаем теперь преобразование переменных [1])

$$x_s=r^N\xi_s, \quad r=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_k^2}. \tag{91.9}$$

Тогда первая группа уравнений (91.1) примет вид

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k)+r^N\Psi_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{91.10}$$
$$(i=1, 2, \ldots, k),$$

где функции Ψ_i в силу сделанного предположения, что все коэффициенты r_{ij} равны нулю, удовлетворяют тождествам

$$\Psi_i(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n)\equiv 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k). \tag{91.11}$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 529).

Для второй группы уравнений (91.1) имеем:

$$\frac{d\xi_s}{dt} r^N + N\xi_s r^{N-2} \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{dy_i}{dt} =$$
$$= r^N (p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n) + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 r^N, \ldots, \xi_n r^N)$$

или, принимая во внимание, что разложения функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка,

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i (q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k}{r^2} +$$
$$+ \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{91.12}$$

где функции Ξ_s также удовлетворяют тождествам

$$\Xi_s(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{91.13}$$

2°. Пусть $\varepsilon < H$ — произвольное положительное число. Обозначим через ξ наибольшую из величин $|\xi_s|$, а через $l(\varepsilon)$ — некоторое отличное от нуля положительное число, меньшее точного нижнего предела формы V при условии $H > \xi \geqslant \varepsilon$. В силу (91.4) такое число $l(\varepsilon)$ существует. Итак,

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) > l(\varepsilon) > 0 \quad \text{при} \quad H > \xi \geqslant \varepsilon. \tag{91.14}$$

Рассмотрим теперь множество всевозможных значений переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанных соотношением

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon). \tag{91.15}$$

Для этого множества выполняется, очевидно, неравенство $|\xi_s| < \varepsilon$. Кроме того, так как коэффициенты формы V ограничены, то будет также выполняться условие

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 \geqslant \lambda^2(\varepsilon) \quad \text{при} \quad V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon), \tag{91.16}$$

где $\lambda^2(\varepsilon)$ — достаточно положительное число.

Установив это, вычислим производную от функции $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ по времени в силу уравнений (91.12) при условии (91.15). Будем иметь:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \right.$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \left(p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i (q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k)}{r^2} + \right.$$
$$\left. \left. + \Xi_s \right) \right\}_{V=l}.$$

Но на основании (91.8) и (91.16)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} \leqslant -\alpha^2\lambda^2 + \left\{\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)\right\}_{V=l}. \quad (91.17)$$

Поэтому, принимая во внимание тождества (91.13), мы видим, что всегда найдется такое положительное число $h(\varepsilon)$ (зависящее только от ε), что при всех значениях величин $|y_i|$, удовлетворяющих неравенствам $|y_i| \leqslant h(\varepsilon)$, выражение (91.17) будет отрицательным. Мы будем предполагать, что во всяком случае $h(\varepsilon) < \varepsilon$. Таким образом,

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} < 0 \text{ при } |y_i| \leqslant h(\varepsilon) < \varepsilon. \quad (91.18)$$

Построенные в этом пункте области и поверхности, их ограничивающие:

$$\xi = H, \ \xi = \varepsilon, \ \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 = \lambda^2(\varepsilon), \ y = h(\varepsilon), \ V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon),$$

$$\xi = \max(|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|, \qquad y = \max(|y_1|, \ldots, |y_k|),$$

для наглядности дальнейших рассуждений полезно изобразить схематически так, как это сделано на рис. 20. Здесь вертикальная ось изображает k-мерное многообразие точек, где $x_1 = \ldots = x_n = 0$, y_i — любые, а горизонтальная ось — n-мерное многообразие, где $y_1 = \ldots = y_k = 0$, x_s — любые.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. Поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$ охватывает многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$, которое, таким образом, оказывается внутри полости, ограниченной этой поверхностью. Поверхности $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$, $y = h(\varepsilon)$ в совокупности ограничивают некоторые замкнутые полости. Вследствие неравенства (91.18) интегральные кривые $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1) пересекают при этом поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$ внутрь, т. е. в сторону убывания функции V. При этом число $h(\varepsilon)$ будем считать столь малым, что область $y \leqslant h(\varepsilon)$, $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$ лежит в области $|x_s| < \varepsilon$.

3°. Допустим сначала, что для «укороченной» системы невозмущенное движение устойчиво. Покажем, что тогда и для полной системы невозмущенное движение будет также устойчиво. Заменим с этой целью в уравнениях (91.10) величины ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими при всех $t \geqslant 0$ неравенствам

$$|\xi_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \quad (91.19)$$

Тогда получим систему уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^{(01)}(t, y_1, \ldots, y_k) + Y_i^{(02)} + \ldots$$

$$\ldots + Y_i^{(0N)} + \overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k). \quad (91.20)$$

где $Y_i^{(0l)}$ — формы l-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$, представляющие собой совокупности членов l-го порядка в разложениях функций $Y_i^{(0)}(t, y_1, \ldots, y_k)$ и

$$\overline{Y}_i = Y_i^{(0,\,N+1)} + Y_i^{(0,\,N+2)} + \ldots + r^N \Psi_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

В силу (91.11), очевидно, имеем:

$$|\overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k)| < A\{|y_1| + \ldots + |y_k|\}^{N+1}, \qquad (91.21)$$

где A — некоторая постоянная, зависящая, очевидно, только от структуры уравнений (91.10) и не зависящая от того или иного частного

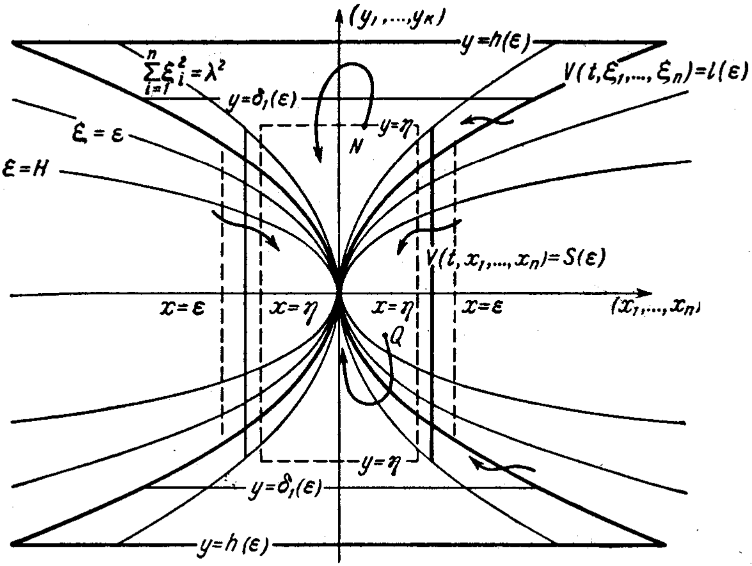

Рис. 20.

выбора функций ξ_s. Согласно условию об устойчивости для «укороченной» системы вне зависимости от членов порядка выше N существует положительная постоянная $\delta_1(h(\varepsilon), A)$, такая, что все решения уравнений (91.20), удовлетворяющие в начальный момент $t=0$ условиям

$$|y_i^0| \leqslant \delta_1(h(\varepsilon), A) \qquad (91.22)$$

будут при всех $t > 0$ удовлетворять условиям

$$|y_i(t)| < h(\varepsilon). \qquad (91.23)$$

При этом постоянная δ_1 будет зависеть только от $h(\varepsilon)$ и, следовательно, в конечном счете только от ε, т. е. $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, Допустим теперь, что в уравнениях (91.10) величины ξ_s заменены функциями времени, удовлетворяющими неравенствам (91.19) не при всех значениях t, а только при значениях t, не превосходящих некоторого числа T. Тогда все решения уравнений (91.20), удовлетворяющие начальным условиям (91.22), будут удовлетворять неравенствам (91.23), по крайней мере, при всех значениях t, лежащих на отрезке $[0, T]$.

В самом деле, пусть $\xi_s = f_s(t)$ будут указанные функции. Заменим в уравнениях (91.10) величины ξ_s функциями $\xi_s = \varphi_s(t)$, определенными следующим образом:

$$\varphi_s(t) = f_s(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\varphi_s(t) = \varphi_s(T) = \text{const} \quad \text{при} \quad t > T.$$

Тогда уравнения (91.10) примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^{(01)} + \ldots + Y_i^{(0N)} + \overline{Y}_i^*(t, y_1, \ldots, y_k), \tag{91.24}$$

причем

$$\overline{Y}_i^*(t, y_1, \ldots, y_k) = \overline{Y}_i(t, y_1, \ldots, y_k) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Так как функции $\varphi_s(t)$ удовлетворяют условиям (91.19) при всех $t \geqslant 0$, то для всех решений уравнений (91.24), для которых справедливо (91.22), будет при всех $t > 0$ выполняться (91.23). Но решения уравнений (91.24) на отрезке $[0, T]$ совпадают с решениями уравнений (91.20), и мы, следовательно, приходим к следующему выводу: если в уравнениях (91.10) заменить все величины ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими на отрезке $[0, T]$ условию (91.19), то все решения полученной таким образом системы уравнений, удовлетворяющие начальным условиям (91.22), будут на отрезке $[0, T]$ удовлетворять неравенствам (91.23). Если условия (91.19) выполняются при всех $t \geqslant 0$, то и неравенства (91.23) будут выполняться при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнений (91.10) и (91.12), для которого в начальный момент $t = 0$ выполняются условия

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \quad |y_i^0| \leqslant \eta \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, k). \tag{91.25}$$

Мы будем при этом предполагать, что

$$\eta < \delta_1(\varepsilon) \tag{91.26}$$

и что постоянная η настолько мала, что выполняется неравенство

$$V(0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) < l(\varepsilon). \tag{91.27}$$

Покажем, что все функции $\xi_s(t)$ и $y_i(t)$ будут при всех $t > 0$ удовлетворять неравенствам

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \tag{91.28}$$

$$|y_i(t)| < \varepsilon. \tag{91.29}$$

Рассмотрим сначала функции ξ_s. Для этих функций условия (91.28), выполняясь при $t=0$, будут выполняться при t, достаточно малом. Пусть T—первый момент времени, для которого $\xi = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\} = \varepsilon$. Тогда на основании (91.14) будем иметь:

$$V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] > l(\varepsilon).$$

Отсюда на основании (91.27) заключаем, что в интервале $(0, T)$ должен существовать такой момент времени $t = T'$, что одновременно будут выполняться условия

$$V = l, \quad \left[\frac{dV}{dt}\right]_{V=l} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t = T'. \tag{91.30}$$

Но во всем интервале $(0, T)$, несомненно, выполняется условие (91.19). Следовательно, на основании предыдущего во всем этом интервале будут выполняться неравенства (91.23), так как число η выбрано согласно (91.26), а функции $y_i(t)$ будут, очевидно, одним из решений уравнений (91.20), которые получатся из (91.10), если в последних величины ξ_s заменить рассматриваемыми сейчас функциями $\xi_s(t)$. Поэтому на основании (91.18) во всем интервале $(0, T)$ будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{V=l} < 0,$$

что противоречит (91.30).

Таким образом, приходим к заключению, что неравенства (91.28) будут выполняться при всех $t > 0$. Но тогда при всех $t > 0$ будут выполняться и неравенства (91.23), а следовательно, и подавно неравенства (91.29), так как $h(\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво по отношению к переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n, y_1, \ldots, y_k$.

Таким образом установлен следующий факт. Траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1), начавшаяся в любой точке $N(x_s(t_0), y_i(t_0))$ в области $|y_i(t_0)| \leqslant \eta$, $|\xi_s| \leqslant \eta$, не покидает область, ограниченную поверхностями

$$y = h(\varepsilon), \quad V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$$

(см. рис. 20). При этом величины $\xi_s(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ не превосходят H и, следовательно, использование в рассуждениях преобразования (91.9) является законным. Итак, пока доказана лишь условная устойчивость решения $x_s = 0$, $y_i = 0$ относительно возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ из области $V(t_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$. Поэтому для завершения доказательства первого утверждения теоремы следует еще показать, что из такой условной устойчивости в данном случае вытекает устойчивость движения $x_s = 0$, $y_i = 0$ при любых малых возмущениях $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ из полной окрестности[1]) точки $x_s = 0$, $y_i = 0$.

Сделаем это. Вернемся снова к записи уравнений возмущенного движения в форме (91.1). Рассмотрим поверхности

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = S.$$

Это — цилиндрические поверхности в пространстве $\{x_s, y_i\}$, охватывающие многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$ (см. рис. 20). Рассматриваемые поверхности перемещаются со временем, но для любого $S > 0$ можно указать два числа $\mu_1(S)$ и $\mu_2(S)(\mu_1 < \mu_2)$ таких, что при всех t поверхность $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ лежит между поверхностями $x = \mu_1(S)$, $x = \mu_2(S)$ $(x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, причем $\lim \mu_2 = \lim \mu_1 = 0$ при $S \to 0$. Это обстоятельство является следствием того, что квадратичная форма V определенно положительна и допускает бесконечно малый высший предел.

Теперь можно выбрать достаточно малое положительное число $S(\varepsilon)$, которое удовлетворяет следующим трем условиям:

1) число $\mu_2[S(\varepsilon)] < \varepsilon$;

2) при $S \leqslant S(\varepsilon)$ поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ пересекаются с поверхностью $\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 = \lambda^2(\varepsilon)$ (а следовательно, и с поверхностью $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$) при

$$|y_i| < \delta_1(\varepsilon); \tag{α}$$

3) на поверхностях $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ при $S \leqslant S(\varepsilon)$ и при условии

$$(y_1^2 + \ldots + y_k^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt[2N]{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{\lambda^2}} \tag{β}$$

выполняется неравенство

$$\frac{dV}{dt} < 0,$$

где $\frac{dV}{dt}$ — производная функции V в силу уравнений (91.1).

Действительно, первое и второе условия удовлетворяются при малом $S(\varepsilon)$ потому, что при $S \to 0$ поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S$ равномерно стягиваются к многообразию $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Третьему условию можно удовлетворить по свойствам функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнениях (91.1). В самом деле, разложе-

[1]) На это существенное обстоятельство обратил внимание Н. П. Еругин. См. его рецензию о книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения» в Вестнике ЛГУ № 5, 1953.

ние функции $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами порядка не ниже $(N+1)$, поэтому при условии (β) и при достаточно малых x_s имеем

$$|X_s| \leqslant \alpha(|x_1| + \ldots + |x_n|), \tag{γ}$$

где постоянная $\alpha > 0$ сколь угодно мала, если величины x_s достаточно малы. Из условия (γ) обычными приемами выводится неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$, на чем мы останавливаться не будем.

Итак, пусть выбрано число $S(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее указанным условиям 1), 2) и 3). Выберем число $\eta > 0$ так, чтобы помимо условий (91.26) и (91.27) это число еще удовлетворяло следующему требованию: область $|x_s| \leqslant \eta$ должна лежать внутри поверхности $V(t, x_1, \ldots, x_n) = S(\varepsilon)$, т. е. должно быть $V(t, x_1, \ldots, x_n) < S(\varepsilon)$ при $|x_s| \leqslant \eta$.

Покажем, что при условиях $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, $|y_i(t_0)| \leqslant \eta$ выполняются неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$. В самом деле, выше уже показано, что указанные неравенства выполняются, если начальное возмущение лежит в области $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$. Пусть теперь начальное возмущение этому условию не удовлетворяет. По выбору числа η и по предыдущим построениям в таком случае заключаем, что точка $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$ (назовем ее Q) лежит в области, ограниченной поверхностями

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = S(\varepsilon) \quad (\text{при } V < S(\varepsilon)),$$
$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon) \quad (\text{при } V > l(\varepsilon))$$

(см. рис. 20). Вследствие неравенства $\frac{dV}{dt} < 0$ траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ при $t \geqslant t_0$ может покинуть эту область лишь через поверхность $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = l(\varepsilon)$. Следовательно, либо траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ все время остается в указанной области и тогда по построению ее все время $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$ (и, более того, $x_s(t) \to 0$, $y_i(t) \to 0$), либо, начиная с какого-то момента, траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ попадает в область $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$ и при этом обязательно при $|y_i| < \delta_1(\varepsilon)$. Но в таком случае уже по доказанному выше траектория $x_s(t)$, $y_i(t)$ в дальнейшем все время остается в области $y \leqslant h(\varepsilon)$, $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant l(\varepsilon)$, причем также выполняются неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$, $|y_i(t)| < \varepsilon$. Тем самым устанавливается устойчивость решения $x_s = 0$, $y_i = 0$ и завершается доказательство первого пункта теоремы.

4°. Допустим теперь, что для «укороченной» системы получается асимптотическая устойчивость. Покажем, что невозмущенное движение для полной системы будет также асимптотически устойчиво.

Рассмотрим с этой целью произвольное решение $\xi_s(t)$, $y_i(t)$ уравнений (91.10) и (91.12) с начальными значениями, удовлетворяющими неравенствам

$$|\xi_s^0| \leqslant \eta, \qquad |y_i^0| \leqslant \eta,$$

где число η достаточно мало. На основании доказанного тривиальное решение $\xi_1 = \ldots = \xi_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$ устойчиво, и поэтому функции $\xi_s(t)$ будут во всяком случае удовлетворять неравенствам (91.19) при всех $t \geqslant 0$. Но тогда согласно условию все решения уравнений (91.20), которые получим, если в уравнениях (91.10) заменим все величины ξ_s функциями $\xi_s(t)$, будут удовлетворять условиям

$$\lim_{t\to\infty} y_i = 0,$$

если только начальные значения этих решений численно достаточно малы. Но одним из этих решений будут, очевидно, функции $y_i(t)$. Следовательно, если число η выбрано достаточно малым, то все функции $y_i(t)$ при неограниченном возрастании t будут стремиться к нулю. Покажем, что то же самое будет и для функции $\xi_s(t)$.

Рассмотрим произвольное сколь угодно малое положительное число l и покажем, что всегда найдется такой момент времени, начиная с которого будет все время выполняться неравенство

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < l, \tag{91.31}$$

т. е. что

$$\lim_{t\to\infty} V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] = 0. \tag{91.32}$$

С этой целью заменим в уравнениях (91.12) величины y_i функциями $y_i(t)$ и найдем выражение полной производной по времени от формы $V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ в силу полученных таким образом уравнений

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - N\xi_s \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i(t)\,[q_{i1}y_1(t) + \ldots + q_{ik}y_k(t)]}{r^2(t)} + \\ + \Xi_s[t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n], \tag{91.33}$$

одним из решений которых будут функции $\xi_s(t)$. Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\left(p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n - \right. \\ \left. - N\xi_s \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i(t)\,[q_{i1}y_1(t) + \ldots + q_{ik}y_k(t)]}{r^2(t)}\right) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\Xi_s[t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Рассмотрим совокупность значений переменных ξ_s, удовлетворяющих неравенствам

$$V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant l, \quad |\xi_s| \leqslant H. \tag{91.34}$$

Для этой совокупности будет выполняться условие

$$\lambda^2 \leqslant \sum_{s=1}^{n} \xi_s^2,$$

где λ^2 — некоторое положительное число. Поэтому на основании (91.8) находим, что при условии (91.34) будет выполняться также условие

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\alpha^2\lambda^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Xi_s [t, y_1(t), \ldots, y_k(t), \xi_1, \ldots, \xi_n].$$

С другой стороны, функции $y_s(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Поэтому на основании (91.13) всегда найдется такой момент времени $t = T$, что будет выполняться условие

$$\frac{dV(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{dt} < -\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} \text{ при } V(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) > l, \ |\xi_s| \leqslant H, \ t \geqslant T, \tag{91.35}$$

для всех решений уравнений (91.33) и, в частности, для $\xi_s = \xi_s(t)$. Отсюда следует, что если для какого-нибудь решения уравнений (91.33) будет выполняться неравенство (91.31) в какой-нибудь момент времени $t = T' > T$, то это неравенство будет для него выполняться при всех $t > T'$. Допустим, что такого момента времени для решения $\xi_s(t)$ не существует, т. е. что при всех $t > T$ будет

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] \geqslant l.$$

Так как при этом $|\xi_s(t)| \leqslant H$, то из

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] = V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] + \int_T^{t+T} \frac{dV}{dt} dt$$

будем на основании (91.35) иметь:

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < V[T, \xi_1(T), \ldots, \xi_n(T)] - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2}(t - T).$$

Однако последнее неравенство не может выполняться при всех $t > T$, так как форма V положительна. Таким образом, приходим к заключению, что всегда наступит такой момент времени, начиная с которого будет выполняться неравенство (91.31). Это, однако, эквивалентно (91.32), откуда в силу (91.4) находим:

$$\lim_{t \to \infty} \xi_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, невозмущенное движение для полной системы асимптотически устойчиво относительно переменных ξ_s и y_i.

Теперь, как и выше, для завершения доказательства достаточно показать, что невозмущенное движение $x_s=0$, $y_i=0$ асимптотически устойчиво не только относительно возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$, стесненных условиями $|\xi_s(t_0)|<\eta$, но и относительно любых достаточно малых начальных возмущений $x_s(t_0)$, $y_i(t_0)$. Это доказательство, однако, в точности повторяет те рассуждения, которые были приведены выше при доказательстве первого пункта теоремы. Поэтому здесь на этом рассуждении останавливаться не будем.

5°. Допустим, наконец, что для «укороченной» системы имеет место неустойчивость, и покажем, что то же самое будет справедливо и для полной системы.

Рассмотрим снова систему (91.20), которая получается из системы (91.10) заменой величин ξ_s произвольными функциями времени, удовлетворяющими при всех $t\geqslant 0$ неравенствам (91.19). По условию найдется число $\varepsilon>0$ такое, что как бы мало ни было число η, существует система величин $\beta_1(\eta), \ldots, \beta_k(\eta)$, для которых $|\beta_i|\leqslant\eta$, и при этом для решения уравнений (91.20) с начальными условиями $y_i^0=\beta_i$ будет в некоторый момент времени $t=T$ выполняться условие

$$y(T)=\max\{|y_1(T)|, \ldots, |y_k(T)|\}=h(\varepsilon), \tag{91.36}$$

где $h(\varepsilon)$ — величина, фигурирующая в (91.18).

При этом величины β_i зависят только от η и не зависят от выбора функций ξ_s, лишь бы они удовлетворяли неравенствам (91.19).

Рассмотрим теперь полную систему уравнений (91.1) и допустим, что вопреки утверждению невозмущенное движение устойчиво. Тогда существует такое число η, что для всех решений этих уравнений, для которых начальные значения удовлетворяют неравенствам

$$|y_i^0|\leqslant\eta, \qquad |x_s^0|\leqslant\eta, \tag{91.37}$$

будут при всех $t>0$ выполняться неравенства

$$|y_i|<h(\varepsilon)<\varepsilon, \qquad |x_s|<h(\varepsilon)<\varepsilon. \tag{91.38}$$

Из всех этих решений выделим какое-нибудь одно $y_i(t)$, $x_s(t)$, для которого $y_i^0=\beta_i$, $x_s^0=\alpha_s$, где α_s — некоторые постоянные, выбранные настолько малыми, чтобы для переменных ξ_s, определяемых преобразованием (91.9), в начальный момент времени выполнялось неравенство

$$V(0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)<l(\varepsilon). \tag{91.39}$$

Тогда из (91.18) вытекает, что при всех $t > 0$ переменные ξ_s для рассматриваемого решения будут удовлетворять неравенству

$$V[t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)] < l,$$

из которого на основании (91.14) вытекает, что $|\xi_s(t)| < \varepsilon$ и, следовательно, при $t \geqslant 0$ будут во всяком случае выполняться условия (91.19)

Будем теперь считать, что уравнения (91.20) получились из (91.10) заменой величин ξ_s функциями $\xi_s(t)$, соответствующими рассматриваемому решению. Тогда решение этих уравнений с начальными условиями $y_i^0 = \beta_i$ даст как раз функции $y_i(t)$, во всяком случае до тех пор, пока $|y_i(t)| \leqslant h(\varepsilon)$. Но для этого решения выполнено условие (91.36), так как функции $\xi_s(t)$ удовлетворяют, по доказанному, (91.19). Это, однако, противоречит (91.38). Полученное противоречие и доказывает неустойчивость невозмущенного движения.

Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 92. Вторая основная теорема о критических случаях.

Рассмотрим теперь систему уравнений возмущенного движения вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &(i = 1, 2, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (92.1)$$

где Y_i и X_s — ряды по степеням переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка и сходящиеся в области (91.2). Коэффициенты этих разложений, а также коэффициенты p_{sj} и r_{sj} являются непрерывными и ограниченными функциями t. При этом, как и в предыдущем параграфе, предполагается, что для системы линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (92.2)$$

выполняются условия устойчивости по первому приближению, установленные в § 88.

Для возможности применения к уравнениям (92.1) теоремы предыдущего параграфа необходимо, очевидно, привести эти уравнения к такому виду, для которого разложения функций

$$r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$$

начинались бы членами достаточно высокого порядка. С этой целью положим:

$$x_s = \xi_s + u_s(t, y_1, \ldots, y_k) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{92.3}$$

где u_s — целые рациональные функции переменных $y_1, \ldots, y_k$, коэффициенты которых являются ограниченными функциями времени. Тогда уравнения (92.1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= Y_i^*(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \\ &\qquad = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n), \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= p_{s1}\xi_1 + \ldots + p_{sn}\xi_n + \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned}\right\} \tag{92.4}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_s = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n) - \\ - \frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1 + u_1, \ldots, \xi_n + u_n). \end{aligned}$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} \Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + \\ + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) - \\ - \frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \end{aligned} \tag{92.5}$$

Задача заключается, следовательно, в таком выборе функций $u_s(t, y_1, \ldots, y_k)$ чтобы разложения выражений (92.5) начинались членами достаточно высокого порядка. Рассмотрим для этого систему уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) = \\ = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{96.6}$$

и попытаемся удовлетворить этим уравнениям формальными рядами вида

$$u_s = u_s^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)}(y_1, \ldots, y_k) + \ldots, \tag{92.7}$$

где $u_s^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$ с ограниченными коэффициентами. Подставляя эти ряды в (92.6), приравнивая члены первого порядка и учитывая, что разложения функций Y_i начинаются членами не ниже второго порядка, найдем:

$$\frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial t} = p_{s1}u_1^{(1)} + \ldots + p_{sn}u_n^{(1)} + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k. \qquad (92.8)$$

Аналогично приравнивая члены m-го порядка, получим:

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} = p_{s1}u_1^{(m)} + \ldots + p_{sn}u_n^{(m)} + U_s^{(m)}(t, y_1, \ldots, y_k) \qquad (92.9)$$

$$(m = 2, 3, \ldots),$$

где $U_s^{(m)}$ — некоторые формы m-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$, зависящие от тех $u_s^{(j)}$, для которых $j < m$. Если все формы $u_s^{(j)}$ при $j < m$ уже вычислены и вышли с ограниченными коэффициентами, то формы $U_s^{(m)}$ будут известными и будут также обладать ограниченными коэффициентами.

Уравнения (92.8) и (92.9) служат для последовательного определения форм $u_s^{(m)}$. Если мы вычислим все эти формы до какого-нибудь заданного порядка N включительно, то, положив в подстановке (92.3)

$$u_s = u_s^{(1)} + u_s^{(2)} + \ldots + u_s^{(N)},$$

мы приведем уравнения (92.1) к виду (92.4), для которого разложение функций $\Xi_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами не ниже $(N+1)$-го порядка. Уравнения (92.4) будут, следовательно, иметь нужный вид.

Переходим к вопросу о вычислении форм $u_s^{(m)}$. Полагая

$$u_s^{(m)} = \sum A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k = m),$$

будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dA_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{dt} = p_{s1}A_1^{(m_1, \ldots, m_k)} + \ldots + p_{sn}A_n^{(m_1, \ldots, m_k)} +$$
$$+ C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \qquad (92.10)$$

где $C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ будут известными функциями времени, если формы $u_s^{(1)}, u_s^{(2)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$ уже вычислены. Эти коэффициенты будут притом ограниченными функциями времени, если такими вышли коэффициенты форм $u_s^{(1)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$. Но при $m_1 + \ldots + m_n = 1$ каждая из функций $C_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$, совпадающая, как это следует из (92.8), с одним из коэффициентов r_{si}, будет известной и ограниченной. Отсюда следует, что из уравнений (92.8) и (92.9) можно последовательно определять формы $u_s^{(m)}$ нужного вида, если только уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + f_s(t) \qquad (92.11)$$

допускают ограниченные решения при любом выборе ограниченных и непрерывных функций $f_s(t)$. Но так как для уравнений (92.2) выполняются критерии § 88, то, как было показано в этом параграфе (критерий О. Перрона), все решения уравнений (92.11) ограничены. Таким образом, существует бесчисленное множество разложений (92.7) с ограниченными коэффициентами, формально удовлетворяющими уравнениям (92.6). Для нашей цели пригодно любое из этих разложений. И так как нам нужно лишь конечное число членов в этих разложениях, то вопрос о их сходимости не представляет для нас интереса.

Итак, допустим, что в качестве функций u_s в преобразовании (92.3) взяты первые N членов разложений (92.7). Отбросим в правых частях первой группы уравнений (92.4) все члены, содержащие $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и рассмотрим полученную таким образом «укороченную» систему

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \qquad (92.12)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Допустим, что число N выбрано настолько большим, что невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ системы (92.12) устойчиво либо асимптотически устойчиво, либо неустойчиво при любом выборе членов порядка выше, чем N. Тогда на основании теоремы предыдущего параграфа невозмущенное движение для системы (92.4) будет соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво. То же самое будет справедливо и для исходной системы (92.1), так как по свойству преобразования (92.3) устойчивость по отношению к переменным y_i и ξ_s равносильна устойчивости по отношению к переменным y_i и x_s.

Так как

$$Y_i^0(t, y_1, \ldots, y_k) = Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n),$$

то полученный результат приводит к следующей теореме:

Теорема. *Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид* (92.1). *Составим систему уравнений с частными производными* (92.6), *которой всегда можно удовлетворить формальными рядами вида*

$$u_s = \sum A_s^{(m_1 \ldots m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k \geqslant 1)$$

с ограниченными коэффициентами. Подставим эти ряды вместо величин x_s *в первую группу уравнений системы* (92.1), *после чего они примут вид* (92.12), *где* Y_i^0 — *формальные ряды, расположенные по степеням* $y_1, \ldots, y_k$ *с ограниченными коэффициентами.*

Тогда, если невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ *для системы* (92.12) [1]) *устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво, и это определяется произвольным, но конечным числом* N *первых членов, вне зависимости от членов более высокого порядка системы* (92.12), *то невозмущенное движение* $y_1 = \ldots = y_k = x_1 = \ldots = x_n = 0$ *для системы* (92.1) *соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.*

При практическом применении теоремы необходимо задаться числом N. Очевидно, что увеличение числа N не изменит в уравнениях (92.12) членов порядка, не превосходящего первоначального значения N. Поэтому при выполнении вычислений следует сначала положить $N = 1$, а затем если в этом будет необходимость, это число увеличивать. При этом само собой разумеется, что общее решение линейной системы (92.2) предполагается известным, что соответствует существу задачи. Тогда решение уравнений (92.10) приведется к квадратурам.

Примечание. Допустим, что в уравнениях (92.1) все коэффициенты r_{sj} равны нулю и что разложение функций $X_s(t, y_1, \ldots \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ начинается членами p-го ($p > 1$) порядка. Тогда, как легко видеть, можно считать, что разложение функций $u_s(t, y_1, \ldots, y_k)$ начинается членами также p-го порядка. Допустим, что наинизший порядок членов, зависящих от $x_1, \ldots, x_n$, в разложениях функций $Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)$ есть q, а наинизший порядок этих членов относительно $x_1, \ldots, x_n$ есть $r \leqslant q$. Тогда очевидно, что в «укороченной» системе уравнений (92.12), которая решает задачу устойчивости, влияние второй группы уравнений (92.1) скажется лишь на членах порядка, не ниже чем $q - r + pr$. Поэтому, если задача устойчивости для «укороченной» системы решается членами порядка, не выше чем N, то вторая группа уравнений не будет иметь влияния на ответ и может быть отброшена, если выполняется условие

$$p \geqslant \frac{N+1-q+r}{r}. \tag{92.13}$$

Отсюда следует, что когда правые части первой группы уравнений (91.1) не содержат линейных членов, то основная теорема преды-

---

[1]) То есть тех уравнений, которые получатся из уравнений (92.12), если в последних взять произвольно большое, но конечное число членов.

дущего параграфа останется в силе, если наименьший порядок p членов разложений функций $X_s(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет не условию $p \geqslant N+1$, а условию (92.13), которое может оказаться значительно слабее.

§ 93. Случай, когда коэффициенты линейных членов постоянны. Приложение к установившимся и периодическим движениям.

Мы предполагали в предыдущем параграфе, что разложения правых частей первой группы уравнений (92.1) не содержат линейных членов. Однако многие критические случаи приводятся к исследованию систем вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ &\qquad\qquad + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{93.1}$$

отличающихся от (92.1) наличием в первой группе уравнений линейных относительно y_i членов. Наличие этих членов не препятствует применению теоремы § 91, так как эти члены содержатся в уравнениях (91.1), к которым эта теорема относится. Однако эти члены мешают привести систему (92.1) к виду (91.1), т. е. уничтожить во второй группе уравнений этой системы все не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$ члены до достаточного высокого порядка.

Действительно, поступая так же, как в предыдущем параграфе, т. е. делая замену переменных

$$\begin{aligned} x_s &= \xi_s + u_s(t, y_1, \ldots, y_k) = \\ &= \xi_s + u_s^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)}(t, y_1, \ldots, y_k) + \ldots \end{aligned} \tag{93.2}$$

и стараясь подобрать функции u_s так, чтобы уничтожить вышеуказанные мешающие члены, мы придем вместо уравнений с частными производными (92.6) к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} [q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n)] = \\ = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k + \\ + X_s(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \end{aligned} \tag{93.3}$$

Тогда уравнения, определяющие формы $u_s^{(m)}$, примут вместо (92.9) более сложный вид

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k)=$$
$$=p_{s1}u_1^{(m)}+\ldots+p_{sn}u_n^{(m)}+U_s^{(m)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k) \qquad (93.4)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Вопрос о возможности удовлетворения уравнениям (93.4) формами с ограниченными коэффициентами представляет в общем случае большие трудности. Но если такие формы существуют и уравнениям (93.3) можно, следовательно, удовлетворить формальными рядами

$$u_s=u_s^{(1)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)+u_s^{(2)}(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)+\ldots \qquad (93.5)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

с ограниченными коэффициентами, то все результаты предыдущего параграфа сохраняют силу. В этом случае задача устойчивости будет решаться первой группой уравнений (93.1), в которых величины x_s должны быть заменены функциями u_s, т. е. формальными рядами (93.5).

Таким образом, вопрос о применимости к уравнениям (93.1) основной теоремы предыдущего параграфа сводится к выяснению возможности удовлетворения уравнениям (93.3) формальными рядами с ограниченными коэффициентами, или, что то же самое, к вопросу о существовании форм с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющих уравнениям вида (93.4). Этот вопрос легко разрешается в случае, когда все коэффициенты q_{ij} и r_{sj} являются постоянными. К этому важному случаю, охватывающему все критические случаи установившихся и периодических движений, мы сейчас и переходим.

Полагая $m=n+k$, рассмотрим систему m-го порядка

$$\frac{dz_j}{dt}=a_{j1}z_1+\ldots+a_{jm}z_m+Z_j(t,\ z_1,\ \ldots,\ z_m) \qquad (93.6)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где a_{js} — постоянные, а коэффициенты разложений Z_j, начинающихся членами не ниже второго порядка, являются непрерывными и ограниченными функциями времени. Допустим, что характеристическое уравнение

$$|a_{js}-\delta_{js}\lambda|=0 \qquad (93.7)$$

имеет n корней с отрицательными вещественными частями и k корней с вещественными частями, равными нулю. Если, в частности, функции Z_j не зависят явно от t, то мы будем иметь самый общий критический случай установившихся движений, а если Z_j являются периодическими функциями t, то мы получим самый общий случай периодических движений.

При помощи неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами мы можем вместо переменных $z_1, \ldots, z_m$ ввести переменные $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы линейная часть уравнений (93.6) приняла вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{93.8}$$

Здесь коэффициенты q_{ij} и p_{sj} таковы, что вещественные части всех корней уравнения n-го порядка

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \rho & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \rho & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{93.9}$$

отрицательны, а вещественные части всех корней уравнения k-го порядка

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & \ldots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & \ldots & q_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{93.10}$$

равны нулю. Совокупность $n + k$ корней уравнения (93.7) и определяет все корни уравнений (93.9), (93.10). При этом в случае необходимости указанное преобразование может быть выбрано таким образом, чтобы уравнения (93.8) имели канонический вид

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, k), \tag{93.11}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \rho_1 x_1, \quad \frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \beta_s x_{s-1} \quad (s = 2, 3, \ldots, n). \tag{93.12}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни уравнения (93.10), а $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (93.9). При этом корни λ_i и ρ_s могут быть как простыми, так и кратными. Каждому кратному корню может отвечать как одна, так и несколько групп решений (в смысле § 19) уравнений (93.8). Все величины α_i и β_s являются постоянными, среди которых некоторые могут быть равны нулю, а именно: если общее число групп решений, соответствующих всем корням λ_i и ρ_s, равно p, то $p - 2$ постоянных α_i и β_i равны нулю, так как каждая такая группа имеет одно уравнение, содержащее только ту переменную, которая фигурирует в левой части уравнения. Каждая отличная от нуля постоянная α_i может быть сделана какой угодно, в частности, сколь угодно малой. Действительно, сделав дополнительное преобразование

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = A_1 y_2, \quad y_3' = A_1 A_2 y_3, \quad \ldots, \quad y_k' = A_1 \ldots A_{k-1} y_k,$$

где A_i — произвольные постоянные, мы приведем уравнения (93.11) к виду

$$\frac{dy_1'}{dt} = \lambda_1 y_1', \quad \frac{dy_i'}{dt} = \lambda_i y_i' + \alpha_i' y_{i-1}',$$

в котором постоянные α_i' имеют значения $\alpha_i' = A_{i-1}\alpha_i$, и если какая-нибудь $\alpha_j \neq 0$, то α_j' подбором коэффициента A_{j-1} может быть сделана равной наперед заданной отличной от нуля величине. То же самое можно, конечно, сделать и с постоянными β_s.

