

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES

Number 59

**LECTURES ON CURVES
ON AN ALGEBRAIC SURFACE**

by
DAVID MUMFORD
with a section by
G. M. BERGMAN

**PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS**

1966

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Д. МАМФОРД

При участии Г. М. БЕРГМАНА

**ЛЕКЦИИ О КРИВЫХ
НА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ**

Перевод с английского А. А. Бельского

Под редакцией Ю. И. Манина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1968

УДК 513.015.7

Предлагаемая книжка содержит прежде всего краткий, но очень языческий очерк основных понятий теории схем и техники когомологий когерентных пучков на них. Далее, эта техника применяется к теории кривых и поверхностей, для которых строятся схемы Пикара и доказывается ряд фундаментальных алгебро-геометрических фактов. Книга трудна, но написана очень живо и на редкость содержательно. В немногочисленной монографической литературе по современной алгебраической геометрии она занимает особое место: по ней можно изучать содержательные результаты, хотя предварительные требования к читателю достаточно высоки.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2—2—3

От редактора перевода

В мировой литературе до сих пор не существует книги, которая могла бы служить учебником алгебраической геометрии. Такая книга должна дать возможность читателю детально изучить основные понятия и методы, овладеть ими с помощью серии задач, а также ознакомить с некоторыми более глубокими результатами и показать красоту предмета.

Написать такую книгу тем труднее, что последние двадцать лет были для алгебраической геометрии периодом почти непрерывной перестройки основ, в течение которого связные изложения оснований предпринимались разными авторами всякий раз заново для нужд собственной работы. Серия монографий и статей А. Вейля, О. Зарисского, Ж.-П. Серра, записки семинара Шевалле и, наконец, доклады и первые главы фундаментальной публикации Гrotендика служат временными вехами этого процесса.

За это же время алгебраическая геометрия перестала быть отраслью математики, замкнутой в себе. Оценки сумм Клостермана, данные А. Вейлем, эффективно продемонстрировали возможность теоретико-числовых приложений. (Впрочем, им предшествовали работы Хассе по дзетафункциям эллиптических кривых, а еще раньше, в конце двадцатых годов, А. Вейль и К. Зигель получили самые глубокие известные результаты о диофантовых свойствах кривых.) Принадлежащая Гrotендику форма теоремы Римана — Роха и понятие K -функтора, перенесенные в топологическую ситуацию, сыграли основную роль в решении

проблемы индекса эллиптических операторов (Атья — Зингер). Через теорию линейных алгебраических групп алгебро-геометрические идеи и методы проникли в теорию конечных простых групп. Я сознаю, что эти, по необходимости краткие, формулировки сильно упрощают существо дела; кроме того, происходящее изменение статуса алгебраической геометрии следует рассматривать не как исключительный процесс, но скорее как возвращение к норме.

В этих обстоятельствах лекции Мамфорда могут служить двоякую службу. Их первая часть — лекции 3—7, 9 и 11 представляют собой обзор основных рабочих понятий алгебраической геометрии (на общепринятом нынче языке схем А. Гротендика), а вторая часть — полное изложение конструкции схемы Пикара для алгебраической поверхности и исследование вопроса о ее приведенности. Тем самым неспециалист может ознакомиться с основаниями предмета, не продираясь сквозь детали подробных доказательств технических утверждений, а специалист — овладеть техникой доказательства ряда глубоких и важных теорем.

Стиль книги очень привлекателен. Изящные находки изложения дают пищу геометрической интуиции: таковы, например, интерпретация $\text{Spec } k[x]/(x^2)$ как вектора (добавление к лекции 4) и объяснение роли плоских морфизмов (лекция 6). Несколько лекций содержат доказательства теорем, имеющих самостоятельный интерес: теорема об обращении в нуль (лекция 14), теорема об индексе (лекция 18). Книга обильно насыщена неформальными замечаниями и мотивировками.

Я надеюсь, что выход лекций Мамфорда на русском языке будет полезен для многих математиков, интересующихся методами и приложениями алгебраической геометрии.

Ю. И. Манин

Предисловие

Эти записки издаются точно в такой же форме, в какой они были написаны с самого начала: в виде заметок, дополняющих и разрабатывающих мои устные лекции¹⁾. Поэтому они далеки от отшлифованного изложения и требуют многое от читателя. Выражаясь словами бывшего издателя одного хорошо известного журнала, они написаны в стиле, который напоминает „разве что личные письма к близкому другу“. Как бы то ни было, я надеюсь, что твердый в своем намерении читатель все же сможет постигнуть эти записки и научиться кое-чему в великолепной геометрии на алгебраической поверхности.

При написании этих лекций предполагалось, что читатель прослушал последовательный курс коммутативной алгебры, немного занимался алгебраической геометрией и, в частности, немного знаком с теорией кривых, с теорией схем и их когомологий (например, по лекциям Дьеонне, прочитанным в Мэриленде и Монреале²⁾). Тем не менее для того, чтобы подготовить исходные идеи и доказать некоторые специальные результаты, которые потребуются позже,

¹⁾ Принстонское издание лекций Д. Мамфорда (1966) содержало ряд опечаток, которые при переводе были исправлены с помощью харвардского издания рукописи (1964). Отсутствующее в принстонском издании добавление к лекции 13 переведено с упомянутого рукописного издания. — *Прим. перев.*

²⁾ Русский перевод см. в сб. *Математика*, 9:1 (1965). 54—126. — *Прим. ред.*

лекции 3 — 10 посвящаются краткому и довольно поверхностному обзору общей теории схем. В лекции 11 подводится итог тому, что нам понадобится из теории кривых. Приношу извинения читателю, который, надеясь, что он найдет здесь, на 100 с лишним страницах, простое и краткое введение в теорию схем, вместо этого безнадежно запутается в лабиринте недоказанных утверждений и непротестированных намеков. *Начиная с лекции 12 мы доказываем все, что нам нужно.*

Целью этих лекций является полное объяснение одной теоремы теории алгебраических поверхностей: так называемой теоремы о полноте характеристической линейной системы для „хороших“ полных алгебраических систем кривых на поверхности F . Для характеристики, равной нулю, эта теорема была впервые доказана Пуанкаре в 1910 г. аналитическими методами (см. литературу). Примерно до 1960 г. не было известно ни одного алгебраического доказательства этой чисто алгебраической теоремы¹⁾. В 1955 г. Игуса показал, что упомянутая теорема в том виде, в каком она формулировалась, в случае характеристики p неверна, и это представило ее еще более аналитической по природе. Однако около 1960 г. был достигнут замечательный прогресс: Гrotендику, который осуществляя свой генеральный план преобразования алгебраической геометрии — с поглощением ряда ключевых идей теории деформаций Кодайры и Спенсера, — представился случай написать в явном виде несколько следствий из своей теории (см. Гrotендик [3], стр. 23 — 24). Объединив его результаты с одной теоремой Картье о том, что групповые схемы в случае характеристики 0 редуцированы, мы обнаруживаем, что эта старая проблема полностью решена: а) в случае характеристики 0 имеется чисто алгебраическое доказательство, б) готов весь аппарат для получения необходимого и достаточного условия справедливости теоремы в случае характеристики p . В чем же дело, какой существенный момент проглядели итальянцы? Нет никакого сомнения в том, что понимание достигнуто благодаря систематическому использованию nilпотентных элементов,

¹⁾ Хотя нескончаемая и утомительная полемика несколько затмнила этот факт.

в частности, благодаря систематическому анализу семейств кривых на поверхности над параметрическим пространством с одной единственной точкой, но с нетривиальным нильпотентным структурным пучком. Итальянцы в некотором смысле сделали и это, но только для того случая, когда кольцо функций на базе было кольцом Штуди дуальных чисел $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, т. е. случая, соответствующего деформациям первого порядка некоторой кривой. Но они не рассматривали нильпотенты и деформации более высокого порядка.

Структура предлагаемых лекций следующая: лекции 1 и 2 дают интуитивное введение в задачу и набросок двух аналитических доказательств. В лекциях 3 — 10 напоминаются основные понятия из теории схем. В лекциях 11 — 21 речь идет об основных вопросах теории поверхностей. В частности, в них приводится конструкция универсальных семейств кривых на поверхности — так называемой схемы Гильберта, а также универсальных семейств классов дивизоров на поверхности — так называемой схемы Пикара. В лекциях 22 — 27 излагается приложение всей теории к главной проблеме; сюда входит длинная лекция Г. Бергмана, которая дает не зависящее от прочего материала описание кольцевых схем Витта.

Мне бы хотелось обратить внимание на несколько обобщений и приложений наших результатов, которые были опущены, чтобы сократить путь к главной цели:

а) Метод, которым мы построили универсальное семейство кривых на поверхности F , без каких-либо изменений позволяет построить универсальное плоское семейство подсхем произвольной схемы X , проективной над нётеровой схемой S , т. е. схему Гильберта. В частности, явная оценка, полученная в лекции 14, позволяет завершить это построение, совпадающее с первоначальной конструкцией Гrotендика [3], без косвенных аргументов с использованием „ограниченных семейств“.

б) Метод, которым мы построили схему Пикара поверхности F , обобщается для построения схемы Пикара любой схемы X , проективной и плоской над нётеровой схемой S , геометрические слои которой над S редуцированы и связны, а ее настоящие слои над схемой S абсолютно неприводимы. Эта конструкция связана с той, на-

бросок которой я дал на Международном конгрессе в 1962 г. и которая тяготеет к методам, используемым в гл. 3 и 7 моей книги „Geometric Invariant Theory“.

в) Результаты лекции 18 можно использовать для получения очень простого доказательства гипотезы Римана для кривых над конечными полями. Это доказательство Маттука—Тэйта (см. литературу). Если вы прочитали лекцию 18 и знаете формулировку гипотезы Римана на языке морфизма Фробениуса, то вам будет легко прочитать их статью, и это стоит сделать.

Кембридж,
март 1966 г.

ЛЕКЦИЯ 1

Кривые на поверхностях; примеры и постановки задач

Здесь мы будем заниматься только алгебраической геометрией над фиксированным алгебраически замкнутым полем k (произвольной характеристики). Нашей главной целью будет изучение геометрии на *неособой алгебраической поверхности* F , проективной над k , и, в частности, семейств кривых C на F .

Кривой мы называем либо конечную сумму неприводимых 1-мерных подмногообразий на F с положительными кратностями: $\sum n_i C_i$, либо пучок главных идеалов на F . (Эти понятия равносильны; по поводу точных определений см. лекцию 9.)

Пример 1. $F = P_2$. В этом случае, как известно, каждая кривая C на P_2 определяется однородной формой $\Phi(x_0, x_1, x_2)$. В частности, можно приписать кривой C ее степень d — степень однородного многочлена Φ , и семейство всех кривых степени d параметризуется множеством всех форм Φ степени d с точностью до скалярного множителя, т. е. проективным пространством размерности

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1.$$

Пример 2. $F = P_1 \times P_1$. Это квадрика в P_3 . Тогда каждая кривая C на F определяется биоднородной формой

$$\varphi(x_0, x_1; y_0, y_1)$$

с двумя степенями d и e . Числа d и e можно рассматривать как степени накрытий

$$p_1, p_2 : C \rightarrow P_1,$$

заданных двумя проекциями $P_1 \times P_1$ на P_1 . Обратно, каждым¹⁾ d и e соответствует единственное семейство кривых, составляющих проективное пространство, на этот раз размерности

$$(d+1)(e+1) - 1.$$

Обобщая явление, с которым мы встретились в этих примерах, введем понятие *линейной системы*. Если f — алгебраическая функция на F , то пусть, как обычно, (f) означает формальную сумму

$$\sum \text{ord}_E(f) \cdot E,$$

распространенную на все 1-мерные неприводимые подмногообразия E , где $\text{ord}_E(f)$ означает порядок нуля или полюса f на E . С любой кривой C связано векторное пространство функций, имеющих полюсы только на C :

$$\mathfrak{L}(C) = \{f \mid (f) + C \geq 0\}$$

(здесь $\sum n_i E_i \geq 0$ означает, что все $n_i \geq 0$). Если f_0, \dots, f_n — базис в $\mathfrak{L}(C)$, то можно определить следующее семейство кривых, содержащее C :

$$C_a = (\sum a_i f_i) + C.$$

Так как C_a зависит только от отношений коэффициентов a_i , то оно представляет собой неприводимое семейство кривых, являющееся проективным пространством размерности

$$\dim \mathfrak{L}(C) - 1.$$

¹⁾ Натуральным. — Прим. ред.

Линейные системы — наиболее простые семейства кривых на поверхности F , и только они встречались в приложениях 1 и 2.

Определение. Две кривые C_1 и C_2 называются линейно эквивалентными, если выполняется одно из двух равносильных условий:

- 1) существует такая функция f на F , что $(f) = C_1 - C_2$;
- 2) C_1, C_2 принадлежат одной линейной системе.

Мы пишем в этом случае $C_1 \equiv C_2$.

Пример 3. Пусть \mathcal{E} — эллиптическая кривая над k . $F = P_1 \times \mathcal{E}$. Вновь для любой кривой C на F мы можем ввести степени d и e как порядки накрытий

$$C \rightarrow P_1; \quad C \rightarrow \mathcal{E},$$

получаемых проектированием. Оба числа d и e неотрицательны ($d \geq 0, e \geq 0$), и по крайней мере одно из них положительно (или $d > 0$, или $e > 0$).

Случай 1. $d = 0$. Тогда C имеет вид $\sum_{i=1}^e P_i \times \mathcal{E}$, и все такие C образуют e -мерную линейную систему.

Случай 2. $d > 0$. Множество всех C типа (d, e) образует неприводимое $(d(e+1))$ -мерное семейство кривых, но оно не является линейной системой. Естественнее можно бы сказать, что оно расслоено на $(d(e+1)-1)$ -мерные линейные подсистемы.

Определение. Две кривые C_1 и C_2 называются алгебраически эквивалентными, если обе они содержатся в семействе кривых, параметризованием некоторым базовым многообразием.

Пользуясь этой терминологией, мы можем сказать, что на $P_1 \times \mathcal{E}$ алгебраическая и линейная эквивалентности не совпадают.

Заметим также, что при $d = 0$ формула для размерности в случае 2 не сводится к формуле для случая 1 (в этом проявляется так называемая избыточность).

Пример 4. Пусть γ — „общая“ кривая рода 2, т. е. двукратное накрытие пространства P_1 , ветвящееся в шести точках с независимыми трансцендентными координатами над простым полем (характеристики $\neq 2$). Пусть F — якобиан для γ . Напомним, что:

- 1) F — неособая алгебраическая поверхность,
- 2) F — алгебраическая группа,
- 3) кривая γ естественным образом вложена в F .

Оказывается, что любая кривая C на F алгебраически эквивалентна $d\gamma$ для некоторого натурального числа d . Более того, C линейно эквивалентна подходящим образом сдвинутой кривой $d\gamma$ (в смысле групповой структуры на F). Множество всех кривых, алгебраически эквивалентных $d\gamma$, представляет собой неприводимое семейство размерности $d^2 + 1$, а его линейные подсемейства имеют размерность $d^2 - 1$. На самом деле можно определить отображение

$$F \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{все кривые, алгебраически эквивалентные } d\gamma \\ \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{линейная эквивалентность} \\ \end{array} \right\},$$

где $a \mapsto$ образ $d\gamma$ при сдвиге на a . Более того, это отображение расписывается так:

$$F \xrightarrow{\text{умножение на } d} F \xrightarrow{\text{бихективность}} \left\{ \begin{array}{l} \text{кривые, алгебраически эквивалентные } dh \\ \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{линейная эквивалентность} \\ \end{array} \right\}.$$

Это указывает на общий факт: множество алгебраически эквивалентных кривых по модулю линейной эквивалентности имеет тенденцию не зависеть от семейства рассматриваемых кривых.

Сравним поверхность F с ее куммеровой поверхностью K : она определяется как двукратное накрытие пространства P_2 , разветвленное в общей кривой шестой степени (характеристика $\neq 2$). Здесь все кривые линейно эквивалентны dh , где h — прообраз прямой в P_2 , и размерность этого семейства равна $d^2 + 1$ (как и выше). Сходство с F заключается еще и в том, что: (а) $(\gamma^2) = 2$ на F , $(h^2) = 2$ на K [(D^2) обозначает индекс самопересечения, см. лекцию 12] и (б) F и K допускают двойные дифференциалы

без нулей и полюсов. Поверхность K имеет тот же тип, что и *квартники* (поверхности четвертой степени) в P_3 .

Выше мы бегло рассмотрели примеры всех классов алгебраических поверхностей, на которых есть двойные дифференциалы без нулей (т. е. антиканоническая линейная система); по причинам, связанным с двойственностью Серра, геометрия на таких поверхностях особенно проста. Для выявления дальнейших характерных свойств поверхностей рассмотрим другую рациональную поверхность.

Пример 5. Пусть F — поверхность, полученная раздеванием двух точек P_1 и P_2 в P_2 (или одной точки в $P_1 \times P_1$).⁴ Пусть E_1 и E_2 — рациональные кривые, являющиеся прообразами P_1 и P_2 в F . Пусть l — прямая в P_2 , проходящая через точки P_1 и P_2 , и D — кривая в F , являющаяся замыканием прообраза $l - P_1 - P_2$. Тогда для каждой кривой C на F можно ввести *три* характеристики k_1 , k_2 и e , где k_1 , k_2 и e неотрицательны и не все равны нулю; множество всех кривых с характеристиками k_1 , k_2 и e образует единственную линейную систему, содержащую кривую

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + e D.$$

Однако здесь положение иное, чем на $P_1 \times P_1$: не все такие системы являются „хорошими“ системами кривых.

Случай 1. Если $e \geq k_1$, $e \geq k_2$ и $k_1 + k_2 \geq e$, то ни одна из трех кривых E_1 , E_2 и D не является компонентой *всех* кривых в линейной системе, содержащей $k_1 E_1 + k_2 E_2 + e D$, и эта линейная система имеет размерность, которую можно вычислить:

$$(*) \quad \frac{(e+1)(e+2)}{2} - \frac{(e-k_1)(e-k_1+1)}{2} - \frac{(e-k_2)(e-k_2+1)}{2} = 1.$$

Случай 2. Если $e < k_1$, $e < k_2$ или $k_1 + k_2 < e$, то одна из трех кривых E_1 , E_2 или D является компонентой *всех* рассматриваемых кривых в линейной системе,

содержащей $k_1E_1 + k_2E_2 + eD$, и, вообще говоря, это семейство также избыточно, т. е. его размерность больше, чем та, которая дается выражением (*).

Другой способ подразделения систем кривых на „плохие“ и „хорошие“ таков:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Система кривых, линейно эквивалентных} \\ k_1E_1 + k_2E_2 + eD, \\ \text{есть семейство сечений гиперплоскостями поверхности } F \text{ при} \\ \text{некотором вложении ее в } P_N \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e > k_1, \\ e > k_2, \\ k_1 + k_2 > e \end{array} \right\}.$$

Условие в левой части есть определение следующего понятия: кривая $k_1E_1 + k_2E_2 + eD$ очень обильна.

Какие вопросы о кривых на поверхностях возникают естественно при рассмотрении этих примеров? На мой взгляд, они подсказывают четыре главные линии исследования:

1. ПРОБЛЕМА РИМАНА — РОХА. Для заданной кривой C определить размерность линейной системы кривых, содержащей C . Мы увидим ниже, что это эквивалентно задаче вычисления

$$\dim H^0(\mathcal{D}),$$

где \mathcal{D} — некоторый пучок на F , локально изоморфный пучку \mathcal{O}_F регулярных функций.

2. ПРОБЛЕМА ПИКАРА. Описать семейство всех алгебраических деформаций кривой C по модулю его линейных подсемейств. Оказывается, что это фактормножество не зависит от C , если C достаточно „хороша“, и его существование приводит к схеме (или многообразию) Пикара.

3. Плохие и хорошие кривые. Что делает кривую C хорошей или плохой? Можно спросить: когда C очень обильна, или когда она обладает избыточностью, или что представляют собой такие плохие „исключительные“ кривые C , которые аналогичны кривым E_1 , E_2 и D в примере 5? В частности, особенно важен вопрос о „регулярности присоединенной системы“ (эквивалентный теореме Кодайры — Спенсера об обращении в нуль); см. лекцию 14.

4. Компоненты множества всех кривых C на F . В частности, какого типа утверждения о конечности можно доказать? Примеры доставляют теоремы о базе Нерона и Севери и теорема о том, что только конечное число компонент представляет кривые любой данной степени.

ЛЕКЦИЯ 2

Основная проблема существования и два аналитических доказательства

Рассмотрим проблему Пикара более подробно. Ее действительная природа становится яснее, если перейти от кривых к дивизорам. Под дивизором на поверхности F мы подразумеваем любую конечную сумму неприводимых одномерных подмногообразий с (положительными или отрицательными) кратностями: $\sum n_i C_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, или пучок дробных идеалов, т. е. когерентный подпучок постоянного пучка \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}(U) = \text{поле функций } k(F) \text{ для всех } U$$

(см. лекцию 9 по поводу точных определений). Множество всех дивизоров на F образует группу, которую мы обозначим через $G(F)$. Положим

$G_\alpha(F) =$ подгруппа дивизоров вида $C_1 - C_2$, где
 C_1 и C_2 — алгебраически эквивалентные
кривые;

$G_f(F) =$ подгруппа дивизоров вида $C_1 - C_2$, где
 $C_1 \equiv C_2$, или, что то же самое, подгруппа
дивизоров вида (f) , где $f \in k(F)$.

Теперь, если C — любая кривая на F и $\{C_\alpha | \alpha \in S\}$ — семейство всех кривых, алгебраически эквивалентных

$C = C_0$, то можно рассматривать отображение

$$\{S/\text{линейные подсемейства}\} \rightarrow G_a(F)/G_l(F),$$

определенное отображением α на дивизор $C_\alpha - C_0$. Легко проверить, что это отображение инъективно, и можно показать, что для достаточно „хороших“ (?) кривых оно сюръективно. По этой причине проблема Пикара становится не зависящей от C в большинстве случаев и сводится к вопросу: каковы размерность и структура группы $G_a(F)/G_l(F)$, инвариантно связанной с F ?

Опять без доказательства напомним когомологическую интерпретацию этих групп. Пусть

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^* &= \text{пучок единиц структурного пучка } \mathcal{O}, \\ \mathcal{K}^* &= \text{пучок единиц пучка } \mathcal{K}.\end{aligned}$$

Тогда

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

откуда

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{K}^*)/\mathcal{O}^* \rightarrow H^0(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathcal{O}^*) \rightarrow 0.$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ G_l(F) & G(F) \end{matrix}$$

Следовательно, $G_a(F)/G_l(F)$ является подгруппой в группе $H^1(\mathcal{O}^*)$ — так называемой *группой Пикара* (определенной на любом окольцованным пространстве) поверхности F .

Работы Кастельнуово и Мацусаки показали, что группе $G_a(F)/G_l(F)$ можно естественным образом придать структуру алгебраической группы, на самом деле — абелева многообразия. Существенный вопрос: какова размерность этого многообразия? Перед нами проблема существования: можно ли предсказать размерность множества решений существенно нелинейной задачи при помощи некоторых линейных данных, например когомологий когерентного пучка? Севери выдвинул предположение, что

$$(A) \quad \dim G_a(F)/G_l(F) = \dim H^1(\mathcal{O}),$$

где \mathcal{O} — структурный пучок на F (в обозначениях Севери $q = p_g - p_a$). Это было доказано Пуанкаре в 1909 г. для случая $k = \mathbb{C}$ и опровергнуто Игусой в 1953 г. для случая $\text{char}(k) \neq 0$.

Проще всего объяснить правдоподобность гипотезы (A), заметив, что выражение в левой части является подгруппой в $H^1(\mathcal{O}^*)$, и предположив, что должно существовать что-то вроде „экспоненциального отображения“ из $H^1(\mathcal{O})$ в $H^1(\mathcal{O}^*)$ (см. ниже). Другой путь заключается в том, чтобы перефразировать (A) в утверждение, касающееся деформаций кривой C на F ; тогда мы получим частный случай общей проблемы существования деформаций Коудиры — Спенсера. Для того чтобы убедиться в этом, предположим опять, что $\{C_\alpha | \alpha \in S\}$ — семейство деформаций кривой $C = C_0$. Пусть \mathcal{N} — пучок сечений нормального расслоения C в F (C предполагается неособой). Тогда существует фундаментальное характеристическое отображение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Касательное пространство} \\ \text{к } S \text{ при } \alpha = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\rho} H^0(\mathcal{N}).$$

Грубо говоря, малая окрестность кривой C в F почти изоморфна нормальному расслоению C в F , тогда как кривая C_α для α , близкого к 0, определяет сечение этой окрестности: когда $\alpha \rightarrow 0$, эти кривые могут быть асимптотически отождествлены с сечениями нормального расслоения C в F . Ключевая проблема существования теперь такова: верно ли, что

(Б) для подходящих семейств $\{C_\alpha\}$ отображение ρ биективно.

Кстати, в этой форме нашу гипотезу можно было с равным успехом высказать в случае подмногообразий произвольной коразмерности в других многообразиях, например для деформаций кривых в P_3 . К сожалению, она оказывается неверной, даже в случае характеристики 0, для некоторых патологических пространственных кривых.

Для того чтобы связать (A) и (Б), мы воспользуемся точной последовательностью пучков:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(C) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{N} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}(C)$ — пучок функций с простыми полюсами на кривой C , а Φ отображает функцию A/f в нормальное векторное

торное поле X , такое, что $X(df) = A$ (здесь $f = 0$ есть локальное уравнение кривой C).

Можно показать, что для „хороших“ кривых C имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}(C))/k & \rightarrow & H^0(\mathcal{M}^*) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}) & \rightarrow 0 \\ \sigma \uparrow & & \rho \uparrow & & \tau \uparrow & & \\ 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{касательное} \\ \text{пространство} \\ \text{к } S_0 \text{ при} \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{касательное} \\ \text{пространство} \\ \text{к } S \text{ при} \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{касательное} \\ \text{пространство к} \\ G_a(F)/G_l(F) \\ \text{в нуле} \end{array} \right\} & \rightarrow 0, \end{array}$$

где $S_0 \subset S$ есть линейное подсемейство, проходящее через 0, а S по модулю линейной эквивалентности отождествляется с $G_a(F)/G_l(F)$. Более того, σ всегда представляет собой изоморфизм. Поэтому ρ биективно тогда и только тогда, когда τ биективно, так что (А) эквивалентно (Б).

Прежде чем приступить к систематическому изложению, я хочу дать набросок двух доказательств гипотезы (А) для случая $k = \mathbb{C}$.

Доказательство I [GAGA]¹⁾. Пусть \mathcal{O}_h — пучок голоморфных функций на F , и пусть $\mathcal{O}_h^* \subset \mathcal{O}_h$ — подпучок единиц. Тогда экспонента определяет точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_h \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}_h^* \rightarrow 0.$$

Следовательно, определен гомоморфизм

$$H^1(\mathcal{O}_h) \xrightarrow{\exp} H^1(\mathcal{O}_h^*).$$

¹⁾ GAGA — сокращение названия работы Серра [1] (см. литературу). В этой работе доказано, что на проективных алгебраических многообразиях над \mathbb{C} когомологии алгебраических когерентных пучков в топологии Зарисского совпадают с когомологиями соответствующих аналитических пучков в обычной хаусдорфовой топологии. Это приводит к разнообразным результатам о совпадении алгебраических и аналитических понятий, и теоремы такого рода часто называются в литературе утверждениями „типа GAGA“. — Прим. ред.

Согласно GAGA,

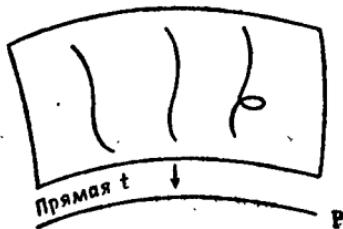
$$H^1(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_h),$$

$$H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_h^*);$$

следовательно, существует индуцированное экспоненциальное отображение на алгебраическом уровне из $H^1(\mathcal{O})$ в $H^1(\mathcal{O}^*)$.

Доказательство II (Пуанкаре). В этом доказательстве единственное нужное нам утверждение типа GAGA состоит в том, что мероморфные функции, определенные на всей комплексной проективной прямой P_1 , являются алгебраическими.

Выберем пучок кривых C_t на F , $t \in P_1$.



Пусть J_t — якобиан (или обобщенный якобиан) кривой C_t , и пусть $J = \bigcup J_t$ — многообразие всех J_t . Положим $p = \text{род}(C_t)$ и $q = \dim H^1(\mathcal{O})$. Если мы построим q -мерное семейство сечений J над P_1 , то мы сможем для каждого сечения s определить 0-цикл $\mathfrak{J}_t(s)$ степени p на каждой кривой C_t и, следовательно, кривую $D(s)$ на F , такую, что $D(s) \cdot C_t = \mathfrak{J}_t(s)$. Можно доказать, что так получается q -мерное семейство линейно не эквивалентных дивизоров. Более того, согласно сделанному выше замечанию, безразлично, будем ли мы строить эти сечения алгебраическими или голоморфными.

Напомним, что J_t получаются при рассмотрении интегралов от простых дифференциалов без полюсов на C_t по модулю их периодов, или, что то же самое,

$$J_t \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{пространство,} \\ \text{двойственное} \\ \text{к } H^0(\Omega_{C_t}^1) \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{линейные функционалы,} \\ \text{заданные периодами} \end{array} \right\}.$$

где $\Omega_{C_t}^1$ — пучок простых дифференциалов на C_t без полюсов. Согласно двойственности Серра, на C_t

$$\{\text{двойственное пространство для } H^0(\Omega_{C_t}^1)\} \cong H^1(\mathcal{O}_{C_t}).$$

Поэтому q -мерное семейство получается просто выбором $a \in H^1(\mathcal{O})$, ограничением a на $H^1(\mathcal{O}_{C_t})$ для каждого t и отображением этого элемента в точку на J_t посредством указанного выше отождествления.

ЛЕКЦИЯ 3

Предсхемы и связанные с ними „обункторы точек“

Мы напомним сначала основные определения и результаты из теории предсхем.

1°. Предсхемы, подобно всем геометрическим объектам с дополнительной структурой, представляют собой топологические пространства X , снабженные пучком колец \mathcal{O}_X (или \mathcal{O}), слои которого являются локальными кольцами. Их характерным свойством является наличие таких открытых покрытий $\{U_i\}$, что $(U_i, \mathcal{O}|_{U_i})$ изоморфно при всех i

одной из стандартных предсхем вида

$$X = \text{Spec}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{а) множество, точками которого являются простые идеалы } \mathfrak{p} \subset A; \\ \text{б) оно топологизируется заданием базиса открытых множеств:} \\ \quad X_f = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\}, \quad f \in A; \\ \text{в) его структурный пучок определяется тем, что} \\ \quad \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = A_{(f)}, \end{array} \right.$$

где A — любое коммутативное кольцо с единицей.

Понятие предсхемы как пространства, окольцованных пучком локальных колец, выглядит очень „неклассическим“. Во-первых, в предсхемах много незамкнутых точек. Мы говорим, что замкнутое подмножество Z в предсхеме X неприводимо, если оно не является объединением двух своих собственных замкнутых подмножеств. При этом для любого неприводимого подмножества Z в X существует одна и только одна точка $z \in Z$, такая, что Z есть замыкание z . Эта точка z называется *общей точкой* множества Z . Так как для нётерова кольца A замкнутые подмножества в $\text{Spec}(A)$ удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей [условию минимальности — *Ред.*], то такие схемы, как $\text{Spec}(A)$, имеют, вообще говоря, много неприводимых замкнутых подмножеств и, следовательно, много незамкнутых точек. В том случае, когда все локальные кольца в \mathcal{O}_X нётеровы, можно ввести численную меру незамкнутости точек:

$$\text{codim } x = \text{размерность Крулля кольца } \mathcal{O}_x$$

и, следовательно, меру величины неприводимых подмножеств:

$$\text{codim } Z = \text{коразмерность общей точки из } Z.$$

Эти понятия обладают хорошими свойствами: если $Z_1 \subset Z_2$, $Z_1 \neq Z_2$ — два замкнутых неприводимых подмножества

с общими точками соответственно z_1 и z_2 (т. е. z_1 лежит в замыкании z_2 , но не наоборот), то

$$\operatorname{codim} Z_1 > \operatorname{codim} Z_2,$$

$$\operatorname{codim} z_1 > \operatorname{codim} z_2.$$

(Для доказательства надо заметить, что \mathcal{O}_{z_2} есть локализация $(\mathcal{O}_{z_1})_{\mathfrak{p}}$ относительно простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{z_1}$, причём идеал \mathfrak{p} не максимален.)

Следующее простое свойство, сформулированное в терминах, входящих в определение любых локально окольцовых пространств, выделяет предсхемы из большинства других локально окольцовых пространств.

Предложение 1. Пусть X — локально окольцованное пространство, $x \in X$, и \mathcal{O}_x — локальное кольцо в точке x . Пусть

$$S_x = \{y \in X \mid x \text{ принадлежит замыканию } y\}.$$

Тогда, если X — предсхема, то S_x с индуцированной в нем топологией и пучком колец изоморфно $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$.

(Доказательство: свести к случаю аффинного X , в котором все ясно.)

Если даже не обращать внимания на незамкнутые точки, то предсхемы останутся очень нехаусдорфовыми объектами. Рассмотрим $X = \operatorname{Spec} k[T]$ — аффинную прямую над алгебраически замкнутым полем k . Простой идеал (0) дает общую точку, и при всех $a \in k$ простой идеал $(T - a)$ дает замкнутую точку $P_a \in X$. Это — все точки X и каждое открытое множество в X имеет вид

$$X = \bigcup_a P_a,$$

где a пробегает некоторое конечное множество. В частности, любые два открытых множества пересекаются.

Следует, сразу же указать еще одно неклассическое свойство предсхем. Как и на всяком локально окольцованном пространстве X , сечение $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ для открытого $U \subset X$ можно рассматривать как функцию на U .

В точке $x \in U$ ее значение принадлежит полю вычетов $\mathcal{H}(x)$ слоя \mathcal{O}_x и определяется так:

$$f(x) = \text{образ } f \text{ в } \mathcal{H}(x).$$

Может, однако, оказаться, что $f \neq 0$, хотя $f(x) = 0$ для всех x . Именно эта возможность казалась самой скандальной, когда Гротендик впервые ввел предсхемы. Предположим, что $U = \text{Spec}(A)$ и $f \in A$. В этом случае такие сечения f легко описать; а именно

Следующие утверждения равносильны:

- 1) $f(x) = 0$ при всех $x \in U$;
- 2) $f \in \mathfrak{p}$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$;
- 3) f нильпотентен (так как в A имеем

$$\overline{V(0)} = \bigcap_{\substack{\text{все} \\ \text{простые} \\ \text{идеалы}}} \mathfrak{p}.$$

2°. Пусть X и Y — предсхемы; морфизмы f из X в Y определяются как произвольные морфизмы X и Y в категории локально окольцовых пространств; иными словами, они определяются как непрерывные отображения

$$f': X \rightarrow Y$$

плюс гомоморфизмы

$$f'': \mathcal{O}_Y \rightarrow f'_*(\mathcal{O}_X).$$

индуцирующие локальные гомоморфизмы на слоях. Основной результат, позволяющий представлять эти морфизмы конкретно, дает

Теорема 1. Пусть X — произвольная предсхема и $Y = \text{Spec}(A)$. Тогда с каждым морфизмом $f: X \rightarrow Y$ можно связать гомоморфизм

$$A \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(Y, f_* \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Это устанавливает изоморфизм

$$\text{Hom}_{(\text{как предсхем})}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\text{как колец с 1})}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Следствие. Категория аффинных схем (схем типа $\text{Spec}(A)$) эквивалентна категории коммутативных колец с единицей с обращенными стрелками.

Пример. Если k — поле, то задать морфизм $f: X \rightarrow \text{Spec}(k)$ — это все равно, что превратить $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ в k -алгебру, или, локально, если X покрывается открытыми множествами $\text{Spec}(A_i)$, — превратить каждое A_i в k -алгебру, так что каждый слой \mathcal{O}_x , x имеет совершенно определенную структуру k -алгебры.

Замечание. Предположим, что $f: X \rightarrow \text{Spec } A$ соответствует гомоморфизму $\varphi: A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Отображение f , как отображение множеств, восстанавливается по φ следующим образом: пусть $x \in X$, и пусть φ_x — композиция отображений

$$A \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_x.$$

Тогда $f(x)$ соответствует простому идеалу

$$\varphi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x),$$

где $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ — максимальный идеал.

Предсхемы с более классическими свойствами характеризует следующее

Предложение-определение. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм предсхем. Тогда f называется отображением конечного типа, если верно одно из двух равносильных утверждений:

- (1) существует открытое аффинное покрытие $U_i = \text{Spec}(A_i)$ предсхемы Y , и для каждого i существует конечное открытое аффинное покрытие $V_{ij} = \text{Spec}(B_{ij})$ множества $f^{-1}(U_i)$, такое, что B_{ij} есть A_i -алгебра конечного типа для всех i, j ;
- (2) для всех открытых аффинных множеств $U = \text{Spec}(A)$ в Y множество $f^{-1}(U)$ квазикомпактно (т. е. каждое открытое покрытие его содержит конечное подпокрытие), и для каждого аффинного открытого множества $V = \text{Spec}(B)$ в $f^{-1}(U)$ кольцо B является A -алгеброй конечного типа.

Определение. Пусть k — поле. Предсхема X плюс морфизм $f: X \rightarrow \text{Spec}(k)$ называется алгебраической пред-

схемой над k , если f — морфизм конечного типа. Кроме того, в случае, когда поле k алгебраически замкнуто, мы будем называть X *предмногообразием над k* , если X неприводима и \mathcal{O}_X не имеет нильпотентных элементов (« X редуцирована»). В эквивалентной форме это можно высказать так: X покрывается открытыми аффинными множествами $\text{Spec}(A_i)$, где A_i — области целостности, лежащие в одном и том же поле K , и все простые идеалы $(0) \subset A_i$ соответствуют одной и той же точке $x \in X$ со слоем $\mathcal{O}_{x,x} = K$.

3°. Поскольку точки предсхем обладают такими странными свойствами, можно подумать, что их роль отличается от роли точек в других геометрических теориях. Так оно и есть. Естественно задать вопрос: каков *категорийный смысл точек*? В этом отношении категория предсхем проявляет существенные структурные отличия от других категорий.

Пример 1. Пусть \mathbf{C} — категория дифференцируемых многообразий. Пусть z — многообразие, состоящее из *одной* точки. Тогда для любого многообразия X

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, X) \cong X \text{ как множество.}$$

Пример 2. Пусть \mathbf{C} — категория групп. Пусть $z = Z$: для каждой группы G

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, G) \cong G \text{ как множество.}$$

Пример 3. Пусть \mathbf{C} — категория колец с 1 (и гомоморфизмами f , такими, что $f(1) = 1$). Пусть $z = Z[T]$. Тогда для любого кольца R

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, R) \cong R \text{ как множество.}$$

Это указывает на то, что в любой категории \mathbf{C} для фиксированного объекта z можно попытаться представить себе $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, X)$ как множество точек объекта X . Действительно, отображение

$$X \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(z, X)$$

продолжается до функтора из категории \mathbf{C} в категорию множеств (Sets). Однако неудовлетворительно называть

$\text{Hom}_C(z, X)$ множеством точек объекта X , если только функтор не является *строгим*, т. е. если морфизм f из X_1 в X_2 не определяется отображением множеств

$$\tilde{f}: \text{Hom}_C(z, X_1) \rightarrow \text{Hom}_C(z, X_2).$$

Пример 4. Рассмотрим категорию клеточных разбиений (Hot), в которой $\text{Hom}(X, Y)$ представляет собой множество гомотопических классов непрерывных отображений X в Y . Если z — одноточечный комплекс, то

$$\text{Hom}_{(\text{Hot})}(z, X) = \pi_0(X) \text{ (множество компонент } X\text{)},$$

и это уже *не* дает строгого функтора.

Пример 5. Пусть C — категория предсхем. Руководствуясь примерами 1 и 4, возьмем в качестве z *конечный* объект категории C : $z = \text{Spec}(\mathbf{Z})$. Множество

$$\text{Hom}_C(\text{Spec}(\mathbf{Z}), X)$$

до смешного мало и не дает точного функтора.

Гротендиц придумал остроумный способ обойти этот недостаток: нужно рассматривать не *один* объект z , а *все*: свяжем с X полное множество

$$\bigcup_z \text{Hom}_C(z, X).$$

Оно определяет естественный строгий функтор из категории C в категорию (Sets). Более того, на множество $\bigcup_z \text{Hom}_C(z, X)$ можно ввести дополнительную структуру, которая характеризует объект X . Она описывается следующими данными:

- 1) разложением $\bigcup_z \text{Hom}_C(z, X)$ на подмножества $S_z = \text{Hom}_C(z, X)$ для каждого z ;
- 2) естественными отображениями из одного S_z в другое $S_{z'}$, заданными для каждого морфизма $g: z' \rightarrow z$ в исходной категории.

Суммируя все это формально, мы приходим к следующему: с каждым X из C можно связать *функцию* h_X (контравариантный, из категории C в категорию (Sets)) следующим образом:

- (*) $h_X(z) = \text{Hom}_C(z, X)$, z — объект из C ,
 (***) $h_X(g)$ — индуцированное отображение из $\text{Hom}_C(z, X)$
 в $\text{Hom}_C(z', X)$, $g: z' \rightarrow z$ есть морфизм в C .

Функтор h_X является также объектом некоторой категории, а именно

$$\text{Funct}(C^\circ, (\text{Sets}))$$

(где Funct означает категорию функторов, C° — категорию C с морфизмами, обратными к морфизмам в C). Ясно, что если $g: X_1 \rightarrow X_2$ есть морфизм в C , то из него получается морфизм функторов $h_g: h_{X_1} \rightarrow h_{X_2}$. Все это равнозначно заданию функтора

$$h: C \rightarrow \text{Funct}(C^\circ, (\text{Sets})).$$

Предложение. Функтор h является вполне строгим, т. е. если X_1, X_2 — объекты в C , то h определяет изоморфизм

$$\text{Hom}_C(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Funct}}(h_{X_1}, h_{X_2}).$$

Доказательство. В высшей степени тривиальное¹⁾.

Отсюда следует тот важный вывод, что объект X из категории C может быть отождествлен с функтором h_X , который по существу просто является множеством с дополнительной структурой.

Примеры из алгебраической геометрии. Если X — предсхема, то морфизмы из S в X , т. е. элементы $h_X(S)$, будут называться

S-значенными точками X ,
или S-рациональными точками X .

Очень важный пример доставляет случай $S = \text{Spec}(\Omega)$, где Ω — алгебраически замкнутое поле. Тогда Ω -значные точки из X называются *геометрическими точками X*

¹⁾ Мы настоятельно рекомендуем каждому читателю, впервые знакомящемуся с предметом, провести это доказательство самостоятельно. Главное — не запутаться в стрелках. — Прим. ред.

• (относительно Ω). Полный функтор h_X есть в этом случае абсолютный функтор точек X . Не менее важен в алгебраической геометрии „относительный случай“, когда фиксируется основная предсхема S (вроде $\text{Spec}(k)$) и рассматривается „относительная категория“:

- (*) ее объектами являются предсхемы X вместе со структурными морфизмами $f : X \rightarrow S$,
- (**) ее морфизмы $g : X_1 \rightarrow X_2$ таковы, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 \\ f_1 \swarrow & & \downarrow f_2 \\ S & & \end{array}$$

(Аналогичный пример дает категория аналитических пространств, где $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$: всякий морфизм аналитических пространств должен переводить постоянные функции в постоянные функции.)

В качестве последней иллюстрации мы сопоставим два примера: пусть \mathbf{C} — категория алгебраических предсхем над k , где k — алгебраически замкнутое поле, и пусть \mathbf{C}_0 — полная подкатегория *редуцированных* алгебраических предсхем. Если $z = \text{Spec}(k)$, то „точки“ $h_X(z)$ алгебраической схемы X в точности совпадают

- 1) с замкнутыми точками схемы X ;
- 2) с k -значными точками X , определенными выше;
- 3) с „точками“ X в классическом смысле, т. е. как у Серра [2], если схема X редуцирована.

Предсхема z является даже конечным объектом в категории \mathbf{C} . Трактовка Серра становится очень простой, потому что $X \mapsto h_X(z)$ есть *строгий* функтор, если его сосредоточить на подкатегории \mathbf{C}_0 ; эти предсхемы можно представлять себе как множества k -рациональных точек. Но $X \mapsto h_X(z)$ не является строгим функтором на \mathbf{C} ввиду наличия нильпотентных элементов, поэтому на \mathbf{C} нужно рассматривать функтор h_X целиком.

ЛЕКЦИЯ 4

Использование функтора точек

1°. ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ГРОТЕНДИКА. Прежде всего условимся, что если $S = \text{Spec}(R)$, то S -значная точка предсхемы X будет называться просто R -значной точкой X ; R -значная точка — это обобщение понятия решения системы уравнений над R . В самом деле, предположим, что

$$\begin{aligned} f_1, \dots, f_m &\in \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n], \\ X &= \text{Spec}(\mathbf{Z}[T]/(f)). \end{aligned}$$

Тогда немедленно проверяется, что R -значная точка предсхемы X является в точности решением уравнений

$$f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ где } 1 \leq i \leq m, a_j \in R.$$

Интересно, что предсхема фактически определяется уже функтором своих R -значных точек, а не только большим функтором S -значных точек. Точнее говоря, пусть X — предсхема, и пусть ковариантный функтор $h_X^{(0)}$ из категории (Rings) коммутативных колец с единицей в категорию множеств (Sets) определяется равенством:

$$h_X^{(0)}(R) = h_X(\text{Spec}(R)) = \text{Hom}(\text{Spec}(R), X).$$

Рассматривая естественным образом $h_X^{(0)}$ как функтор от X , приходим к следующей теореме:

Теорема. Для любых двух предсхем X_1, X_2 имеет место изоморфизм

$$\text{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(h_{X_1}^{(0)}, h_{X_2}^{(0)}).$$

Следовательно, $h^{(0)}$ — вполне строгий функтор из категории предсхем в категорию

$$\text{Funct}((\text{Rings}), (\text{Sets})).$$

Этот результат легче проверить самому, чем проследить за формальным доказательством. Быть может, все же поучительно кратко описать, как морфизм $F: h_{X_1}^{(0)} \rightarrow h_{X_2}^{(0)}$ индуцирует морфизм $f: X_1 \rightarrow X_2$. Выберем аффинное

открытое покрытие $U_i \cong \text{Spec}(A_i)$ для X_1 . Пусть

$$L_i: \text{Spec}(A_i) \cong U_i \hookrightarrow X_1$$

— включение. Тогда L_i является A_i -значной точкой X_1 . Поэтому $F(L_i) = f_i$ представляет собой A_i -значную точку X_2 , т. е. f_i определяет

$$U_i \cong \text{Spec}(A_i) \rightarrow X_2.$$

С точностью до проверки того, что эти f_i совпадают на $U_i \cap U_j$, f_i задают морфизм f , превращающий все диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f_i} & X_2 \\ \uparrow & \nearrow f & \\ X_1 & & \end{array}$$

в коммутативные.

Проблема существования Гротендика встает, когда мы задаем себе вопрос: почему бы не отождествить предсхему X с соответствующим ей функтором $h_X^{(0)}$ и попытаться определить предсхемы как подходящие функторы

$$F: (\text{Rings}) \rightarrow (\text{Sets}).$$

Задача заключается в нахождении таких „естественных“ условий на функтор F , при которых он изоморчен некоторому функтору $h_X^{(0)}$. Вот, например, одно свойство функторов $h_X^{(0)}$, обнаруженное Гротендиком (совместность со строгим плоским спуском):

Пусть $q: A \rightarrow B$ — гомоморфизм колец, превращающий B в строго плоскую A -алгебру, т. е. такой, что

(*) Для всех идеалов $I \subset A$

$$I \otimes_A B \xrightarrow{\sim} I \cdot B \quad \text{и} \quad q^{-1}(I \cdot B) = I.$$

Обозначим через $p_1, p_2: B \rightarrow B \otimes_A B$ гомоморфизмы $\beta \rightarrow \beta \otimes 1$ и $\beta \rightarrow 1 \otimes \beta$; тогда индуцированная диаграмма множеств

$$F(A) \xrightarrow{F(q)} F(B) \xrightarrow[\substack{F(p_1) \\ F(p_2)}]{} F(B \otimes_A B)$$

точна, т. е. $F(q)$ инъективно и $\text{Im } F(q) = \{x | F(p_1)x = F(p_2)x\}$.

Этот подход к определению предсхем или объектов других категорий был использован, например, в следующих случаях:

- (а) В работах Мацусаки: теория Q -многообразий по существу является попыткой рассмотреть свойства более общих функторов F .
- (б) В работах Тэйта *глобальные* p -адические аналитические пространства определены подходящим функтором F , более богатым в „структурном отношении“, чем обычное локально окольцованные пространство.
- (в) В работах Мурре охарактеризованы функторы из (*Rings*) в (*Groups*), что дает, по-видимому, удовлетворительное решение проблемы существования Гротендика.
- (г) В работах Брауна, согласно которым в категории (*Hot*) „по существу“ все функторы определяют клеточные разбиения.