Если указанному линейному преобразованию подвергнуть нелинейные уравнения (93.6), то они примут вид (93.1), в котором все коэффициенты q_{ij}, p_{sj} и r_{sj} являются постоянными. Так как при этом все корни уравнения (93.9) имеют отрицательные вещественные части, то для коэффициентов p_{sj} выполняются условия теоремы предыдущего параграфа. Эта теорема может быть, следовательно, применена к рассматриваемой сейчас системе, если только существуют формы $u_s^{(m)}$ с ограниченными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям вида (93.4).

Покажем, что такие формы действительно существуют. С этой целью будем предполагать, что линейная часть уравнений (93.1) приведена к виду (93.11), (93.12). Тогда уравнения (93.4) будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_1 u_1 + U_1^{(m)},$$

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_s u_s^{(m)} + \beta_s u_{s-1}^{(m)} + U_s^{(m)}$$

$$(s = 2, \ldots, n; \ \alpha_1 = 0).$$

Следовательно, если формы $u_s^{(m)}$ вычислять последовательно в порядке возрастания индекса s, то для каждой такой формы получится уравнение вида

$$\frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s^{(m)}}{\partial y_i}(\lambda_i y_i + \alpha_i y_{i-1}) = \rho_s u_s^{(m)} + \overline{U}_s^{(m)}(t, y_1, \ldots, y_k) \quad (93.13)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m; \ \alpha_1 = 0),$$

где форма $\overline{U}_s^{(m)}$ будет известной, если формы $u_1^{(m)}, \ldots, u_{s-1}^{(m)}$ и все формы $u_j^{(l)}$, для которых $l < m$, уже вычислены. Допустим, что все указанные формы действительно вычислены и вышли с ограниченными коэффициентами. Тогда коэффициенты формы $\overline{U}_s^{(m)}$ будут также ограниченными. Положим:

$$u_s^{(m)} = \sum A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_k^{m_k} \qquad (m_1 + \ldots + m_k = m).$$

Тогда, если коэффициенты $A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ вычислять в определенном порядке, то для каждого такого коэффициента получится уравнение вида

$$\frac{dA_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{dt} = \\ = (\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k) A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} + B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t), \quad (93.14)$$

где $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ — линейные функции от уже вычисленных коэффициентов с ограниченными коэффициентами. При этом нужно придерживаться следующего порядка вычисления коэффициентов. Сначала нужно вычислить коэффициент $A_s^{(0, \ldots, m)}$. После этого нужно вычислить все коэффициенты, для которых $m_{k-1} + m_k = m$, в порядке возрастания m_{k-1}, затем те, для которых $m_{k-2} = 1$, $m_{k-1} + m_k = m - 1$, также в порядке возрастания m_{k-1} и т. д.

Допустим, что все уже вычисленные коэффициенты получились ограниченными. Тогда функция $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)$ в уравнении (93.14) будет ограниченной и из этого уравнения находим частное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = \\ = e^{(\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k)\, t} \int_0^t e^{-(\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k)\, t} B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}\, dt, \quad (93.15)$$

которое также получится ограниченным. Действительно, пусть $a_s < 0$ — вещественная часть корня ρ_s. Тогда, учитывая, что вещественные части всех величин λ_i равны нулю, и обозначая через $C_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ верхний предел функции $\left[B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)\right]$, будем иметь:

$$\left| A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} \right| < C_s^{(m_1, \ldots, m_k)} e^{a_s t} \int_0^t e^{-a_s t}\, dt = \\ = -\frac{1}{a_s} C_s^{(m_1, \ldots, m_k)} \left(1 - e^{a_s t}\right) < -\frac{1}{a_s} C_s^{(m_1, \ldots, m_k)},$$

что и доказывает предложение.

Если теперь учесть, что вещественная часть величины $\rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k$ отрицательна, то мы придем к заключению, что не только решение (93.15), но и все решения уравнения (93.14) получатся ограниченными.

Таким образом, если все формы $u_s^{(1)}, \ldots, u_s^{(m-1)}$ получились с ограниченными коэффициентами, то существует бесчисленное множество форм $u_s^{(m)}$, удовлетворяющих уравнению (93.4) и обладающих ограниченными коэффициентами. Но так как формы $U_s^{(1)}$, для которых, очевидно, имеем:

$$U_s^{(1)} = r_{s1}y_1 + \ldots + r_{sk}y_k,$$

известны и обладают ограниченными (постоянными) коэффициентами, то из вышесказанного следует, что существует бесчисленное множество разложений, формально удовлетворяющих уравнениям (93.3). Следовательно, в рассматриваемом случае теорема предыдущего параграфа имеет силу, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Допустим, что в уравнениях* (93.1) *коэффициенты q_{ij}, p_{sj} и r_{sj} постоянны, причем уравнение* (93.9) *имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а вещественные части всех корней уравнения* (93.10) *равны нулю. Тогда существует бесчисленное множество разложений* (93.5) *с ограниченными коэффициентами, формально удовлетворяющих системе уравнений с частными производными* (93.3). *Выбрав какое-нибудь одно из этих разложений, подставим его вместо величин x_s в первую группу уравнений* (93.1) *и рассмотрим полученную таким образом «укороченную» систему*

$$\frac{dy_i}{dt} = q_{i1}y_1 + \ldots + q_{ik}y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n) \qquad (93.16)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Если невозмущенное движение $y_1 = \ldots = y_k = 0$ «укороченной» системы устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво, и это определяется конечным числом членов в этих уравнениях, то и невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_k = 0$ для системы (93.1) *соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво.*

Допустим, что мы имеем дело со случаем периодических движений, т. е. что функции Y_i и X_s в уравнениях (93.1) по отношению к t периодичны с некоторым периодом ω. Применяя доказанную теорему, приведем задачу к исследованию системы k-го порядка. Однако такое приведение будет, вообще говоря, иметь смысл лишь в том случае, если система (93.16) также будет обладать периодическими коэффициентами, ибо система из $n+k$ уравнений с периодическими коэффициентами может оказаться для исследования более простой, чем система из k уравнений с непериодическими коэффициентами.

Система (93.16) будет, очевидно, обладать периодическими коэффициентами, если такими коэффициентами обладают формальные разложения (93.5). Покажем, что действительно существует система разложений вида (93.5) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (93.3), и что такая система будет единственной.

Для этого, очевидно, достаточно показать, что если коэффициент $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ в уравнении (93.14) является периодической функцией времени периода ω, то это уравнение допускает одно и только одно периодическое решение для $A_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ с тем же периодом. Но уравнение (93.14) имеет частное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = e^{at}\left\{\frac{e^{a\omega}}{1-e^{a\omega}}\int_0^{\omega} e^{-at}f(t)\,dt + \int_0^{t} e^{-at}f(t)\,dt\right\},$$

где для краткости положено

$$a = \rho_s - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k, \quad f(t) = B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}(t).$$

Это решение, как было показано в § 67, является периодическим с периодом ω. Остальные решения уравнения (93.14) не будут периодическими, так как общее решение однородной части этого уравнения не периодично.

Из вышесказанного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Если при выполнении условий теоремы* 1 *коэффициенты разложений функций* Y_l *и* X_s *являются периодическими функциями времени с периодом* ω, *то существует одна и только одна система разложений* (93.5), *формально удовлетворяющих уравнениям* (93.3) *и обладающих периодическими коэффициентами с тем же периодом. Подставляя эти разложения вместо величин* x_s *в первую группу уравнений* (93.1), *мы получим «укороченную» систему* (93.16) *также с периодическими коэффициентами. Задача устойчивости для системы* (93.1) *эквивалентна той же задаче для «укороченной» системы, если последняя задача решается конечным числом членов.*

Допустим, наконец, что правые части уравнений (93.1) не зависят совсем от времени. Тогда, как легко видеть, существует одна и только одна система разложений (93.5) с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих формально уравнениям (93.3), которые вследствие этого принимают вид

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_s}{\partial y_i} [q_{i1} y_1 + \ldots + q_{ik} y_k + Y_i (y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n)] =$$
$$= p_{s1} u_1 + \ldots + p_{sn} u_n + r_{s1} y_1 + \ldots + r_{sk} y_k +$$
$$+ X_s (y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n). \qquad (93.17)$$

Действительно, если величина $B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}$ в уравнении (93.14) является постоянной, то это уравнение имеет единственное постоянное решение

$$A_s^{(m_1, \ldots, m_k)} = \frac{B_s^{(m_1, \ldots, m_k)}}{\rho_s - m_1 \lambda_1 - \ldots - m_k \lambda_k}.$$

Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 3. *Если при выполнении условий теоремы* 1 *правые части уравнений* (93.1) *не зависят явно от времени, то существует одна и только одна система разложений*

$$u_s = u_s^{(1)} (y_1, \ldots, y_k) + u_s^{(2)} (y_1, \ldots, y_k) + \ldots,$$

формально удовлетворяющих уравнениям (93.17). *Если этими разложениями заменить величины x_s в первой группе уравнений* (93.1), *то получится «укороченная» система уравнений* (93.16), *также не зависящих от времени. Задача устойчивости для системы* (93.1) *эквивалентна задаче устойчивости для «укороченной» системы, если последняя задача решается конечным числом членов.*

При доказательстве основной теоремы § 91 мы сделали относительно коэффициентов q_{ij} ограничение, что модули коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{k} y_i (q_{i1} y_1 + \ldots + q_{ik} y_k) \qquad (93.18)$$

достаточно малы. Покажем, что при подходящем выборе переменных y_i во всех рассмотренных в настоящем параграфе случаях указанное ограничение действительно выполняется, так что теоремы 1, 2 и 3 можно будет считать полностью доказанными.

Мы будем для этого предполагать, что линейная часть первой группы уравнений (93.1) имеет вид (93.11), который придется, однако, привести к вещественной форме, так как коэффициенты q_{ij} в уравнениях (91.1) предполагались вещественными.

Коэффициенты α_i в уравнениях (93.11) можно предполагать вещественными, так как, по доказанному, каждый такой коэффициент, отличный от нуля, может быть сделан совершенно произвольным, Что же касается коэффициентов λ_i, являющихся корнями уравнения (93.10), то они могут либо равняться нулю, либо быть чисто мнимыми. Допустим для определенности, что уравнение (93.10) имеет нулевой корень p-й кратности. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Тогда первые p уравнений (93.11) не нуждаются в дальнейших преобразованиях и имеют вид

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_j}{dt} = \alpha_j y_{j-1} \quad (j = 2, 3, \ldots, p). \tag{93.19}$$

Остальные $k-p$ уравнений (93.11), соответствующие чисто мнимым корням, требуют дальнейших преобразований. Пусть $\pm\lambda i$ — какая-нибудь пара чисто мнимых корней уравнения (93.10) q-й кратности. Пусть $y^{(1)}, \ldots, y^{(q)}$ и $\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(q)}$ — соответствующие этим корням переменные y_i, так что соответствующие этим корням уравнения (93.11) имеют вид

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dy^{(1)}}{dt} = \lambda i y^{(1)}, & \dfrac{dy^{(\sigma)}}{dt} = \lambda i y^{(\sigma)} + \gamma_\sigma y^{(\sigma-1)}, \\ \dfrac{d\bar{y}^{(1)}}{dt} = -\lambda i \bar{y}^{(1)}, & \dfrac{d\bar{y}^{(\sigma)}}{dt} = -\lambda i \bar{y}^{(\sigma)} + \gamma_\sigma \bar{y}^{(\sigma-1)} \\ \multicolumn{2}{c}{(\sigma = 2, 3, \ldots, q),} \end{array}\right\} \tag{93.20}$$

где γ_σ — соответствующие рассматриваемым уравнениям постоянные α_i, причем мы считаем, что эти постоянные в уравнениях для $y^{(\sigma)}$ и для $\bar{y}^{(\sigma)}$ имеют одинаковые значения, что не нарушает общности. Вводя вместо переменных $y^{(\sigma)}$ и $\bar{y}^{(\sigma)}$ переменные $u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_q$ при помощи подстановки

$$y^{(\sigma)} = u_\sigma + i v_\sigma, \quad \bar{y}^{(\sigma)} = u_\sigma - i v_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, q),$$

мы заменим $2q$ уравнений (93.20) с мнимыми коэффициентами $2q$ уравнениями

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du_1}{dt} = -\lambda v_1, & \dfrac{du_\sigma}{dt} = -\lambda v_\sigma + \gamma_\sigma u_{\sigma-1}, \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \lambda u_1, & \dfrac{dv_\sigma}{dt} = \lambda u_\sigma + \gamma_\sigma v_{\sigma-1} \\ \multicolumn{2}{c}{(\sigma = 2, 3, \ldots, q)} \end{array}\right\} \tag{93.21}$$

с вещественными коэффициентами.

Аналогичным образом мы поступаем со всеми остальными чисто мнимыми корнями. Таким образом, линейная часть первой группы системы (93.1) состоит из уравнений (93.19) и одной или нескольких групп уравнений вида (93.21). Соответственно с этим квадратичная форма (93.18) будет складываться из квадратичной формы

$$\sum_{j=2}^{p} \alpha_j y_{j-1} y_j$$

и из одной или нескольких квадратичных форм вида

$$\sum_{\sigma=2}^{q} \gamma_\sigma (u_\sigma u_{\sigma-1} + v_\sigma v_{\sigma-1}).$$

Но коэффициенты всех этих форм можно считать численно сколь угодно малыми, так как такими, по доказанному выше, можно считать величины α_j и γ_σ.

Таким образом, вышеуказанное ограничение для коэффициентов q_{ij} в рассматриваемых сейчас случаях действительно выполняется, и мы можем поэтому теоремы 1, 2 и 3 считать полностью доказанными.

На этом мы заканчиваем изложение общей теории критических случаев. В оставшейся части этой главы мы, используя полученные результаты, исследуем ряд критических случаев для установившихся и периодических движений. Мы рассматриваем установившиеся движения, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет пару нулевых корней, когда оно имеет две пары чисто мнимых корней и когда оно имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней. Аналогичные случаи рассматриваются и для периодических движений.

§ 94. Критический случай двойного нулевого корня для установившихся движений.

Рассмотрим систему $(n+2)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого приближения имеет n корней с отрицательными вещественными частями и два корня, равных нулю. Подходящим выбором переменных система может быть приведена к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= q_{11}x + q_{12}y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
\frac{dy}{dt} &= q_{21}x + q_{22}y + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
\frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n)\\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}\right\} \qquad (94.1)$$

где коэффициенты p_{sj} таковы, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (94.2)$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а оба корня характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{94.3}$$

равны нулю. X, Y и X_s — сходящиеся в некоторой окрестности начала координат ряды, расположенные по степеням переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Наряду с системой (94.1) рассмотрим систему второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q_{11}x + q_{12}y + X(x, y, u_1, \ldots, u_n), \\ \frac{dy}{dt} &= q_{21}x + q_{22}y + Y(x, y, u_1, \ldots, u_n), \end{aligned}\right\} \tag{94.4}$$

где $u_s(x, y)$ — формальные решения уравнений с частными производными (93.17). Обозначим соответственно через $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$ совокупности членов m-го порядка в правых частях уравнений (94.4) и заменим эти уравнения следующими:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q_{11}x + q_{12}y + X^{(2)}(x, y) + \ldots \\ &\qquad \ldots + X^{(N)}(x, y) + \varphi(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= q_{21}x + q_{22}y + Y^{(2)}(x, y) + \ldots \\ &\qquad \ldots + Y^{(N)}(x, y) + \psi(t, x, y). \end{aligned}\right\} \tag{94.5}$$

Здесь N — достаточно большое целое число, а $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$ — аналитические функции переменных x и y, которые при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(t, x, y)| &< A\{|x| + |y|\}^{N+1}, \\ |\psi(t, x, y)| &< A\{|x| + |y|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{94.6}$$

где A — положительная постоянная. Тогда на основании теоремы 3 предыдущего параграфа, если невозмущенное движение $x = y = 0$ для системы (94.5) устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций φ и ψ, удовлетворяющих условиям (94.6), то это же самое будет справедливо и для невозмущенного движения $x = y = x_1 = \ldots = x_n = 0$ полной системы (94.1). Таким образом, задача сводится к исследованию системы (94.5).

Мы будем предполагать, что переменные x и y выбраны таким образом, что линейная часть уравнений (94.5) имеет каноническую форму. Здесь приходится рассматривать два случая. В первом случае двойной нулевой корень не обращает в нуль хотя бы один из миноров $(n+1)$-го порядка характеристического определителя исходной системы уравнений возмущенного движения, или, что то же самое, этому корню отвечает одна группа решений первого приближения этой системы. В этом случае, если линейная часть уравнений (94.5) имеет каноническую форму, то будем иметь $q_{11}=q_{12}=q_{22}=0$, $q_{21}=1$ и, следовательно, эта линейная часть имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=x.$$

Вторым случаем будет тот, когда двойному нулевому корню отвечают две группы решений уравнений первого приближения. В этом случае все коэффициенты q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} равны нулю и уравнения (94.5) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=X^{(m)}(x, y)+\ldots+X^{(N)}(x, y)+\varphi(t, x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=Y^{(m)}(x, y)+\ldots+Y^{(N)}(x, y)+\psi(t, x, y),\end{aligned}\right\} \tag{94.7}$$

где $m \geqslant 2$.

Первый из указанных случаев для системы второго порядка подробно рассмотрен А. М. Ляпуновым[1]). Для систем произвольного порядка этот случай исследован Г. В. Каменковым[2]). Второй случай как для систем второго порядка, так и для систем произвольного порядка рассмотрен автором[3]) и другим методом — Г. В. Каменковым. Мы ограничимся здесь рассмотрением второго случая. Этот случай является особенно важным, так как к нему приводятся наиболее интересные для практики другие критические случаи, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. В этом мы убедимся в двух следующих параграфах.

Итак, мы будем рассматривать задачу устойчивости для системы (94.7). Рассмотрим две формы $(m+1)$-го порядка $P(x, y)$ и $G(x, y)$, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned}P(x, y)&=xX^{(m)}(x, y)+yY^{(m)}(x, y),\\ G(x, y)&=xY^{(m)}(x, y)-yX^{(m)}(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{94.8}$$

Эти формы будут играть важную роль в дальнейшем исследовании. Если форма $G(x, y)$ не является знакоопределенной, то

---

[1]) Ляпунов А. М., Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Матем. сб., т. XVII, вып. 2, 1893. Работа переиздана во втором и третьем (1950 г.) изданиях книги: Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения.

[2]) Каменков Г. В., Об устойчивости движения. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 9, 1939.

[3]) Малкин И. Г., Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сб. трудов Казанского авиац. ин-та, № 7, 1937.

уравнение

$$G(x, y) = 0 \tag{94.9}$$

определяет одну или несколько прямых, проходящих через начало координат.

Угловой коэффициент k каждой такой прямой определяется, очевидно, уравнением

$$Y^{(m)}(1, k) - kX^{(m)}(1, k) = 0. \tag{94.10}$$

Число этих прямых не превосходит $m+1$.

Мы будем различать четыре случая.

1°. Форма G не является знакоопределенной, и на всех прямых (94.9) форма P может принимать только отрицательные значения (за исключением, конечно, начала координат).

2°. Форма G не является знакоопределенной, и хотя бы на одной прямой (94.9) форма P может принимать положительные значения.

3°. Форма G знакоопределенна, и величина

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}\,d\vartheta \tag{94.11}$$

отлична от нуля.

4°. Форма G знакоопределенна, и величина (94.11) равна нулю.

Мы исследуем каждый из этих случаев по отдельности.

Случай 1°. Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X^{(m)}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y^{(m)}(x, y). \tag{94.12}$$

В рассматриваемом случае уравнение (94.9) имеет вещественные решения. Каждая определяемая этим решением прямая является интегральной кривой уравнений (94.12). Действительно, согласно определению формы G на каждой такой прямой имеем тождественно

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0. \tag{94.13}$$

Тождество (94.13) показывает также, что каждая проходящая через начало координат интегральная кривая необходимо касается одной из прямых (94.9).

По условию, на каждой прямой (94.9) форма P, представляющая собой, очевидно, для уравнений (94.12) производную по времени от выражения $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, принимает только отрицательные значения. Следовательно, движение по этим прямым, являющимся, как уже указывалось, интегральными кривыми уравнений (94.12), направлено к началу координат. Отсюда в силу непрерывности поля скоростей для уравнений (94.12) и того обстоятельства, что каждая интегральная кривая этих уравнений, проходящая через начало координат, касается одной из прямых (94.9), непосредственно вытекает, что все интегральные кривые уравнений (94.12) проходят через начало координат и движение по ним направлено к этой точке. Следовательно, невозмущенное движение для уравнений (94.12) асимптотически устойчиво. Но тогда на основании общей теоремы § 85 невозмущенное движение для уравнений (94.7) будет также асимптотически устойчиво при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Итак, в случае 1° невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Случай 2°. Допустим теперь, что уравнение (94.9) имеет по-прежнему вещественные решения, но хотя бы на одной из прямых, определяемых этим уравнением, форма P может принимать положительные значения. Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что этой прямой является ось x. Действительно, этого всегда можно добиться простым поворотом осей координат. Но если уравнение (94.9) имеет решение $y=0$, то форма $Y^{(m)}$ должна обращаться в нуль при $y=0$. Мы можем, следовательно, писать:

$$Y^{(m)}=Byx^{m-1}+B_2y^2x^{m-2}+\ldots+B_{m-1}y^{m-1}x+B_my^m. \qquad (94.14)$$

Для формы $X^{(m)}$ имеем:

$$X^{(m)}=Ax^m+A_1yx^{m-1}+\ldots+A_{m-1}y^{m-1}x+A_my^m, \qquad (94.15)$$

причем коэффициент A необходимо отличен от нуля, так как при $y=0$ форма P может принимать положительные значения. Кроме того, при m нечетном он должен быть положительным, а при m четном он может быть как положительным, так и отрицательным. Но в последнем случае замена в дифференциальных уравнениях x на $-x$ изменяет знак коэффициента A на обратный. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что коэффициент $A>0$ положителен.

Имея в виду доказать неустойчивость невозмущенного движения, мы постараемся в рассматриваемом случае построить для уравнений (94.7) функцию, удовлетворяющую условиям теоремы о неустойчивости Н. Г. Четаева (§ 48).

Рассмотрим с этой целью функцию

$$2V=\alpha^2x^2-y^2, \qquad (94.16)$$

где α^2 — некоторая положительная постоянная, и составим полную производную от этой функции по времени в силу уравнений (94.7). Будем иметь:

$$\frac{dV}{dt}=\alpha^2xX^{(m)}-yY^{(m)}+\ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок, не меньший $m+2$.

Функция V принимает положительные значения при $y=0$. То же самое будет иметь место и по отношению к функции $\frac{dV}{dt}$, если численные значения x предполагать достаточно малыми и в случае четного m $x>0$. Это непосредственно следует из того, что $X^{(m)}$ имеет вид (94.15), и коэффициент A положителен. Следовательно, вблизи начала координат существует область, содержащая внутри себя ось x, где одновременно $V>0$ и $\frac{dV}{dt}>0$.

Установив это, допустим сначала, что $A>B$. Покажем, что в этом случае постоянную α можно выбрать настолько малой, чтобы область $V>0$ была заключена внутри области $\frac{dV}{dt}>0$.

В самом деле, функция V может принимать положительные значения только при условии $y=\beta\alpha x$, где β — произвольная величина, лежащая на отрезке $[-1, +1]$. Но, заменяя в выражении $\frac{dV}{dt}$ величину y через $\beta\alpha x$ и принимая во внимание (94.14) и (94.15), будем иметь:

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta\alpha x}=(C+f)\,x^{m+1},$$

где

$$C=(A-B\beta^2)\,\alpha^2+(A_1\beta-B_2\beta^3)\,\alpha^3+\ldots$$
$$\ldots+\left(A_{m-1}\beta^{m-1}-B_m\beta^{m+1}\right)\alpha^{m+1}+A_m\beta^m\alpha^{m+2},$$

а f — аналитическая функция x, обращающаяся в нуль при $x=0$. Отсюда следует, что при достаточно малом x знак величины $(C+f)\,x^{m+1}$ совпадает со знаком величины C (по крайней мере, при $x>0$). Что же касается знака величины C, то постоянную α можно выбрать настолько малой по абсолютному значению, чтобы знак C совпадал со знаком величины $A-B\beta^2$. Но так как $A>B$ и $A>0$, то величина $A-B\beta^2$ будет положительной при всех значениях величины β на отрезке $[-1, +1]$.

Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат существует область $V>0$, заключенная внутри области $\frac{dV}{dt}>0$. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям теоремы о неустойчивости Н. Г. Четаева и невозмущенное движение неустойчиво.

Допустим теперь, что $A<B$. В этом случае на границе области $V>0$ производная $\frac{dV}{dt}$ будет отрицательной, и, следовательно, функция V не будет удовлетворять условиям теоремы Н. Г. Четаева. Тем не менее, невозмущенное движение будет также неустойчиво, что может быть доказано следующим образом.

Рассмотрим снова функцию (94.16), где α, так же как и в предыдущем случае, выбрана настолько малой, что знак $(C+f)\,x^{m+1}$ при достаточно малых значениях x совпадает со знаком величины $A-B\beta^2$. Пусть это будет при $0<x\leqslant h$. Так как сейчас $A<B$, то величина $A-B\beta^2$ не будет положительна при любом β на отрезке $[-1, +1]$, но она во всяком случае будет положительна при $|\beta|\leqslant\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ — достаточно малое положительное число. Следовательно, в области $0<x\leqslant h$, $V_1>0$, где

$$2V_1=\bar{\beta}^2\alpha^2x^2-y^2,$$

производная $\dfrac{dV}{dt}$ будет во всяком случае положительна. Что же касается производной $\dfrac{dV_1}{dt}$, то на границе $V_1=0$ рассматриваемой области она будет отрицательна, так как функция V_1 обладает, очевидно, такими же свойствами, как и V.

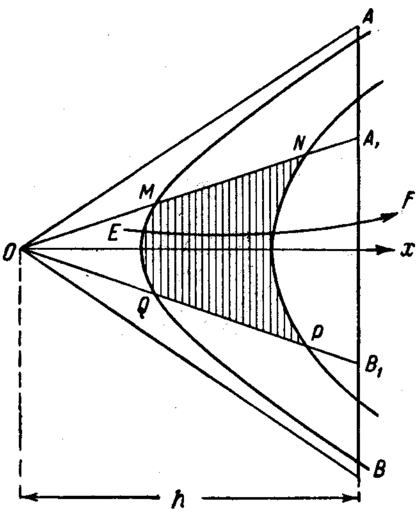

Рис. 21.

Пусть AOB (рис. 21) — границы области $V>0$, а $A_1OB_1A_1$ — границы области $0\leqslant x\leqslant h$, $V_1>0$. Внутри этой последней рассмотрим область $NMQP$ (эта область на чертеже заштрихована), ограниченную отрезком NP гиперболы $V=C$ и отрезком MQ гиперболы $V=c$. При этом C — какое-нибудь фиксированное число, а c предполагается сколь угодно малым, так что дуга MQ расположена сколь угодно близко от начала координат. Внутри области $NMQP$ производная $\dfrac{dV}{dt}$ положительна, и для нее существует отличный от нуля положительный нижний предел. Обозначим этот предел через l и пусть $T=\dfrac{C}{l}$. Рассмотрим интегральную кривую уравнений (94.7), выходящую в момент времени $t=T$ из какой-нибудь точки F дуги NP. Пусть $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — уравнение этой интегральной кривой. Будем следовать вдоль этой интегральной кривой в сторону убывания t вплоть до момента времени $t=0$. При этом интегральная кривая будет приближаться к началу координат, по крайней мере, до тех пор, пока она не покинет области $A_1OB_1A_1$, так как в этой области $\frac{dV}{dt} > 0$. Но если бы указанная интегральная кривая в какой-нибудь момент времени $0 \leqslant \tau < T$ покинула область $A_1OB_1A_1$, что она могла бы сделать лишь только через границы ON или OP, то в этот момент времени одновременно выполнялись бы условия $V_1 = 0$, $\frac{dV_1}{dt} \geqslant 0$, что невозможно, так как на отрезках OA_1 и OB_1 производная $\frac{dV_1}{dt}$ отрицательна.

Таким образом, на всем отрезке времени от T до 0 рассматриваемая интегральная кривая будет оставаться внутри области $NOPN$. Допустим, что при $t = 0$ она будет проходить через точку E. Покажем, что точка E непременно находится внутри области $OMQO$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что при убывании t от T до 0 рассматриваемая интегральная кривая пересекает в какой-нибудь момент времени дугу MQ. Допустим противное, что интегральная кривая при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ находится внутри области $MQNP$. Тогда будем иметь:

$$V[x(0), y(0)] = V[x(T), y(T)] - \int_0^T \frac{dV}{dt}\,dt < \\ < V[x(T), y(T)] - lT = C - C = 0,$$

что невозможно, так как по предположению точка $x(0)$, $y(0)$ находится в области $MQNP$ и, следовательно, $V[x(0), y(0)] > c > 0$.

Таким образом, точка E находится внутри области OMQ. Рассмотрим теперь интегральную кривую, выходящую в момент времени $t = 0$ из точки E. Это, очевидно, будет та же самая интегральная кривая $x(t)$, $y(t)$. К моменту времени $t = T$ эта кривая достигнет точки F, находящейся на определенном расстоянии от начала координат. Но так как при этом точка E находится сколь угодно близко от начала координат, то невозмущенное движение неустойчиво[1]).

Допустим, наконец, что $A = B$. Рассмотрим функцию

$$2V = x^4 - y^2$$

и область

$$0 < x \leqslant h, \quad V > 0. \tag{94.17}$$

Все значения переменных, лежащих в этой области, удовлетворяют соотношению $y = \beta x^2$, где β — произвольная величина, лежащая на отрезке $[-1, +1]$. Составим производную от V по времени в силу уравнений (94.7) и заменим в ней величину y через βx^2. Тогда,

---

[1]) Построенные нами функции V_1 и V_2 удовлетворяют другой теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости.

принимая во внимание (94.14) и (94.15), получим:

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta x^2} = x^{m+3}(2A - B\beta^2 - p + f),$$

где p — коэффициент при x^{m+1} в форме $X^{(m+1)}$, а f — аналитическая функция переменной x, обращающаяся в нуль при $x=0$.

Коэффициент p можно предполагать сколь угодно малым. В самом деле, если в уравнениях (94.7) переменную y заменить переменной η при помощи подстановки $\eta = \sigma y$, где σ — постоянная, то в формах $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ коэффициенты A и B не изменятся, а в форме $X^{(m+1)}$ коэффициент при x^{m+1} умножится на σ. Следовательно, выбрав σ достаточно малой, можно всегда добиться, чтобы этот коэффициент был численно сколь угодно малым.

Так как $A>0$, $B=A$ и p численно мало, то вблизи начала координат величина $\left[\frac{dV}{dt}\right]_{y=\beta x^2}$ будет принимать положительные значения (при $x>0$, если m — четное) при всех значениях β, лежащих на отрезке $[-1, +1]$. Следовательно, при h, достаточно малом, во всей области (94.17) производная $\frac{dV}{dt}$ принимает положительные значения и функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Н. Г. Четаева. Отсюда вытекает, что невозмущенное движение неустойчиво.

Итак, в случае 2° невозмущенное движение неустойчиво. При этом очевидно, что это будет справедливо при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Случай 3°. Допустим теперь, что G есть форма знакоопределенная и величина λ, определяемая равенством (94.11), отлична от нуля. Вводя полярные координаты

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

преобразуем систему (94.7) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^m P(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \\ &\qquad + r^{m+1}P_{m+1}(\vartheta) + \ldots + r^N P_N(\vartheta) + R(t, \vartheta, r), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= r^{m-1}G(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \\ &\qquad + r^m G_m(\vartheta) + \ldots + r^{N-1}G_{N-1}(\vartheta) + \Theta(t, \vartheta, r), \end{aligned}\right\} \tag{94.18}$$

где P_k и G_k — периодические функции ϑ, периода 2π (формы относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$), а $R(t, \vartheta, r)$ и $\Theta(t, \vartheta, r)$ при всех значениях $t \geqslant 0$ и ϑ удовлетворяют условиям

$$|R(t, \vartheta, r)| < Br^{N+1}, \quad |\Theta(t, \vartheta, r)| < Br^N, \tag{94.19}$$

где B — некоторая постоянная.

Из (94.11) следует, что функция $\psi(\vartheta)$, определяемая равенством

$$\int_0^{\vartheta} \frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}\, d\vartheta = \lambda\vartheta + \psi(\vartheta), \tag{94.20}$$

являющаяся вследствие знакоопределенности G непрерывной, будет периодической периода 2π. Такой же, следовательно, будет и функция

$$\varphi(\vartheta) = e^{\psi(\vartheta)}, \tag{94.21}$$

которая к тому же никогда не обращается в нуль. Вследствие этого функция $[\varphi(\vartheta)]^{-1}$ будет также непрерывной. Из (94.20) находим:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \left(\frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)} - \lambda\right)\varphi. \tag{94.22}$$

Введем теперь вместо переменной r переменную ρ при помощи подстановки

$$r = \rho\varphi(\vartheta). \tag{94.23}$$

Из отмеченных свойств функции $\varphi(\vartheta)$ вытекает, что задача устойчивости по отношению к переменной r равносильна той же задаче по отношению к переменной ρ. Уравнения (94.18) на основании (94.22) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \lambda G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\varphi^{m-1}(\vartheta)\,\rho^m + \\ &\quad + P^*_{m+1}(\vartheta)\,\rho^{m+1} + \ldots + P^*_N(\vartheta)\,\rho^N + R^*(t, \vartheta, \rho), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\varphi^{m-1}(\vartheta)\,\rho^{m-1} + \\ &\quad + Q_m(\vartheta)\,\rho^m + \ldots + Q_{N-1}(\vartheta)\,\rho^{N-1} + \theta^*(t, \vartheta, \rho), \end{aligned}\right\} \tag{94.24}$$

где $P^*_k(\vartheta)$ и $Q_k(\vartheta)$ — периодические функции ϑ, периода 2π, а функции R^* и θ^* при всех значениях $t \geqslant 0$ и ϑ удовлетворяют неравенствам

$$|R^*(t, \vartheta, \rho)| < C\rho^{N+1}, \quad |\theta^*(t, \vartheta, \rho)| < C\rho^N, \tag{94.25}$$

где C — некоторая постоянная.

Так как $G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ никогда не обращается в нуль, то из первого уравнения (94.24) сразу вытекает, что невозмущенное движение при $\lambda G < 0$ асимптотически устойчиво, а при $\lambda G > 0$ неустойчиво, и это будет иметь место при любом выборе функций R^* и θ^*, удовлетворяющих условиям (94.25) и, следовательно, при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$ и $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6).

Итак, в случае 3° невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво при $\lambda G < 0$ и неустойчиво при $\lambda G > 0$.

Случай 4. Допустим, наконец, что G есть форма знакоопределенная и величина λ, определяемая формулой (94.11), равна нулю. Поступая, как и в предыдущем случае, т. е. вводя полярные координаты и затем переменную ρ при помощи подстановки (94.23), мы получим уравнения (94.24), которые сейчас примут вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= P^*_{m+1}(\vartheta)\rho^{m+1} + \ldots + P^*_N(\vartheta)\rho^N + R^*(t, \vartheta, \rho),\\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}(\vartheta)\rho^{m-1} + Q_m(\vartheta)\rho^m + \ldots\\ &\qquad\ldots + Q_{N-1}(\vartheta)\rho^{N-1} + \theta^*(t, \vartheta, \rho).\end{aligned}\right\} \tag{94.26}$$

Отсюда, исключая dt, находим:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = R_2(\vartheta)\rho^2 + \ldots + R_{N+1-m}(\vartheta)\rho^{N+1-m} + \Phi(t, \vartheta, \rho), \tag{94.27}$$

где $R_k(\vartheta)$ — периодические функции ϑ с периодом 2π, а Φ имеет порядок малости не ниже $N+2-m$ и является функцией такого же типа, как и R^* и θ^*.