2°. **Перенесение теоретико-множественных операций в категории.** При помощи функторов h_X многие понятия теории множеств можно определить в произвольной категории C .

Случай 1. „Одна точка“. Объект X в C , который является аналогом „одной точки“, должен быть таким, чтобы его функтор удовлетворял условию

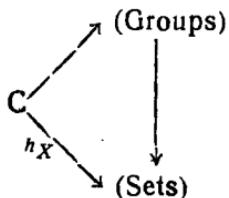
$$h_X(S) = \text{множество с одним элементом}$$

для всех S . Разумеется, такой объект X называется „ко-нечным объектом“ категории C .

Случай 2. „Групповые объекты“ (или, при помощи очевидного обобщения, „кольцевые объекты“, „объекты полей“ и т. д.). Можно сказать, что X имеет структуру группового объекта в C , если:

- (1) для всех S в C множество $h_X(S)$ снабжено групповой структурой;
- (2) для всех $S \xrightarrow{f} S'$ в C индуцированное отображение множеств $h_X(f) : h_X(S') \rightarrow h_X(S)$ является

гомоморфизмом; равносильное условие состоит в том, чтобы можно было поднять функтор h_X :



Если это понятие применяется к категории предсхем над S , то объекты, определенные таким образом, называются групповыми предсхемами над S . Если $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$, т. е. рассматривается категория *всех* предсхем, то эти объекты называются абсолютными групповыми предсхемами. Дадим два примера таких групповых предсхем.

(а) Пусть π — конечная группа. Рассмотрим функтор F , такой, что

$$F(S) = \pi$$

для всех *связных* предсхем S (все отображения тождественные из π на π). Более общо, нужно положить

$$F(S) = \left\{ \begin{array}{l} \text{непрерывные функции } \alpha \text{ из } S \text{ в } \pi; \\ \text{группа } \pi \text{ снабжена дискретной топологией} \end{array} \right\}.$$

Тогда функтор F представляется схемой

$$\pi = \text{Spec}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}) = \text{Spec}(\mathbf{Z}^n)$$

(проверьте это, пользуясь теоремой 1 из лекции 3) и π — абсолютная групповая схема, соответствующая π .

б) Обратимся к категории предсхем над $S = \text{Spec}(\mathbf{Z}/2)$, т. е. к таким предсхемам, где $0=2$ в $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Рассмотрим функтор F , определенный так:

$$F(X) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \mid s^2 = 1\}.$$

(группа относительно умножения)

Здесь F есть, так сказать, множество квадратных корней из 1 в характеристике 2; нетривиальные s такого sorta существуют, конечно, в nilпотентных кольцах! Функтор F

представляется схемой

$$\mathrm{Spec} \{(Z/2)[T]/(T^2 + 1)\}.$$

(Проверяется с помощью теоремы 1 из лекции 3.)

Случай 3. „Hom-объекты“. Предположим, что C — категория, в которой существуют произведения (см. ниже). Тогда можно попробовать поднять *множество Hom*(X, Y), заданное для двух объектов X и Y , до третьего *объекта Hom*(X, Y) в C . Один метод состоит в использовании формулы „ассоциативности“:

$$\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}(S \times X, Y).$$

Если мы условимся, что эта формула определяет изоморфизм между обеими частями как *функторами от S*, то можно определить функтор $h_{\mathrm{Hom}(X, Y)}$ с точностью до изоморфизма и, следовательно, определить объект $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ¹⁾.

3°. Расслоенные произведения и их использование. Наиболее важным категорным понятием для алгебраической геометрии является расслоенное произведение. Пусть задана диаграмма

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow q_1 & \swarrow q_2 \\ & Z & \end{array}$$

Если X, Y, Z — множества, то расслоенное произведение есть просто

$$X \underset{Z}{\times} Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, q_1(x) = q_2(y)\}.$$

Если же X, Y, Z — объекты некоторой категории C , то по крайней мере можно образовать функтор

$$F(S) = h_X(S) \underset{h_Z(S)}{\times} h_Y(S).$$

Если $h_W \cong F$, то W записывается в виде $X \underset{Z}{\times} Y$ и называется *расслоенным произведением*. Можно проверить, что

¹⁾ Он, однако, может не существовать! — Прим. ред.

найти W — это все равно, что пополнить (*) до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times_{\mathcal{Z}} Y & & \\ & p_1 \swarrow & & \searrow p_2 & \\ X & & & & F \\ & q_1 \searrow & & \swarrow q_2 & \\ & & Z & & \end{array}$$

так чтобы выполнялось универсальное свойство отображений (УСО):

Для всех объектов S и морфизмов $S \xrightarrow{f} X, S \xrightarrow{g} Y$, таких, что $q_1 \circ f = q_2 \circ g$, существует единственный морфизм $S \xrightarrow{h} X \times_{\mathcal{Z}} Y$, такой, что $f = p_1 \circ h, g = p_2 \circ h$.

Этот морфизм h мы будем записывать так: $(f, g)_Z$ или (f, g) . Обозначения p_1 и p_2 всегда будут употребляться для проекций $X \times_{\mathcal{Z}} Y$. Основным результатом является

Теорема. В категории предсхем всегда существуют расслоенные произведения (см. Гротендик [1, гл. 1, § 3]).

Это утверждение используется вместе с более точным результатом

$$\underset{\text{Spec}(C)}{\text{Spec}(A) \times \text{Spec}(B)} \cong \underset{C}{\text{Spec}(A \otimes B)}$$

и с тем обстоятельством, что если $U \subset X, V \subset Y$ — открытые множества, то $U \times_S V$ открыто в $X \times_{\mathcal{S}} Y$. Доказательство обоих результатов очень простое. Зная, что такое расслоенное произведение, мы можем определить многие операции и понятия.

Приложение 1: расширение полей определения — как в классической алгебраической геометрии. Пусть $k \subset K$ — два поля и X — алгебраическая предсхема над k . Для рассмотрения „той же“ предсхемы X над большим

полем K образуем расслоенное произведение:

$$\begin{array}{ccc} & X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(K) & (\text{удобнее писать } X_K) \\ X \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{Spec}(k) & & \text{Spec}(K) \end{array}$$

Предположим, например, что $K = \Omega$ — алгебраически замкнутое поле. В качестве приложения мы докажем такое

Предложение. Следующие множества канонически изоморфны:

- (1) геометрические точки X (относительно Ω);
- (2) $\text{Hom}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spec}(\Omega), X)$;
- (3) точки $x \in X$ вместе с k -вложениями $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow \Omega$ ($\mathcal{H}(x)$ — поле вычетов кольца \mathcal{O}_x);
- (4) $\text{Hom}_{\text{Spec}(\Omega)}(\text{Spec}(\Omega), X_\Omega)$;
- (5) замкнутые точки X_Ω .

Доказательство. Множества (1) и (2) совпадают по определению. Их совпадение с (3) следует непосредственно из определения морфизма локально окольцованного пространства. Совпадение (2) и (4) следует из определения расслоенного произведения X_Ω . Для проверки совпадения (4) и (5) мы можем предположить, что X_Ω — аффинная схема $\text{Spec}(A)$, где A — конечно порожденная алгебра над Ω . Тогда

$$\text{Hom}_{\text{Spec}(\Omega)}(\text{Spec}(\Omega), X_\Omega) = \text{Hom}_\Omega(A, \Omega),$$

и мы воспользуемся хорошо известным фактом:

(*) если $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал, то $A/\mathfrak{m} \cong \Omega$,

что и доказывает требуемое.

Приложение 2: слои морфизмов. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм предсхем и $y \in Y$ — любая точка. Пусть $\mathcal{H}(y) —$

поле вычетов для \mathcal{O}_y ; y определяет канонический морфизм

$$\text{Spec}(\mathcal{H}(y)) \xrightarrow{i_y} Y,$$

для которого $\begin{cases} \text{точка} \rightarrow y, \\ \mathcal{H}(y) \leftarrow \mathcal{O}_y \text{ (канонически).} \end{cases}$

Образуем расслоенное произведение:

$$\begin{array}{ccc} & X \times_{\mathcal{Y}} \text{Spec}(\mathcal{H}(y)) = f^{-1}(y) \text{ или } X_y & \\ X & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ f \downarrow & i_y & \text{Spec}(\mathcal{H}(y)) \\ Y & & \end{array}$$

Здесь $f^{-1}(y)$ — это схемный слой f . Аналогично, если $g: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow Y$ — геометрическая точка Y , то расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} & X \times_{\mathcal{Y}} \text{Spec}(\Omega) & \\ X & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ f \downarrow & g & \text{Spec}(\Omega) \\ Y & & \end{array}$$

называется геометрическим слоем f над данной геометрической точкой. На этом языке можно сформулировать один забавный результат.

Предложение. Пусть $k \subset K$ — два поля, и пусть $f: \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k)$ индуцируется включением k в K . Тогда

$$\{K/k \text{ сепарабельно}\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{один и, следовательно, все} \\ \text{геометрические слои } f \text{ являются} \\ \text{редуцированными схемами} \end{array} \right\}.$$

(Доказательство предоставляется читателю.)

Приложение 3: прямое определение групповой предсхемы над S .

Всякая группа — это множество X плюс три отображения:

умножение: $X \times X \rightarrow X$,

обратный элемент: $X \rightarrow X$,

единица: $\{e\} \rightarrow X$,

удовлетворяющие хорошо известным соотношениям. Следовательно, групповая предсхема X/S слагается из функтора h_X (на категории предсхем над S) и трех функторных морфизмов:

умножение: $h_X \times h_X \rightarrow h_X$,

обратный элемент: $h_X \rightarrow h_X$,

единица: $\{1\text{-функтор}\} \rightarrow h_X$,

удовлетворяющих тем же соотношениям. Но (a) $h_X \times h_X$ изоморфно $h_{X \times S}$ и (б) $\{1\text{-функтор}\}$ изоморфен h_S , где S — конечный объект в нашей категории. Поэтому X — групповая предсхема над S , если заданы три морфизма:

умножение: $X \underset{S}{\times} X \rightarrow X$;

обратный элемент: $X \rightarrow X$;

единица: $S \rightarrow X$,

удовлетворяющие тем же условиям.

Последнее замечание: если X — групповая предсхема над S , то T -значные точки X для всех T/S образуют группу, но обычные точки на X ни в каком смысле группу не образуют (даже в случае $S = \text{Spec}(\Omega)$).

Приложение 4: определение схемы. Пусть X — предсхема, и пусть $1_X: X \rightarrow X$ — тождественное отображение. Индуцированный морфизм

$$\Delta = (1_X, 1_X): X \rightarrow X \times X$$

называется диагональю.

Предложение-определение. Предсхема X есть схема, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

(1) диагональ $\Delta(X)$ замкнута в $X \times X$;

(2) для любой пары морфизмов $Y \xrightarrow{f_1} X$ подмножество $\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\}$ замкнуто в Y .

Доказательство. (2) \Rightarrow (1). Возьмем в качестве Y произведение $X \times X$, и пусть f_i есть i -я проекция p_i произведения $X \times X$ на X .

(1) \Rightarrow (2). Разложим f_i :

$$Y \xrightarrow{(f_1, f_2)} X \times X \xrightarrow{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}} X$$

и заметим, что

$$\{y \in Y \mid f_1(y) = f_2(y)\} = (f_1, f_2)^{-1}[\Delta(X)],$$

что и требовалось доказать.

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только со схемами, если обратное не оговорено специально.

Добавление к лекции 4

О представимых функторах и касательных пространствах Зарисского

В качестве приложения двух понятий — функторов и нильпотентов — мы свяжем их с геометрическим понятием — касательным пространством Зарисского. Предположим, что X — схема над полем k и $x \in X$ есть k -рациональная точка, т. е. заданный гомоморфизм $k \rightarrow \mathcal{O}_x$ индуцирует изоморфизм $k \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(x)$.

Определение. Пусть $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_x$ — максимальный идеал; двойственное векторное пространство к пространству $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ называется *касательным пространством Зарисского* T_x к схеме X в точке x .

Теперь рассмотрим следующий интересный класс схем.

Определение. Пусть V — векторное пространство над k (всегда конечной размерности); положим

$$I_V = \text{Spec}(k \oplus V),$$

где структура $k \oplus V$ определяется тем, что $V^2 = (0)$. Подчеркнем, что существуют два гомоморфизма

$$k \xleftarrow{\quad} k \oplus V$$

(именно: $a \mapsto a + 0$; $a + v \mapsto a$) и, следовательно, два морфида

$$\text{Spec}(k) \xleftarrow{j} I_V.$$

Мы будем действовать только внутри категории схем и морфизмов над $\text{Spec}(k)$. Теперь предположим, что $f: I_V \rightarrow X$ — произвольный морфизм над $\text{Spec}(k)$. Аффинная схема I_V имеет только одну точку, и ее образ при f должен быть k -рациональной точкой $x \in X$. Поэтому f определяется заданием x и локальным k -гомоморфизмом

$$\mathcal{O}_x \xrightarrow{f^*} k \oplus V.$$

Но f^* представляет собой просто линейное отображение из $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ в V , т. е. элемент из $V \otimes_k T_x$. Это дает

Предложение. Для всех схем $X/\text{Spec}(k)$ существует естественный изоморфизм между множествами

$$\text{Hom}_k(I_V, X) \text{ и } \{k\text{-рациональные точки } x \in X \text{ плюс элементы из } V \otimes_k T_x\}.$$

В частности, рассматривая k как 1-мерное векторное пространство над самим собой, можно видеть, что подмножество в $\text{Hom}_k(I_k, X)$ с заданным образом x изоморфно самому касательному пространству T_x , т. е. касательное пространство может быть восстановлено из множества I_k -значных точек X .

На самом деле даже структура векторного пространства на множестве I_k -значных точек с данным образом может быть определена непосредственно в терминах функтора точек X . Более того, существует очень общий класс контравариантных функторов F (из схем над k в (*Sets*)), для которых можно тем же путем определить касательное пространство Зарисского, несмотря на то, что они могут не быть представимыми.

Чтобы убедиться в этом, фиксируем такой функтор F . Тогда множество $F(\text{Spec}(k))$ будет множеством k -рациональных точек x для F . Фиксируем одну такую точку x .

Для всех векторных пространств V множество элементов из $F(I_V)$ с теоретико-множественным образом x может быть представлено в виде

$$F(I_V)_x = \{\xi \in F(I_V) \mid j^*(\xi) = x \text{ в } F(\text{Spec}(k))\}$$

(где $j: \text{Spec}(k) \rightarrow I_V$ — определенный выше морфизм). Я утверждаю, что для „разумных“ функторов F множество $F(I_k)_x$ имеет каноническую структуру векторного пространства и что это и есть касательное пространство к F в точке x ! Свойство, которым должен обладать F , заключается в следующем:

(*) для всех векторных пространств V_1, V_2 имеем

$$F(I_{V_1 \oplus V_2})_x \xrightarrow{\sim} F(I_{V_1})_x \times F(I_{V_2})_x$$

(где отображение задается проекциями $V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_i$, которые индуцируют морфизмы $I_{V_i} \rightarrow I_{V_1 \oplus V_2}$ и, следовательно, отображения $F(I_{V_1 \oplus V_2})_x \rightarrow F(I_{V_i})_x$).

Предположив это, фиксируем $\xi_1, \xi_2 \in F(I_k)_x$ и $\alpha, \beta \in k$. Что представляет собой $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2$? Для ответа воспользуемся диаграммой

$$F(I_k)_x \times F(I_k)_x \xleftarrow{\quad} F(I_{k \oplus k})_x \xrightarrow{[\alpha, \beta]} F(I_k)_x,$$

где отображение $[\alpha, \beta]$ индуцируется гомоморфизмом $(\gamma, \delta) \rightarrow (\alpha\gamma + \beta\delta)$ из $k \oplus k$ в k . Образ элемента $\xi_1 \times \xi_2$ по определению равен $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2$. Мы оставляем в качестве упражнения проверку того, что это превращает $F(I_k)_x$ в векторное пространство.

ЛЕКЦИЯ 5

Proj и обратимые пучки

До сих пор единственным типом схем, который мы построили, были аффинные схемы $\text{Spec}(R)$. Сейчас мы введем вторую фундаментальную конструкцию проективного спектра $\text{Proj}(R)$, которая связывает с каждым гра-

дуированным кольцом

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$$

некоторую схему, почти никогда не являющуюся аффинной.

- $X = \text{Proj}(R) =$
- a) как множество точек оно представляет собой множество однородных простых идеалов $\mathfrak{p} \subset R$, таких, что
$$\mathfrak{p} \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} R_n;$$
 - b) как топологическое пространство оно имеет в качестве базиса открытых множеств подмножества
$$X_f = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\} \text{ для } f \in R_n, n > 0,$$
 - v) как локально окольцованное пространство \hat{X} имеет структурный пучок, который задается так:
$$\begin{aligned} \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) &= [R_{(f)}]_{(0)} = \\ &= \text{подкольцо в } R_{(f)} \text{ элементов степени 0.} \end{aligned}$$

Предложение 1. Проективный спектр X является схемой (заметьте, что не просто предсхемой).

Основные пункты доказательства. При помощи отображения однородного простого идеала $\mathfrak{p} \subset R$ в $\mathfrak{p} \cdot R_{(f)} \cap [R_{(f)}]_{(0)}$ (причем $f \notin \mathfrak{p}$) доказывается, что

$$X_f \cong \text{Spec}[R_{(f)}]_{(0)};$$

при этом топологии соответствуют друг другу ввиду того, что

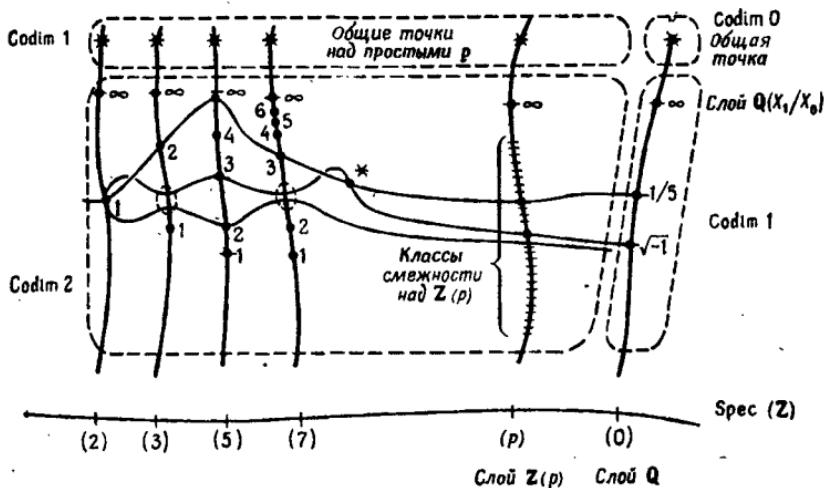
$$X_f \cap X_g = X_{fg} = \left\{ \begin{array}{l} \text{открытое подмножество в } X_f, \text{ определенное} \\ \text{условием } (g^m/f^n) \neq 0 \text{ на нем} \end{array} \right\},$$

где $f \in R_m$, $g \in R_n$.

Наиболее важной схемой Proj является

$$\mathbf{P}_n = \text{Proj } \mathbf{Z}[T_0, T_1, \dots, T_n].$$

В частности, „внешний вид“ P_1 может быть описан примерно так:



мы подразделяем точки в соответствии с размерностью их локальных колец и в соответствии с их образами в $\text{Spec}(Z)$; „нарисованы“ также замыкание $1/5$ и $\sqrt{-1}$.

Упражнение. Что представляет собой точка (*)?

Более существен следующий вопрос: каковы S -значные точки P_n , т. е. каков функтор h_{P_n} . Ответ на этот вопрос проводит нас немедленно к новому понятию:

Определение. Если X — локально окольцованное пространство, то пучок \mathcal{L} \mathcal{O}_X -модулей, для которого существует такое покрытие $\{U_i\}$ пространства X , что $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$ как \mathcal{O}_X -модули, называется *обратимым пучком*.

Скажем более конкретно, что представляет собой такой пучок \mathcal{L} : так как он локально изоморден \mathcal{O}_X , то существенная часть задания \mathcal{L} состоит в описании того, как он склеен из \mathcal{O}_X . Иначе говоря, \mathcal{L} может быть построен сначала как \mathcal{O}_X на каждом U_i , а потом склеен

из пучков \mathcal{O}_X -модулей над $U_i \cap U_j$. Но

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-модулей}}(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}, \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}) \cong \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$$

(где гомоморфизму $h \in \text{Hom}$ соответствует $h(1) \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ и элементу $f \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ соответствует гомоморфизм умножения на f). Теперь дадим следующее

Определение. Элемент $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ является *единицей*, если выполняется одно из равносильных условий:

(1) существует мультипликативно обратный элемент $s^{-1} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$;

(2) для всех $x \in U$ индуцированный элемент s_x в \mathcal{O}_x не принадлежит максимальному идеалу \mathfrak{m}_x .

Из (2) ясно, что единицы образуют подпучок \mathcal{O}_X^* , который мы будем обозначать \mathcal{O}_X^* . Из (1) ясно, что \mathcal{O}_X^* является пучком групп относительно умножения. Теперь понятно, что изоморфизмы пучка \mathcal{O}_X с самим собой таковы:

$$\begin{aligned} \text{Isom}_{\mathcal{O}_X\text{-модулей}}(\mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}, \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_j}) &\cong \\ &\cong \{\text{единицы в } \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)\}. \end{aligned}$$

Поэтому для построения \mathcal{L} следует склеивать \mathcal{O}_X с самим собой над $U_i \cap U_j$ посредством умножения на единицу s_{ij} над $U_i \cap U_j$. Так как все эти отождествления должны быть совместны на $U_i \cap U_j \cap U_k$, то имеем

$$s_{ij} \cdot s_{jk} \cdot s_{ki} = 1 \quad \text{на } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Это означает, что $\{s_{ij}\}$ образуют 1-коцикл Чеха, и мы определили элемент λ из $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Главным и притом простым результатом в этой связи является

Предложение 2. Элемент λ зависит только от \mathcal{L} , и соответствие $\mathcal{L} \rightarrow \lambda$ устанавливает изоморфизм между множеством обратимых пучков на X с точностью до изоморфизма и множеством $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Определение. $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Замечания: (1°) $\text{Pic}(X)$ — коммутативная группа; это ясно из того, что \mathcal{O}_X^* является пучком групп. Более прямое определение: если \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — два обратимых пучка, то их произведение — это $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$; если \mathcal{L}_1 задан коциклом s_{ij} по отношению к $\{U_i\}$, а \mathcal{L}_2 задан при помощи t_{ij} на том же покрытии, то $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ — это просто пучок, склеенный с помощью $s_{ij} \cdot t_{ij}$.

(2°) $\text{Pic}(X)$ — контравариантный функтор от X . Для любого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ определен гомоморфизм $\mathcal{O}_Y^* \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_X^*$ и, следовательно, индуцированный гомоморфизм групп H^1 . Вот более прямое описание: если \mathcal{L} — обратимый пучок на Y , то $f^*(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}$ — обратимый пучок на X , и если \mathcal{L} задан коциклом s_{ij} относительно $\{U_i\}$, то $f^*(\mathcal{L})$ задается коциклом $f^*(s_{ij})$ относительно $\{f^{-1}(U_i)\}$. Отметим еще, что сечения

$$s \in \Gamma(Y, \mathcal{L})$$

индуцируют сечения

$$f^*(s) \in \Gamma(X, f^*(\mathcal{L})).$$

(3°) Пусть s — сечение обратимого пучка \mathcal{L} над X . Тогда, хотя s и не имеет „значений“ в точках $x \in X$, утверждения $s(x) = 0$ или $s(x) \neq 0$ имеют точный смысл. Именно, если выбран некоторый изоморфизм между \mathcal{L}_x и \mathcal{O}_x и если s соответствует элементу $g \in \mathcal{O}_x$, то свойство элемента $g(x) \in \mathcal{H}(x)$ обращаться или не обращаться в нуль не зависит от выбора этого изоморфизма. В частности, определено подмножество в X

$$X_s = \{x \in X \mid s(x) \neq 0\},$$

которое, как легко видеть, открыто. Эти открытые множества включают как частные случаи открытые множества X_f , использованные для определения топологии в $\text{Spec}(A)$ и в $\text{Proj}(R)$ (см. ниже п. (4)).

Возвращаясь к $\text{Proj}(R)$, предположим, что

(*) R_n как R_0 -модуль натянут на $\overbrace{R_1 \otimes \dots \otimes R_1}^n$.

Тогда мы обнаружим, что $\text{Proj}(R)$ имеет дополнительную структуру:

(1) $X = \text{Proj}(R)$ покрывается множествами X_f , $f \in R_1$.

[Доказательство: если $x \in X - \cup X_f$, то x соответствует такому $\mathfrak{p} \subset R$, что все $f \in R_1$ лежат в \mathfrak{p} ; следовательно, $R_1 \subset \mathfrak{p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \subset \mathfrak{p}$, что и дает противоречие.]

(2) На $X_f \cap X_g$ элемент f/g обратим. Поэтому покрытие $\{X_f\}$ и единицы f/g определяют 1-коцикл Чеха на $\text{Proj}(R)$ и, следовательно, обратимый пучок. Он называется пучком $\mathcal{O}(1)$.

(3) Через $\mathcal{O}(n)$ обозначим n -ю тензорную степень $\mathcal{O}(1)^{\otimes n}$ пучка $\mathcal{O}(1)$; тогда существует канонический гомоморфизм:

$$R_n \xrightarrow{\Phi_n} \Gamma(X, \mathcal{O}(n)),$$

который показывает геометрический смысл градуированного кольца R .

[Построение: $\mathcal{O}(n)$ определяется коциклом $(f/g)^n$ на покрытии $\{X_f\}$. Элемент $q \in R_n$ позволяет определить сечение q/f^n пучка \mathcal{O}_X над X_f ; так как эти сечения отличаются над $X_f \cap X_g$ множителем $(f/g)^n$, они склеиваются в сечение пучка $\mathcal{O}(n)$.]

(4) Проверяется, что для $q \in R_n$ открытые множества X_q , определяющие топологию на $X = \text{Proj}(R)$, — те же, что и открытые множества $X_{\Phi_n(q)}$, определенные, как в п. (3°) выше.

Применим теперь эту новую информацию для изучения структуры функторов $\mathbf{h}_{\text{Proj}}(R)$. Всякая S -значная точка

$$S \xrightarrow{f} \text{Proj}(R)$$

схемы $\text{Proj}(R)$ позволяет построить над S индуцированный обратимый пучок $f^*(\mathcal{O}(1))$. Выражая это функционально, мы получим очень важный морфизм функторов

$$\mathbf{h}_{\text{Proj}}(R) \rightarrow \mathbf{Pic}.$$

Этот морфизм интересен с двух точек зрения: он объясняет нетривиальность функтора точек для Proj и является первым шагом к представлению функтора Pic . Хотя рассмотрение $\text{Proj}(R)$ или \mathbf{P}_n как аппроксимаций групповых схем, действительно представляющих Pic , может показаться странным, тем не менее это вполне корректно в категории (Hot) . Рассмотрим клеточное разбиение \mathbf{CP}_n (комплексноеективное n -пространство) и вложение $\mathbf{CP}_n \hookrightarrow \mathbf{CP}_\infty$; оно определяет морфизм функторов

$$\begin{array}{ccc}
 [\text{функтор, представимый}] & \rightarrow & [\text{функтор, представимый}] \\
 [\text{объектом } \mathbf{CP}_n] & & [\text{объектом } \mathbf{CP}_\infty] \\
 & & \Downarrow \\
 & & [\text{функтор } S \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})] \\
 & & \Downarrow \\
 & & \left[\begin{array}{c} \text{функтор} \\ S \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{группа классов топологи-} \\ \text{ческой эквивалентности} \\ \text{пучков прямых на } S \end{array} \right\} \end{array} \right]
 \end{array}$$

потому что $\text{CP}_\infty \cong K(\mathbf{Z}, 2)$, где $K(\mathbf{Z}, 2)$ — пространство Эйленберга — Маклейна.

Мы можем теперь дать явное описание функтора $h_{\mathbf{P}_n}$, к которому давно уже клоним. Пусть сечение

$$T_1 \in \Gamma(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}(1))$$

соответствует, как в (3), элементу T_i в R_1 -компоненте кольца $Z[T_0, \dots, T_n]$. Для всех $S \rightarrow P_n$ построим

$$\mathcal{L} = f^*(\mathcal{O}(1)),$$

$$s_i = f(T_i) \in \Gamma(S, \mathcal{L}).$$

Предложение 3. Имеет место изоморфизм функций:

$$h_{\mathbf{P}_n}(S) \xrightarrow{\sim} \{(\mathcal{L}; s_0, \dots, s_n)\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{с точностью до} \\ \text{изоморфизма} \end{array} \right\}$$

где \mathcal{Z} —обратимый пучок на S , s_0, \dots, s_n —такие сечения \mathcal{Z} , что для всех $x \in S$ существует i , при котором $s_i(x) \neq 0$.

Доказательство. Это нетрудное упражнение (см. EGA 2, § 4); морфизм $f: S \rightarrow P_n$ задается набором морфизмов $f_i: S_{s_i} \rightarrow (P_n)_{T_i}$, $0 \leq i \leq n$, которые склеиваются ведино; поскольку схема $(P_n)_{T_i}$ аффинная, можно использовать теорему 1 из лекции 3.

В качестве приятного следствия получаем элементарное определение проективного пространства над полем k ; можно даже заменить при этом k любым локальным кольцом \mathcal{O} .

Следствие. Если \mathcal{O} — локальное кольцо, то множество \mathcal{O} -значных точек P_n изоморфно множеству

$$\left\{ (a_0, \dots, a_n) \middle| \begin{array}{l} a_i \in \mathcal{O}, \text{ не все } a_i \\ \text{лежат в максималь-} \\ \text{ном идеале } \mathfrak{m} \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} (a_0, \dots, a_n) \sim \\ \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \\ \text{для всех единиц } \lambda \in \mathcal{O}^* \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Так как $\text{Spec}(\mathcal{O})$ есть единственное открытое множество в $\text{Spec}(\mathcal{O})$, содержащее замкнутую точку, на $\text{Spec}(\mathcal{O})$ существует только один обратимый пучок $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O})}$. Поскольку автоморфизмы $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{O})}$ — это в точности умножения на единицы $\lambda \in \mathcal{O}^*$, наше следствие есть частный случай предложения 3.

В заключение интересно дать обобщение этого последнего предложения на грассманнаны. Прежде чем определить грассманнан явно, мы охарактеризуем его заданием функтора.

Определение. Пучок \mathcal{E} \mathcal{O}_X -модулей называется локально свободным ранга r , если существует такое открытое покрытие $\{U_i\}$ пространства X , что

$$\mathcal{E}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}.$$

Тогда указанный функтор таков:

$$S \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{локально свободные пучки } \mathcal{E} \\ \text{ранга } r \text{ на } S \text{ плюс } (n+1) \\ \text{сечений } s_0, \dots, s_n \text{ пучка } \mathcal{E}, \\ \text{которые порождают } \mathcal{E}, \text{ т. е.} \\ \mathcal{E}_x = \sum_{i=0}^n \mathcal{O}_x \cdot s_i \text{ для всех } x \in S \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{с точностью до} \\ \text{изоморфизма} \end{array} \right\}.$$

и погружение в проективное пространство с помощью плюckerовых координат соответствует функториальному отображению

$$\begin{aligned} &\text{один элемент для каждого набора } 0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r < n \\ \{\mathcal{E}; s_0, \dots, s_n\} &\mapsto \{\wedge^{i_1} \mathcal{E}; \dots, s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_r}, \dots\} \\ \{S\text{-значные точки}\} &\mapsto \{S\text{-значные точки проек-} \\ &\text{тивного пространства}\}. \end{aligned}$$

Пусть $p_{l_1, \dots, l_r} = s_{l_1} \wedge \dots \wedge s_{l_r}$ и $\mathcal{L} = \wedge' \mathcal{E}$. Тогда сечения p_{l_1, \dots, l_r} удовлетворяют хорошо известным квадратичным соотношениям

$$(**) \sum_{\lambda=1}^{r+1} (-1)^{\lambda} p_{l_1, l_2, \dots, l_{r-1}, j_\lambda} \otimes p_{j_1, j_2, \dots, j_\lambda, \dots, j_{r+1}} = 0$$

для любых последовательностей l_1, \dots, l_{r-1} и j_1, \dots, j_{r+1} .

Теорема. Указанный выше морфизм из функтора грассmanniana в функтор проективного пространства инъективен, и его образ состоит в точности из S -значных точек проективного пространства, удовлетворяющих (**).

Доказательство. S -значную точку грассmanniana можно рассматривать как сюръективный гомоморфизм

$$\mathcal{O}_S^{n+1} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

С точностью до изоморфизма, эта точка определяется ядром гомоморфизма Φ ; так как это ядро представляет собой подпучок фиксированного пучка, то оно задается в целом, будучи заданным локально. Отсюда будет следовать требуемый результат, если мы покажем, что для любой S -значной точки проективного пространства, удовлетворяющей (**), существует такое открытое покрытие пространства S , что над каждым его множеством выбранная S -значная точка однозначно продолжается до точки грассmanniana. Поэтому мы можем перейти к открытому множеству, на котором фиксированная плюккерова координата

$$p_{l_1, l_2, \dots, l_r} \neq 0,$$

т. е. эта p порождает пучок \mathcal{L} в целом. Соотношения (**) тогда „разрешимы“, и можно проверить, что они имеют в точности вид

$$p_{j_1, \dots, j_r} = \frac{F(\dots, p_{l_1, \dots, l_k, \dots, l_r, j} \dots)}{(p_{l_1, \dots, l_r})^{N-1}},$$

где по крайней мере два индекса j не принадлежат множеству l_1, \dots, l_r , и где F — однородный многочлен степени N от $r(n+1-r)$ независимых переменных

$p_{i_1}, \dots, i_k, \dots, i_r, j$. С другой стороны, для того чтобы S -значная точка ϕ гравссманова функтора индуцировала некоторую проективную точку, для которой $p_{i_1}, \dots, i_r \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы сечения $s_{i_1} = \phi(e_{i_1}), \dots, s_{i_r} = \phi(e_{i_r})$ являлись базисом пучка \mathcal{E} . Тогда идеал ядро ϕ имеет единственный базис вида

$$\left[e_j - \sum_{k=1}^r a_{jk} e_{i_k} \right] j \in \{0, 1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_r\}$$

(где e_0, \dots, e_n — стандартный базис в \mathcal{O}_X^{n+1}). Коэффициенты a_{jk} выражаются через плюккеровы координаты так:

$$a_{jk} = (-1)^{r-k} \frac{p_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_r, j}}{p_{i_1, i_2, \dots, i_r}}.$$

Поэтому существует один и только один набор сечений $a_{jk} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, соответствующий заданным плюккеровым координатам, ч. т. д.

Следствие 1. Функтор гравссманана представим схемой

$G_{n,r} = \text{Proj } \mathbf{Z}[\dots, p_{i_1}, \dots, i_r, \dots] / (\text{квадратичные соотношения } (**)).$

Следствие 2. Открытое множество в $G_{n,r}$, где $p_{i_1}, \dots, i_r \neq 0$, изоморфно аффинному пространству размерности $r(n+1-r)$.

Добавление к лекции 5

Дальнейшее развитие теории показывает, что операция Proj в том виде, как она введена выше, часто имеет слишком специальный характер. Для того чтобы понять характер возможного обобщения, рассмотрим градуированное кольцо $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$. Предположим, что R_0 является S -алгеброй; тогда определен квазикогерентный пучок

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n, \\ \mathcal{R} &= \tilde{R}, \quad \mathcal{R}_n = \tilde{R}_n \end{aligned}$$

\mathcal{O}_X -модулей на $X = \text{Spec}(S)$. На самом деле \mathcal{R} есть *квазикогерентный градуированный пучок* \mathcal{O}_X -алгебр (длинное название простого понятия). Все дело в том, что такие пучки встречаются и на неаффинных схемах X . Пусть, скажем, $\mathcal{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}_n$ — такое образование на некоторой схеме X . Тогда для всех аффинных открытых множеств $U \subset X$

$$\Gamma(U, \mathcal{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(U, \mathcal{R}_n)$$

есть градуированное кольцо над $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Поэтому можно построить схему $\text{Proj}[\Gamma(U, \mathcal{R})]$ вместе с морфизмом

$$\pi: \text{Proj}[\Gamma(U, \mathcal{R})] \rightarrow U.$$

Можно проверить (см. EGA 2, § 3), что эти объекты канонически склеиваются в схему $\text{Proj}(\mathcal{R})$ вместе с морфизмом

$$\pi: \text{Proj}(\mathcal{R}) \rightarrow X.$$

Следующий пример особенно важен: пусть \mathcal{E} — локально свободный пучок ранга r на схеме X . Положим \mathcal{R}_n равным n -й симметрической степени пучка \mathcal{E} (как пучка \mathcal{O}_X -модулей) и $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_n$. Напишем

$$\text{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}(\mathcal{R}).$$

Эта схема обобщает пространство P_n , потому что

$$P_n = P\left[\bigoplus_{i=0}^n T_i \mathcal{O}_{\text{Spec}(Z)}\right].$$

С другой стороны, это обобщение ненамного сложнее, чем P_n , так как если пучок \mathcal{E} изоморфен свободному пучку $(\mathcal{O}_X)^r$ на открытом покрытии $\{U_i\}$ схемы X , то над U_i имеем

$$P(\mathcal{E})|_{U_i} \cong P((\mathcal{O}_X)^r)|_{U_i} \cong P_{r-1} \times U_i.$$

Это следует из того общего факта, что для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ и квазикогерентного градуированного пучка \mathcal{O}_Y -алгебр \mathcal{R} имеем (см. EGA 2, § 3.5)

$$\text{Proj}(f^*(\mathcal{R})) \cong \text{Proj}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{R}) \times X.$$

Для $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ пучок $\mathcal{O}(1)$ строится в точности так же, как раньше, и легко построить канонический гомоморфизм

$$\mathcal{E} \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}(1))$$

(здесь π — проекция $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ на базу X).

Более того, индуцированный гомоморфизм на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$

$$\pi^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}(1)$$

является сюръективным. Предположим теперь, что задан морфизм $g: S \rightarrow X$. Тогда для любого подъема h :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) & \\ h \nearrow & \downarrow \pi & \\ S & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

мы можем построить обратимый пучок $\mathcal{L} = h^*(\mathcal{O}(1))$ и сюръективный гомоморфизм

$$\varphi: g^*(\mathcal{E}) = h^*(\pi^*(\mathcal{E})) \rightarrow h^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}.$$

Несложное обобщение соответствующего результата для \mathbf{P}_n утверждает, что этим устанавливается функториальный изоморфизм между множеством S -значных точек h схемы $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, продолжающими g , и множеством пучков \mathcal{L} и гомоморфизмов φ .

ЛЕКЦИЯ 6

Свойства морфизмов и пучков

1°. Аффинный случай. Пусть $X = \text{Spec}(R)$. Напомним, что для всех R -модулей M можно определить пучок \tilde{M} \mathcal{O}_X -модулей, для которого

$$\Gamma(X_f, \tilde{M}) = M_{(f)} \text{ при всех } f \in R.$$

Это полностью определяет вполне строгий и точный функтор

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Категория} \\ R\text{-модулей} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Категория пучков} \\ \mathcal{O}_X\text{-модулей} \end{array} \right\}$$

(т. е. $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N}) \cong \text{Hom}_R(M, N)$ и последовательность $0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{N} \rightarrow P \rightarrow 0$ точна, если точна последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$).

Определение. Пучок \mathcal{F} \mathcal{O}_X -модулей называется *квазикогерентным*, если \mathcal{F} изоморфен \tilde{M} для некоторого R -модуля M .

Пример. Пусть R — кольцо дискретного нормирования ранга 1 с полем частных K . Тогда существуют лишь два непустых открытых множества в $X = \text{Spec}(R)$: все пространство X и его общая точка U . Пучок \mathcal{F} \mathcal{O}_X -модулей состоит поэтому из

- R -модуля $A = \mathcal{F}(X)$; K -векторного пространства $B = \mathcal{F}(U)$;
- гомоморфизма $A \rightarrow B$ над кольцом R .

Пучок \mathcal{F} квазикогерентен тогда и только тогда, когда

$$B \cong A \otimes_R K.$$

Теорема 1. Если X аффинно и \mathcal{F} квазикогерентен, то

- \mathcal{F} порожден как \mathcal{O}_X -модуль своими сечениями $\Gamma(X, \mathcal{F})$;
- $H^i(X, \mathcal{F}) = (0)$, если $i > 0$.

Мы можем теперь обобщить эти понятия различными способами.

Определение. Пусть X — схема. Пучок \mathcal{F} \mathcal{O}_X -модулей называется *квазикогерентным*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

- (1) существует покрытие $\{U_i\}$ схемы X аффинными открытыми множествами, такое, что пучки $\mathcal{F}|_{U_i}$ квазикогерентны;
- (2) для любого открытого аффинного множества $U \subset X$ пучок $\mathcal{F}|_U$ квазикогерентен.

Очень полезное применение этого понятия содержится в следующем утверждении:

Предложение-определение. Пусть X — схема. Замкнутая подсхема $Y \subset X$ — это локально окольцованное пространство Y , базисное топологическое простран-

ство которого представляет собой замкнутое подмножество в X , а пучок колец \mathcal{O}_Y является факторпучком пучка \mathcal{O}_X , т. е. имеет место точная последовательность: $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ (\mathcal{J} — пучок идеалов в \mathcal{O}_X) при условии, что или \mathcal{J} квазикогерентен, или, что эквивалентно, Y является схемой.

Тот факт, что если Y — схема, то пучок \mathcal{J} квазикогерентен, вытекает из следующего результата:

Предложение 2. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ есть квазикомпактный морфизм схем (т. е. если $U \subset Y$ открыто и аффинно, то $f^{-1}(U)$ допускает конечное открытое аффинное покрытие). Тогда, если \mathcal{F} — квазикогерентный пучок на X , то все пучки $R^i f_*(\mathcal{F})$ квазикогерентны на Y .

Из приведенного выше определения следует, что замкнутые подсхемы в $X = \text{Spec}(R)$ — это схемы вида $Y = \text{Spec}(R/I)$, где $I \subset R$ — идеал. Мы дадим также следующее

Определение. Если $Y \xrightarrow{f} X$ — изоморфизм Y и некоторой замкнутой подсхемы в X , то f называется замкнутым погружением.

Определение. Пусть X — схема. Подсхемой $Y \subset X$ называется замкнутая подсхема открытого множества $U \subset X$. Погружение $Y \xrightarrow{f} X$ — это изоморфизм Y и некоторой подсхемы в X .

Пример. Одной из наиболее важных подсхем схемы X является X_{red} („ X редуцированная“). Как замкнутое подмножество, $X_{\text{red}} = X$, но ее определяющий пучок идеалов \mathcal{J} представляет собой подпучок

$$\Gamma(U, \mathcal{J}) =$$

$$= \left\{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \begin{array}{l} s(x) = 0 \text{ при всех } x \in U \text{ или (эквивалентно)} \\ s(x) \in \mathcal{O}_X \text{ нильпотентен при всех } x \in U \end{array} \right\}.$$

Можно проверить, что если $U = \text{Spec}(R)$, то $\mathcal{J}|_U$ является пучком \mathcal{I} , где

$$\mathcal{I} = \left\{ a \in R \mid \begin{array}{l} a \in \text{каждому простому идеалу } \mathfrak{p} \\ \text{или (эквивалентно) } a \text{ — нильпотент} \end{array} \right\}.$$

Поэтому \mathcal{J} квазикогерентен (ср. лекция 3, 1^о).

Приведем другое обобщение понятия „аффинный“:

Определение. Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется *аффинным*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

(1) существует такое аффинное открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы Y , что $f^{-1}(U_i)$ аффинно для всех i ;

(2) для любого аффинного открытого множества $V \subset Y$ прообраз $f^{-1}(V)$ является аффинным.

Следствие из теоремы 1. Если $X \xrightarrow{f} Y$ — аффинный морфизм и пучок \mathcal{O}_X -модулей \mathcal{F} квазикогерентен, то

(А) канонический гомоморфизм

$$f^*(f_*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{F}$$

сюръективен;

(Б) $R^i f_*(\mathcal{F}) = (0)$ для $i > 0$.

Понятия расслоенного произведения и аффинного морфизма связаны между собой простым, но важным результатом.

Предложение 3. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — аффинный морфизм, и пусть $Y' \xrightarrow{g} Y$ — произвольный морфизм. Мы будем писать X' вместо $X \times_Y Y'$ и обозначать морфизмы так:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Тогда f' — аффинный морфизм и, если \mathcal{F} — квазикогерентный пучок на X , то

$$g^* f_*(\mathcal{F}) \underset{\text{(канонически)}}{\cong} f'_* g'^* (\mathcal{F}).$$

2°. Определим несколько новых понятий, добавляя условия конечности.

Определение. Схема X называется *нётеровой*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

(1) существует *конечное* открытое аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы X , такое, что кольцо $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ нётерово;

(2) X квазикомпактна, и для всех открытых аффинных $U \subset X$ кольцо $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ нётерово;

(3) упорядоченное множество замкнутых подсхем X удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

Определение. Квазикогерентный пучок \mathcal{F} на нётеровой схеме X называется *когерентным*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

(1) существует такое аффинное открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы X , что $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ является $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ -модулем *конечного типа*,

(2) то же для всех аффинных открытых подмножеств $U \subset X$.

Замечание. Квазикогерентные подпучки и факторпучки когерентных пучков когерентны; \mathcal{O}_X когерентен; если слой \mathcal{F}_x когерентного пучка \mathcal{F} в точке x есть (0) , то $\mathcal{F} \cong (0)$ в некоторой окрестности x .

Определение. Аффинный морфизм $X \xrightarrow{f} Y$, где схема Y нётерова, называется *конечным*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

(1) $f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен на Y ,

(2) f есть морфизм конечного типа (следовательно, схема X нётерова), и для всех когерентных \mathcal{F} на X пучок $f_*(\mathcal{F})$ когерентен на Y .

Предложение 4. Если морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ конечен, то для всех $y \in Y$ множество точек $f^{-1}(y)$ конечно (это то свойство, которое Гротендик называет „*квазиконечностью*“).

Доказательство. Пусть $A = f_*(\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(y)$; легко видеть, что теоретико-схемный слой $f^{-1}(y)$ — это просто $\text{Spec}(A)$. Но, так как $f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен, A является конечномерной алгеброй над $\mathcal{O}_Y(y)$, следовательно, $\text{Spec}(A)$ конечен, ч. т. д.

Основное свойство топологии нётеровой схемы состоит в том, что такие схемы являются нётеровыми топологическими пространствами, т. е. удовлетворяют условию

обрыва убывающих цепей для замкнутых подмножеств. Следовательно, каждое замкнутое подмножество есть конечное объединение неприводимых замкнутых подмножеств, которые называются его *компонентами*. Разумеется, это — глобальный топологический аналог разложения идеала в нётеровом кольце в пересечение примарных идеалов. Более тонкие свойства разложения формулируются в терминах операции „ A “.

Определение. Пусть \mathcal{F} — когерентный пучок на нётеровой схеме X . Тогда

$A(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \text{существует сечение } s \in \mathcal{F}_x, \text{ которое аннулируется идеалом } I \subset \mathcal{O}_x, \text{ примарным для максимального идеала, т. е. существуют открытая окрестность } U \text{ точки } x \text{ и } s \in \Gamma(U, \mathcal{F}), \text{ такие, что носитель } s \text{ совпадает с замыканием } x\};$

подробное обсуждение этого понятия см. в книге Бурбаки [1]. Из теоремы разложения для модулей немедленно следует, что $A(\mathcal{F})$ — конечное множество. Более того, $A(\mathcal{F})$ содержит, в частности, общую точку каждой компоненты носителя \mathcal{F} как замкнутого подмножества X , а в общем случае оно содержит также и „вложенные ассоциированные точки“. С другой стороны, если Z — замкнутое подмножество X и если мы превратим Z в замкнутую подсхему при помощи пучка *всех* функций, которые всюду на Z равны 0 („*структура редуцированной подсхемы на Z* “), то $A(\mathcal{O}_Z)$ есть в точности множество общих точек компонент подсхемы Z .

3°. Плоские пучки и их свойства.

Определение. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм схем, и пусть \mathcal{F} — пучок \mathcal{O}_X -модулей. Тогда \mathcal{F} называется *плоским* над Y , если \mathcal{F}_x есть плоский $\mathcal{O}_{f(x)}$ -модуль для всех $x \in X$; говорят, что \mathcal{F} имеет *конечную Тог-размерность* над Y , если существует такое n , что \mathcal{F}_x есть $\mathcal{O}_{f(x)}$ -модуль Тог-размерности $\leq n$ для всех $x \in X$.