Если в уравнении (94.27) отбросить член Φ, то оно будет отличаться от уравнения (66.1), подробно изученного в § 66, только тем, что независимой переменной является не время, а полярный угол ϑ. Мы можем поэтому применить к уравнению (94.27) все рассуждения § 66. Поступая по указанному в этом параграфе второму способу решения задачи, попытаемся удовлетворить уравнению (94.27) решением вида

$$\rho = c + \varphi_2(\vartheta)c^2 + \varphi_3(\vartheta)c^3 + \ldots, \tag{94.28}$$

где c — произвольная постоянная, а φ_k — некоторые периодические функции ϑ, периода 2π. Подставляя (94.28) в (94.27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, мы получим для определения φ_k уравнения вида

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = F_k(\vartheta) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{94.29}$$

где $F_k(\vartheta)$ — некоторые полиномы с периодическими коэффициентами (если $k < N+1-m$) от $\varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$. Уравнения (94.29) дают возможность последовательно определять коэффициенты φ_k при помощи квадратур. Однако кроме особо исключительных случаев, которые мы здесь не будем рассматривать, коэффициенты φ_k не будут получаться периодическими при любом k. Пусть φ_l — первый непериодический коэффициент в ряду $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Этот коэффициент будет иметь вид

$$\varphi_l = g\vartheta + \psi_l(\vartheta), \tag{94.30}$$

где g — некоторая постоянная, а $\psi_i(\vartheta)$ — периодическая функция. Введем теперь в уравнение (94.27) вместо переменной ρ переменную z при помощи подстановки

$$\rho = z + \varphi_2(\vartheta) z^2 + \ldots + \varphi_{l-1}(\vartheta) z^{l-1} + \psi_l(\vartheta) z^l.$$

Тогда, считая, что $N > l + m - 1$, мы получим, как это было показано в § 66, следующее уравнение:

$$\frac{dz}{d\vartheta} = gz^l + \ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок, не меньший $l + 1$. При этом очевидно, что задача устойчивости по отношению к переменной z эквивалентна той же задаче по отношению к переменной ρ.

Для производной $\frac{dz}{dt}$ на основании (94.26) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta}\frac{d\vartheta}{dt} = gG(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}\rho^{m+l-1} + \ldots$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при $gG > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $gG < 0$ оно устойчиво асимптотически, причем этот результат будет справедлив при любом выборе функций $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющих условиям (94.6). Это и дает решение задачи устойчивости в случае 4°.

Полученные результаты могут быть сведены в следующую теорему.

Теорема. *Допустим, что предложена система* $(n+2)$*-го порядка дифференциальных уравнений возмущенного движения, для которых характеристическое уравнение первого приближения имеет n корней с отрицательными вещественными частями и двойной нулевой корень, которому соответствуют две группы решений уравнений первого приближения. Подходящим выбором переменных эту систему можно представить в следующем виде:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s, \end{aligned}\right\} \qquad (94.31)$$

где X, Y, X_s — аналитические функции переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, а коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение (94.2) *имеет корни только с отрицательными вещественными частями.*

Составляя систему уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} X(x, y, u_1, \ldots, u_n) + \frac{\partial u_s}{\partial y} Y(x, y, u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, u_1, \ldots, u_n),$$

попытаемся удовлетворить ей формально выражениями $u_s(x, y)$, *являющимися рядами по степеням* x *и* y, *не имеющими свободных членов. Такие ряды всегда найдутся и будут единственными. Этими рядами заменяем величины* x_s *в первых двух уравнениях* (94.31), *после чего они примут вид*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} &= Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (94.32)$$

где $X^{(l)}$ *и* $Y^{(l)}$ — *формы* l-*го порядка переменных* x *и* y. *Далее составляем формы* $P(x, y)$ *и* $G(x, y)$ *по формулам* (94.8). *Тогда*:

1) *Если форма* G *не является знакоопределенной и форма* P *на всех прямых, определяемых уравнением* (94.9), *может принимать только отрицательные значения, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

2) *Если форма* G *не является знакоопределенной и хотя бы на одной из прямых, определяемых уравнением* (94.9), *форма* P *может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

3) *Если форма* G *является знакоопределенной и величина* λ, *определяемая формулой* (94.11), *отлична от нуля, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво при* $\lambda G < 0$ *и неустойчиво при* $\lambda G > 0$.

4) *Если форма* G *является знакоопределенной и* $\lambda = 0$, *то для решения задачи устойчивости поступаем следующим образом.*

Вводим в уравнения (94.32) *вместо переменных* x *и* y *переменные* ρ *и* ϑ *при помощи подстановки* $x = \rho\varphi(\vartheta)\cos\vartheta$, $y = \rho\varphi(\vartheta)\sin\vartheta$, *где* φ — *периодическая с периодом* 2π *функция* ϑ, *определяемая формулой* (94.21), *в которой* $\psi(\vartheta)$ *определяется формулой* (94,20). *Уравнения* (94.32) *примут вид*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= P_{m+1}(\vartheta)\rho^{(m+1)} + P_{m+2}(\vartheta)\rho^{m+2} + \ldots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\varphi^{m-1}(\vartheta)\rho^{m-1} + Q_m(\vartheta)\rho^m + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (94.33)$$

где P_k *и* Q_k — *периодические функции* ϑ, *периода* 2π.

Из (94.33), *исключая* t, *находим уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = R_2(\vartheta)\rho^2 + R_3(\vartheta)\rho^3 + \ldots,$$

где R_k — *периодические функции периода* 2π. *Этому уравнению пытаемся удовлетворить решением вида* (94.28), *в котором*

c — произвольная постоянная, а φ_k — периодические функции периода 2π. Для определения φ_k получаем уравнения (94.29), *из которых эти функции последовательно определяются при помощи квадратур. Функции φ_k лишь только в особо исключительных случаях будут все получаться периодическими. Оставляя в стороне этот случай, допустим, что φ_l является первой непериодической функцией в ряду $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Эта функция будет необходимо иметь вид* (94.30). *Тогда, если $gG > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а при $gG < 0$ оно устойчиво асимптотически.*

Доказанная теорема охватывает все случаи, кроме тех, при которых форма G не является знакоопределенной, а форма P обращается в нуль на некоторых прямых, определяемых уравнением (94.9), но ни на одной из этих прямых она не может принимать положительных значений. В этих случаях, так же как и в случае 4°, задача не решается формами $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ в уравнениях (94.32), а требует рассмотрения членов более высоких порядков. На этих случаях мы здесь не останавливаемся [1]).

§ 95. Критический случай двух пар чисто мнимых корней для установившихся движений [2]).

Рассмотрим систему $(n+4)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i$ и $\pm\lambda_2 i$ и n корней с отрицательными вещественными частями. Мы будем предполагать, что отношение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ иррационально. Подходящим выбором переменных эту систему можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j i x_j + X_j(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n),\\ \frac{dy_j}{dt} &= -\lambda_j i y_j + Y_j(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n),\\ \frac{dz_s}{dt} &= p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \alpha_s x_1 + \beta_s y_1 + \gamma_s x_2 + \delta_s y_2 +\\ &\qquad + Z_s(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n)\\ &\qquad (j=1,\ 2;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{95.1}$$

где коэффициенты p_{si} таковы, что уравнение

$$|p_{si} - \delta_{si}\rho| = 0$$

[1]) См. примечание в конце книги (стр. 530).

[2]) Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 5, 1951.

имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Функции X_j, Y_j, Z_s, как обычно, предполагаются аналитическими с разложениями, начинающимися членами не ниже второго порядка.

Наряду с системой (95.1) рассмотрим «укороченную» систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j i x_j + X_j(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ u_1,\ \ldots,\ u_n), \\ \frac{dy_j}{dt} &= -\lambda_j i y_j + Y_j(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ u_1,\ \ldots,\ u_n) \\ &(j=1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{95.2}$$

где $u_s(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$ — ряды по степеням переменных x_1, y_1, x_2, y_2, не имеющие свободных членов и представляющие формальные решения уравнений с частными производными:

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\lambda_j i x_j + X_j(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ u_1,\ \ldots,\ u_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_s}{\partial y_j} - \lambda_j i y_j + Y_i(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)\right] =$$
$$= p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + \alpha_s x_1 + \beta_s y_1 + \gamma_s x_2 + \delta_s y_2 +$$
$$+ Z_s(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пусть $X_j^{(m)}$, $Y_j^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных x_1, y_1, x_2, y_2, представляющие, соответственно, члены m-го порядка в правых частях уравнений ((95.2). Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j i x_j + X_j^{(2)} + \ldots + X_j^{(N)} + \varphi_j(t,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2), \\ \frac{dy_j}{dt} &= -\lambda_j i y_j + Y_j^{(2)} + \ldots + Y_j^{(N)} + \psi_j(t,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) \\ &(j=1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{95.3}$$

где N — сколь угодно большое целое число, а φ_j и ψ_j — зависящие от t аналитические функции переменных x_1, y_1, x_2, y_2, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат условиям

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_j(t,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)| &< A\{|x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|\}^{N+1}, \\ |\psi_j(t,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)| &< A\{|x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.4}$$

где A — некоторая постоянная. Если невозмущенное движение $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ для системы (95.3) будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций

φ_j и ψ_j, то согласно § 93 невозмущенное движение $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = z_1 = \ldots = z_n = 0$ для системы (95.1) будет также соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво. Таким образом, задача сводится к исследованию системы (95.3).

Заметим прежде всего, что переменные x_j и y_j являются комплексно сопряженными. Поэтому вторая группа уравнений (95.3) может быть получена из первой заменой i на $-i$, x_j на y_j, y_j на x_j. Этим обстоятельством мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Введем теперь в уравнения (95.3) вместо переменных x_1, y_1, x_2, y_2 переменные u_1, v_1, u_2, v_2 при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x_j &= u_j + u_j^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots + u_j^{(N)}(u_1, v_1, u_2, v_2),\\ y_j &= v_j + v_j^{(2)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots + v_j^{(N)}(u_1, v_1, u_2, v_2)\\ &\qquad (j = 1,\ 2) \end{aligned}\right\} \quad (95.5)$$

где $u_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ и $v_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ — некоторые подлежащие определению формы m-го порядка переменных u_1, v_1, u_2, v_2. Эти формы мы постараемся подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= \lambda_j i u_j + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} U_j^{(2k+1)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \Phi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2),\\ \frac{dv_j}{dt} &= -\lambda_j i v_j + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)} \overline{U}_j^{(2k+1)}(v_1, u_1, v_2, u_2) + \Psi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2)\\ &\qquad (j = 1,\ 2). \end{aligned}\right\} \quad (95.6)$$

Здесь функции Φ_j и Ψ_j начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка (число N предполагаем нечетным), $U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ и $\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2)$ — формы m-го порядка переменных u_1, v_1, u_2, v_2. Черта над буквой обозначает комплексную сопряженность, так что формы $\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2)$ получаются из $U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ заменой i на $-i$, u_j на v_j и v_j на u_j, т. е. если

$$U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2} \quad (95.7)$$
$$(j = 1,\ 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m),$$

то

$$\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2) = \sum \overline{A}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2} \quad (95.8)$$
$$(j = 1,\ 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m).$$

Формы $U_j^{(m)}$, кроме того, таковы, что

$$\left.\begin{aligned} &A_1^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}=0, \text{ если } (n_1-n_2)^2+(m_1-m_2-1)^2\neq 0; \\ &A_2^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}=0, \text{ если } (m_1-m_2)^2+(n_1-n_2-1)^2\neq 0, \end{aligned}\right\}$$

так что из всех коэффициентов $A_1^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}$ отличными от нуля являются лишь те, для которых одновременно $n_1=n_2$ и $m_1-m_2=1$, а из коэффициентов $A_2^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}$ отличными от нуля будут лишь те, для которых одновременно $m_1=m_2$, $n_1-n_2-1=0$.

Мы сейчас покажем, что эти условия могут быть удовлетворены и что они определяют как формы $u_j^{(m)}$, $v_j^{(m)}$, так и коэффициенты $A_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}$, причем все эти величины определяются крайне простыми вычислениями, так как для каждого коэффициента форм $u_j^{(m)}, v_j^{(m)}$ и для каждого коэффициента $A_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}$ получится линейное алгебраическое уравнение с одной неизвестной.

Заметим прежде всего, что, как показывают уравнения (95.6), вторая группа этих уравнений должна получиться (по крайней мере, с точностью до членов N-го порядка) из первой группы заменой i на $-i$, u_j на v_j, v_j на u_j, т. е. переменные u_j и v_j должны получиться комплексно сопряженными. Так как такими же свойствами обладают и исходные уравнения (95.3), то должно быть $v_j^{(m)}(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)=\overline{u}_j^{(m)}(v_1,\ u_1,\ v_2,\ u_2)$, т. е. если

$$u_j^{(m)}=\sum B_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}u_1^{m_1}v_1^{m_2}u_2^{n_1}v_2^{n_2} \tag{95.10}$$

$$(j=1,\ 2;\ m_1+m_2+n_1+n_2=m),$$

то

$$v_j^{(m)}=\sum \overline{B}_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}v_1^{m_1}u_1^{m_2}v_2^{n_1}u_2^{n_2} \tag{95.11}$$

$$(j=1,\ 2;\ m_1+m_2+n_1+n_2=m).$$

Если при выполнении этих условий удастся подобрать преобразование (95.5) так, чтобы первая группа уравнений (95.6) имела требуемый вид, то требуемый вид будет иметь также и вторая группа этих уравнений.

Заменяя в первой группе уравнений (95.3) x_j и y_j их выражениями (95.5) и принимая во внимание (95.6), получим:

$$\lambda_j i u_j+U_j^{(3)}+\ldots+\sum_{\beta=2}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial u_\alpha}(\lambda_\alpha i u_\alpha+U_\alpha^{(3)}+\ldots)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial v_\alpha}(-\lambda_\alpha i v_\alpha+\overline{U}_\alpha^{(3)}+\ldots)\right\}=\lambda_j i(u_j+u_j^{(2)}+\ldots)+$$

$$+X_j^{(2)}(u_1+\ldots,\ \ldots,\ v_2+\ldots)+\ldots\qquad (j=1,\ 2). \tag{95.12}$$

Задавшись произвольным числом $m < N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2}$, где $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Тогда, принимая во внимание (95.7), (95.8), (95.10) и (95.11), мы получим для определения коэффициентов $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ следующие уравнения:

$$[(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j] B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} + \\ + \alpha A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}, \qquad (95.13)$$

где $\alpha = 0$ при m четном и $\alpha = 1$ при m нечетном.

Здесь $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ — целые рациональные функции от тех коэффициентов $A_s^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ и $B_s^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ (и комплексно сопряженных с ними величин), для которых $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 < m$. Допустим, что все эти коэффициенты уже определены и, следовательно, величины $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ известны. Тогда будем различать два случая. Первым из них будет тот, когда при $j = 1$ одновременно выполняются условия $m_1 = m_2 + 1$, $n_1 = n_2$, а при $j = 2$ — условия $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2 + 1$. Этот случай возможен лишь при m нечетном. В первом случае коэффициент при $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ в уравнении (95.13) обращается в нуль, и мы получим вполне определенное значение для $A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$:

$$A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}.$$

Коэффициент $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ остается произвольным, и мы его можем положить равным нулю.

Во втором случае вышеуказанные условия относительно индексов не выполняются. В этом случае коэффициент при $B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ в уравнении (95.13) не обращается в нуль, так как, по условию, отношение λ_1/λ_2 является числом иррациональным. Мы можем тогда положить

$$A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = 0, \quad B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \frac{C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}}{(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j}.$$

Если теперь учесть, что при $m = 1$ коэффициенты $C_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$ являются известными величинами, то из вышесказанного вытекает, что мы можем действительно определить преобразование (95.5), приводящее систему (95.3) к виду (95.6), причем для коэффициентов форм $U_{(j)}^m(u_1, v_1, u_2, v_2)$ будут выполняться условия (95.9). Само определение преобразования, как мы сейчас видели, чрезвычайно просто и сводится к составлению уравнений (95.13), что требует лишь развертывания левых и правых частей уравнений (95.12).

Рассмотрим подробнее преобразованные уравнения. Очевидно, прежде всего, что функции Φ_j и Ψ_j удовлетворяют при всех $t \geqslant 0$ и при значениях u_j и v_j, достаточно малых, неравенствам

$$\left.\begin{aligned} \Phi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2) &< B\{|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|\}^{N+1}, \\ \Psi_j(t, u_1, v_1, u_2, v_2) &< B\{|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.14}$$

где B — некоторое положительное число.

Положим теперь

$$u_j = \rho_j(\cos\vartheta_j + i\sin\vartheta_j), \quad v_j = \rho_j(\cos\vartheta_j - i\sin\vartheta_j) \tag{95.15}$$
$$(j = 1, 2),$$

где ρ_1, ρ_2, ϑ_1 и ϑ_2 — новые переменные. Тогда, принимая во внимание (95.7), (95.8) и (95.9), легко найдем, что уравнения (95.6) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_j}{dt} + i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} &= i\lambda_j\rho_j + \sum A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \\ &\qquad + e^{-i\vartheta}j\Phi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_1}), \\ \frac{d\rho_j}{dt} - i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} &= -i\lambda_j\rho_j + \sum \overline{A}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \\ &\qquad + e^{i\vartheta}j\Psi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_2}) \end{aligned}$$
$$(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N).$$

Полагая

$$a_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \operatorname{Re} A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}, \quad b_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} = \operatorname{Im} A_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}$$

и выделяя вещественные и мнимые части, получим две группы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho_j}{dt} = \sum a_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2) \\ &\qquad (j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N) \\ &\text{и} \\ &\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = \rho_j\lambda_j + \sum b_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + \theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2) \\ &\qquad (j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N). \end{aligned}\right\} \tag{95.16}$$

Здесь функции R_j, θ_j, очевидно, таковы, что при всех $t \geqslant 0$, при всех значениях ϑ_1, ϑ_2 и при достаточно малых значениях ρ_1 и ρ_2 выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} |R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| &< C\{|\rho_1| + |\rho_2|\}^{N+1}, \\ |\theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| &< C\{|\rho_1| + |\rho_2|\}^{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{95.17}$$

где C — положительная постоянная.

Если невозмущенное движение $\rho_1=\rho_2=0$ для уравнений (95.16), в которых ϑ_1 и ϑ_2 рассматриваются как произвольные функции времени, устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво при любом выборе функций R_j, удовлетворяющих условиям (95.17), то по характеру преобразования (95.15) то же самое будет иметь место и для невозмущенного движения $x_1=y_1=x_2=y_2=0$ уравнений (95.3) при любом выборе функций φ_j и ψ_j, удовлетворяющих условиям (95.4). Справедливо, очевидно, и обратное соотношение между системами (95.3) и (95.16). Поэтому задача сводится к исследованию на устойчивость системы второго порядка (95.16).

Обращаясь к последней, замечаем, что она представляет некоторый частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, и для решения ее мы можем воспользоваться полученными в этом параграфе результатами. Запишем с этой целью уравнения (95.16) в виде

$$\frac{d\rho_j}{dt}=R_j^{(m)}(\rho_1,\ \rho_2)+R_j^{(m+2)}(\rho_1,\ \rho_2)+\ldots+R_j^{(N)}(\rho_1,\ \rho_2)+ \\ +R_j(t,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \rho_1,\ \rho_2) \qquad (95.18)$$

$$(j=1,\ 2),$$

где $m\geqslant 3$ (m — нечетное), а $R_j^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных ρ_1 и ρ_2. При этом, принимая во внимание (95.9), мы можем писать:

$$R_1^{(m)}=A_m\rho_1^m+A_{m-2}\rho_1^{m-2}\rho_2^2+\ldots+A_1\rho_1\rho_2^{m-1},$$

$$R_2^{(m)}=B_m\rho_2^m+B_{m-2}\rho_2^{m-2}\rho_1^2+\ldots+B_1\rho_2\rho_1^{m-1},$$

где A_s и B_s — некоторые постоянные.

Составляя далее формы $P(\rho_1,\ \rho_2)$ и $G(\rho_1,\ \rho_2)$ (§ 94), будем иметь:

$$P(\rho_1,\ \rho_2)=\rho_1R_1^{(m)}+\rho_2R_2^{(m)}= \\ =A_m\rho_1^{m+1}+(A_{m-2}+B_1)\rho_1^{m-1}\rho_2^2+\ldots+B_m\rho_2^{m+1},$$

$$G(\rho_1,\ \rho_2)=\rho_1R_2^{(m)}-\rho_2R_1^{(m)}= \\ =\rho_1\rho_2\left[(B_1-A_m)\rho_1^{m-1}+(B_3-A_{m-2})\rho_1^{m-3}\rho_2^2+\ldots+(B_m-A_1)\rho_2^{m-1}\right].$$

В рассматриваемом случае G никогда не будет знакоопределенной. При этом уравнение $G=0$ выполняется для осей координат $\rho_1=\rho_2=0$ и прямых, определяемых уравнением

$$G^*(\rho_1,\ \rho_2)=(B_1-A_m)\rho_1^{m-1}+(B_3-A_{m-2})\rho_1^{m-3}\rho_2^2+\ldots+ \\ +(B_m-A_1)\rho_2^{m-1}=0. \qquad (95.19)$$

На осях координат $\rho_1=0$ и $\rho_2=0$ форма P принимает соответственно значения $B_m\rho_2^{m+1}$ и $A_m\rho_1^{m+1}$. Поэтому на основании теоремы предыдущего параграфа невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин A_m, B_m положительна. Если $A_m \leqslant 0$ и $B_m \leqslant 0$, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы на одной из вещественных прямых, определяемых уравнением (95.19), форма P может принимать положительные значения. Напротив, если на каждой такой вещественной прямой форма P может принимать только отрицательные значения и если при этом $A_m < 0$, $B_m < 0$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически. Если форма P обращается в нуль либо при $\rho_1 = 0$ (т. е. $B_m = 0$), либо при $\rho_2 = 0$ (т. е. $A_m = 0$), либо на одной из прямых (95.19) и если при этом ни на одной из прямых (95.19) или осях координат она не может принимать положительных значений, то решение задачи требует рассмотрения в уравнениях (95.18) членов порядков более высоких, чем m. На этих исключительных случаях мы здесь не останавливаемся.

В тех случаях, которые мы сейчас рассмотрели, задача решается членами наинизшего порядка в уравнениях (95.18). Следовательно, коэффициенты $A_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}$ нужно вычислять до тех пор, пока мы не придем к некоторому порядку m, для которого не все величины $\mathrm{Re}\left(A_1^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}\right)$ равны нулю при $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Может случиться, что все величины $\mathrm{Re}\left(A_j^{(m_1,\, m_2,\, n_1,\, n_2)}\right)$ обращаются в нуль, как бы велико ни было число $m_1 + m_2 + n_1 + n_2$. Этот исключительный случай, при котором задача устойчивости вообще не решается конечным числом членов, как и все другие аналогичные случаи, здесь не рассматривается.

Таким образом, мы получили решение задачи устойчивости для рассматриваемого критического случая, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней[1]).

Пример. Пусть предложена система четвертого порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = f\left[x,\ y,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + a\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 x = F\left[x,\ y,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + b\left(\frac{dy}{dt}\right)^3,$$

где a и b — постоянные, а f и F — аналитические функции своих аргументов, разложения которых по степеням x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$

[1]) Этот критический случай рассмотрен впервые в работе Г. В. Каменкова, цитированной на стр. 411, который также приводит задачу к случаю двух нулевых корней. Однако предложенный Г. В. Каменковым метод решения задачи требует проведения большого числа предварительных преобразований, каждое из которых приводит к очень громоздким вычислениям.

начинаются членами не ниже третьего порядка. Полагая

$$x_1 = x - \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}, \quad y_1 = x + \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt},$$
$$x_2 = y - \frac{i}{\omega}\frac{dy}{dt}, \quad y_2 = y + \frac{1}{\omega}\frac{dy}{dt},$$

приведем данную систему к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + i\varphi_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(y_1 - x_1)^3,\\
\frac{dx_2}{dt} &= i\omega x_2 + i\varphi_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{b\omega^3}{8\lambda}(y_2 - x_2)^3,\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 - i\varphi_1(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(x_1 - y_1)^3,\\
\frac{dy_2}{dt} &= -i\omega y_2 - i\varphi_2(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{b\omega^3}{8\lambda}(x_2 - y_2)^3,
\end{aligned}\right\} \tag{95.20}$$

где φ_1 и φ_2 — *вещественные* аналитические функции своих аргументов, разложения которых начинаются членами не ниже третьего порядка. Делаем далее подстановку (95.5), в которой можно положить $u_j^{(2)} = v_j^{(2)} = 0$, так как правые части уравнений (95.20) не содержат членов второго порядка. Таким образом, полагаем:

$$\left.\begin{aligned}
x_j &= u_j + u_j^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots,\\
y_j &= v_j + v_j^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{95.21}$$
$$(j = 1, 2),$$

где

$$\left.\begin{aligned}
u_j^{(3)} &= \sum B_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2},\\
v_j^{(3)} &= \sum \overline{B}_j^{(m_1, m_2, n_1, n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2}\\
&(j = 1,\ 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3).
\end{aligned}\right\} \tag{95.22}$$

Подстановку (95.21) подбираем таким образом, чтобы уравнения приняли вид (95.6) с соблюдением условий (95.9), так что можно положить:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + \alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + \ldots,\\
\frac{du_2}{dt} &= i\omega u_2 + \alpha_2 u_2^2 v_2 + \beta_2 u_1 u_2 v_1 + \ldots,\\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{\alpha}_1 v_1^2 u_1 + \overline{\beta}_1 v_1 v_2 u_2 + \ldots,\\
\frac{dv_2}{dt} &= -i\omega v_2 + \overline{\alpha}_2 v_2^2 u_2 + \overline{\beta}_2 v_1 v_2 u_1 + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{95.23}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — подлежащие определению постоянные и ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого.

Подставляя в первое уравнение (95.20) вместо x_1, y_1, x_2, y_2 их значения из (95.21), заменяя при этом производные $\frac{du_j}{dt}$, $\frac{dv_j}{dt}$ их выражениями (95.23) и приравнивая члены третьего порядка, получим:

$$\alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + i\lambda u_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1} - i\lambda v_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1} + i\omega u_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_2} - i\omega v_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_2} =$$
$$= i\lambda u_1^{(3)} + i\varphi_1^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(v_1 - u_1)^3, \quad (95.24)$$

где $\varphi_1^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в функции φ_1. Приравнивая в обеих частях (95.24) коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$, учитывая при этом (95.22), найдем:

$$\alpha_1 + (2i\lambda - i\lambda) B_1^{(2,1,0,0)} = i\lambda B_1^{(2,1,0,0)} + ia_1 + \frac{3a\lambda^3}{8\omega},$$
$$\beta_1 + (i\lambda + i\omega - i\omega) B_1^{(1,0,1,1)} = i\lambda B_1^{(1,0,1,1)} + ib_1,$$

или

$$\alpha_1 = \frac{3a\lambda^3}{8\omega} + ia_1, \quad \beta_1 = ib_1.$$

Здесь a_1 и b_1 — вещественные числа, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$ в функции $\varphi_1(u_1, v_1, u_2, v_2)$. Аналогичным образом находим:

$$\alpha_2 = \frac{3b\omega^3}{8\lambda} + ia_2, \quad \beta_2 = ib_2,$$

где a_2 и b_2 — коэффициенты при $u_2^2 v_2$ и $u_1 u_2 v_1$ в функции $\varphi_2(u_1, v_1, u_2, v_2)$.

Делая теперь подстановку (95.15), окончательно найдем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{3a\lambda^3}{8\omega}\rho_1^3 + \ldots, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{3b\omega^3}{8\lambda}\rho_2^3 + \ldots,$$

где ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого. Отсюда сразу следует, что если хотя бы один из коэффициентов a или b положителен, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же оба коэффициента отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически.

§ 96. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений[1]).

Рассмотрим теперь систему $(n+3)$-го порядка с постоянными коэффициентами, для которой характеристическое уравнение первого

[1]) См. Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

Эта задача также впервые рассматривалась Г. В. Каменковым. Предлагаемый ниже метод отличается от метода Г. В. Каменкова и приводит к значительно более простым вычислениям.

приближения имеет один нулевой корень, два чисто мнимых корня $\pm i\lambda$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Подходящим выбором переменных рассматриваемые уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X(x,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ z_n),\\
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + X_1(x,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ z_n),\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + Y_1(x,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ z_n),\\
\frac{dz_s}{dt} &= p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + p_s x + q_s x_1 + r_s y_1 +\\
&\quad + Z_s(x,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\\
&\qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}
$$

где разложения функций X, X_1, Y_1, Z_s начинаются членами не ниже второго порядка, а коэффициенты p_{sj} таковы, что уравнение

$$|p_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Пользуясь методом § 93, мы можем привести задачу к исследованию системы третьего порядка вида

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X^{(2)}(x,\ x_1,\ y_1) + \ldots + X^{(N)}(x,\ x_1,\ y_1) + \varphi(t,\ x,\ x_1,\ y_1),\\
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + X_1^{(2)}(x,\ x_1,\ y_1) + \ldots + X_1^{(N)}(x,\ x_1,\ y_1) +\\
&\qquad + \varphi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1),\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + Y_1^{(2)}(x,\ x_1,\ y_1) + \ldots + Y_1^{(N)}(x,\ x_1,\ y_1) +\\
&\qquad + \psi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1),
\end{aligned}
\right\}
\tag{96.1}
$$

где $X^{(k)}$, $X_1^{(k)}$ и $Y_1^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных x, x_1, y_1 а φ, φ_1 и ψ_1 — зависящие от t аналитические функции переменных x, x_1, y_1, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 0$ в окрестности начала координат неравенствам

$$
\left.
\begin{aligned}
|\varphi(t,\ x,\ x_1,\ y_1)| &< A\,\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1},\\
|\varphi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)| &< A\,\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1},\\
|\psi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)| &< A\,\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{96.2}
$$

При этом переменные x_1 и y_1 являются комплексно сопряженными, так что третье уравнение (96.1) может быть получено из второго заменой i на $-i$, x_1 на y_1 и y_1 на x_1. Первое уравнение (96.1) при такой замене не изменяется.

Преобразуем теперь уравнения (96.1) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= u + u^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + u^{(N)}(u, u_1, v_1), \\ x_1 &= u_1 + u_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + u_1^{(N)}(u, u_1, v_1), \\ y_1 &= v_1 + v_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + v_1^{(N)}(u, u_1, v_1), \end{aligned}\right\} \tag{96.3}$$

где $u^{(k)}$, $u_1^{(k)}$, $v_1^{(k)}$ — подлежащие определению формы k-го порядка новых переменных u, u_1, v_1. Эти формы мы постараемся подобрать таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= U^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + U^{(N)}(u, u_1, v_1) + U(t, u, u_1, v_1), \\ \frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + U_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \ldots + U_1^{(N)}(u, u_1, v_1) + \\ &\qquad + U_1(t, u, u_1, v_1), \\ \frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{U}_1^{(2)}(u, v_1, u_1) + \ldots + \overline{U}_1^{(N)}(u, v_1, u_1) + \\ &\qquad + V_1(t, u, u_1, v_1). \end{aligned}\right\} \tag{96.4}$$

Здесь $U^{(k)}$, $U_1^{(k)}$, $\overline{U}_1^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных u, u_1, v_1, причем формы $\overline{U}_1^{(k)}$ получаются из $U_1^{(k)}$ заменой i на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Кроме того, формы $U^{(k)}$ и $U_1^{(k)}$ таковы, что если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} U^{(k)} &= \sum A^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \\ U_1^{(k)} &= \sum A_1^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \\ &(n + m_1 + m_2 = k), \end{aligned}\right\} \tag{96.5}$$

то для коэффициентов $A^{(n, m_1, m_2)}$ и $A_1^{(n, m_1, m_2)}$ должны выполняться соотношения

$$\left.\begin{aligned} A^{(n, m_1, m_2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2, \\ A_1^{(n, m_1, m_2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2 + 1. \end{aligned}\right\} \tag{96.6}$$

Покажем, что формы $u^{(k)}$, $u_1^{(k)}$ и $v_1^{(k)}$ в преобразовании (96.3) можно действительно выбрать так, чтобы для уравнений (96.4) выполнялись указанные условия. Положим с этой целью

$$\left.\begin{aligned} u^{(k)} &= \sum B^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \\ u_1^{(k)} &= \sum B_1^{(n, m_1, m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \\ &(n + m_1 + m_2 = k). \end{aligned}\right\} \tag{96.7}$$

Так как второе уравнение (96.4) должно перейти в третье (по крайней мере, с точностью до величин N-го порядка) при замене i

на $-l$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1, то должно быть:

$$v_1^{(k)} = \sum \overline{B}_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} u^n v_1^{m_1} u_1^{m_2} \qquad (n + m_1 + m_2 = k). \tag{96.8}$$

При таком выборе форм $v_1^{(k)}$ третье уравнение (96.4) будет нужного вида, если только этим свойством будут обладать и первые два уравнения. Остается, таким образом, определить формы $u^{(k)}$ и $u_1^{(k)}$. Подставим с этой целью в первые два уравнения (96.1) вместо x, x_1, y_1 их выражения (96.3). Тогда, принимая во внимание (96.4), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1 + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u}\right)\left(U^{(2)} + \ldots\right) + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u_1}\left(i\lambda u_1 + U_1^{(2)} + \ldots\right) + \\
&\qquad + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial v_1}\left(-i\lambda v_1 + \overline{U}_1^{(2)} + \ldots\right) = \\
&\qquad = X^{(2)}(u + \ldots,\, u_1 + \ldots,\, v_1 + \ldots) + \ldots, \\
&\left(1 + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u_1}\right)\left(i\lambda u_1 + U_1^{(2)} + \ldots\right) + \\
&+ \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial v_1}\left(-i\lambda v_1 + \overline{U}_1^{(2)} + \ldots\right) + \sum_{\alpha=2}^{N} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u}\left(U^{(2)} + \ldots\right) = \\
&\qquad = i\lambda\left(u_1 + U_1^{(2)} + \ldots\right) + \\
&\qquad + X_1^{(2)}(u + \ldots,\, u_1 + \ldots,\, v_1 + \ldots) + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{96.9}$$

Задавшись каким-нибудь числом $k < N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}$, где $n + m_1 + m_2 = k$. Будем на основании (96.6) и (96.7) иметь:

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} + (m_1 - m_2)\, i\lambda B^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$
$$A_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} + (m_1 - m_2 - 1)\, i\lambda B_1^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}.$$

Здесь $C^{(n,\, m_1,\, m_2)}$, $C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ — целые рациональные функции от тех $A^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $A_1^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $B^{(p,\, q_1,\, q_2)}$, $B_1^{(p,\, q_1,\, q_2)}$ и комплексно сопряженных с ними величин, для которых $p + q_1 + q_2 < k$. Допустим, что все указанные величины уже вычислены и, следовательно, величины $C^{(n,\, m_1,\, m_2)}$, $C_1^{(n,\, m_1,\, m_2)}$ известны. Тогда при $m_1 \neq m_2$ мы можем положить:

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} = 0, \quad B^{(n,\, m_1,\, m_2)} = \frac{1}{(m_1 - m_2)\, i\lambda} C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

а при $m_1 = m_2$ получим, что

$$A^{(n,\, m_1,\, m_2)} = C^{(n,\, m_1,\, m_2)},$$

а коэффициент $B^{(n,\,m_1,\,m_2)}$ остается произвольным. Мы можем положить его равным нулю или любой другой величине. Далее, при $m_1 \neq m_2 + 1$ мы можем положить:

$$A_1^{(n,\,m_1,\,m_2)} = 0, \quad B_1^{(n,\,m_1,\,m_2)} = \frac{C_1^{(n,\,m_1,\,m_2)}}{(m_1 - m_2 - 1)\,i\lambda}.$$

Если $m_1 = m_2 + 1$, то

$$A_1^{(n,\,m_1,\,m_2)} = C_1^{(n,\,m_1,\,m_2)},$$

а коэффициент $B_1^{(n,\,m_1,\,m_2)}$ может быть выбран совершенно произвольно.

Так как при $n + m_1 + m_2 = 2$ величины $C^{(n,\,m_1,\,m_2)}$ и $C_1^{(n,\,m_1,\,m_2)}$ известны, то отсюда следует, что действительно существует преобразование (96.3), обладающее всеми указанными для него свойствами. При этом легко видеть, что все коэффициенты $A^{(n,\,m_1,\,m_2)}$ будут вещественными. Действительно, первое уравнение (96.1) не изменяется при замене i на $-i$, x_1 на y_1 и y_1 на x_1. Так как для преобразования (96.3) выполняется (96.8), то первое уравнение (96.4) не изменится при замене i на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Но так как $A^{(n,\,m_1,\,m_2)} = 0$ при $m_1 \neq m_2$, то первое уравнение (96.4) не меняется при замене u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Следовательно, это уравнение не меняется при замене i па $-i$, откуда и вытекает вещественность коэффициентов $A^{(n,\,m_1,\,m_2)}$. Определение преобразования (96.3) приводится, как мы видим, к весьма простым вычислениям, сводящимся к развертыванию правых и левых частей уравнений (96.9).