Используя тот факт, что построение функторов Тог и локализации коммутируют, легко проверить, что если \mathcal{F} квазикогерентен, то

- (*) \mathcal{F} — плоский (соответственно конечной Тог-размерности) над Y тогда и только тогда, когда для всех аффинных открытых множеств $V \subset Y$, $U \subset f^{-1}(V)$ модуль $\Gamma(U, \mathcal{F})$ плоский (соответственно конечной Тог-размерности) над кольцом $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ (Тог-размерность должна быть ограниченной независимо от U и V).

Важнейшее свойство плоских пучков состоит в том, что они остаются плоскими при всех расширениях базы. Иначе говоря, пусть задана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

где $X' \cong X \times_Y X'$. Тогда для любого пучка \mathcal{O}_X -модулей \mathcal{F} ,

плоского над Y , пучок $\mathcal{O}_{X'}$ -модулей $g'^*(\mathcal{F})$ является плоским над Y' .

Априори понятие плоского пучка представляется не имеющим геометрического смысла. Однако я думаю, что это неверно. Эвристический смысл свойства „ \mathcal{F} плоский над Y “ заключается в том, что \mathcal{F} индуцирует непрерывно меняющееся семейство пучков на слоях X_y морфизма f . По-моему, лучше всего проиллюстрировать это рядом примеров.

Пример 1. Предположим, что X и Y — нётеровы схемы и пучок \mathcal{F} когерентен над X .

Если \mathcal{F} индуцирует в каком-то смысле непрерывно меняющееся семейство пучков по X_y , то уж, конечно, все точки на X , исключительные для \mathcal{F} , должны лежать над исключительными точками Y . Действительно, имеет место.

Предложение 5. *Если \mathcal{F} — плоский пучок над Y и $x \in A(\mathcal{F})$, то $f(x) \in A(\mathcal{O}_Y)$.*

Доказательство. Пусть $y = f(x)$. Напомним, что $y \in A(\mathcal{O}_Y)$ тогда и только тогда, когда:

- (*) глубина $(\mathcal{O}_y) = 0$, т. е. все необратимые в \mathcal{O}_y элементы являются делителями нуля.

Поэтому, если $f(x) \notin A(\mathcal{O}_y)$, то существует необратимый элемент $a \in \mathcal{O}_y$, такой, что

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_y \xrightarrow{a} \mathcal{O}_y$$

есть инъективное отображение. Если \mathcal{F} — плоский над Y , то инъективно отображение

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{f^*(a)} \mathcal{F}_x,$$

где $f^*(a)$ есть индуцированный необратимый элемент в \mathcal{O}_x . Но тогда умножение на $f^*(a)^n$ дает инъективное отображение \mathcal{F}_x при всех n , и, следовательно, ни один $s \in \mathcal{F}_x$ не аннулируется идеалом, примарным для \mathfrak{m}_x .

Более точный результат можно найти у Бурбаки [1, гл. IV]. Именно, если \mathcal{F} — плоский над Y , то

$$x \in A(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) f(x) \in A(Y), \\ (2) x \in A(\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}(y)), \text{ где } y = f(x). \end{cases}$$

На самом деле справедлив даже более сильный результат, использующий понятие глубины. Напомним

Определение. Пусть O — нётерово локальное кольцо, и пусть M есть O -модуль конечного типа. Тогда глубина M [$d(M)$] равна d , если имеется точно d элементов в каждой максимальной M -последовательности f_1, \dots, f_d [т. е. в каждой последовательности $f_1, \dots, f_d \in \mathfrak{m}$, такой, что

$$f_{i+1} \cdot a \in (f_1, \dots, f_i) \cdot M \Rightarrow a \in (f_1, \dots, f_i) \cdot M].$$

Заметим попутно, что, например, глубину самого O следует рассматривать как меру топологической сложности особенности в замкнутой точке спектра $\text{Spec}(O)$: если глубина максимальна, т. е. равна размерности O , то O , в некотором слабом смысле, неособенно, в то время как при глубине, намного меньшей этой размерности, особенность очень велика. Связь глубины со свойством „плоскости“ доставляет

Теорема. Для всех точек $x \in X$, для которых \mathcal{F}_x — плоский модуль над \mathcal{O}_y , $y = f(x)$, имеем

$$d(\mathcal{F}_x) = d(\mathcal{O}_y) + d(\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{H}(y))$$

$(\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{H}(y))$ есть $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ -модуль; см. EGA 4, § 6.3).

Пример 2. Предположим дополнительно, что Y — «неособая кривая», т. е. \mathcal{O}_y есть регулярное локальное кольцо размерности 0 или 1 для всех $y \in Y$. Тогда имеем обращение:

Предложение 6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{пучок } \mathcal{F} \\ \text{плоский над } Y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{для всех } x \in A(\mathcal{F}) \\ f(x) \text{ есть точка на } Y, \\ \text{где } \mathcal{O}_y \text{ размерности 0} \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Мы уже доказали \Rightarrow . Предположим теперь, что пучок \mathcal{F} не плоский над Y , т. е. для некоторой точки $x \in X$ слой \mathcal{F}_x не плоский над \mathcal{O}_y , $y = f(x)$. Тогда \mathcal{O}_y должно иметь размерность 1; пусть $(\pi) \subset \mathcal{O}_y$ — его максимальный идеал. Но \mathcal{F}_x плоский над \mathcal{O}_y тогда и только тогда, когда умножение на $f^*(\pi)$ дает инъективное отображение в \mathcal{F}_x . Поэтому существует такой элемент $s \in \mathcal{F}_x$, что $f^*(\pi) \cdot s = 0$. Пусть

$$\mathfrak{A} = \{t \in \mathcal{O}_x \mid t \cdot s = 0\},$$

и пусть φ — простой идеал в \mathcal{O}_x , минимальный среди тех простых идеалов, которые содержат \mathfrak{A} . Согласно предложению 1 из лекции 3, существует единственная точка $x' \in X$, такая, что x лежит в замыкании x' и $\mathcal{O}_{x'} = (\mathcal{O}_x)_\varphi$. Относительно заданного гомоморфизма

$$\mathcal{O}_y \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{x'}$$

прообраз максимального идеала $\mathfrak{m}_{x'}$ есть в точности \mathfrak{m}_y , так как $f^*(\pi) \in \mathfrak{A} \subset \varphi$. Согласно замечанию, сделанному к теореме 1 в лекции 3, это означает, что $f(x') = y$; рассмотрите, например, диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

Утверждение будет поэтому доказано, если мы установим, что $x' \in A(\mathcal{F})$. Но идеал $\mathfrak{A}\mathcal{O}_{x'}$ примарен для максимального идеала $\mathfrak{m}_{x'} \subset \mathcal{O}_{x'}$ и аннулирует индуцированное сечение $s' \in \mathcal{F}_{x'}$, ч. т. д.

Пример 3. Теперь рассмотрим случай *конечного* морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ (Y — нётерова схема) и когерентного пучка \mathcal{F} на X . Непрерывность \mathcal{F} на Y выражается в следующем свойстве:

Предложение 7.

$$\{\mathcal{F} \text{ плоский над } Y\} \Leftrightarrow \{f_* \mathcal{F} \text{ локально свободен над } Y\}.$$

Доказательство. Результат локален на Y , поэтому предположим, что $Y = \text{Spec}(B)$; тогда $X = \text{Spec}(A)$, где A есть B -алгебра, и притом конечного типа как B -модуль. Пусть \mathcal{F} соответствует конечному A -модулю M . Если \mathcal{F} — плоский над Y , то M плоский над B , следовательно, для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset B$ модуль $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_B B_{\mathfrak{p}}$ плоский над $B_{\mathfrak{p}}$, т. е. $f_*(\mathcal{F})_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ плоский над $\mathcal{O}_{y_{\mathfrak{p}}} = B_{\mathfrak{p}}$. Но модуль конечного типа над нётеровым локальным кольцом является плоским тогда и только тогда, когда он свободен. Поэтому существует изоморфизм \mathcal{O}_y -модулей

$$\mathcal{O}_y^n \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{F})_y.$$

Но такой гомоморфизм индуцируется гомоморфизмом

$$\mathcal{O}_Y^n \rightarrow f_*(\mathcal{F})$$

в некоторой окрестности y ; кроме того, ядро и коядро, имеющие нулевые слои в y , также обращаются в нуль в окрестности y . Поэтому $f_*(\mathcal{F})$ локально свободен.

Обратное очевидно, так как слой \mathcal{F}_x в точке $x \in X$ есть локализация $\mathcal{O}_{f(x)}$ -модуля $f_*(\mathcal{F})_{f(x)}$.

Пример 4. Будем анализировать дальше ситуацию примера 3 для случая редуцированной и неприводимой схемы Y . Пусть $y \in Y$. Слой f над y определяет диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X_y & \\ & \swarrow \quad \downarrow & \\ X & & \text{Spec } \mathcal{H}(y) \\ \downarrow & \nearrow & \\ Y & & \end{array}$$

и \mathcal{F} на X индуцирует пучок \mathcal{F}_y на X_y . Говоря алгебраически, если $Y = \text{Spec}(B)$, $X = \text{Spec}(A)$ и \mathcal{F} соответствует A -модулю M , то y появляется из простого идеала $\mathfrak{p} \subset B$, $\mathcal{H}(y)$ — поле частных для кольца B/\mathfrak{p} ,

$$X_y = \text{Spec}(A \otimes_B \mathcal{H}(y)),$$

$$\mathcal{F}_y = \overline{M \otimes_A (A \otimes_B \mathcal{H}(y))} = \overline{M \otimes_B \mathcal{H}(y)}.$$

Так как A есть конечный B -модуль, то $A \otimes_B \mathcal{H}(y)$ является конечномерной коммутативной алгеброй над $\mathcal{H}(y)$.

Заметим прежде всего, что

$$(*) \quad \Gamma(X_y, \mathcal{F}_y) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{H}(y)} \mathcal{H}(y) \cong M \otimes_B \mathcal{H}(y)$$

(см. предложение 3 этой лекции).

Предложение 8.

$[\mathcal{F}$ плоский на $Y] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [y \rightarrow \dim_{\mathcal{H}(y)} f_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}(y) — \text{постоянная функция}].$

Доказательство. Часть \Rightarrow следует из утверждения 7, потому что Y неприводима и, значит, связна. Для доказательства \Leftarrow достаточно показать, что $f_*(\mathcal{F})_y$ является свободным \mathcal{O}_y -модулем для всех $y \in Y$. Для простоты мы рассмотрим лишь случай, когда \mathcal{O}_y — область целостности.

Лемма. Пусть A — нётерова локальная область с полем вычетов k и полем частных K . Пусть M — конечный A -модуль. Тогда

$$[\dim_K M \otimes_A K = \dim_k M \otimes_A k] \Rightarrow [M — \text{свободный } A\text{-модуль}].$$

Доказательство. Заметим, что если $\mathfrak{m} \subset A$ — максимальный идеал, то $M \otimes_A k \cong M/\mathfrak{m} \cdot M$. Пусть f_1, \dots, f_n — те элементы из M , чьи образы \bar{f}_i в $M/\mathfrak{m} \cdot M$ образуют базис над k . Тогда f_i определяют гомоморфизм Φ :

$$(*) \quad 0 \rightarrow L \rightarrow A^n \xrightarrow{\Phi} M \rightarrow N \rightarrow 0$$

(L и N — соответственно ядро и коядро). Умножая тензорно на k , получаем

$$k^n \xrightarrow{\bar{\Phi}} M/\mathfrak{m} \cdot M \rightarrow N/\mathfrak{m} \cdot N \rightarrow 0.$$

Но $\bar{\phi}$ сюръективно, так как \bar{f}_i порождают $M/\mathfrak{m} \cdot N$; поэтому $N = \mathfrak{m} \cdot N$. По лемме Накаямы $N = (0)$. Умножим теперь (*) тензорно на K . Так как K плоско над A , мы получаем

$$0 \rightarrow L \otimes_A K \rightarrow K^n \rightarrow M \otimes_A K \rightarrow 0.$$

По предположению, K^n и $M \otimes_A K$ являются K -векторными пространствами размерности n . Поэтому $L \otimes_A K = (0)$, т. е. L — периодический модуль. Но поскольку $L \subset A^n$, это значит, что $L = (0)$, ч. т. д.

Пример 5. В заключение рассмотрим два вполне конкретных случая:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad Y &= \text{Spec}(k[y]), \\ X &= \text{Spec}(k[x]), \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

(k алгебраически замкнуто).

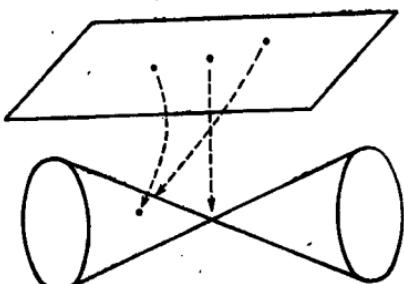


Тогда, если $\mathfrak{p} \subset k[y]$ — максимальный идеал ($y - a^2$), то

$$\begin{aligned} k[x]/\mathfrak{p} \cdot k[x] &\cong k[x]/(x - a) \oplus k[x]/(x + a), \quad a \neq 0, \\ k[x]/\mathfrak{p} \cdot k[x] &\cong k[x]/(x^2), \quad a = 0, \end{aligned}$$

и оба эти кольца представляют собой коммутативные алгебры размерности 2 над полем k . Ввиду того что это число постоянно, f — плоский морфизм. (Следовало бы еще проверить незамкнутые точки на Y .)

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad Y &= \text{Spec}(k[x_1^2, x_1x_2, x_2^2]), \\ X &= \text{Spec}(k[x_1, x_2]). \end{aligned}$$



Если $\mathfrak{P} \subset k[x_1^2, x_1x_2, x_2^2]$ — максимальный идеал $(x_1^2 - a^2, x_1x_2 - ab, x_2^2 - b^2)$, то находим

$$\begin{aligned} k[x_1, x_2]/\mathfrak{P} \cdot k[x_1, x_2] &\cong k[x_1, x_2]/(x_1 - a, x_2 - b) \oplus \\ &\oplus k[x_1, x_2]/(x_1 + a, x_2 + b), \end{aligned}$$

когда a или $b \neq 0$,

$$\begin{aligned} k[x_1, x_2]/\mathfrak{P} \cdot k[x_1, x_2] &\cong k + x_1k + x_2k \\ &(x_1^2 = x_1x_2 = x_2^2 = 0), \end{aligned}$$

когда $a = b = 0$.

В первом случае получается коммутативная алгебра размерности 2, во втором — алгебра размерности 3. Поэтому f — неплоский морфизм.

ЛЕКЦИЯ 7

Обзор теории когомологий когерентных пучков на P_n

Пусть, как и раньше, $P_n = \text{Proj } Z[T_0, \dots, T_n]$ и $\mathcal{O}(1)$ — канонический пучок на P_n ; отождествим T_0, \dots, T_n с сечениями пучка $\mathcal{O}(1)$. Для любой схемы S , чтобы упростить запись, положим

$$\mathcal{O}(1) = p_1^*(\mathcal{O}(1))$$

на $P_n \times S$ и

$$T_i = \text{индуцированное сечение } p_1^*(T_i).$$

Если \mathcal{F} — когерентный пучок на $P_n \times S$, положим

$$\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{P_n \times S}} (\mathcal{O}(1)^{\otimes m}).$$

1°. Результаты СЕРРА. Обратимся сначала к легко обозримому случаю $S = \text{Spec}(k)$, где k — поле. Зафиксируем пучок \mathcal{F} (по-прежнему когерентный) и обозначим $P_n \times \text{Spec}(k)$ через P_n, k . Имеем:

(1) $H^i(\mathbf{P}_{n,k}, \mathcal{F})$ является конечномерным векторным пространством над полем k для всех i ; оно равно (0) при $i > n$.

(2) Для всех пучков \mathcal{F} существует m_0 , такое, что если $m \geq m_0$, то $H^i(\mathbf{P}_{n,k}, \mathcal{F}(m)) = (0)$, $i > 0$, и $\mathcal{F}(m)$ порождается как $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{n,k}}$ -модуль своими глобальными сечениями.

(3) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H^i(\mathbf{P}_{n,k}, \mathcal{F}(m))$ является многочленом от m , называемым *многочленом Гильберта* пучка \mathcal{F} .

(4) Рассмотрим функтор

$$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma(\mathbf{P}_{n,k}, \mathcal{F}(m)).$$

Здесь \mathcal{F} — объект категории \mathcal{C} когерентных пучков на $\mathbf{P}_{n,k}$, а $\alpha(\mathcal{F})$ — объект категории \mathcal{C}' градуированных $k[T_0, \dots, T_n]$ -модулей конечного типа. (Если $t \in \Gamma(\mathbf{P}_{n,k}, \mathcal{F}(m))$, то $T_i \cdot t$ представляет собой сечение $t \otimes T_i$ пучка $\mathcal{F}(m) \otimes \mathcal{O}(1) \cong \mathcal{F}(m+1)$.)

Морфизм в категории \mathcal{C}' определим так:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(M, N) =$$

$$= \varinjlim_{m_0} \text{Hom}_{\substack{\text{сохраняющие} \\ \text{градуировку}}} [\bigoplus_{m > m_0} M_m; \bigoplus_{m > m_0} N_m].$$

Тогда α является эквивалентностью категорий; в частности, α точен и переводит морфизмы в морфизмы. В основе доказательства этого лежит явное построение функтора, обратного к α . Этот функтор представляет собой обобщение на градуированный случай операции \sim , применявшейся в аффинном случае. Начнем с градуированного модуля M конечного типа над $k[T_0, \dots, T_n]$. Для данного i обозначим тензорное произведение

$$M^{(i)} = M \otimes_{k[T]} k[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i}];$$

пусть $M_0^{(i)}$ — его подмодуль степени 0. Тогда $M_0^{(i)}$ является модулем конечного типа над аффинным координатным кольцом $k[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$ пространства $(\mathbf{P}_n)_{T_i}$. Можно

проверить, что пучки $\tilde{M}_0^{(l)}$ на аффинных пространствах склеиваются обычным образом; результатом является \tilde{M} , что и дает обращение a .

(5) Прежде чем продолжить обобщения, мы попытаемся описать общие принципы теории когомологий. Когомологии пучков применительно к геометрии используются как инструмент для анализа связи между локальной и глобальной структурой пространства. Именно, пусть задан какой-нибудь тип локальных данных; множество всех таких локальных данных образует пучок, и его группы когомологий представляют собой последовательность инвариантов, описывающих, насколько „скручены“ могут быть эти данные с глобальной точки зрения. Существенно здесь следующее: (а) эти группы почти всегда легко вычислимые; (б) препятствиями для проведения глобальных конструкций являются элементы таких групп когомологий.

В случае алгебраической геометрии объектами, интересными с глобальной точки зрения, являются глобальные сечения когерентных пучков. Они возникают, например, когда мы хотим определить, сколько функций существует на некоторой схеме с заданными полюсами, в какие проективные пространства может быть вложена данная схема, сколько глобальных дифференциальных форм данного типа существует на некоторой схеме, а также в вопросах, связанных с инфинитезимальными линейными формами многих нелинейных проблем существования. Но для того, чтобы вычислить векторное пространство сечений когерентного пучка \mathcal{F} на проективном пространстве P_n , надо преодолеть существенную трудность, заключающуюся в том, что функтор сечений Γ не является точным справа. Это понимали итальянские геометры, в работах которых, как мы теперь понимаем, уже появлялись, хотя и косвенно, объекты, тесно связанные с группами когомологий высокого порядка.

Следует указать, что новомодные определения когомологий через стандартные резольвенты и производные функторы, особенно в категории *всех* пучков, которые выглядят неподдающимися вычислению, являются всего лишь техническим приспособлением для упрощения чьей-нибудь общей теории. С таким же успехом можно

рассматривать когомологии когерентного пучка на P_n как сателлиты функтора Γ в категории когерентных пучков. (Выражаясь техническим языком, когомологии *стабилизированы* в этой маленькой категории.) Например, группа $H^1(P_1, \mathcal{O}_{P_1}(-2)) \cong k$ — это просто коядро в последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma(P_1, \mathcal{O}_{P_1}(-2)) \rightarrow \Gamma(P_1, \mathcal{O}_{P_1}(-1)) \rightarrow \Gamma(P_1, \mathcal{H}(x)),$$

происходящей из точной последовательности пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_1}(-2) \xrightarrow{\otimes T_1} \mathcal{O}_{P_1}(-1) \rightarrow \mathcal{H}(x) \rightarrow 0$$

на P_1 , где $\mathcal{H}(x)$ — пучок с носителем, сосредоточенным лишь в точке x , в которой $T_1 = 0$, заданный модулем, являющимся полем классов вычетов кольца \mathcal{O}_x .

Мы должны для дальнейшего напомнить следующие факты о когомологиях пучков $\mathcal{O}_{P_n}(m)$:

$$H^l(P_{n,k}, \mathcal{O}_{P_n}(m)) = \begin{cases} (0), & \text{если } 0 < l < n, \\ (0), & \text{если } l = n, m > -n - 1, \\ (0), & \text{если } l = 0, m < 0, \\ \text{векторное пространство} \\ \text{с базисом, заданным} \\ \text{одиочленами от } T_0, \dots, T_n \\ \text{степени } m, & \text{если } l = 0 \text{ и } m \geq 0. \end{cases}$$

2°. ГЛОБАЛИЗАЦИЯ ГРОТЕНДИКА

Предположим теперь, что S — некоторая нётерова схема и \mathcal{F} — снова когерентный пучок на $P_n \times S$. Пусть $p: P_n \times S \rightarrow S$ — проекция. Тогда

- (1) $R^l p_*(\mathcal{F})$ когерентен для всех l и равен (0) , если $l > n$;
- (2) для всех \mathcal{F} существует m_0 , такое, что если $m \geq m_0$, то $R^l p_*(\mathcal{F}(m)) = (0)$, $l > 0$, и $p^* p_* \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{F}(m)$ — сюръективный гомоморфизм;
- (3) рассмотрим функтор

$$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{m=0}^{\infty} p_*(\mathcal{F}(m)).$$

Здесь \mathcal{F} — объект в категории \mathcal{S} когерентных пучков $\mathcal{O}_S \times_S$ -модулей, а $a(\mathcal{F})$ — объект в категории \mathcal{S}' квазикогерентных пучков градуированных $\mathcal{O}_S[T_0, T_1, \dots, T_n]$ -модулей конечного типа, где морфизмы задаются так:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) &= \\ &= \varinjlim_{m_0} \text{Hom}_{\substack{\text{сохраняющие} \\ \text{градуировку}}} [\bigoplus_{m > m_0} \mathcal{M}_m, \bigoplus_{m > m_0} \mathcal{N}_m]. \end{aligned}$$

Тогда a есть эквивалентность категорий.

Действительно, обратный к a функтор \sim строится точно так же, как в 1°. Начнем с пучка \mathcal{M} на S . Для простоты предположим, что S — аффинная схема, скажем $S = \text{Spec}(R)$. Тогда \mathcal{M} — это не что иное, как градуированный $R[T_0, \dots, T_n]$ -модуль конечного типа. Для всех i положим

$$\mathcal{M}_0^{(i)} = \text{компоненты степени } 0 \text{ модуля } \left(\mathcal{M} \otimes_{R[T]} R \left[T_0, \dots, T_n, \frac{1}{T_i} \right] \right).$$

Тогда $\tilde{\mathcal{M}}$ склеивается из пучков $\tilde{\mathcal{M}}_0^{(i)}$ над

$$\text{Spec } R \left[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i} \right] = (\mathbb{P}_n \times S)_{T_i}.$$

3°. Связь высших прямых образов с когомологиями на слоях

Главная трудность использования результатов из 2° заключается в вопросе о связи пучков $R^i p_*(\mathcal{F})$ с когомологиями слоев проекции p . Так, пусть $s \in S$, и пусть $\mathbb{P}_{n,s}$ — слой p над s ; предположим, что \mathcal{F} индуцирует когерентный пучок \mathcal{F}_s на $\mathbb{P}_{n,s}$. Существует ли какая-либо связь между

$$R^i p_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}(s) \text{ и } H^i(\mathbb{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s).$$

Это — частный случай более общей проблемы: задано „расширение базы“ $g: X \rightarrow S$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n \times X & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}_n \times S \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

Какова связь между

$$g^*R^ip_*(\mathcal{F}) \text{ и } R^iq_*(h^*(\mathcal{F}))$$

для когерентного пучка \mathcal{F} на $\mathbf{P}_n \times S$? Для любого открытого множества $U \subset S$ имеют место гомоморфизмы

$$\begin{aligned} H^l(\mathbf{P}_n \times U, \mathcal{F}) &\rightarrow H^l(\mathbf{P}_n \times g^{-1}(U), h^*(\mathcal{F})) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(g^{-1}(U), R^iq_*(h^*(\mathcal{F}))), \end{aligned}$$

откуда находим гомоморфизмы пучков

$$R^ip_*(\mathcal{F}) \rightarrow g_*R^iq_*(h^*(\mathcal{F}))$$

и

$$g^*R^ip_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^iq_*(h^*(\mathcal{F})).$$

Если для каждого g это изоморфизм, то мы будем говорить, что R^ip_* коммутирует с расширением базы.

Прежде всего, существует простой „стабильный“ результат для того случая, когда \mathcal{F} достаточно закручен:

(1) для любого \mathcal{F} и любого $X \xrightarrow{g} S$ существует такое m_0 , что если $m \geq m_0$, то

$$g^*p_*(\mathcal{F}(m)) \xrightarrow{\sim} q_*h^*(\mathcal{F}(m))$$

(разумеется, оба множества высших прямых образов равны нулю).

Идея доказательства. По существу, это—утверждение о совместности эквивалентностей категорий a_S и a_X с тензорными производствами. Над S пучок \mathcal{F} определяется пучком градуированных $\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n]$ -модулей

$$a_S(\mathcal{F}) = \mathcal{M} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} p_*(\mathcal{F}(m)),$$

а пучок $h^*(\mathcal{F})$ над X определяется пучком градуированных $\mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n]$ -модулей:

$$a_X(h^*(\mathcal{F})) = \mathcal{N} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} q_*[h^*(\mathcal{F}(m))].$$

Нужно установить, что естественный гомоморфизм из $g^*(\mathcal{M})$ в \mathcal{N} является изоморфизмом в нашей странной категории, где любым конечным числом однородных ком-

понент морфизма можно пренебречь. Для доказательства применим функтор \sim , обратный к $a!$. Так как a_S и $a_{\tilde{S}}$ — эквивалентности категорий, достаточно доказать, что

$$\widetilde{g^*(\mathcal{M})} \cong h^*(\tilde{\mathcal{M}}).$$

Но это — непосредственное следствие из определения функтора \sim [подробнее см. EGA 2, 2.8.10, когда X, S — аффинные, и 3.5.3 в общем случае].

Однако, чтобы получить по-настоящему точные соотношения между этими высшими прямыми образами, мы должны рассмотреть случай, когда \mathcal{F} является *плоским над S* .

- (2) Предположим, что пучок \mathcal{F} — плоский над S и что для некоторого i и некоторой точки $s_0 \in S$ гомоморфизм

$$R^i p_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}(s_0) \rightarrow H^i(\mathbf{P}_{n, s_0}, \mathcal{F}_{s_0})$$

сюръективен. Тогда существует открытая окрестность U точки $s_0 \in S$, такая, что для любого расширения базы $g: X \rightarrow U$ гомоморфизм

$$g^* R^i p_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^i q_*(h^*(\mathcal{F}))$$

является изоморфицизмом (см. EGA 3, § 7.7).

- (3) При тех же предположениях, что и в (2), получается, что гомоморфизм

$$R^{i-1} p_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}(s_0) \rightarrow H^{i-1}(\mathbf{P}_{n, s_0}, \mathcal{F}_{s_0})$$

также сюръективен тогда и только тогда, когда $R^i p_*(\mathcal{F})$ есть свободный пучок \mathcal{O}_S -модулей в некоторой окрестности s_0 (см. EGA 3, § 7.8).

Следствие 1. В плоском случае, если $H^{j+1}(\mathbf{P}_{n, s_0}, \mathcal{F}_{s_0}) = (0)$, то существует открытое множество $U \subset S$, содержащее s_0 , такое, что для $g: X \rightarrow U$

$$g^* R^j p_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R^j q_*(h^*(\mathcal{F})).$$

В частности,

$$R^j p_*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{H}(s) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathbf{P}_{n, s}, \mathcal{F}_s)$$

для всех $s \in U$.

Доказательство. Используем (3) для $i = j + 1$, а затем (2) для $i = j$.

Следствие 1. $\frac{1}{2}$. В плоском случае, если $R^i p_*(\mathcal{F}) = (0)$ для всех $i \geq i_0$, то $H^i(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s) = (0)$ для всех $s \in S$ и всех $i \geq i_0$.

Доказательство. Применим следствие 1 сначала для $j = n$, чтобы доказать, что $H^n(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s) = (0)$ при всех $s \in S$, а потом то же следствие для $j = n - 1$, чтобы доказать, что $H^{n-1}(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s) = (0)$ при всех $s \in S$, и т. д.

Следствие 2. В плоском случае, если задан когерентный пучок \mathcal{E} на S и гомоморфизм φ из \mathcal{E} в $p_*(\mathcal{F})$, такой, что индуцированное отображение

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}(s) \rightarrow H^0(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s)$$

есть изоморфизм при всех s , то φ — изоморфизм, \mathcal{E} — локально свободный пучок и для всех g

$$g^* p_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} q_* h^*(\mathcal{F}).$$

Доказательство. Применим (2) для $i = 0$ и (3) для $i = 0$, а потом воспользуемся леммой Накаямы.

Следствие 3. Когерентный пучок \mathcal{F} на $\mathbf{P}_n \times S$ является плоским над S тогда и только тогда, когда существует m_0 , такое, что при $m \geq m_0$ пучок $p_*(\mathcal{F}(m))$ локально свободен. Следовательно, в этом случае почином Гильберта для \mathcal{F}_s на $\mathbf{P}_{n,s}$ локально постоянен.

Доказательство. Если \mathcal{F} — плоский пучок над S , то пусть m_0 настолько велико, что $R^i p_*(\mathcal{F}(m)) = (0)$ при $i > 0$, $m \geq m_0$. Используя следствия 1 и $\frac{1}{2}$, получаем, что $p_*(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{H}(s)$ отображается на $H^0(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}_s(m))$ для всех s , $m \geq m_0$. Тогда, согласно (3), $p_*(\mathcal{F}(m))$ локально свободен. В качестве обращения получается, что

$$\alpha(\mathcal{F}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} p_*(\mathcal{F}(m))$$

является плоским \mathcal{O}_S -модулем после опускания конечного числа компонент. Опять используя операцию \sim , обратную к α , немедленно получаем, что \mathcal{F} определяется над подходящими аффинными множествами модулями, которые строятся в 2 шага: (а) путем локализации $\alpha(\mathcal{F})$ относительно T_i и (б) перехода к подмодулю степени 0, который является прямым слагаемым. Они, конечно, плоски над \mathcal{O}_S , если $\alpha(\mathcal{F})$ — плоский; следовательно, \mathcal{F} — плоский над S (см. EGA 3, 7.9.14), ч. т. д.

Следствие 4. Проекция $p: \mathbf{P}_n \times S \rightarrow S$ топологически замкнута.

Доказательство. Пусть $Z \subset \mathbf{P}_n \times S$ — замкнутое подмножество. Пусть \mathcal{F} — структурный пучок редуцированной замкнутой подсхемы с носителем Z . В соответствии с 2° выберем m_0 таким, что отображение $p^* p_*(\mathcal{F}(m)) \rightarrow \mathcal{F}(m)$ сюръективно, если $m \geq m_0$. Я утверждаю, что

$$p(Z) = \bigcap_{m > m_0} \text{Supp}[p_*(\mathcal{F}(m))].$$

Так как сечения пучка $p_*(\mathcal{F}(m))$ порождают $\mathcal{F}(m)$, то, во-первых, $p_*(\mathcal{F}(m))_s \neq (0)$ для любого $s \notin p(Z)$. Поэтому $p(Z)$ содержится в этом пересечении. С другой стороны, предположим, что $s \notin p(Z)$; тогда $\mathcal{F}_s = (0)$. Согласно результату (1) в п. 3° , для достаточно большого m

$$p_*(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{H}(s) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{P}_{n,s}, \mathcal{F}(m)_s) = (0);$$

следовательно, по лемме Накаямы $p_*(\mathcal{F}(m))_s = (0)$.

Следствие 5.

$$R^l p_*(\mathcal{O}(m)) = \begin{cases} (0), & \text{если } 0 < l < n, \\ (0), & \text{если } l = n, \\ \text{свободный пучок} \\ \mathcal{O}_S\text{-модулей с базисом,} \\ \text{заданным одночленами} \\ \text{от } T_0, \dots, T_n \\ \text{степени } m, & \text{если } l = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Используем 3° , (2) и (3), и 2° , (5).

4°. Стоит дать один нетривиальный пример к этой теории:

(1) Пусть $n = 1$, $S = \text{Spec } k[t]$, k — алгебраически замкнутое поле, $\mathbb{P}_1 \times S = \text{Proj } k[t, T_0, T_1]$; пусть $R = k[t, T_0, T_1]$.

(2) Для всех целых m и градуированных R -модулей M положим $M(m)$ равным такому R -модулю, что

$$M(m)_k = M_{m+k};$$

(3) определим градуированный модуль M так:

$[R \oplus R \oplus R(-1)]$ по модулю элемента (T_0, T_1, t) степени 1].

Положим $\mathcal{F} = \tilde{M}$. В соответствии с его определением как модуля \mathcal{F} есть коядро в последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(-1) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где $\Psi = (T_0, T_1, t)$ (тензорное умножение на T_i отображает $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(k)$ в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(k+1)$, а умножение на обычную функцию t отображает $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(k)$ в $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times S}(k)$). Так как отображение Ψ_x , заданное тензорным умножением Ψ на $\mathcal{H}(x)$ ($x \in \mathbb{P}_1 \times S$), всегда отлично от 0, то \mathcal{F} — локально свободный пучок ранга 2, плоский над S .

(4) Пусть $0 \in S$ — точка $t = 0$. Тогда индуцированный пучок \mathcal{F}_0 определяется так:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \xrightarrow{(T_0, T_1, 0)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow 0$$

и, как легко проверить,

$$\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1).$$

С другой стороны, если $s \in S$ есть k -рациональная точка, где $t = a \neq 0$ ($a \in k$), то диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) & \rightarrow & \mathcal{F}_s \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \Psi_s & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \rightarrow 0 \end{array}$$

где φ_s задается (2×3) -матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -T_0/a \\ 0 & 1 & -T_1/a \end{pmatrix},$$

определяет изоморфизм \mathcal{F}_s с $\mathcal{O}_{P_1} \oplus \mathcal{O}_{P_1}$.

(5) Когомологически интересное утверждение состоит в том, что

$$p_*(\mathcal{F}(-1)) = (0),$$

$$H^0(P_{1,0}, \mathcal{F}_0(-1)) \cong k,$$

т. е. p_* не является эпиморфизмом H^0 вдоль слоя; это согласуется с общей теорией, потому что

$$H^1(P_{1,0}, \mathcal{F}_0(-1)) \cong k,$$

$$R^1 p_*(\mathcal{F}(-1)) \cong k_0,$$

т. е. пучок сконцентрирован в $t=0$, и слой как модуль является полем классов вычетов k_0 кольца $\mathcal{O}_{0,s}$.

[Для того чтобы это доказать, рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_Z \oplus \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

где $Z \subset P_1 \times S$ — замкнутая подсхема $T_1 = 0$, воспользовавшись результатами из 3° для подсчета $R^l p_*(\mathcal{F})$ и когомологической последовательностью.]

ЛЕКЦИЯ 8

Уплощающие разбиения

Задача, которую мы хотим рассмотреть, заключается в следующем. Пусть задан когерентный пучок \mathcal{F} на $P_n \times S$, где S — нётерова схема; для всех морфизмов $X \xrightarrow{g} S$ определен индуцированный пучок:

$$\mathcal{F}_g = (1_P \times g)^* \mathcal{F} \text{ на } P_n \times X.$$

Можно ли описать множество всех морфизмов g , таких, что пучок \mathcal{F}_g плоский над X ? Чтобы ответить на этот вопрос, дадим прежде всего

Определение. Разбиением схемы S называется конечное множество S_1, \dots, S_m локально замкнутых подсхем S , таких, что каждая точка $s \in S$ находится точно в одном подмножестве S_i .

Теорема. В описанной выше ситуации существует такое разбиение S_1, \dots, S_m схемы S , что для морфизма $X \xrightarrow{g} S$ (X — нётерова схема) пучок \mathcal{F}_g является плоским над X тогда и только тогда, когда морфизм g представляется в виде

$$X \xrightarrow{g'} \coprod_{i=1}^m S_i \hookrightarrow S.$$

Мы будем называть это разбиение уплощающим. Если оно существует, то, очевидно, оно единственno. Аналогичная проблема возникает, когда $P_n \times S$ заменяется произвольной схемой Y , собственной над S . Гротендик доказал для этого случая несколько более слабую теорему, но гораздо более глубокими методами.

1°. Рассмотрим сначала случай $n = 0$: \mathcal{F} — когерентный пучок на схеме S . Тогда \mathcal{F}_g представляет собой просто $g^*(\mathcal{F})$ и является плоским над X тогда и только тогда, когда он локально свободен над X . Для всех $s \in S$ положим

$$e(s) = \dim_{\mathcal{H}(s)} (\mathcal{F}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{H}(s)).$$

Зафиксируем на время точку s , положим $e = e(s)$ и выберем элементы $a_1, \dots, a_e \in \mathcal{F}_s$, образы которых в $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{H}(s)$ составляют базис этого векторного пространства. Тогда элементы a_i продолжаются до сечений \mathcal{F} в некоторой окрестности U_1 точки s и определяют гомоморфизм

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\Phi} \mathcal{F}$$

в U_1 . Так как a_i порождают $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{H}(s)$, то по лемме Накаямы a_i порождают слой \mathcal{F}_s . Поэтому гомоморфизм Φ сюръективен в (возможно) меньшей окрестности U_2 точки s . Переходя к еще меньшей окрестности U_3 , мы можем предположить, что $\text{Ker}(\Phi)$ порождается своими

сечениями над U_3 и мы построили точную последовательность

$$\mathcal{O}_S^f \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_S^e \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \rightarrow 0$$

в U_3 (при некотором f). Обозначим U_3 через U_s .

Заметим прежде всего, что \mathcal{F} порождается $e(s)$ сечениями всюду в U_3 , следовательно:

если $s' \in U_s$, то $e(s') \leq e(s)$,

т. е. e полунепрерывна сверху. Поэтому множество

$$Z_e = \{s \in S \mid e(s) = e\}$$

локально замкнуто. Более того, если $s' \notin U_s$, то $e(s') = e(s)$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$\mathcal{H}(s')^f \xrightarrow{\psi(s')} \mathcal{H}(s')^e$$

равен 0. Поэтому, если ψ выражается $(e \times f)$ -матрицей Ψ_{ij} из функций на U_s , то замкнутая подсхема Y_s в U_s , определенная идеалом $(\Psi_{ij})_{\text{все } i, j}$, имеет носителем $Z_e \cap U_s$. Я утверждаю, что Y_s обладает следующим свойством:

- (*) Если $X \xrightarrow{g} U_s$ — любой морфизм (X — нётерова), то $g^*(\mathcal{F})$ — локально свободный пучок ранга $e = e(s)$ тогда и только тогда, когда g можно провести через замкнутую подсхему Y_s .

Доказательство. Морфизм g проводится через Y_s тогда и только тогда, когда все функции $g^*(\Psi_{ij})$ равны 0 на X . Но, так как последовательность

$$\mathcal{O}_X^f \xrightarrow{g^*(\psi)} \mathcal{O}_X^e \xrightarrow{g^*(\varphi)} g^*(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

точна на X , это эквивалентно утверждению, что $g^*(\varphi)$ является изоморфизмом. Конечно, в свою очередь, отсюда следует, что $g^*(\mathcal{F})$ локально свободен ранга e ; обратно, пусть $g^*(\mathcal{F})$ локально свободен ранга e , и пусть \mathfrak{G} — ядро гомоморфизма $g^*(\varphi)$. Умножая тензорно на поле вычетов k в любой точке $x \in X$, находим

$$\mathrm{Tor}_1(g^*(\mathcal{F}), k) \rightarrow \mathfrak{G} \otimes k \rightarrow k^e \rightarrow g^*(\mathcal{F}) \otimes k \rightarrow 0.$$

Так как $g^*(\mathcal{F}) \otimes k$ есть k -векторное пространство размерности e , то $\mathfrak{G} \otimes k = (0)$, следовательно, по лемме Накаямы, $\mathfrak{G} = (0)$ в окрестности x . Поэтому $\mathfrak{G} = (0)$ всюду и $g^*(\varphi)$ — изоморфизм.

Заметим, что свойство (*) характеризует подсхему Y_s в некоторой окрестности любой точки из $Z_e \cap U_s$. Поэтому, если s_1 и s_2 — две точки из Z_e , то в открытом множестве $U_{s_1} \cap U_{s_2}$ эти две подсхемы Y_{s_1} и Y_{s_2} совпадают. Другими словами, подсхемы Y_s склеиваются, что позволяет снабдить локально замкнутое подмножество Z_e структурой подсхемы. Обозначим эту подсхему через Y_e . Набор таких $\{Y_e\}$ есть разбиение схемы S , и, в силу (*), немедленно получаем, что $\{Y_e\}$ является уплощающим разбиением для \mathcal{F} .

В п. 3° нам понадобится следующее замечание: мы доказали больше, чем существование уплощающего разбиения $\{Y_e\}$; мы смогли даже перенумеровать подсхемы Y_e так, что $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Y_e}$ — локально свободный пучок ранга e .

2°. Прежде чем приступить к общему случаю теоремы, приведем один изящный образчик результатов „трудной“ алгебры (см. EGA, гл. IV, § 6.9), доставляющий некоторую зацепку для начала.

Предложение. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм конечного типа нётеровых схем, и пусть \mathcal{F} — когерентный пучок на X . Предположим, что Y редуцирована и неприводима. Тогда существует непустое открытое множество $U \subset Y$, такое, что ограничение пучка \mathcal{F} на $f^{-1}(U)$ плоско над U .

Доказательство. Мы, очевидно, можем заметить Y некоторым аффинным открытым подмножеством $\text{Spec}(A)$, и так как схема X покрывается конечным числом аффинных открытых подмножеств V_i , достаточно найти одно U для каждого V_i так, чтобы в этом открытом аффинном куске \mathcal{F} был плоским над U . Поэтому пусть $X = \text{Spec}(B)$, пусть f превращает B в A -алгебру и пусть \mathcal{F} соответствует B -модулю M . Докажем следующее утверждение:

(*) Существует элемент $a \in A$, такой, что $M_a = M \otimes_A A_a$ есть свободный A_a -модуль.

Заметим сначала, что если

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

— точная последовательность B -модулей и L_a свободен над A_a , N_b свободен над A_b , то M_{ab} свободен над A_{ab} . Для того чтобы это использовать, напомним, что M , будучи B -модулем конечного типа, допускает композиционный ряд

$$(0) = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M,$$

каждый фактор которого M_{i+1}/M_i изоморфен B/φ_i для некоторого простого идеала $\varphi_i \subset B$ (Бурбаки [1, гл. 4, § 1, п. 4]). Поэтому достаточно доказать (*) для B/φ_i , и тогда все будет доказано для любого M .

Итак, мы можем предположить, что $M = B$ и B — область целостности. Пусть K — поле частных кольца A и L — поле частных кольца B . Мы докажем (*) индукцией по степени трансцендентности n поля L над полем K . Применим сначала нормализационную лемму Нётер к K -алгебре $B \otimes_A K$: из нее вытекает, что существуют n элементов $f_1, \dots, f_n \in B$, таких, что $B \otimes_A K$ — целое расширение кольца многочленов $K[f_1, \dots, f_n]$. Тогда, хотя B и не обязательно целозависимо над $A[f_1, \dots, f_n]$, существует лишь конечное число знаменателей, встречающихся в соотношениях целой зависимости для образующих B над $K[f_1, \dots, f_n]$; поэтому для некоторого $a \in A$

$$(**) \quad B_a \text{ целозависимо над } A_a[f_1, \dots, f_n].$$

Тогда B_a есть $A_a[f_1, \dots, f_n]$ -модуль конечного типа; следовательно, мы можем найти m элементов $c_1, \dots, c_m \in B_a$, порождающих свободный $A_a[f_1, \dots, f_n]$ -подмодуль в B_a , такой, что фактор есть модуль кручения

$$0 \rightarrow A_a[f_1, \dots, f_n]^m \rightarrow B_a \rightarrow D \rightarrow 0.$$

Но $A_a[f_1, \dots, f_n]^m$, очевидно, есть свободный A_a -модуль, так что достаточно доказать (*) для D . И, наконец, заменив D факторами подходящих композиционных рядов, мы сведем доказательство (*) к случаю целозависимых A -алгебр B' степени трансцендентности меньшей, чем n , над A .

3°. Нам осталось разобрать общий случай: когерентный пучок \mathcal{F} рассматривается над $P_n \times S$. Пусть p — проекция $P_n \times S$ на S ; положим

$$\mathcal{E}_m = p_*(\mathcal{F}(m)).$$

Во-первых, заметим, что

- (*) Существует конечное число локально замкнутых подмножеств Y_1, \dots, Y_k в S , таких, что $S = \bigcup Y_i$, и таких, что если Y_i придана структура редуцированной подсхемы, то пучок $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}} \mathcal{O}_{Y_i}$ плоский над Y_i .

Доказательство. Утверждение немедленно следует из 2° и условия обрыва убывающих цепей для замкнутых подмножеств из S .

Отсюда мы выведем несколько упрощающих дело фактов.

- (1) Существует *постоянное* m_0 , такое, что если $m \geq m_0$, то для *всех* $s \in S$ имеем $H^i(P_{n,s}, \mathcal{F}_s(m)) = (0)$ при $i > 0$ (обозначения такие же, как в лекции 7) и пучок $\mathcal{E}_m \otimes \mathcal{H}(s)$ изоморфен $H^0(P_{n,s}, \mathcal{F}_s(m))$.

Доказательство. Это следует из (*) вместе с утверждением (2) для базисных схем Y_i из п. 2° лекции 7, а также следствием $1 \frac{1}{2}$ и утверждением (1) для случая включения $Y_i \subset S$ из п. 3° той же лекции.

- (2) Только конечное число многочленов P_1, \dots, P_k встречаются как гильбертовы многочлены пучков \mathcal{F}_s на слоях $P_{n,s}$ над S .

Зафиксируем m_0 , как в (1), и пусть $g: X \rightarrow S$ — любое расширение базы (X — нётерова схема). Предположим, прежде всего, что пучок \mathcal{F}_g на $P_n \times X$ плоский над X . Тогда, согласно следствию 2 из п. 3° лекции 7, каноническое отображение

$$g^*(\mathcal{E}_m) \rightarrow q_*(\mathcal{F}_g(m)), \quad m \geq m_0,$$

есть изоморфизм и $g^*(\mathcal{E}_m)$ локально свободен над X (где $q: P_n \times X \rightarrow X$ — проекция). Обратно, предположим,

что $g^*(\mathcal{E}_m)$ — плоский для всех $m \geq m_0$, тогда, согласно следствию 3 из п. 3° лекции 7, пучок \mathcal{F}_g — плоский над X .

Для любых двух разбиений схемы S определено их н. о. д.-разбиение, а именно, если

$$S = \bigcup Y_i = \bigcup Z_j,$$

то S является также и объединением локально замкнутых подмножеств $W_{ij} = \text{Supp}(Y_i) \cap \text{Supp}(Z_j)$, и множество W_{ij} можно снабдить структурой схемы, взяв сумму пучков идеалов, определяющих Y_i и Z_j . Из результатов п. 1° следует, что каждый из когерентных пучков \mathcal{E}_m имеет соответствующее уплощающее разбиение. Мы только что доказали, что уплощающее разбиение для \mathcal{F} по существу совпадает с н. о. д. уплощающих разбиений для всех \mathcal{E}_m при $m \geq m_0$. Точнее, пусть $Y_e^{(m)}$ — компонента уплощающего разбиения \mathcal{E}_m , на которой \mathcal{E}_m становится локально свободным пучком ранга e . Пусть P_1, \dots, P_k — многочлены Гильберта из (2). Тогда я утверждаю, что для всех i

$$Z_i = \bigcap_{m=m_0}^{\infty} Y_{P_i(m)}^{(m)}$$

имеет смысл. Каждое конечное пересечение представляет собой, как мы только что объяснили, локально замкнутую подсхему. Но в теоретико-множественном смысле

$$\text{Supp } Z_i = \bigcap_{m=m_0}^{m_0+n} \text{Supp}(Y_{P_i(m)}^{(m)}).$$

Доказательство. Пусть s — точка, принадлежащая $Y_{P_i(m)}^{(m)}$ для $n+1$ значений m от m_0 до m_0+n . Пусть P_j — многочлен Гильберта пучка \mathcal{F}_s на $P_{n,s}$. Так как высшие когомологии пучка \mathcal{F}_s , согласно (2), обращаются в нуль, получаем

$$P_j(m) = \dim_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{H}(s) = P_i(m).$$

Но $P_i - P_j$ имеет степень не больше n и $n+1$ нулей. Следовательно, этот многочлен есть тождественный нуль, ч. т. д.