Допустим, что указанное преобразование выполнено. Тогда функция $U(t,\ u,\ u_1,\ v_1)$ в уравнениях (96.4) будет, очевидно, удовлетворять неравенству

$$|U(t,\ u,\ u_1,\ v_1)| < B\,\{|u| + |u_1| + |v_1|\}^{N+1}, \qquad (96.10)$$

где B — положительная постоянная. Таким же точно неравенствам будут удовлетворять и функции U_1 и V_1. Положим теперь:

$$u_1 = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad v_1 = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta). \qquad (96.11)$$

Тогда получим:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{n+2m=2}^{N} A^{(n,\,m,\,m)} u^n \rho^{2m} + U\left(t,\ u,\ \rho e^{i\vartheta},\ \rho e^{-i\vartheta}\right),$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho i\,\frac{d\vartheta}{dt} = i\lambda\rho + \sum_{n+2m=1}^{N-1} A_1^{(n,\,m+1,\,m)} u^n \rho^{2m+1} + U_1(t,\ u,\ \rho e^{i\vartheta},\ \rho e^{-i\vartheta}),$$

$$\frac{d\rho}{dt} - \rho i\,\frac{d\vartheta}{dt} = -i\lambda\rho + \sum_{n+2m=1}^{N-1} \overline{A}_1^{(n,\,m+1,\,m)} u^n \rho^{2m+1} + U_1(t,\ u,\ \rho e^{i\vartheta},\ \rho e^{-i\vartheta}),$$

или, выделяя вещественные и мнимые части и учитывая, что коэффициенты $A^{(n,\ m,\ m)}$ вещественны, получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \sum_{n+2m=2}^{N} A^{(n,\ m,\ m)} u^n \rho^{2m} + U_*(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u),\\ \frac{d\rho}{dt} &= \sum_{n+2m=1}^{N-1} a^{(n,\ m+1,\ m)} u^n \rho^{2m+1} + R(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u)\end{aligned}\right\} \tag{96.12}$$

и уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \sum_{n+2m=1}^{N-1} b^{(n,\ m+1,\ m)} u^n \rho^{2m} + \theta(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u).$$

Здесь

$$a^{(n,\ m+1,\ m)} = \operatorname{Re}\left(A_1^{(n,\ m+1,\ m)}\right),$$
$$b^{(n,\ m+1,\ m)} = \operatorname{Im}\left(A_1^{(n,\ m+1,\ m)}\right),$$

и функции R, U_* при достаточно малых ρ и u и при всех значениях ϑ и $t \geqslant 0$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned}|U_*(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1},\\ |R(t,\ \vartheta,\ \rho,\ u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1},\end{aligned}\right\} \tag{96.13}$$

где C — положительная постоянная.

Аналогичному условию удовлетворяет и функция $\theta(t,\ \vartheta,\ \rho)$.

Если невозмущенное движение $u = \rho = 0$ для уравнений (96.12), в которых ϑ рассматривается как произвольная функция времени, будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций U_*, R, удовлетворяющих условиям (96.13), то невозмущенное движение $x = x_1 = y_1 = 0$ для системы (96.1) будет, соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций $\varphi(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, $\varphi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, $\psi_1(t,\ x,\ x_1,\ y_1)$, удовлетворяющих условиям (96.2). Но тогда такие же обстоятельства будут иметь место и для невозмущенного движения $x = x_1 = y_1 = z_1 = \ldots = z_n = 0$ исходной системы.

Таким образом, задача сводится к исследованию на устойчивость системы (96.12). Последняя задача является частным случаем задачи, рассмотренной в § 94, и для ее решения мы запишем уравнения (96.12) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= U_*^{(k)}(u,\ \rho) + \ldots + U_*^{(N)}(u,\ \rho) + U_*(t,\ \vartheta,\ u,\ \rho),\\ \frac{d\rho}{dt} &= R^{(k)}(u,\ \rho) + \ldots + R^{(N)}(u,\ \rho) + R(t,\ \vartheta,\ u,\ \rho),\end{aligned}\right\} \tag{96.14}$$

где $k \geqslant 2$ и $U_*^{(l)}$, $R^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных u и ρ. При этом в силу (96.12) формы $U_*^{(l)}$ содержат только четные степени ρ, а формы $R^{(l)}$ — только нечетные степени ρ. Так что мы можем, в частности, писать:

$$R^{(k)}(u,\ 0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$G(u,\ \rho) = uR^{(k)} - \rho U_*^{(k)} = \rho G'(u,\ \rho),$$

где $G'(u,\ \rho)$—форма k-го порядка переменных u и ρ. Следовательно, форма G не является знакоопределенной. Невозмущенное движение будет неустойчиво, если существует хотя бы одна вещественная прямая $G(u,\ \rho) = 0$, на которой $P(u,\ \rho)$ может принимать положительные значения, и асимптотически устойчиво, если на всех вещественных прямых $G = 0$ форма P может принимать только отрицательные значения. Все это будет справедливо при любом выборе функций U_* и R, и число N можно будет положить равным k.

Случаи, когда ни на одной из вещественных прямых, определяемых уравнением $G = 0$, форма P не может принимать положительных значений, но на некоторых из них может обращаться в нуль, мы здесь не рассматриваем. Мы не рассматриваем также и тех исключительных случаев, когда все формы $U_*^{(k)}$, $R^{(k)}$, как бы велико ни было число k, обращаются тождественно в нуль, что будет иметь место тогда, когда все величины $A^{(n,\ m,\ m)}$ и $a^{(n,\ m+1,\ m)}$ равны нулю. В этих случаях задача устойчивости не решается, очевидно, конечным числом членов в уравнениях возмущенного движения.

§ 97. Критические случаи периодических движений. Приведение к установившимся движениям[1]).

Мы переходим к исследованию критических случаев периодических движений. Допустим, что предложена система $(n+k)$-го порядка с периодическими коэффициентами, для которой уравнения первого приближения имеют n характеристических показателей с отрицательными вещественными частями и k характеристических показателей с вещественными частями, равными нулю. Мы будем предполагать, что переменные выбраны таким образом, что первое приближение имеет постоянные коэффициенты и в нем разделены критические и некритические переменные. Таким образом, уравнения возмущенного

---

[1]) Малкин И. Г., Решение некоторых критических случаев задачи устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.

движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_j}{dt}&=q_{j1}y_1+\ldots+q_{jk}y_k+Y_j(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{dx_s}{dt}&=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+r_{s1}y_1+\ldots+r_{sk}y_k+\\ &\qquad+X_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\end{aligned}\right\}\qquad(97.1)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь Y_j и X_s — аналитические функции переменных y_i и x_s, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Эти функции зависят также от t, по отношению к которому они периодичны с периодом ω. Коэффициенты q_{ji}, p_{si} и r_{si} являются постоянными, причем уравнение

$$|p_{si}-\delta_{si}|=0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями, а все корни уравнения

$$|q_{ji}-\delta_{ji}|=0 \qquad (97.2)$$

имеют вещественные части, равные нулю.

Согласно теореме 2 § 93 ответ на задачу устойчивости для системы (97.1) совпадает с ответом на ту же задачу для системы k-го порядка

$$\frac{dy_i}{dt}=q_{i1}y_1+\ldots+q_{ik}y_k+Y_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ u_1,\ \ldots,\ u_n), \qquad (97.3)$$

где $u_s(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)$ — ряды по степеням $y_1,\ \ldots,\ y_k$ с периодическими коэффициентами, являющиеся формальными решениями уравнений с частными производными (93.3). Это будет, однако, справедливо лишь в том случае, когда задача устойчивости для системы (97.3) решается конечным числом членов.

Мы будем предполагать, что переменные y_i выбраны таким образом, что линейная часть уравнений (97.3) имеет каноническую форму, так что

$$q_{11}=\lambda_1,\ q_{22}=\lambda_2,\ \ldots,\ q_{kk}=\lambda_k,\ q_{21}=\alpha_1,\ q_{32}=\alpha_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ q_{n,\,n-1}=\alpha_{n-1},$$

а остальные коэффициенты q_{ij} равны нулю. Здесь λ_i — корни уравнения (97.2), которые, как уже указывалось, имеют вещественные части, равные нулю, а α_i — некоторые постоянные. Все эти постоянные равны нулю, если уравнение (97.2) не имеет кратных корней. Но если указанное уравнение имеет кратные корни, то некоторые из этих постоянных могут быть отличными от нуля и эти отличные от нуля величины α_i можно предполагать произвольными. Обозначим, далее, через $Y_i^m(t, y_1, \ldots, y_k)$ формы с периодическими коэффициентами, представляющими собой члены k-го порядка в разложениях правых частей уравнений (97.3). Тогда, обозначая через N достаточно большое целое число, рассмотрим систему

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \alpha_{i-1} y_{i-1} + Y_i^{(2)} + \ldots + Y_i^{(N)} + \varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k) \quad (97.4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k; \ \alpha_0 = 0),$$

совпадающую до членов N-го порядка с системой (97.3). Если невозмущенное движение для системы (97.4) будет устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций φ_i, удовлетворяющих при всех $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат неравенствам

$$|\varphi_i(t, y_1, \ldots, y_k)| < A\{|y_1| + \ldots + |y_k|\}^{N+1}, \quad (97.5)$$

где A — некоторая постоянная, то и невозмущенное движение для системы (97.1) будет, соответственно, устойчиво или асимптотически устойчиво, или неустойчиво.

Для решения задачи устойчивости для системы (97.4) мы воспользуемся методом, который мы уже применяли в §§ 66 и 67 при решении частных случаев рассматриваемой сейчас задачи. Этот метод заключается в преобразовании уравнений (97.4) к такому виду, чтобы в нем члены до порядка N имели постоянные коэффициенты. Тогда задача сведется к уже рассмотренной задаче критических случаев установившихся движений.

Мы сейчас покажем, что указанное преобразование действительно может быть выполнено, если между корнями λ_i и периодом ω не существует никаких соотношений вида

$$\pm\sqrt{-1}\,(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i) = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

где $m_1, \ldots, m_k$ — произвольные целые положительные числа (некоторые из них могут равняться нулю), связанные соотношением $m_1 + \ldots + m_k \leqslant N$. Мы будем предполагать, что это условие выполнено и будем искать интересующее нас преобразование в виде

$$y_i = u_i + \sum A_i^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}(t)\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_k^{m_k} \quad (97.6)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k; \ 2 \leqslant m_1 + \ldots + m_k \leqslant N),$$

где $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t)$ — некоторые периодические функции t с периодом ω. Мы постараемся подобрать эти функции таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид

$$\frac{du_i}{dt}=\lambda_i u_i+\alpha_{i-1}u_{i-1}+$$
$$+\sum a_i^{(m_1,\ldots,m_k)}u_1^{m_1}\ldots u_k^{m_k}+U_i(t,u_1,\ldots,u_k) \qquad (97.7)$$
$$(i=1,2,\ldots,k;\ 2\leqslant m_1+\ldots+m_k\leqslant N),$$

где $a_i^{(m_1,\ldots,m_k)}$ — постоянные, а U_i — зависящие от t аналитические функции переменных $u_1,\ldots,u_k$, разложения которых начинаются членами не ниже $(N+1)$-го порядка. Эти функции, очевидно, удовлетворяют соотношениям вида (97.5).

Пусть $u_1^{(m)}(t,u_1,\ldots,u_k)$ обозначает совокупность членов m-го порядка в подстановке (97.6). Допустим, что все $u_i^{(s)}$, для которых $s<m$, и все $u_j^{(m)}$, для которых $j<i$, уже вычислены согласно вышеуказанным условиям. Тогда, подставляя в уравнения (97.4) вместо y_i их выражения (97.6), заменяя при этом производные $\frac{du_i}{dt}$ их выражениями (97.7) и приравнивая члены m-го порядка в левых и правых частях полученных таким образом уравнений, мы найдем для определения форм $u_i^{(m)}$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial u_j}(\lambda_j u_j+\alpha_{j-1}u_{j-1})+\sum a_i^{(m_1\ldots m_k)}u_1^{m_1}\ldots u_k^{m_k}=$$
$$=\lambda_i u_i^{(m)}+U_i^{(m)}(t,u_1,\ldots,u_k) \qquad (97.8)$$
$$(i=1,2,\ldots,k;\ m_1+\ldots+m_k=m;\ \alpha_0=0).$$

Здесь $U_i^{(m)}$ обозначает известные формы m-го порядка переменных $u_1,\ldots,u_k$, коэффициенты которых являются периодическими функциями t, периода ω.

Приравнивая в уравнениях (97.8) подобные члены, мы получим для определения коэффициентов $A_i^{(m_1,\ldots,m_k)}(t)$ систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений. При этом, если эти коэффициенты вычислять в определенном порядке (см. § 93, уравнения (93.13)), то для каждого из них получится уравнение вида

$$\frac{dA_i^{(m_1,\ldots,m_k)}}{dt}+(m_1\lambda_1+\ldots+m_k\lambda_k-\lambda_i)A_i^{(m_1,\ldots,m_k)}=$$
$$=-a_i^{(m_1,\ldots,m_k)}+B_i^{(m_1,\ldots,m_k)}(t), \qquad (97.9)$$

где $B_i^{(m_1,\ldots,m_k)}$ являются линейными функциями уже вычисленных величин $A_j^{(n_1,\ldots,n_k)}$ с периодическими коэффициентами.

Допустим, что все входящие в $B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ величины $A_j^{(n_1, \ldots, n_k)}$ уже вычислены и вышли периодическими. Тогда $B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ будут известными периодическими функциями времени и уравнение (97.9) даст возможность вычислить коэффициент $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$.

Для того чтобы этот коэффициент получился периодическим, необходимо, вообще говоря, подобрать постоянную $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$. Мы положим

$$a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega B_i^{(m_1, \ldots, m_k)} dt \quad \text{при} \quad m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i = 0.$$

При таком и только таком выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ уравнение (97.9) при $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i = 0$ будет иметь периодическое решение, определяемое, очевидно, формулой

$$A_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = \int B_i^{(m_1, \ldots, m_k)} dt.$$

Входящую сюда постоянную интегрирования можно выбрать по произволу. При $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ уравнение (97.9) имеет периодическое решение при любом выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$. С целью упрощения (весьма существенного) получаемых после преобразования уравнений (97.7) мы будем полагать:

$$a_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = 0 \quad \text{при} \quad m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i \neq 0. \tag{97.10}$$

При таком выборе постоянной $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ уравнение (97.9), как было показано в § 67, имеет периодическое решение

$$A_i^{(m_1, \ldots, m_k)} = e^{at} \left\{ \frac{e^{a\omega}}{1 - e^{a\omega}} \int_0^\omega e^{-at} f(t)\, dt + \int_0^t e^{-at} f(t)\, dt \right\}, \tag{97.11}$$

где для краткости положено:

$$a = \lambda_i - m_1\lambda_1 - \ldots - m_k\lambda_k, \quad f(t) = B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}(t).$$

Так как по условию a никогда не равняется $\pm \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{-1}$, то знаменатель в решении (97.11) всегда отличен от нуля и это решение действительно существует. Благодаря тому же условию однородная часть уравнения не имеет периодического решения с периодом, соизмеримым с ω, вследствие чего уравнение (97.9) кроме решения (97.11) не имеет других периодических решений.

Таким путем можно последовательно определить коэффициенты $A_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ преобразования и одновременно с ними коэффициенты $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ преобразованных уравнений. Если теперь учесть, что каждая из величин λ_i либо равна нулю, либо является чисто мнимой и что в последнем случае какая-нибудь из величин λ_j равна $-\lambda_i$, то мы придем к заключению, что, по крайней мере, при нечетном m некоторые из величин $m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k - \lambda_i$ равны нулю. Следовательно, не все постоянные $a_i^{(m_1, \ldots, m_k)}$ равны нулю, если только не рассматривать тот особо исключительный случай, когда все интегралы

$$\int_0^\omega B_i^{(m_1, \ldots, m_k)}\, dt,$$

как бы велико ни было m, равны нулю. Исключая из рассмотрения указанный случай, как и все другие случаи, при которых задача устойчивости не решается конечным числом членов, мы приведем любой критический случай для периодических движений к аналогичному случаю для установившихся движений.

В частности, мы имеем возможность решить задачу устойчивости для критических случаев одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней и двух пар чисто мнимых корней. Заметим, что в этих случаях в силу (97.10) уравнения (97.7) будут уже иметь вид, при котором задача устойчивости решается сразу, т. е. вид (95.6) в случае двух пар чисто мнимых корней и вид (96.4) в случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней.

Пример. Пусть предложена система третьего порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = f\left(t,\ x,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\ y\right) + \varphi(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ y\right)$$

с одним нулевым и парой чисто мнимых корней $\pm\lambda_i$. Здесь f и F — аналитические функции переменных x, $\frac{dx}{dt}$, y, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже третьего порядка, причем функция f содержит только четные степени $\frac{dx}{dt}$. Коэффициенты этих разложений, так же как и коэффициент $\varphi(t)$, являются периодическими функциями t, периода ω.

Полагая

$$x_1 = x - \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}, \qquad y_1 = x + \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt},$$

приведем рассматриваемую систему к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda(y_1-x_1)}{2i},\ y\right),\\
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 - \frac{i}{\lambda} f\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{-4},\ y\right) +\\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3,\\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + \frac{i}{\lambda} f\left(t,\ \frac{x_1+y_1}{2},\ \frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{-4},\ y\right) -\\
&\qquad\qquad - \frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3.
\end{aligned}\right\} \quad (97.12)$$

Делаем, далее, подстановку (97.6):

$$\left.\begin{aligned}
y &= v + v^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,\\
x_1 &= u_1 + u_1^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,\\
y_1 &= v_1 + v_1^{(3)}(t,\ u_1,\ v_1,\ v) + \ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (97.13)$$

где

$$v^{(k)} = \sum A^{(m_1,\ m_2,\ n)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} v^n,$$

$$u_1^{(k)} = \sum A_1^{(m_1,\ m_2,\ n)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} v^n,$$

$$v_1^{(k)} = \sum \overline{A}_1^{(m_1,\ m_2,\ n)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v^n$$

$$(m_1 + m_2 + n = k).$$

Мы не вводим в подстановку членов второго порядка, так как эти члены отсутствуют в уравнениях (97.12). Кроме того, мы учитываем, что переменные x_1 и y_1 являются комплексно сопряженными, и делаем поэтому такими же переменные u_1 и v_1.

Стараемся подобрать преобразование (97.13) таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид (97.7). В рассматриваемом случае, учитывая (97.10), мы должны получить:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \alpha v^3 + \beta v u_1 v_1 + \ldots,\\
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + \alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 v^2 + \ldots,\\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{\alpha}_1 v_1^2 u_1 + \overline{\beta}_1 v_1 v^2 + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (97.14)$$

Подставляя (97.13) и (97.14) в первые два уравнения (97.12) и приравнивая члены третьего порядка, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha v^3+\beta v u_1 v_1+\frac{\partial v^{(3)}}{\partial t}+i\lambda u_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial u_1}-i\lambda v_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial v_1}=\\ &\qquad\qquad=F^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda(v_1-u_1)}{2i},\ v\right),\\ &\alpha_1 u_1^2 v_1+\beta_1 u_1 v^2+\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t}+i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1}u_1-i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1}v_1=\\ &\quad=i\lambda u_1^{(3)}-\frac{i}{\lambda}f^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda^2(v_1-u_1)^2}{-4},\ v\right)+\\ &\qquad\qquad+\frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(v_1-u_1)^3, \end{aligned}\right\} \tag{97.15}$$

где $f^{(3)}$ и $F^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в f и F.

Если в первом из этих уравнений приравнять коэффициент при v^3, то получим:

$$\alpha+\frac{dA^{(0,\ 0,\ 3)}}{dt}=F^{(3)}(t,\ 0,\ 0,\ 1),$$

и условие периодичности $A^{(0,\ 0,\ 3)}$ дает:

$$\alpha=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega F^{(3)}(t,\ 0,\ 0,\ 1)\,dt. \tag{97.16}$$

Приравнивая во втором уравнении (97.15) коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$, будем иметь:

$$\alpha_1+\frac{dA_1^{(2,\ 1,\ 0)}}{dt}=-\frac{i}{\lambda}\psi(t)+\frac{3}{8}\lambda^2\varphi(t),$$

$$\beta_1+\frac{dA_1^{(102)}}{dt}=-\frac{i}{\lambda}\Psi(t),$$

где $\psi(t)$ и $\Psi(t)$ — некоторые вещественные функции t, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$ в $f^{(3)}\left(t,\ \frac{u_1+v_1}{2},\ \frac{\lambda^2(v_1-u_1)^2}{-4},\ v\right)$. Отсюда находим:

$$\alpha_1=\frac{3\lambda^2}{8\omega}\int_0^\omega\varphi(t)\,dt-\frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega\psi(t)\,dt,\quad \beta_1=-\frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega\Psi(t)\,dt.$$

Коэффициент β мы не подсчитываем, так как он нам не потребуется. Полагая теперь:

$$u_1=\rho e^{i\vartheta},\quad v_1=\rho e^{-i\vartheta},$$

мы получим из (97.14) следующую решающую задачу систему второго порядка с двумя нулевыми корнями:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v^3 + \beta v \rho^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = a\rho^3 + \ldots$$

Здесь

$$a = \frac{3\lambda^2}{8\omega} \int_0^\omega \varphi(t)\, dt. \tag{97.17}$$

Для форм P и G имеем:

$$P(v,\ \rho) = \alpha v^4 + \beta v^2 \rho^2 + a\rho^4,$$

$$G(v,\ p) = v\rho[(a - \beta)\rho^2 - \alpha v^2].$$

Уравнение $G = 0$ дает две прямые $v = 0$, $\rho = 0$ и две прямые, определяемые уравнением

$$\alpha v^2 - (a - \beta)\rho^2 = 0, \tag{97.18}$$

если только $\alpha(a - \beta) > 0$. Отсюда находим, что невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин α или a положительна. Если $\alpha < 0$ и $a < 0$, то, невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если уравнение (97.18) не имеет вещественных решений, т. е. если $\alpha(a - \beta) < 0$. Но то же самое будет и в том случае, когда прямые (97.18) являются вещественными. Действительно, при условии (97.18) имеем:

$$P = a\rho^2 v^2 + a\rho^4,$$

и следовательно, если $a < 0$, то на обеих прямых (97.18) форма P отрицательна. Итак, принимая во внимание (97.16) и (97.17), находим, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если обе величины

$$\int_0^\omega \varphi(t)\, dt, \quad \int_0^\omega F^{(3)}(t,\ 0,\ 0,\ 1)\, dt$$

отрицательны и неустойчиво, если хотя бы одна из них положительна. Если одна из этих величин отрицательна, а другая равна нулю, то требуется рассмотреть члены более высокого порядка в уравнениях (97.14).

ДОПОЛНЕНИЕ I.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

§ 98. Постановка задачи.

В 1949 году М. А. Айзерманом[1]) была поставлена следующая задача об устойчивости систем автоматического регулирования с одним нелинейным органом.

Допустим, что поведение системы автоматического регулирования описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f(x_k), \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{98.1}$$

где a_{sj} — постоянные. Наряду с системой (98.1) рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + hx_k, \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

и допустим, что все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части при всех значениях h, лежащих в интервале

$$\alpha < h < \beta. \tag{98.2}$$

Требуется узнать, будет ли при любом выборе однозначной и непрерывной функции $f(x_k)$, обращающейся в нуль при $x_k = 0$ и удовлетворяющей при всех значениях $x_k \neq 0$ неравенствам

$$\alpha x_k^2 < x_k f(x_k) < \beta x_k^2, \tag{98.3}$$

---

[1]) Айзерман М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 4, 1949.

состояние равновесия $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (98.1) асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Указанная задача для систем второго порядка была досконально изучена в 1950 году Н. П. Еругиным[1]), который в рассмотренных им случаях дал положительный ответ на вопрос М. А. Айзермана. Его работы опирались на качественные методы исследования траекторий на плоскости переменных $\{x_1, x_2\}$. Эти исследования привлекли внимание многих математиков к данной проблеме и к другим задачам устойчивости в целом.

В 1952 году, уже после выхода первого издания настоящей монографии, И. Г. Малкиным была выполнена работа[2]), в которой также изучалась проблема М. А. Айзермана для систем второго порядка. Это исследование опиралось на второй метод Ляпунова. При этом автор нашел весьма простое доказательство, построив функцию Ляпунова в виде суммы квадратичной формы и интеграла с переменным верхним пределом. Такой метод впервые был предложен в работе А. И. Лурье и В. Н. Постникова[3]). Статья И. Г. Малкина, где этот метод был развит для данной задачи, послужила толчком для ряда работ, посвященных исследованию нелинейных проблем устойчивости в целом на базе функций Ляпунова.

Содержанием настоящего Дополнения I является упомянутая работа И. Г. Малкина с небольшими изменениями.

§ 99. Исследование системы второго порядка с нелинейностью, зависящей от первой координаты.

Рассмотрим сначала систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy. \tag{99.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = hx + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy$$

имеет вид

$$\rho^2 - (h + c)\rho + hc - ab = 0.$$

---

[1]) Еругин Н. П., О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950; Качественное исследование интегральных кривых дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.

[2]) Малкин И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.

[3]) Лурье А. И., Постников В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.

Корни этого уравнения будут иметь отрицательные вещественные части при всех значениях h, удовлетворяющих условиям

$$h+c<0, \quad hc-ab>0.$$

Поэтому, полагая $f(x)=xh(x)$ $(x\neq 0)$, будем по условию задачи иметь:

$$h(x)+c<0, \quad h(x)c-ab>0 \quad (x\neq 0). \tag{99.2}$$

Мы будем, кроме того, предполагать, что при $|x|>\xi$, где ξ — достаточно большое число, выполняется неравенство

$$h(x)c-ab>\varepsilon \quad (|x|>\xi), \tag{99.3}$$

где ε — положительное число, которое может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим функцию

$$2V=2c\int_0^x f(x)\,dx+(c^2-ab)x^2-2acxy+a^2y^2\equiv$$

$$\equiv 2\int_0^x [h(x)c-ab]\,x\,dx+(cx-ay)^2.$$

На основании (99.2) эта функция определенно-положительна. Составляя производную этой функции по t в силу уравнений (99.1), найдем:

$$\frac{dV}{dt}=-abcx^2+cf^2(x)+(c^2-ab)xf(x).$$

Полученное выражение, обращаясь в нуль при $x=0$, при $x\neq 0$ может принимать только отрицательные значения при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2). Действительно, при условии (99.2) и при $x\neq 0$ будем иметь:

$$\frac{dV}{dt}=(h+c)(ch-ab)x^2<0, \tag{99.4}$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2), V будет являться для уравнений (99.1) функцией Ляпунова. Отсюда немедленно вытекает устойчивость равновесия $x=y=0$. Легко видеть, что при этом устойчивость будет асимптотической, несмотря на то, что функция $\frac{dV}{dt}$ является не знакоопределенной, а только знакопостоянной. Действительно, $\frac{dV}{dt}$ обращается в нуль только при $x=0$ и, следовательно, интегральные кривые во всех точках, не лежащих на оси y, пересекают семейство замкнутых кривых $V = \text{const}$ снаружи внутрь. Но то же самое будет, очевидно, иметь место и в точках, лежащих на оси y, так как при $x = 0$, как это следует из уравнений (99.1), $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Разница будет лишь в том, что на оси y интегральные кривые, входя внутрь кривых $V = \text{const}$, будут при этом их касаться[1]).

Итак, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (99.2), равновесие $x = y = 0$ асимптотически устойчиво. И это будет иметь место, каковы бы ни были начальные значения величин x и y, так как, учитывая (99.3), можно показать, что кривые $V(x, y) = c$ при любом c замкнуты. Это можно также показать и не обращаясь к геометрической интерпретации[2]).

Достаточно рассмотреть лишь случаи, когда в уравнениях (99.1) $a \neq 0$, так как при $a = 0$ асимптотическая устойчивость движения $x = y = 0$ в целом при условиях (99.2), (99.3) проверяется непосредственно последовательным интегрированием уравнений (99.1).

Действительно, при $|x| > \xi$ мы можем на основании (99.3) писать (знак плюс перед ξ берется при $x > \xi$ и знак минус — при $x < -\xi$):

$$2V = 2\int_0^{\pm\xi} [h(x)c - ab]\,x\,dx + 2\int_{\pm\xi}^{x} [h(x)c - ab]\,x\,dx + \\ + (cx - ay)^2 \geqslant 2\varepsilon(x^2 - \xi^2) + (cx - ay)^2. \quad (99.5)$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение уравнений (99.1). На основании (99.4)

$$V(x(t),\ y(t)) \leqslant V_0 = V(x(t_0),\ y(t_0)).$$

Но так как при достаточно больших x выполняется (99.5), то отсюда следует, что при всех $t \geqslant t_0$ рассматриваемое решение остается внутри круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Но тогда это решение с неограниченным возрастанием t либо стремится к какому-нибудь периодическому решению $x^*(t)$, $y^*(t)$, либо к единственной особой точке $x = y = 0$. Но первый из этих случаев невозможен. Действительно, функция $V(x^*(t),\ y^*(t))$ отлична от постоянной, так как в силу (99.4) ее производная может обратиться тождественно в нуль только, если $x^*(t) \equiv 0$, а последнее невозможно, если в уравнениях (99.1) величина $a \neq 0$. Но если функция $V(x^*(t),\ y^*(t))$ отлична от постоянной, то, будучи периодической, она вопреки (99.4) не может обладать знакопостоянной

[1]) См. Дополнение III.

[2]) См. также примечание к стр. 38.

производной. Таким образом, система (99.1) не имеет периодических решений и, следовательно, решение $x(t)$, $y(t)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому для уравнений (99.1) ответ на вопрос, поставленный М. А. Айзерманом, всегда получается утвердительный.

§ 100. Исследование системы второго порядка с нелинейностью, зависящей от второй координаты.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(y), \quad \frac{dy}{dt} = bx + cy. \tag{100.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет теперь вид

$$\rho^2 - (a + c)\rho + ac - bh = 0.$$

Следовательно, для того чтобы корни этого уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a + c < 0, \quad ac - bh > 0.$$

Полагая $f(y) = yh(y)$, будем иметь

$$ac - bh(y) > 0. \tag{100.2}$$

Кроме того, предположим, что при достаточно больших значениях $|y|$ выполняется неравенство $ac - bh(y) > \varepsilon$.

В частности, если $b = 0$, то функция $f(y)$ ничем не ограничена. Но при $b = 0$, как это следует из (100.2), должно быть $a < 0$, $c < 0$ и непосредственное интегрирование системы (100.1) показывает, что равновесие асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении и при любом выборе функции $f(y)$.

Допустим, что $b \neq 0$, и рассмотрим функцию

$$2V = -2b\int_0^y f(y)\,dy + b^2x^2 - 2abxy + (a + c)\,ay^2 \equiv$$

$$\equiv 2\int_0^y [ac - bh(y)]\,y\,dy + (bx - ay)^2.$$

На основании (100.2) функция V определенно-положительна. Составляя ее производную в силу уравнений (100.1), получим:

$$\frac{dV}{dt} = ac(a + c)\,y^2 - b(a + c)\,yf(y).$$

Полагая $f(y) = hy$, где $h = h(y)$ удовлетворяет условию (100.2), получим:

$$\frac{dV}{dt} = (a + c)(ac - bh)y^2 < 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0.$$

Отсюда, так же как и в предыдущем параграфе, заключаем, что если в уравнениях (100.1) функция удовлетворяет условию (100.2), то равновесие будет асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении.

Итак, для системы (100.1) ответ на вопрос М. А. Айзермана тоже получается всегда утвердительный.

Во всех наших рассуждениях не исключалась возможность, что кривая $z = f(x)$ касается при $x = 0$ одной из прямых $z = \alpha x$ и $z = \beta x$. В этом случае характеристическое уравнение будет иметь корни с вещественной частью, равной нулю. Следовательно, линеаризованная система будет находиться на границе области устойчивости. Так как при этом нелинейная система будет по доказанному устойчива, то по Н. Н. Баутину эта граница всегда является «безопасной» [1]).

В заключение заметим, что предположение о дифференцируемости функции $f(x)$ не делалось и, следовательно, кривая $z = f(x)$ может не иметь в начале координат определенной касательной.

---

[1]) См. § 44.

ДОПОЛНЕНИЕ II.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА.

§ 101. Постановка задачи.

В §§ 71—73, 75 настоящей книги рассматривалась проблема обращения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ниже приводится с небольшими изменениями содержание статьи И. Г. Малкина «К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости», опубликованной после выхода в свет первого издания настоящей монографии. В этой статье установлены необходимые и достаточные условия существования функции Ляпунова в общем случае неустановившихся движений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0; \ s = 1, \ldots, n), \tag{101.1}$$

определенную в области

$$t \geqslant 0, \ x \leqslant H^2, \ x = \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \tag{101.2}$$

где H — положительная постоянная. Согласно теореме II Ляпунова (стр. 189) невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ будет асимптотически устойчиво, если существует определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений (101.1), есть функция определенно-отрицательная и если при этом функция V допускает бесконечно малый высший предел. Возникает вопрос об обратимости этой теоремы, т. е. вопрос о существовании функции V, удовлетворяющей всем указанным условиям, всякий раз, когда невозмущенное движение асимптотически устойчиво [1]). В общем случае теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости не обратима. Этот вопрос исследо-

---

[1]) См. стр. 310.

ван в § 75 для случая, когда функции X_s линейны относительно $x_1, \ldots, x_n$ и по отношению к t непрерывны и ограничены, причем для такого рода систем установлены необходимые и достаточные условия существования функций V, удовлетворяющих всем условиям теоремы Ляпунова.

Здесь мы будем рассматривать нелинейные уравнения (101.1), правые части которых в области (101.2) непрерывны и допускают непрерывные и ограниченные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$.

§ 102. Необходимые и достаточные условия существования функции V.

Рассмотрим решение $x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ уравнений (101.1) с начальными условиями $F_s(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = x_s^0$. Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то найдется такое достаточно малое положительное число δ, что при всех начальных значениях, лежащих в области

$$x^0 \leqslant \delta^2, \quad t \geqslant 0, \tag{102.1}$$

будут выполняться соотношения

$$\lim_{t \to \infty} F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = 0. \tag{102.2}$$

Мы сейчас покажем, что для того, чтобы для уравнений (101.1) существовала функция V, удовлетворяющая всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы соотношения (102.2) выполнялись равномерно относительно x_j^0 и t_0. Мы докажем, следовательно, что имеют место две следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует такое положительное число* δ, *что соотношения* (102.2) *выполняются равномерно относительно* $x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0$, *лежащих в области* (101.2), *то существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу уравнений* (101.1), *есть функция определенно-отрицательная.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что при выполнении условий теоремы невозмущенное движение будет равномерно устойчивым. Другими словами, для всякого положительного числа ε можно найти не зависящее от t_0 положительное число $\eta(\varepsilon)$ такое, что при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться условия $F < \varepsilon^2$, коль скоро $x^0 \leqslant \eta^2$. Здесь введено обозначение

$$F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) = \sum_{s=1}^{n} F_s^2(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0). \tag{102.3}$$

В самом деле, полагая $\eta < \delta$, мы на основании условий теоремы найдем такое число $T(\varepsilon)$, зависящее только от ε, что при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет выполняться неравенство $F < \varepsilon^2$. Будем теперь считать η настолько малым, чтобы это неравенство выполнялось также в течение конечного промежутка времени $(t_0, t_0 + T)$. Это возможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий (решение F_s сравниваем с тривиальным решением $x_1 = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$). При этом, как это вытекает из доказательства указанной теоремы, число η определяется исключительно числом $T(\varepsilon)$ и верхними пределами функций $|X_s|$ и их постоянных Липшица по переменным x_j в области $t_0 \leqslant t < t_0 + T$, $x \leqslant \varepsilon^2$. Полученное таким образом число η будет удовлетворять всем требуемым условиям. Из сказанного следует, что если число δ в неравенствах (102.1) достаточно мало, то функция F будет при всех $t > t_0$ во всяком случае оставаться в области $x \leqslant H^2$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что число δ удовлетворяет указанному условию.

Покажем теперь, что для функции F при всех $\tau > 0$ выполняется неравенство[1])

$$F\left(t_0 + \tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) < \varphi(\tau), \tag{102.4}$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая положительная непрерывная функция, для которой $\lim \varphi(\tau) = 0$ при $\tau \to \infty$. С этой целью рассмотрим какую-нибудь убывающую и сходящуюся к нулю бесконечную последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ По условию теоремы для всякого числа ε_l этой последовательности найдется число $T_l(\varepsilon_l)$ такое, что при всех $\tau > T_l$ будет выполняться неравенство $F\left(t_0 + \tau, x_1^0, \ldots\right.$ $\left.\ldots, x_n^0, t_0\right) < \varepsilon_l$, и это число T_l не будет зависеть от x_s^0, t_0. Последовательность T_l будет, очевидно, расходящейся, и мы можем при этом предполагать, что $T_{l+1} > T_l$. Рассмотрим теперь произвольную монотонно убывающую функцию $\varphi(\tau)$, для которой $\varphi(T_{l+1}) =$ $= \varepsilon_l$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Если мы при этом предположим, что в интервале $(0, T_2)$ справедливо неравенство $F < \varphi(\tau)$, что, очевидно, возможно, так как при всех значениях аргументов $F \leqslant H^2$, то построенная таким образом функция $\varphi(\tau)$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Рассмотрим теперь частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_s^0}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial t_0}$. Так как по доказанному при всех $t \geqslant t_0$ и всех значениях x_s^0, лежащих в области (102.1), функции F_s остаются в области (101.2), то эти частные производные при указанных значениях аргументов существуют и не-

[1]) См. аналогичное рассуждение в § 73 на стр. 314.

прерывны. Покажем, что при $\tau > 0$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial F\left(t_0+\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)}{\partial x_s^0}\right| < Ae^{\lambda t} = M(\tau),$$
$$\left|\left\{\frac{\partial F\left(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0\right)}{\partial t_0}\right\}_{t=t_0+\tau}\right| < Ae^{\lambda\tau} = M(\tau), \tag{102.5}$$

где A и λ — не зависящие от x_j^0, t_0 положительные числа. С этой целью рассмотрим уравнения в вариациях для системы (101.1):

$$\frac{du_s}{dt} = p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n \qquad \left(p_{sj} = \frac{\partial X_s}{\partial x_j}\right). \tag{102.6}$$

При этом в производных p_{sj} величины x_s заменены функциями F_s. Пусть $u_{sj}\left(t, t_0\right)$ и $u_s^*\left(t, t_0\right)$ — решения этой системы, определяемые начальными условиями:

$$u_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}),$$
$$u_s^*\left(t_0, t_0\right) = -X_s\left(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0\right). \tag{102.7}$$

Тогда, как известно, имеем тождественно

$$u_{sj} = \frac{\partial F_s}{\partial x_j^0}, \quad u_s^* = \frac{\partial F_s}{\partial t_0}.$$

Полагая в уравнениях (102.6) $v_s = u_s e^{-\lambda t}$, будем иметь

$$\frac{dv_s}{dt} = p_{s1}v_1 + \ldots + p_{sn}v_n - \lambda v_s,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n} v_s^2 = \sum_{s,\, j=1}^{n} p_{sj}v_s v_j - \lambda \sum_{s=1}^{n} v_s^2.$$

Правая часть этого выражения при достаточно большом положительном λ будет формой определенно-отрицательной, так как, по определению, в области (101.2) частные производные функций X_s ограничены. Полагая, что λ удовлетворяет указанному условию, получим при $t > t_0$

$$\sum_{s=1}^{n} v_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} v_s^2\left(t_0\right)$$

и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} u_s^2(t) < \sum_{s=1}^{n} u_s^2\left(t_0\right) e^{2\lambda(t-t_0)}.$$

Применяя эти неравенства к решениям u_{sj} и u_s^* и учитывая, что на основании (102.7) для модулей начальных значений этих решений могут быть назначены некоторые не зависящие от x_s^0, t_0 верхние пределы, находим, что частные производные $\frac{\partial F_s}{\partial x_j^0}$, $\frac{\partial F_s}{\partial t_0}$, а следовательно, также и частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j^0}$, $\frac{\partial F}{\partial t_0}$ удовлетворяют неравенствам вида (102.5).

Как показал И. Л. Массера [1]), для всякой пары положительных функций $M(\eta)$ и $\varphi(\eta)$, определенных при всех $\eta \geqslant 0$, из которых первая возрастающая, а вторая стремится к нулю при $\eta \to \infty$, можно построить функцию $G(\eta)$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Функция $G(\eta)$ — положительная возрастающая функция, определенная при всех $\eta \geqslant 0$ и обладающая непрерывной возрастающей (очевидно, положительной) производной $G'(\eta)$.

2. $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$.

3. Имеют место неравенства

$$\int_0^\infty G[\varphi(\tau)]\,d\tau < \infty, \quad \int_0^\infty G'[\varphi(\tau)]\,M(\tau)\,d\tau < \infty. \tag{102.8}$$

Принимая, что $\varphi(\eta)$ и $M(\eta)$ — функции, фигурирующие в неравенствах (102.4) и (102. 5), положим

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \int_t^\infty G[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)]\,d\tau \tag{102.9}$$

и покажем, что функция V удовлетворяет всем условиям теоремы.

Заметим прежде всего, что в области

$$t \geqslant 0, \quad x \leqslant \delta^2 \tag{102.10}$$

на основании (102.4) справедливы при всех $\tau > 0$ неравенства

$$G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] < G[\varphi(\tau)],$$

так как $G(\eta)$ — функция возрастающая. Отсюда на основании (102.8) вытекает, что интеграл, фигурирующий в выражении V, сходится и притом равномерно в области (102.10). Следовательно, в этой области функция V существует и непрерывна по всем своим аргументам. Дифференцируя далее выражение V формально под знаком интеграла,

---

[1]) См. выше стр. 314—315.

будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -G[F(t, x_1, \ldots, x_n, t)] + \qquad (102.11)$$

$$+ \int_t^\infty G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} d\tau.$$

Но на основании (102.4) и (102.5) в области (102.10) при всех $\tau > t$ имеем:

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_j} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t),$$

$$\left| G'[F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] \frac{\partial F(\tau, x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t} \right| < G'[\varphi(\tau - t)] M(\tau - t),$$

так как функция $G'(\eta)$ также возрастающая. Поэтому интегралы, входящие в (102.11), сходятся в области (102.10) абсолютно и равномерно. Следовательно, выражения (102.11) представляют в области (102.10) непрерывные и ограниченные функции, которые действительно являются частными производными функции V. Итак, функция V обладает в области (102.10) непрерывными и ограниченными частными производными первого порядка. Но это условие является более сильным, чем существование бесконечно малого высшего предела.

Покажем теперь, что функция V определенно-положительна. С этой целью положим

$$\alpha = \frac{1}{2L\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где L — верхний предел величин $|X_s|$ в области (101.2). Из (102.9) имеем:

$$V > \int_0^\alpha G[F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t)] d\tau. \qquad (102.12)$$

Но

$$|F_s(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s| =$$

$$= \left| \int_t^{t+\tau} X_s(\eta, F_1(\eta, x_1, \ldots, x_n, t), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, F_n(\eta, x_1, \ldots, x_n, t)) d\eta \right| < L\tau$$

и, следовательно, в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ справедлива оценка

$$\sum_{s=1}^{n} \{F_s(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) - x_s\}^2 < nL^2\alpha^2 = \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n} x_s^2,$$

откуда

$$F(t+\tau, x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant \frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

и из (102.12) получаем:

$$V > \frac{1}{2L\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot G\left[\frac{1}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\right].$$

Правая часть этого неравенства представляет собой не зависящую от t определенно-положительную функцию. Следовательно, V есть определенно-положительная функция.

Составим теперь выражение для полной производной $\frac{dV}{dt}$ в силу дифференциальных уравнений (101.1). Будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt},$$

где V^* означает результат замены в выражении V величин x_s функциями $F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$. Имеем

$$V^*(t) = \int_t^\infty G\{F[\tau, F_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0), \ldots, F_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)]\}d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_t^\infty G\{F(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\}\,d\tau,$$

откуда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} = -G\{F(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)\} = -G\{x_1^2 + \ldots + x_n^2\}.$$

Следовательно, $\frac{dV}{dt}$ есть функция определенно-отрицательная. Таким образом, V удовлетворяет всем нужным условиям, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если для системы уравнений* (101.1) *существует допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то существует такое достаточно малое число* $\delta > 0$, *что решения* $x_s = F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ *удовлетворяют соотношениям* (102.2) *равномерно относительно величин* x_s^0, t_0, *лежащих в области* (102.1)[1]).

Доказательство. Согласно условию теоремы существует допускающая бесконечно малый высший предел функция V такая, что в области $t \geqslant 0$, $x \leqslant H^2$ выполняются неравенства

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant W_1(x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{102.13}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{102.14}$$

где W_1 и W_2 — не зависящие от t определенно-положительные функции.

Пусть $C > 0$ — точный нижний предел функции W_1 при условии $x = H^2$. Тогда на основании (102.13) имеем:

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant C \quad \text{при} \quad x = H^2, \quad t > 0. \tag{102.15}$$

Так как V допускает бесконечно малый высший предел, то найдется такое положительное число δ, что будет справедливо неравенство

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) < C \quad \text{при} \quad x < \delta^2, \quad t > 0. \tag{102.16}$$

Покажем, что δ и является искомым числом, фигурирующим в теореме. С этой целью рассмотрим произвольное положительное число $\varepsilon < \delta$ и обозначим через $c > 0$ точный нижний предел функции W_1 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2$. На основании (102.13) будем иметь:

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \geqslant c \quad \text{при} \quad H^2 \geqslant x \geqslant \varepsilon^2, \quad t \geqslant 0. \tag{102.17}$$

Далее выберем настолько малое положительное число $\alpha < \varepsilon$, чтобы выполнялось условие

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) < c \quad \text{при} \quad x < \alpha^2, \quad t > 0 \tag{102.18}$$

и обозначим через $l > 0$ точный нижний предел функции W_2 при условии $H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2$. Таким образом, на основании (102.14)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -l \quad \text{при} \quad H^2 \geqslant x \geqslant \alpha^2, \quad t > 0. \tag{102.19}$$

Рассмотрим теперь произвольное решение $x_s = F_s(t,\ x_1^0,\ \ldots$ $\ldots,\ x_n^0,\ t_0)$ уравнения (101.1), начальные значения которого x_s^0 и t_0 лежат в области, определенной неравенствами (102.1).

[1]) К. П. Персидский доказал, что при выполнении условий теоремы решения стремятся к нулю равномерно относительно t_0, а И. Л. Массера — что при тех же условиях решения стремятся к нулю равномерно относительно x_s^0.

Покажем прежде всего, что при всех $t > t_0$ справедливо неравенство

$$F < H^2.$$

В самом деле, функция $V^*(t) = V(t, F_1, \ldots, F_n)$ на основании (102.14) монотонно убывает и при $t = t_0$ на основании (102.1) и (102.16) $V^*(t) < C$. Следовательно, то же самое неравенство справедливо и при всех $t > t_0$. Но тогда при всех $t > t_0$ будет справедливо неравенство $F < H^2$, ибо если бы в какой-нибудь момент времени это неравенство нарушилось, то для этого момента на основании (102.15) мы имели бы $V^*(t) > C$.

Обозначим теперь через $T(\varepsilon)$ зависящее только от ε положительное число, определяемое равенством

$$T(\varepsilon) = \frac{C - c}{l},$$

и покажем, что в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени $t = t_1$, для которого

$$V^*(t_1) < c.$$

В самом деле, рассмотрим следующее равенство:

$$V^*(t_0 + T) = V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dV^*}{dt}\, dt. \tag{102.20}$$

Если бы во всем интервале $(t_0, t_0 + T)$ было справедливо неравенство $V^*(t) > c$ и, следовательно, на основании (102.18) также и неравенство $F \geqslant \alpha^2$, то из (102.20) на основании (102.16) и (102.19) мы получили бы

$$V^*(t_0 + T) < C - lT = c,$$

что противоречит условию. Таким образом, в интервале $(t_0, t_0 + T)$ найдется такой момент времени, для которого $V^*(t) < c$. Так как $V^*(t)$ — функция убывающая, то это неравенство будет справедливо при всех значениях

$$t \geqslant t_0 + T.$$

Но тогда при всех $t \geqslant t_0 + T$ будет на основании (102.17) выполняться неравенство $x < \varepsilon^2$, что и доказывает теорему, так как число ε можно взять сколь угодно малым.

Приведенное доказательство может быть проиллюстрировано геометрически (рис. 22).

При рассмотрении рисунка необходимо учесть, что уравнение $W_1(x_1, \ldots, x_n) = k^2$ при k, достаточно малом, представляет собой замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Точно так же и уравнение $V(t, x_1, \ldots, x_n) = k^2$ представляет собой в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ замкнутую поверхность, окружающую начало координат, но изменяющуюся с течением времени. При этом при всех $t > 0$ поверхность $V = k^2$ в силу (102.13) лежит внутри поверхности $W_1 = k^2$ и остается вне некоторой окрестности начала координат, так как V допускает бесконечно малый высший предел.

Поверхность $W_1 = C$ лежит внутри сферы $x = H^2$ и имеет с нею по крайней мере одну общую точку на (рисунке эта поверхность не показана). То же самое можно сказать и относительно поверхности $W_1 = c$ и сферы $x = \varepsilon^2$.

Примечание. Для справедливости теоремы 2 нет, очевидно, необходимости, чтобы функции X_s допускали частные производные. Достаточно, чтобы эти функции были непрерывными и такими, чтобы была обеспечена единственность решений для уравнений (101.1). Впрочем, последнее условие также не существенно.

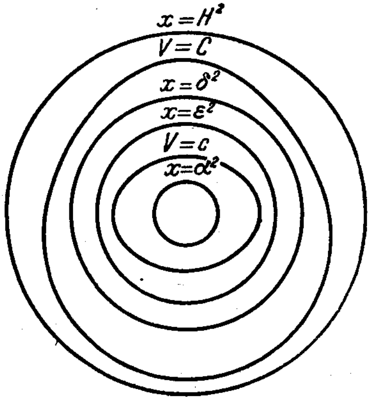

Рис. 22.

При доказательстве теоремы 1 мы видели, что при выполнении условий этой теоремы функция V будет не только допускать бесконечно малый высший предел, но и обладать ограниченными частными производными $\frac{\partial V}{\partial x_j}$. Поэтому, принимая во внимание теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Если для уравнений* (101.1) *существует определенно-положительная функция* V, *допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, то для этих уравнений существует функция* V^{**}, *обладающая такими же свойствами и для которой частные производные* $\frac{\partial V^{**}}{\partial x_s}$ *в некоторой окрестности начала координат и при всех* $t > 0$ *ограничены*[1]).

---

[1]) Это утверждение было усилено в работах Я. Курцвейля (Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехосл. матем. журнал, 1956, т. 6 (81), № 2, стр. 217—259, № 4, стр. 455—484) и И. Массера (Contributions to stability theory, Annals of Mathematics, 1956, т. 64, вып. 1, стр. 182—206), которые показали, что в случае равномерной асимпто-

Наряду с уравнениями (101.1) рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n). \qquad (102.21)$$

Здесь функции R_s описывают постоянно действующие возмущающие факторы. Эти функции определены в области (101.2), где они непрерывны и таковы, что для уравнений (102.21) обеспечены условия единственности решений.

При этом функции R_s в отличие от функций X_s не обращаются, вообще говоря, в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

В § 70 мы доказали, что если для уравнений (101.1) существует определенно-положительная функция V, производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно-отрицательная, и если частные производные $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ этой функции в области (101.2) ограничены, то тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Отсюда на основании теорем 1 и 3 мы приходим к следующему результату[1]).

Теорема 4. *Если тривиальное решение* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *системы* (101.1) *асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и если при этом соотношения* (102.2) *выполняются равномерно относительно* x_s^0 *и* t_0, *лежащих в области* (102.1), *то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

тической устойчивости существует сколь угодно гладкая функция Ляпунова, если предполагать лишь, что правые части уравнения (101.1) непрерывны, но не требовать существования производных $\frac{\partial V}{\partial x_j}$. Кроме того, Я. Курцвейлем было показано, что поверхности $V = c$ гомеоморфны сфере. Последний результат уточняет геометрическую интерпретацию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

[1]) Аналогичная теорема сформулирована в работе С. И. Горшина (Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казахской ССР, № 58, 1948). Доказательство С. И. Горшина существенно отличается от приведенного здесь, где теорема 4 оказывается следствием теоремы 1 о существовании функции Ляпунова.

ДОПОЛНЕНИЕ III.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА.

§ 103. Критерии, основанные на функциях Ляпунова со знакопостоянными производными.

Критерии асимптотической устойчивости, приведенные в § 10 (теорема Б) и в § 46 (теорема II), опираются на функции Ляпунова V, производные которых $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения являются функциями знакоопределенными. В приложениях, особенно при исследовании устойчивости в большом и в целом нелинейных систем, иногда удается построить определенно-положительную функцию V, производная которой $\frac{dV}{dt}$ является лишь функцией знакопостоянной отрицательной, но не определенно-отрицательной. Именно с этим случаем мы встретились в Дополнении I. В то же время попытки построить функцию Ляпунова V с определенно-отрицательной производной приводят к серьезным трудностям. Поэтому возникает необходимость сформулировать общий критерий, который указывал бы условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость невозмущенного движения при наличии лишь функции Ляпунова со знакопостоянной производной. В последнее время был предложен ряд таких критериев. По-видимому, наиболее ранними из них были теоремы, доказанные для систем уравнений, правые части которых не зависят явно от времени[1]). Без существенных изменений эти критерии обобщаются на периодические по времени системы. Позднее были доказаны аналогичные критерии для общего случая нестационарных систем с использованием, однако, двух и более функций Ляпунова[2]).

[1]) Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, ДАН, т. 86, вып. 3, 1952; Тузов А. П., Вопросы устойчивости для одной системы регулирования, Вестник ЛГУ, вып. 2, 1955.

[2]) Матросов В. М., Об устойчивости движения. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.

Приведем здесь одну теорему об асимптотической устойчивости в форме, близкой к той, которая предложена в работе Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского[1]).

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (103.1)$$

где правые части X_s определенны, непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решений в области

$$|x_s| < H \qquad (H = \text{const}, \quad \text{или} \quad H = \infty). \qquad (103.2)$$

Как и раньше, предполагаем, что $X_s(0, \ldots, 0) = 0$.

Пусть $V(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция Ляпунова, имеющая знакопостоянную отрицательную производную $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (103.1). Обозначим через M множество тех точек x_s из области $|x_s| < H$, где $\frac{dV}{dt} = 0$. При этом, однако, не будем включать точку $x_1 = \ldots = x_n = 0$, где всегда $\frac{dV}{dt} = 0$. Тогда можно сформулировать следующий критерий асимптотической устойчивости.

Теорема Д. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (103.1) *можно найти определенно-положительную в области* (103.2) *функцию* V *такую, что ее производная* $\frac{dV}{dt}$ *удовлетворяет в этой области условиям*:

1) $\qquad \frac{dV}{dt} < 0$ *вне* M;

2) $\qquad \frac{dV}{dt} = 0$ *на* M,

где M — *многообразие точек* $\{x_s\}$, *не содержащее целых движений* $x_s(t)$ *системы при* $0 < t < \infty$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость невозмущенного движения следует из теоремы А (§ 9). Значит, для всякого $0 < \varepsilon < H$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что любое возмущенное движение $x_s(t)$ системы (103.1), выходящее в момент времени $t = t_0$ из области $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, будет удовлетворять условию

$$|x_s(t)| < \varepsilon \qquad (103.3)$$

при всех $t \geqslant t_0$. Покажем, что эта устойчивость является асимптотической, т. е.

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

---

[1]) См. первую работу в сноске на стр. 463.

Так как $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$, то

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant V(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

и функция $V(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ как невозрастающая и неотрицательная функция времени имеет определенный предел V_0 при $t \to \infty$, причем

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqslant V_0 \quad \text{при } t \geqslant t_0. \tag{103.4}$$

Допустим, что $V_0 \neq 0$. Из ограниченности области (103.3) вытекает, что найдется последовательность точек $x_s^{(k)} = x_s(t_0 + k\tau)$ ($k = k_1, k_2, \ldots; \tau = \text{const} > 0$), которая сходится к точке q с координатами $x_1^*, \ldots, x_n^*$, лежащей в области (103.3). Вследствие непрерывности функции V должно выполняться равенство $V(x_1^*, \ldots, x_n^*) = V_0$.

Рассмотрим теперь движения $x_s^{(q)}(t)$ и $x_s^{(k_i)}(t)$, выходящие при $t = t_0$ соответственно из точек q и $x_s^{(k_i)}$. Так как по условию теоремы движение $x_s^{(q)}(t)$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ не может лежать целиком на многообразии M, то должны существовать такие интервалы времени, когда $\frac{dV}{dt} < 0$ вдоль этого движения. Значит, можно указать момент времени $T > t_0$, в который выполняется условие

$$V(x_1^{(q)}(T), \ldots, x_n^{(q)}(T)) = V_1 < V_0.$$

Так как последовательность $x_s^{(k_i)}$ сходится к точке q, то вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать неравенство

$$\max\left\{\left|x_1^{(q)}(T) - x_1^{(k_i)}(T)\right|, \ldots, \left|x_n^{(q)}(T) - x_n^{(k_i)}(T)\right|\right\} < \delta$$

при всех $k_i > N(\delta)$, каково бы ни было наперед заданное число $\delta > 0$. Следовательно,

$$\lim V(x_1^{(k_i)}(T), \ldots, x_n^{(k_i)}(T)) \leqslant V_1 \quad \text{при } k_i \to \infty. \tag{103.5}$$

Вследствие независимости функций X_s от времени справедливы равенства

$$x_s^{(k_i)}(T) = x_s(T + k_i\tau),$$

поэтому условие (103.5) можно записать таким образом:

$$\lim V(x_1(T + k_i\tau), \ldots, x_n(T + k_i\tau)) \leqslant V_1 \quad \text{при } k_i \to \infty.$$

Это неравенство противоречит (103.4), поэтому наше допущение $V_0 \neq 0$ неверно. Следовательно, $V_0 = 0$, т. е.

$$\lim V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

и

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Примечание. Если многообразие M есть поверхность, заданная уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{103.6}$$

то условие

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} X_s \neq 0 \qquad (x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0)$$

в области (103.3) является достаточным для отсутствия целых движений на M.

Действительно, если в некоторый момент $t = t_1$ траектория $x_s(t)$, выходящая из области $|x_s(t_0)| \leqslant \eta$, попадает на поверхность (103.6), то сразу при $t > t_1$ она должна покинуть эту поверхность, так как

$$\left(\frac{dF(x_1(t), \ldots, x_n(t))}{dt}\right)_{t=t_1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s} X_s \neq 0.$$

Заметим теперь, что если в случае $H = \infty$ к условиям доказанной теоремы добавить требование, чтобы функция $V(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условию[1])

$$\lim V(x_1, \ldots, x_n) = \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{103.7}$$

где $x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, то получится критерий асимптотической устойчивости в целом.

В самом деле, рассмотрим возмущенное движение $x_s(t)$ системы (103.1), выходящее в момент времени t_0 из произвольной точки пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Условие (103.7) обеспечивает ограниченность области

$$V(x_1, \ldots, x_n) \leqslant V(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)),$$

в которой будет оставаться движение $x_s(t)$ при всех $t_0 \leqslant t < \infty$. Повторяя, далее, рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы, убеждаемся в том, что асимптотическая устойчивость имеет место при любых начальных возмущениях. Таким образом, при указанном дополнительном условии мы действительно имеем дело с устойчивостью в целом.

Мы рассмотрели теорему, обобщающую теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. Можно сформулировать также критерий неустойчивости, который является обобщением соответствующей теоремы Ляпунова (теорема В § 13).

---

[1]) См. примечание к стр. 68.

Теорема Е. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (103.1) *можно найти функцию* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *такую, что ее производная* $\frac{dV}{dt}$ *удовлетворяет условиям:*

$$1)\quad \frac{dV}{dt} > 0 \quad \textit{вне } M;$$

$$2)\quad \frac{dV}{dt} = 0 \quad \textit{на } M,$$

где M — *многообразие точек* $\{x_s\}$, *не содержащее целых движений при* $0 < t < \infty$, *и если при этом можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности начала координат, такие, что в них* $V > 0$, *то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство этой теоремы[1]) приводить не будем.

§ 104. Примеры приложения предыдущих теорем.

В качестве первого примера, когда функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Д и условию (103.7), можно привести функции Ляпунова, построенные в Дополнении I при решении задачи М. А. Айзермана для систем (99.1) и (100.1).

В самом деле, рассмотрим, например, функцию

$$2V = 2\int_0^x [cf(x) - abx]\,dx + (cx - ay)^2 \qquad (a \neq 0).$$

Ее производная по времени в силу (99.1) равна

$$\frac{dV}{dt} = [f(x) + cx]\cdot[cf(x) - abx].$$

При условиях, наложенных на функцию $f(x)$ в § 98, имеем:

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Многообразием M, о котором шла речь в теореме Д, является в данном случае ось y без точки $x = y = 0$. Так как при $x = 0$, $y \neq 0$ $\frac{dx}{dt} = ay \neq 0$, то это многообразие не содержит целых движений, кроме $x \equiv y \equiv 0$. Нетрудно, далее, заметить, что условие (99.2)

[1]) Красовский Н. Н., Некоторые задачи об устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

обеспечивает определенную положительность функции V и выполнение условия

$$\lim V(x, y) = \infty$$

при $\max\{|x|, |y|\} \to \infty$.

Таким образом, устойчивость невозмущенного движения системы (99.1) в целом действительно следует в данном случае из теорем § 103.

Приведем еще один пример приложения теорем Д и Е из предыдущего параграфа.

Рассмотрим голономную консервативную механическую систему с n степенями свободы, подверженную дополнительно управляющему воздействию и описываемую следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = b_i u \qquad (104.1)$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Здесь q_i — обобщенные координаты; T — кинетическая, Π — потенциальная энергия; u — скаляр, который характеризует величину управляющего воздействия; $b_i(q_1, \ldots, q_n)$ — функции, определяющие направление силы u. Функции T, Π и b_i заданы. Закон регулирования $u = u(q_1, \ldots, q_n; q_1', \ldots, q_n')$ является искомым.

Пусть при $u \equiv 0$ система (104.1) обладает положением равновесия $q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Равновесие консервативной механической системы не может быть асимптотически устойчивым по Ляпунову, так как эти системы допускают интеграл энергии. Задача состоит в таком выборе управления $u(q, q')$, при котором положение равновесия становится асимптотически устойчивым. Упрочнение равновесия до асимптотической устойчивости выбором u назовем стабилизацией системы. Систему будем называть стабилизируемой, если возможна ее стабилизация[1]).

Рассмотрим уравнения первого приближения системы (104.1) в окрестности точки $q_i = 0$, $q_i' = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^0}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial \Pi^0}{\partial q_i'} = b_i^0 u \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (104.2)$$

Здесь

$$T^0 = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}^0 q_i' q_j', \qquad \Pi^0 = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}^0 q_i q_j$$

$$\left(a_{ij}^0,\ b_{ij}^0,\ b_i^0 \text{ — постоянные}\right).$$

[1]) См. дополнение IV, § 106.

Будем говорить, что управление

$$u = u^0(q,\ q') = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^0 q_i + r_i^0 q_i'\right) \tag{104.3}$$

$$\left(p_i^0 = \mathrm{const},\quad r_i^0 = \mathrm{const}\right),$$

найденное для уравнений (104.2), стабилизирует систему (104.1) по первому приближению, если равновесие $q_i = q_i' = 0$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ системы (104.1) асимптотически устойчиво при $u = u^0 + \mu(q,\ q')$, каковы бы ни были высшие нелинейные члены $T - T^0$, $\Pi - \Pi^0$, $\mu = u - u^0$.

Запишем уравнения (104.2) в нормальных координатах[1]):

$$\begin{aligned} \frac{dx_{2i-1}}{dt} &= x_{2i}, \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \\ \frac{dx_{2i}}{dt} &= -\lambda_i x_{2i} + e_i^0 u, \end{aligned} \tag{104.4}$$

где вектор $\{e_i^0\}$ связан с вектором $\{b_i^0\}$ неособым линейным преобразованием; x_{2i-1} — новые координаты, x_{2i} — скорости.

Рассмотрим сначала случай, когда все числа λ_i в уравнениях (104.4) положительны. Тогда при $u \equiv 0$ невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (104.4) устойчиво, но не асимптотически. Предположим, что все λ_i различны и все числа e_i^0 не равны нулю.

Тогда систему (104.4) можно стабилизировать до асимптотической устойчивости диссипативной силой[2])

$$e_i^0 u = -\frac{\partial R^0}{\partial q_i'} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{104.5}$$

где R^0 — знакоположительная функция Релея

$$R^0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2.$$

Действительно, функция

$$V = H\left(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ q_1',\ \ldots,\ q_n'\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2\right), \tag{104.6}$$

равная полной энергии системы, является в этом случае определенно положительной. Ее производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (104.4) при u

---

[1]) Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955, стр. 97—99.

[2]) См. Пожарицкий Г. К., Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.

из (104.3) удовлетворяет равенству

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2 \tag{104.7}$$

и является функцией знакопостоянной отрицательной. Покажем, что поверхность

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i} = 0,$$

где $\frac{dV}{dt} = 0$, не содержит целых движений $x_s(t)$ системы (104.4), отличных от $x_s = 0$. Действительно, если бы это было не так, то выполнялись бы n равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}(t) \equiv 0, \\ &\frac{d^k}{dt^k}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^0 \lambda_i^k x_{2i}(t) \equiv 0 \\ &(k = 1, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{104.8}$$

и, в частности, при некотором $t = t^*$ система (104.8) имела бы не тривиальное решение $x_{2i}(t^*)$. Но это невозможно, так как при наших предположениях $\left(e_i^0 \neq 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j;\ i \neq j;\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n\right)$ определитель

$$\begin{vmatrix} e_1^0, & e_2^0, & \ldots, & e_n^0 \\ \lambda_1 e_1^0, & \lambda_2 e_2^0, & \ldots, & \lambda_n e_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e_1^0, & \lambda_2^{n-1} e_2^0, & \ldots, & \lambda_n^{n-1} e_n^0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Итак, в данном случае выполнены все условия теоремы Д. Тем самым доказана асимптотическая устойчивость движения $x_s = 0$ системы (104.4) при воздействии u, определенном равенством (104.5). Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению заключаем, что управляющее воздействие u вида

$$\left.\begin{aligned} &b_i u = -\frac{\partial R}{\partial q_i'} \quad (i = 1, \ldots, n), \\ &R = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i q_i'\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{104.9}$$

стабилизирует до асимптотической устойчивости нелинейную систему (104.1).

Предположим теперь, что невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (104.4) при $u \equiv 0$ неустойчиво и, следовательно, среди чисел λ_i есть отрицательные. Предположим при этом, что в одном из уравнений (104.4), где $\lambda_k < 0$, имеем $e_k^0 = 0$. Тогда, очевидно, движение $x_s = 0$ системы (104.1) нельзя сделать асимптотически устойчивым, как бы ни выбирать воздействие u в форме

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n. \qquad (104.10)$$

Действительно, система первого приближения (104.4) при выборе u в виде (104.9) всегда будет иметь среди своих собственных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_{2n}$ по крайней мере одно положительное число $\rho = \lambda_k$. Отсюда по теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению заключаем, что движение $q_s = q_s' = 0$ системы (104.1) при u (104.10) неустойчиво. Следовательно, в этом случае стабилизация системы (104.1) по первому приближению невозможна.

Подчас удается, налагая на систему (104.1) сверх u дополнительные гироскопические силы, изменить систему (104.4) первого приближения так, что движение $x_s = 0$ этой системы становится устойчивым (неасимптотически), и при этом для новой системы первого приближения будут выполняться достаточные условия, при которых возможно упрочнение системы до асимптотической устойчивости выбором воздействия u вида (104.5). Эти условия указаны теоремой 1 § 112.

Гироскопические силы Q_i описываются в линейном приближении Q_i кососимметрической матрицей $\{g_{ij}^0\}$ $(g_{ij}^0 = -g_{ji}^0)$ $(g_{ij}^0$ — постоянные),

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^0 x_{2j}.$$

Поэтому уравнения (104.4) после наложения гироскопических сил принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_{2i-1}}{dt} &= x_{2i}, \\ \frac{dx_{2i}}{dt} &= -\lambda_i x_{2i-1} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^0 x_{2j} + e_i^0 u \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (104.11)$$

Ограничимся в дальнейшем случаями, когда среди собственных чисел λ_i нет нулей.

Вопрос о том, каким образом вычисляются гироскопические силы, обладающие указанными свойствами, а также вывод эффективных критериев, при которых это вычисление возможно, здесь рассматривать не будем. Отметим лишь следующее. Согласно общей теории указанная математическая задача будет решена, если будет найдена кососимметрическая матрица $\{g^0_{ij}\}$, описывающая в линейном приближении гироскопические силы, такая, что при добавлении в уравнения (104.2) членов $g^0_{ij}q'_j$ система первого приближения будет удовлетворять условиям общего положения[1]). Это можно сделать в широком классе случаев.

Простым примером такой ситуации является маятник с двумя степенями свободы (ξ, η) в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия, управляемый моментом u, воздействующим на координату φ (рис. 23).

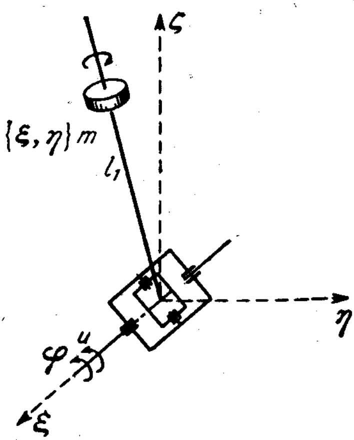

Рис. 23.

Гироскопический эффект, возникающий при быстром вращении маховичка m, делает систему устойчивой. Пусть система уравнений первого приближения (104.1) записана в данном случае в виде

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \quad x_2' = x_1 - \omega x_4, \\ x_3' &= x_4, \quad x_4' = x_3 + \omega x_2 + u, \end{aligned} \tag{104.12}$$

где величины x_1, x_3 изображают координаты ξ и η; величины x_2, x_4 — скорости ξ' и η', а величина ω пропорциональна скорости вращения маховичка m вокруг стержня l_1.

Легко проверить, что в данном случае выполняются условия теоремы 1 § 112. В самом деле, матрица W в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & -2\omega+\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\omega^2 \\ 1 & 0 & 1-\omega^2 & 0 \end{vmatrix},$$

и ранг ее равен 4.

Итак, мы рассматриваем случаи, когда система (104.4) неустойчива и ее, а следовательно, и исходную систему (104.1) нельзя стабилизировать выбором управления u в виде (104.9). Однако после наложения на (104.1) гироскопических сил Q_i получаем систему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = b_i u + Q_i \tag{104.13}$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

[1]) См. Дополнение IV, § 112.

для которой система первого приближения (104.10) приобретает свойство стабилизируемости.

Оказывается в таких случаях система (104.4) приобретает обязательно еще одно важное свойство: поверхность

$$R=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^0 x_{2i}\right)^2=0$$

не может при этом содержать целиком движений $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, 2n)$ системы (104.10), отличных от $x_s \equiv 0$ $(s=1, \ldots, 2n)$. Такое же свойство приобретает система (104.1): поверхность

$$R(q, q')=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i q_i'\right)^2$$

системы (104.1) не может при этом содержать целиком движений $\{q_s(t), q_s'(t)\}$ системы (104.13), отличных от $q_i(t)=q_i'(t)\equiv 0$ [1]. Здесь мы примем это утверждение без доказательства.

Теперь можно доказать следующее интересное свойство системы (104.13) в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Пусть консервативная система* (104.1) *в первом приближении* (104.2) *неустойчива и не стабилизируема воздействием* u. *Предположим, что при наложении подходящих гироскопических сил система* (104.2) *переходит в устойчивую и стабилизируемую систему* (104.11). *Тогда система* (104.13) *стабилизируется по первому приближению силой* (104.3) *в классе сил общей природы. При этом, однако, система* (104.13) *не только не может быть стабилизирована диссипативной силой* (104.9) *но, напротив, диссипативная сила* (104.9) *с частичной диссипацией обязательно разрушает устойчивость, которой обладает система* (104.13) *при* $u \equiv 0$.

Примечание. Теорема 1 утверждает, следовательно, что диссипативная сила u (104.9) с частичной диссипацией обязательно разрушает устойчивость системы (104.13), если только гироскопическая устойчивая система может быть упрочнена по первому приближению до асимптотической устойчивости силой (104.3) общей природы.

Доказательство теоремы 1. Итак, следует показать, что диссипативная сила (104.9) обязательно разрушает устойчивость положения равновесия $q_i=0$ системы (104.13), если только при наложении гироскопических сил Q_i неустойчивая система (104.1)

[1] Красовский Н. Н., Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1964.

переходит в стабилизируемую по первому приближению систему (104.13). Покажем это.

Функция $V = H(q, q')$ вида (104.6), где H — полная энергия системы (104.1), в рассматриваемом случае является знакопеременной. Ее производная $\frac{dV}{dt}$ вдоль движений системы (104.12) при управлении u (104.9) удовлетворяет равенству

$$\frac{dV}{dt} = -2R.$$

Следовательно, величина $\frac{dV}{dt}$ является знакоотрицательной функцией и может обращаться тождественно в нуль лишь при $R(q(t), q'(t)) \equiv 0$. Но, как только что отмечено, не существует движения $\{q_i(t), q_i'(t)\}$, отличного от положения равновесия и такого, что на нем $R \equiv 0$. Следовательно, движений $\{q_i(t), q_i'(t)\}$, отличных от $q_i = 0$, $q_i' = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, на которых $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, нет. Это означает, что функция V удовлетворяет в данном случае всем условиям теоремы о неустойчивости. Следовательно, неустойчивость положения равновесия системы (104.13) установлена.

В заключение отметим, что этот результат для управляемых механических систем тесно связан с результатами Н. Г. Четаева [1]) о влиянии диссипативных сил на устойчивость равновесий механических систем.

[1]) См. монографию, упомянутую в сноске на стр. 342.

ДОПОЛНЕНИЕ IV.

ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ.

§ 105. Предварительные замечания.

В последнее время получила большое развитие теория оптимальных процессов в управляемых динамических системах. Этой теории посвящен ряд фундаментальных монографий, появившихся в последние годы [1]). Среди проблем оптимального управления занимает важное место задачи о стабилизации заданного движения. Это — задача о построении регулирующих воздействий, которые обеспечивают устойчивое осуществление желаемого движения при наилучшем возможном качестве переходного процесса. Задача об оптимальной стабилизации тесно смыкается с общей задачей об устойчивости движения, составляющей предмет настоящей монографии. Она является дальнейшим развитием проблемы устойчивости в приложении к теории управляемых систем. Методы исследования проблем оптимальной стабилизации переплетаются с классическими методами теории устойчивости Ляпунова. В частности, метод динамического программирования, один из основных в задачах оптимального управления [2]), является по существу объединением методов вариационного исчисления с методом функций Ляпунова.