Таким образом, Z_i является пределом убывающей цепочки локально замкнутых подсхем с фиксированным носителем, т. е. замкнутых подсхем в фиксированном открытом множестве U . Ввиду свойства обрыва цепочек для замкнутых подсхем Z_i на самом деле является конечным пересечением.

Теперь ясно, что Z_1, \dots, Z_k — уплощающее разбиение для пучка \mathcal{F} над схемой S .

Очевидное усиление этого результата заключается в следующем:

Следствие. Пусть $Y \xrightarrow{f} S$ — морфизм, который может быть разложен так:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & P_n \times S \\ & \searrow f & \downarrow p_1 \\ & & S \end{array}$$

где i — замкнутое погружение. Пусть \mathcal{F} — когерентный пучок на Y ; тогда \mathcal{F} определяет некоторое уплощающее разбиение $\{Z_i\}$ на S .

Другое важное следствие, которое получается при помощи нашего метода доказательства: разбиение $\{Z_i\}$ можно занумеровать многочленами Гильберта P_i , так, что

- (1) индуцированный пучок $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{Z_i}$ имеет многочленом Гильберта P_i на $P_n \times Z_i$;
- (2) если $i \neq j$, то $P_i \neq P_j$.

ЛЕКЦИЯ 9

Дивизоры Картье

1°. Пусть X — нётерова схема со структурным пучком \mathcal{O}_X .

Определение-предложение. Существует единственный пучок \mathcal{K}_X (\mathcal{O}_X -модулей) на X , такой, что

для каждого аффинного открытого подмножества $U \subset X$

$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) =$ полное кольцо частных кольца $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$,

и для $U \subset V$ ограничением является гомоморфизм кольца частных.

Доказательство. Все легко сводится к следующему: пусть заданы $U = \text{Spec}(R)$ и $U_{f_i} = \text{Spec}(R_{(f_i)})$, где U_{f_i} , $1 \leq i \leq n$, образуют покрытие U , т. е. $1 \in (f_1, \dots, f_n)$. Предположим, что $a_i, b_i \in R_{(f_i)}$, b_i не является делителем нуля в $R_{(f_i)}$ и $\{a_i/b_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ согласованы на $U_i \cap U_j$, т. е. $b_j a_i - a_j b_i$ равно 0 в $R_{(f_i f_j)}$. Тогда мы должны найти такие $\alpha, \beta \in R$, чтобы β не являлся делителем нуля в R и чтобы $\alpha b_i - \beta a_i$ обращался в 0 в $R_{(f_i)}$.

- (1) Умножая a_i и b_i на f_i^N (для $N \gg 0$ и всех i), мы можем предположить, что все элементы a_i, b_i лежат в R и что $a_i b_j = a_j b_i$ в R .
- (2) Положим $\mathfrak{A} = \{\beta \in R \mid \beta a_i \in \text{идеалу } (b_i) \text{ в } R_{(f_i)} \text{ для всех } i\}$.

Тогда можно проверить, что $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{A}$. Пусть теперь $c \in R$ и $c \cdot \mathfrak{A} = (0)$. Тогда $c \cdot b_i = 0$ при всех i . Но b_i не является делителем нуля в $R_{(f_i)}$, так что c должно переходить в 0 в $R_{(f_i)}$, т. е. $f_i^N \cdot c = 0$. Так как $1 \in (f_1, \dots, f_n)$, то это означает, что $c = 0$.

- (3) Но так как R — нётерово кольцо, любое множество \mathfrak{A} с этим свойством содержит элемент β , не являющийся делителем нуля. Отсюда получается, что на самом деле $\beta a_i/b_i$ является сечением пучка \mathcal{O}_X над U , следовательно, $\beta \cdot a_i/b_j = a$ для некоторого $a \in R$, ч. т. д.

Заметим, что пучок \mathcal{K}_X не всегда квазикогерентен! Кроме того, можно проверить, что слои \mathcal{K}_x пучка \mathcal{K}_X являются полными кольцами частных слоев \mathcal{O}_x . Наконец,

мы можем определить \mathcal{K}_X^* как подпучок единиц пучка колец \mathcal{K}_X , т. е.

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X^*) = \text{обратимые элементы из } \Gamma(U, \mathcal{K}_X).$$

Заметим, что $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{K}_X$ и $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{K}_X^*$.

Определение. Дивизором Картье D на схеме X называется сечение над X пучка $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Более конкретно, дивизор Картье задается набором элементов

$$D_x \in \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*,$$

таких, что для каждой точки x существует открытая окрестность U в X и элемент $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}_X)$, который индуцирует D_x для всех $x \in U$. Этот элемент f будет называться локальным уравнением дивизора D в окрестности U ; f определен однозначно с точностью до обратимого элемента из \mathcal{O} . Дивизор Картье может быть определен заданием локальных уравнений $\{f_i\}$ относительно открытоего покрытия $\{U_i\}$, если f_i/f_j есть единица в $U_i \cap U_j$.

Заметим, что множество всех дивизоров Картье образует группу. Хотя групповой закон определяется умножением локальных уравнений, мы будем следовать классической традиции и записывать его аддитивно; $D_1 \pm D_2$ соответствует комбинации $f_1 \cdot f_2^{\pm 1}$ локальных уравнений.

С дивизором Картье D связан когерентный подпучок

$$\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X,$$

являющийся обратимым пучком \mathcal{O}_X -модулей. Именно, для всех x положим

$$[\mathcal{O}_X(D)]_x = f_x^{-1} \cdot \mathcal{O}_x \subset \mathcal{K}_x,$$

где f_x — элемент из \mathcal{K}_x , индуцированный локальным уравнением f для D . Ясно, что это не зависит от выбора f , и если f — локальное уравнение в U , то

$$\mathcal{O}_x|_U \xrightarrow[\text{умножение на } f^{-1}]{} \mathcal{O}_X(D)|_U$$

есть изоморфизм пучков \mathcal{O}_X -модулей.

Нетрудно проверить, что это дает в действительности изоморфизм между множеством дивизоров Картье на X

и множеством обратимых когерентных подпучков пучка \mathcal{K}_X .

Определение. Дивизор Картъе D называется *эффективным*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) его локальные уравнения f являются сечениями \mathcal{O}_X ;
- (2) $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$;
- (3) $\mathcal{O}_X(-D)$ — пучок идеалов.

Мы будем писать $D \not\simeq 0$ для обозначения эффективности дивизора D . Предположим, что D — эффективный дивизор Картъе, и пусть \mathcal{O}_D обозначает коядро

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Если взять \mathcal{O}_D в качестве структурного пучка на топологическом пространстве, являющемся носителем \mathcal{O}_D , то получится замкнутая подсхема в X ; для упрощения записи мы будем обозначать эту замкнутую подсхему также через D . Поскольку эта замкнутая подсхема определяет свой пучок идеалов $\mathcal{O}_X(-D)$, который, в свою очередь, определяет локальные уравнения f в \mathcal{O}_X (через $\mathcal{O}_X(-D) = f \cdot \mathcal{O}_X$), то дивизор Картъе D определяется замкнутой подсхемой D и опасность спутать D с соответствующей подсхемой невелика.

Кроме того, когда $D \not\simeq 0$, образ s сечения $1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ в $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ будет называться *глобальным уравнением* дивизора D . Действительно, для любого изоморфизма модулей

$$\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X$$

$\varphi(s)$ является локальным уравнением D в x . Более того, в точной последовательности $(*)$ вложение $\mathcal{O}_X(-D)$ в \mathcal{O}_X можно интерпретировать как тензорное умножение на s .

С дивизором Картъе D связаны и другие понятия.

Определение. Носителем D называется замкнутое подмножество, состоящее из тех $x \in X$, в которых 1 не является локальным уравнением.

Определение. Классом дивизоров дивизора Картъе D называется элемент из $\text{Pic}(X)$, являющийся образом D

относительно кограничного оператора

$$\begin{array}{c} H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \\ \parallel \\ \text{Pic}(X), \end{array}$$

который соответствует точной последовательности

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0.$$

Немедленно проверяется, что этот элемент из $\text{Pic}(X)$ представлен обратимым пучком $\mathcal{O}_X(D)$.

Определение. Два дивизора Картье D_1 и D_2 называются *линейно эквивалентными* ($D_1 \equiv D_2$), если выполняется одно из равносильных условий:

- (1) $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ как \mathcal{O}_X -модули;
- (2) класс дивизора D_1 совпадает с классом дивизора D_2 ;
- (3) существует элемент $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$, такой, что $f \cdot \mathcal{O}_X(D_1) = \mathcal{O}_X(D_2)$ (как подпучки пучка \mathcal{K}_X).

Определение. Пусть $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$; дивизор Картье с локальным уравнением f всюду обозначается (f) . Такие дивизоры называются *главными*, и при помощи точной последовательности $(**)$ можно увидеть, что $D_1 \equiv D_2$ тогда и только тогда, когда $D_1 = D_2 + (f)$ для некоторого $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$.

Предположим далее, что задан обратимый пучок \mathcal{L} , и рассмотрим множество всех *эффективных* дивизоров Картье D , чей класс дивизоров есть \mathcal{L} . Иными словами, рассмотрим изоморфизмы α :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} & \\ \Phi \nearrow & & \uparrow \alpha \\ \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X & & \end{array}$$

Считая, что Φ есть композиция в этой диаграмме, мы видим, что и, обратно, для каждого инъективного гомоморфизма Φ существует единственный дивизор Картье D , такой, что Φ продолжается до изоморфизма α пучков $\mathcal{O}_X(D)$ и \mathcal{L} . Дивизор D может быть определен, напри-

мер, равенством $s = \varphi(1)$ и выбором локальных изоморфизмов

$$\mathcal{L}|_{U_l} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|_{U_l}.$$

Тогда образ s в $\Gamma(U_l, \mathcal{O}_X)$ является локальным уравнением для D . Как и выше, мы называем $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ *глобальным уравнением* для D . Заметим, что инъективность φ соответствует тому, что s не является делителем нуля. Это рассуждение приводит к следующему результату:

Предложение. Для всякого обратимого пучка \mathcal{L} существует естественный изоморфизм

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{эффективные дивизоры} \\ \text{Картье } D, \text{ такие, что} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{сечения } s \in \Gamma(X, \mathcal{L}), \text{ не являющиеся} \\ \text{делителями нуля, с точностью до} \\ s \sim a \cdot s \text{ для } a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \end{array} \right\}$$

Пример. Пусть $X = \text{Proj } k[T_0, \dots, T_n]$, k — поле. Тогда, как в лекции 5, на X определен пучок $\mathcal{O}_X(1)$ и имеют место гомоморфизмы

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{векторное пространство однородных} \\ \text{форм от } T_0, \dots, T_n \text{ степени } d \end{array} \right\} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

Поэтому каждая форма $F(T_0, \dots, T_n)$ степени d представляет собой глобальное уравнение эффективного дивизора Картье $D \subset X$, такого, что $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(d)$. Дивизор D называется *гиперповерхностью* с уравнением F (или, если $d = 1$, — *гиперплоскостью*).

2°. Дивизоры Картье тесно связаны с понятием глубины. Если $z \in X$ — точка, где $d(\mathcal{O}_z) = 0$, то $\mathcal{K}_z = \mathcal{O}_z$, следовательно, $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)_z = (1)$ и каждый дивизор Картье тривиален в окрестности z . Примечательно, что дивизоры Картье определяются их уравнениями в точках глубины 1.

Предложение. Пусть X — нётерова схема, D_1, D_2 — два дивизора Картье на X . Тогда $D_1 = D_2$ в том и только в том случае, когда их образы в слоях $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)_x$ равны для всех тех точек x , где глубина $d(\mathcal{O}_x) = 1$.

Доказательство. Достаточно доказать, что образы $(D_1)_x$ и $(D_2)_x$ дивизоров D_1 и D_2 равны во всех

слоях пучка $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O})_x$. Умножая оба эти выражения на подходящий делитель 0 в \mathcal{O}_x , мы сведем это утверждение к следующему:

- (*) Пусть заданы два главных идеала I_1 и I_2 , порожденные делителями 0 в локальном нётеровом кольце O ; тогда $I_1 = I_2$, если $I_1(O)_p = I_2(O)_p$ для всех локализаций $(O)_p$ глубины 1.

Но, разумеется, $I_1 = I_2$, если $I_1(O)_p = I_2(O)_p$ для всех простых идеалов p , ассоциированных с I_1 или I_2 . И если p ассоциирован с $I_1 = (a_1)$, то в кольце $(O)_p$ элемент a_1 есть делитель 0 с тем свойством, что все необратимые элементы в кольце $(O)_p/a_1(O)_p$ являются делителями 0, т. е. $d(O_p) = 1$, ч. т. д.

Совершенно так же можно доказать, что дивизор Картье D эффективен тогда и только тогда, когда он эффективен во всех точках x , где глубина $d(\mathcal{O}_x) = 1$.

Следствие. Пусть X — нормальная нётерова схема, т. е. все локальные кольца \mathcal{O}_x целозамкнуты. Два дивизора Картье D_1, D_2 равны тогда и только тогда, когда они равны во всех точках коразмерности 1.

Доказательство. По основной теореме теории идеалов нормальное локальное кольцо размерности Крулли ≥ 2 имеет глубину ≥ 2 , ч. т. д.

Теперь до конца п. 2° мы будем предполагать, что X — неприводимая нормальная нётерова схема. Если \mathcal{K} — слой пучка \mathcal{O}_X в общей точке схемы X , то \mathcal{K}_X — это просто постоянный пучок:

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) = \mathcal{K} \quad \text{при всех } U.$$

Кстати, это доказывает немедленно, что $H^1(X, \mathcal{K}_X^*) = (0)$; следовательно, из точной последовательности (**), п. 1°, мы получаем, что каждый обратимый пучок \mathcal{L} на X является классом дивизоров некоторого дивизора Картье.

Определение. Дивизором Вейля на X называется формальная сумма

$$\sum_{i=1}^n r_i E_i,$$

где E_1, \dots, E_n — замкнутые неприводимые подмножества коразмерности 1.

Для всех точек $x \in X$ коразмерности 1 определим пучок \mathbf{Z}_x :

$$\Gamma(U, \mathbf{Z}_x) = \begin{cases} (0), & \text{если } x \notin U, \\ \mathbf{Z}, & \text{если } x \in U. \end{cases}$$

Тогда можно проверить, что дивизор Вейля — это то же самое, что сечение пучка

$$\bigoplus_{x \text{ коразмерности 1}} \mathbf{Z}_x.$$

Существует каноническая точная последовательность

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \bigoplus_{x \text{ коразмерности 1}} \mathbf{Z}_x.$$

Именно, образ элемента $f \in \Gamma(U, \mathcal{K}_X^*) = \mathcal{K}^*$ определяется так:

$$\sum_{\substack{x \in U \\ x \text{ коразмерности 1}}} \text{ord}_x(f) \cdot \{\bar{x}\},$$

где $\text{ord}_x(f)$ — порядок f в x . Другими словами, пусть $U = \text{Spec}(R)$ и $f = g/h$, где $g, h \in R$. Положим

$$(g) = \wp_1^{(s_1)} \cap \wp_2^{(s_2)} \cap \dots \cap \wp_n^{(s_n)}, \quad s_i \geq 0,$$

$$(h) = \wp_1^{(t_1)} \cap \wp_2^{(t_2)} \cap \dots \cap \wp_n^{(t_n)},$$

где \wp_i — минимальные простые идеалы и $\wp^{(t)}$ есть t -я „символическая“ степень идеала \wp [$\wp^{(t)} = R \cap (\wp \cdot R_\wp)^t$]. Тогда образом f является

$$\sum_{i=1}^n (s_i - t_i) \{ \text{замыкание точки, заданной } \wp_i \}.$$

Заметим, что если $s_i = t_i$ для всех i , то $(g) = (h)$ и, следовательно, f — обратимый элемент в R ; это показывает, что последовательность $(*)$ точна.

Объединяя $(**)$ и $(*)$, мы получаем включение

$$\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^* \subset \bigoplus_x \mathbf{Z}_x;$$

следовательно, группа дивизоров Картъе вкладывается в группу дивизоров Вейля; это естественная интерпретация

только что сформулированного следствия: если $x \in X$ имеет коразмерность 1 и (π) — максимальный идеал в \mathcal{O}_x , то слой дивизора Картье в точке x имеет локальное уравнение вида π^r , где r — некоторое вполне определенное целое число. Соответствующий дивизор Вейля является тогда суммой по x слагаемых $r \cdot [\bar{x}]$.

Предложение. Группа дивизоров Картье совпадает с группой дивизоров Вейля тогда и только тогда, когда все локальные кольца \mathcal{O}_x являются кольцами с однозначным разложением, например, если X — регулярная схема.

Доказательство. Эти два типа дивизоров совпадают тогда и только тогда, когда гомоморфизм слоев в $(**)$:

$$(\mathcal{K}_X^*)_y \rightarrow [\bigoplus_{x \text{ коразмерности } 1} \mathbb{Z}_x]_y$$

сюръективен. Но ведь это обычное отображение

$$\mathcal{K}^* \rightarrow \left\{ \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_x \\ \text{минимальные и простые}}} \mathbb{Z} \right\},$$

которое сопоставляет элементу $f = g/h$ разность порядков g и h во всех \mathfrak{p} . Оно сюръективно тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_x$ является главным идеалом, т. е. тогда и только тогда, когда \mathcal{O}_x является кольцом с однозначным разложением.

ЛЕКЦИЯ 10

Функциональные свойства эффективных дивизоров Картье

1°. Наиболее простая операция над дивизорами Картье — конструкция обратных образов. Пусть $X \xrightarrow{g} Y$ — морфизм нётеровых схем и D — эффективный дивизор Картье на Y . Тогда совершенно ясно, как определить $g^*(D)$: зафиксируем открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы Y и локальные

уравнения f_i для D в U_i , где $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$. Тогда $g^*(D)$ должен быть определен локальными уравнениями $g^*(f_i)$ в открытом покрытии $\{g^{-1}(U_i)\}$. Однако $g^*(f_i)$ может быть делителем 0, даже нулем. Лучше всего предположить, что

$$(*) \quad g(x) \notin \text{Supp}(D) \quad \text{для всех } x \in A(X).$$

Тогда $g^*(f_i)$ не является делителем 0 и $g^*(D)$ имеет смысл.

Доказательство. Предположим, что $ag^*(f_i) = 0$, где $a \in \mathcal{O}_x$ и $x \in X$. Пусть x' — общая точка некоторой компоненты носителя сечения a пучка \mathcal{O}_X , определенного в окрестности x ; мы можем считать, что

$$x' \in \text{Spec}(\mathcal{O}_x) \subset X.$$

Тогда $\mathcal{O}_{x'}$ имеет глубину 0, так как индуцированный элемент $a' \in \mathcal{O}_{x'}$ аннулируется степенью максимального идеала $\mathfrak{m}_{x'}$ (см. лекцию 8, 2°) и $a' \neq 0$. Но тогда $x' \in A(X)$ и, следовательно, $g(x') \notin \text{Supp}(D)$. Поэтому локальное уравнение f_i для D есть обратимый элемент над $g(x')$ и, таким образом, $g^*(f_i)$ обратим в x' . Значит, в $\mathcal{O}_{x'}$

$$a' = [a' \cdot g^*(f_i)] \cdot g^*(f_i)^{-1} = 0.$$

Это противоречие и дает нужный результат.

Отметим, что если g — плоский морфизм, то $(*)$ выполняется автоматически. В самом деле, при плоском g для всех точек $x \in A(X)$ имеем $g(x) \in A(Y)$ (см. лекцию 6), следовательно, $g(x)$ не принадлежит носителю никакого дивизора Картье (лекция 8, 2°).

2°. Более интересный вопрос: когда можно определить *прямой образ* $g_*(D)$ эффективного дивизора Картье D на X ? В этом пункте мы разберем „элементарный“ случай:

g — конечный и плоский морфизм.

Тогда g_* можно определить с помощью норм! Задача по существу алгебраическая, так как она локальна на Y : пусть $U = \text{Spec}(A)$ — аффинное открытое подмножество

в Y , и пусть $g^{-1}(U) = \text{Spec}(B)$. Тогда B есть A -алгебра, имеющая конечный тип как A -модуль. Более того, так как $g_*(\mathcal{O}_X)$ является локально свободным пучком на Y , то для достаточно малого U и B станет также свободным A -модулем. Тогда мы можем определить нормы:

Для любого $\beta \in B$ обозначим через $T_\beta: B \rightarrow B$ умножение на β . Пусть b_1, \dots, b_n — базис B над A ; положим

$$T_\beta(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j.$$

Тогда

$$\text{Nm}(\beta) = \det(a_{ij}).$$

Результат, конечно, не зависит от выбора базиса b_i и обладает очевидными свойствами:

$$\text{Nm}(\beta_1 \beta_2) = \text{Nm}(\beta_1) \cdot \text{Nm}(\beta_2).$$

$$\text{Nm}(\alpha) = \alpha^n, \text{ если } \alpha \in A.$$

Хотя норма не всегда представляет собой произведение β и сопряженных с ним элементов, но во всяком случае

(*) для всех β существует такое β' , что $\text{Nm}(\beta) = \beta \cdot \beta'$.

Доказательство. Пусть $P(T) = \det(T \cdot \varepsilon - T_\beta)$, где ε — тождественное отображение, — характеристический многочлен для T_β . Тогда (теорема Кэли — Гамильтона) $P(T_\beta) = 0$, следовательно, получаем $P(\beta) = P(T_\beta)(1) = 0$ или, расписывая P ,

$$\beta^n + a_1 \beta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \beta + \text{Nm}(\beta) = 0.$$

Важно также следующее утверждение:

(**) Если $\beta \in B$ не делитель 0, то $\text{Nm}(\beta)$ — не делитель 0.

Доказательство. Мы воспользуемся простым общим фактом:

Лемма А. Пусть $X \xrightarrow{\varepsilon} Y$ — конечный плоский морфизм нётеровых схем. Пусть $x \in X$. Если $g(x)$ имеет глубину 0, то и x имеет глубину 0, и обратно.

Доказательство. Если глубина $g(x)$ равна 0, то существует элемент $a \in \mathcal{O}_{g(x)}$, $a \neq 0$, аннулятором кото-

рого является $\mathfrak{m}_{g(x)}$, максимальный идеал. Так как g — плоский, $g^*: \mathcal{O}_{g(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$ — инъективно и $g^*(a) \in \mathcal{O}_x$ не равно 0. Поскольку g конечен, $\mathfrak{m}_{g(x)} \cdot \mathcal{O}_x$ есть примарный идеал для максимального идеала \mathfrak{m}_x ; так как $\mathfrak{m}_{g(x)} \cdot \mathcal{O}_x$ аннулирует $g^*(a)$, глубина x равна 0. Обратное было доказано в лекции 6.

Вернемся к B/A ; предположим, что $\text{Nm}(\beta)$ является делителем 0. Тогда существует простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, такой, что глубина $d(A_{\mathfrak{p}}) = 0$ и $\text{Nm}(\beta)$ — делитель 0 в $A_{\mathfrak{p}}$ (например, пусть $a \in \text{Nm}(\beta) = 0$, и пусть \mathfrak{p} — минимальный простой идеал, содержащий аннулятор a). Заменим A на $A_{\mathfrak{p}}$ и B на $B_{\mathfrak{p}} = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$. Тогда B — полулокальное кольцо, все локализации которого имеют глубину 0 по лемме. В этой ситуации, если β — не делитель 0, то β не принадлежит ни одному из максимальных идеалов кольца B , т. е. β обратим в B . Так как норма мультипликативна, то элемент $\text{Nm}(\beta)$ также обратим, что противоречит нашему предположению.

Чтобы применить норму к определению g_* , нам нужна

Лемма Б. Пусть $X \xrightarrow{g} Y$ — конечный морфизм нётеровых схем, и пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на X . Тогда существует открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы Y , такое, что \mathcal{L} изоморчен \mathcal{O}_X на каждом открытом множестве $g^{-1}(U_i)$.

Доказательство. Для всех $y \in Y$ рассмотрим модуль $M = g_*(\mathcal{L})_y$ над $B = g_*(\mathcal{O}_X)_y$. Так как g конечен, то B — полулокальное кольцо, и если \mathfrak{A} — его радикал, то

$$B/\mathfrak{A} \cong \bigoplus_{x \text{ над } y} \mathcal{H}(x).$$

Поэтому $M/\mathfrak{A}M$ — свободный модуль ранга 1; следовательно, M — свободный модуль ранга 1 над B (см. Бурбаки [1, гл. II, § 3, предложение 5]). Пусть μ_y — базис M ; тогда μ_y индуцируется сечением μ пучка $g_*(\mathcal{L})$ в открытой окрестности U_1 точки y . Умножение на μ определяет гомоморфизм

$$g_*(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mu} g_*(\mathcal{L})$$

над U_1 . Ядро и коядро представляют собой когерентные пучки на Y , слои которых над u равны (0) ; поэтому они нулевые в целой окрестности $U_2 \subset U_1$ точки u . Тогда в $g^{-1}(U_2)$ умножение на μ дает изоморфизм пучков \mathcal{O}_X и \mathcal{L} , ч. т. д.

В нашем случае задан эффективный дивизор Картье D на X ; по лемме существует открытое аффинное покрытие $U_i = \text{Spec}(A_i)$ схемы Y , такое, что D является главным дивизором в $g^{-1}(U_i) = \text{Spec}(B_i)$. Поэтому D определен уравнением $\beta_i \in B_i$ для всех i ; β_i не является делителем 0 . Можно проверить, что $\beta_i \beta_j^{-1}$ обратим в $\Gamma(g^{-1}(U_i \cap U_j), \mathcal{O}_X)$, следовательно, $\text{Nm}(\beta_i) \cdot \text{Nm}(\beta_j)^{-1}$ обратим в $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)$. Поэтому сечения $\text{Nm}(\beta_i)$ определяют дивизор Картье $g_*(D)$.

3°. Примечательно, что прямой образ $g_*(D)$ может быть определен в гораздо более общей ситуации: 2° — это „случай 0“ в бесконечной последовательности случаев, когда можно определить $g_*(D)$, каждый раз ценой вычисления лишнего определителя, не говоря уже обо всем остальном. Мы имеем в виду следующую ситуацию:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}_n & \times & Y & \supset & X \supset V \\ & \searrow p_1 & & \downarrow g & \downarrow g_0 \\ & & Y & \supset & U \end{array}$$

где (а) X — замкнутая подсхема в $\mathbf{P}_n \times Y$, U открыто в Y ;

(б) $V = g^{-1}(U)$, g_0 — ограничение g ;

(в) g_0 — конечный морфизм;

(г) g — морфизм конечной Тог-размерности;

(д) все точки $y \in Y$, где \mathcal{O}_y имеет глубину 0 или 1, лежат в U .

В этой ситуации имеется естественное определение $g_*(D)$ (см. Мамфорд [1], гл. 5, § 3]).

На самом деле, если g_0 — еще и плоский, то $g_*(D)$ однозначно определен требованием

$$g_*(D)|_U = g_{0,*}(D|_V).$$

4°. В этом пункте я хочу определить понятие *относительного* (эффективного) дивизора Картье. Предположим, что $X \xrightarrow{f} Y$ — плоский морфизм конечного типа нётеровых схем. Вопрос состоит в следующем: когда дивизор $D \subset X$ можно рассматривать как семейство дивизоров Картье на различных слоях f ?

Предложение-определение. Эффективный дивизор Картье $D \subset X$ называется *относительным дивизором над Y* , если выполняется одно из эквивалентных условий:

- (1) D плоский над Y ;
 - (2) для всех $x \in X$ локальное уравнение F для D в x не является делителем нуля в кольце $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathcal{H}(y)$, где $y = f(x)$;
 - (3) для всех $y \in Y$
- $$A(f^{-1}(y)) \cap \text{Supp}(D) = \emptyset.$$

Доказательство. Условия (2) и (3) эквивалентны — это очевидно. Для доказательства их эквивалентности условию (1) перейдем к алгебраическому языку, так как проблема локальна на X и Y . Тогда мы имеем плоскую A -алгебру B и элемент $F \in B$, не являющийся делителем 0. Пусть $\varphi \subset A$ — простой идеал. Поскольку алгебра B плоская над A , то $B/\varphi \cdot B$ плоская над A/φ ; поэтому все простые идеалы $\mathfrak{p} \subset B/\varphi \cdot B$, ассоциированные с (0) , ограничиваются до простых идеалов в A/φ , ассоциированных с (0) , т. е. до (0) , ибо A/φ — область целостности (это пример 1 из лекции 6). Другими словами, все простые идеалы $\mathfrak{p} \subset B$, ассоциированные с $\varphi \cdot B$, удовлетворяют соотношению $\mathfrak{p} \cap A = \varphi$. Поэтому все такие \mathfrak{p} ассоциированы с (0) в $B \otimes [\text{поле частных кольца } A/\varphi]$, т. е. такие \mathfrak{p} соответствуют точкам $x \in A(f^{-1}(y))$, если y соответствует φ . Таким образом, гипотеза (3) утверждает:

- (3)* F не лежит ни в каком из ассоциированных простых идеалов $\varphi \cdot B$ для любого простого идеала $\varphi \subset A$.

Последнее эквивалентно тому, что $B/F \cdot B$ является плоским над A ; в самом деле, свойство быть плоским равносильно следующему:

$$\mathrm{Tor}_1^A(B/FB, A/\varphi) = (0)$$

для всех простых идеалов $\varphi \subset A$ (см. Бурбаки [1, гл. 1, § 4]). Воспользуемся тем, что

$$\mathrm{Tor}_1^A(B, A/\varphi) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(B/FB, A/\varphi) \rightarrow B/\varphi B \xrightarrow{F} B/\varphi B,$$

и тем, что B — плоский над A ; тогда обращение в нуль Tor эквивалентно (3)*, ч. т. д.

Рассматривая относительные дивизоры Картье, важно иметь в виду следующее: если задана диаграмма расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ f' \downarrow & \searrow g' & \\ Y' & & X \\ g \swarrow & \searrow f & \\ & Y & \end{array}$$

и эффективный дивизор Картье D на X , *относительный для f* , то $g'^*(D)$ всегда определен. В самом деле, согласно замечаниям в конце лекции 6, точка $x' \in A(X')$ лежит также в $A(f'^{-1}(y'))$, где $y' = f'(x)$. Далее,

$$f'^{-1}(y') \cong f^{-1}(y) \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{H}(y)} \mathrm{Spec} \mathcal{H}(y'),$$

где $y = g(y')$. Поэтому слой $f'^{-1}(y')$ — плоский над $f^{-1}(y)$ и, следовательно, $g'(x') \in A(f^{-1}(y))$. Таким образом,

$$g'(x') \notin \mathrm{Supp}(D).$$

Это значит, что $g'^*(D)$ определен (см. 1°).

В частности, можно взять $Y' = \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(y))$ для различных $y \in Y$, и тогда получится семейство дивизоров Картье на слоях $f^{-1}(y)$ морфизма f , чего мы и добивались!

ЛЕКЦИЯ 11

Возвращение к классическому случаю

Проведя столько времени в выжженной пустыне общих нетеровых схем, мы вернемся к нашей программе — исследованию множества кривых на данной поверхности. В этой лекции мы подготовим почву для работы над полем k , напомнив без доказательств некоторые основные факты.

Зафиксируем раз и навсегда алгебраически замкнутое поле k . Напомним, что *алгебраическая схема* над k — это схема X конечного типа над k . Все схемы впредь будут *алгебраическими*, и все функторы будут функторами на категории алгебраических схем. Напомним, что *многообразие* над k — это редуцированная и неприводимая схема над k . С этого момента P_n будет обозначать

$$\text{Proj } k[X_0, \dots, X_n] \quad (\text{а не } \text{Proj } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n]).$$

(I) Напомним также главный результат теории размерности в этом случае (см. Зарисский и Самюэль [1, т. 2, стр. 377]).

(*) Если X — неприводимая схема, то существует целое число n — *размерность* X , — такое, что

$$[\text{Krull dim}(\mathcal{O}_x)] + [\text{степень трансцендентности } \mathcal{H}(x)/k] = n$$

для всех $x \in X$.

Определение. Для любой схемы X пусть $\dim(X)$ — максимум размерностей компонент X .

Можно показать, что $\dim(X)$ совпадает с когомологической размерностью схемы X : при $i > \dim(X)$ имеем $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для *всех* пучков \mathcal{F} (см. Годеман [1, стр. 223]).

(II) **Определение.** Схема X называется *проективной* (соответственно *квазипроективной*), если она изоморфна замкнутой (соответственно локально замкнутой) подсхеме P_n при некотором n .

Определение. Обратимый пучок \mathcal{L} на схеме X называется *очень обильным*, если существует погружение

$$\phi: X \rightarrow \mathbf{P}_n$$

(для некоторого n), такое, что $\phi^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$.

По поводу этого понятия следует сделать несколько важных замечаний.

а) Пусть, более общо, $\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}(1))$ для некоторого морфизма $\phi: X \rightarrow \mathbf{P}_n$. Тогда индуцированные сечения $s_i = \phi^*(X_i)$ пучка \mathcal{L} порождают \mathcal{L} . Обратно, если \mathcal{L} порождается своими глобальными сечениями, то можно выбрать конечное множество сечений s_0, s_1, \dots, s_n , которые порождают \mathcal{L} . Тогда $(\mathcal{L}; s_0, \dots, s_n)$ определяет X -значную точку из \mathbf{P}_n , т. е. морфизм $\phi: X \rightarrow \mathbf{P}_n$, такой, что $\phi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}$. В частности, очень обильный пучок порождается своими глобальными сечениями.

б) Предположим, что пространство $H^0(X, \mathcal{L})$ конечно-мерно: например, предположим, что X — проективная схема. Тогда, если \mathcal{L} порождается своими сечениями, существует почти канонический морфизм $\phi: X \rightarrow \mathbf{P}_n$, такой, что $\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}(1))$. Именно, возьмем базис s_0, \dots, s_n пространства $H^0(X, \mathcal{L})$. Эти элементы не могут все обращаться в нуль в некоторой точке, поэтому $(\mathcal{L}; s_0, \dots, s_n)$ определяет такой морфизм ϕ . Более функционально, наша конструкция определяет морфизм

$$\phi: X \rightarrow \mathbf{P}[H^0(X, \mathcal{L})].$$

Заметим, что при этом вложении $\phi(X)$ не содержится ни в какой гиперплоскости (в теоретико-схемном смысле, т. е. ϕ нельзя провести через гиперплоскость, $H \subset \mathbf{P}_n$), иначе при подходящих a_0, a_1, \dots, a_n получилось бы, что

$$\phi^*(\sum a_i X_i) = \sum a_i s_i = 0$$

в $H^0(X, \mathcal{L})$ вопреки независимости s_i .

Определение. Обратимый пучок \mathcal{L} на схеме X называется *обильным*, если существует целое положительное n , такое, что \mathcal{L}^n очень обилен.

(III) Важное свойство проективных многообразий X заключается в том, что

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k.$$

Действительно, кольцо $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ есть конечномерная коммутативная алгебра над k . Так как k алгебраически замкнуто, то в случае, когда $k \subsetneq A$, кольцо A содержит делители нуля. Но X редуцирована и неприводима, поэтому даже \mathcal{O}_X не содержит делителей 0.

Для любой проективной схемы X конечномерные векторные пространства $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ являются важными инвариантами X . Особенно интересна альтернированная сумма их размерностей $\chi(\mathcal{O}_X)$. По историческим причинам для n -мерных проективных многообразий X опускают член $\dim(H^0(X, \mathcal{O}_X)) = 1$ и считают от H^n „вниз“; при этом получается так называемый *арифметический род*:

$$p_a(X) = \dim H^n(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^{n-1}(X, \mathcal{O}_X) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = (-1)^n \{\chi(\mathcal{O}_X) - 1\}.$$

Преимущество этого определения в том, что, когда X — кривая,

$$p_a(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \text{обычный род } X.$$

С другой стороны, если X — поверхность, мы получаем

$$p_a(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

[Дело в том, что итальянцы рассматривали член $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X)$ как основной и называли его *геометрическим родом* $p_g(X)$, тогда как член $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ рассматривался как „поправка“ и назывался *иррегулярностью* $q(X)$. Причина этого в том, что для поверхностей в P_3 , которые изучались ранее всего, $q = 0$ и $p_a = p_g$.]

Для любой проективной схемы X мы положим

$$p_a(X) = (-1)^{\dim(X)} \{\chi(\mathcal{O}_X) - 1\}.$$

(IV) Теорема, которую можно использовать без долгих размышлений всегда, когда базой является поле, — это формула Кюннета. Это простое, но удобное орудие приобрело устрашающие размеры в книге Гrotендика

[EGA, § 6, особенно теорема 6.7.3], однако для наших скромных нужд достаточно следующей формулировки:

Пусть X, Y — любые схемы, и пусть \mathcal{F}, \mathcal{G} — квазикогерентные пучки соответственно на X, Y ; тогда

$$\begin{aligned} H^n(X \times Y, p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G}) &\cong \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} [H^i(X, \mathcal{F}) \otimes H^j(Y, \mathcal{G})]. \end{aligned}$$

(Доказательство проводится при помощи когомологий Чеха и теоремы Эйленберга — Зильбера.)

Вот одно следствие отсюда:

$$p_{1,*}[p_1^*\mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{G}] \cong \mathcal{F} \otimes_k H^0(Y, \mathcal{G})$$

(формула Кюннета применяется к $U \times Y$ для открытого и аффинного $U \subset X$). В частности, в силу (I)

$$p_{1,*}[\mathcal{O}_{X \times Y}] \cong \mathcal{O}_X$$

если Y — многообразие.

(V) Определение. Многообразие X называется *неособым*, если все локальные кольца \mathcal{O}_x регулярны, $x \in X$.

Определение. Многообразие X называется *нормальным*, если все локальные кольца \mathcal{O}_x целозамкнуты, $x \in X$.

Произведение неособых многообразий неособенно; более общо, если $X \xrightarrow{f} Y$ — плоский сюръективный морфизм с неособыми слоями, то X неособо тогда и только тогда, когда неособо Y . [Плоский морфизм с неособыми слоями известен как простой, или гладкий, морфизм.]

Далее, произведение двух редуцированных схем редуцировано; более общо, если $X \xrightarrow{f} Y$ — плоский сюръективный морфизм с редуцированными слоями, то схема X редуцирована тогда и только тогда, когда редуцирована схема Y . Вот простое следствие из предыдущего: для любых алгебраических схем X и Y

$$(X \times Y)_{\text{red}} \cong X_{\text{red}} \times Y_{\text{red}}.$$

Если X — алгебраическая схема, то множество всех $x \in X$, в которых \mathcal{O}_x регулярно, является открытым подмножеством $U \subset X$. В частности, если X — многообразие

и $x \in X$ — его общая точка, то \mathcal{O}_x — поле и, следовательно, регулярно; поэтому существует открытое плотное подмножество $U \subset X$, являющееся неособым.

(VI) Наконец, мы хотим напомнить теорему Римана — Роха для кривых, являющуюся основным результатом в описании геометрии на кривой.

Определение. Кривая X — это 1-мерная проективная схема, все замкнутые точки которой имеют глубину 1, т. е. все ее локальные кольца являются кольцами Коэна — Маколея.

Пусть $D \subset X$ — эффективный дивизор Картье на X , и пусть f_x — локальное уравнение D в точке $x \in X$. Для всех, кроме конечного числа, точек, скажем x_1, \dots, x_n , можно считать, что $f_x = 1$. Тогда можно разными способами определить степень D :

$$\text{а)} \quad \deg(D) = \sum_{i=1}^n \dim_k [\mathcal{O}_{x_i}/(f_{x_i})].$$

Заметим, что \mathcal{O}_D равен $\mathcal{O}_{x_i}/(f_{x_i})$ в x_i и (0) во всех других точках, так что

$$\text{б)} \quad \deg(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

Если X — неособая кривая и (t_i) — максимальный идеал в x_i , то пусть

$$f_{x_i} = (\text{обратимый элемент}) \cdot x_i^{r_i}.$$

Тогда D — дивизор Вейля $\sum_{i=1}^n r_i \cdot x_i$ и

$$\text{в)} \quad \deg(D) = \sum_{i=1}^n r_i.$$

Интересно, что этот инвариант зависит только от класса дивизора D , а не от самого D . В этом можно убедиться, пользуясь определением (б) и точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

$$\text{г)} \quad \deg(D) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)).$$

С помощью этой формулы можно распространить определение на произвольный обратимый пучок \mathcal{L} :

$$\text{д) } \deg(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}^{-1}).$$

Риманова часть теоремы Римана — Роха утверждает следующее:

Теорема 1. а) $\deg(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{\pm 1}) = \deg(\mathcal{L}) \pm \deg(\mathcal{M})$,
следовательно,

$$\text{б) } \dim H^0(\mathcal{L}) - \dim H^1(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) + \chi(\mathcal{O}_X) = \\ = \deg(\mathcal{L}) + 1 - p_a(X).$$

Другими словами, степень определяет гомоморфизм

$$\bullet \text{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}.$$

[Если кривая X неприводима, ядро его называется $\text{Pic}^\tau(X)$; хорошо известно, что оно канонически изоморфно группе k -рациональных точек некоторой групповой схемы — так называемого якобиева многообразия кривой X . Мы гораздо подробнее поговорим об этом ниже.]

Принадлежащая Роху часть теоремы Римана — Роха указывает, как вычислять H^1 в терминах H^0 .

Теорема 2. Существует канонический когерентный пучок ω_X на X , такой, что векторные пространства

$$H^1(X, \mathcal{L}) \text{ и } H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$$

и векторные пространства

$$H^0(X, \mathcal{L}) \text{ и } H^1(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$$

канонически двойственны друг другу (для любого обратимого пучка \mathcal{L}). В частности, $\chi(\mathcal{L}) = -\chi(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$.

[Доказательство см. в работе Серра [3, гл. 4] для случая неприводимой и редуцированной схемы X , а для общего случая — у Гротендика [Bourbaki Séminaire, exposé 149] и у Хартшорна в лекциях о двойственности, которые вскоре выйдут в серии Springer Lecture Note. На самом деле в нашем случае доказательство совсем простое. Выберем вложение

$$X \subset \mathbb{P}_n \quad (\text{при некотором } n).$$

Затем положим $\omega_X = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{P_n}}^{n-1}[\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{P_n}(-n-1)]$. После этого используются стандартные результаты о замене колец в Ext, связь между H^i и Ext^i в общей теории пучков (см. Гротендик [4] или Годеман [1, § 7.3]) и, наконец, последняя теорема в статье Серра [2], а именно, если \mathcal{F} — любой когерентный пучок на P_n , то пространства

$$H^i(P_n, \mathcal{F}) \text{ и } \text{Ext}_{\mathcal{O}_{P_n}}^{n-i}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{P_n}(-n-1))$$

канонически двойственны.

Нам понадобится еще вот что: если X — редуцирована и неприводима, то ω_X не имеет кручения и является \mathcal{O}_X -модулем ранга 1. Доказательство содержится в книге Серра [3]; можно также непосредственно подсчитать $\text{Ext}^{n-1}.$

Дальнейшее следствие является прототипом большого класса полезных результатов: *теорема об обращении в нуль*.

Следствие. Пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на редуцированной и неприводимой кривой X . Предположим, что

$$\deg(\mathcal{L}) > 2p_a(X) - 2.$$

Тогда $H^1(X, \mathcal{L}) = (0)$.

Доказательство. Предположим, что $H^1(X, \mathcal{L}) \neq (0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dim H^1(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) &= \dim H^0(X, \mathcal{L}) = \\ &= \deg(\mathcal{L}) + 1 - p_a(X) + \dim H^1(X, \mathcal{L}) \geq p_a(X) + 1; \end{aligned}$$

в то же время

$$\dim H^0(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) = \dim H^1(X, \mathcal{L}) \geq 1.$$

Пусть σ — сечение пучка $\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}$; σ определяет гомоморфизм h :

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{h} \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}.$$

Если гомоморфизм h не инъективен, то h аннулирует весь когерентный пучок идеалов. Так как схема X редуцирована и неприводима, то любой ненулевой когерентный пучок

идеалов изоморфен \mathcal{O}_X во всех, кроме конечного числа, точках. Поэтому, если h не инъективен, то носитель сечения σ является 0-мерным и ω_X обладает кручением. Таким образом, мы получаем точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{h} \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \eta \rightarrow 0.$$

Более того, поскольку ранг $\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}$ равен 1, гомоморфизм h' :

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_X \xrightarrow{h'} (\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) \otimes \mathcal{K}_X \rightarrow n \otimes \mathcal{K}_X \rightarrow 0$$

является изоморфизмом; следовательно, $\kappa \otimes \mathcal{K}_X = (0)$ и κ — пучок кручения. Поэтому мы получаем точную последовательность

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow H^1(X, \mathfrak{x})$$

\parallel
 (0)

Так как $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = p_a$, то это приводит к противоречию.

Дальнейшее развитие теории показывает, что существует другая константа n_0 , зависящая только от X , такая, что когда степень обратимого пучка \mathcal{L} не меньше n_0 , то \mathcal{L} очень обилен (см. Мацусака — Мамфорд [1]). Это дает изящное следствие: \mathcal{L} обилен тогда и только тогда, когда $\deg(\mathcal{L}) > 0$. Для доказательства необходимости условия $\deg(\mathcal{L}) > 0$ используем теорему Серра о том, что из обильности \mathcal{L} следует, что $H^1(\mathcal{L}^n) = 0$ для больших n ; поэтому $\chi(\mathcal{L}^n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow +\infty$, так что, по теореме 1, $\deg(\mathcal{L}) > 0$.

Наконец, существует третья часть теоремы Римана — Роха, которую мы используем в следующей лекции. Это результат, дающий возможность в некоторых случаях вычислять пучок ω_D :

Теорема 3. Пусть X — неособая проективная поверхность. Тогда существует канонический обратимый пучок Ω на X со следующим свойством: если $D \subset X$ — произвольный эффективный дивизор, то D — кривая и

$$\omega_D \cong [\Omega \otimes \mathcal{O}_X(D)] \otimes \mathcal{O}_D.$$

Пример. Если $X = \mathbb{P}_2$, то, как хорошо известно, $\Omega = \mathcal{O}(-3)$. Тогда для любой плоской кривой $D \subset \mathbb{P}_2$ степени d (это значит, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(D) = \mathcal{O}(d)$) теорема 3 показывает, что

$$\omega_D \cong \mathcal{O}(d - 3) \otimes \mathcal{O}_D.$$

Например, если $d = 3$, то $\omega_D \cong \mathcal{O}_D$ и для всех обратимых пучков \mathcal{L} на D пространства $H^i(D, \mathcal{L})$ и $H^{1-i}(D, \mathcal{L}^{-1})$ двойственны; в частности, $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ и $H^0(D, \mathcal{O}_D)$ двойственны и, следовательно,

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_D) &= 0, \\ p_a(D) &= 1.\end{aligned}$$

Такие неособые кривые D называются *эллиптическими*.

ЛЕКЦИЯ 12

Полная классификация кривых на поверхностях

Оратимся теперь к геометрии на фиксированной проективной неособой поверхности F . На F мы определили дивизоры (Вейля или Картье — безразлично) и группу классов дивизоров $\text{Pic}(F)$. Среди дивизоров эффективные дивизоры будут называться просто кривыми; они являются тем самым 1-мерными замкнутыми подсхемами, но они не обязательно редуцированы или неприводимы.

1°. Пусть $D \subset E$ — некоторая кривая. В отличие от случая эффективных дивизоров на самих кривых здесь нельзя подсчитать число точек в носителе и назвать его степенью, так как носитель имеет положительную размерность. Вот что, однако, можно считать:

Пусть D_1, D_2 — две кривые на F , такие, что

$$\dim (\text{Supp}(D_1) \cap \text{Supp}(D_2)) = 0.$$

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Supp}(D_1) \cap \text{Supp}(D_2)$. Пусть f_i (соответственно g_i) — локальное уравнение для D_1

(соответственно для D_2) в x_i . Определим

$$(D_1 \cdot D_2) = \sum_{i=1}^n \dim_k [\mathcal{O}_{x_i}/(f_i, g_i)].$$

Это выражение имеет смысл, так как идеал (f_i, g_i) определяет подсхему поверхности F в окрестности x_i , которая в теоретико-множественном смысле представляет собой пересечение $\text{Supp}(D_1) \cap \text{Supp}(D_2)$, т. е. само множество $\{x_i\}$. Поэтому

$$(f_i, g_i) \supset \mathfrak{m}_{x_i}^N$$

при некотором N , и размерность конечна.

Это и есть индекс пересечения кривых D_1 и D_2 , и легко проверить, что он билинейен, если только он определен. Подобно степени в геометрии кривых, он зависит только от классов дивизоров, а не от них самих.