В монографиях по теории оптимальных процессов, посвященных весьма общим аспектам этой теории, указанное обстоятельство не выдвигается, естественно, на первый план и не рассматривается специально с позиций теории устойчивости Ляпунова. В то же время развитие проблем оптимального управления и методов их решения определило некоторые новые направления исследований по устойчивости регулируемых движений. Эти исследования тесно связаны

---

[1]) Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961; Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962; Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, М., Физматгиз, 1963.

[2]) См. монографию Беллмана и др., упомянутую в сноске [1]).

с материалом настоящей монографии. По указанным причинам мы сочли целесообразным дать настоящее приложение к книге И. Г. Малкина.

Это приложение содержит краткий очерк некоторых проблем стабилизаций управляемых движений и методов их решения. При этом выбран лишь тот материал, который имеет прямое отношение к содержанию монографии. Автор приложения старался в меру возможности согласовать характер изложения с основным текстом книги.

В основу материала настоящего приложения легли исследования, выполненные в последние годы и имеющие своим источником проблему аналитического конструирования регуляторов, поставленную А. М. Летовым [1]).

§ 106. Постановка задачи о стабилизации.

Рассмотрим некоторую управляемую динамическую систему и допустим, что ее движение может быть описано системой дифференциальных уравнений, которая может быть приведена к нормальному виду

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_r) \qquad (106.1)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь, как и в уравнениях (2.1), переменные y_s — это некоторые параметры, связанные с движением, например координаты, скорости и т. д. Уравнения (106.1) отличаются от уравнений (2.1) тем, что здесь фигурируют величины $v_1, \ldots, v_r$, которые описывают управляющие воздействия, приложенные к рассматриваемому объекту. Такие воздействия не исключались, конечно, и выше всюду в тексте книги при изучении движений, описываемых уравнениями (2.1). Функции $v_j(t)$ могли входить неявно в правые части уравнений (2.1) и в правые части вытекающих из них уравнений возмущенного движения (3.2). Однако сейчас эти переменные v_j фигурируют явно и играют центральную роль во всем дальнейшем изложении.

Предположим, что нас интересует какое-либо частное движение нашей системы, порождаемое управляющими воздействиями $v_j = p_j(t)$ $(j = 1, \ldots r)$. Этому движению соответствует некоторое частное решение $y_s = f_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ уравнений (106.1) (при $v_j = p_j(t)$). Как и выше, будем это движение называть невозмущенным. Наряду с невозмущенным движением $\{f_s(t)\}$ будем рассматривать возмущенные движения $\{y_s(t)\}$. Предполагается, что возмущенные движения $y_s(t)$

[1]) Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 4, 5, 6, 1960; т. XXII, № 4, 1961; т. XXIII, № 11, 1962.

также описываются уравнениями (106.1) но уже при значениях $v_j(t)$, отличных, вообще говоря, от величин $p_j(t)$. Отклонения $v_j(t)-p_j(t)$ переменных v_j от $p_j(t)$ обусловливают здесь специфические особенности задачи об устойчивости движения $y_s=f_s(t)$. Проблема стабилизации невозмущенного движения $y_s=f_s(t)$, собственно, и состоит в таком выборе величин $\Delta v_j=v_j-p_j(t)$, при которых движение $y_s=f_s(t)$ оказывается устойчивым.

Для исследования проблем стабилизации целесообразно составить уравнения возмущенного движения управляемой системы, перейдя к новым переменным

$$x_s=y_s-f_s(t), \quad u_j=v_j-p_j(t) \tag{106.2}$$
$$(s=1, \ldots, n; \ j=1, \ldots, r),$$

где, следовательно, x_s — возмущения движений, u_j — отклонения управляющих воздействий от величин $p_j(t)$.

Полученные таким образом преобразованные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt}&=X_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)=\\ &=Y_s(t, x_1+f_1, \ldots, x_n+f_n; u_1+p_1, \ldots, u_r+p_r)-\\ &\qquad -Y_s(t, f_1, \ldots, f_n; p_1, \ldots, p_r) \qquad (106.3)\\ &\qquad (s=1, \ldots, n)\end{aligned}$$

мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Теперь можно сформулировать задачу о стабилизации.

Задача I (о стабилизации). *Требуется найти такие управляющие воздействия* $u_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r(t, x_1, \ldots, x_n)$, *которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения* $x_s=0$ *в силу уравнений* (106.3) (*при* $u_j=u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$).

Реальной основой для сформулированной задачи I является следующая ситуация. Предполагается, что в ходе регулирования можно измерять текущие значения всех координат $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, n)$. На основе этого измерения управляющее устройство должно вырабатывать воздействия $u_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $(j=1, \ldots, r)$ на объект. Эти воздействия должны обеспечивать асимптотическую устойчивость заданного невозмущенного движения $x_s=0$.

По смыслу величин x_s и u_j (106.2) предполагается, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, определение которых составляет задачу I, должны удовлетворять равенствам

$$u_j(t, 0, \ldots, 0)=0 \qquad (j=1, \ldots, r). \tag{106.4}$$

Будем предполагать, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ должны быть определены и непрерывны в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| < H, \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{106.5}$$

где заданы функции X_s, являющиеся правыми частями уравнений (106.3). Кроме того, примем, что функции X_s и u_j удовлетворяют условиям, которые обеспечивают существование и единственность решений x_s при любых начальных условиях t_0, $x_s(t_0)$ из области (106.5). Мы будем исследовать задачу о стабилизации, предполагая, что функции $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ не стеснены никакими дополнительными неравенствами, т. е. предполагается, что в (106.3) переменные u_j могут принимать любые, сколь угодно большие значения. В соответствии с этим считаем, что функции X_s определены при t и x_s из области (106.5) для всех значений $-\infty < u_j < +\infty$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Задача о стабилизации сформулирована нами для случая асимптотической устойчивости. Наряду с этой задачей можно изучать задачу о стабилизации, которая содержит более слабое требование лишь устойчивости заданного движения $x_s = 0$. Однако здесь мы ограничимся только более грубой проблемой о стабилизации управляемой системы до асимптотической устойчивости.

§ 107. Постановка задачи об оптимальной стабилизации.

Прикладные задачи о стабилизации наряду с требованием асимптотической устойчивости заданного движения $x_s = 0$ содержат обычно пожелания о наилучшем возможном качестве переходного процесса, т. е. пожелания о наилучшем (с какой-либо точки зрения) качестве возмущенного движения $x_s(t)$ в процессе его приближения к состоянию $x_s = 0$ при $t \to \infty$. При этом обычно высказывается также пожелание о наименьшей возможной затрате ресурсов (энергии, импульсов и т. д.), расходуемых на формирование управляющих воздействий $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$. Такие пожелания часто можно выразить в виде условия минимальности некоторого интеграла

$$I = \int_{t_1}^{\infty} \omega(t, x_1[t], \ldots, x_n[t]; u_1[t], \ldots, u_r[t])\, dt. \tag{107.1}$$

Здесь $\omega(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)$ — неотрицательная функция, определенная в области (106.5). Символом $u_j[t]$ будем обозначать величины управляющих воздействий $u_j[t] = u_j(t, x_1[t], \ldots, x_n[t])$ (в функции только от времени), которые реализуются в системе (106.3) при $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$. При этом символы $x_s[t]$ обозначают как раз те движения системы (106.3), которые порождаются управлением $u_j[t] = u_j(t, x_1[t], \ldots, x_n[t])$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что движение $x_s[t]$ порождается некоторым фиксированным управлением $u_j = u_j^*(t, x_1, \ldots, x_n)$, будем снабжать символы $x_s[t]$ и $u_j[t]$ индексом $*$, т. е. будем писать $x_s^*[t]$ и $u_j^*[t]$.

Вопрос о выборе функции ω, определяющей оценку качества I (107.1) процесса $x_s(t)$, здесь подробно обсуждать не будем. То или иное решение этого вопроса определяется в каждом случае конкретными особенностями рассматриваемой прикладной задачи. Заметим лишь, что обычно при выборе функции ω ведущие роли играют следующие три мотива.

1. Условие минимума интеграла (107.1) должно обеспечивать достаточно быстрое затухание движений $x_s[t]$.

2. Величина интеграла I должна удовлетворительно оценивать ресурсы, затрачиваемые на формирование управляющих воздействий $u_j[t]$.

3. Функция ω должна быть такой, чтобы решение задачи не оказалось чрезмерно трудным и чтобы по возможности это решение можно было получить в замкнутой форме.

В частности, условиям 1 — 3 во многих случаях удовлетворительно отвечает функция $\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$, выбранная в виде определенно положительной квадратичной формы

$$\omega = \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j. \tag{107.2}$$

Задачу о стабилизации системы (106.3) при условии минимума какого-либо критерия качества I (107.1) будем называть задачей об оптимальной стабилизации. Следовательно, эта проблема формулируется так:

Задача II (об оптимальной стабилизации). *Пусть выбран критерий качества процесса $x_s(t)$ в виде интеграла* (107.1). *Требуется найти такие управляющие воздействия $u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ в силу уравнений* (106.3) *(при $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$). При этом каковы бы ни были другие управляющие воздействия $u_j^*(t, x_1, \ldots, x_n)$, решающие задачу* I, *должно выполняться неравенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t])\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\, dt \tag{107.3}$$

для всех начальных условий t_0, $x_s(t_0)$ *из области*

$$t_0 \geqslant 0, \qquad |x_s(t_0)| \leqslant \eta. \tag{107.4}$$

Здесь положительная постоянная η или задана заранее по условиям задачи, или эта величина имеет тот же смысл, что и величина η в постановке задачи об устойчивости (см. стр. 16).

В частности, если речь идет о задаче об оптимальной стабилизации в целом, то условие (107.3) должно выполняться для всех начальных возмущений $x_s(t_0)$, как бы велики они ни были.

Функции $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j=1, \ldots, r)$, разрешающие задачу II, будем называть *оптимальным управлением.*

Задача II об оптимальной стабилизации предъявляет к функциям u_j^0 больше требований, чем задача I к разрешающим ее функциям u_j. Однако исследование и решение задачи II облегчаются тем обстоятельством, что эта проблема, как правило, имеет единственное решение $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$. Напротив, выбор функций $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, решающих задачу I, обычно содержит большой произвол. По этой причине часто оказывается целесообразным такой путь решения задачи I.

Для исключения произвола в выборе функций $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ вводят в условия этой задачи вспомогательное условие (107.3) минимума некоторого интеграла I (107.1), хотя может быть исходная проблема стабилизации никаких явных условий оптимальности не содержит. Тем самым исходная задача I превращается во вспомогательную задачу II. При этом, естественно, функция ω в (107.1) должна выбираться так, чтобы решение вспомогательной задачи II было возможно более простым. При решении сложных проблем стабилизации вспомогательные задачи II могут также вводиться лишь на отдельных этапах (см. сноску на стр, 492).

Материал настоящего приложения посвящен исследованию задач I и II методами, опирающимися на основные идеи классической теории устойчивости движения.

§ 108. Пример задачи о стабилизации.

В качестве примера рассмотрим задачу о переводе точки, находящейся под действием центральной силы F, с некоторой эллиптической траектории на круговую орбиту, достаточно близкую к эллиптической. Эту задачу можно сформулировать как проблему стабилизации невозмущенного движения, соответствующего заданной орбите.

Будем полагать, что движение точки управляется реактивной силой R; тогда масса точки m является величиной переменной и ее движение будет описываться известным уравнением Мещерского[1])

$$m\frac{dv}{dt}=F+R, \tag{108.1}$$

где $m(t)=m_0+m_1(t)$, $m_0=\text{const}$, $m_1(t)\geqslant 0$, $R=\frac{dm_1}{dt}(a-v)$, v — скорость точки, a — скорость частицы dm_1 в момент $t+dt$ после ее отделения от точки, так что $c=a-v$ есть относительная скорость отделяющейся частицы.

Если вектор реактивной силы R во все время движения точки остается в плоскости первоначальной траектории, то движение точки будет плоским и оно вполне будет определяться изменением ее полярных координат r и φ.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение r и φ, можно получить, если спроектировать векторное уравнение (108.1) на направление радиуса движущейся точки и перпендикулярное к нему направление. Известно[2]), что проекции вектора ускорения $w=\frac{dv}{dt}$ на указанные направления вычисляются по формулам

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2, \qquad w_\varphi=2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}.$$

Тогда можно записать два дифференциальных уравнения, каждое из которых есть уравнение второго порядка относительно r и φ:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F+R_r, \qquad m\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}=rR_\varphi,$$

где

$$R_r=c_r\frac{dm_1}{dt}, \qquad R_\varphi=c_\varphi\frac{dm_1}{dt},$$

а c_r и c_φ — проекции относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление, соответственно.

Разделив оба уравнения на $m(t)$ и полагая, что сила F есть сила всемирного тяготения, окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2}&=-\frac{\mu}{r^2}+r\dot{\varphi}^2+c_r\frac{d\ln m}{dt},\\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})&=rc_\varphi\frac{d\ln m}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{108.2}$$

Здесь $\mu=fM$, f — постоянная всемирного тяготения, M — масса притягивающего тела, которую мы считаем большой по сравнению с m и поэтому принимаем ее неподвижной.

---

[1]) Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949.

[2]) Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.

Предположим теперь, что задана некоторая круговая орбита радиуса r_0 и достаточно близкая к круговой эллиптическая траектория, по которой точка движется под действием только силы притяжения, пока реактивная сила отсутствует. Примем движение точки по круговой орбите за невозмущенное. Требуется определить закон изменения массы, следуя которому движение точки могло бы с течением времени неограниченно приблизиться к движению по круговой орбите.

Обозначая $r_0 c_\varphi \frac{d \ln m}{dt} = u$, $r = y_1$, $\dot{r} = y_2$ и вводя новую координату $y_3 = r^2 \dot{\varphi}$, запишем уравнения (108.2) в нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\mu}{y_1^2} + \frac{y_3^2}{y_1^3} + bu, \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{1}{r_0} y_1 u. \end{aligned}\right\} \qquad (108.3)$$

Полагая величины $|c_r|$ и $|c_\varphi|$ постоянными во все время движения, т. е. считая, что выброс массы производится ориентированно относительно системы координат, связанной с точкой, имеем $b = \frac{c_r}{c_\varphi r_0} = \frac{k}{r_0} = \text{const}$. Невозмущенное движение нашей точки определится, очевидно, соотношениями $y_1 = r_0$, $y_2 = 0$, $y_3 = \sqrt{\mu r_0}$, которые представляют собой частное решение системы (108.3) при $u \equiv 0$, соответствующее движению по круговой орбите.

Положим $x_1 = y_1 - r_0$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3 - \sqrt{\mu r_0}$ и, подставляя в (108.3), получим дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_3 + bu + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= u + f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \qquad (108.4)$$

где обозначено $\alpha = -\frac{\mu}{r_0^3}$, $\beta = \frac{2\sqrt{\mu r_0}}{r_0^3}$, а функции f_2 и f_3 раскладываются в некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в ряды по степеням x_1, x_2, x_3, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Итак, задачу, поставленную в начале параграфа, можно сформулировать следующим образом: найти функцию $u = u(x_1, x_2, x_3)$, обращающуюся в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и такую, чтобы тривиальное решение системы (108.4) было асимптотически устойчивым при достаточно малых начальных возмущениях $x_i(t_0) = x_{i0}$ ($i = 1$, 2, 3). Эти возмущения определяются в момент t_0 включения управляющего воздействия. Таким образом, получаем задачу I (о стабилизации). Очевидно, что решение этой задачи не является единственным.

Допустим, что к переходному процессу и управляющему воздействию u предъявлены некоторые требования. Например, требуется, чтобы переходный процесс, характеризующийся значениями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ при $t > t_0$, затухал достаточно быстро, и одновременно желательно, чтобы количество переменной массы, израсходованной на управление, было бы при этом не слишком велико. Для этого надо среди всех управляющих воздействий, решающих задачу I (допустимых управлений), определить такое управление $u^0(x_1, x_2, x_3)$ — оптимальное управление, — которое минимизирует некоторую цену качества, определяемую изложенными выше требованиями. Таким образом, получим задачу II (об оптимальной стабилизации).

Для нашего примера целесообразным критерием качества был бы интеграл

$$I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 + \gamma |u|\right) dt, \tag{108.5}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые положительные константы, а $\gamma = \frac{1}{|c_\varphi| r_0}$. В самом деле, интеграл

$$I_u^{(1)} = \int_{t_0}^{\infty} \left(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2\right) dt$$

характеризует известным образом качество переходного процесса, оценивая малость величин $x_s(t)$, а интеграл

$$I_u^{(2)} = \int_{t_0}^{\infty} \gamma |u| \, dt = -\int_{t_0}^{\infty} \frac{d \ln m}{dt} = \ln \frac{m_0 + m_1(t_0)}{m_0}$$

определяет запас переменной массы m_1 в начальный момент управления t_0. Итак, переход на круговую орбиту можно осуществить за счет минимальных управляющих ресурсов и вместе с тем при хорошем качестве переходного процесса, если удастся найти оптимальное управление u^0, для которого

$$I_{u^0}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \leqslant I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30})$$

при любых x_{i0} ($i = 1$, 2, 3) и для всех u, решающих задачу I.

Однако два обстоятельства вынуждают отказаться от критерия (108.5), несмотря на всю его целесообразность.

Во-первых, неаналитичность подынтегральной функции приводит к трудоемким вычислениям при определении оптимального управляющего воздействия, а в замкнутой форме найти решение вряд ли возможно. Во-вторых, по той же причине структура алгоритма управления получается весьма сложной, а потому технически трудно осуществимой.

Учитывая указанные обстоятельства, можно предложить вместо (108.5) в качестве критерия оптимальности интеграл

$$I_u(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 + \gamma u^2\right) dt, \qquad (108.6)$$

который несущественно отличается от (108.5) лишь в части, характеризующей расход переменной массы, но зато позволяет найти оптимальное управление в замкнутой форме и простое по своей структуре.

Решение этой задачи будет приведено после изложения общей теории (см. § 113).

§ 109. Второй метод Ляпунова для задач об оптимальной стабилизации.

В этом параграфе мы изложим основную теорему второго метода Ляпунова исследования проблем оптимальной стабилизации. Эта теорема является модификацией теоремы II Ляпунова (см. стр. 195), причем учитываются соображения метода динамического программирования Р. Беллмана[1]).

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_r) \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad (109.1)$$

где функции X_s определены в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H \qquad (109.2)$$

и удовлетворяют в этой области всем условиям, перечисленным в § 106.

Как и в теореме II, нам придется рассматривать функции Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенно-положительные в области (109.2). Существенную роль будет играть одно выражение, которое мы обо-

[1]) См. его монографию, упомянутую в сноске на стр. 475.

значим символом $B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]$:

$$B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]= \\ =\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}X_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r)+ \\ +\omega(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r). \quad (109.3)$$

Здесь ω — функция, определяющая показатель (107.1) качества регулирования.

Очевидно, если при некотором выборе функции $V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и функций $u_j=u_j^*(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ $(j=1,\ \ldots,\ r)$ в области (109.2) выполняется равенство

$$B[V;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^*,\ \ldots,\ u_r^*]=0, \quad (109.4)$$

то это означает, что производная $\frac{dV}{dt}$ функции V в силу уравнений (106.3) при $u_j=u_j^*(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ удовлетворяет в этой области равенству

$$\frac{dV}{dt}=-\omega(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n). \quad (109.5)$$

Основная теорема об оптимальной стабилизации, которую мы в дальнейшем будем называть теоремой IV, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема IV. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (109.1) *можно найти допускающую бесконечно малый высший предел определенно положительную функцию* $V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *и функции* $u_j^0(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, *удовлетворяющие в области* (109.2) *условиям*:

1) *функция*

$$w(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\omega(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^0(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots \\ \ldots,\ u_r^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))$$

является определенно положительной;

2) *справедливо равенство*

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots \\ \ldots,\ u_r^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)]=0; \quad (109.6)$$

3) *каковы бы ни были числа* u_j, *справедливо неравенство*

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]\geqslant 0, \quad (109.7)$$

то функции $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ *разрешают задачу* II *об оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t]\right) dt =$$
$$= \min \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1[t], \ldots, x_n[t]; u_1[t], \ldots, u_r[t])\, dt =$$
$$= V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)). \quad (109.8)$$

Примечание. Как отмечено выше в книге (см. стр. 38, 195), функции V, удовлетворяющие условиям теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости, не только устанавливают сам факт устойчивости, но и позволяют оценить область

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (109.9)$$

тех начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых выполняются неравенства

$$|x_s(t)| < H \qquad (t \geqslant t_0,\ s = 1, \ldots, n) \qquad (109.10)$$

и предельное соотношение

$$\lim x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (109.11)$$

При $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнениях (109.1) функция V^0 удовлетворяет условиям теоремы II об асимптотической устойчивости. Число η, определяющее область (109.9), в соответствии с изложенным в § 10 может быть, следовательно, найдено из соотношения

$$\sup\{V^0(t, x_1, \ldots, x_n) \ \text{при} \ |x_s| \leqslant \eta\} <$$
$$< \inf\{V^0(t, x_1, \ldots, x_n) \ \text{при} \ \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = h\}, \quad (109.12)$$

где h — некоторое положительное число, меньшее чем H $(t \geqslant t_0 \geqslant 0)$. Будем считать число h фиксированным.

Утверждение теоремы IV, выражаемое неравенством (109.8), надо понимать в следующем смысле: при $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ интеграл (107.1) достигает *наименьшего значения для всех начальных условий* $x_s(t_0)$ $(t_0 \geqslant 0)$ *из области* (109.9), где число η выбрано в соответствии с неравенством (109.12).

Доказательство теоремы. При $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ функция V^0 удовлетворяет всем условиям теоремы II. Ее производная $\frac{dV^0}{dt}$ в силу уравнений (109.1) (при $u_j = u_j^0$) определяется равенством

$$\frac{dV^0}{dt} = -\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1^0, \ldots, u_r^0) \qquad (109.13)$$

и, следовательно, является функцией определенно-отрицательной. Поэтому воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_s = 0$ и выполнение предельного соотношения (109.11) для всех начальных условий $x(t_0)$ из области (109.9), (109.12).

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость соотношения (109.8). Сделаем это. Движения $x_s^0[t]$ при условии (109.9), (109.12) удовлетворяют неравенству $|x_s^0[t]| \leqslant h < H$. Следовательно, вдоль таких движений при всех $t \geqslant t_0$ выполняется равенство (109.6) или, иначе говоря, равенство (109.13). Кроме того, вследствие асимптотической устойчивости выполняется предельное соотношение

$$\lim V^0(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{109.14}$$

Интегрируя равенство (109.13) вдоль движения $x_s^0[t]$ в пределах от $t = t_0$ до $t = \infty$ и учитывая (109.14), получим:

$$V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = \\ = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t];\ u_1^0[t], \ldots, u_r^0[t])\,dt. \tag{109.15}$$

С другой стороны, пусть $u_1^*(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ — какие-либо функции, также решающие задачу о стабилизации движения $x_s = 0$ для начальных возмущений из области (109.9). Примем сначала, что соответствующие движения $x_s^*[t]$ не выходят при $t \geqslant t_0$ из области $|x_s| \leqslant h$. Тогда в процессе движения $x_s^*[t]$ все время будет выполняться (109.7), или, иначе говоря, будет выполняться неравенство

$$\frac{dV^0}{dt} \geqslant -\omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]). \tag{109.16}$$

Здесь $\frac{dV^0}{dt}$ производная функции V^0 вдоль движения $x_s^*[t]$. Интегрируя неравенство (109.16) от $t = t_0$ до $t = \infty$ и снова учитывая предельное соотношение

$$\lim V^0(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{109.17}$$

получим:

$$V^0(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \leqslant \\ \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t];\ u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t])\,dt. \tag{109.18}$$

Аналогичное неравенство получается и в том случае, когда движение $x_s^*[t]$ на время покидает область

$$|x_s| \leqslant h \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{109.19}$$

Действительно, в последнем случае имеет место следующая ситуация. Пусть $\tau > t_0$ — момент времени, когда движение $x_s^*[t]$ в последний раз вошло в область (109.19) и уже при $t \geqslant \tau$ не покидает эту область. Тогда с этого момента вдоль движения $x_s^*[t]$ все время выполняется условие (109.16). Интегрируя это неравенство от $t=\tau$ до $t=\infty$ и учитывая опять предельное соотношение (109.17), получим:

$$V^0\left(\tau, x_1^*[\tau], \ldots, x_n^*[\tau]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int_\tau^\infty \omega\left(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t], u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t]\right) dt. \tag{109.20}$$

Но по выбору $x_s(t_0)$ из области (109.9), (109.12) справедливо неравенство

$$V^0\left(t^0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right) < V^0\left(\tau, x_1^*[\tau], \ldots, x_n^*[\tau]\right), \tag{109.21}$$

а вследствие неотрицательности функции ω имеем:

$$\int_\tau^\infty \omega\left(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t]\right) dt <$$
$$< \int_{t_0}^\infty \omega\left(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]; u_1^*[t], \ldots, u_r^*[t]\right) dt. \tag{109.22}$$

Из (109.20) — (109.22) снова следует справедливость неравенства (109.18). Соотношения (109.15) и (109.18) доказывают (109.8). Тем самым теорема IV полностью доказана.

Примечание. В условиях теоремы IV предполагается, что величины u_j в уравнениях (109.1) являются функциями от t и $x_s(t)$. Однако анализ доказательства этой теоремы показывает, что соотношение (109.8) справедливо и в том случае, когда в (109.8) $u_j = u_j[t]$ представляют собой *любые функции времени* $u_j = u_j(t)$, обеспечивающие предельное соотношение $\lim x_s[t] = 0$ при $t \to \infty$. Действительно, в этом доказательстве по существу нигде не использовалось предположение, что функция $u_j^*[t]$ имеет форму $u_j^*[t] = u_j^*\left(t, x_1^*[t], \ldots, x_n^*[t]\right)$, а не просто является явной функцией только от времени t. Следовательно, теорема IV устанавливает оптимальность управления $u_j^0 = u_j^0\left(t, x_1, \ldots, x_n\right)$ как по отношению к управляющим воздействиям вида $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, так и по отношению к управляющим воздействиям $u_j = u_j(t)$ для всех начальных возмущений из области (109.9), (109.12).

§ 110. Замечания ко второму методу Ляпунова в теории стабилизации.

Итак, для решения задачи II об оптимальной стабилизации следует попытаться найти функции V^0 и u_j^0, удовлетворяющие условиям теоремы IV. При этом необходимо обеспечить выполнение равенства (109.6), которое является уравнением в частных производных относительно искомой функции V^0. Уравнение (109.6) надо разрешить с учетом дополнительного условия (109.7). В результате получается достаточно трудная задача. Однако, как и в случае общей задачи об устойчивости движения, где также проблема эффективного построения функций Ляпунова весьма нелегка, можно указать некоторые типы уравнений (109.1), для которых функция V^0 строится в замкнутой форме. Отыскание этих типов уравнений и построение соответствующих функций V^0 облегчаются известными результатами теории устойчивости движения. В частности, для линейных систем, как и в обычных задачах устойчивости, полезным аппаратом исследования являются функции V^0 в виде квадратичных форм.

Функции $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условиям теоремы IV, будем называть *оптимальными функциями Ляпунова*, отвечающими соответствующей задаче II об оптимальной стабилизации.

Теорема IV может обобщаться в различных направлениях. Если речь идет о проблеме оптимальной стабилизации в целом (см. стр. 480), то в формулировке теоремы IV достаточно потребовать выполнения соотношений (109.6), (109.7) при всех x_s $(-\infty < x_s < +\infty,$ $s = 1, \ldots, n)$ и добавить условия, обеспечивающие устойчивость движения $x_s = 0$ в целом. Эти условия указаны в примечании к стр. 38. Поэтому мы не будем приводить здесь соответствующую полную формулировку теоремы IV в этом случае. Теорема IV также сохраняет свою силу и в тех случаях, когда управляющие воздействия стеснены дополнительными неравенствами (например, $|u_j| \leqslant 1$). В таких случаях следует лишь потребовать, чтобы функция V^0 удовлетворяла неравенству (109.7) при всех значениях u_j, стесненных заданными ограничениями. Можно, наконец, ослабить условия определенной положительности функции $\omega(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$, заменив его условием знакоположительности при дополнительных ограничениях в духе критерия асимптотической устойчивости, данного в приложении III. Изменения, которые при этом следует внести в формулировку теоремы IV, очевидны, и мы на них здесь не останавливаемся.

В теореме IV естественно предполагается, что функция $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ имеет в области (109.2) непрерывные частные производные $\frac{\partial V^0}{\partial t}$, $\frac{\partial V^0}{\partial x_s}$ $(s = 1, \ldots, n)$. Для задач оптимального управления, однако, интересны случаи, когда это предположение не выполняется при отдельных значениях t и x_s, заполняющих, может быть, некоторые поверхности. Критерий оптимальности, подобный теореме IV, но работающий с применением таких не гладких функций $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, разработан В. Г. Болтянским[1]).

В заключение этого параграфа сделаем еще несколько кратких замечаний о связи теоремы IV с общими методами вариационного исчисления и, в частности, с известными методами математической теории оптимальных процессов.

Критерий оптимальности воздействий u_j^0, который выражается равенством (109.6) и неравенством (109.7), соответствует известному методу в вариационном исчислении, опирающемуся на теорию распространения возмущений[2]). Здесь, однако, в отличие от наиболее распространенной формы необходимых условий экстремальности, критерий приведен в форме достаточных условий минимума интеграла (107.1). При этом условия теоремы IV одновременно обеспечивают выполнение предельного соотношения $\lim x_s(t) = 0$ при $t \to \infty$. Такая формулировка соответствует характеру основных теорем второго метода Ляпунова исследования устойчивости движения. Поэтому она и выбрана нами здесь. Естественным результатом отмеченной связи теоремы IV с методами классического вариационного исчисления является тот факт, что соотношение (109.6) имеет форму уравнения в частных производных вида известного уравнения Гамильтона—Якоби.

Фундаментальным методом исследования задач об оптимальном управлении является метод, основанный на принципе максимума Л. С. Понтрягина[3]). В теории оптимальных процессов, развитой Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, оптимальное управление u_j ищется в виде функции только от времени $u_j = u_j^0(t)$ (отдельно для каждых фиксированных начальных условий $x_s(t_0)$).

Для задачи, аналогичной задаче II, но состоящей в определении управления u_j в форме $u_j = u_j^0(t)$, принцип максимума утверждает, что на оптимальном движении $x_s^0[t]$ системы (109.1), порожденном управлением $u_j^0(t)$, обязательно выполняется условие

$$H\left[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t);\ t,\ x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t];\ u_1^0, \ldots, u_r^0\right] \geqslant$$
$$\geqslant H\left[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t);\ t;\ x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t];\ u_1, \ldots, u_r\right], \qquad (110.1)$$

[1]) Болтянский В. Г., Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР, серия математическая, т. XXVIII, № 3, 1964.

[2]) См., например, монографию: Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

[3]) См. монографию Л. С. Понтрягина и др., упомянутую в сноске на стр. 475.

каковы бы ни были числа $u_1, \ldots, u_r$. Здесь величина H определена равенством

$$H[\psi_0, \ldots, \psi_{n+1}; t; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r] = \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi_i X_i(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) + \\ + \psi_{n+1} + \omega(t; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)\psi_0, \quad (110.2)$$

а величины $\psi_i(t)$ являются некоторым частным решением системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{dt} &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\psi_j \qquad (i = 0, \ldots, n), \\ \frac{d\psi_{n+1}}{dt} &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial t}\psi_j, \end{aligned}\right\} \quad (110.3)$$

где $X_0 = \omega$ и $X_{n+1} = 1$. При этом на оптимальном движении $x_s^0[t]$ величина H остается постоянной, т. е.

$$H\left[\psi_0(t), \ldots, \psi_{n+1}(t); t; x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]; u_1^0(t), \ldots, u_r^0(t)\right] = 0 \\ \text{при } t \geqslant t_0. \quad (110.4)$$

Связь принципа максимума с теоремой IV определяется следующим обстоятельством: можно проверить, что при выполнении условий теоремы IV на движении $x^0[t]$, порожденном оптимальным управлением $u_j^0[t] = u_j^0\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]\right)$, справедливы равенства

$$\psi_s(t) = -\frac{\partial V^0\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]\right)}{\partial x_s} \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

$$\psi_{n+1}(t) = -\frac{\partial V^0\left(t, x_1^0[t], \ldots, x_n^0[t]\right)}{\partial t},$$

$$\psi_0 = -1.$$

Но в таком случае понятно, что равенство (110.4) и условие (110.1) имеют тот же смысл, что и равенство (109.6) и неравенство (109.7), соответственно. Подчеркнем, однако, еще раз, что принцип максимума указывает *необходимые условия* оптимальности управления $u_j = u_j^0(t)$, в то время как теорема IV дает *достаточные условия* для оптимального управления u_j в форме $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, наконец, что в случае установившихся движений $x_s = 0$, т. е. в случаях, когда функции X_s и ω не зависят явно от времени, оптимальную функцию Ляпунова V^0 и оптимальное управление u_j^0 также следует искать в виде функций, не зависящих явно от времени, т. е. $V^0 = V^0(x_1, \ldots, x_n)$, $u_j^0 = u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, r)$.

§ 111. Решение задачи о стабилизации для уравнений первого приближения.

Для задач I и II о стабилизации, как и для общей проблемы устойчивости, может быть развита теория исследования этих задач по первому приближению. Здесь можно указать случаи, когда решение проблемы определяется линейным приближением, а также критические случаи, когда возможность разрешения проблемы и сами искомые воздействия $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ определяются членами высшего порядка малости в уравнениях (109.1) возмущенного движения.

В настоящем приложении мы ограничимся лишь одним результатом, относящимся к этой теории. Именно, мы рассмотрим случай, когда задача I для нелинейной системы решается исходя из ее линейного приближения. Имеются работы[1]), в которых можно найти более подробное изложение теории стабилизации по первому приближению.

Примем, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r + R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{111.1}$$

Здесь p_{sj}, q_{sj} — ограниченные и непрерывные функции времени, в частности p_{sj}, q_{sj} — постоянные; R_s — функции, разлагающиеся в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| < H \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{111.2}$$

в ряды по степеням переменных x_s и u_s с ограниченными коэффициентами, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

Мы переходим теперь к исследованию задач о стабилизации для уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{111.3}$$

[1]) Альбрехт Э. Г., Об оптимальной стабилизации нелинейных систем, ПММ, т. XXV, вып. 5, 1961; К теории аналитического конструирования регуляторов, Труды Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике, Изд. КАИ, Казань, 1962; Зубов В. И., К теории аналитического построения регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 8, 1963; Гальперин Е. А., Красовский Н. Н., О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем, ПММ, т. XXVII, вып. 6, 1963; Красовский Н. Н., Осипов Ю. С., О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика № 6, 1963.

Исследование начнем с задачи II об оптимальной стабилизации, причем в качестве критерия качества (107.1) выберем интеграл

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}(t)\,u_i(t)\,u_j(t)\right\}dt, \tag{111.4}$$

где квадратичные формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$ и $\sum\limits_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$ предполагаются определенно-положительными.

Оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, которая удовлетворяла бы условиям теоремы IV, следует здесь искать в виде квадратичной формы

$$V^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}(t)\,x_ix_j. \tag{111.5}$$

Составим выражение $B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]$ (109.3):

$$B[V^0;\ t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r]=$$

$$=\frac{\partial V^0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\left(\sum_{s=1}^{n}p_{is}x_s+\sum_{j=1}^{r}q_{ij}u_j\right)+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j. \tag{111.6}$$

При $u_j=u_j^0(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$ величина B должна иметь минимум и обращаться при этом в нуль. Поэтому, приравнивая правую часть (111.6) к нулю, получим первое уравнение для V^0 и u_j^0. Дифференцируя правую часть (111.6) по u_j $(j=1,\ \ldots,\ r)$ и приравнивая результаты к нулю, получим еще r уравнений для определения V^0 и u_j^0. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}q_{ij}+2\sum_{i=1}^{r}\beta_{ij}u_i^0=0 \tag{111.7}$$

$$(j=1,\ \ldots,\ n).$$

Уравнения (111.7) можно разрешить относительно u_j^0, так как вследствие определенной положительности формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$

детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rr} \end{vmatrix} \tag{111.8}$$

отличен от нуля.

Определим из уравнений (111.7) величины

$$u_j^0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{\Delta_{kj}}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}q_{ik} \tag{111.9}$$

$$(j = 1, \ldots, r).$$

Здесь Δ_{kj} — алгебраическое дополнение элемента k-й строки и j-й колонки в (111.8). Внося значения u_j^0 (111.9) в равенство $B\left[V^0;\ t;\ x_1, \ldots, x_n;\ u_1^0, \ldots, u_r^0\right] = 0$, получаем уравнение для определения функции V^0:

$$\frac{\partial V^0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k,\,s=1}^{r}\frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_j}q_{jk}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_j}q_{js}\right) + \sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j = 0. \tag{111.10}$$

Подставляя в (111.10) выражения

$$\frac{\partial V^0}{\partial t} = \sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{dc_{ij}}{dt}x_ix_j,$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j$$

и приравнивая к нулю коэффициенты при произведениях x_ix_j, получим уравнения для определения величин $c_{ij}(t)$:

$$\frac{dc_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{n}(p_{ki}c_{kj} + p_{kj}c_{ki}) -$$

$$-\sum_{k,\,s=1}^{r}\frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{n}c_{lj}q_{lk}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}c_{mi}q_{ms}\right) + \alpha_{ij} = 0 \tag{111.11}$$

$$(i,\ j = 1, \ldots, n;\quad c_{ij} = c_{ji};\quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}).$$

Если удастся найти ограниченное частное решение $c_{ij}(t)$ уравнения (111.11) такое, что форма (111.5) окажется определенно-положительной, то согласно теореме IV задача будет решена. При этом оптимальные управляющие воздействия имеют вид (111.9) и являются, следовательно, линейными функциями от координат x_s.

В частности, в случае установившегося движения $x_s=0$, когда p_{si}, q_{si} — постоянные величины и коэффициенты α_{ij}, β_{ij} — тоже постоянные числа, форму V^0 следует искать в виде

$$V^0=\sum_{i,\,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \tag{111.12}$$

где $c_{ij}=\mathrm{const}$. Тогда дифференциальные уравнения (111.11) превращаются в алгебраические уравнения[1])

$$\sum_{k=1}^{n}(p_{ki}c_{kj}+p_{kj}c_{ki})-\sum_{k,\,s=1}^{r}\frac{\Delta_{ks}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{n}c_{lj}q_{lk}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}c_{mi}q_{ms}\right)+\alpha_{ij}=0$$
$$(i,\ j=1,\ \ldots,\ n;\quad c_{ij}=c_{ji};\quad \alpha_{ij}=\alpha_{ji}). \tag{111.13}$$

Итак, решение задачи II сводится в данном случае к разрешению уравнений (111.11). При этом возникает проблема о существовании ограниченного частного решения $c_{ij}(t)$, обеспечивающего определенную положительность формы V^0 (111.5).

§ 112. Достаточные условия разрешимости задачи о стабилизации для линейных систем.

Мы переходим теперь к изложению достаточных условий, при которых может быть решена задача II об оптимальной стабилизации для линейной управляемой системы

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+q_{s1}u_1+\ldots+q_{sr}u_r \tag{112.1}$$
$$(s=1,\ \ldots,\ n)$$

при условии минимума интеграла

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}(t)\,u_i(t)\,u_j(t)\right\}dt, \tag{112.2}$$

где формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)$ и $\sum\limits_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_i(t)\,u_j(t)$, как и выше, предполагаются определенно-положительными.

[1]) См. работы в сноске на стр. 476.

Согласно § 111 для существования решения этой задачи достаточно, чтобы уравнения (111.11) имели ограниченные решения $c_{ij}(t)$ такие, что форма

$$V^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij}(t) x_i x_j \tag{112.3}$$

является определенно-положительной.

Как и в общей задаче об устойчивости, будем различать случаи установившегося движения $x_s = 0$, когда величины p_{ij}, q_{ij}, α_{ij} и β_{ij} будем полагать постоянными, и общие случаи неустановившегося движения $x_s = 0$, когда $p_{ij}(t)$, $q_{ij}(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ — переменные функции времени t.

Обсудим сначала случай установившегося невозмущенного движения $x_s = 0$. Оптимальная функция Ляпунова V^0 (112.3) ищется в этом случае в виде квадратичной формы

$$V^0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{112.4}$$

с постоянными коэффициентами c_{ij}. Дифференциальные уравнения (111.11) для c_{ij} обращаются в систему алгебраических уравнений (111.13). Управляющие воздействия $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ имеют при этом вид

$$u_j^0(x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n, \tag{112.5}$$

где ν_{sj} — постоянные.

В обсуждаемом случае важную роль играет матрица W, построенная следующим образом:

$$W = \{Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q\}. \tag{112.6}$$

Здесь Q — матрица $\{q_{sj}\}$ ($s = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$), P — матрица $\{p_{sj}\}$ ($s = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$). В частности, если система (112.1) управляется лишь одним воздействием $u = u_1$, то матрица Q превращается в вектор-столбец

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n1} \end{bmatrix},$$

матрицы P^kQ также обращаются в векторы-столбцы

$$P^kQ = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1k+1} \\ w_{2k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{nk+1} \end{bmatrix}$$

и матрица W оказывается $n \times n$-матрицей

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}.$$

В общем случае матрица W имеет n строк и $n \times r$ столбцов. Оказывается, что возможность решения задачи II об оптимальной стабилизации системы (112.1) при условии минимума величины (112.2) определяется свойствами матрицы W. В частности, достаточные условия разрешимости задачи даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть ранг матрицы W равен n. Тогда справедливы следующие заключения:*

1. *Задача* II *для системы* (112.1) *при условии минимума величины* (112.2) *имеет решение, причем существуют квадратичная форма* $V^0(x_1, \dots, x_n)$ (112.4) *и управляющие воздействия* $u_j^0(x_1, \dots, x_n)$ *вида* (112.5), *удовлетворяющие всем условиям теоремы* IV.

2. *Управляющие воздействия* $u_j^0(x_1, \dots, x_n)$ (112.5), *определяемые оптимальной функцией Ляпунова* $V^0(x_1, \dots, x_n)$ (112.4) *в соответствии с равенствами* (111.19), *являются единственным решением задачи.*

Мы не будем приводить здесь доказательство первого утверждения теоремы 1. Это доказательство можно найти в работах Р. Е. Калмана, Я. Курцвейля и Ф. М. Кирилловой[1]). Проверим здесь лишь справедливость второго утверждения.

---

[1]) Калман Р. Е., Об общей теории систем управления, Труды I конгресса ИФАК, т. I, Изд. АН СССР, 1961; Contributions to the theory of optimal control Sumposium Internacional de Ecnaciones Differenciales Ordinarias, Publ. por La Univ. Nac. Automa de Mexico y La Sociсded. Matem. Mexicana, 1961; Курцвейль Я., К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 6, 1961; Кириллова Ф. М., К задаче об аналитическом конструировании регуляторов ПММ, т. XXV, вып. 3, 1961.

Итак, пусть в соответствии с пунктом 1 теоремы функция V^0 вида (112.4) является оптимальной функцией Ляпунова и в совокупности с функциями $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ вида (112.5) удовлетворяет всем условиям теоремы IV. Но при известной функции $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ управляющие воздействия $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ определяются единственным образом из условий (111.7) минимума выражения $B[V^0; x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r]$ по u_j. Если выбрать какие-либо непрерывные управляющие воздействия $u_j^*(x_1, \ldots, x_n) \neq u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой, пусть даже очень малой области S изменения величин x_s, то в этой области выражение $B[V^0; x_1, \ldots, x_n; u_1^*, \ldots, u_r^*]$ будет положительным. Но тогда согласно рассуждениям на стр. 488 интеграл

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^*[t]\, x_j^*[t] + \sum_{i,\, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^*[t]\, u_j^*[t] \right\} dt$$

будет больше, чем величина $V^0(x_1^*[t_0], \ldots, x_n^*[t_0])$ для всех движений $x_s^*[t]$, проходящих через область S при $t \geqslant t_0$. Это означает, что управление $u_j^*(x_1, \ldots, x_n)$ не является оптимальным. Тем самым доказана единственность оптимального управления $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$, найденного по функции $V^0(x_1, \ldots, x_n)$ из уравнений (111.19).

Матрицы вида P^kQ были рассмотрены в связи с задачами об оптимальном регулировании Р. В. Гамкрелидзе[1]). В частности, условие независимости векторов $Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q$ в случае, когда линейная система (112.1) управляется одним воздействием $u = u_1$, было названо им «условием общего положения». Это условие играет важную роль в теории линейных управляемых систем. Позднее свойства матрицы W в связи с проблемами управления были изучены во многих работах[2]).

Перейдем теперь к обсуждению случаев неустановившегося невозмущенного движения $x_s = 0$. В этих случаях разрешимость задачи II об оптимальной стабилизации связана со свойствами матрицы $W(t)$, которая имеет следующий вид:

$$W(t) = \{L_1(t), \ldots, L_n(t)\}. \tag{112.7}$$

Здесь $L_k(t)$ — матрицы, определенные рекуррентными соотношениями

$$L_1(t) = Q(t), \ \ldots, \ L_{k+1}(t) = \frac{dL_k(t)}{dt} - P(t)\, L_k(t), \tag{112.8}$$

---

1) См. монографию Л. С. Понтрягина и др. в сноске на стр. 475.

2) См., например, работы в сноске на стр. 492.

причем, естественно, предполагается, что элементы $p_{sk}(t)$ и $q_{sj}(t)$ матриц $P(t)$ и $Q(t)$ имеют все производные, необходимые для построения матрицы $W(t)$.

Достаточные условия разрешимости задачи II для системы (112.1) при условии минимума величины (112.2) даются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть функции $p_{sk}(t)$ и $q_{sj}(t)$ имеют при $t \geqslant 0$ равномерно непрерывные и ограниченные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, и пусть существует число $\tau > 0$, удовлетворяющее следующему условию:*

На любом отрезке $t \leqslant \vartheta \leqslant t+\tau$ найдется точка $\vartheta^*(t)$ такая, что в матрице $W(\vartheta^*)$ можно выделить n линейно независимых векторов-столбцов

$$w^{(i_k)}(\vartheta^*) = \{w_{si_k}(\vartheta^*)\} \qquad (k=1, \ldots, n; \; s=1, \ldots, n)$$

причем квадратичная форма

$$\Phi(t, l_1, \ldots, l_n) = \sum_{k, j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} w_{si_k}(\vartheta^*(t))\, w_{si_j}(\vartheta^*(t)) \right) l_k l_j \tag{112.9}$$

определенно-положительна.

Тогда справедливы следующие заключения:

1. *Задача* II *для системы* (112.1) *при условии минимума величины* (112.2) *имеет решение, причем существуют квадратичная форма $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.3) *и управляющие воздействия*

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t)\, x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t)\, x_n, \tag{112.10}$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы IV.

2. *Управляющие воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.10), *определяемые оптимальной функцией Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$* (112.3) *в соответствии с равенствами* (111.19), *являются единственным решением задачи.*

Справедливость теоремы 2 мы также примем без доказательства. Это доказательство можно найти в работе Н. Н. Красовского[1]).

§ 113. Практические способы решения задач об оптимальной стабилизации для линейных систем.

Теоремы, сформулированные в предыдущем параграфе, указывают достаточные условия, при выполнении которых разрешима задача II об оптимальной стабилизации системы (112.1) при условии минимума

[1]) Красовский Н. Н., О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, т. XXVII, вып. 4, 1963.

показателя качества (112.2) процесса $x_s(t)$ $(s=1, \ldots, n)$. Следовательно, при этих условиях уравнения (111.13) (или уравнения (111.11)), определяющие оптимальную функцию Ляпунова V^0, имеют решения c_{ij} (или $c_{ij}(t)$), обладающие всеми нужными свойствами.

Решение уравнений (111.11) может представить серьезные трудности, а решение уравнений (111.13) обычно не вызывает принципиальных затруднений, однако и в этом случае практический счет может оказаться весьма громоздким.

Предполагая в дальнейшем, что величины p_{kl}, q_{lk}, α_{ij} и β_{ij}, фигурирующие в (112.1) и (112.2), не зависят от времени, изложим два возможных способа решения задачи об оптимальной стабилизации.

Первый способ основан на таком свойстве искомых решений c_{ij} уравнений (111.13): если задача II в форме (112.1) — (112.2) имеет решение, то величины c_{ij}, удовлетворяющие уравнениям (111.13) и определяющие оптимальную функцию Ляпунова

$$V^0(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \tag{113.1}$$

суть числа

$$c_{ij} = \lim c^*_{ij}(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{113.2}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n),$$

где $c^*_{ij}(t)$ — частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dc^*_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(p_{ki} c^*_{kj} + p_{kj} c^*_{ki}\right) - \\ - \sum_{k, s=1}^{r} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} \left(\sum_{l=1}^{n} c^*_{lj} q_{lk}\right) \left(\sum_{m=1}^{n} c^*_{mi} q_{ms}\right) + \alpha_{ij}, \tag{113.3}$$

отвечающее начальным условиям

$$c^*_{ij}(0) = 0 \quad (i, j = 1, \ldots n). \tag{113.4}$$

(Уравнения (113.3) получаются из уравнений вида (111.11), в которых t заменяется на $-t$.)

Упомянутое свойство подсказывает метод вычисления величин c_{ij}. Для этой цели следует найти решение $c^*_{ij}(t)$ уравнений (113.3) — (113.4) при достаточно больших значениях $t = \tau$. Вследствие соотношений (113.2) можно принять

$$c_{ij} = c^*_{ij}(\tau) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, коэффициенты оптимальной функции Ляпунова могут быть вычислены сколь угодно точно, если τ достаточно велико. Для практических вычислений, легко поддающихся стандартизации, удобно пользоваться вычислительными устройствами и, в частности, аналоговыми машинами.

Доказательство предельных соотношений (113.2) и подробное описание рассмотренного способа вычисления величин c_{ij} с использованием электронных моделей можно найти в работе Ю. М. Репина и В. Е. Третьякова[1]).

После вычисления величин c_{ij} управляющие воздействия определяются без труда по формулам (111.9).

Пример 1. В качестве иллюстрации изложенного способа рассмотрим решение задачи о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Этот момент вырабатывается исполнительным механизмом, который является интегрирующим звеном. Исполнительный механизм в свою очередь подвержен некоторому управляющему воздействию u.

Выбирая соответствующим образом масштабы времени, координат и усилий, запишем уравнения возмущенного движения в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=\sin x_1+x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt}=u,$$

где $x_1=\varphi$ — угол отклонения маятника от вертикали, $x_2=\dot{\varphi}$, x_3 — момент, приложенный к маятнику.

Составим уравнения первого приближения:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_3, \qquad \frac{dx_3}{dt}=u. \tag{113.5}$$

Для этой системы рассмотрим задачу II об оптимальной стабилизации, выбрав следующий критерий качества:

$$I_u=\int_{t_0}^{\infty}\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+u^2(t)\right]dt. \tag{113.6}$$

Проверим достаточное условие разрешимости задачи (см. теорему 1 § 112). С этой целью вычислим матрицу $W=\{Q, PQ, P^2Q\}$.

В нашем случае

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

и поэтому

$$W=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы W равен порядку системы (113.5). Следовательно, рассматриваемая задача имеет решение. Уравнения (111.13) для определения

[1]) Репин Ю. М., Третьяков В. Е., Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, т. 24, вып. 6, 1963.

коэффициентов формы (113.1) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll} 2c_{12}-c_{13}^2+1=0, & c_{11}+c_{22}-c_{13}c_{23}=0, \\ 2c_{12}-c_{23}^2+1=0, & c_{23}+c_{12}-c_{33}c_{13}=0, \\ 2c_{23}-c_{33}^2+1=0, & c_{13}+c_{22}-c_{33}c_{23}=0. \end{array}\right\} \qquad (113.7)$$

Пусть c_{ij} — искомое решение системы уравнений (113.7), для которого квадратичная форма (113.1) является определенно-положительной.

Согласно (113.2)

$$c_{ij}=\lim c_{ij}^*(t) \qquad (i, j=1, 2, 3) \qquad \text{при} \qquad t\to+\infty,$$

где $c_{ij}^*(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_{11}^*(t)}{dt} &= 2c_{12}^*(t)-c_{12}^{*2}(t)+1, \\ \frac{dc_{22}^*(t)}{dt} &= 2c_{12}^*(t)-c_{23}^{*2}(t)+1, \\ \frac{dc_{33}^*(t)}{dt} &= 2c_{23}^*(t)-c_{33}^{*2}(t)+1, \\ \frac{dc_{12}^*(t)}{dt} &= c_{11}^*(t)+c_{22}^*(t)-c_{13}^*(t)\cdot c_{23}^*(t), \\ \frac{dc_{13}^*(t)}{dt} &= c_{23}^*(t)+c_{12}^*(t)-c_{33}^*(t)\cdot c_{13}^*(t), \\ \frac{dc_{23}^*(t)}{dt} &= c_{13}^*(t)+c_{22}^*(t)-c_{33}^*(t)\cdot c_{23}^*(t), \end{aligned}\right\} \qquad (113.8)$$

соответствующее начальным условиям

$$c_{ij}^*(0)=0 \qquad (i, j=1, 2, 3).$$

На рис. 24 приведены графики переходных кривых для уравнений (113.8), вычисленные на цифровой вычислительной машине. Значения c_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ получаются такими:

$$\begin{array}{ll} c_{11}=11{,}1333, & c_{12}=10{,}1333, \\ c_{22}=10{,}1333, & c_{13}=\ 4{,}6116, \\ c_{33}=\ 3{,}1974, & c_{23}=\ 4{,}6116. \end{array}$$

Искомое оптимальное управление u^0 находится по формуле (111.9):

$$u^0=-\frac{1}{2}\frac{\partial V^0}{\partial x_3}=-(c_{13}x_1+c_{23}x_2+c_{33}x_3)=$$
$$=-(4{,}6116x_1+4{,}6116x_2+3{,}1974x_3).$$

Из примера, в частности, видно, что для определения оптимального управляющего воздействия знание всех коэффициентов оптимальной функции Ляпунова не обязательно.

Мы переходим теперь к изложению второго способа[1]) решения задачи II в форме (112.1) — (112.2), который позволяет вычислить коэффициенты оптимального управления непосредственно, без предварительного определения функции V^0.

Предположим, что движение объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + \ldots + p_{1n}x_n + q_1 u, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}x_1 + \ldots + p_{nn}x_n + q_n u, \end{aligned}\right\} \qquad (113.9)$$

где p_{sj} и q_s $(s, j = 1, \ldots, n)$ — некоторые постоянные величины, а u — скалярное управляющее воздействие. Пусть критерий качества переходного процесса задан в виде интеграла

$$I_u = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}x_i x_j + u^2\right] dt. \qquad (113.10)$$

Здесь α_{ij} — постоянные коэффициенты определенно-положительной квадратичной формы.

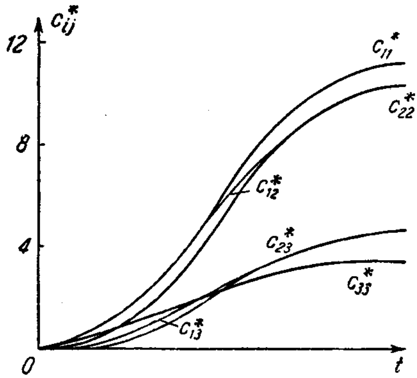

Рис. 24.

Допуская, что условия, при которых разрешима задача II в форме (113.9) — (113.10), выполнены (см. теорему 1 § 112), воспользуемся для отыскания оптимального управляющего воздействия процедурой, вытекающей из принципа максимума.

Функция Гамильтона $H = H(\psi_0, \ldots, \psi_n, x_1, \ldots, x_n, u)$, определенная в § 110 формулой (110.2), для нашей задачи имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}x_i x_j + u^2\right] + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \frac{dx_i}{dt}.$$

[1]) Подобный способ опубликован в статье: Пряхин Н. С., К вопросу об аналитическом конструировании регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. 24, вып. 9, 1963. Независимо аналогичный метод был разработан и стандартизирован в вычислительном центре Уральского государственного университета под руководством Ю. М. Репина в 1962 году.

Оптимальное управление в каждый момент времени должно формироваться так, чтобы максимизировалась величина H или, что то же самое, минимизировалась величина B (см. § 109)

$$B=\frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+u^2\right]+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V^0}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}.$$

Поэтому, приравнивая производную $\frac{\partial H}{\partial u}$ или $\frac{\partial B}{\partial u}$ нулю, находим структуру оптимального управления

$$u^0=q_1\psi_1+q_2\psi_2+\ldots+q_n\psi_n. \tag{113.11}$$

Составим, далее, канонически сопряженные уравнения (109.1) и (110.3):

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi_i},\quad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

которые в нашем случае после подстановки вместо u функции u^0 из формулы (113.11) примут вид

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dx_1}{dt}=p_{11}x_1+\ldots+p_{1n}x_n+q_1q_1\psi_1+\ldots+q_1q_n\psi_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{dx_n}{dt}=p_{n1}x_1+\ldots+p_{nn}x_n+q_nq_1\psi_1+\ldots+q_nq_n\psi_n,\\
\dfrac{d\psi_1}{dt}=\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n-p_{11}\psi_1-\ldots-p_{n1}\psi_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{d\psi_n}{dt}=\alpha_{n1}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n-p_{1n}\psi_1-\ldots-p_{nn}\psi_n.
\end{array}\right\} \tag{113.12}$$

Эту систему уравнений, решающих задачу об оптимальной стабилизации, можно получить также, используя классический вариационный метод Эйлера — Лагранжа. Именно таким путем она была получена впервые А. М. Летовым[1]).

Построим характеристический определитель для системы (113.12):

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} P-\lambda E & Q_1\\ \alpha & -P^*-\lambda E\end{vmatrix},$$

где обозначено $P=\{p_{sj}\}$, $Q_1=\{q_s\cdot q_j\}$, $P^*=\{p_{js}\}$, $\alpha=\{\alpha_{ij}\}$ $E=\{\delta_{ij}\}$. Известно, что построенный определитель обладает свойством $D(-\lambda)=D(\lambda)$, т. е. характеристический полином содержит только четные степени λ. Тогда уравнение $D(\lambda)=0$ наряду с каж-

[1]) Летов А. М., Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, т. 21, вып. 4, 1960.

дым корнем, имеющим отрицательную действительную часть, будет обладать соответствующим корнем с положительной действительной частью. Следовательно, характеристический многочлен может быть выражен в виде произведения двух полиномов n-й степени

$$D(\lambda) = d_1(\lambda) \cdot d_2(\lambda),$$

причем корни полинома $d_1(\lambda)$ расположены в левой полуплоскости, а корни многочлена $d_2(\lambda)$ — в правой.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Движение, определяемое уравнениями (113.9), в которые вместо u подставлено оптимальное управление $u^0(x_1, \ldots, x_n)$, являющееся согласно результатам § 111 линейной функцией координат x_s ($s = 1, \ldots, n$), совпадает с движением, получающимся в силу системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Px + Q_1\psi,$$

в которых вектор $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ вычислен на оптимальных траекториях $x_s^0(t)$ ($s = 1, \ldots, n$).

Но по условиям задачи оптимальное управляющее воздействие должно быть таким, чтобы тривиальное решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Px + qu^0(x_1, \ldots, x_n), \tag{113.13}$$

где

$$q = \{q_1, \ldots, q_n\},$$

было асимптотически устойчивым, следовательно, характеристический многочлен, составленный для (113.13), обязан иметь все корни с отрицательной действительной частью и этот многочлен должен тождественно совпадать с $(-1)^n d_1(\lambda)$ в силу отмеченного выше обстоятельства.

Полагая $u^0 = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n$ и подставляя его в таком виде в уравнения (113.13), приравниваем характеристический полином многочлену $(-1)^n d_1(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} p_{11} + q_1\nu_1 - \lambda, & p_{12} + q_1\nu_2, & \ldots, & p_{1n} + q_1\nu_n \\ p_{21} + q_2\nu_1, & p_{22} + q_2\nu_2 - \lambda, & \ldots, & p_{2n} + q_2\nu_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{n1} + q_n\nu_1 & p_{n2} + q_n\nu_2, & \ldots, & p_{nn} + q_n\nu_n - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n d_1(\lambda). \tag{113.14}$$

Если многочлен $d_1(\lambda)$ нам известен, то, сравнивая в тождестве (113.14) коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему уравнений для определения коэффициентов оптимального управления. Нетрудно убедиться в том, что эта система алгебраических уравнений всегда будет линейной.

Таким образом, вопрос об отыскании оптимального управления сводится по существу к вопросу о разложении полинома степени $2n$ на два указанных выше множителя $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$. Как только многочлен $d_1(\lambda)$ становится известным, коэффициенты оптимального управления находятся сразу же из решения линейной системы алгебраических уравнений.

Проиллюстрируем изложенный метод, решив в линейном приближении задачу, сформулированную в примере § 108.

Пример 2. Отбрасывая нелинейные члены в уравнениях (108.4), получим систему первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=\alpha x_1+\beta x_3+bu,\quad \frac{dx_3}{dt}=u. \tag{113.15}$$

Полагаем для простоты выкладок $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\gamma=\frac{1}{2}$, так что

$$I_u=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+u^2(t)\right]dt. \tag{113.16}$$

Канонически сопряженная система (113.12) имеет для нашего примера вид

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=\alpha x_1+\beta x_3+b^2\psi_2+b\psi_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=b\psi_2+\psi_3$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}=x_1-\alpha\psi_2,\quad \frac{d\psi_2}{dt}=x_2-\psi_1,\quad \frac{d\psi_3}{dt}=x_3-\beta\psi_2.$$

Раскрывая характеристический определитель этой системы, получим

$$D(\lambda)=(\lambda^2-1)\left[(\lambda^2-\alpha)^2-\lambda^2b^2+\beta^2\right].$$

Многочлен $D(\lambda)$ нетрудно в нашем случае представить в виде произведения полиномов $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$:

$$D(\lambda)=(\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3)(\lambda^3-a_1\lambda^2+a_2\lambda-a_3).$$

Здесь $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=d_1(\lambda)$. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются формулами:

$$a_1=1+\sqrt{2\alpha+b^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$a_2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{2\alpha+b^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$a_3=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Легко проверить, что уравнение

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

имеет все корни с отрицательной действительной частью. Полагая $u^0=\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3$ и составляя тождество (113.14), имеем:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ \alpha+b\nu_1 & b\nu_2-\lambda, & \beta+b\nu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-a_1\lambda^2-a_2\lambda-a_3.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем систему линейных уравнений относительно ν_1, ν_2, ν_3:

$$-b\nu_2-\nu_3=a_1, \quad -b\nu_1-\beta\nu_2=a_2+\alpha, \quad -\beta\nu_1+\alpha\nu_3=a_3.$$

Решая эту систему, находим коэффициенты оптимального управления:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1&=\frac{b\alpha(a_2+\alpha)-\beta(a_1\alpha+a_3)}{\Delta},\\ \nu_2&=\frac{b(a_3+\alpha a_1)-\beta(a_2+\alpha)}{\Delta},\\ \nu_3&=\frac{b\beta(a_2+\alpha)-\beta^2a_1-a_3b^2}{\Delta},\end{aligned}\right\} \tag{113.17}$$

где $\Delta=\beta^2-\alpha b^2$.

Учитывая, что $\alpha=-\dfrac{\mu}{r_0^3}$, $\beta=\dfrac{2\sqrt{\mu r_0}}{r_0^3}$, $b=\dfrac{k}{r_0}$, $k=\dfrac{c_r}{c_\varphi}$ (см. § 108), имеем $\Delta=\dfrac{\mu(4+k^2)}{r_0^5}$. Если $c_\varphi\neq 0$, то Δ не обращается в нуль ни при каких r_0 и является конечным числом. Следовательно, задача об оптимальной стабилизации для нашего примера имеет решение при любых r_0 и $c_\varphi\neq 0$.

Заметим, кстати, что условие $\Delta\neq 0$ совпадает с достаточным условием разрешимости задачи из теоремы 1 § 112. Это условие для нашего примера оказывается невыполненным, если $c_\varphi=0$, что соответствует выбросу массы только в радиальном направлении. Можно показать, что в этом случае задача II в форме (113.15) — (113.16) решения не имеет.

В самом деле, если $c_\varphi=0$, то система уравнений (108.2) имеет первый интеграл $y_3=r^2\dot\varphi=\varkappa=\mathrm{const}$, где постоянная $\varkappa$ определяется начальными условиями, которым соответствует движение точки по исходной эллиптической орбите. В невозмущенном движении $y_3=\sqrt{\mu r_0}$ (см. § 108). Вообще говоря, $\sqrt{\mu r_0}\neq\varkappa$, так как r_0 по условиям задачи — произвольное число, связанное только предположением о достаточной близости эллиптической траектории к круговой орбите радиуса r_0. Следовательно, в процессе управления $y_3(t)$ должно меняться от величины $\varkappa$ до величины $\sqrt{\mu r_0}$, но y_3 изменяться вообще не может, так как при $c_\varphi=0$ в силу уравнений (108.2) $\dfrac{dy_3}{dt}=0$ во все время переходного процесса. Таким образом, условие $c_\varphi\neq 0$ является в рассмотренной задаче необходимым условием осуществления перехода точки с эллиптической траектории на круговую орбиту заданного радиуса.

Заметим, что решение первого примера, рассмотренного в этом параграфе, можно также получить из формул (113.17), если принять $\alpha=\beta=1$, $b=0$, так как системы уравнений (113.5) и (113.15) в этом случае совпадают.

В заключение можно сказать, что оба изложенных способа решения задачи II об оптимальной стабилизации для линейных систем (112.1) при условии минимума показателя качества (112.2) процесса $x_s(t)$ $(s=1,\ldots,n)$ позволяют с успехом использовать современные вычислительные устройства[1]). Однако второй метод, в отличие от первого, иногда может привести к решению задачи в замкнутой форме и для такого случая надобность в применении вычислительных машин отпадает. Но первый способ является более универсальным и он значительно проще по своей вычислительной схеме.

Отметим еще, что задаче о вычислении параметров оптимального управления посвящена интересная работа А. И. Лурье[2]).

§ 114. Теоремы о стабилизации по первому приближению.

Мы переходим теперь к рассмотрению нелинейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r + \\ + R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r) \quad (s = 1, \ldots, n), \quad (114.1)$$

описывающих возмущенные движения $x_s(t)$ управляемой системы в окрестности заданного движения $x_s = 0$. Будем предполагать, как обычно, что функции R_s определены в области

$$t \geqslant 0, \qquad |x_s| < H \qquad (s = 1, \ldots, n), \qquad (114.2)$$

где они непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)| \leqslant \\ \leqslant A\{|x_1| + \ldots + |x_n| + |u_1| + \ldots + |u_r|\}, \quad (114.3)$$

причем A — некоторая постоянная.

Наряду с уравнениями (114.1) рассмотрим систему первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + q_{s1}u_1 + \ldots + q_{sr}u_r \quad (114.4)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

При каких условиях возможность стабилизации системы (114.1) вытекает из решения проблемы в первом приближении? Исследование этого вопроса составляет предмет теории стабилизации системы (114.1) по линейному приближению. Мы ограничимся здесь лишь достаточными условиями, при которых ответ на заданный вопрос является положительным. Эти результаты являются следствием достаточных условий разрешимости задач II для системы (114.4) при условии мини-

[1]) Стандартные программы для решения задач изложенными способами имеются, например, в вычислительном центре Уральского государственного университета.

[2]) Лурье А. И., Минимальный квадратичный критерий качества регулируемой системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1963.

мума интеграла

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\left(\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j\right)dt, \tag{114.5}$$

данных в теоремах 1 и 2 § 112, и следствием общих теорем об асимптотической устойчивости по первому приближению, приведенных в §§ 22, 85.

Рассмотрим сначала случай установившегося невозмущенного движения $x_s=0$, когда величины p_{sj} и q_{sj} в уравнениях (114.1) являются постоянными и функции R_s не зависят явно от времени. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если ранг матрицы*

$$W=\{Q,\ PQ,\ \ldots,\ P^{n-1}Q\} \tag{114.6}$$

равен n, то задача I о стабилизации системы (114.1) *решается исходя из линейного приближения* (114.4) *при любом выборе функций R_s, удовлетворяющих неравенствам* (114.3), *если только постоянная A достаточно мала. Управляющие воздействия $u_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ можно выбрать в форме линейных функций*

$$u_j(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\nu_{1j}x_1+\ \ldots\ +\nu_{nj}x_n, \tag{114.7}$$

где ν_{ij} — постоянные.

Доказательство. Выберем как-нибудь определенно положительные квадратичные формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j$$

с постоянными α_{ij} и β_{ij}. Согласно теореме 1 § 112, если ранг W равен n, то для системы (114.4) можно решить задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла (114.5). При этом получатся оптимальные стабилизирующие воздействия $u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, описываемые линейными функциями

$$u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\nu_{1j}x_1+\ \ldots\ +\nu_{nj}x_n. \tag{114.8}$$

При $u_j=u_j^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ линейная система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ \ldots\ +p_{sn}x_n+$$
$$+q_{s1}u_1^0(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\ \ldots\ +q_{sr}u_r^0(x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{114.9}$$

будет асимптотически устойчивой.

Выберем для нелинейной системы (114.1) в качестве управляющих воздействий u_j величины $u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ (114.8). Подставив $u_j = u_j^0(x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.1), получим нелинейные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \\ + q_{s1}u_1^0(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + q_{sr}u_r^0(x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (114.10)$$
$$(s = 1, \ldots, n),$$

где функции

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = R_s(x_1, \ldots, x_n; u_1^0(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(x_1, \ldots, x_n))$$

вследствие (114.3) удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_1 \{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \quad (114.11)$$
$$(s = 1, \ldots, n),$$

где

$$A_1 = A(1+\nu), \quad \nu = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |\nu_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, r\right). \quad (114.12)$$

Уравнения (114.9) составляют для системы уравнений (114.10) систему первого приближения.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \sum_{j=1}^{r} q_{1j}\nu_{1j} - \lambda & \ldots & p_{1n} + \sum_{j=1}^{r} q_{1j}\nu_{nj} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ p_{n1} + \sum_{j=1}^{r} q_{nj}\nu_{1j} & \ldots & p_{nn} + \sum_{j=1}^{r} q_{nj}\nu_{nj} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (114.13)$$

асимптотически устойчивой системы (114.9) имеет все корни λ_i с отрицательными действительными частями. Отсюда по теореме 1 § 22 заключаем, что невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.10) при условии (114.12) асимптотически устойчиво, если только постоянная A достаточно мала. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Перейдем теперь к случаю неустановившегося невозмущенного движения $x_s = 0$, когда величины p_{si} и q_{sj} в уравнениях (114.4) предполагаются переменными функциями времени. Теорема о стабилизации по первому приближению в этом случае может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2. *Составим матрицу*

$$W(t) = \{L_1(t), \ldots, L_n(t)\},$$

где

$$L_1(t) = Q(t), \ldots, L_{k+1} = \frac{dL_k(t)}{dt} - P(t) L_k(t)$$

$$(k = 1, \ldots, n-1).$$

Пусть функции $p_{si}(t)$ *и* $q_{sj}(t)$ *имеют при* $t \geqslant t_0$ *равномерно непрерывные и ограниченные производные до* $(n-1)$*-го порядка включительно. Если при каждом* $t \geqslant t_0$ *в матрице* $W(t)$ *можно выделить* n *линейно независимых векторов-столбцов* $w^{(l_k)}(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *таких, что квадратичная форма*[1])

$$\Phi(t, l_1, \ldots, l_n) = \sum_{k, j=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} w_{si_k}(t) w_{si_j}(t) \right) l_k l_j \qquad (114.14)$$

является определенно положительной, то задача I *о стабилизации системы* (114.1) *решается исходя из линейного приближения* (114.4) *при любом выборе функций* R_s, *удовлетворяющих неравенствам* (114.3), *если только постоянная* A *достаточно мала. Управляющие воздействия* $u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ *можно выбрать в форме линейных функций*

$$u_j(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t) x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t) x_n, \qquad (114.15)$$

где $\nu_{ij}(t)$ — *непрерывные и ограниченные функции времени* t.

Доказательство. Выберем как-нибудь определенно-положительные функции

$$\sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) x_i x_j \quad \text{и} \quad \sum_{i, j=1}^{n} \beta_{ij}(t) u_i u_j. \qquad (114.16)$$

При условиях доказываемой теоремы выполняются предположения теоремы 2 § 112. Поэтому для системы (114.4) можно решить задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла (114.5). При этом получатся оптимальные стабилизирующие воздействия $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ вида

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \nu_{1j}(t) x_1 + \ldots + \nu_{nj}(t) x_n, \qquad (114.17)$$

где $\nu_{ij}(t)$ — ограниченные и непрерывные функции времени.

---

[1]) Условие определенной положительности формы $\Phi(t, l_1, \ldots, l_n)$ означает, что линейная независимость выбранных векторов $w^{(i_k)}$ в известном смысле равномерна по $t \geqslant t_0$ и углы между этими векторами не могут становиться произвольно малыми.

Подставляя $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.17), получим линейную систему с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n + \\ + q_{s1}(t)\,u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + q_{sr}(t)\,u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (114.18)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

По построению управляющих воздействий $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.18) асимптотически устойчиво. Более того, для системы (114.18) можно указать допускающую бесконечно малый высший предел определенно-положительную функцию Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, имеющую определенно отрицательную производную $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (114.18). В качестве такой функции V можно выбрать оптимальную функцию Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, существование которой обеспечивается теоремой 2 из § 112.

Выберем теперь в нелинейной системе (114.1) в качестве управляющих воздействий u_j величины $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ (114.17). Подставив $u_j = u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в уравнения (114.1), получим нелинейные уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n + q_{s1}(t)\,u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \ldots + q_{sr}(t)\,u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (114.19)$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь функции

$$\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ = R_s\left(t, x_1, \ldots, x_n;\ u_1^0(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r^0(t, x_1, \ldots, x_n)\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant A_1\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}, \quad (114.20)$$

где

$$A_1 = A(1 + \nu)$$
$$\nu = \max\left(\sum_{i=1}^{n} |\nu_{ij}|, \quad j = 1, \ldots, r;\ t \geqslant 0\right).$$

Невозмущенное движение $x_s = 0$ системы (114.19) асимтотически устойчиво вследствие теоремы I из § 88, если только постоянная A достаточно мала. В самом деле, для системы первого приближения (114.18) существует функция Ляпунова $V^0(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая теореме II об асимптотической устойчивости, и имеет место оценка (114.20). Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Итак, мы указали достаточные условия разрешимости задачи I о стабилизации нелинейной системы (114.1) по первому приближению (114.2).