Предложение 1. Если индекс $(D_1 \cdot D_2)$ определен, то

$$(D_1 \cdot D_2) = \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{O}_F(-D_1)) - \chi(\mathcal{O}_F(-D_2)) + \\ + \chi(\mathcal{O}_F(-D_1 - D_2)).$$

Доказательство. Рассмотрим два комплекса пучков

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_F(-D_1) &\rightarrow \mathcal{O}_F, \\ \mathcal{O}_F(-D_2) &\rightarrow \mathcal{O}_F. \end{aligned}$$

Перемножая их тензорно, мы получаем комплекс

$$(*) \quad \mathcal{O}_F(-D_1 - D_2) \rightarrow \mathcal{O}_F(-D_1) \oplus \mathcal{O}_F(-D_2) \rightarrow \mathcal{O}_F.$$

Поскольку исходные комплексы представляют собой локально свободные резольвенты пучков \mathcal{O}_{D_1} и \mathcal{O}_{D_2} , когомологии комплекса $(*)$ суть

$$\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}).$$

Но если $x \in F$ и если f и g — локальные уравнения D_1 и D_2 в x , то либо хотя бы один из элементов f, g обратим, либо f и g составляют \mathcal{O}_x -последовательность. В любом случае

$$\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_x/(f), \mathcal{O}_x/(g)) = (0), \quad i > 0.$$

Поэтому $(*)$ является резольвентой пучка $\mathcal{O}_{D_1} \otimes \mathcal{O}_{D_2}$, имеющего слой $\mathcal{O}_x(f, g)$ в точке x . Таким образом, этот пучок равен (0) всюду, исключая точки x_1, \dots, x_n , а в точке x_i он изоморден

$$\mathcal{O}_{x_i}/(f_i, g_i).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (D_1 \cdot D_2) &= \dim H^0(F, \mathcal{O}_{D_1} \otimes \mathcal{O}_{D_2}) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_{D_1} \otimes \mathcal{O}_{D_2}) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_F) - \chi[\mathcal{O}_F(-D_1) \oplus \mathcal{O}_F(-D_2)] + \chi(\mathcal{O}_F(-D_1 - D_2)) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{O}_F(-D_1)) - \chi(\mathcal{O}_F(-D_2)) + \chi(\mathcal{O}_F(-D_1 - D_2)). \end{aligned}$$

Это подсказывает следующее

Определение. Пусть \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — любые обратимые пучки на F . Положим

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) = \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{L}_1^{-1}) - \chi(\mathcal{L}_2^{-1}) + \chi(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2^{-1}).$$

Если D_1 и D_2 — любые дивизоры на F , то

$$(D_1 \cdot D_2) = (\mathcal{O}_F(D_1) \cdot \mathcal{O}_F(D_2)).$$

Предложение 2. (\cdot) есть симметрическое билинейное спаривание, т. е.

- (1) $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) = (\mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{L}_1)$,
- (2) $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}'_1 \cdot \mathcal{L}_2) = (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) + (\mathcal{L}'_1 \cdot \mathcal{L}_2)$,
- (3) $(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) = -(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)$.

Доказательство. Свойство (1) очевидно, а (3) следует из (2) в силу очевидного равенства:

$$(\mathcal{O}_F \cdot \mathcal{L}) = 0.$$

На самом деле я утверждаю больше:

$$(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{L}) = \deg_D(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D)$$

для любой кривой D на F . Для доказательства используем последовательности

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_F(-D) \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_F(-D) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D)^{-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{L}) &= [\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{O}_F(-D))] - \\ &\quad - [\chi(\mathcal{L}^{-1}) - \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_F(-D))] = \\ &= \chi(\mathcal{O}_D) - \chi((\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D)^{-1}) = \\ &= \deg_D [\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D]. \end{aligned}$$

Поэтому если \mathcal{L}_2 обладает сечением, то $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)$ линейно по \mathcal{L}_1 , согласно теореме Римана — Роха (теорема 1 лекции 11).

Наконец, пусть $\mathcal{O}(1)$ — очень обильный обратимый пучок на F . Если \mathcal{L} — произвольный обратимый пучок на F , то $\mathcal{L}(n)$ имеет сечение при больших n по теоремам Серра. Выписав его в явном виде, легко проверить, что выражение

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) + (\mathcal{L}'_1 \cdot \mathcal{L}_2) - (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}'_1 \cdot \mathcal{L}_2)$$

симметрично относительно трех переменных \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}'_1 и \mathcal{L}_2 . Так как оно равно 0, когда \mathcal{L}_2 имеет сечение, оно обращается в 0 и тогда, когда допускает сечение \mathcal{L}'_1 . Положив $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{O}(n)$, получим

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) = (\mathcal{L}_1(n) \cdot \mathcal{L}_2) - (\mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{L}_2).$$

Но и $\mathcal{O}(n)$, и $\mathcal{L}_1(n)$ допускают сечения, следовательно, оба члена в правой части линейны по \mathcal{L}_2 . Поэтому $(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)$ линейно по \mathcal{L}_2 , ч. т. д.

Эта билинейная форма на $\text{Pic}(F)$ заменяет гомоморфизм \deg на $\text{Pic}(X)$ для кривой X . Она индуцирует следующее разложение.

Определение. $\text{Pic}^{\tau}(F)$ — это подгруппа в $\text{Pic}(F)$, состоящая из тех обратимых пучков \mathcal{L} , для которых

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}') = 0$$

при всех $\mathcal{L}' \in \text{Pic}(F)$.

Определение. $\text{Num}(F) = \text{Pic}(F)/\text{Pic}^{\tau}(F)$.

По определению $\text{Num}(F)$ — группа классов дивизоров с точностью до *численной эквивалентности* — снабжена невырожденным симметрическим спариванием в \mathbb{Z} . Основной результат о $\text{Num}(F)$ — теорема Севери и Нерона — утверждает, что $\text{Num}(F)$ конечно порождена как абелева группа;

следовательно, она изоморфна \mathbb{Z}^ρ , где ρ — некоторое целое число, называемое *базисным числом* поверхности F . Нам не понадобится доказательство этой теоремы, и мы его не будем приводить здесь (лучшее доказательство см. в статье Ленга и Нерона [1]).

2°. Хотя полная информация о числовых инвариантах класса дивизоров $\{D\}$ описывается его образом в группе $\text{Num}(F)$, или, что то же самое, числами $(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{L})$ для *всех* \mathcal{L} , тем не менее для многих целей лишь некоторые из этих чисел особенно важны. Обычно достаточно знать следующие два числа.

Определение. Пусть $\mathcal{O}(1)$ — фиксированный очень обильный обратимый пучок на F ; относительно $\mathcal{O}(1)$ определяются

$$\deg(\mathcal{L}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}(1))$$

и

$$\deg(D) = \deg[\mathcal{O}_F(D)] = \deg_D[\mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}(1)].$$

Отметим, что если D эффективен, то $\deg(D) > 0$. Пусть $\mathcal{O}(1)$ на F индуцируется вложением

$$i: F \hookrightarrow \mathbb{P}_n.$$

Пусть $H \subset \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость, не содержащая ни одной точки вида $i(x)$, где x — общая точка $\text{Supp}(D)$. Тогда определена кривая $H' = i^*(H)$ и

$$\dim\{\text{Supp}(D) \cap \text{Supp}(H')\} = 0.$$

Поэтому

$$\deg(D) = (\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{O}_F(H')) = (D \cdot H') \geq 0.$$

Предположим, что $\deg(D) = 0$; тогда $\text{Supp}(D) \cap \text{Supp}(H') = \emptyset$. Чтобы воспрепятствовать этому, выберем замкнутую точку $y \in \text{Supp}(D)$ и такую гиперплоскость H , что $i(y) \in H$, а $i(x)$ по-прежнему не принадлежит H , если x — общая точка в $\text{Supp}(D)$. Это, конечно, возможно, и, следовательно, $\deg(D) > 0$.

Вернемся к произвольному обратимому пучку \mathcal{L} на F . Еще одним важным инвариантом является его эйлерова характеристика. Она также может быть вычислена в терминах пересечений. Чтобы установить это, воспользуемся третьей частью теоремы Римана — Роха на кривых.

Предложение 3. Пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на поверхности F , и пусть Ω — канонический обратимый пучок на F , заданный теоремой 3 из лекции 11. Тогда

$$\chi(\mathcal{L}) = \frac{1}{2} (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \otimes \Omega^{-1}) + \chi(\mathcal{O}_F).$$

Доказательство. Формула, которую мы хотим доказать, имеет вид

$$\begin{aligned} 2(\chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_F)) &= (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \otimes \Omega^{-1}) = \\ &= -(\mathcal{L}^{-1} \cdot \mathcal{L} \otimes \Omega^{-1}) = \\ &= -\chi(\mathcal{O}_F) + \chi(\mathcal{L}) + \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \Omega) - \chi(\Omega) \end{aligned}$$

или

$$(**) \quad \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) + \chi(\Omega) = 0.$$

Если \mathcal{L}^{-1} имеет сечение, то $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_F(-D)$ для некоторой кривой D . Затем используем точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \omega_D \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(см. теорему 3 лекции 11). По теореме 2 лекции 11 имеем $\chi(\omega_D) + \chi(\mathcal{O}_D) = 0$; отсюда следует (**), если \mathcal{L}^{-1} имеет сечение.

Наконец, пусть $\mathcal{O}(1)$ — очень обильный обратимый пучок на F . Если \mathcal{M} — любой обратимый пучок на F , то по теоремам Серра $\mathcal{M}^{-1}(n)$ и $\mathcal{O}(n)$ имеют сечения, когда n велико. Простое вычисление показывает, что выражение в левой части в (**) линейно по \mathcal{L} . Именно:

$$\begin{aligned} &[\chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega)] - \\ &\quad - [\chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) + \chi(\Omega)] - \\ &\quad - [\chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega)] = \\ &= \{\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \\ &\quad + \{\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{M}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) - \\ &\quad - \{\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega) = \\ &= (\mathcal{L}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) + (\mathcal{M}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \\ &\quad - (\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = 0. \end{aligned}$$

Но тогда выражение (**) равно нулю для $\mathcal{L} = \mathcal{M}(-n)$ и для $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-n)$ в силу первой части доказательства. Поэтому оно равно нулю и для $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, ч. т. д.

Этот результат представляет собой самую слабую форму теоремы Римана — Роха на F . В частности, мы видим, что единственными действительно важными численными характеристиками обратимого пучка \mathcal{L} являются:

$$\deg(\mathcal{L}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}(1)), \quad (\mathcal{L}^2) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}), \quad (\mathcal{L} \cdot \Omega).$$

3°. До сих пор мы изучали дискретные инварианты элементов из $\text{Pic}(F)$ и, следовательно, множества кривых на F . Чтобы подойти к проблемам существования из лекции 2, обратимся к непрерывной части этих двух множеств. „Склейвание“, определяющее непрерывность, должно возникать из понятия семейства обратимых пучков и семейства кривых. Введем следующие определения.

Определение. Пусть S — некоторая схема (алгебраическая над k). Семейство кривых на F над S — это относительный эффективный дивизор Картье $\mathfrak{D} \subset F \times S$ над S . Семейство обратимых пучков на F над схемой S — это обратимый пучок \mathcal{L} на $F \times S$; кроме того, два обратимых пучка \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 определяют одно и то же семейство обратимых пучков, если существует обратимый пучок \mathcal{M} на S , такой, что

$$\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2 \otimes p_2^*(\mathcal{M}).$$

Как же в действительности понятие семейства приводит к склейванию? Дело в том, что множество семейств образует функтор:

- а) $\text{Curves}_F(S) = \{\text{множество кривых на } F \text{ над } S\},$
- б) $\text{Pic}_F(S) = \{\text{множество семейств обратимых пучков на } F \text{ над } S\}.$

Для всякого морфизма $T \xrightarrow{g} S$ получаем

$$F \times T \xrightarrow{h} F \times S;$$

следовательно, для $\mathfrak{D} \subset F \times S$ (соответственно \mathcal{L} на $F \times S$) имеем $h^*(\mathfrak{D}) \subset F \times T$ (соответственно $h^*(\mathcal{L})$ на

$F \times T$). В этом и состоит отображение:

$$\text{a) } \text{Curves}_F(S) \xrightarrow{\Phi} \text{Curves}_F(T),$$

$$\text{б) } \text{Pic}_F(S) \xrightarrow{\Phi} \text{Pic}_F(T).$$

Склейивание теперь эквивалентно проблеме представления этих функторов: представить эти функторы — это все равно, что найти *универсальное семейство* кривых или обратимых пучков. И если такое семейство найдено, скажем, над S , то множество k -рациональных точек схемы S оказывается канонически изоморфным множеству кривых на F , или множеству $\text{Pic}(F)$, т. е. эти *множества соединены в схемы*. Заметим еще, что мы имеем *морфизм функторов*:

$$\text{Curves}_F \xrightarrow{\Phi} \text{Pic}_F,$$

который отображает $\mathfrak{D} \subset F \times S$ на обратимый пучок $\mathcal{O}_{F \times S}(\mathfrak{D})$. Следовательно, если C (соответственно P) — схемы, представляющие эти функторы, то автоматически получается морфизм схем:

$$C \xrightarrow{\Phi} P,$$

который на k -рациональных точках ограничивается до очевидного отображения множества кривых на F в множество $\text{Pic}(F)$.

В терминах этого склейивания мы можем точно сказать, почему численные инварианты из 1° и 2° дискретны. Пусть, скажем, \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — два обратимых пучка на $F \times S$. Для каждой замкнутой точки $s \in S$ они индуцируют пучки $\mathcal{L}_{1,s}$ и $\mathcal{L}_{2,s}$ на слое поверхности F , и мы можем подсчитать $(\mathcal{L}_{1,s} \cdot \mathcal{L}_{2,s})$. Это число постоянно на каждой связной компоненте схемы S ! [Так как $(\mathcal{L}_{1,s} \cdot \mathcal{L}_{2,s})$ есть сумма эйлеровых характеристик, а они являются значениями многочленов Гильберта, то это вытекает из следствия 3 лекции 7.] Другими словами, если задано любое семейство обратимых пучков над связной базой S , то образ каждого пучка \mathcal{L}_s в $\text{Num}(F)$ один и тот же. Поэтому если объект P представляет функтор Pic_F для каждого элемента из $\text{Num}(F)$, то совокупность обратимых пучков, индуцирующих этот элемент, образует открытое и замкнутое множество в P . Естественно поэтому расщепить функторы Pic_F и Curves_F на поддающиеся исследованию куски.

Определение. Пусть $\xi \in \text{Num}(F)$. Для всех схем S обозначим через $\text{Pic}_F^\xi(S)$ подмножество в $\text{Pic}_F(S)$, состоящее из таких пучков \mathcal{L} на $F \times S$, что для всех замкнутых точек $s \in S$ индуцированный пучок \mathcal{L}_s на F над s имеет численный класс ξ . Кроме того, пусть $\text{Curves}_F^\xi(S)$ — подмножество в $\text{Curves}_F(S)$, отображаемое при помощи Φ в $\text{Pic}_F^\xi(S)$. Оба эти подмножества образуют подфункторы, обозначаемые через Curves_F^ξ и Pic_F^ξ .

Главные результаты, которые мы хотим доказать, состоят в следующем:

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА-КОНСТРУКЦИЯ. Для всех ξ функтор Curves_F^ξ изоморден функтору $h_{C(\xi)}$, где $C(\xi)$ — некоторая проективная схема.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА-КОНСТРУКЦИЯ. Для всех ξ функтор Pic_F^ξ изоморден функтору $h_{P(\xi)}$, где $P(\xi)$ — некоторая проективная схема.

Как следствие отсюда получается, что полные функторы Curves_F и Pic_F представлены (не алгебраическими) схемами

$$\coprod_\xi C(\xi) \text{ и } \coprod_\xi P(\xi)$$

(объединение непересекающихся компонент).

ЛЕКЦИЯ 13

Линейные системы и примеры

Прежде чем обратиться к общей задаче построения $C(\xi)$ и $P(\xi)$, мы хотим описать некоторые частные случаи, когда ответ очень прост, и затем показать, как некоторые из примеров лекции 1 попадают в этот класс и, следовательно, могут быть изучены теперь с полной строгостью.

1°. Мы начнем со случая, когда группа $\text{Pic}(F)$ и, следовательно, группа $\text{Num}(F)$ особенно проста.

Предположим, что

(1) $H \subset F$ — неприводимая кривая,

(2) $F - H$ аффинно,

(3) $\Gamma(F - H, \mathcal{O}_F)$ — область с однозначным разложением на множители.

Предложение 1. В этом случае $\text{Pic}(F)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная образом h кривой H , и

$$\text{Pic}(F) \cong \text{Num}(F).$$

Доказательство. Мы должны показать, что любой дивизор D на F линейно эквивалентен nH для некоторого целого n . Так как дивизоры являются дивизорами Вейля, то каждый из них представляет собой разность двух эффективных дивизоров, и мы можем предположить, что D эффективен. Пусть замкнутая подсхема $D \cap (F - H)$ схемы $F - H$ соответствует идеалу

$$\mathfrak{A} \subset R = \Gamma(F - H, \mathcal{O}_F).$$

Поскольку \mathfrak{A} индуцирует главный идеал в каждой локализации $R_{\mathfrak{p}}$ кольца R , все простые идеалы, ассоциированные с \mathfrak{A} , минимальны; следовательно, так как R — область с однозначным разложением, \mathfrak{A} — главный идеал. Пусть $\mathfrak{A} = (f)$. Тогда дивизор $D - (f)$ не имеет ни нулей, ни полюсов на $F - H$, т. е. $\text{Supp}[D - (f)] \subset H$. Это означает, что

$$D - (f) = nH \text{ при некотором целом } n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $D \equiv nH$. Таким образом, h порождает $\text{Pic}(F)$, а потому и $\text{Num}(F)$. Остается проверить, что $\text{Num}(F)$ — бесконечная циклическая группа, тогда это верно и для группы $\text{Pic}(F)$, и эти две группы изоморфны. Но так как F проективна, дивизор nH очень обилен при некотором n (т. е. $\mathcal{O}_F(nH)$ имеет вид $\mathcal{O}(1)$). Поэтому, как было замечено в лекции 12,

$$\begin{aligned} n(H \cdot H) &= (\mathcal{O}_F(H) \cdot \mathcal{O}_F(nH)) = \\ &= (\mathcal{O}_F(H) \cdot \mathcal{O}(1)) = \\ &= \deg H > 0, \end{aligned}$$

и поэтому образ h в $\text{Num}(F)$ имеет бесконечный порядок, ч. т. д.

Очевидно, этот результат применим к P_2 , так как если H — прямая, то

$$\Gamma(P_2 - H, \mathcal{O}_{P_2}) \cong k[X, Y].$$

Поэтому все кривые D на P_2 имеют некоторую степень a и $D \equiv dH$, т. е. $\mathcal{O}_{P_2}(D) \cong \mathcal{O}_{P_2}(d)$. Поскольку $H^0(P_2, \mathcal{O}_{P_2}(d))$ порождается однородными формами от однородных координат X_0, X_1, X_2 степени d , все кривые на P_2 имеют ожидавшийся тип.

Отметим, что это утверждение переносится на любую размерность, так что оно применимо к различным гравитационным, гиперквадрикам и т. д. (а также к гиперповерхностям некоторых типов — см. Андреотти, Залмон [1]).

2°. В тех случаях, когда группа Пикара проста, множество кривых устроено также довольно просто. В действительности всегда прости слои множества кривых над группой Пикара, т. е. множества кривых, линейно эквивалентных фиксированной кривой. Однако чтобы описать их структуру корректно, мы снова должны найти способ склеивания этих „линейных систем“ кривых. Для этого нам нужен слой морфизма Φ функтора Curves_P в функтор Pic_P .

Гротендик дал совершенно общее определение слоя морфизма функтора. Пусть $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ — контравариантные функторы из категории C в ($Sets$). Пусть $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ — некоторый морфизм. Пусть S — объект в C , и пусть $a \in \mathfrak{G}(S)$; мы определим слой морфизма Φ над a . Он также представляет собой функтор, но не из C в категорию ($Sets$). Это функтор из категории C/S объектов над S , объекты которой — морфизмы $T \xrightarrow{f} S$, а морфизмы удовлетворяют условию коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{g} & T_2 \\ & f_1 \downarrow & \downarrow f_2 \\ & S & \end{array}$$

в категорию ($Sets$). Обозначим его Φ^a :

$$\Phi^a(T \xrightarrow{f} S) = \{\beta \in \mathfrak{F}(T) | \Phi(\beta) = f^*(a) \text{ в } \mathfrak{G}(T)\}.$$

Оставшаяся часть определения очевидна.

В нашем случае S — это категория алгебраических схем над k и $a \in \mathfrak{G}(\text{Spec}(k))$, т. е. a должно быть замкнутой точкой объекта, представляющего \mathfrak{G} . Тогда Φ^a — это снова функтор на категории алгебраических схем над k , потому что $\text{Spec}(k)$ является конечным объектом в этой категории. Вот ключевое утверждение:

Если \mathfrak{F} и \mathfrak{G} представлены схемами X и Y , то Φ индуцируется морфизмом $\varphi: X \rightarrow Y$, причем a — замкнутая точка в Y и Φ^a представляется настоящим слоем $\varphi^{-1}(a)$.

Доказательство проводится непосредственно.

В случае функторов Curves_F и Pic_F определим функтор слоя так:

Определение. Пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на F . Положим

$$\begin{aligned} \text{Lin Sys}_{\mathcal{L}}(S) = & \{D \subset F \times S \mid D \text{ — относительный} \\ & \text{эффективный дивизор Картъе над } S, \text{ такой, что} \\ & \mathcal{O}_{F \times S}(D) \cong p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}) \\ & \text{для некоторого обратимого пучка } \mathcal{K} \text{ на } S\}. \end{aligned}$$

Определяя отображения обычным способом, получаем контравариантный функтор от S .

В лекции 1 мы описали соображения, по которым $\text{Lin Sys}_{\mathcal{L}}$ должно представлять собой проективное пространство. Теперь можно доказать полный результат.

Предложение 2. *Пусть \mathcal{L} — любой обратимый пучок на F . Пусть $N = \dim H^0(F, \mathcal{L})$. Тогда*

$$\text{Lin Sys}_{\mathcal{L}} \cong h_{\mathbb{P}_{N-1}}.$$

Доказательство. Предположим, что $D \subset F \times S$ — некоторый элемент из $\text{Lin Sys}_{\mathcal{L}}(S)$; тогда $\mathcal{O}_{F \times S}(D) \cong \mathcal{O}_{F \times S}(p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}))$. Другими словами, D определяется обратимым пучком \mathcal{K} на S и сечением

$$s \in H^0(F \times S, p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}))$$

[т. е. образом $1 \in \Gamma(F \times S, \mathcal{O}_{F \times S}(D))$]. Более того, так как дивизор Картъе $s = 0$ отноителен над S , должно быть

$s(x) \neq 0$ для всех x в $A(p_2^{-1}(p_2(x)))$. Если $y \in S$ и $K = \mathcal{K}(y)$, то слой $p_2^{-1}(y)$ над y есть $F \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(K)$; эта схема редуцирована и неприводима, так как F — многообразие; следовательно, ее единственной ассоциированной точкой является ее общая точка. Поэтому условие на s следующее: $s \not\equiv 0$ на любом слое $p_2^{-1}(y)$ морфизма p_2 .

Предположим теперь, что \mathcal{K}_1 и s_1 определяют тот же элемент D , что и \mathcal{K}_2 и s_2 . Я утверждаю, что существует изоморфизм \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 , при котором сечения s_1 и s_2 соответствуют друг другу. Мы имеем изоморфизмы

$$p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}_1) \cong \mathcal{O}_{F \times S}(D) \cong p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}_2).$$

Пусть $e: S \rightarrow F \times S$ — сечение p_2 , заданное отображением схемы S в $\{x\} \times S \subset F \times S$ для некоторой замкнутой точки $x \in F$. Тогда

$$\mathcal{K}_1 \cong e^* \{p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}_1)\} \cong e^* \{p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}_2)\} \cong \mathcal{K}_2.$$

Поэтому можно считать, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$. Если сечения s_1, s_2 не равны, то они отличаются на элемент

$$a \in H^0(F \times S, \mathcal{O}_{F \times S}^*),$$

так как они определяют один и тот же дивизор Картье. Но

$$H^0(F \times S, \mathcal{O}_{F \times S}^*) = H^0(S, p_{2,*}(\mathcal{O}_{F \times S}^*)) = H^0(S, \mathcal{O}_S^*).$$

Поэтому, изменив отождествление \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 при помощи этого скаляра, мы можем предположить, что $s_1 = s_2$. Итак,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{множество семейств} \\ \text{кривых } D \subset F \times S \\ \text{в } \text{Lin Sys}_{\mathcal{L}} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратных пучков} \\ \mathcal{K} \text{ на } S \text{ и сечений пучка} \\ p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}), \text{ не равных} \\ \text{нулю на любом слое } p_2, \\ \text{с точностью до изоморфизма} \end{array} \right\}.$$

Теперь напомним, что

$$H^0(F \times S, p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K})) = H^0(F, \mathcal{L}) \otimes H^0(S, \mathcal{K})$$

по формуле Кюннета (лекция 11, (IV)). Зафиксируем базис e_1, \dots, e_N в $H^0(F, \mathcal{L})$. Тогда сечения пучка

$p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K})$ имеют вид

$$s = \sum_{i=1}^N e_i \otimes s_i,$$

где $s_i \in H^0(S, \mathcal{K})$. Более того, $s = 0$ на $p_2^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $s_i(y) = 0$ для всех i . Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратимых пучков} \\ \mathcal{K} \text{ на } S \text{ и сечений пучка} \\ p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{K}), \text{ не равных} \\ \text{нулю на любом слое } p_2, \\ \text{с точностью до изоморфизма} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратимых пучков} \\ \mathcal{K} \text{ на } S \text{ и } N \text{ сечений} \\ s_1, \dots, s_N \text{ от } \mathcal{K}, \text{ не} \\ \text{равных одновременно нулю} \\ \text{в любой точке } y \in S, \\ \text{с точностью до изоморфизма} \end{array} \right\}.$$

Но последнее — это в точности множество S -значных точек из P_{N-1} . Таким образом устанавливается изоморфизм функторов $\text{Lin Sys}_{\mathcal{L}}$ и $h_{P_{N-1}}$, ч. т. д.

Внимательнее рассматривая доказательство этого утверждения, можно убедиться в том, что пространство P_{N-1} , представляющее $\text{Lin Sys}_{\mathcal{L}}$, не является произвольным проективным пространством: оно *канонически* отождествляется с проективным пространством

$$\widehat{\mathbf{P}[H^0(F, \mathcal{L})]}$$

(где \widehat{V} — векторное пространство, двойственное к V).

3°. Казалось бы, мы теперь в состоянии полностью описать $C(\xi)$ и $P(\xi)$ в простых случаях: например, для P_2 группа $\text{Pic}(P_2)$ очень проста, а слои Φ всегда устроены просто. Однако нужно проверить еще кое-что: даже в дискретном множестве точек $\text{Pic}(P_2) = \mathbb{Z}$ может быть введена нетривиальная схемная структура, т. е. nilпотенты в структурном пучке. На самом деле так бывает для некоторых поверхностей, и даже при предположениях пункта 1°, насколько мне известно, необходимо дополнительное условие для предупреждения этой ситуации. В лекции 1 мы встречали ряд других случаев, когда единственными семействами кривых были линейные системы, так что $\text{Pic}(F)$ было дискретным множеством. Нам потребуется прямой способ проверки того, когда это имеет место.

Предложение 3. Предположим, что $H^1(F, \mathcal{O}_F) = (0)$. Пусть S — произвольная связная алгебраическая схема, и пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на $F \times S$. Тогда существуют обратимые пучки \mathcal{N} на F и \mathcal{H} на S , такие, что

$$\mathcal{L} \cong p_1^*(\mathcal{N}) \otimes p_2^*(\mathcal{H}).$$

Доказательство. Для всех замкнутых точек $s \in S$ пучок \mathcal{L} индуцирует обратимый пучок \mathcal{N}_s на слое $p_2^{-1}(s) = F$. Положим

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{L} \otimes p_1^*(\mathcal{N}_s^{-1}).$$

Рассмотрим когомологию пучка \mathcal{M}_s относительно p_2 .

а) Индуцированный пучок $\mathcal{M}_s \otimes \mathcal{H}(s)$ на слое $p_2^{-1}(s)$ изоморчен \mathcal{O}_F по определению \mathcal{M}_s .

б) Следовательно, по основному условию предложения

$$H^1(p_2^{-1}(s), \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{H}(s)) = (0).$$

Используя следствие 1 п. 3° лекции 7, получаем, что все сечения из $H^0(p_2^{-1}(s), \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{H}(s))$ поднимаются до сечений пучка $p_{2,*}(\mathcal{M}_s)$ в некоторой окрестности s .

в) Но, поскольку $\mathcal{M}_s \otimes \mathcal{H}(s) = \mathcal{O}_F$, сечение 1 пучка \mathcal{O}_F поднимается до сечения

$$a \in \Gamma(U, p_{2,*}(\mathcal{M}_s)) = H^0(F \times U, \mathcal{M}_s).$$

г) Тогда a определяет гомоморфизм

$$p_1^*(\mathcal{N}_s) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{L}$$

в $F \times U$. Более того, так как a возникает из 1 в $p_2^{-1}(s)$, то Φ — изоморфизм индуцированных пучков \mathcal{N}_s и $\mathcal{L} \otimes \mathcal{H}(s)$ на слое $p_2^{-1}(s)$. Поэтому Φ является изоморфизмом $p_1^*(\mathcal{N}_s)$ и \mathcal{L} во всех точках над s и, следовательно, Φ — изоморфизм в некоторой открытой окрестности W слоя $p_2^{-1}(s)$. Так как отображение $p_2: F \times S \rightarrow S$ топологически замкнуто, существует открытая окрестность

$U_s \subset U$ точки s , такая, что $W \supset F \times U_s$. Это доказывает, что $p_1^*(\mathcal{N}_s)$ и \mathcal{L} изоморфны в $F \times U_s$.

д) Следовательно, для любой точки $s' \in U_s$ пучки $\mathcal{N}_{s'}$ и \mathcal{N}_s изоморфны. Так как S связна, это означает, что все пучки \mathcal{N}_s изоморфны. Обозначим этот пучок через \mathcal{N}^* . Тогда мы имеем открытое покрытие U_i на S , такое, что $p_1^*(\mathcal{N}^*)$ и \mathcal{L} изоморфны в каждом открытом множестве $F \times U_i$.

е) Зафиксируем изоморфизмы

$$\Psi_i: p_1^*(\mathcal{N}^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$$

в $F \times U_i$. Тогда в $F \times (U_i \cap U_j)$ отображение $\Psi_j^{-1} \circ \Psi_i$ является автоморфизмом пучка $p_1^*(\mathcal{N}^*)$. Он задается умножением на обратимый элемент

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\in \Gamma(F \times (U_i \cap U_j), \mathcal{O}_{F \times S}^*) \\ &\quad \Downarrow \\ &\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_s^*) \end{aligned}$$

[см. лекцию 11 (IV)]. Тогда $\{\sigma_{ij}\}$ — одномерный коцикл Чеха на S для покрытия $\{U_i\}$. Пусть этот коцикл составляет функции перехода для обратимого пучка \mathcal{K} на S . Тогда из нашего построения следует, что \mathcal{L} глобально изоморчен $p_1^*(\mathcal{N}^*) \otimes p_2^*(\mathcal{K})$, ч. т. д.

Этот результат тесно связан с „принципом качелей“ Ленга [1].

Следствие. Если $H^1(F, \mathcal{O}_F) = (0)$, то функтор Pic_F представим объединением (бесконечного) дискретного множества точек, т. е. схем $\text{Spec}(k)$. Поэтому функтор Curves_F представим объединением проективных пространств (различных размерностей).

Тем самым наше описание кривых на P_2 полностью оправдано. В заключение, для полноты картины, нам следовало бы подсчитать, что

$$(\mathcal{O}(n) \cdot \mathcal{O}(m)) = n \cdot m.$$

Это следует из билинейности и равенства

$$(\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1)) = (H_1 \cdot H_2) = 1$$

для двух различных прямых H_1, H_2 в \mathbf{P}_2 .

Упражнение. Выпишите явно универсальные семейства кривых на \mathbf{P}_2 .

Дальнейшие примеры. Дополним без доказательства примеры 2 и 5 лекции 1, связав их с только что полученными результатами. Обе рассматриваемые поверхности бирационально эквивалентны \mathbf{P}_2 , т. е. изоморфны \mathbf{P}_2 на открытых плотных подмножествах. Отсюда следует, что

$$H^1(F, \mathcal{O}_F) = H^2(F, \mathcal{O}_F) = (0)$$

в обоих случаях. Поэтому к обеим поверхностям применимо только что доказанное следствие. В случае $F = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$

$$\text{Pic}(F) \cong \text{Num}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Действительно, базис задается двумя пучками

$$\mathcal{L}_1 = p_1^*(\mathcal{O}(1)) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_2 = p_2^*(\mathcal{O}(1)),$$

и степени d и e дивизора D , описанные выше,— это как раз те d и e , которые определяются формулой

$$\mathcal{O}_F(D) \cong \mathcal{L}_1^d \otimes \mathcal{L}_2^e.$$

Спаривание задается так:

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_1) = 0,$$

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2) = 1,$$

$$(\mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{L}_2) = 0.$$

В случае, когда F получается раздуванием двух точек в \mathbf{P}_2 ,

$$\text{Pic}(F) \cong \text{Num}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Действительно, базис задается тремя пучками:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{O}_F(E_1), \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{O}_F(E_2), \quad \mathcal{L} = \mathcal{O}_F(D).$$

Спаривание задается так:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_1) &= -1, \quad (\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2) = 0, \quad (\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{L}) = 1, \\ (\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_1) &= 0, \quad (\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_2) = -1, \quad (\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{L}) = 1, \\ (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}_1) &= 1, \quad (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}_2) = 1, \quad (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) = -1. \end{aligned}$$

Добавление к лекции 13

После всего сказанного ясно, каким образом группы когомологий вроде $H^1(F, \mathcal{O}_F)$ играют важную роль в геометрии на F . С одной стороны, я обнаружил, что не подсчитал ни одной такой группы в этих лекциях; с другой стороны, можно спросить, какой фундаментальный факт отражается в обращении в нуль группы $H^1(F, \mathcal{O}_F)$. На самом деле обращение в нуль $H^1(F, \mathcal{O}_F)$ для $F = \mathbb{P}_2$ использовалось уже давно. Оно было скрыто в старой теореме „ $A\phi + B\Psi$ “ Макса Нётера. Указанный результат является простым случаем теоремы о несмешанности для колец многочленов, т. е. того факта, что кольца многочленов — это кольца Коэна — Маколея. Действительно важным является следующий результат, который мы приводим (в основном следуя EGA 3, § 2.1) за его красоту и для того, чтобы показать, что кое-что мы все-таки подсчитали.

Предложение 4. Пусть R — конечно порожденное градуированное кольцо, такое, что $R_0 = k$ и R_n порождается тензорной степенью $R_1^{\otimes n}$. Пусть $X = \text{Proj}(R)$, и пусть \mathcal{L} — пучок $\mathcal{O}(1)$ на X . Пусть $R_{\mathfrak{m}}$ обозначает локализацию R относительно идеала

$$\mathfrak{m} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Тогда

$$(1) \quad \{R_{\mathfrak{m}} \text{ имеет глубину } \geq 1\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi: R \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma(X, \mathcal{L}^n) \\ \text{гомоморфизм} \\ \text{инъективен} \end{array} \right\}.$$

$$(2) \quad \{R_{\mathfrak{m}} \text{ имеет глубину } \geq 2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi: R \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma(X, \mathcal{L}^n) \\ \text{гомоморфизм} \\ \text{биективен} \end{array} \right\}$$

$$(3) \quad \{R_m \text{ имеет глубину } \geq 3\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{гомоморфизм } \Phi \text{ биективен} \\ \text{и } H^1(X, \mathcal{D}^n) = (0) \\ \text{при всех } n \end{array} \right\}$$

$$(k) \quad \{R_n \text{ имеет глубину } \geq k\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{гомоморфизм } \Phi \text{ биективен и} \\ H^i(X, \mathcal{L}^n) = (0) \\ \text{для } 1 \leq i \leq k-2 \text{ при всех } n \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала утверждение (1): если глубина $d(R_m) = 0$, то существует такой элемент $a \in R_m$, что $ab = 0$ для всех $b \in R_m$. Не нарушая общности, можно предположить, что $a \in R$ и что a — однороден, скажем, степени n . Но тогда для всех $f \in R_1$ элемент a равен нулю в $R_{(f)}$, поскольку $a \cdot f = 0$; следовательно, $\Phi(a)$ — нулевое сечение \mathcal{L}^n над X_f . Поэтому $\Phi(a) = 0$. Обратно, если $\Phi(a) = 0$, то для всех $f \in R_1$ имеем $a \cdot f^k = 0$ при $k \gg 0$. Следовательно, аннулятор элемента a содержит некоторую степень m^k идеала m и $d(R_m) = 0$.

Остальные утверждения доказываются по индукции. Если $d(R_m) \geq 1$, то m не является ассоциированным простым идеалом с (0) ; пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t \subset R$ — эти ассоциированные простые идеалы. Тогда R_1 не содержит ни в одном \mathfrak{p}_i , и, так как поле k бесконечно, существует элемент:

$$x \in R_1 - \bigcup_{i=1}^l \mathfrak{p}_i.$$

Говоря алгебраически, x не является делителем нуля в R , а геометрически x определяет эффективный дивизор Картье $H \subset X$, где $H = \text{Proj}(R/xR)$. С одной стороны, $d(R/x \cdot R)$ есть в точности $d(R) - 1$; с другой стороны, мы должны выяснить, какому из второго множества условий удовлетворяет H . Используем точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R_{n-1} & \xrightarrow{x} & R_n & \longrightarrow & R_n/xR_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \Phi_x^{n-1} \downarrow & & \Phi_x^n \downarrow & & \Phi_H^n \downarrow \quad \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{L}^{n-1}) & \xrightarrow{\otimes \Phi(x)} & H^0(X, \mathcal{L}^n) & \rightarrow & H^0(H, \mathcal{L}^n \otimes H) \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{n-1}) \rightarrow \\
 & & & & & & \rightarrow H^1(X, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^1(H, \mathcal{L}^n \otimes H) \rightarrow H^2(X, \mathcal{L}^{n-1}) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

- (1) Допустим, что ϕ_x^n биективен; тогда ϕ_H^n инъективен в том и только в том случае, если ϕ_x^{n-1} сюръективен. Но мы предполагаем, что ϕ_x^n инъективен для всех n и, как и в п. 1° лекции 7, ϕ_x^n биективен для всех достаточно больших n . Поэтому индукцией по убывающим n мы доказываем, что ϕ_H^n инъективен для всех n тогда и только тогда, когда ϕ_x^n биективен для всех n .
- (2) Предположим, что ϕ_H^n инъективен и ϕ_x^n биективен для всех n . Тогда образ ϕ_H^n — это образ $H^0(X, \mathcal{L}^n)$ в $H^0(H, \mathcal{L}^n \otimes H)$. Поэтому, если $H^1(X, \mathcal{L}^n) = (0)$, то ϕ_H^n сюръективен тогда и только тогда, когда $H^1(X, \mathcal{L}^{n-1}) = (0)$. Так как группа $H^1(X, \mathcal{L}^n)$ непременно равна нулю для всех достаточно больших n , индукция по убывающим n показывает, что ϕ_H^n биективен для всех n тогда и только тогда, когда $H^1(X, \mathcal{L}^n) = (0)$ для всех n .

и т. д. и т. д., ч. т. д.

ЛЕКЦИЯ 14

Некоторые теоремы об обращении в нуль

Некоторые из самых глубоких результатов алгебраической геометрии связаны с задачей вывода критерия обращения в нуль групп когомологий высших порядков некоторого пучка. Результатам такого рода принадлежит центральное место потому, что эйлерова характеристика когерентного пучка на многообразии, как правило, легко вычисляется — или непосредственно, или при помощи очень мощной формы Хирцебруха — Гrotендика теоремы Римана — Роха. С другой стороны, именно группа сечений таких пучков обычно геометрически интересна и имеет непосредственный смысл. Поэтому, если удается доказать,

что когомологии высокого порядка равны 0, можно ожидать ряд следствий.

Первая теорема такого сорта была доказана в лекции 11. Общая задача была сформулирована итальянцами; она была известна как задача *постулирования* (а именно: когда размерность чего-либо совпадает с числом, которое было постулировано!). Пикар аналитическими методами доказал очень известный результат такого рода (теорема о регулярности присоединенной системы, см. книгу Зарисского [1]). Этот результат был значительно обобщен Кодайрой в одной из его самых знаменитых статей [1]; сегодня он известен как теорема Кодайры об обращении в нуль. Другой результат в этом же направлении — теорема Серра о двойственности, сильно обобщенная Гrotендиком; она представляет собой прямое продолжение результатов Роха и показывает, как на n -мерном неособом многообразии можно вычислить H^i при помощи H^{n-i} , что по крайней мере сокращает задачу вдвое.

Мы докажем здесь (с помощью методов, развитых и использованных Накай, Мацусакой и Клейманом) лишь одну слабую теорему об обращении в нуль, которая, однако, дает *равномерную* оценку сразу для большого класса пучков. Пусть \mathcal{F} — когерентный пучок на P_n .

Определение. \mathcal{F} называется *m-регулярным*, если $H^i(P_n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$ для всех $i > 0$.

Это определение, на первый взгляд довольно нелепое, проявляет себя следующим образом.

Предложение (Кастельнуово). *Пусть \mathcal{F} есть m-регулярный когерентный пучок на P_n . Тогда*

- $H^0(P_n, \mathcal{F}(k))$ порождается $H^0(P_n, \mathcal{F}(k-1)) \otimes H^0(P_n, \mathcal{O}(1))$, если $k > m$;
- $H^i(P_n, \mathcal{F}(k)) = 0$, если $i > 0$ и $k + i \geq m$.

Следовательно,

- $\mathcal{F}(k)$ порождается как \mathcal{O}_{P_n} -модуль своими глобальными сечениями, если $k \geq m$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n . Для $n=0$ результат очевиден. В общем случае, если задан \mathcal{F} , выберем гиперплоскость H , не содержащую ни

одну из точек конечного множества $A(\mathcal{F})$. Умножим тензорно точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{P_n}(-H) \rightarrow \mathcal{O}_{P_n} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

$\downarrow \parallel$

$$\mathcal{O}_{P_n}(-1)$$

на $\mathcal{F}(k)$. Для всех $x \in P_n$, если f — локальное уравнение H в x , то умножение на f есть инъективное отображение в \mathcal{F}_x , так как по построению f обратимо во всех ассоциированных с \mathcal{F}_x простых идеалах. Поэтому результирующая последовательность

$$(*)_k \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}(k-1) \rightarrow \mathcal{F}(k) \rightarrow \underbrace{(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H)(k)}_{\mathcal{F}_H(k)} \rightarrow 0$$

точна. В частности, мы получаем

$$H^l(\mathcal{F}(m-l)) \rightarrow H^l(\mathcal{F}_H(m-l)) \rightarrow H^{l+1}(\mathcal{F}(m-l-1)).$$

Отсюда следует, что если \mathcal{F} является m -регулярным, то пучок \mathcal{F}_H на H также m -регулярен. Так как $H \cong P_{n-1}$, то мы воспользуемся предположением индукции, чтобы получить а) и б) для \mathcal{F}_H . В частности, используем последовательность

$$H^{l+1}(\mathcal{F}(m-l-1)) \rightarrow H^{l+1}(\mathcal{F}(m-l)) \rightarrow \\ \rightarrow H^{l+1}(\mathcal{F}_H(m-l)).$$

Если $l \geq 0$, то в силу б) для \mathcal{F}_H последняя группа есть (0) ; в силу m -регулярности первая группа равна (0) . Поэтому средняя группа равна (0) и пучок \mathcal{F} является $(m+1)$ -регулярным. Продолжая таким образом, мы докажем б) для \mathcal{F} .

Для того чтобы установить а), рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{F}(k-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{P_n}(1)) & \xrightarrow{\sigma} & H^0(\mathcal{F}_H(k-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \tau \\ H^0(\mathcal{F}(k-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k)) & \xrightarrow{\nu} & H^0(\mathcal{F}_H(k)) \end{array}$$

Заметим, что σ сюръективно при $k > m$, потому что $H^1(\mathcal{F}(k-2)) = (0)$. Более того, τ сюръективно, если $k > m$, согласно утверждению а) для \mathcal{F}_H . Поэтому

$\nu(\text{Im}(\mu))$ — вся группа $H^0(\mathcal{F}_H(k))$, т. е. $H^0(\mathcal{F}(k))$ порождается $\text{Im}(\mu)$ и $H^0(\mathcal{F}(k-1))$. Пусть $h \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ — глобальное уравнение H . Тогда образ $H^0(\mathcal{F}(k-1))$ в $H^0(\mathcal{F}(k))$ равен, точнее говоря, $h \otimes H^0(\mathcal{F}(k-1))$. Другими словами, это тоже часть $\text{Im}(\mu)$. Поэтому μ сюръективно и а) доказано для \mathcal{F} .

Далее, по теореме Серра мы знаем, что пучок $\mathcal{F}(k)$ порождается своими сечениями, если k достаточно велико. Объединяя это с а), получаем, что $H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k-m))$ порождает пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$ -модулей $\mathcal{F}(k)$, если $k \gg 0$. Для каждого $x \in \mathbb{P}_n$ зафиксируем изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$ в x ; это отождествляет $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k-m)$ с $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$ в x и $\mathcal{F}(k)$ с $\mathcal{F}(m)$ в x . Тогда $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k-m))$ превращается в векторное пространство элементов локального кольца \mathcal{O}_x , и наше утверждение просто означает, что $H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_x$ порождает слой $\mathcal{F}(m)_x$, т. е. $\mathcal{F}(m)$ порождается своими глобальными сечениями, ч. т. д.

Наш главный результат состоит в следующем:

Теорема. Для всех n существует многочлен $F_n(x_0, \dots, x_n)$, такой, что для любого когерентного пучка идеалов \mathcal{J} на \mathbb{P}_n , если a_0, a_1, \dots, a_n определяются условием

$$\chi(\mathcal{J}(m)) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{m}{i},$$

то пучок \mathcal{J} является $F_n(a_0, \dots, a_n)$ -регулярным.

Доказательство. Снова прибегнем к индукции по n , так как для $n=0$ результат очевиден. Пусть задан \mathcal{J} , и пусть $Z \subset \mathbb{P}_n$ — соответствующая подсхема; выберем такую гиперплоскость H , что H не пересекается с $A(\mathcal{O}_Z)$. Как и выше, получаем точную последовательность

$$(*)_m \quad 0 \rightarrow \mathcal{J}(m) \xrightarrow{\otimes h} \mathcal{J}(m+1) \rightarrow \underbrace{(\mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_H)}_{\mathcal{O}_H}(m+1) \rightarrow 0,$$

которая инъективна слева, ибо умножение на локальное уравнение для H инъективно в пучке \mathcal{J} , так как он является подпучком пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$. С другой стороны,

\mathcal{J}_H — пучок идеалов на H ; пусть $x \in \mathbb{P}_n$, и пусть f — локальное уравнение для H в x . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_x \rightarrow \mathcal{O}_{x, \mathbb{P}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{x, z} \rightarrow 0$$

после тензорного умножения на $\mathcal{O}_x/f \cdot \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x, H}$ дает

$$\text{Tor}_1(\mathcal{O}/f \cdot \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_{x, z}) \rightarrow (\mathcal{J}_H)_x \rightarrow \mathcal{O}_{x, H}.$$

И $\text{Tor}_1(\mathcal{O}_x/f \cdot \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_{x, z}) = (0)$, так как f не является делителем 0 в $\mathcal{O}_{x, z}$ (обратим во всех простых идеалах, ассоциированных с $\mathcal{O}_{x, z}$). Это показывает, что \mathcal{J}_H — пучок идеалов, и мы можем использовать индукцию.

Далее, согласно $(*)_m$,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{J}_H(m+1)) &= \chi(\mathcal{J}(m+1)) - \chi(\mathcal{J}(m)) = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \left[\binom{m+1}{i} - \binom{m}{i} \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \binom{m}{i}. \end{aligned}$$

Поэтому мы можем предположить, что \mathcal{J}_H является $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -регулярным, где G — подходящий многочлен, зависящий только от n . Положим $m_1 = G(a_1, \dots, a_n)$. Тогда мы получим, согласно $(*)_m$,

$$(1) \quad 0 \rightarrow H^0(\mathcal{J}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{J}(m+1)) \xrightarrow{\rho_{m+1}} H^0(\mathcal{J}_H(m+1)) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathcal{J}(m)) \rightarrow H^1(\mathcal{J}(m+1)) \rightarrow 0$$

при $m \geq m_1 - 2$. И для любого $i \geq 2$ мы получаем

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^i(\mathcal{J}(m)) \rightarrow H^i(\mathcal{J}(m+1)) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \geq m_1 - i.$$

Теперь, так как $H^i(\mathcal{J}(m)) = (0)$ для $i \geq 1$ и $m \geq 0$, последовательность (2) показывает, что $H^i(\mathcal{J}(m)) = (0)$, как только $i \geq 2$ и $m \geq m_1 - i$. Это значит, что пока мы рассматриваем лишь H^2, H^3, \dots, H^n , пучок \mathcal{J} также m_1 -регулярен. С другой стороны, последовательность (1) показывает, что

$(**)$ при $m \geq m_1 - 2$ либо ρ_{m+1} сюръективно, либо $\dim(H^1(\mathcal{J}(m+1))) < \dim(H^1(\mathcal{J}(m)))$.

Но предположим, что для $m = m_2$, где $m_2 \geq m_1$, ρ_m сюръективно. Из доказанного предложения мы знаем, что

$$H^0(\mathcal{J}_H(m_2)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{J}_H(m_2 + 1))$$

сюръективно. Поэтому образ $H^0(\mathcal{J}(m_2)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{P_n}(1))$ в $H^0(\mathcal{J}(m_2 + 1))$ сюръективно отображается на $H^0(\mathcal{J}_H(m_2 + 1))$. Следовательно, тем более ρ_{m_2+1} сюръективно. Другими словами, если при некотором $m \geq m_1$ отображение ρ_m сюръективно, то оно сюръективно для всех больших m . Следовательно,

(**') если $m \geq m_1 - 1$, то $\dim(H^1(\mathcal{J}(m)))$ есть функция m , строго убывающая вплоть до 0.

Отсюда ясно, что

пучок \mathcal{J} является $[m_1 + \dim H^1(\mathcal{J}(m_1 - 1))]$ -регулярным.

До сих пор мы не пользовались тем, что \mathcal{J} — пучок идеалов. Но теперь проведем следующий подсчет:

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathcal{J}(m_1 - 1)) &= \dim H^0(\mathcal{J}(m_1 - 1)) - \chi(\mathcal{J}(m_1 - 1)) \leq \\ &\leq \dim H^0(\mathcal{O}_{P_n}(m_1 - 1)) - \chi(\mathcal{J}(m_1 - 1)) = \\ &= H(a_0, a_1, \dots, a_n; m_1), \end{aligned}$$

где H — многочлен от a_i и m_1 . Короче говоря, пучок \mathcal{J} является $[G(a_1, \dots, a_n) + H(a_0, \dots, a_n; G(a_1, \dots, a_n))]$ -регулярным, ч. т. д.

Несколько замечаний. Прежде всего, теорема неверна, если не предполагать, что \mathcal{J} есть пучок идеалов. Действительно, положим $n = 1$, и пусть

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{O}_{P_1}(+k) \oplus \mathcal{O}_{P_1}(-k).$$

Тогда $\chi(\mathcal{F}_k(m)) = 2(m + 1)$ при любом k ; но наименьшее m , при котором пучок \mathcal{F}_k является m -регулярным, равно $m = |k| - 1$.

Во-вторых, предположим, что мы изучаем геометрию на фиксированной проективной алгебраической схеме X ; тогда верен аналогичный результат:

Фиксируем погружение $X \subset P_n$, и пусть $r = \dim(X)$; тогда существует многочлен $F(x_0, \dots, x_r)$, такой, что если $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ — любой пучок идеалов и $\chi(\mathcal{J}(m)) = \sum_{i=0}^r a_i \binom{m}{i}$, то \mathcal{J} является $F(a_0, \dots, a_r)$ -регулярным.

Докажем это для данного \mathcal{J} . Пусть \mathcal{J} определяет замкнутую подсхему $Z \subset X$, следовательно, $Z \subset \mathbf{P}_n$, и пусть \mathcal{J}' — пучок идеалов на \mathbf{P}_n , определяющий Z . Кроме того, пусть \mathcal{K} — пучок идеалов на \mathbf{P}_n , определяющий X . Тогда имеет место последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0.$$

Следовательно, если \mathcal{J}' является m_0 -регулярным и $H^i(\mathcal{K}(m)) = 0$ для $i + m = m_0 + 1$, то \mathcal{J} является m_0 -регулярным как пучок на X . Но, поскольку

$$\chi(\mathcal{J}(m)) = \chi(\mathcal{J}(m)) + \underline{\chi(\mathcal{K}(m))},$$

не зависит
от \mathcal{J}

наше утверждение вытекает из теоремы. Из предложения также следует, что отображение $H^0(\mathcal{J}(m_0 + k)) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{J}(m_0 + k + 1))$ сюръективно, если $k \geq 0$, и что $\mathcal{J}(m)$ порождается своими глобальными сечениями при $m \geq m_0$.

ЛЕКЦИЯ 15

Универсальные семейства кривых

Теперь мы в состоянии доказать, что схема $C(\xi)$, определенная в лекции 12, существует. Зафиксируем неособую проективную поверхность F и вложение $F \subset \mathbf{P}_n$. Как обычно, пусть $\mathcal{O}(1)$ — индуцированный очень обильный обратимый пучок. В лекции 12 мы ввели разложение

$$\text{Curves}_F(S) = \coprod_{\xi \in \text{Num}(F)} \text{Curves}_{F^\xi}(S)$$

(S связна). На самом деле для доказательства, которое мы имеем в виду, нам потребуется лишь более грубое разложение. Для данной кривой $L \subset F$ мы будем рассматривать лишь многочлен Гильберта

$$P(n) = \chi(\mathcal{O}_F(-D + n)).$$

В силу предложения 3 из лекции 12, $P(n)$ определяется численным классом ξ кривой D . Действительно, $P(n)$ определяется двумя числами: а) степенью d дивизора D и б) арифметическим родом $p_a(D)$. Это видно из точной последовательности

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_F(-D + n) \rightarrow \mathcal{O}_F(n) \rightarrow \mathcal{O}_D(n) \rightarrow 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} P(n) &= \chi(\mathcal{O}_F(n)) - \chi(\mathcal{O}_D(n)) = \\ &= \chi(\mathcal{O}_F(n)) - d \cdot p - 1 + p_a(D). \end{aligned}$$

Так или иначе мы будем использовать разложение

$$\text{Curves}_F(S) = \coprod_P \text{Curves}_F^P(S)$$

(S связна), где $\text{Curves}_F^P(S)$ — множество таких дивизоров $D \subset F \times S$, что $\mathcal{O}_{F \times S}(-D)$ имеет полином Гильберта P на каждом слое. Скажем точнее: если S не связна, то $S = \coprod_a S_a$, где S_a связна; положим

$$\text{Curves}_F^P(S) = \prod_a \text{Curves}_F^P(S_a).$$

Очень легко проверить, что это подфунктор в Curves_F , и если он представляется (алгебраической) схемой $C(P)$, то $C(P)$ есть объединение открытых подмножеств $C(\xi)$, представляющих различные подфункторы Curves_F^ξ . Зафиксируем теперь некоторый многочлен P .

(I) Согласно лекции 14, существует m_0 , зависящее только от P , такое, что если $D \subset F$ — любая кривая, дающая полином Гильберта P , то $\mathcal{O}_F(-D)$ является m_0 -регулярным. Мы можем предположить также, что

$$H^1(\mathcal{O}_F(m_0)) = (0).$$

Тогда

- (а) $H^1(\mathcal{O}_F(-D + m_0)) = H^2(\mathcal{O}_F(-D + m_0)) = (0)$
и $\mathcal{O}_F(-D + m_0)$ порождается своими сечениями.

Используя точную последовательность $(*)$ для $n = m_0$, мы заключаем, что

(б) $H^1(\mathcal{O}_D(m_0)) = (0).$

(II) Предположим теперь, что $D \subset F \times S$ — произвольное семейство кривых, дающих многочлен Гильберта P . Прежде всего, получаем:

(б)_S $p_*(\mathcal{O}_D(m_0))$ локально свободен ранга $r = \chi(\mathcal{O}_P(m_0)) - P(m_0)$ (зависящего только от P), и образование p_* коммутирует с расширением базы $T \xrightarrow{\xi} S$.

Это вытекает из (б), из следствия 1 п. 3° лекции 7 и из точной последовательности (*).

Полезные следствия из (а):

$$(a)_S \quad R^1 p_* (\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)) = (0)$$

и

$p^* p_* [\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)] \rightarrow \mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)$ сюръективно.

Первое верно в силу следствия 1 п. 3° лекции 7; второе же верно потому, что $p_* [\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)]$ отображается на $H^0(\mathcal{O}_P(-D_s + m_0))$ для всех замкнутых точек $s \in S$, а $H^0(\mathcal{O}_P(-D_s + m_0))$ порождает $\mathcal{O}_P(-D_s + m_0) = \mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)_{\delta_S(s)} \otimes \mathcal{H}(s)$.

(III) Предположим вновь, что $D \subset F \times S$ — семейство кривых. Из последовательности (*) для $n = m_0$ и из (a)_S получаем

$$0 \rightarrow p_* [\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)] \rightarrow p_* [\mathcal{O}_{F \times S}(m_0)] \xrightarrow{\sigma} \begin{matrix} p_* [\mathcal{O}_D(m_0)] \\ \parallel \\ \mathcal{O}_S \otimes_R H^0(\mathcal{O}_P(m_0)) \end{matrix} \rightarrow 0$$

Фиксируя базис e_0, e_1, \dots, e_N в $H^0(\mathcal{O}_P(m_0))$, мы определили

- а) локально свободный пучок $p_* [\mathcal{O}_D(m_0)]$ ранга r ,
- б) $N+1$ сечений $s_i = \sigma(1 \otimes e_i)$, которые порождают $p_* [\mathcal{O}_D(m_0)]$.

Это S -значная точка грассманиана $G_{N,r}$! В свете (б)_S образование пучка $p_* [\mathcal{O}_N(m_0)]$ функториально по S , и вся эта процедура определяет морфизм функторов

$$\text{Curves}_F^P \xrightarrow{\Phi} h_{G_{N,r}}.$$

(IV) Предположим теперь, что задана S -значная точка $S \xrightarrow{f} G_{N,r}$ гравссманиана $G_{N,r}$. Тогда f определяет локально свободный пучок \mathcal{E} ранга r и $N+1$ сечений s_0, \dots, s_N , порождающих \mathcal{E} . Тем самым определяется сюръективный гомоморфизм

$$\mathcal{O}_S \otimes_k H^0(\mathcal{O}_F(m_0)) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Пусть \mathcal{K} — ядро σ . Продвигаясь через $p: F \times S \rightarrow S$, мы получаем

$$\begin{aligned} p^*(\mathcal{K}) &\rightarrow p^*[\mathcal{O}_S \otimes_k H^0(\mathcal{O}_F(m_0))] \rightarrow p^*(\mathcal{E}) \rightarrow 0. \\ &\downarrow \\ &\mathcal{O}_{F \times S}(m_0) \end{aligned}$$

Обозначим через \mathcal{J} образ $p^*(\mathcal{K})(-m_0)$ в $\mathcal{O}_{F \times S}$; это пучок идеалов на $F \times S$. Вся эта процедура определяет морфизм функторов:

$$h_{G_{N,r}} \xrightarrow{\Psi} \text{Ssch}_F$$

($\text{Ssch}_F =$ Все подсхемы F).

(V) Что такое $\Psi \circ \Phi$? Начнем с $D \subset F \times S$ и построим f так же, как в (IV). Тогда, следуя процедуре (IV), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\cong p_*(\mathcal{O}_D(m_0)), \\ \mathcal{K} &\cong p_*(\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)). \end{aligned}$$

Но мы видели в (a)_S, что подпучок $\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)$ из $\mathcal{O}_{F \times S}(m_0)$ порождается сечениями пучка \mathcal{K} , т. е. образ $p^*(\mathcal{K})$ в $\mathcal{O}_{F \times S}(m_0)$ — это в точности $\mathcal{O}_{F \times S}(-D + m_0)$. Поэтому \mathcal{J} равен $\mathcal{O}_{F \times S}(-D)$, т. е.

$$\Psi \circ \Phi = \left[\begin{array}{c} \text{естественное вложение} \\ \text{функторов Curves}_F \text{ в } \text{Ssch}_F \end{array} \right].$$

(VI) Мы можем теперь резюмировать остальную часть рассуждений: пусть задана структура

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & h_{\mathcal{O}} \\ i \cap & \swarrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\Psi} & \end{array}$$

морфизмов функторов (из категории алгебраических схем над k в категорию множеств); предположим, что

(**) для всех $a \in B(S)$ существует подсхема $Y \subset S$, такая, что для всех $T \xrightarrow{g} S$ два утверждения равносильны:

$$\left\{ \begin{array}{l} g^*(a) \in B(T) \text{ лежит} \\ \text{в подмножестве } A(T) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \text{ можно провести} \\ \text{через } Y \end{array} \right\}.$$

Тогда существует подсхема $G_0 \subset G$, такая, что $A \cong h_{G_0}$, при этом Φ есть вложение h_{G_0} в h_G .

(Доказательство предоставляется читателю.)

(VII) Мы должны проверить (**). В нашем случае это означает, что

(**)₀ для всех замкнутых подсхем $Z \subset F \times S$ существует подсхема $Y \subset S$, такая, что для всех $T \xrightarrow{g} S$ два утверждения равносильны:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z \times_T T \subset F \times T \text{ есть} \\ \text{семейство кривых над } T, \\ \text{пучок идеалов которых имеет} \\ \text{многочлен Гильберта } P \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \text{ можно провести} \\ \text{через } Y \end{array} \right\}.$$

Но, согласно основному результату об уплощающих разбиениях, существует подсхема $Y \subset S$, такая, что $Z \times_S T$ плоско над T , с многочленом Гильберта

$$\chi(\mathcal{O}_{Z \times_S T}(n)) = \chi(\mathcal{O}_F(n)) - P(n),$$

тогда и только тогда, когда g можно провести через Y . Остается проанализировать, является ли $Z \times_S T$ действительно дивизором Картье. Это делается с помощью следующей леммы.

Л е м а. Пусть $Z \subset F \times T$ — замкнутая подсхема, плоская над T . Пусть $t \in T$ — такая замкнутая точка, что Z_t — кривая на F . Тогда существует открытая окрестность U точки t в T , такая, что $Z \cap (F \times U)$ является дивизором Картье на U .

Доказательство. Так как $p: F \times T \rightarrow T$ — замкнутое отображение, то достаточно доказать, что $F \times \{t\}$ имеет открытую окрестность V , в которой Z — дивизор Картье. Пусть $x \in F \times T$ — любая точка, такая, что $p(x) = t$. Пусть $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_x$ — идеал, определяющий Z в x , и пусть $\mathfrak{m}_t \subset \mathcal{O}_t$ — максимальный идеал. Так как $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_t \cdot \mathcal{O}_x \rightarrow$

это локальное кольцо точки x на $F \times \{t\}$ и так как Z_t — дивизор Картье, имеем

$$\mathcal{J}_x + \mathfrak{m}_t \cdot \mathcal{O}_x = (f) + \mathfrak{m}_t \cdot \mathcal{O}_x$$

для некоторого $f \in \mathcal{O}_x$. Выбирая f подходящим образом, мы можем предположить, что $f \in \mathcal{J}_x$. Рассмотрим теперь точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_x/(f) \rightarrow \mathcal{O}_x/(f) \rightarrow \mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x \rightarrow 0.$$

Так как подсхема Z является плоской над T , получаем
 $(0) = \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x, \mathcal{H}(t)) \rightarrow \mathcal{J}_x/(f) \otimes \mathcal{H}(t) \rightarrow$
 $\rightarrow \mathcal{O}_x/(f) + \mathfrak{m}_t \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x + \mathfrak{m}_t \cdot \mathcal{O}_x \rightarrow 0.$

Поэтому $[\mathcal{J}_x/(f)] \otimes \mathcal{H}(t) = (0)$, следовательно, по лемме Накаямы $\mathcal{J}_x/(f) = (0)$. Это доказывает, что $\mathcal{J}_x = (f)$, следовательно, Z — дивизор Картье в x , а потому и в окрестности x , ч. т. д.

(VIII) Это доказывает первую теорему-конструкцию: о существовании универсального семейства кривых. Одно положение, однако, не следует из наших рассуждений. Мы знаем, что параметрическая схема для этого универсального семейства является подсхемой Y в $G_{N,r}$. Однако она представляет собой даже замкнутую подсхему, следовательно, Y — даже проективная схема.

Доказательство. Пусть \bar{Y} — замыкание Y как подмножества в $G_{N,r}$. Предположим, что $Y \subsetneq \bar{Y}$. Возьмем тогда замкнутую точку $y \in \bar{Y} - Y$. Зафиксируем

- (1) $U = \text{Spec}(R)$, аффинную окрестность точки $y \in \bar{Y}$,
- (2) максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset R$, определяющий y ,
- (3) идеал $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{m}$, определяющий замкнутое подмножество $(\bar{Y} - Y) \cap U$.

Тогда легко проверить, что существует некоторый простой идеал φ , такой, что

$$\varphi \subset \mathfrak{m}, \quad \varphi \not\subset \mathfrak{A}, \quad \dim [R_\varphi/\varphi \cdot R_\varphi] = 1.$$

Пусть S — целое замыкание области R/φ в ее поле частных, и пусть $C = \text{Spec}(S)$. Тогда C — одномерное неособое многообразие и данный гомоморфизм из R в S индуцирует

морфизм

$$C \xrightarrow{\Phi} U \subset \bar{Y}.$$

Если $\bar{\varphi} \subset S$ — простой идеал, лежащий над $\mathfrak{m} \cdot (R/\varphi)$, то $\bar{\varphi}$ определяет замкнутую точку $z \in C$, такую, что $y = \varphi(z)$. Пусть $C_0 = \varphi^{-1}(Y)$, и пусть φ_0 — ограничение φ на C_0 . Тогда φ_0 есть C_0 -значная точка Y , не являющаяся ограничением никакой C -значной точки Y , потому что $\varphi(x) \notin Y$ в замыкании графика φ_0 .

Мы покажем, что этого не может быть. Функтор h_Y изоморден Curves_F^P . Поэтому φ_0 определяет семейство кривых

$$D_0 \subset F \times C_0$$

(с многочленом P), которое не является ограничением семейства кривых над C . Но так как C и F неособенны, то и $F \times C$ неособенно, и дивизоры на $F \times C$ можно считать дивизорами Вейля. В частности, пусть D_0 как дивизор Вейля записан в виде

$$D_0 = \sum n_i Z_{i,0},$$

где $Z_{i,0}$ — замкнутое подмножество в $F \times C_0$ коразмерности 1. Пусть Z_i — замыкание $Z_{i,0}$ в $F \times C$. Пусть $D = \sum n_i Z_i$. Тогда D —, разумеется, эффективный дивизор на $F \times C$. Более того, это относительный дивизор над C , потому что его носитель не содержит ни одного слоя $F \times \{z\}$, $z \in C$. Поэтому D — семейство кривых над C , расширяющее D_0 . Наконец, поскольку схема C связна, многочлен Гильберта пучка $\mathcal{O}_F(-D)$ постоянен и, следовательно, равен P . Это противоречие доказывает теорему.

ЛЕКЦИЯ 16

Метод схем Чжоу

Существование универсальных семейств является столь важным в доказательстве главных теорем существования, что, по-видимому, имеет смысл кратко описать еще один

известный подход к их конструкции — подход Чжоу и ван дер Вардена. Пусть опять задана поверхность $F \subset \mathbb{P}_n$. Теперь мы зафиксируем лишь степень d кривой $D \subset F$, а не многочлен P , как выше, т. е. будем рассматривать разложение

$$\text{Curves}_F(S) = \coprod_{d \geq 0} \text{Curves}_F^d(S)$$

(для связной S), где $\text{Curves}_F^d(S)$ обозначает множество таких $D \subset F \times S$, что индуцированные кривые D_s на слоях все имеют степень d .

Пусть X — проективная схема; тогда мы можем определить функтор

$$\text{Div}_X(S) = \{\mathcal{D} \subset X \times S \mid \mathcal{D} \text{ — относительный эффективный дивизор Картье на } S\},$$

обобщающий Curves_F . В некоторых случаях, когда $\dim(X) > 2$, этот функтор может оказаться легче поддающимся изучению, чем Curves_F , для иных поверхностей F . Например, если X — грассманиан G , то методы лекции 13 позволяют доказать, что

$$\text{Div}_G \cong h_D,$$

где D — некоторое объединение \coprod проективных пространств. На самом деле Div_G разбивается на Div_G^k для всех целых $k \geq 0$, а все Div_G^k — это как раз линейные системы.

Метод Чжоу состоит в построении морфизма функторов

$$\text{Curves}_F^d \xrightarrow{\Phi} \text{Div}_G^d,$$

где $G = G_{n,n-1}$ — грассманиан. Для того чтобы это сделать, мы сначала построим подсхему

$$Z \subset \mathbb{P}_n \times G_{n,n-1}.$$

Эвристически говоря, каждая замкнутая точка из $G_{n,n-1}$ соответствует линейному подпространству $L \subset \mathbb{P}_n$ размерности $n-2$. Все вместе они образуют Z . Чтобы быть точными, напомним (из лекции 5), что $G_{n,n-1} = \text{Proj}(R)$, где R — градуированное кольцо, порожденное элементами

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}, \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n,$$

Если $j < k$ — два целых числа, пропущенные в последовательности чисел i , мы можем упростить обозначения, положив

$$q_{j,k} = p_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}.$$

Тогда Z определяется как схема нулей сечений

$$s_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j X_j \otimes q_{j,k} - \sum_{j=k+1}^n (-1)^j X_j \otimes q_{k,j} \right\}$$

пучка $p_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}(1))$ для $0 \leq k \leq n$. Тогда в действительности Z представляет собой расслоение со слоем P_{n-2} над $G_{n,n-1}$, а также расслоение со слоем $G_{n-1,n-2}$ над P_n . На классическом языке Z называется инцидентным соответствием, и само Z есть некоторое многообразие флагов.

Образуем теперь расслоенное произведение $\mathfrak{z} = F \times_{P_n} Z$:

$$\begin{array}{ccc} & G_{n,n-1} & \\ q \swarrow & \uparrow & \\ \mathfrak{z} & \subset \rightarrow Z & \\ p \downarrow & & \downarrow \\ F & \subset \rightarrow P_n & \end{array}$$

(1) p — плоский морфизм; действительно, \mathfrak{z} есть расслоение на $G_{n-1,n-2}$ над F в том смысле, что F допускает открытое покрытие $\{U_i\}$, такое, что $p^{-1}(U_i) \cong \mathbb{U}_i \times G_{n-1,n-2}$. В частности,

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{z} &= \dim F + \dim G_{n-1,n-2} = \\ &= 2 + 2(n-2) = 2(n-1) = \\ &= \dim G_{n,n-1}. \end{aligned}$$

и \mathfrak{z} — неособенно.

(2) Далее, q — сюръективный морфизм двух неособенных многообразий одинаковой размерности. Это означает, что существует открытое подмножество $U \subset G_{n,n-1}$, содержащее все точки коразмерности 1, на которых q — конечный и плоский.

(3) Более общо, можно произвести любое расширение базы, чтобы получить

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{z} \times S & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ F \times S & & G_{n,n-1} \times S \end{array}$$

По-прежнему

p — плоский,

q — конечной Тор-размерности,

существует открытое подмножество $U \subset G_{n,n-1} \times S$, содержащее все точки глубины 1, над которыми q — конечный и плоский.

Поэтому если $D \subset F \times S$ — семейство кривых над S , то мы можем образовать

$$\Phi(D) = q_* p^*(D)$$

в соответствии с п. 1° и 3° лекции 10.

Осталось показать, что Φ инъективно, как в лекции 15, и что если $\text{Div}_G^d \cong h_{P_N}$, то существует замкнутая подсхема $Y \subset P_N$, такая, что S -значная точка из Div_G^d лежит в образе Φ тогда и только тогда, когда соответствующая точка P_N является точкой Y . Отсюда $\text{Curves}_F^d \cong h_Y$. Здесь даже метод аналогичен использованному в лекции 15: строится обратный морфизм

$$\Psi: \text{Div}_G^d \rightarrow \text{Ssch}_F$$

и потом применяются те же категорные соображения, что и в части (VI) лекции 15. В некотором смысле самая глубокая часть рассуждений остается прежней: используется существование уплощающих разбиений для проверки основного предположения, необходимого в чисто категорных рассуждениях.

Этот подход доставляет одно интересное следствие — более сильную теорему конечности, чем использованная вначале: для любой данной степени d существует только *конечное* число элементов $\xi \in \text{Num}(F)$, таких, что

а) $\deg \xi = d$,

б) ξ представляется кривой.

Интересно и полезно понять, что скрывается за этим результатом. Мы приведем сейчас полное доказательство другого, но близкого факта, который понадобится нам впоследствии; ключевые моменты доказательств, по-видимому, одинаковы.

Теорема. Пусть $D \subset F$ — кривая степени d . Тогда пучок $\mathcal{O}_F(-D + d)$ порождается своими сечениями.

Доказательство. Нам задано вложение $F \subset \mathbf{P}_n$, индуцирующее пучок $\mathcal{O}(1)$. Предположим, что $L \subset \mathbf{P}_n$ — линейное подпространство размерности $n - 3$. Напомним, что тогда существует „проекция“

$$\pi: (\mathbf{P}_n - L) \rightarrow \mathbf{P}_2.$$

[При нашем подходе мы можем определить π как $(\mathbf{P}_n - L)$ -значную точку схемы \mathbf{P}_2 . Именно, пусть $L = H_1 \cap H_2 \cap H_3$, где H_i — гиперплоскость, определенная $h_i \in H^0(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}(1))$. Тогда три сечения h_1, h_2 и h_3 от $\mathcal{O}(1)$ не имеют общих нулей в $\mathbf{P}_n - L$ и определяют точку π .]

В частности, если $F \cap L = \emptyset$, то π ограничивается до морфизма

$$\pi': F \rightarrow \mathbf{P}_2.$$

Я утверждаю, что π' — конечный и плоский.

- a) π — аффинный: \mathbf{P}_2 покрывается аффинными открытыми множествами $\mathbf{P}_2 - l_i$ (l_1, l_2, l_3 — три фундаментальные прямые) и $\pi^{-1}(\mathbf{P}_2 - l_i) = \mathbf{P}_n - H_i$ аффинно.
- б) Поэтому π' является аффинным, ибо π' — ограничение π на замкнутую подсхему.
- в) Пусть ι обозначает включение F в \mathbf{P}_n . Тогда π' можно разложить так:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\iota, \pi'} & \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2 \\ & \searrow \pi' & \downarrow p_2 \\ & & \mathbf{P}_2 \end{array}$$

Так как (l, π') — изоморфизм F и замкнутой подсхемы из $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2$, прямой образ $\pi'_*(\mathcal{O}_F)$ совпадает с $p_{2,*}(\mathcal{O}_F)$ (где \mathcal{O}_F отождествлен со структурным пучком образа F в $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2$). Он когерентен (см. 2^o, лекция 7). Поэтому π' конечен.

г) Тот факт, что π' плоский, следует из такого общего результата:

Лемма. Пусть A — регулярное локальное кольцо размерности n , и пусть B есть A -алгебра, конечно порожденная как A -модуль. Если все локализации B относительно максимальных идеалов являются кольцами Коэн — Маколея размерности n , то B — свободный A -модуль.

(См. Нагата [1, (25.16)] и EGA 4, § 15.4.)

Теперь предположим, что $D \subset F$ — кривая степени d и π' — морфизм, построенный выше. Тогда $\pi'_*(D)$ определен с помощью норм, как в п. 2^o лекции 10. Это плоская кривая, и я утверждаю, что ее степень тоже равна d .

Вычисление степени $\pi'_*(D)$.

Начнем с прямой $l \subset \mathbf{P}_2$, которая не содержит никакую общую точку множества $\pi'_*(D)$; тогда $l \cap \text{Supp } \pi'_*(D)$ 0-мерно и

$$\deg \pi'_*(D) = (l \cdot \pi'_*(D)).$$

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\} = l \cap \text{Supp } \pi'_*(D)$. В каждой точке x_i пусть $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{x_i}$, $f_i \in \mathcal{O}_i$ — локальное уравнение для l , $R_i = [\pi'_*(\mathcal{O}_F)]_{x_i}$, $g_i \in R_i$ — локальное уравнение для D в окрестности множества $\pi'^{-1}(x_i)$. Тогда R_i — конечно порожденный свободный \mathcal{O}_i -модуль и $\text{Nm}(g_i)$ является локальным уравнением для $\pi'_*(D)$. Более того,

$$(l \cdot \pi'_*(D)) = \sum_{i=1}^n \dim_k \mathcal{O}_i / (f_i, \text{Nm}(g_i)).$$

Пользуясь элементарным результатом из теории определителей¹⁾, получаем

$$\dim_k \mathcal{O}_l/(f_l, \text{Nm } g_l) = \dim_k R_l/(f_l, g_l),$$

и по определению

$$\sum_{l=1}^n \dim_k R_l/(f_l, g_l) = (\pi'^*(l) \cdot D) = (\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}_F(D)) = \\ = \deg D = d.$$

Мы подходим к основному пункту: имеем

$$\pi'^*(\pi'_*(D)) = D + D',$$

где D' эффективен, согласно утверждению (*) п. 2° лекции 10! А так как на самом деле класс дивизоров $\pi'_*(D)$ совпадает с классом $\mathcal{O}(d)$, класс $\pi'^*(\pi'_*(D))$ также совпадает с $\mathcal{O}(d)$, следовательно, класс дивизоров D' равен $\mathcal{O}_F(-D + d)$. Теорема, таким образом, будет доказана, если мы сможем доказать следующее:

- (*) Для всех замкнутых точек $x \in F$ существует линейное пространство L размерности $n - 3$, такое, что $L \cap F = \emptyset$ и дивизор D' , построенный выше, не проходит через x .

Другими словами, мы требуем, чтобы

$$\pi'^*(\pi'_*(D))_x = D_x.$$

Прежде всего, проанализируем, что нам нужно для этого; пусть \mathcal{O} — локальное кольцо на P_2 в $\pi'(x)$, и пусть R — слой пучка $\pi'_*(\mathcal{O}_F)$ в $\pi'(x)$. Пусть $g \in R$ — локальное уравнение для D во всех точках $\pi'^{-1}(\pi'(x))$, и пусть $m \subset R$ — максимальный идеал, такой, что R_m — локальное кольцо на F в x . Переходя к дополнениям, находим:

$$\hat{R} = R \otimes_6 \hat{\mathcal{O}} \cong (\widehat{R_m}) \oplus \sum (\widehat{R_m}),$$

¹⁾ Пусть A — одномерное локальное кольцо, M — свободный A -модуль конечного типа, $T: M \rightarrow M$ — некоторый A -линейный инъективный гомоморфизм; тогда

$$\text{длина } (M/T(M)) = \text{длина } (A/(\det(T))).$$

где вторая сумма берется по остальным максимальным идеалам $m' \subset R$. Образ $Nm(g)$ в $\widehat{\mathcal{O}}$ будет тогда произведением норм g из *каждой* компоненты $(\widehat{R_{m'}})$ в $\widehat{\mathcal{O}}$. Мы хотим, чтобы g и $Nm(g)$ различались лишь обратимым элементом. Поэтому нам прежде всего нужно, чтобы выполнялись следующие требования:

- a) g обратим во всех других локализациях $R_{m'}$, кольца R , т. е. $\text{Supp}(D)$ не содержит ни одной точки $x' \neq x$, такой, что $\pi'(x') = \pi'(x)$.

Если это выполняется, то образ $Nm(g)$ в $\widehat{\mathcal{O}}$ — это как раз норма из $(\widehat{R_m})$ в $\widehat{\mathcal{O}}$. Поэтому тогда мы сможем использовать то, что

- б) $\widehat{\mathcal{O}} \cong \widehat{R_m}$, т. е. R_m не разветвляется над \mathcal{O} , или, что то же самое, отображение из касательного пространства Зарисского к F в точке x в касательное пространство Зарисского к P_2 в $\pi'(x)$ есть изоморфизм.

Если это выполняется, то $Nm(g)$ и g различаются лишь обратимым элементом в $\widehat{R_m}$; поэтому они отличаются только обратимым элементом и в R_m .

Каково соответствующее геометрическое условие на L ? Очевидно, а) превращается в

- а') если L' — линейное пространство размерности $n - 2$, порожденное L и x , то x — единственная точка пересечения L' и $\text{Supp}(D)$.

С другой стороны, рассмотрим касательное пространство Зарисского T к P_n в x ; оно содержит касательное пространство $T_{L'}$ к L' размерности $n - 2$ и касательное пространство T_F к F размерности 2. Более того, полная проекция π индуцирует изоморфизм $T/T_{L'}$ и касательного пространства к P_2 в $\pi(x)$. Поэтому б) превращается в

- б') касательные пространства $T_{L'}$ и T_F к L' и F пересекаются трансверсально в точке x .

Оставшаяся часть совсем проста: пусть M — двумерное линейное пространство, проходящее через точку x , с касательным пространством T_F в x . Выберем сначала

$h \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}(1))$ таким, что

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \\ h(y) &\neq 0, \end{aligned}$$

где y — общая точка из M или общая точка из $\text{Supp}(D)$. Пусть H — соответствующая гиперплоскость. Затем выберем $h' \in H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}(1))$ таким, что

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0, \\ h'(y) &\neq 0, \end{aligned}$$

где y — общая точка из $M \cap H$ или из $F \cap H$ или $y \in \{\text{Supp}(D) \cap H\} - \{x\}$. Пусть H' — соответствующая гиперплоскость. Пусть $L' = H \cap H'$. Тогда L' удовлетворяет а') и б') и $L' \cap F$ нульмерно. Пусть L — любое линейное подпространство в L' размерности $n - 3$, не содержащее ни одну из конечного множества точек $L' \cap F$. Доказательство закончено.

Вот следствие из этой теоремы, которое можно использовать, чтобы дать оценку для $\chi(\mathcal{O}_F(-D))$ в терминах $\deg(D)$:

Если D — кривая на F , то

$$(D \cdot D) \geq -A \cdot \deg(D)^2,$$

где $A = (\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1)) - 2$.

Мы опускаем доказательство, так как этот факт нам не понадобится.

ЛЕКЦИЯ 17

Хорошие кривые

В этой лекции мы хотим дать частичный ответ на третий вопрос, поставленный в лекции 1: что такое хорошая кривая на нашей поверхности F ? Точнее говоря, мы не хотим различать линейно эквивалентные кривые, поэтому вопрос формулируется так: что такое хороший класс дивизоров на F ? Ситуация следующая: если задан произвольный обратимый пучок \mathcal{L} , то при очень больших n

пучок $\mathcal{L}(n)$ должен обладать всеми „хорошими“ свойствами, какие только можно вообразить. Каков ответ на аналогичный вопрос на кривой C (например, редуцированной и неприводимой)? Обратимый пучок \mathcal{L} на C „хорош“, если достаточно велика его степень.

1°. Будем точными: зафиксируем раз и навсегда вложение $F \subset \mathbf{P}_n$, и пусть $\mathcal{O}(1)$ — индуцированный обратимый пучок. Тогда множество классов дивизоров $\text{Pic}(F)$ имеет фиксированный автоморфизм: $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}(1)$. Вот список различных хороших свойств пучка \mathcal{L} :

- (I) \mathcal{L} является 0-регулярным: $H^l(\mathcal{L}(n)) = 0$, если $l + n = 0$, $l > 0$ [следовательно, $H^l(\mathcal{L}(n)) = 0$, если $l + n \geq 0$, $l > 0$];
- (II) \mathcal{L} порождается своими сечениями, или, что то же самое, для каждой замкнутой точки $x \in F$ существует кривая $D \subset F$, такая, что

$$\mathcal{O}_F(D) \cong \mathcal{L}, \quad x \notin \text{Supp}(D);$$

- (III) \mathcal{L} очень обилен;

- (IV) существует кривая $D \subset F$ без кратных компонент, такая, что

$$\mathcal{O}_F(D) \cong \mathcal{L}.$$

Какова связь между этими различными свойствами? Заметим, прежде всего, что если \mathcal{L} обладает любым из них, то $\mathcal{L}(n)$ обладает тем же свойством при всех $n \geq 0$.

Доказательство. Это ясно для (I) и (II). Для (III) нужна

Лемма А. Пусть \mathcal{L} и \mathcal{M} — два обратимых пучка на F . Предположим, что \mathcal{L} порождается своими сечениями, а \mathcal{M} очень обилен. Тогда $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ очень обилен.

Доказательство леммы. Так как \mathcal{L} порождается своими сечениями, то существует морфизм $\phi: F \rightarrow \mathbf{P}_{m_1}$, такой, что $\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}(1))$; поскольку \mathcal{M} очень обилен, существует замкнутое погружение $\psi: F \rightarrow \mathbf{P}_{m_2}$, такое, что $\mathcal{M} \cong \psi^*(\mathcal{O}(1))$. Вместе они определяют

замкнутое погружение

$$(\varphi, \psi): F \rightarrow P_{m_1} \times P_{m_2}.$$

С другой стороны, существует каноническое погружение Сегре:

$$i: P_{m_1} \times P_{m_2} \hookrightarrow P_{m_1 m_2 + m_1 + m_2}.$$

Оно определяется следующими свойствами:

$$(a) \quad i^*(\mathcal{O}(1)) = p_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}(1));$$

(б) $i^*(X_j)$ при $0 \leq j \leq m_1 m_2 + m_1 + m_2$ являются сечениями $p_1^*(X_k) \otimes p_2^*(X_l)$ для $0 \leq k \leq m_1$, $0 \leq l \leq m_2$ в некотором порядке.

(Упражнение: проверить, что это — замкнутое погружение.)

Поэтому $i \circ (\varphi, \psi)$ — замкнутое погружение F в $P_{m_1 m_2 + m_1 + m_2}$ и

$$\begin{aligned} [i \circ (\varphi, \psi)]^*(\mathcal{O}(1)) &= (\varphi, \psi)^*(p_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}(1))) = \\ &= \varphi^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \psi^*(\mathcal{O}(1)) = \\ &= \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Предположим, с другой стороны, что \mathcal{L} обладает свойством (IV). Мы используем без доказательства элементарную форму теоремы Бертини:

Лемма Б. Пусть \mathcal{L} — очень обильный обратимый пучок на F . Тогда существует неособая неприводимая кривая $D \subset F$, такая, что $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_F(D)$.

Если \mathcal{L} обладает свойством (IV), то $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_F(D)$ и $D = \sum_{i=1}^n D_i$, где D_i — различные неприводимые кривые.

Предположим, что классы дивизоров кривых D_1, \dots, D_{n_0} являются кратными (непременно положительными) классами $\mathcal{O}(1)$, а классы дивизоров других компонент D_{n_0+1}, \dots, D_n не являются такими кратными. Положим

$$\mathcal{O}_F\left(\sum_{i=1}^{n_0} D_i\right) \cong \mathcal{O}(r).$$

По лемме А, $\mathcal{O}(r+1)$ очень обилен; по лемме Б, $\mathcal{O}(r+1) \cong \mathcal{O}_F(E)$ для некоторой неприводимой кривой E .

Тогда

$$\mathcal{L}(1) \cong \mathcal{O}_F \left(E + \sum_{i=n_0+1}^n D_i \right)$$

и все кривые E, D_{n_0+1}, \dots, D_n различны, так как пучки $\mathcal{O}_F(E)$ и $\mathcal{O}_F(D_i)$ не изоморфны при $i > n_0$. Это доказывает, что $\mathcal{L}(1)$ обладает свойством (IV).

Итак, все „хорошие“ свойства (I) — (IV) устойчивы в том смысле, что замена \mathcal{L} на $\mathcal{L}(1)$ их не нарушает. Наш главный результат заключается в том, что они почти эквивалентны.

Теорема 1. Существует целое число k , зависящее только от F и вложение $F \subset P_n$, такое, что если обратимый пучок \mathcal{L} хорош в смысле одного из свойств (I) — (IV), то $\mathcal{L}(k)$ обладает всеми четырьмя хорошими свойствами.

Доказательство. Проведем рассуждение по цепочке.

Первый шаг. Если \mathcal{L} хорош в смысле (I), то, в силу предложения из лекции 14, \mathcal{L} хорош в смысле (II). Если \mathcal{L} хорош в смысле (II), то, по лемме А, $\mathcal{L}(1)$ хорош в смысле (III). Если \mathcal{L} хорош в смысле (III), то, по лемме Б, \mathcal{L} хорош в смысле (IV).

Второй шаг. Остается перейти в обратном направлении от (IV) к (I). Предположим, что $\mathcal{L} = \mathcal{O}_F(D)$, где D не имеет кратных компонент. Умножим тензориально последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_F(-D) \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

на $\mathcal{L}(n)$; получим

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_F(n) \rightarrow \mathcal{L}(n) \rightarrow \mathcal{L}_D(n) \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{L}_D = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$. Пусть n_0 — такое целое число, что $H^i(\mathcal{O}_F(n)) = (0)$, $n \geq n_0$, $i > 0$.

Тогда при $n \geq n_0$ из (*) следует, что

$$(1) \quad \begin{aligned} H^2(\mathcal{L}(n)) &= (0), \\ H^1(\mathcal{L}(n)) &\cong H^1(\mathcal{L}_D(n)). \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Римана — Роха на кривой D для исследования этой последней группы. Пусть Ω — канонический пучок на F (теорема 3, лекция 12). Тогда $\Omega_D = [\Omega \otimes \mathcal{O}_F(D)] \otimes \mathcal{O}_D$ и

$$(2) \quad \dim H^1(\mathcal{L}_D(n)) = \dim H^0(\Omega_D \otimes \mathcal{L}_D^{-1}(-n)).$$

Но

$$(3) \quad \Omega_D \otimes \mathcal{L}_D^{-1}(-n) = [\Omega \otimes \mathcal{O}_F(D) \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}(-n)] \otimes \mathcal{O}_D = \\ = [\Omega(-n) \otimes \mathcal{O}_D].$$

Существует, конечно, такое целое число n_1 , что

$$H^l(\Omega^{-1}(n)) = (0), \quad n \geq n_1, \quad l > 0.$$

Из доказанного на первом шаге следует, что $\Omega^{-1}(n)$ очень обилен, если $n \geq n_1 + 3$. Предположим, что $n \geq n_1 + 3$; тогда индуцированный обратимый пучок $\mathcal{M} = \Omega^{-1}(n) \otimes \mathcal{O}_D$ на D очень обилен на D , т. е. индуцирован вложением $i : D \hookrightarrow \mathbf{P}_n$. Но заметим, что имеет место

Лемма В. Пусть X — замкнутая редуцированная подсхема в \mathbf{P}_n , все компоненты которой имеют положительную размерность. Тогда $H^0(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(-1)) = (0)$.

Доказательство леммы. Пусть X_1, \dots, X_n — компоненты X . Так как

$$\mathcal{O}_X \subset \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_i},$$

то если бы пучок $\mathcal{O}_X(-1)$ имел глобальное сечение, пучок $\mathcal{O}_{X_i}(-1)$ для некоторого i тоже имел бы глобальное сечение. Поскольку X_i — многообразие, глобальными сечениями \mathcal{O}_{X_i} являются лишь константы (постоянные сечения). Пусть H — гиперплоскость, не содержащая общую точку X_i ; тогда

$$\mathcal{O}_{X_i}(-1) \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(-H) \subset \mathcal{O}_{X_i}.$$

Поэтому постоянное сечение пучка \mathcal{O}_{X_i} должно быть сечением пучка $\mathcal{O}_{X_i}(-1)$, т. е. X_i не должно пересекаться с H . Тогда X_i — замкнутая подсхема в $\mathbf{P}_n - H$, т. е. X_i конечна над k , и поэтому 0-мерна, ч. т. д.

По лемме,

$$H^0(\Omega(-n) \otimes \mathcal{O}_D) = (0),$$

если $n \geq n_1 + 3$. Объединяя (1), (2) и (3), выводим, что $\mathcal{L}(n)$ является 0-регулярным, если

$$n \geq \max[n_0 + 2, n_1 + 4].$$

2°. Мы выяснили, в каком смысле кривую нужно считать „хорошой“. Следующий вопрос: существуют ли численные критерии, позволяющие установить, что обратимый пучок \mathcal{L} представлен какой-нибудь хорошей кривой? В этом направлении имеется

Лемма Г об обращении в нуль. Существует константа c_1 , зависящая только от F и очень обильного пучка $\mathcal{O}(1)$, такая, что для всех обратимых пучков \mathcal{L}

$$\deg(\mathcal{L}) \geq c_1 \Rightarrow H^2(F, \mathcal{L}) = (0).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}_F(H)$, где H — неособая неприводимая кривая на F . Для всех k имеем обычную последовательность

$$(**) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}(k-1) \rightarrow \mathcal{L}(k) \rightarrow (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H)(k) \rightarrow 0.$$

Если $\deg(\mathcal{L}) = \deg_H(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H) > 2p_a(H) - 2$, то, по теореме об обращении в нуль из лекции 11, $H^1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H) = (0)$. Тем более $H^1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H(k)) = (0)$ для каждого целого $k > 0$. Поэтому

$$H^2(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{L}(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{L}(2)) \xrightarrow{\sim} \dots$$

Так как $H^2(\mathcal{L}(n)) = (0)$ для очень больших n , то $H^2(\mathcal{L}) = (0)$, ч. т. д.

Следствие 1. Пусть c_1 — такое, как выше, и пусть обратимый пучок \mathcal{L} удовлетворяет условию $\deg(\mathcal{L}) \geq c_1$, $\chi(\mathcal{L}) > 0$. Тогда существует кривая $D \subset F$, такая, что $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_F(D)$.

Следствие 2. Пусть c_1 — такое, как выше, и $h = \deg \mathcal{O}(1)$. Если обратимый пучок \mathcal{L} удовлетворяет условию $\deg(\mathcal{L}) \geq c_1 + h$ и $H^1(F, \mathcal{L}) = (0)$, то $\mathcal{L}(2)$ „хорош“ во всех отношениях.

Доказательство. Согласно следствию 1, имеем $H^2(F, \mathcal{L}(-1)) = 0$, следовательно, $\mathcal{L}(1)$ является 0-регулярным, и поэтому $\mathcal{L}(2)$ очень обилен, ч. т. д.

Все это вместе с результатом, приведенным в конце лекции 16, позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют константа c_2 и положительное ε , зависящие лишь от F и $\mathcal{O}(1)$ и обладающие следующим свойством: если обратимый пучок \mathcal{L} на F удовлетворяет условиям*

- а) $\deg(\mathcal{L}) \geq c_2$,
 - б) $\chi(\mathcal{L}) \geq (1 - \varepsilon)/(2(\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1))) \cdot (\deg(\mathcal{L}))^2$,
- то \mathcal{L} является 0-регулярным и очень обильным.*

Доказательство. Пусть c_1 — константа из леммы Г, пусть c_3 — константа из теоремы 1, и пусть

$$\begin{aligned} h &= (\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1)), \\ p &= \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{O}(-1)) = \chi(\mathcal{O}_H). \end{aligned}$$

Пусть η — такое положительное число, что

$$\eta \leq \frac{1}{2h[1 + h(h-2)]},$$

и пусть

$$\varepsilon = \frac{(h\eta)^2}{2},$$

$$c_2 = \max \left\{ \frac{c_1}{\eta h}; 2h(c_3 + 1 + h(h-2)); \frac{1 - \eta h}{\varepsilon} (3h + 2p); -p \right\}.$$

Наконец, положим

$$k = \left[\frac{\deg(\mathcal{L})}{h} (1 - \eta h) \right].$$

Шаг I. $\deg(\mathcal{L}(-k)) \geq c_1$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}(-k)) &= \deg(\mathcal{L}) - k \cdot \deg(\mathcal{O}(1)) = \\ &= \deg(\mathcal{L}) - k \cdot h \geq \\ &\geq \deg(\mathcal{L}) - \left(\frac{\deg(\mathcal{L})}{h} \right) (1 - \eta h) h \geq \\ &\geq c_2 \cdot \eta \cdot h \geq c_1. \end{aligned}$$

Шаг II. $\chi(\mathcal{L}(-k)) > 0$.

Доказательство. Пусть H — такая кривая, что $\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}_F(H)$. Воспользуемся точной последовательностью $(**)$ из леммы Г и теоремой Римана — Роха на H , чтобы получить формулу

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{L}(-k)) &= \chi(\mathcal{L}) - \sum_{i=0}^{k-1} \chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H(-i)) = \\ &= \chi(\mathcal{L}) - k\chi(\mathcal{O}_H) - \sum_{i=0}^{k-1} \deg_H \{\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_H(-i)\} = \\ &= \chi(\mathcal{L}) - k \cdot p - k \cdot \deg(\mathcal{L}) + \frac{k(k-1)}{2} h.\end{aligned}$$

Подставляя в нее все наши оценки, получаем

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{L}(-k)) &\geq \frac{(\deg(\mathcal{L}))^2}{4} h \cdot \eta^2 - \\ &\quad - (1 - \eta h) \frac{\deg(\mathcal{L})}{2h} (2p + 3h) + h > \\ &> \varepsilon \frac{\deg(\mathcal{L})}{2h} \left[c_2 - \frac{1 - \eta h}{\varepsilon} (2p + 3h) \right] \geq 0.\end{aligned}$$

Шаг III. Из следствия 1 вытекает, что $\mathcal{L}(-k) \cong \mathcal{O}_F(D)$ для некоторой кривой $D \subset F$. Теперь воспользуемся результатами лекции 16; пусть $d = \deg(D)$. Тогда $\mathcal{O}_F(-D + d)$ порождается своими сечениями. В частности, существует кривая $E \subset F$, такая, что $\mathcal{O}_F(-D + d) \cong \mathcal{O}_F(E)$. Кроме того,

$$\deg(E) = -\deg(D) + d \cdot h = d(h-1).$$

Снова по той же теореме, $\mathcal{O}_F(-E + d(h-1))$ порождается своими сечениями. Далее

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_F(-E + d(h-1)) &\cong \mathcal{O}_F(-D + d)^{-1} \otimes \mathcal{O}_F(d(h-1)) \cong \\ &\cong \mathcal{O}_F(D) \otimes \mathcal{O}_F(d(h-2)) \cong \\ &\cong \mathcal{L}(d(h-2) - k).\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 1, $\mathcal{L}(d(h-2) - k + c_0)$ является 0-регулярным и очень обильным. Поэтому теорема будет доказана, если сделать

Шаг IV. $d(h-2) - k + c_3 \leq 0$.