Вопрос о решении задачи II об оптимальной стабилизации системы (114.1) по первому приближению решается аналогичным образом. Мы приведем здесь лишь формулировку результатов. Доказательство этих результатов можно найти в работах Э. Г. Альбрехта и В. И. Зубова[1]).

Рассмотрим снова систему уравнений (114.1), где будем предполагать, что функции R_s разлагаются в области (114.2) в ряды по степеням x_s и u_j с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями времени t. Предполагаем, как всегда, что эти разложения начинаются с членов, порядок которых не ниже второго.

Для системы (114.1) рассмотрим задачу II об оптимальной стабилизации при условии минимума интеграла

$$I=\int_{t_0}^{\infty}\omega(t,\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_r(t))\,dt, \qquad (114.21)$$

где функция ω также предполагается аналитической функцией величин x_s и u_j, т. е. разлагается в ряд по степеням этих величин с непрерывными и ограниченными коэффициентами.

По смыслу задачи об оптимальной стабилизации функцию ω целесообразно выбирать в виде определенно-положительной функции от x_s и u_j. Поэтому можно предполагать, что разложение функции ω в ряд начинается с четных степеней x_s и u_j. В соответствии с этим обсудим случаи, когда функция ω имеет разложение

$$\omega(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r)=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\omega^{(k)}(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_r), \qquad (114.22)$$

где $\omega^{(k)}$ — формы переменных x_s и u_j. При этом полагаем, что первый член $\omega^{(2)}$ разложения (114.22) является определенно-положительной функцией вида

$$\omega^{(2)}=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\ j=1}^{r}\beta_{ij}u_iu_j, \qquad (114.23)$$

[1]) См. сноски на стр. 492.

т. е. формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,\,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j$$

предполагаются определенно-положительными.

Допустим, что система уравнений первого приближения удовлетворяет условиям теоремы 1 (стр. 497) в случае установившегося невозмущенного движения $x_s = 0$, или условиям теоремы 2 в случае неустановившегося движения $x_s = 0$ (стр. 499). Тогда согласно теоремам 1 и 2 § 112 задача II об оптимальной стабилизации линейных систем (114.4) при условиях минимума интеграла (114.5) от квадратичных форм (114.22) имеет решение вида

$$u_j^0 = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n. \tag{114.24}$$

Оказывается, что в таких случаях задача II об оптимальной стабилизации нелинейной системы (114.1) при условии минимума интеграла (114.21) с функцией ω общего вида (114.22) также имеет решение. При этом оптимальное управление $u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n)$ такой задачи представляется в виде рядов

$$u_j^0(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_j^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{114.25}$$

$$(j = 1, \ldots, r),$$

которые сходятся при всех достаточно малых значениях x_s.

Здесь $u_j^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ представляют собой линейные формы

$$u_j^{(1)} = \nu_{1j} x_1 + \ldots + \nu_{nj} x_n,$$

совпадающие с оптимальным управлением (114.24), решающим задачу (114.1), (114.21) в первом приближении. Коэффициенты форм $u_j^{(k)}(t, x_1, \ldots, x_n)$ при $k \geqslant 2$ определяются из некоторых систем линейных уравнений. В случае постоянных p_{sj}, q_{sj}, α_{ij}, β_{ij} эти уравнения оказываются алгебраическими. В общем случае переменных $p_{sj}(t)$, $q_{sj}(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$ эти уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Область сходимости рядов (114.25) определяется коэффициентами и свойствами линейной системы (114.18).

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА.

К стр. 18. Большое число исследований было посвящено в последнее время задачам об асимптотической устойчивости, где область начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых должно выполняться условие (3.5), нельзя считать малой. Такие задачи изучены, например, в работах: Еругин Н. П., Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. 14, вып. 5, 1950; О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, т. 14, вып. 6, 1950; Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951; Малкин И. Г., Об устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. 16, вып. 4, 1952; Барбашин Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. 16, вып. 5, 1952; Летов А. М., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955; Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957; Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд. ЛГУ, 1958; Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963.

В подобных случаях приобретает особенное значение *оценка* области (3.3) тех начальных возмущений $x_s(t_0)$, для которых выполняется предельное соотношение (3.5). В соответствии с этим оказывается полезным дополнить определение асимптотической устойчивости следующим образом.

(α) *Пусть G — некоторая, наперед заданная область изменения переменных x_s*, в которой по условиям задачи могут лежать значения $x_s(t_0)$ начальных возмущений. Тогда невозмущенное движение $x_s = 0$ называется ***асимптотически устойчивым в большом***, если это движение устойчиво и если условие (3.5) выполняется для *всех $x_s(t_0)$ из области G*.

В частности, область G может быть определена неравенствами

$$|x_s(t_0)| \leqslant N,$$

где N — заданное число.

Если в изучаемой реальной системе начальные возмущения $x_s(t_0)$ могут оказаться весьма большими и их трудно или нецелесообразно заранее оценивать каким-либо числом N, то оказывается полезным следующее определение.

(β) *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым в целом, если это движение устойчиво и если условие* (3.5) *выполняется для любых начальных возмущений* $x_s(t_0)$, *как бы велики они ни были.*

Отметим еще, что свойство устойчивости, выражаемое неравенствами (3.3) и (3.4), не следует, вообще говоря, из условия (3.5) даже в случае, когда в уравнениях (3.2) функции X_s не зависят явно от времени t. Именно, можно построить пример, когда условие (3.5) выполняется для всех начальных возмущений $x_s(t_0)$, но невозмущенное движение $x_s = 0$ неустойчиво. Подобная ситуация рассмотрена, например, в работе: Красовский Н. Н., Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. 17, вып. 6, 1953.

К стр. 21. Приведенное определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях является наиболее употребительным. В исследованиях, однако, встречались некоторые модификации этого определения, учитывающие дополнительные обстоятельства. Данное определение требует малости возмущений R_s в каждый момент времени t. Однако возможны случаи, когда возмущения R_s в отдельные моменты достигают немалой величины, оставаясь значительную часть времени достаточно малыми. В таких случаях может оказаться полезным следующее определение.

(γ) *Невозмущенное движение* $y_s = f_s(t)$ *устойчиво при постоянно действующих возмущениях малых в среднем (на интервале* T*), если для всякого положительного числа* ε, *как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа* $\eta_1(\varepsilon)$ *и* $\eta_2(\varepsilon)$ *таких, что всякое решение* $y_s(t)$ *уравнений* (4.1), *удовлетворяющее при* $t = t_0$ *неравенствам*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \eta_1(\varepsilon),$$

удовлетворяет при $t > t_0$ *неравенствам*

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были функции $R_s(t, y_1, \ldots, y_n)$, *удовлетворяющие при* $t > t_0$ *для всех постоянных* $\alpha_s = y_s - f_s(t)$, $|\alpha_s| < \varepsilon$ *неравенствам*

$$\int_t^{t+T} |R_s(t, y_1, \ldots, y_n)|\, dt < \eta_2(\varepsilon).$$

Здесь T — положительное число, выбранное в меру бо́льшим для того, чтобы в изучаемой системе отдельные всплески возмущений $R_s(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))$ компенсировались в среднем малостью их на большей части интервала $(t, t+T)$. Задача об устойчивости при возмущениях, малых в среднем, изучалась, например, И. Вркочем (Интегральная устойчивость, Чехослов. матем. журнал, т. 9, № 1, 1959) и В. Е. Гермаидзе и Н. Н. Красовским (Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 6, 1957).

Были исследованы также аналогичные задачи об устойчивости при малых запаздываниях воздействий и сигналов в системах, описываемых уравнениями вида (2.1) и уравнениями с запаздывающим аргументом (см., например, работу: Репин Ю. М., Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. ПММ, т. 21, вып. 2, 1957).

Е. А. Барбашиным была поставлена и исследована задача об осуществлении программного движения $y_s = f_s(t)$ при импульсных возмущениях (см. работы: О построении периодических движений. ПММ, т. 25, вып. 2, 1961; Программное регулирование систем со случайными параметрами. ПММ, т. 25, вып. 5, 1961).

Были изучены некоторые задачи об устойчивости при случайных возмущениях R_s с известными вероятностными характеристиками (см., например, работы: Кац И. Я., Красовский Н. Н., Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, т. 24, вып. 5, 1960; Хасьминский Р. З., Об устойчивости траекторий марковских процессов. ПММ, т. 26, вып. 6, 1962).

Это перечисление ни в коей мере не претендует на полноту. Из весьма большого числа исследований, посвященных рассматриваемым вопросам, мы ограничились лишь упоминанием отдельных работ.

Все упомянутые задачи обладают общим свойством, отмеченным выше в монографии для основного определения устойчивости при постоянно действующих возмущениях R_s, а именно справедливы следующие утверждения:

1) В практически интересных случаях эти задачи приводятся к проблеме устойчивости по Ляпунову.

2) Асимптотическая устойчивость движения $x_s = 0$ является достаточным условием его устойчивости при постоянно действующих возмущениях описанных типов (по крайней мере для установившихся и периодических невозмущенных движений).

3) Для исследования новых задач устойчивости при различных возмущениях R_s пригодны классические методы теории Ляпунова, модернизированные в соответствии с особенностями этих задач.

К стр. 26. Первый метод А. М. Ляпунова позволил ему получить ряд весьма глубоких и важных результатов. В качестве примера отметим изящную теорию условной устойчивости, развитую

А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (Гостехиздат, 1950) на основе первого метода. Эти результаты послужили источником глубоких исследований более поздних авторов по теории дифференциальных уравнений и, в частности, по устойчивости движения и по проблемам теории нелинейных колебаний. Одно из достоинств данного метода состоит в том, что он работает в наиболее тонких случаях и позволяет не только указать качественную картину изучаемого явления, но и построить явный вид исследуемых решений $x_s(t)$.

В настоящей монографии основной упор делается на второй метод Ляпунова. Поэтому результаты теории устойчивости, связанные с первым методом, затрагиваются лишь частично.

К стр. 26. В связи с новыми задачами об устойчивости нелинейных систем и в связи с проблемами стабилизации управляемых движений в последние годы (начиная приблизительно с 1950 года) интерес ко второму методу Ляпунова весьма возрос. Исследование принципиальных математических проблем, относящихся к этому методу, а также исследование вопросов эффективного построения функций Ляпунова для прикладных задач, начатые впервые в нашей стране, были развиты в эти годы в большом числе серьезных работ советских и иностранных специалистов. При этом всестороннем исследовании были установлены универсальность и эффективность второго метода Ляпунова для широкого круга проблем, включая, например, задачи об устойчивости в целом нелинейных систем автоматического регулирования, задачи об устойчивости систем с запаздываниями воздействий во времени, задачи об устойчивости стохастических систем и т. д. Выяснилось также, что метод функций Ляпунова может быть использован для решения проблем синтеза оптимальных управляемых систем с обратной связью, так как он тесно переплетается с методами динамического программирования в теории оптимальных процессов (см. приложение IV).

К стр. 28. Данные определения свойств знакоопределенности и знакопостоянства функций V описывают поведение этих функций лишь в малой окрестности (6.3) невозмущенного движения $x_s = 0$. Этого достаточно для исследования вопросов об устойчивости, неустойчивости или об асимптотической устойчивости при достаточно малых начальных возмущениях $x_s(t_0)$. При исследовании вторым методом Ляпунова задачи об асимптотической устойчивости в большом (см. выше примечание к стр. 18) приходится рассматривать поведение функций V в достаточно большой области G изменения переменных x_s, а в случае задачи об устойчивости в целом следует рассматривать V при всех значениях x_s. Поэтому в таких случаях определение свойства знакопостоянства или знакоопределенности должно сопровождаться указанием или оценкой той области изменения x_s, в которой выполняется соответствующее свойство.

К стр. 38. Теорема Б может быть обобщена на случаи асимптотической устойчивости *в большом и в целом* (см. примечание к стр. 18). Это обобщение достигается за счет введения в формулировку теоремы оценок, характеризующих область асимптотической устойчивости. Таким путем получаются следующие критерии асимптотической устойчивости.

Теорема Б$_1$. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, знакоопределенную в области*

$$|x_s| \leqslant Q, \tag{10.5}$$

полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция, также знакоопределенная в этой области, знака, противоположного с V, причем выполняется неравенство $M_N < m_Q$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво в большом относительно начальных возмущений $x_s(t_0)$ из области

$$|x_s(t_0)| \leqslant N.$$

Здесь символ m_Q означает точный нижний предел функции $|V(x_1, \ldots, x_n)|$ при условии $x = Q$ $(x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|))$, символ M_N означает точный верхний предел функции $|V(x_1, \ldots, x_n)|$ при $x = N$. Предполагается, естественно, что $N < Q$.

Читателю, внимательно разобравшему доказательство теоремы Б, смысл неравенства $M_N < m_Q$ в формулировке теоремы Б$_1$ должен быть ясен, и он сможет сам провести доказательство теоремы Б$_1$ по тому же плану, по которому проведено выше доказательство теоремы Б. Достаточный критерий устойчивости в целом формулируется следующим образом.

Теорема Б$_2$. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти определенно-положительную функцию $V(x_1, \ldots, x_n)$, полная производная по времени которой, составленная в силу этих уравнений, есть при всех x_s функция определенно-отрицательная, и если при этом*

$$\lim_{x \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n) = \infty,$$

то невозмущенное движение асимптотически устойчиво в целом.

Смысл последнего условия $\lim V = \infty$ состоит в следующем: при этом условии для любого числа N можно подобрать число $Q > N$, удовлетворяющее неравенству $M_N < m_Q$. Но тогда справедливость теоремы $Б_2$ выводится из теоремы $Б_1$. Важность этого условия для задач устойчивости в целом была отмечена Н. П. Еругиным (см. работу: Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952) и Е. А. Барбашиным (см. работу: Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952).

К стр. 47. Дополнительное условие (12.9) не является стеснительным, так как всегда можно предполагать, что характеристики $f(\sigma)$ реальных систем этому условию удовлетворяют. Кроме того, следует иметь в виду, что теорема $Б_2$ является *достаточным* критерием устойчивости. Поэтому дополнительное условие (12.9) является в подобных случаях достаточным, но отнюдь не необходимым условием устойчивости в целом. Детальный анализ рассмотренной в этом параграфе задачи А. И. Лурье, учитывающий многие исследования этой проблемы, выполненные в последнее время, содержится в книге М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера, упомянутой выше в примечании к стр. 18. Отметим еще, что исследование данной задачи А. И. Лурье занимает большое место в монографии А. М. Летова, посвященной нелинейным регулируемым системам (см. также примечание к стр. 18).

К стр. 68. Функция V удовлетворяет, естественно, и дополнительному условию

$$\lim_{x \to \infty} V(x_1, \ldots, x_n) = \infty,$$

фигурирующему в теореме $Б_2$ (см. примечание к стр. 38), указывающей достаточные условия устойчивости в целом. Отметим, кстати, что для линейных систем асимптотическая устойчивость в целом является очевидным следствием асимптотической устойчивости относительно начальных возмущений $x_s(t)$ из малой окрестности невозмущенного движения $x_s = 0$.

К стр. 70. Необходимые и достаточные условия существования функции $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям теоремы В в предположении неустойчивости установившегося движения $x_s = 0$, заключаются в следующем: достаточно малая окрестность $|x_s| < \eta$ точки $x_s = 0$ не должна содержать целиком движений $x_s(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, отличных от невозмущенного движения $x_s = 0$. Доказательство этого утверждения можно найти в книге: Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959, стр. 43. В рассмотренном в данном параграфе примере указанное условие не выполняется, так как в любой окрестности точки $x_s = 0$ содержатся положения равновесия $x_s = c_s$, отличные от этой точки.

К стр. 89. При применении более гибкого способа построения функции Ляпунова $V(x, y)$, включающей, помимо квадратичных членов, слагаемые вида

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi,$$

для задач, подобных рассматриваемой здесь, получаются более общие достаточные условия устойчивости в целом, весьма близкие к необходимым условиям (см. дополнение I). Однако такой метод построения функций Ляпунова V, естественно, выходит за рамки классической теории устойчивости движения по первому приближению, рассматриваемой в этой главе.

К стр. 109. В этом случае система (28.6) допускает голоморфный интеграл — семейство инвариантных поверхностей

$$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, c), \quad f(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

на каждой из которых имеется особая точка $x = c$, $x_s = u_s(c)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ (см. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950). Расположение траекторий системы (28.6) при $n = 2$ на произвольной поверхности $x = f(x_1, x_2, c)$ для достаточно малого c в окрестности точки $x = c$, $x_s = u_s(c)$, $s = 1, 2$ выяснено в работе Б. Н. Скачкова (Вестник ЛГУ, № 8, 1954).

К стр. 126. Проблема центра и фокуса до последнего времени продолжает оставаться одной из основных задач качественной и аналитической теорий обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, отметим следующий результат. Если в системе (36.1) X и Y — многочлены от x и y фиксированной степени, то для нее число условий центра конечно (Альмухамедов М. И. Изв. физ.-матем. общества, (3), 8, Казань, 1936—1937; 9, 1937). Эти условия найдены в явном виде для случаев: а) $X \equiv 0$, Y — многочлен от x и y третьей или пятой степени (Куклес И. С. ДАН СССР, т. 42, № 4 и 5, 1944); б) X и Y — однородные многочлены от x и y второй степени (Сибирский К. С. Изв. АН СССР, сер. матем., № 11, 1963); в) X и Y — однородные многочлены от x и y третьей степени (Сахарников Н. А. ПММ, т. 14, вып. 6, 1950; Малкин К. Е. Волжский матем. сб., вып. 2, 1964).

Для системы (36.1) в общем случае разработаны новые варианты записи условий центра и новые способы составления таких условий

(Куклес И. С., Нуров Т. Н. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1963; Альмухамедов М. И. Уч. зап. Казанск. пед. ин-та, вып. 10, 1955; Малкин К. Е. Уч. зап. Рязанск. пед. ин-та, т. 24, 1960). Полностью решен вопрос о существовании проходящей через начало координат оси симметрии поля направлений (Сибирский К. С. ДАН СССР, т. 151, № 3, 1963).

К стр. 196. Теорема II, так же как и аналогичная теорема Б в стационарном случае, может быть обобщена на случаи асимптотической устойчивости в большом и в целом. Таким путем получается, например, следующий критерий устойчивости в целом. Будем говорить, что функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ является определенно-положительной и допускает высший предел в *целом*, если можно указать две непрерывные функции $w(x_1, \ldots, x_n)$, $W(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что при всех значениях x_s выполняются неравенства

$$w(x_1, \ldots, x_n) \leqslant V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant W(x_1, \ldots, x_n),$$

причем функция $w(x_1, \ldots, x_n)$ определенно-положительна, кроме того,

$$\lim_{x \to \infty} w(x_1, \ldots, x_n) = \infty \qquad (x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|))$$

и

$$W(0, \ldots, 0) = 0.$$

Справедливо утверждение.

Теорема II_1. *Если можно указать функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая была бы определенно положительной и допускала бы высший предел в целом, причем ее производная $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения была бы функцией определенно-отрицательной при всех значениях x_s, то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в целом.*

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем, так как оно проводится по тому же плану, что и доказательство теоремы II с небольшими дополнениями, связанными с особенностями постановки задачи об устойчивости в целом. Эти особенности подчеркнуты выше в примечаниях к стр. 18 и 38.

К стр. 235. В последнее время уравнение (59.2), так же как и более общие случаи линейных канонических систем с периодическими коэффициентами, было подвергнуто дальнейшему подробному изучению. При этом были получены новые интересные результаты.

Теории периодических систем посвящен обзорный доклад В. М. Старжинского и В. А. Якубовича на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве 27. I — 3. II

1964 г. (Сборник трудов II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд. АН СССР, 1965).

К стр. 306. За время, прошедшее после выхода в свет первого издания настоящей монографии, проблема существования функций Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям теорем I, II и III, послужила предметом весьма большого числа исследований. Основной вывод, который следует из результатов этих работ, таков:

Характер поведения возмущенных движений, определенный той или иной функцией V из классических теорем второго метода Ляпунова, является не только необходимым, но и достаточным условием существования такой функции.

При этом выяснилось, что свойства гладкости функций V могут быть намного выше, чем гладкость правых частей соответствующих уравнений возмущенного движения.

В частности, вопрос об обратимости теоремы II с достаточной полнотой был решен в работе И. Г. Малкина «К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости», которая составляет содержание дополнения II, приведенного в настоящем издании этой монографии. Более подробно с проблемами существования функций Ляпунова и методами исследования этих проблем читатель может ознакомиться также по работам: Барбашин Е. А., Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб., т. 29, вып. 2, 1951; Барбашин Е. А., Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952; О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. 18, вып. 3, 1954; Massera J. L., On Liapounoffs condition of stability. Annals of Mathematics, т. 50, № 3, 1949. Contributiono to stability theory. Annalo of Math., v. 64, № 1, 1956; Курцвейль Я., К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. матем. журнал, т. 5 (80), 1955; Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Чехосл. матем. журнал, т. 6 (81), № 2, 1956; Курцвейль Я., Вркоч И., Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости. Чехосл. матем. журнал, т. 7 (82), № 2, 1957; Зубов В. И., К теории второго метода А. М. Ляпунова. ДАН СССР, т. 99, вып. 3, 1954; Вопросы теории второго метода Ляпунова, построение общего решения в области асимптотической устойчивости. ПММ, т. 19, вып. 6, 1955; К теории второго метода А. М. Ляпунова. ДАН СССР, т. 100, вып. 5, 1955; Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1957; Вркоч И., Обращение теоремы Четаева. Чехосл. матем. журнал, т. 5 (80), 1955; Joshizawa T., On the stability of solutions of a system of differential equations. Memoirs of the Colledge of science. Univ. of Kyoto, XXIX, № 1, ser. A, math, 1955; Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.

Подчеркнем, что здесь упомянута лишь небольшая часть работ из обширной библиографии вопроса.

Отметим еще два обстоятельства, связанные с задачами о существовании функций Ляпунова.

1. Решение этих проблем в положительном смысле позволило продвинуть теорию устойчивости движений при постоянно действующих возмущениях. Это объясняется тем, что наличие функции Ляпунова позволяет обычно доказать сохранение соответствующих свойств при малых добавках к уравнениям возмущенного движения (см., например, материал на стр. 461—462 настоящей монографии). Таким образом, параллельно с теорией существования функций Ляпунова в последние годы существенно развилась теория устойчивости при постоянно действующих возмущениях (см. также примечание к стр. 21).

2. Методы, использованные в большинстве работ о существовании функций Ляпунова, позволяют решить вопрос лишь в принципе. Однако эти методы, как правило, мало полезны для эффективного построения функций Ляпунова в конкретных прикладных задачах.

К стр. 307. Вопрос об обратимости теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости решается следующим образом.

Функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условиям теоремы Н. Г. Четаева, существует во всех случаях неустойчивости (см. упомянутую работу И. Вркоча и монографию Н. Н. Красовского).

Теорема Ляпунова о неустойчивости (теорема В) обратима не всегда, как это уже отмечалось выше на стр. 70 (см. также примечание к этой странице). Необходимые и достаточные условия существования функции $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет условиям теоремы III, таковы:

Функция V из теоремы III существует тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) невозмущенное движение $x_s = 0$ неустойчиво; 2) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что каково бы ни было число $\eta < \varepsilon$, можно указать число $T(\eta) > 0$ так, что $x(t^*) > \varepsilon$ в некоторый момент времени $|t^* - t_0| < T$, если только $\varepsilon > x(t_0) \geqslant \eta$. Здесь $x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

В частности, в случае установившегося движения $x_s = 0$, когда правые части уравнений возмущенного движения не зависят явно от t, условие 2) означает, что ε — окрестность точки $x_s = 0$ не содержит целиком движений $x_s(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, кроме самой точки $x_s = 0$. Доказательство приведенных утверждений можно найти в цитированной монографии Н. Н. Красовского.

К стр. 350. После 1952 года были построены весьма интересные примеры, показывающие, что характеристичные числа правильных систем могут оказаться неустойчивыми (см. работы: Виноград Р. Э. ПММ, т. 17, вып. 6, 1953; ДАН СССР, т. 103, № 4, 1955). Были найдены условия устойчивости характеристичных чисел (см. работы: Виноград Р. Э. ДАН СССР, т. 119, № 4, 1958; Былов Б. Ф. Мат. сборник, т. 48, № 1, 1959). Отметим, в частности, один тонкий результат (Богданов Ю. С., О существовании аппроксимирующей последовательности для правильной линейной дифференциальной системы. Успехи матем. наук, т. XV, вып. 1, 1960), относящийся к вопросу об устойчивости характеристичных чисел правильных систем.

Пусть p — вещественная $(n \times n)$-матрица, заданная, кусочно-непрерывная и ограниченная для вещественного аргумента $t \geqslant 0$, $k=1, 2, 3, \ldots$; m означает k или отсутствие индекса; T — безгранично возрастающая последовательность положительных чисел t_k; p_k — матрица-функция, совпадающая с p на интервале $[0, t_k)$ и периодически продолженная вне его; S_m — система линейных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = p_m x$; λ_m — совокупность расположенных в порядке возрастания характеристичных чисел нормальной системы решений S_m, рассматриваемая как вектор. Последовательность T назовем *аппроксимирующей*, если $\lambda_k \to \lambda$ при $k \to \infty$.

К. П. Персидский (см. работу, цитированную в сноске на стр. 341) высказал следующее утверждение: если S — правильная система, то *любая* последовательность T является аппроксимирующей. Впоследствии Р. Э. Виноград (Успехи матем. наук, т. IX, вып. 2, 1954) на примере ряда систем двух уравнений показал несостоятельность этого утверждения. Оказалось, что для правильных (более того, периодических) систем, рассмотренных Р. Э. Виноградом, *существуют* T, которые *не являются* аппроксимирующими.

Н. П. Еругин поставил вопрос: можно ли для любой правильной системы S указать *по крайней мере одну* аппроксимирующую последовательность T. Оказалось, что: 1) *существуют правильные системы, для которых ни одна последовательность T не является аппроксимирующей*; 2) *любая правильная двумерная система S ортогональной подстановкой переменных, коэффициенты которой зависят только от аргумента системы и верхней грани модулей элементов p, может быть преобразована к виду, при котором аппроксимирующая последовательность T заведомо существует.*

К стр. 351. Доказанная теорема допускает уточнение, которое проведено в работе: Богданов Ю. С., Замечание к § 81 монографиии И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», Гостехтеориздат, 1952. ПММ, т. 20, вып. 3, 1956.

Ниже эта работа приводится целиком.

Рассмотрим систему однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = p_{1i}x_1 + \ldots + p_{ni}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с коэффициентами $p_{ij} = p_{ij}(t)$, заданными, непрерывными и ограниченными для $t \geqslant 0$. Если $x_{i1}, \ldots, x_{in}$, $i = 1, \ldots, n$ — фундаментальная система решений (1) с характеристичными числами решений $\mu_1', \ldots, \mu_n'$, то всегда

$$\mu_1' + \ldots + \mu_n' + \varliminf_{t\to\infty} \int_0^t (p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn})\, dt \leqslant 0. \tag{2}$$

Система (1) правильна тогда и только тогда, если можно указать такую фундаментальную систему решений ее, для которой в (2) имеет место знак равенства. Если такая фундаментальная система решений существует, то она необходимо нормальная согласно Ляпунову.

Пусть $X(t, \tau) \equiv (x_{ij}(t, \tau))$ — матрица, которая при фиксированном τ представляет собой фундаментальную систему решений (1), нормированную для $t = \tau$ ($X(\tau, \tau) = I$), а μ_i означает характеристичное число решения (1) $x_{i1}(t, 0), \ldots, x_{in}(t, 0)$.

Определение. Назовем (1) системой A, если по любому положительному γ можно указать постоянное C_γ, не зависящее ни от t, ни от τ, такое, что

$$|x_{ij}(t, \tau)| < \begin{cases} C_\gamma \exp[(\gamma - \mu_i)(t - \tau)] & (0 \leqslant \tau \leqslant t), \quad (3) \\ C_\gamma \exp[(\gamma + \mu_i)(\tau - t)] & (0 \leqslant t \leqslant \tau). \quad (3') \end{cases}$$

Именно такие системы рассматриваются в одном из разделов (§ 81) *книги И. Г. Малкина*. В указанном разделе доказывается, что если система (1) удовлетворяет условию (3) *и правильна*, то ее характеристичные числа устойчивы. Нетрудно убедиться, что верно следующее предложение. Системы A всегда правильны (следствие: *характеристичные числа любой системы А устойчивы*).

Доказательство. Из известных свойств фундаментальных систем решений следует, что $X(t, \tau) = X^{-1}(\tau, 0)\, X(t, 0)$. Поэтому $X^{-1}(t, \tau) = X(\tau, t)$, $X^{-1}(t, 0) = X(0, t)$. Далее,

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\, dt = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\det X^{-1}(t, 0)| =$$

$$= -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\det X(0, t)|,$$

но $|\det X(0, t)| \leqslant C_\gamma^n n! \exp(n\gamma + \mu_1 + \ldots + \mu_n)$ (см. (3′) при $t = 0$, $\tau = t$). Поэтому

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(t^{-1}\ln|\det X(0, t)|) \geqslant -n\gamma - \mu_1 - \ldots - \mu_n \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

Число γ — произвольное, значит,

$$\lim_{\overline{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\,dt = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln|\det X(0, t)| \geqslant -\mu_1 - \ldots - \mu_n.$$

Таким образом, для фундаментальной системы решений системы (1)

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n + \lim_{\overline{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t (p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn})\,dt \geqslant 0. \qquad (4)$$

Сопоставляя (4) с соотношением (2), верным для любой фундаментальной системы решений (1), приходим к заключению, что (4) должно быть равенством, а это и доказывает правильность системы (1) — произвольной системы A (фундаментальная система решений (1), нормированная в точке $t = 0$, попутно оказалась нормальной).

Замечание 1. Условия (3) можно сформулировать, не предполагая μ_i характеристичными числами системы (1), но лишь некоторыми постоянными, не зависящими ни от γ, ни от τ. Однако из проведенных рассуждений ясно, что ничем другим как характеристичными числами системы (1) μ_i быть не могут.

Замечание 2. Если (1) — система A, то нормальной будет любая фундаментальная система решений (1), нормированная в какой-нибудь точке $t = \tau$, поэтому, например, из $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n$ следует, что $p_{ij} \equiv 0$ для $i < j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

К стр. 362. После 1952 года в теории характеристичных чисел Ляпунова получен ряд новых результатов.

Проведены глубокие исследования зависимости характеристичных чисел системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами от параметров, входящих в коэффициенты. Получены разложения характеристичных чисел в ряды по степеням параметра, найдены оценки снизу радиуса сходимости таких рядов, позволяющие эффективно оценивать погрешность, возникающую при замене указанных рядов частными суммами. Все эти вопросы подробно освещены в монографии: Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Изд. АН БССР, Минск, 1963.

Опубликованы оценки характеристичных чисел, найденные в свое время Н. Г. Четаевым (ПММ, т. 24, вып. 1, 1960) как для систем общего вида, так и для систем, коэффициенты которых имеют ограниченное колебание. Указаны и другие эффективные оценки характеристичных чисел (Горбунов А. Д. Вестник МГУ, № 2, 1956).

Открыта новая характеристика системы — центральный показатель, управляющий скачками характеристичных чисел, и указаны способы вычисления этой характеристики для ряда систем (Виноград Р. Э. Матем. сб., т. 42, № 2, 1957).

Доказано, что данную систему уравнений всегда можно заменить системой с кусочно постоянными коэффициентами, причем характеристичные числа обеих систем будут совпадать (Богданов Ю. С. Матем. сб., т. 41, № 1, 1957). Предпринята попытка распространить теорию характеристичных чисел на нелинейные системы (Богданов Ю. С. ДАН СССР, т. 158, № 1, 1964).

К стр. 366. Приведенные геометрические соображения указывают путь для обоснованного аналитического доказательства теоремы, которое, строго говоря, должно дополнить эти соображения. Это подробное доказательство, однако, помимо технических деталей не содержит интересных новых моментов и здесь не приводится. Кроме того, следует иметь в виду, что возможно и другое доказательство теоремы, исходя непосредственно из существования в рассматриваемом случае функции Ляпунова V, удовлетворяющей оценке (см. монографию: Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959)

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -c_3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\nu+m-1},$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \leqslant c_4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\nu-1}$$

$$(c_3 > 0,\ c_4 > 0 \text{ — постоянные}).$$

Доказательство теоремы с помощью такой функции V проводится стандартным путем.

К стр. 377. Как отмечено выше, критерии устойчивости по линейному приближению, даваемые теоремами 1—3, означают следующее. Если в случае неустановившегося движения $x_s = 0$ в линейном приближении движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво и если при этом возмущенные движения $x_s(t, t_0)$ линейного приближения (88.4) удовлетворяют оценке (88.5), характерной для асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными параметрами, то имеет место асимптотическая устойчивость и полной нелинейной системы (88.1) при условиях (88.3). В такой форме этот критерий обобщается на задачи устойчивости по первому приближению и в тех случаях, когда первое приближение не является линейным, но когда в правых частях уравнений первого приближения стоят однородные формы от x_s произвольного порядка $m \geqslant 1$ с переменными по времени t, непрерывными и ограниченными коэффициентами (см. монографию Н. Н. Красовского в примечании к стр. 306).

Отметим еще, что выяснился следующий любопытный факт: линейность системы (88.4) не является существенной для справедливости утверждения, подобного теореме 2. Именно, если для некоторых уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n),$$

где X_s — произвольные нелинейные функции, удовлетворяющие условиям Липшица, выполняется оценка (88.5), то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n)$$

при любом выборе функций φ_s, удовлетворяющих неравенству (88.3), если только постоянная A достаточно мала.

Это утверждение доказано в работе: Барбашин Е. А., Скалкина М. А., К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. 19, вып. 5, 1955.

К стр. 383. Сформулированная теорема известна под названием «принципа сведения». Этот принцип, введенный фактически А. М. Ляпуновым и лежащий в основе его метода исследования критических случаев, играет постоянно центральную роль при изучении этих случаев, фигурируя в той или иной форме почти во всех работах, посвященных им. В процессе использования принцип сведения подвергся усовершенствованию в соответствии с рассматриваемыми конкретными задачами. Заметим, в частности, что в последнее время этот принцип получил весьма существенное развитие в работах В. А. Плисса (см., например, работы: Плисс В. А., О принципе сведения в теории устойчивости движения. ДАН СССР, т. 164, № 5, 1964; О принципе сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР, Математика, т. XXVIII, № 6, 1964).

К стр. 384. Это преобразование можно использовать лишь при условии, что $r \neq 0$. В самом деле, при $r = 0$, но $x_s \neq 0$ величины ξ_s становились бы бесконечно большими. В соответствии с этим ниже, если не сделано дополнительных оговорок, следует иметь в виду, что новые переменные ξ_s используются при рассмотрении траектории $x_s(t)$, $y_i(t)$ системы (91.1) лишь в такой области изменения x_s, y_i, где $|\xi_s| \leqslant H$. Здесь H — некоторая положительная постоянная. Область в пространстве $\{x_s, y_l\}$, где $|\xi_s| < H$, будем обозначать символом G. Область G охватывает многообразие $x_1 = \ldots = x_n = 0$, $y_1^2 + \ldots + y_k^2 \neq 0$, сжимаясь в точку при приближении к началу координат.

К стр. 422. Задача, рассмотренная в этом параграфе, для системы второго порядка решалась также методами качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости.

Для системы

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

выяснены возможные топологические типы расположения траекторий [в окрестности точки (0, 0) встречается 10 различных типов] и полностью решена задача их различения с точностью до проблемы различения центра и фокуса (Хаимов Н. Б., Уч. зап. Сталинабад. пед. ин-та, т. II, 1952; Андреев А. Ф. Вестник ЛГУ, № 8, 1955). Последняя проблема решена для случая, когда X и Y являются однородными многочленами от x и y третьей степени (Андреев А. Ф. ПММ, т. 17, вып. 3, 1953).

Для произвольной системы второго порядка с аналитическими в точке (0, 0) правыми частями

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \quad (X(0, 0) = Y(0, 0) = 0)$$

разработан алгоритм, позволяющий конечным числом операций, во-первых, выяснить, является ли точка (0, 0) особой точкой 1-й группы (имеются ли траектории, примыкающие к этой точке с определенными касательными) или 2-й группы (центр или фокус); во-вторых, в случае, когда точка (0, 0) принадлежит к 1-й группе, выяснить расположение траекторий в ее окрестности (исключая некоторые особые подслучаи) (Куклес И. С. Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, М., АН СССР, т. III, 1958; Андреев А. Ф. Вестник ЛГУ, № 1, 1962), причем найдены оценки для упомянутого выше числа операций (Куклес И. С., Груз Д. М. Изв. АН Уз.ССР, № 1, 1958; Андреев А. Ф., Дифференциальные уравнения, т. 1, № 9, 1965).