Доказательство. Заметим, что $d = \deg(D) = \deg(\mathcal{L}) - k \cdot h$; таким образом,

$$\begin{aligned} d(h-2) - k + c_3 &= \\ &= \deg(\mathcal{L}) \cdot (h-2) + c_3 - k(1 + h(h-2)) < \\ &< \frac{\deg(\mathcal{L})}{h} \{-1 + \eta h(1 + h(h-2))\} + c_3 + 1 + h(h-2) \leqslant \\ &\leqslant -\frac{c_2}{2h} + c_3 + 1 + h(h-2) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Важно, что для любого обратимого пучка \mathcal{L} обоим условиям критерия удовлетворяет и $\mathcal{L}(n)$, если $n \gg 0$. (Это не совсем очевидно и может послужить упражнением для читателя.)

Следствие. Пусть $h, \omega \in \text{Num}(F)$ — образы $\mathcal{O}(1)$ и Ω . Существуют константы c_2 и ε , такие, что если элемент $\lambda \in \text{Num}(F)$ удовлетворяет условиям

$$(1) \quad (\lambda \cdot h) \geqslant c_2,$$

$$(2) \quad (\lambda \cdot \lambda - \omega) \geqslant (1 - \varepsilon) \left[\frac{(\lambda \cdot h) \cdot (\lambda \cdot h)}{(h \cdot h)} \right],$$

то все $\mathcal{L} \in \text{Pic}(F)$, представляющие λ , 0-регулярны и очень обильны.

Доказательство. Следует использовать только что доказанную теорему и предложение 3 из лекции 12, уменьшая ε , если это необходимо.

ЛЕКЦИЯ 18

Теорема об индексе пересечения

Теорема об индексе пересечения для кривых на поверхностях является довольно простым следствием развитой выше теории. Мы используем одну идею Гроененника [5].

Предложение. Пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на F , такой, что $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) > 0$. Тогда

$$[\deg(\mathcal{L}) > 0] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{для некоторого положительного } n \\ H^0(F, \mathcal{L}^n) \neq (0) \end{array} \right].$$

Доказательство. Если $H^0(F, \mathcal{L}^n) \neq (0)$, то $\mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}_F(D)$ для некоторой кривой $D \subset F$. Поэтому

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}) &= \frac{1}{n} (\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{O}(1)) = \\ &= \frac{1}{n} (\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{O}(1)) = \frac{1}{n} \deg(D) > 0. \end{aligned}$$

Обратно, если $\deg(\mathcal{L}) > 0$, то $H^2(F, \mathcal{L}^n) = (0)$ для всех достаточно больших n в силу леммы об обращении в нуль из лекции 17. Более того, согласно предложению 3 лекции 12,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}^n) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}^n \cdot \mathcal{L}^n \otimes \Omega^{-1}) + \chi(\mathcal{O}_F) = \\ &= \frac{n^2}{2} (\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) - \frac{n}{2} (\mathcal{L} \cdot \Omega) + \chi(\mathcal{O}_F). \end{aligned}$$

Это выражение положительно при всех достаточно больших n , следовательно, $H^0(F, \mathcal{L}^n) \neq (0)$ для всех достаточно больших n , ч. т. д.

Следствие. Пусть \mathcal{L} — обратимый пучок на F , такой, что $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) > 0$. Тогда, если \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 — два очень обильных обратимых пучка на F , то

$$[(\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}_1) > 0] \Leftrightarrow [(\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}_2) > 0].$$

Доказательство. Дело в том, что условие $H^0(F, \mathcal{L}^n) \neq (0)$ не зависит от выбора очень обильного пучка $\mathcal{O}(1)$, тогда как, по определению, $\deg(\mathcal{L}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}(1))$. Поэтому условие $\deg(\mathcal{L}) > 0$ действительно не должно зависеть от выбора очень обильного пучка $\mathcal{O}(1)$, ч. т. д.

Теорема об индексе. Рассмотрим векторное пространство $\text{Num}(F) \otimes \mathbb{Q}$. Пусть $h \in \text{Num}(F)$ представляет образ $\mathcal{O}(1)$. Положим

$$\text{Num}(F) \otimes \mathbb{Q} = \{\mathbf{Q} \cdot h\} \oplus \{\mathbf{Q} \cdot h\}^\perp.$$

Тогда на втором слагаемом $\{\mathbf{Q} \cdot h\}^\perp$ индекс пересечения отрицательно определен.

Доказательство. По определению, спаривание на $\text{Num}(F) \otimes \mathbf{Q}$ невырожденно. Поэтому оно невырожденно также и на $\{\mathbf{Q} \cdot h\}^\perp$. Если бы теорема была неверна, то существовал бы элемент $k \in \{\mathbf{Q} \cdot h\}^\perp$, такой, что $(k \cdot k) > 0$. Предположим, что кратное $a \cdot k$ представляется обратимым пучком \mathcal{L} . Тогда $\mathcal{L}^n(m)$ представляет $m \cdot h + n \cdot a \cdot k$ и

$$(\mathcal{L}^n(m) \cdot \mathcal{L}^{n'}(m')) = (m \cdot h + n \cdot a \cdot k, m' \cdot h + n' \cdot a \cdot k) = \\ = m \cdot m'(h, h) + n \cdot n' \cdot a^2(k, k).$$

В частности, $(\mathcal{L}^n(m) \cdot \mathcal{L}^n(m)) > 0$ всякий раз, когда $(n, m) \neq (0, 0)$. Поэтому в силу следствия $(\mathcal{L}^n(m) \cdot \mathcal{M})$ положительно для всех очень обильных пучков \mathcal{M} , если оно положительно для одного такого \mathcal{M} .

Но $\mathcal{O}(1)$ очень обилен. Более того, мы видели в лекции 17, что для достаточно больших n , скажем $n \gg n_0$, $\mathcal{L}(n)$ тоже очень обилен. Тогда мы приходим к противоречию, потому что

$$(\mathcal{L}^n(-1) \cdot \mathcal{O}(1)) = -(\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1)) < 0$$

и в то же время

$$(\mathcal{L}^n(-1) \cdot \mathcal{L}(n_0)) = n(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) - n_0(\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1)) > 0,$$

если n достаточно велико.

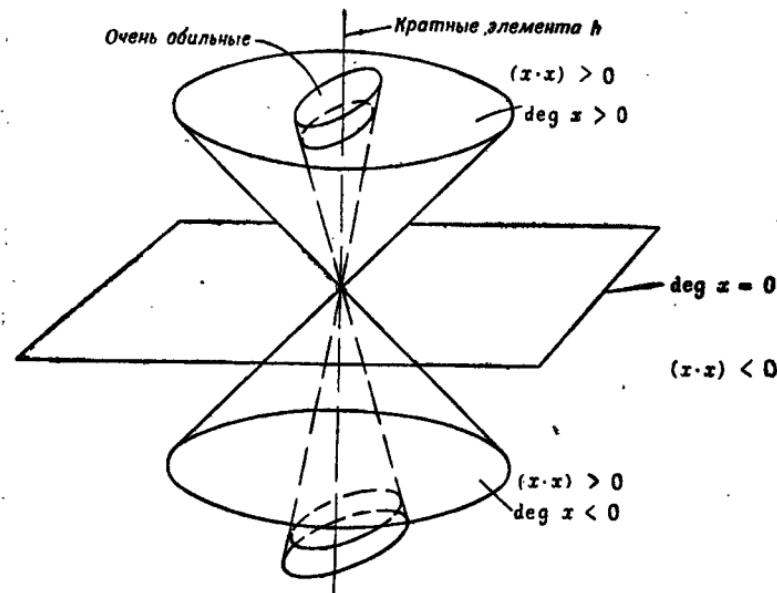
Возвращаясь к примерам из лекции 13, мы можем проверить этот результат. Для $P_1 \times P_1$ спаривание на 2-мерном пространстве $\text{Num}(F) \otimes \mathbf{Q}$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с одним положительным и с одним отрицательным собственным значением. Для второй поверхности спаривание на 3-мерном пространстве $\text{Num}(F) \otimes \mathbf{Q}$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ситуацию можно описать примерно следующим образом: возьмем действительное векторное пространство $\text{Num}(F) \otimes \mathbb{R}$ и построим в нем „световой конус“ $(x \cdot x) = 0$. Рассмотрим замыкание множества положительных действительных линейных сумм классов очень обильных дивизоров:



Полезно разобраться, как выглядит на этом чертеже численный критерий свойства „быть очень обильным“ из лекции 17:

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}) &\geq c_2, \\ \chi(\mathcal{L}) &\geq \frac{1-\varepsilon}{2(\theta(1) \cdot \theta(1))} \cdot \deg(\mathcal{L})^2. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \in \text{Num}(F) \otimes \mathbb{Q}$ — образ \mathcal{L} , и пусть h — образ пучка $\mathcal{O}(1)$. Пусть Ω — канонический обратимый пучок на F , ω — его образ. Мы используем аддитивную запись в группе $\text{Num}(F)$ для произведения обратимых пучков. С учетом предложения 3 из лекции 12 критерий лекции 17 можно привести к виду

$$(a) \quad \deg(\lambda) = (\lambda \cdot h) \geq c_2,$$

$$(b) \quad (\lambda \cdot \lambda - \omega) + 2\chi(\mathcal{O}_F) \geq \frac{1-\varepsilon}{(h \cdot h)} (\lambda \cdot h)^2.$$

Я утверждаю, что, изменив при необходимости константы c_2 и ε , можно получить (б) как следствие более простого условия:

$$(б') \quad (\lambda \cdot \lambda) \geq \frac{1-\varepsilon}{(h \cdot h)} \cdot (\lambda \cdot h)^2.$$

Доказательство. Пусть ε' — любое положительное число, меньшее ε , и предположим, что λ удовлетворяет условиям

$$(*) \quad \begin{aligned} \deg(\lambda) &\geq c_2, \\ (\lambda \cdot \lambda) &\geq \frac{1-\varepsilon'}{(h \cdot h)} (\lambda \cdot h)^2. \end{aligned}$$

Тогда существует число A (не зависящее от λ), такое, что

$$|(\lambda \cdot \omega) - 2\chi(\mathcal{O}_F)| \leq A(\lambda \cdot h).$$

Отсюда немедленно следует, что (б) выполняется, если $\deg(\lambda)$ больше, чем

$$\max \left\{ c_2, \frac{A(h \cdot h)}{\varepsilon - \varepsilon'} \right\}.$$

Для построения A воспользуемся таким фактом: из (*) следует, что $n\lambda$ представляется *кривой* для больших положительных n (первое предложение этой лекции). Кроме того, применим следующую простую лемму:

Лемма. Для любого обратимого пучка \mathcal{M} на F существует константа $c_{\mathcal{M}}$, такая, что для всех кривых $D \subset F$

$$|(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{M})| \leq c_{\mathcal{M}} \cdot \deg(D).$$

Доказательство. Выберем n_0 таким, что $\mathcal{M}(n_0)$ и $\mathcal{M}^{-1}(n_0)$ очень обильны; тогда $(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{M}(n_0))$ и $(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{M}^{-1}(n_0))$ положительны и лемма получается при $c_{\mathcal{M}} = n_0$.

Следствие. Существует положительное ε , такое, что если $\lambda \in \text{Num}(F)$ удовлетворяет условиям

$$(а'') \quad \deg(\lambda) > 0,$$

$$(б'') \quad (\lambda \cdot \lambda) \geq \frac{1-\varepsilon}{(h \cdot h)} (\lambda \cdot h)^2,$$

то все обратимые пучки \mathcal{L} , представляющие λ , обильны.

Заметим, что эти условия просто определяют положительную часть некоторого конуса в $\text{Num}(F) \otimes \mathbb{R}$. С другой стороны, условия (а) и (б') определяют кусок этого конуса над некоторой плоскостью, т. е. перевернутый усеченный конус. Следовательно, множество очень обильных пучков содержит такой конус¹⁾. Есть еще один результат, который очень хорошо соответствует этой модели. Возникает вопрос: каков точный вид действительного замкнутого конуса C_0 , порожденного очень обильными пучками? Такой конус будет, конечно, почти всегда больше конуса, порожденного точками, удовлетворяющими нашему численному критерию. Но теорема Накай и Мойшезона утверждает:

Обратимый пучок \mathcal{L} на F обилен тогда и только тогда, когда

- а) для всех кривых $D \subset F$ имеем $(\mathcal{O}_F(D) \cdot \mathcal{L}) > 0$,
- б) $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}) > 0$

(см. Клейман [1]). В нашей модели пусть C — действительный замкнутый конус, порожденный обратимыми пучками $\mathcal{O}_F(D)$ для эффективных D . Согласно предложению, он содержит положительный численный конус $(x, x) \geq 0$, $\deg(x) \geq 0$. Тогда из теоремы Накай следует, что C и C_0 — двойственные конусы относительно индекса пересечения!

ЛЕКЦИЯ 19

Схема Пикара: общие замечания

Наша следующая цель — доказательство существования схем $P(\xi)$ из лекции 12, или, что то же самое, доказательство существования универсального семейства обратимых пучков численного типа ξ . В этой лекции мы высажем

¹⁾ Это по крайней мере совершенно ясно показывает, что если \mathcal{L} — любой обратимый пучок, то $\mathcal{L}(n)$ удовлетворяет условиям а) и б) для достаточно больших n .

некоторые общие замечания о проблеме и кратко опишем наш метод ее решения.

В точной постановке задача заключается в следующем: показать, что каждый функтор Pic_{ξ} представим. Прежде всего, заметим, что все функторы Pic_{ξ} изоморфны: пусть, скажем, ξ_1, ξ_2 — два элемента из $\text{Num}(F)$ и $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ — обратимые пучки на F , представляющие ξ_1 и ξ_2 . Определим изоморфизм

$$\text{Pic}_{\xi_1} \rightarrow \text{Pic}_{\xi_2}$$

так: заданный пучок \mathcal{M} на $F \times S$, представляющий элемент из $\text{Pic}_{\xi_1}(S)$, отобразим в

$$\mathcal{M} \otimes p_1^*(\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1^{-1}).$$

Последний представляет элемент из $\text{Pic}_{\xi_2}(S)$; это, очевидно, определяет требуемый изоморфизм.

Итак, нужно представить только функтор для $\xi = 0$. Этот функтор будет обозначаться через Pic_F^t (по Гротендику). Он является, естественно, групповым функтором, т. е. каждое из множеств $\text{Pic}_F^t(S)$ является группой, а каждое участвующее в определении функтора отображение между ними представляет собой гомоморфизм. Именно, групповой закон определяется тензорным умножением обратимых пучков на схеме $F \times S$. Согласно общим замечаниям в лекции 4, схема $P(\tau)$, представляющая Pic_F^t , является автоматически групповой схемой. Это и есть в существенном смысле Пикара по Гротендику. (На самом деле Гротендику рассматривает объединение схем, представляющих каждый Pic_{ξ} , и называет его схемой Пикара. В нашем изложении, над алгебраическим замкнутым полем, эта конструкция не имеет особого смысла. Чтобы ее оправдать, следует рассматривать более сложные базисные схемы.)

На самом деле удобнее представить Pic_{ξ} для одного фиксированного, но очень обильного ξ . Наш метод заключается в выборе *одного* такого ξ , который удовлетворяет численному критерию из лекции 17; тогда любой пучок \mathcal{L} типа ξ *заведомо 0-регулярен* и очень обилен. Поэтому мы

построим сечение s морфизма функторов Φ :

$$\text{Curves}_{\mathbb{F}} \xrightarrow[s]{\Phi} \text{Pic}_{\mathbb{F}}.$$

Если Φ допускает сечение s , то $\text{Pic}_{\mathbb{F}}$ представим замкнутой подсхемой $P(\xi)$ схемы $C(\xi)$.

Доказательство. По предположению, $\Phi \circ s$ — тождественное отображение. С другой стороны, $s \circ \Phi$ есть морфизм функтора $\text{Curves}_{\mathbb{F}}$ в себя, который проектирует весь этот функтор на подфунктор, изоморфный $\text{Pic}_{\mathbb{F}}$. Но мы знаем из лекции 15, что существует проективная схема $C(\xi)$, представляющая $\text{Curves}_{\mathbb{F}}$. Поэтому $s \circ \Phi$ индуцируется морфизмом схем

$$f: C(\xi) \rightarrow C(\xi).$$

Определим $P(\xi)$ как расслоенное произведение в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} P(\xi) & \xrightarrow{g} & C(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow (1, f) \\ C(\xi) & \xrightarrow{\Delta} & C(\xi) \times C(\xi) \end{array}$$

где Δ — диагональный морфизм.

Тогда $\text{Hom}(S, P(\xi))$ изоморфно множеству пар $\alpha, \beta \in \text{Hom}(S, C(\xi))$, таких, что $\Delta(\alpha) = (1, f)(\beta)$, т. е. точки $\alpha \times \alpha$ и $\beta \times f(\beta)$ в $\text{Hom}(S, C(\xi) \times C(\xi))$ совпадают. Это означает, что множество $\text{Hom}(S, P(\xi))$ изоморфно подмножеству элементов $\text{Hom}(S, C(\xi))$, неподвижных слева относительно f , т. е. подмножеству элементов в $\text{Curves}_{\mathbb{F}}(S)$, неподвижных слева относительно $s \circ \Phi$. Поэтому функторы $h_{P(\xi)}$ и $\text{Pic}_{\mathbb{F}}$ изоморфны.

Наконец, так как Δ — замкнутое погружение, то замкнутым погружением является и морфизм g , и поэтому $P(\xi)$ — замкнутая подсхема в $C(\xi)$, ч. т. д.

Чтобы построить s , нам придется сделать следующее: для каждого обратимого пучка \mathcal{L} на $F \times S$ типа ξ вдоль слоев построить относительный эффективный дивизор Картье $D \subset F \times S$, такой, что

$$\mathcal{O}_{F \times S}(D) \cong \mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{M})$$

для некоторого $\mathcal{M} \in \text{Pic}(S)$. Эта конструкция должна обладать двумя свойствами:

- а) при замене \mathcal{L} на $\mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{M}')$ для любого $\mathcal{M}' \in \text{Pic}(S)$ должен получиться *тот же* дивизор D ;
- б) конструкция должна коммутировать с любым расширением базы $T \rightarrow S$.

Основными для нашей конструкции являются следующие пучки: пусть задан \mathcal{L} на $F \times S$; для любой замкнутой точки $x \in F$ пусть $i_x: S \rightarrow F \times S$ есть сечение p_2 , отображающее S на замкнутую подсхему $\{x\} \times S \subset F \times S$. Положим

$$\mathcal{M}_x = i_x^*(\mathcal{L}).$$

Кроме того, пусть

$$\mathcal{E} = p_{2,*}(\mathcal{L}).$$

Тогда существует канонический гомоморфизм

$$h_x: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_x$$

для каждой точки x , т. е. сечение \mathcal{E} над $U \subset S$ определяет сечение \mathcal{L} над $F \times U$ и, следовательно, сечение $i_x^*(\mathcal{L})$ над $U = i_x^{-1}(F \times U)$.

Теперь напомним, что ξ , по предположению, удовлетворяет численному критерию из лекции 17. Поэтому, если обратимый пучок \mathcal{L}' на F имеет тип ξ , то, как мы знаем, $H^1(F, \mathcal{L}') = H^2(F, \mathcal{L}') = (0)$ и \mathcal{L}' очень обилен. В частности, ограничение \mathcal{L} на любой слой p_2 имеет тип ξ . Поэтому известно, что \mathcal{E} локально свободен и его ранг r определяется только классом ξ . Теперь предположим, что мы выбрали $r - 1$ замкнутых точек $x_1, \dots, x_{r-1} \in F$. Тогда определен гомоморфизм

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^{r-1} h_{x_i}: \mathcal{E} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i}$$

и

$$\wedge \tilde{h}: \wedge^{r-1} \mathcal{E} \rightarrow \wedge^{r-1} \left[\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i} \right] \cong \bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i}.$$

Дуализация даёт

$$(\wedge \tilde{h})^*: \bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i}^{-1} \rightarrow \text{Hom}(\wedge^{r-1} \mathcal{E}, \mathcal{O}_S).$$

Но

$$\text{Hom}(\Lambda^{r-1}\mathcal{E}, \mathcal{O}_S) \cong \mathcal{E} \otimes (\Lambda^r \mathcal{E})^{-1}$$

[т. е. каноническое спаривание $\Lambda^{r-1}(\mathcal{E})$ и \mathcal{E} в обратимый пучок $\Lambda^r(\mathcal{E})$ индуцирует гомоморфизм из \mathcal{E} в $\text{Hom}(\Lambda^{r-1}(\mathcal{E}), \Lambda^r(\mathcal{E}))$, а следовательно, из $\mathcal{E} \otimes \otimes(\Lambda^r(\mathcal{E}))^{-1}$ в $\text{Hom}(\Lambda^{r-1}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_S)$; ясно, что это изоморфизм].

Заключая все обратимые пучки в фигурные скобки, получаем гомоморфизм

$$h': \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{E} \otimes \left\{ (\Lambda^r(\mathcal{E}))^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i} \right] \right\}$$

и, следовательно, глобальное сечение

$$\sigma \in \Gamma(F \times S, \mathcal{L} \otimes p_2^* \left\{ (\Lambda^r(\mathcal{E}))^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i} \right] \right\}).$$

Предположим, что σ не обращается в тождественный нуль ни на одном из слоев p_2 . Тогда уравнение $\sigma = 0$ определяет относительный эффективный дивизор Картье $D \subset F \times S$, такой, что

$$\mathcal{O}_{F \times S}(D) \cong \mathcal{L} \otimes p_2^* \left\{ (\Lambda^r(\mathcal{E}))^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_i} \right] \right\},$$

т. е. именно такой, как мы хотели. Более того, ясно, что все наши шаги коммутируют с расширением базы и что мы получим тот же дивизор D , даже если заменим \mathcal{L} на $\mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{M})$ с самого начала. Итак, наша проблема была бы решена и s было бы построено, если бы σ не обращалось в тождественный нуль на любом из слоев p_2 .

Что значит, что σ тождественно обращается в нуль на слое $p_2^{-1}(s)$? Пусть \mathcal{L}_s — обратимый пучок, индуцированный \mathcal{L} на этом слое, и пусть

$$\Phi_s: F \rightarrow \mathbf{P}_{r-1}$$

— каноническая F -значная точка на \mathbf{P}_{r-1} , определенная пучком \mathcal{L}_s (т. е. определенная пучком \mathcal{L}_s и базисом s_1, s_2, \dots, s_r пространства $H^0(F, \mathcal{L}_s)$; см. лекцию 11).

Лемма. Сечение σ не есть тождественный 0 на $p_2^{-1}(s)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_s(x_1), \dots, \varphi_s(x_{r-1})$ порождают гиперплоскость в P_{r-1} .

Доказательство. Так как конструкция σ функциональна, мы можем при желании сделать замену базы

$$\text{Spec}(k) = \text{Spec} \mathcal{H}(s) \rightarrow S,$$

заменить \mathcal{L} на \mathcal{L}_s и посмотреть, обращается σ в 0 или нет. Тогда $\mathcal{E} = H^0(X, \mathcal{L}_s)$ и $\mathcal{M}_{x_i} = \mathcal{L}_s \otimes \mathcal{H}(x_i)$. Ясно, что $\sigma \neq 0$ тогда и только тогда, когда $r - 1$ линейных функционалов

$$h_{x_i}: H^0(X, \mathcal{L}_s) \rightarrow \mathcal{L}_s \otimes \mathcal{H}(x_i)$$

независимы, т. е. когда пересечение ядер отображений h_{x_i} 1-мерно. Пространства $H^0(P_{r-1}, \mathcal{O}(1))$ и $H^0(X, \mathcal{L}_s)$ изоморфны относительно φ_s^* , а линейный функционал h_{x_i} соответствует отображению

$$h_{\varphi_x(x_i)}: H^0(P_{r-1}, \mathcal{O}(1)) \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{H}(\varphi_s(x_i)).$$

Но элемент $h \in H^0(P_n, \mathcal{O}(1))$ переходит в нуль в $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{H}(y)$ тогда и только тогда, когда гиперплоскость, определенная h , содержит y . Поэтому ядро отображения h_{x_i} одномерно тогда и только тогда, когда существует единственная гиперплоскость, содержащая $r - 1$ точек $\varphi(x_i)$, ч. т. д.

Мы знаем, далее, что образ $\varphi_s(F)$ не содержится ни в каком собственном линейном подпространстве в P_{r-1} (см. лекцию 11). Поэтому почти для всех наборов из $r - 1$ точек x_1, \dots, x_{r-1} на F точки $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{r-1})$ независимы и $\sigma \neq 0$ на $p_2^{-1}(s)$. Трудность, однако, в том, чтобы найти один $(r - 1)$ -набор, который годился бы для всех s .

Мы не будем решать эту задачу; на самом деле может оказаться, что такого $(r - 1)$ -набора не существует. Вместо этого мы обобщим наш метод построения сечения s . Начнем с выбора совокупности из $Nr - 1$ точек на F . Мы сгруппируем их в $N - 1$ наборов по r точек и один набор

из $r - 1$ точек:

$$(V) \quad \begin{aligned} & \{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,r}\} \\ & \{x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,r}\} \\ & \vdots \quad \vdots \\ & \{x_{N-1,1}, x_{N-1,2}, \dots, x_{N-1,r}\} \\ & \{x_{N,1}, x_{N,2}, \dots, x_{N,r}\} \end{aligned}$$

Проделав для последних $r - 1$ точек то же построение, что и выше, получим

$$\sigma_N \in H^0\left(F \times S, \mathcal{L} \otimes p_2^*\left\{(\wedge^r \mathcal{E})^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^{r-1} \mathcal{M}_{x_N, i}\right]\right\}\right).$$

Для каждого из других наборов точек, однако, рассмотрим гомоморфизм

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^r h_{x_k, i} : \mathcal{E} \rightarrow \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_{x_k, i}$$

И

$$\wedge \tilde{h}: \wedge'(\mathcal{E}) \rightarrow \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_{x_k, i}$$

Это дает

$$h': \mathcal{O}_S \rightarrow (\wedge^r(\mathcal{E}))^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_{x_{h_i(i)}} \right]$$

и, следовательно, сечение

$$\sigma_k \in H^0\left(F \times S, \ p_2^*\left\{(\wedge^r(\mathcal{E}))^{-1} \otimes \left[\bigotimes_{i=1}^r \mathcal{M}_{x_{k+i}}\right]\right\}\right).$$

Теперь перемножим все это тензорно и получим

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_N \in$$

$$\in H^0(F \times S, \mathcal{L} \otimes p_2^* \left((\wedge^r(\mathcal{E}))^{-N} \otimes \left[\bigotimes_{\substack{\text{Bee} \\ k, i}} \mathcal{M}_{x_k, i} \right] \right))$$

Для сокращения записи положим

$$(\wedge^r(\mathcal{E}))^{-N} \otimes \left[\bigotimes_{\substack{\text{Bce} \\ i, k}} \mathcal{M}_{x_k, i} \right] = \mathcal{K}.$$

Пучок \mathcal{K} , с точностью до канонического отождествления, не зависит от группировки (y). Поэтому для каждой

группировки (γ) мы можем образовать сечение

$$\sigma_\gamma \in H^0(F \times S, \mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{K})).$$

Предположим, что каждому γ мы приписали некоторый скаляр $a_\gamma \in k$. Тогда определены также сечения $\sum_\gamma a_\gamma \sigma_\gamma$.

Главная теорема. Выбрав подходящим образом ξ , N , $Nr - 1$ точек на F и скаляры a_γ , мы можем добиться следующего результата:

для всех обратимых пучков \mathcal{L} на F типа ξ
каноническое сечение $\sum_\gamma a_\gamma \sigma_\gamma \in H^0(F, \mathcal{L})$
никогда не равно нулю.

Допустим, что мы это доказали; тогда сечение $\sum a_\gamma \delta_\gamma$ всегда определяет относительный эффективный дивизор Картье и, следовательно, сечение s функтора Φ оказывается найденным, а схема $P(\xi)$ — построенной.

ЛЕКЦИЯ 20

Независимые 0-циклы на поверхности

В этой лекции мы рассмотрим вопрос об отыскании конечного множества точек на данной поверхности, которые находятся, грубо говоря, „в общем положении“. Зададим поверхность F и очень обильный обратимый пучок \mathcal{L} на F .

1°. **Определение.** Назовем 0-циклом \mathfrak{A} степени N на F формальную сумму N (не обязательно различных) замкнутых точек на F :

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^N P_i.$$

Определение. 0-цикл $\sum P_i$ называется λ -независимым, если для всех кривых $D \subset F$

$$[\text{число точек } P_i \text{ в } \text{Supp}(D)] \leq \lambda \cdot (\deg(D))^2.$$

Сначала выясним, какие 0-циклы на плоскости независимы; если, например, 0-цикл 2-независим, то никакие три точки этого цикла не коллинеарны, никакие его 9 точек не лежат на одной конике и т. д. Конечно, это очень слабое требование: не существует причин, по которым даже 6 точек должны были бы лежать на одной конике. Для построения независимых 0-циклов индукцией по их степени удобно доказать самый сильный результат:

Предложение 0. Для всех N существует 0-цикл $\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^N P_i$ степени N на P_2 , такой, что для всех подмножеств $S \subset \{1, 2, \dots, N\}$ и для всех целых n , если $L_{n,S} = \{f \mid f \text{ — однородная форма от } X_0, X_1, X_2 \text{ степени } n\}$, такая, что $f(P_i) = 0$ при $i \in S$, то:

$$\text{а) } L_{n,S} = (0), \text{ когда } \text{Card}(S) \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

б) $\dim L_{n,S} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \text{Card}(S)$ в остальных случаях.

Доказательство. При $N=1$ пусть $\mathfrak{A} = P_1$ — любая замкнутая точка. Пусть уже построен цикл $\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{N-1} P_i$. Мы должны выбрать P_N так, чтобы цикл $\mathfrak{A} + P_N$ удовлетворял всем условиям; теперь уже не нужно заботиться о подмножествах $S \subset \{1, 2, \dots, N-1\}$, поскольку с ними все в порядке. Пусть, скажем, $T \subset \{1, 2, \dots, N-1\}$ и $S = T \cup \{N\}$. Пусть, кроме того, $L_{n,T}$ и $L_{n,S}$ — линейные пространства, определенные выше. Тогда наши требования сводятся к следующему:

$$L_{n,S} \subsetneq L_{n,T},$$

если $L_{n,T} \neq (0)$, т. е. если $\text{Card}(T) < (n+1)(n+2)/2$. Действительно, по индукции, $\dim(L_{n,T})$ задается формулами а) и б); $L_{n,S}$ имеет коразмерность не больше 1 в $L_{n,T}$. Таким образом, если это собственное подпространство, то его размерность задается теми же формулами а) и б).

Пусть $Z_{n,T}$ — пересечение плоских кривых, определенных формами $f \in L_{n,T}$. Тогда

$$\{L_n, s \subsetneq L_{n,T}\} \Leftrightarrow \{P_N \notin Z_{n,T}\}.$$

Ясно, что если $P_N \in Z_{n,T}$, то условие $f(P_N) = 0$ излишне, и поэтому $L_{n,s} = L_{n,T}$. Но если $P_N \notin Z_{n,T}$, то существует форма $f \in L_{n,T}$, такая, что $f(P_N) \neq 0$, и поэтому $f \in L_{n,T} = L_{n,s}$.

Более того, $Z_{n,T} \supset Z_{n+1,T}$. В самом деле, пусть $Q \in Z_{n+1,T}$, и пусть $f \in L_{n,T}$. Предположим, что $f(Q) \neq 0$. Пусть g — линейная форма от X_0, X_1, X_2 , не являющаяся нулем в Q . Тогда $f \cdot g \in L_{n+1,T}$ и $f \cdot g(Q) \neq 0$ — противоречие. Поэтому $f(Q) = 0$ и $Z_{n,T} \supset Z_{n+1,T}$. Кроме того, по условиям а) и б) для T заключаем, что $Z_{n,T} = P_2$ тогда и только тогда, когда $\text{Card}(T) \geq (n+1)(n+2)/2$.

Объединяя все это вместе, получаем условия на P_N :

$$P_N \notin \bigcup_{T \subset \{1, 2, \dots, N-1\}} (Z_{v(T), T}),$$

где $v(T)$ — наименьшее n , такое, что

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} > \text{Card}(T).$$

Точка P_N с этим свойством, очевидно, существует, ч. т. д.

Следствие. Для всех N существуют 2-независимые 0-циклы на P_2 степени N .

Доказательство. Только что построенный цикл \mathfrak{X} обладает тем свойством, что самое большое $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right]$ его точек находятся на любой заданной кривой степени n . Так как

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \leq 2 \cdot n^2$$

для всех $n \geq 1$, получаем утверждение следствия.

Теперь рассмотрим произвольную поверхность F вместо плоскости.

Предложение 1. Пусть F — неособая проективная поверхность и $\mathcal{O}(1)$ — очень обильный обратимый пучок. Существует положительное λ , такое, что на поверхности F имеются λ -независимые 0-циклы любой степени N .

Доказательство. Пусть вложение $F \subset P_n$ определено пучком $\mathcal{O}(1)$. Как и в лекции 16, существует проекция P_n на P_2 , которая определяет конечный плоский морфизм

$$\pi: F \rightarrow P_2.$$

Более того, мы доказали в лекции 16, что если $D \subset F$ — любая кривая, то

$$\deg(D) = \deg \pi_*(D).$$

Пусть h — степень π , т. е. ранг локально свободного пучка $\pi_*(\mathcal{O}_F)$. (В действительности $h = (\mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1))$, но это к делу не относится.) Положим $\lambda = 3h$. При заданном N положим $N_0 = [N/h]$, т. е. $N = h \cdot N_0 + r$, где $0 \leq r \leq h - 1$. Выберем 2-независимый 0-цикл b на P_2 степени N_0 . Пусть $\mathfrak{A}' = \pi^*(b)$; как определено π^* ?

Определение.

a) $\pi^*(\sum_i Q_i) = \sum_i \pi^*(Q_i)$;

б) если $Q \in P_2$ — замкнутая точка, то пусть $\pi^{-1}(Q) = \{P_1, \dots, P_r\}$ в теоретико-множественном смысле. Тогда теоретико-схемный слой задается так:

$$\pi^{-1}(Q) = \text{Spec} \{\pi_*(\mathcal{O}_F)_Q \otimes \mathcal{H}(Q)\}$$

и $\pi_*(\mathcal{O}_F)_Q \otimes \mathcal{H}(Q) = \bigoplus_{i=1}^r A_i$, где A_i — артиново локальное кольцо, аффинным спектром которого является точка P_i .

$$\pi^*(Q) = \sum_{i=1}^r \dim_k(A_i) \cdot P_i.$$

Заметим, что степень $\pi^*(\mathfrak{A})$ в h раз больше степени \mathfrak{A} . Наконец, пусть P_1, \dots, P_q — любые q точек в F , и пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \sum_{i=1}^q P_i$. Тогда я утверждаю, что \mathfrak{A} является

λ -независимым циклом степени N . Пусть $D \subset F$ — любая кривая:

$$\begin{aligned} [\text{Число точек из } \mathfrak{A} \text{ в } \text{Supp}(D)] &\leqslant \\ &\leqslant q + [\text{Число точек из } \mathfrak{A}' \text{ в } \text{Supp}(D)] \leqslant \\ &\leqslant h - 1 + h [\text{Число точек из } b \text{ в } \text{Supp}(\pi_*(D))] \leqslant \\ &\leqslant h - 1 + 2h [\deg(\pi_*(D))]^2 \leqslant \\ &\leqslant 3h [\deg(D)]^2. \end{aligned}$$

2°. В этом разделе мы хотим показать, что λ -независимые 0-циклы хороши и в некоторых других отношениях. Введём сначала одно новое понятие.

Определение. 0-цикл \mathfrak{A} на P_n называется *строго устойчивым*, если для всех гиперплоскостей $H \subset P_n$

$$[\text{Число точек из } \mathfrak{A} \text{ в } H] \leqslant \frac{\deg(\mathfrak{A})}{n+1}.$$

Предложение 2. Пусть \mathfrak{A} — строго устойчивый 0-цикл степени $r(n+1)$. Тогда существует группировка (γ):

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^r b_i,$$

где b_i есть 0-цикл степени $n+1$, состоящий из $n+1$ проективно независимых точек, т. е. точек, не содержащихся ни в какой гиперплоскости.

Доказательство. Рассмотрим все группировки

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^l b_i + \mathfrak{A}',$$

где каждый цикл b_1, \dots, b_l состоит из $n+1$ независимых точек. Выберем такую группировку, в которой l максимально; мы хотим показать, что $l = r$. Пусть L — линейное пространство, порожденное точками из \mathfrak{A}' . Мы проведем вторичную индукцию по $\dim L$. Ясно, что если $L = P_n$, то можно найти $n+1$ независимых точек в \mathfrak{A}' и образовать новый цикл b_{l+1} из них, так что l не максимально. Поэтому $\dim L < n$. Теперь выберем такую группировку,

чтобы $\dim L$ была максимальной среди всех группировок с максимальным l .

Я утверждаю, что для некоторого i , $1 \leq i \leq l$, 0-цикл b_i не пересекается с L . Если бы это было не так, то одна точка из каждого b_i была бы в L . Это дало бы по меньшей мере $l + \deg(\mathfrak{A}')$ точек в L . Но тогда

$$\begin{aligned} m = \frac{\deg(\mathfrak{A})}{n+1} &\geq [\text{Число точек из } \mathfrak{A} \text{ в } L] \geq \\ &\geq l + \deg(\mathfrak{A}') = l + (m - l)(n + 1) > m. \end{aligned}$$

Это противоречие доказывает наше утверждение.

Теперь пусть 0-цикл b_1 не пересекается с L . Пусть $b_1 = \sum_{i=0}^n Q_i$, пусть $H(l)$ — линейная оболочка всех точек Q_0, \dots, Q_n , кроме Q_l . С другой стороны, положим $q = \dim L$ и выберем $q+1$ точек P_0, P_1, \dots, P_q из \mathfrak{A}' , которые порождают L . Пусть P^* — любая точка из \mathfrak{A}' , отличная от P_0, P_1, \dots, P_q . Так как точки Q_i независимы, имеем

$$\bigcap_{l=0}^n H(l) = \emptyset.$$

Поэтому существует i , скажем i_0 , такое, что $P^* \notin H(i_0)$. Положим

$$b_1^* = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n Q_i + P^*$$

и $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}' - P^* + Q_{i_0}$. Так как $P^* \notin H(i_0)$, то b_1^* по-прежнему состоит из $n+1$ независимых точек. Но теперь \mathfrak{A}^* содержит P_0, P_1, \dots, P_q и Q_{i_0} . Так как b_1 не пересекается с L , то $Q_{i_0} \notin L$. Поэтому эти точки порождают линейное пространство, большее чем L , и $\dim L$ не максимальна.

Следствие. Пусть \mathfrak{A} — строго устойчивый 0-цикл степени $r(n+1)-1$. Тогда для всех замкнутых точек $Q \in \mathbb{P}_n$ существует группировка (γ)

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{r-1} b_i + b_r^*$$

где b_1, \dots, b_{r-1} — циклы из $n+1$ независимых точек и где b_r^* — цикл из n независимых точек, порождающих гиперплоскость H , такую, что $Q \notin H$.

Доказательство. Нужно применить предложение к $\mathfrak{A} + Q$.

Связь между понятиями λ -независимости и строгой устойчивости устанавливает

Предложение 3. Пусть F — неособая проективная поверхность, пусть $\mathcal{O}(1)$ — данный очень обильный пучок на F , и пусть \mathfrak{A} есть λ -независимый (относительно $\mathcal{O}(1)$) 0-цикл на F . Пусть \mathcal{Z} — обратимый пучок на F , порожденный своими сечениями, и пусть

$$\varphi: F \rightarrow \mathbb{P}_n$$

—канонический морфизм, определенный \mathcal{Z} и его сечениями. Если $\deg(\mathfrak{A}) > \lambda(n+1)(\deg \mathcal{Z})^2$, то $\Phi_*(\mathfrak{A})$ — строго устойчивый 0-цикл на \mathbb{P}_n .

Доказательство. Если $H \subset \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость, то $\Phi^*(H)$ определено и является кривой в классе дивизоров обратимого пучка \mathcal{Z} . Поэтому

$$\begin{aligned} [\text{Число точек из } \Phi_*(\mathfrak{A}) \text{ в } H] &\leqslant \\ &\leqslant [\text{Число точек из } \mathfrak{A} \text{ в } \text{Supp}(\Phi^*(H))] \leqslant \\ &\leqslant \lambda [\deg(\Phi^*(H))]^2 = \lambda [\deg(\mathcal{Z})]^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{\deg(\mathfrak{A})}{n+1}. \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 21

Схема Пикара: вывод

Мы можем теперь завершить доказательство существования схемы Пикара. Напомним, что мы сделали основной выбор численного класса ξ обратимых пучков. Позже мы наложим на ξ дополнительные условия, но пока что мы знаем только, что значения $\deg(\xi)$ и $\chi(\xi)$ (определенные

в силу предложения 3 из лекции 12) удовлетворяют предположениям теоремы 2 из лекции 17. Пусть λ — такое целое число, что на F существуют λ -независимые 0-циклы всех степеней. Выберем целое число N так, чтобы

$$N > \lambda \cdot [\deg(\xi)]^2,$$

и найдем λ -независимый 0-цикл \mathcal{Y} на F степени $N \cdot \chi(\xi) - 1$. Пусть теперь \mathcal{L} — любой обратимый пучок типа ξ на F ; тогда

- a) $H^1(F, \mathcal{L}) = H^2(F, \mathcal{L}) = (0)$, так что
 $\dim H^0(F, \mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L}) = \chi(\xi);$

- b) \mathcal{L} очень обилен.

Пусть $\varphi: F \rightarrow P_{r-1}$ — замкнутое погружение, определенное \mathcal{L} и его сечениями ($r = \chi(\xi)$). Тогда для всех замкнутых точек $x \in F$ цикл $\varphi_*(\mathcal{Y} + x)$ строго устойчив по предложению 3 предыдущей лекции. Кроме того, для всех $x \in P_{r-1}$ цикл \mathcal{Y} может быть записан в виде

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^{N-1} b_i + b_N^*$$

таким образом, для $1 \leq i \leq N-1$ цикл $\varphi_*(b_i)$ состоит из r независимых точек в P_{r-1} , а для $i=N$ цикл $\varphi_*(b_N^*)$ состоит из $r-1$ независимых точек, порождающих гиперплоскость H , причем $x \notin H$ (следствие из предложения 2 лекции 20).

Теперь напомним определения из лекции 19. С помощью $Nr-1$ точек из \mathcal{Y} и их группировок (γ) в циклы b_i определяются сечения

$$\sigma_\gamma \in H^0(F, \mathcal{L} \otimes_k K),$$

где K — некоторое 1-мерное векторное пространство над k , канонически конструируемое по \mathcal{L} и \mathcal{Y} (K вводится здесь не из педантизма, а чтобы читатель не заподозрил, что мы незаметно спрятали что-то в рукав).

При сделанных выше предположениях $\sigma_\gamma \neq 0$.

Доказательство. По определению, $\sigma_\gamma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_N$, где $1 \leq i \leq N-1$, σ_i — канонический

элемент 1-мерного векторного пространства

$$K_i = (\wedge' H^0(H, \mathcal{L}))^{-1} \otimes [\otimes_{Q \in b_i} \mathcal{M}_Q],$$

$$\mathcal{M}_Q = \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}(Q).$$

Если $i = N$, то σ_N — каноническое сечение $\mathcal{L} \otimes_k K_N$, где K_N — одномерное векторное пространство

$$K_N = (\wedge' H^0(F, \mathcal{L}))^{-1} \otimes [\otimes_{Q \in b_N^*} \mathcal{M}_Q].$$

Мы видели в лекции 19, что $\sigma_N \neq 0$, если ядро всех гомоморфизмов

$$H^0(F, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{M}_Q$$

для $Q \in b_N^*$ одномерно, и тогда σ_N — ненулевой элемент ядра. Более того, этот элемент соответствует сечению $h \in H^0(P_{r-1}, \mathcal{O}(1))$, такому, что $h(\phi(Q)) = 0$ для всех $Q \in b_N^*$. Но 0-цикл $\phi_*(b_N^*)$ порождает гиперплоскость H , не содержащую x . Поэтому такой элемент h однозначно определен с точностью до скаляра и $h(x) \neq 0$. Следовательно, $\sigma_N \neq 0$.

Как обстоят дела с другими σ_i ? Возвращаясь к определению, устанавливаем, что они не равны нулю тогда и только тогда, когда все r гомоморфизмов

$$H^0(F, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{M}_Q$$

для $Q \in b_i$ независимы; это эквивалентно требованию, чтобы они индуцировали изоморфизм

$$\wedge' H^0(F, \mathcal{L}) \rightarrow \otimes_{Q \in b_i} \mathcal{M}_Q.$$

С другой стороны, это то же самое, что потребовать независимости r гомоморфизмов

$$H^0(P_{r-1}, \mathcal{O}(1)) \rightarrow \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{H}(\phi(Q))$$

для $Q \in b_i$. Это условие выполнено, так как 0-цикл $\phi_*(b_i)$ состоит из r независимых точек.

Следствие. Для фиксированного \mathcal{L} и различных группировок (γ) элементы σ_γ порождают $H^0(F, \mathcal{L} \otimes_k K)$

Доказательство. В проведенном выше доказательстве элемент h можно выбрать так, чтобы $h(x) \neq 0$ для любой точки $x \in P_{r-1}$. Поэтому множество тех h , которые таким образом встречаются, порождает векторное пространство $H^0(P_{r-1}, \mathcal{O}(1))$. Таким образом, множество элементов σ_N , которые можно построить, порождает векторное пространство $H^0(F, \mathcal{L} \otimes_k K_N)$. Поэтому и множество σ_y порождает $H^0(F, \mathcal{L} \otimes_k K)$, ч. т. д.

Оставшееся препятствие заключается в том, что только некоторые группировки (y) дают ненулевые элементы в пространстве $H^0(F, \mathcal{L} \otimes_k K)$. Если \mathcal{L} меняется, то какие (y) следует выбирать? Но у нас есть еще одна возможность: мы можем выбрать скаляры a_y , по одному для каждой группировки (y) , так, чтобы сумма $\sum a_y \sigma_y$ не равнялась нулю для любого \mathcal{L} . Чтобы это сделать, однако, мы должны обратиться к одному очень представительному семейству обратимых пучков типа ξ . Оно задается так: пусть $D(\xi) \subset F \times C(\xi)$ — универсальное семейство кривых типа ξ . Рассмотрим пучок $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{F \times C(\xi)}(D(\xi))$. Это семейство обратимых пучков над $C(\xi)$, таких, что *каждый* обратимый пучок на F типа ξ появляется на одном из слоев. Но размерность базы растет вместе с ξ , что неудобно. Вместо этого возьмем один численный тип ξ_0 , удовлетворяющий всем тем же условиям, что и ξ , и пусть ξ — гораздо более обильный численный тип, а именно пусть

$$(*) \quad \chi(\xi) > \dim C(\xi_0).$$

[Этого можно добиться, сначала выбрав ξ_0 , а затем ξ в виде $\xi_0 + m\eta$ для большого m , где $\eta \in \text{Num}(F)$ представляет $\mathcal{O}(1)$.] Зафиксируем один обратимый пучок \mathcal{M} типа $\xi - \xi_0$, и пусть $D(\xi_0) \subset F \times C(\xi_0)$ — универсальное семейство кривых типа ξ_0 . Тогда

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{F \times C(\xi_0)}(D(\xi_0) \otimes p_1^*(\mathcal{M}))$$

есть семейство обратимых пучков типа ξ , которое также индуцирует каждый возможный пучок типа ξ на некотором слое. Это так, потому что если \mathcal{L} — любой пучок типа ξ , то $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1}$ имеет тип ξ_0 , так что $H^0(F, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1}) \neq (0)$. Поэтому $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1} \cong \mathcal{O}_F(D_0)$ и $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_F(D_0) \otimes \mathcal{M}$

для некоторой кривой D_0 . Если D_0 определяет замкнутую точку $\delta \in C(\xi_0)$, то \mathcal{L} выступает как пучок, индуцированный семейством \mathfrak{L} на слое над δ .

Теперь обозначим $C(\xi_0)$ через S , но пусть \mathfrak{L} на $F \times S$ по-прежнему означает только что построенное семейство пучков. Пусть $\mathcal{E} = p_{2,*}(\mathfrak{L})$. Заметим, что в силу (*) ранг \mathcal{E} больше, чем размерность S . Пусть

$$\mathcal{K} = (\wedge^r \mathcal{E})^{-N} \otimes \{\otimes_{Q \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_Q\}$$

и $\mathfrak{M}_Q = i_Q^*(\mathfrak{L})$.

Для всех группировок (γ) цикла \mathfrak{A} пусть

$$\sigma_\gamma \in H^0(F \times S, \mathfrak{L} \otimes p_2^*(\mathcal{K})) = H^0(S, \mathcal{E} \otimes \mathcal{K})$$

— соответствующее сечение.

Если скаляры a_γ обладают тем свойством, что для всех замкнутых точек $s \in S$ образ сечения $\sum a_\gamma \sigma_\gamma$ в $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}(s)$ не нулевой, то $\sum a_\gamma \sigma_\gamma$ удовлетворяет всем требованиям. Действительно, вся конструкция коммутирует с расширением базы, и поэтому если \mathcal{L} — пучок, индуцированный семейством \mathfrak{L} на $p_2^{-1}(s)$, то образ $\sum a_\gamma \sigma_\gamma$ — это соответствующее $\sum a_\gamma \sigma_\gamma$ сечение в $H^0(F, \mathcal{L}) \otimes K$. Каждый \mathcal{L} встречается над некоторой точкой s . С другой стороны, сечения σ_γ имеют достаточно свободы: для каждой замкнутой точки $s \in S$ образы σ_γ порождают векторное пространство $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}(s)$ (по доказанному выше следствию). Все, что нам нужно, теперь следует из простой леммы Серра.

Лемма (Серр). Пусть X — (алгебраическая) схема, и пусть \mathcal{E} — локально свободный пучок ранга r на X . Пусть $V \subset H^0(X, \mathcal{E})$ — конечномерное векторное пространство; предположим, что

(1) $r > \dim(X)$,

(2) для всех замкнутых точек $x \in X$ отображение из V в $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}(x)$ сюръективно.

Тогда существует элемент $s \in V$, имеющий ненулевой образ в каждом пространстве $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}(x)$.

Доказательство. Пусть $N = \dim(V)$, и пусть e_1, \dots, e_N — базис V . Построим гомоморфизм h :

$$0 \rightarrow \mathfrak{N} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_X^N \xrightarrow{h} \mathcal{E} \rightarrow 0,$$

положив $h(a_1, \dots, a_N) = \sum a_i e_i$; он сюръективен в силу (2). Пусть \mathfrak{N} — ядро гомоморфизма h ; пучок \mathfrak{N} локально свободен ранга $N - r$; в самом деле, умножая тензорно на поле вычетов $\mathcal{H}(x)$ любой точки $x \in X$, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^{6X}(\mathcal{E}, \mathcal{H}(x)) &\rightarrow \mathfrak{N} \otimes \mathcal{H}(x) \xrightarrow{\lambda_x} \mathcal{H}(x)^N \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}(x) \rightarrow 0 \\ &\parallel \\ &(0) \end{aligned}$$

$$\text{и } \text{Tor}_1^{6X}(\mathfrak{N}, \mathcal{H}(x)) = (0).$$

Обратимся к двойственной точной последовательности:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_X^N \xrightarrow{\hat{\lambda}} \text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Тогда $\hat{\lambda}$ индуцирует [см. EGA 2, (4.1) и (3.6)] морфизм

$$P(\lambda): P[\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)] \rightarrow P(\mathcal{O}_X^N) = X \times \mathbb{P}_{N-1}.$$

Но $P[\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)]$ локально является произведением X на проективное пространство размерности на единицу меньшей, чем ранг $\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)$. Следовательно, по предположению (1),

$$\dim P[\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)] = \dim X + N - r - 1 < N - 1.$$

Рассмотрим композицию

$$p_2 \circ P(\lambda): P[\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)] \rightarrow \mathbb{P}_{N-1}.$$

Так как размерность первой схемы меньше, чем размерность \mathbb{P}_{N-1} , этот морфизм не сюръективен. Пусть $a \in \mathbb{P}_{N-1}$ — замкнутая точка, не принадлежащая $\text{Im}(p_2 \circ P(\lambda))$, и пусть a_1, \dots, a_N — однородные координаты a . Тогда я утверждаю, что $\sum a_i e_i$ — требуемое сечение. Предположим, что $\sum a_i e_i$ равна нулю в замкнутой точке $x \in X$. Тогда точка (a_1, \dots, a_N) лежит в векторном подпространстве $\mathfrak{N} \otimes \mathcal{H}(x)$ пространства $\mathcal{O}_X^N \otimes \mathcal{H}(x)$ относительно включения λ_x . Поэтому (a_1, \dots, a_N) определяет линейный

функционал на $\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{H}(x)$ и, следовательно, гомоморфизм P из симметрической алгебры на $\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{H}(x)$ в $\mathcal{H}(x)$. Максимальный идеал \mathfrak{m}_x и ядро гомоморфизма P определяют градуированный пучок идеалов в этом градуированном пучке алгебр, т. е. точку из $P[\text{Hom}(\mathfrak{N}, \mathcal{O}_X)]$ (см. добавление к лекции 5). Отсюда немедленно следует, что $p_2 \circ P(\lambda)$ отображает эту точку в a , и мы приходим к противоречию.

ЛЕКЦИЯ 22

Характеристическое отображение семейства кривых

Теперь мы готовы к штурму проблем существования А и Б, поставленных в лекции 2. Начнем со второй из них. Прежде всего точно определим „характеристическое отображение“ p , упомянутое в лекции 2: это главное линейное приближение к задаче о семействах кривых. Сначала приведем некоторые предварительные сведения.

(А) Нам понадобится следующий простой критерий регулярности:

Предложение. Пусть \mathcal{O} — некоторое локальное кольцо и $k \subset \mathcal{O}$ — подполе, изоморфное полю вычетов. Тогда \mathcal{O} регулярно в том и только в том случае, когда (*) для всех конечномерных локальных k -алгебр A, A_0 и сюръективных k -гомоморфизмов $A \rightarrow A_0$ отображение

$$\text{Hom}_k(\mathcal{O}, A) \rightarrow \text{Hom}_k(\mathcal{O}, A_0)$$

сюръективно.

Доказательство. Условие регулярности \mathcal{O} и условие (*) эквивалентны тем же условиям на пополнение $\hat{\mathcal{O}}$ кольца \mathcal{O} . Поэтому можно считать, что \mathcal{O} полное, и, следовательно, по теореме о структуре полных локальных колец, существует сюръективный гомоморфизм

$$k[[X_1, \dots, X_n]] \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}.$$

Более того, мы можем считать, что $\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n)$ индуцируют базис в $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ($\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$). В этом случае, если \mathcal{O} регулярно, то φ — изоморфизм и (*) легко проверяется для колец формальных степенных рядов.

Обратно, начнем с гомоморфизма

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\Psi_2} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 \leftarrow \simeq k[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1, \dots, X_n)^2.$$

Пользуясь (*), поднимем его до гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \psi_{m+1} & k[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1, \dots, X_n)^{m+1} \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\Psi_m} & k[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1, \dots, X_n)^m. \end{array}$$

Переходя к пределу, получаем гомоморфизм

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\Psi} k[[X_1, \dots, X_n]].$$

Очевидно, что $\psi \circ \varphi$ — автоморфизм кольца $k[[X_1, \dots, X_n]]$; так как φ сюръективно, это означает, что φ — изоморфизм, т. е. что \mathcal{O} регулярно, ч. т. д.

(Б) Предположим, что A — конечномерная локальная k -алгебра. Мы будем довольно часто иметь дело со схемами $F \times \text{Spec}(A)$, поэтому удобно с самого начала собрать вместе основные сведения об их структуре.

(1) Как топологическое пространство $F \times \text{Spec}(A)$ — это в точности F . Изменяется лишь структурный пучок.

(2) Пучок $\mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(A)}$ канонически изоморчен $\mathcal{O}_F \otimes_k A$. Действительно, заметим, что проекции $p_1: F \times \text{Spec}(A) \rightarrow F$ и $p_2: F \times \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ превращают $\mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(A)}$ соответственно в пучок \mathcal{O}_F -алгебр и пучок A -алгебр. Поэтому существует канонический гомоморфизм

$$(*) \quad \mathcal{O}_F \otimes_k A \rightarrow \mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(A)}.$$

Но так как для открытых аффинных множеств $U \subset F$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_F \otimes_k A) = \Gamma(U, \mathcal{O}_F) \otimes_k A$$

и

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(A)}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_F) \otimes_k A,$$

то (*) есть изоморфизм пучков.

(3) Далее, пусть $1 = e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис A над k , где e_2, \dots, e_n порождают максимальный идеал M . Тогда

$$\mathcal{O}_F \times \text{Spec}(A) = \mathcal{O}_F + \sum_{i=2}^n e_i \mathcal{O}_F$$

и

$$\mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(A)}^* = \mathcal{O}_F^* + \sum_{i=2}^n e_i \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F^* \left(1 + \sum_{i=2}^n e_i \mathcal{O}_F \right).$$

Кроме того, усеченный ряд для экспоненты определяет гомоморфизм

$$\left(\sum_{i=2}^n e_i \mathcal{O}_F \right)_+ \rightarrow \left(1 + \sum_{i=2}^n e_i \mathcal{O}_F \right)_x$$

при условии, что $e^p = 0$ при всех $e \in M$, $p = \text{char}(k)$.

Лемма. Усеченное экспоненциальное отображение всегда является изоморфизмом.

Доказательство. Усеченный логарифм дает обратное отображение.

Мы подходим теперь к главной цели этой лекции: исследовать семейства кривых на F над $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$. Мы обозначим $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ через I ; при этом I является схемой над k , а пополнение

$$k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \rightarrow k$$

определяет замкнутое погружение спектра $\text{Spec}(k)$ в I . Поэтому семейство кривых над I определяет в точности одну обычную кривую на F . Схема I есть как бы олицетворение идеи вектора: она состоит из одной точки и минимума „касательного материала“, торчащего в одном направлении. Семейство кривых над I — это по существу объединение кривой на F и бесконечно малой деформации этой кривой.

Зафиксируем некоторую кривую $D \subset F$.

Определение. $\mathcal{N}_D = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \{\mathcal{O}_F(D)\}$.

Это обратимый пучок на D , и если D — неособая, можно показать, что он является пучком ростков сечений нормального расслоения. Отметим точную последователь-

ность:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F(D) \rightarrow \mathcal{N}_D \rightarrow 0.$$

Предложение. Существует естественный изоморфизм между множеством семейств кривых $\mathfrak{D} \subset F \times I$ над I , которые продолжают $D \subset F$, и множеством глобальных сечений пучка \mathcal{N}_D .

Доказательство. Определить дивизор Картье $\mathfrak{D} \subset F \times I$ — это все равно, что задать открытое покрытие $\{U_i\}$ для F и локальные уравнения для \mathfrak{D} . В силу (Б) локальные уравнения имеют вид

$$F_i = G_i + e \cdot H_i,$$

где

$$G_i, H_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_F).$$

Индукционная кривая на самой схеме F определяется первыми членами G_i . Допустим, что этой кривой является D . Напомним, что на $U_i \cap U_j$ мы должны иметь

$$F_i = (\text{обратимый элемент}) \cdot F_j,$$

или

$$(G_i + eH_i) = (a_{ij} + eb_{ij}) \cdot (G_j + eH_j),$$

где $a_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_F^*)$, $b_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_F)$. Это дает уравнения

$$G_i = a_{ij} \cdot G_j,$$

$$H_i = a_{ij}H_j + b_{ij}G_j,$$

откуда

$$\frac{H_i}{G_i} - \frac{H_j}{G_j} = b_{ij} \cdot a_{ji}.$$

Но так как G_i — локальное уравнение для D , H_i/G_i является сечением пучка $\mathcal{O}_F(D)$, и эти уравнения означают, что $\{H_i/G_i\}$ склеиваются в сечение пучка \mathcal{N}_D . Это и есть сечение, соответствующее \mathfrak{D} .

Теперь предположим, что относительно некоторого открытого покрытия $\{U_i\}$ два множества локальных уравнений F_i, F'_i дают одно и то же сечение пучка \mathcal{N}_D .

Тогда

$$\frac{H_i}{G_i} - \frac{H'_i}{G'_i} = c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_F).$$

Так как G_i и G'_i являются локальными уравнениями для D , G_i/G'_i представляет собой обратимый элемент d_i в U_i . Это показывает, что

$$(G_i + \varepsilon H_i) = (d_i + \varepsilon c_i \cdot d_i) \cdot (G'_i + \varepsilon H'_i).$$

следовательно, два дивизора \mathfrak{D} и \mathfrak{D}' равны. Наконец, легко проверить, что каждое сечение пучка \mathcal{N}_D определяет дивизор \mathfrak{D} , продолжающий D указанным образом.

Следствие 1. Если заданы семейство кривых $\mathfrak{D} \subset F \times S$ и замкнутая точка $s \in S$, то существует канонический линейный гомоморфизм

$$\rho: \left\{ \begin{array}{c} \text{касательное пространство Зарисского} \\ T_s \text{ к } S \text{ в } s \end{array} \right\} \rightarrow H^0(F, \mathcal{N}_{D_s})$$

где $D_s \subset F$ — кривая, индуцированная \mathfrak{D}). Это и есть характеристическое отображение рассматриваемого семейства.

Доказательство. Для каждой точки $t \in T_s$ определено каноническое отображение

$$f: I \rightarrow S$$

с образом s (см. добавление к лекции 4). Тогда замена базы f доставляет семейство кривых $\mathfrak{D}_f \subset F \times I$, продолжающее D_s . По предложению \mathfrak{D}_f соответствует элементу $\rho(t) \in H^0(F, \mathcal{N}_{D_s})$. Чтобы показать, что ρ линейно, нужно воспользоваться функторной характеристикой структуры векторного пространства T_s (добавление к лекции 4) и проверить, что она согласуется со структурой, введенной нами непосредственно.

Следствие 2. Для универсального семейства кривых $\mathfrak{D} \subset F \times C(\xi)$ гомоморфизм ρ является изоморфизмом во всех замкнутых точках $s \in C(\xi)$.

Доказательство. Следуя предыдущему доказательству, заметим, что множество касательных векторов t всегда изоморфно множеству морфизмов f ; кроме того, множество сечений $\alpha \in H^0(F, \mathcal{N}_{D_s})$ изоморфно, в силу предложения, множеству семейств $\mathfrak{D} \subset F \times I$, продолжающих D_s . Но, по определению универсального семейства, каждое \mathfrak{D}' совпадает с \mathfrak{D}_f для единственного f , поэтому множество семейств \mathfrak{D}' и множество морфизмов f также изоморфны, ч. т. д.

Казалось бы, это и есть ответ на основную проблему Б из лекции 2. Но на самом деле это не так. Мы лишь обобщили определение семейства кривых и вместо интуитивно ясного понятия, когда базой является неособое многообразие, ввели „ненастоящие“ семейства, для которых касательное пространство Зарисского к базе может быть громадным, в то время как база состоит лишь из одной точки! Основная трудность задачи действительного построения семейств кривых заменяется вопросом, как установить, является ли универсальная база редуцированной или (что еще лучше) неособой.

Пример. Следующая конструкция принадлежит Севери и Заппа. Пусть C — эллиптическая кривая над k ; рассмотрим векторные расслоения \mathcal{E} ранга 2 над C , которые соответствуют точным последовательностям

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

По общей теории пучков такие расширения классифицируются элементами группы

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Но $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ есть 1-мерное векторное пространство; пусть \mathcal{E} соответствует его ненулевому элементу. Положим $F = P(\mathcal{E})$ (см. лекцию 5). Это линейчатая поверхность, т. е. существует каноническая проекция

$$\pi: F \rightarrow C,$$

превращающая F в расслоение над C со слоем P_1 . Его можно описать совсем явно. Пусть P, Q — две различные точки на C . С точностью до линейной замены существует единственная функция f на C с простыми полюсами в P

и Q и без других полюсов. Покрытие

$$C = (C - P) \cup (C - Q) = U_P \cup U_Q$$

и функция

$$f \in \Gamma(U_P \cap U_Q, \mathcal{O}_C)$$

дают одномерный коцикл Чеха на C , который представляет собой образующую для $H^1(C, \mathcal{O}_C)$, определенную однозначно (с точностью до скаляра). Можно проверить, что

$$F = [P_1 \times U_P] \cup [P_1 \times U_Q]$$

и что если t_P — координата на P_1 в первом куске, t_Q — во втором, то склеивание отождествляет замкнутые точки

$$\begin{aligned} (t_P, x) &\in P_1 \times U_P, \\ (t_Q, x) &\in P_1 \times U_Q, \end{aligned}$$

когда $x \in U_P \cap U_Q$, $t_P - t_Q = f$.

Кривые $(\infty) \times U_P$ и $(\infty) \times U_Q$ совпадают над $U_P \cap U_Q$, так как первая имеет локальное уравнение t_P^{-1} , вторая имеет локальное уравнение t_Q^{-1} и

$$(**) \quad t_P^{-1}/t_Q^{-1} = 1 - f \cdot t_P^{-1} \text{ — обратимый элемент в окрестности } (\infty) \times (U_P \cap U_Q).$$

Обозначим эту кривую через E . Кривая E есть сечение морфизма π , и поэтому она является неприводимой неособой кривой на F , изоморфной C . Кроме того,

$$\mathcal{O}_F(E) \cong \begin{cases} t_P \cdot \mathcal{O}_P & \text{в } P_1 \times U_P, \\ t_Q \cdot \mathcal{O}_P & \text{в } P_1 \times U_Q. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathcal{N}_E \cong \begin{cases} \mathcal{O}_B & \text{в } E \cap (P_1 \times U_P), \\ \mathcal{O}_B & \text{в } E \cap (P_1 \times U_Q) \end{cases}$$

и склеивание на пересечении описывается ограничением на E функции t_P^{-1}/t_Q^{-1} . В силу $(**)$ оно равно 1, следовательно, $\mathcal{N}_E \cong \mathcal{O}_B$ глобально на E . Поэтому

$$H^0(F, \mathcal{N}_E) \cong H^0(E, \mathcal{O}_E) \cong k.$$

Это означает, что универсальное семейство $C_F^{d,1}$ кривых степени d рода 1, содержащее E , имеет нетривиальное касательное пространство Зарисского в точке e , соответствующей E .

С другой стороны, легко проверить, что точка e является целой компонентой пространства $C_F^{d,1}$. Действительно, можно показать, что если вторая кривая $E' \subset F$ соответствует точке e' в той же компоненте $C_F^{d,1}$, что и e , то $E \cap E' = \emptyset$. [В самом деле, тогда пучок $\mathcal{O}_F(E')$ был бы деформацией пучка $\mathcal{O}_F(E)$, следовательно, пучок $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_F(E')$ был бы деформацией \mathcal{N}_E на E ; но первый имеет сечение, которое обращается в нуль на $E \cap E'$, а \mathcal{N}_E имеет сечение, которое нигде не обращается в нуль; так как эйлеровы характеристики этих пучков одинаковы, это значит, что $E \cap E' = \emptyset$.] Но степень E' над C должна равняться 1, как и степень E над C ; поэтому кривая E' должна была бы быть сечением π и иметь локальные уравнения

$$\begin{aligned} t_P = g_P(x) &\quad \text{в} \quad \pi^{-1}(U_P), \quad g_P \in \Gamma(U_P, \mathcal{O}_C), \\ t_Q = g_Q(x) &\quad \text{в} \quad \pi^{-1}(U_Q), \quad g_Q \in \Gamma(U_Q, \mathcal{O}_C). \end{aligned}$$

Тогда $g_P - g_Q = f$ и f — кограница Чеха, что приводит к противоречию.

ЛЕКЦИЯ 23

Основная теорема по Кодайре — Спенсеру

Мы можем теперь доказать теорему, сформулированную в лекции 2, для которой мы привели наброски двух аналитических доказательств. Мы докажем сильнейший известный ее вариант, относящийся к поставленному там вопросу Б.

Определение. Кривая $D \subset F$ называется *полурегулярной*, если отображение $H^1(\mathcal{O}_F(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{N}_D)$ нульевое.

Теорема (Севери — Кодайра — Спенсер). *Пусть $D_0 \subset F$ — кривая типа ξ . Пусть D_0 соответствует замкнутой точке $\delta \in C(\xi)$. Если*

- a) $\text{char}(k) = 0$,
 - б) D_0 полурегулярна,
- то схема $C(\xi)$ неособая в точке δ .*

Доказательство. Воспользуемся критерием из раздела (A) лекции 22. Пусть A — конечномерная локальная k -алгебра, $I \subset A$ — некоторый идеал и $\bar{A} = A/I$. Мы должны показать, что каждая кривая $\bar{D} \subset F \times \text{Spec}(\bar{A})$, продолжающая D_0 , продолжается до кривой $D \subset F \times \text{Spec}(A)$. Очевидно, можно считать, что $\dim I = 1$ и $I = \eta \cdot A$. Зададим локальные уравнения \bar{F}_l для \bar{D} в некотором аффинном открытом покрытии $\{U_l\}$ поверхности F . Для начала поднимем \bar{F}_l как-нибудь до элементов

$$F_l \in \Gamma(U_l, \mathcal{O}_F \otimes_k A).$$

Трудность в том, что они определяют кривую D только в том случае, когда F_l и F_j отличаются на *обратимый элемент* в $U_l \cap U_j$. Но во всяком случае существуют обратимые элементы \bar{G}_{lj} на $U_l \cap U_j$ в $(\mathcal{O}_F \otimes \bar{A})^*$, такие, что

$$\bar{F}_l = \bar{G}_{lj} \cdot \bar{F}_j.$$

Поднимем \bar{G}_{lj} произвольным образом до элементов $G_{lj} \in \Gamma(U_l \cap U_j, (\mathcal{O}_F \otimes A)^*)$. Тогда

$$F_l - G_{lj} F_j = \eta \cdot h_{lj}, \quad h_{lj} \in \Gamma(U_l \cap U_j, \mathcal{O}_F),$$

и мы должны показать, что при подходящем выборе F_l и G_{lj} мы можем обратить в нуль все h_{lj} . Сначала отметим тождество

$$\begin{aligned} \eta(h_{lj} + G_{lj} \cdot h_{jk}) &= F_l - G_{lj} F_j + G_{lj} (F_j - G_{jk} F_k) = \\ &= F_l - G_{lj} G_{jk} F_k = \\ &= \eta \cdot h_{lk} + (G_{lk} - G_{lj} G_{jk}) F_k. \end{aligned}$$

Пусть $G_{lj}^{(0)}$ и $F_k^{(0)}$ — образы G_{lj} и F_k в \mathcal{O}_F . Тогда имеем

$$h_{lj} + G_{lj}^{(0)} \cdot h_{jk} = h_{lk} + \left(\frac{G_{lk} - G_{lj} G_{jk}}{\eta} \right) \cdot F_k^{(0)}.$$

Так как $F_k^{(0)}$ — локальное уравнение для D_0 и $F_l^{(0)} = G_{lj}^{(0)} \cdot F_j^{(0)}$, это дает:

$$(*) \quad \frac{h_{lj}}{F_l^{(0)}} + \frac{h_{jk}}{F_j^{(0)}} = \frac{h_{lk}}{F_l^{(0)}} + \left(\frac{1 - G_{lj}G_{jk}G_{lk}^{-1}}{\eta} \right);$$

следовательно, $\left\{ \frac{h_{lj}}{F_l^{(0)}} \right\}_{\text{все } l, j}$ есть 1-мерный коцикл Чеха для пучка \mathcal{N}_D . Пусть он соответствует элементу $\mathfrak{H} \in H^1(\mathcal{N}_D)$.

\mathfrak{H} — препятствие для отыскания D ! Проверим, что если $\mathfrak{H} = 0$, то D существует. Действительно, рассмотрим замены

$$\begin{aligned} F'_l &= F_l + \eta f_l, \\ G'_{lj} &= G_{lj} + \eta \cdot g_{lj}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta \cdot h'_{lj} &= F'_l - G'_{lj} \cdot F'_j = \\ &= F_l - G_{lj}F_j + \eta f_l - \eta f_j \cdot G_{lj} - \eta F_j g_{lj} = \\ &= \eta(h_{lj} + f_l - f_j G_{lj} - F_j g_{lj}). \end{aligned}$$

Так как g_{lj} — произвольный элемент из $\Gamma(U_l \cap U_j, \mathcal{O}_F)$, то мы сможем обратить все h'_{lj} в 0, если добьемся того, чтобы

$$h_{lj} + f_l - f_j G_{lj}^{(0)} \in (F_j^{(0)})$$

при подходящем выборе $\{f_l\}$. Но это означает, что

$$-\frac{h_{lj}}{F_l^{(0)}} \equiv \frac{f_l}{F_l^{(0)}} - \frac{f_j}{F_j^{(0)}} \pmod{\mathcal{O}_F},$$

т. е. что $-\mathfrak{H}$ есть кограница Чеха в пучке \mathcal{N}_D . Это показывает, что D существует, если $\mathfrak{H} = 0$.

Далее, по предположению б) гомоморфизм

$$H^1(\mathcal{N}_D) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathcal{O}_F),$$

получающийся из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F(D) \rightarrow \mathcal{N}_D \rightarrow 0,$$

инъективен. Поэтому достаточно доказать, что $\partial(\mathfrak{H}) = 0$. Но поскольку сечения $h_{ij}/F_i^{(0)}$ пучка $\mathcal{O}_F(D)$ переводят коцепь, представляющую \mathfrak{H} , в коцепь со значениями в $\mathcal{O}_F(D)$, то из формулы (*) следует, что $\partial(\mathfrak{H})$ представляется 2-мерным коциклом Чеха

$$\sigma_{ijk} = \left[\frac{1 - G_{ij} \cdot G_{jk} \cdot G_{ik}^{-1}}{\eta} \right].$$

Но $\{\sigma_{ijk}\}$ — это препятствие для перевода 1-мерного коцикла $\{G_{ij}\}$ из $(\mathcal{O}_F \otimes \bar{A})^*$ в коцикл из $(\mathcal{O}_F \otimes A)^*$, потому что если этот перевод можно произвести, то можно выбрать $\{G_{ij}\}$ так, чтобы $G_{ij} \cdot G_{jk} = G_{ik}$, т. е. $\sigma_{ijk} = 0$. Все следует теперь из такой леммы:

Лемма. *Расширение $(\mathcal{O}_F \otimes A)^* \rightarrow (\mathcal{O}_F \otimes \bar{A})^* \rightarrow 1$ распадается.*

Доказательство. Можно просто воспользоваться экспоненциальным отображением, так как характеристика равна 0:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_F \otimes A)^* &\longrightarrow (\mathcal{O}_F \otimes \bar{A})^* \\ \downarrow \parallel & \quad \downarrow \parallel \\ \mathcal{O}_F^* \cdot (1 + \mathcal{O}_F \otimes M) &\rightarrow \mathcal{O}_F^* \cdot (1 + \mathcal{O}_F \otimes \bar{M}) \\ \downarrow \parallel \exp & \quad \downarrow \parallel \exp \\ \mathcal{O}_F^* \cdot (\mathcal{O}_F \otimes M)_+ &\longrightarrow \mathcal{O}_F^* \cdot (\mathcal{O}_F \otimes \bar{M})_+ \end{aligned}$$

Теперь, поскольку $M \rightarrow \bar{M}$ распадается как сюръективное отображение векторных пространств, $\mathcal{O}_F \otimes M \rightarrow \mathcal{O}_F \otimes \bar{M}$ распадается как сюръективное отображение пучков абелевых групп. Это и доказывает лемму.

Следствие. *Пусть $D \subset F$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда δ содержится только в одной компоненте Z пространства $C(\xi)$ и*

$$\dim Z = \dim H^0(F, \mathcal{N}_D).$$

Доказательство. Так как локальное кольцо \mathcal{O}_δ схемы $C(\xi)$ в точке δ регулярно, то, согласно следствию 2 лекции 22,

$$\dim Z = \dim \mathcal{O}_\delta = \dim T_\delta = \dim H^0(F, \mathcal{N}_D).$$

Для правильного понимания этой теоремы следовало бы добавить, что требование полурегулярности *очень слабое*. Конечно, оно не выполняется для патологической кривой E из примера в лекции 22; но любая 1-регулярная кривая полурегулярна, и мы знаем, что для каждого обратимого пучка \mathcal{L} на F существует такое m_0 , что все кривые с глобальными уравнениями из $H^0(\mathcal{L}(m))$ являются 1-регулярными, если $m \geq m_0$. Рассмотрение примеров из лекции 1 показывает, что все кривые, не имеющие избыточности, 1-регулярны, и потому полурегулярны. Обратимся еще к случаю, когда F заменяется (неособой) *кривой* γ , а схема $C(\xi)$ заменяется универсальным семейством $C(d)$ 0-циклов на γ степени d . Тогда каждый 0-цикл $D \subset \gamma$ полурегулярен, так как \mathcal{N}_D имеет 0-мерный носитель, откуда

$$H^1(\mathcal{N}_D) = (0).$$

На самом деле, как хорошо известно, $C(d)$ представляет собой d -ю симметрическую степень γ , которая не имеет особенностей.

С другой стороны, требование, чтобы характеристика равнялась 0, очень важно. В оставшихся четырех лекциях мы попытаемся проникнуть глубже в сущность теоремы и дать несколько „объяснений“ этого ограничения на характеристику. Чтобы показать, что будет дальше, отметим следующее: механизм доказательства состоит в сведении задачи подъема \bar{D} к той же задаче для ассоциированного обратимого пучка $\mathcal{O}_{F \times \text{Spec}(\bar{A})}(\bar{D})$, определенного коциклом \bar{G}_{ij} . В таком случае почему бы \bar{D} не исключить полностью из задачи и не доказывать теорему в форме А лекции 2 целиком в терминах обратимых пучков?

ЛЕКЦИЯ 24

Строение морфизма Ф

1°. В этой лекции мы сведем воедино всю полученную ранее информацию. В лекции 15 мы построили схемы $C(\xi)$, параметризующие кривые, в лекции 21 — схемы $P(\xi)$,

параметризующие обратимые пучки. Морфизм функторов

$$D \mapsto \mathcal{O}(D)$$

индуцирует фундаментальный морфизм схем

$$\Phi: C(\xi) \rightarrow P(\xi).$$

В лекции 13 мы описали функторы слоев Lin Sys_F ; теперь, после того как доказана представимость Curves_F и Pic_F , мы получаем

Следствие. *Слои морфизма Φ представляют собой проективные пространства. Действительно, если пучок \mathcal{L} на F соответствует точке $\lambda \in P(\xi)$, то канонически*

$$\Phi^{-1}(\lambda) \cong \mathbf{P}[\widehat{H^0(\mathcal{L})}].$$

Глобальную структуру Φ можно описать в некотором смысле аналогично (см. Гротендик [3]). Интересно, что для разных ξ схемы $P(\xi)$ все изоморфны, тогда как схемы $C(\xi)$ над ними ведут себя весьма по-разному: для $\deg(\xi) < 0$ они пусты, при $\deg(\xi) \rightarrow +\infty$ их размерность может возрастать до бесконечности. Для некоторых ξ морфизм Φ определяет довольно сложное расслоение, и его явное описание требует некоторых технических понятий, появляющихся при дальнейшем развитии теории п. 3° лекции 7. Поэтому мы приведем результат лишь в одном частном случае:

Пусть $U \subset P(\xi)$ — такое открытое множество, что

- (*) для всех замкнутых точек $x \in U$, обозначая через \mathcal{L}_x обратимый пучок на F , соответствующий x , имеем $H^1(F, \mathcal{L}_x) = (0)$.

Например, пусть $D \subset F$ — кривая, для которой

$$H^1(F, \mathcal{O}_F(D)) = (0),$$

и пусть D соответствует точке $\delta \in C(\xi)$; тогда некоторая окрестность U точки $\Phi(\delta) \in P(\xi)$ удовлетворяет (*). (в силу результатов п. 3° лекции 7).

Предложение. Существуют локально свободный пучок \mathcal{E} на U и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{c} C(\xi) \supset \Phi^{-1}(U) \cong P(\mathcal{E}), \\ \downarrow \Phi \qquad \downarrow \qquad \searrow \pi \\ P(\xi) \supset U \end{array}$$

Доказательство. Пусть \mathcal{L} — универсальное семейство обратимых пучков на $F \times U$. Обозначим проекцию $p_2: F \times U \rightarrow U$ через p . В соответствии с п. 3° лекции 7, $p_*(\mathcal{L})$ — локально свободный пучок на U , и для любого морфизма расширения базы $g: T \rightarrow U$

$$\begin{array}{ccc} F \times T & \xrightarrow{h} & F \times U \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ T & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

имеем $q_*(h^*(\mathcal{L})) \cong g^*(p_*(\mathcal{L}))$. Далее, пусть \mathcal{E} — локально свободный пучок, двойственный к $p_*(\mathcal{L})$, т. е.

$$\mathcal{E} = \text{Hom}_U(p_*(\mathcal{L}), \mathcal{O}_U).$$

Мы докажем теперь, что $\Phi^{-1}(U)$ и $P(\mathcal{E})$ изоморфны над U . методом, который был использован в лекции 13 для того, чтобы показать, что $\text{LinSys}_{\mathcal{E}}$ представляется проективным пространством: мы построим изоморфизм между их функторами точек. Точнее говоря, для любой T -значной точки $g: T \rightarrow U$ схемы U мы построим естественный изоморфизм между множеством T -значных точек $\Phi^{-1}(U)$ над g и множеством T -значных точек $P(\mathcal{E})$ над g . Так как этот изоморфизм окажется функториальным по g , теорема будет доказана. Разобьем рассуждения на несколько шагов:

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{множество } T\text{-значных} \\ \text{точек } \Phi^{-1}(U) \text{ над } g \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{множество семейств кривых } D \subset F \otimes T, \\ \text{таких, что для некоторого} \\ \text{обратимого пучка } \mathcal{O}\mathcal{M} \text{ на } T \\ \mathcal{O}_{F \times T}(D) \cong h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{O}\mathcal{M}). \end{array} \right\}$$

Это следует из функториального определения $C(\xi)$ и Φ .

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{множество семейств кривых } D \subset F \times T, \\ \text{таких, что для некоторого} \\ \text{обратимого пучка } \mathcal{M} \text{ на } T \\ \mathcal{O}_{F \times T}(D) \cong h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{M}) \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратимых пучков} \\ \mathcal{M} \text{ на } T \text{ и сечений пучка} \\ h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{M}), \text{ индуцирующих} \\ \text{ненулевые сечения в каждом} \\ \text{слое } F \times \{t\} \text{ над } T \end{array} \right\}$$

Это так потому, что D есть относительный дивизор Картье над T , глобальное уравнение которого является сечением пучка вида $h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{M})$, а произвольный дивизор Картье на $F \times T$ есть *относительный* дивизор Картье, если его глобальное уравнение не является делителем нуля на каждом слое над T , т. е. если он не нулевой над точками T .

Но сечение σ пучка $h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{M})$ над $F \times T$ — это то же самое, что сечение τ над T пучка

$$\begin{aligned} q_*(h^*(\mathcal{L}) \otimes q^*(\mathcal{M})) &\cong q_*h^*(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{M} \cong \\ &\cong g^*(p_*(\mathcal{L})) \otimes \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Кроме того, условие, что σ должно индуцировать ненулевые сечения на каждом слое над T , равносильно условию, что τ должно иметь ненулевой образ в

$$\{g^*[p_*(\mathcal{L})] \otimes \mathcal{M}\} \otimes \mathcal{H}(t)$$

для всех замкнутых точек $t \in T$. Но сечение τ пучка $g^*[p_*(\mathcal{L})] \otimes \mathcal{M}$ — это то же самое, что гомоморфизм h :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_T} \{g^*(p_*(\mathcal{L})), \mathcal{O}_T\} \xrightarrow{h} \mathcal{M},$$

т. е. задание гомоморфизма из $g^*(p_*(\mathcal{L}))$ в \mathcal{O}_T и сечения пучка $g^*[p_*(\mathcal{L})] \otimes \mathcal{M}$ определяет некоторое сечение пучка \mathcal{M} : это и есть h . Более того, условие на τ эквивалентно условию сюръективности h . Наконец, так как

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(g^*(p_*(\mathcal{L})), \mathcal{O}_T) &\cong g^*[\text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(p_*(\mathcal{L}), \mathcal{O}_U)] \cong \\ &\cong g^*(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

мы получаем

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратимых пучков} \\ \mathcal{M} \text{ на } T \text{ и сечений пучка} \\ h^*(L) \otimes q^*(\mathcal{M}), \text{ индуцирующих} \\ \text{ненулевые сечения в каждом} \\ \text{слое } F \times \{t\} \text{ над } T \end{array} \right\} \cong \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{множество обратимых пучков} \\ \mathcal{M} \text{ на } T \text{ и сюръективных} \\ \text{отображений } \Phi: g^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{M} \end{array} \right\}.$$

Но, согласно добавлению к лекции 5, это последнее множество изоморфно множеству T -значных точек $P(\mathcal{E})$, поднимающих данную T -значную точку g из U . Это и дает требуемый изоморфизм.

2°. Мы хотим теперь описать инфинитезимальную структуру схемы $P(\xi)$, т. е. ее I -значные точки, точно так же, как мы только что сделали для $C(\xi)$, в терминах F . Мы можем, если угодно, обратиться к случаю $\xi = 0$: эту схему мы ранее обозначали $P(\tau)$. Это групповая схема, поэтому она однородна в следующем смысле: если x, y — две замкнутые точки из $P(\tau)$, то существует автоморфизм T схемы $P(\tau)$, такой, что $T(x) = y$. Отсюда уже немедленно следует, что все топологические компоненты схемы $P(\tau)$ не приводимы, что все они изоморфны друг другу, что они не имеют вложенных компонент и что схема $P(\tau)_{\text{red}}$ неособая. [Последнее — в силу однородности и того факта, что существует открытое плотное подмножество $U \subset P(\tau)_{\text{red}}$, которое неособо; см. лекцию 11, (V).] На самом деле $P(\tau)_{\text{red}}$ тоже является групповой схемой — это легко проверить с помощью замечания (V) в лекции 11. Компонента в $P(\tau)_{\text{red}}$, содержащая единицу e , также является групповой схемой: это классическое *многообразие Пикара для F* .

Так как $P(\tau)$ — коммутативная групповая схема, то для любых x, y существует даже канонический автоморфизм T , такой, что $T(x) = y$. В частности, эти автоморфизмы дают канонические изоморфизмы касательных пространств Зарисского во всех замкнутых точках $P(\tau)$ между собой. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением I -значных точек $P(\tau)$, для которых соответствующие k -значные точки совпадают с 0. Воспользуемся усеченной

экспоненциальной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_F \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{F \times I}^* \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_F^* \rightarrow 0,$$

где $\alpha(f) = 1 + \varepsilon f$ (см. лекцию 22, (Б)). Она распадается, так как $\mathcal{O}_{F \times I}$ имеет также структуру пучка \mathcal{O}_F -алгебр, определяемую проекцией $p_1: F \times I \rightarrow F$. Это дает диаграмму групп

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_F) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{F \times I}^*) & \xleftarrow{\sim} & H^1(\mathcal{O}_F^*) \rightarrow 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{группа } I\text{-значных} \\ \text{точек в } 0 \in P(\tau) \end{array} \right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{l} \text{группа } I\text{-значных} \\ \text{точек из } \prod P(\xi) \end{array} \right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{l} \text{группа } k\text{-значных} \\ \text{точек из } \prod P(\xi) \end{array} \right] \rightarrow 0. \\ & & & & & \text{Pic}(F) & \\ & & & & & \parallel & \end{array}$$

Другими словами, касательное пространство Зарисского T_0 в единице канонически изоморфно $H^1(F, \mathcal{O}_F)$. Надо проверить, что это действительно изоморфизм векторных пространств. Проверка предоставлена читателю; ее можно провести методами, использованными в добавлении к лекции 4.

3°. Теперь предположим, что δ —замкнутая точка схемы $C(\xi)$. Пусть $\lambda = \Phi(\delta)$. Морфизм Φ индуцирует точную последовательность векторных пространств:

(**)

$$0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Касательное} \\ \text{пространство} \\ \text{Зарисского к} \\ \text{слою } \Phi^{-1}(\lambda) \text{ в } \delta \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Касательное} \\ \text{пространство} \\ \text{Зарисского} \\ \text{к } C(\xi) \text{ в } \delta \end{array} \right] \xrightarrow{\Phi_*} \left[\begin{array}{l} \text{Касательное} \\ \text{пространство} \\ \text{Зарисского} \\ \text{к } P(\xi) \text{ в } \lambda \end{array} \right].$$

Мы хотим интерпретировать всю эту последовательность в терминах F . Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F(D) \rightarrow \mathcal{N}_D \rightarrow 0,$$

где $D \subset F$ —кривая, соответствующая δ . Она определяет точную последовательность векторных пространств

$$(**)' \quad 0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_F(D))/H^0(\mathcal{O}_F) \rightarrow H^0(\mathcal{N}_D) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{O}_F).$$

a) $H^0(\mathcal{N}_D) \cong \left[\begin{array}{l} \text{касательное пространство} \\ \text{Зарисского к } C(\xi) \text{ в } \delta \end{array} \right]$ в силу лекции 22;

б) $H^1(\mathcal{O}_F) \cong \left[\begin{array}{l} \text{касательное пространство} \\ \text{Зарисского к } P(\xi) \text{ в } \lambda \end{array} \right]$ в силу 2°

и в силу автоморфизма T на $\prod_{\xi} P(\xi)$, переводящего 0 в λ (т. е. T — это сдвиг на λ).

Предложение. Гомоморфизмы Φ_* и ∂ в диаграммах $(**)$ и $(**)'$ совпадают при этих отождествлениях векторных пространств.

Проверка совместности. Пусть кривая D определена локальными уравнениями G_i в аффинных открытых множествах $\{U_i\}$. Любое сечение \mathcal{N}_D определяется наборами сечений

$$H_i/G_i, \quad G_i, \quad H_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_F),$$

где

$$H_i/G_i - H_j/G_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_F),$$

и соответствующая кривая \mathfrak{D} в $F \times I$ задается локальными уравнениями

$$F_i = G_i + \varepsilon H_i.$$

Тогда обратимый пучок $\Phi(\mathfrak{D}) = \mathcal{O}_{F \times I}(\mathfrak{D})$ определяется одномерным коциклом Чеха

$$\sigma_{ij} = (F_i/F_j)$$

на $F \times I$. Он вычисляется так:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (G_i + \varepsilon H_i) \cdot (G_j^{-1}) \cdot (1 - \varepsilon H_j \cdot G_j^{-1}) = \\ &= (G_i \cdot G_j^{-1}) \cdot \left[1 + \varepsilon \left(\frac{H_i}{G_i} - \frac{H_j}{G_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как $\{G_i G_j^{-1}\}$ есть 1-мерный коцикел, определяющий $\mathcal{O}_F(D)$, т. е. λ , то I -значная точка $\{\sigma_{ij}\}$ сдвигается в исходную в $\prod_{\xi} P(\xi)$ делением на этот коцикел. Это дает 1-мерный коцикел

$$\left[1 + \varepsilon \left(\frac{H_i}{G_i} - \frac{H_j}{G_j} \right) \right],$$

который является образом при усеченном экспоненциальном отображении 1-мерного коцикла

$$\tau_{ij} = \left(\frac{H_i}{G_i} - \frac{H_j}{G_j} \right)$$

пучка \mathcal{O}_F . Тогда $\{\tau_{ij}\}$ — это точка пространства $H^1(\mathcal{O}_F)$, соответствующая $\Phi(\mathfrak{D})$. С другой стороны, $\{\tau_{ij}\}$ есть кограница сечения $\{H_i/G_i\}$ пучка \mathcal{N}_D , ч. т. д.

Последнее отождествление предоставляется читателю: именно, нужно проверить, что если \mathscr{L} — обратимый пучок на F и $s \in H^0(F, \mathscr{L})$ — сечение, соответствующее кривой D , а следовательно, замкнутой точке δ в линейной системе

$$\mathbf{P} = \widehat{\mathbf{P}[H^0(\mathscr{L})]}$$

пучка \mathscr{L} , то касательное пространство Зарисского к \mathbf{P} в δ канонически изоморфно

$$H^0(F, \mathscr{L})/k \cdot s.$$

ЛЕКЦИЯ 25

Основная теорема по Громендику—Картье

Пусть $D \subset F$ — кривая типа ξ , D соответствует точке $\delta \in C(\xi)$, а $\mathscr{L} = \mathcal{O}_F(D)$ соответствует точке $\lambda \in P(\xi)$.

Если $H^1(F, \mathscr{L}) = (0)$, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $P(\xi)$ — неособая схема в λ ,
- 2) $C(\xi)$ — неособая схема в δ ,
- 3) $C(\xi)$ — редуцированная схема в δ ,
- 4) $P(\xi)$ — редуцированная схема в λ .

Доказательство. Согласно результатам п. 1° предыдущей лекции, существует такая окрестность U точки $\lambda \in P(\xi)$, что подсхема $\Phi^{-1}(U) \subset C(\xi)$ имеет вид $\mathbf{P}_N \times U$. Это означает, что утверждения 1) и 2) эквивалентны и что утверждения 3) и 4) эквивалентны. Естественно, 4) следует из 1). Верно и обратное, так как $P(\xi)$ изоморфна $P(\tau)$ и $P(\tau)$ — групповая схема; поэтому если $P(\xi)$ и, следовательно, $P(\tau)$ редуцированы, то они обе неособые (п. 2° лекции 24).

В случае характеристики 0 эти утверждения выполнены всегда в силу следующего результата:

Теорема 1 (Картье). *Пусть O — (алгебраическая) групповая схема над k . Если $\text{char}(k)=0$, то O — несособая.*

Доказательство. Пусть O — пополнение докольца кольца \mathcal{O}_e схемы O в точке e . Умножение есть морфизм

$$O \times O \xrightarrow{\mu} O,$$

такой, что $\mu(e \times e) = e$; поэтому μ определяет гомоморфизм

$$\mu^*: O \rightarrow [\text{пополнение кольца } \mathcal{O}_{e \times e}] \cong O \hat{\otimes}_k O,$$

где $\hat{\otimes}$ — пополненное тензорное произведение (используется то, что $\mathcal{O}_{e \times e}$ есть локализация кольца $\mathcal{O}_e \otimes \mathcal{O}_e$ относительно максимального идеала $(\mathcal{O}_e \otimes \mathfrak{m}_e + \mathfrak{m}_e \otimes \mathcal{O}_e)$). Но так как μ — групповой закон, ограничение μ на

$$O \times (e) \subset O \times O$$

или на

$$(e) \times O \subset O \times O$$

является тождественным отображением O в O . Алгебраически это означает, что гомоморфизм $O \hat{\otimes}_k O$ на O , полученный отображением одного из двух множителей на его поле вычетов k и последующей композицией с μ^* , является тождественным отображением другого множителя O в O . Это означает, что если $a \in \mathfrak{m}$ (максимальному идеалу в O), то элемент

$$\mu^*(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$

должен переходить в 0, когда один из множителей в $O \hat{\otimes}_k O$ отображается на его поле вычетов, т. е.

$$(a) \quad \mu^*(a) \in 1 \otimes a + a \otimes 1 + \mathfrak{m} \hat{\otimes}_k \mathfrak{m}.$$

Теперь мы докажем следующее утверждение:

- (*) Для всех линейных функционалов $f: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow k$ существует дифференцирование $D: O \rightarrow O$, аннулирующее k и индуцирующее f .

Доказательство утверждения (*). Продолжим f до линейного отображения $F: \mathcal{O} \rightarrow k$, потребовав, чтобы $F=0$ на k и на \mathfrak{m}^2 . Пусть D — композиция

$$D: \mathcal{O} \xrightarrow{\mu^*} \mathcal{O} \hat{\otimes}_k \mathcal{O} \xrightarrow{1 \otimes F} \mathcal{O} \hat{\otimes}_k k = \mathcal{O}.$$

Тогда D , очевидно, линейно и аннулирует k . Более того, согласно (a), при $a \in \mathfrak{m}$ имеем

$$\begin{aligned} D(a) &= 1 \otimes F[1 \otimes a + a \otimes 1 + (R)] = \\ &= F(a) + (1 \otimes F)(R), \quad R \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Но $(1 \otimes F)(R) \in \mathfrak{m}$, следовательно, D индуцирует f как отображение из $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ в $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k$. Остается проверить, что

$$D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + b \cdot D(a),$$

если $a, b \in \mathfrak{m}$. Это делается при помощи прямого вычисления:

$$\begin{aligned} \mu^*(a \cdot b) &= \mu^*(a) \cdot \mu^*(b) = \\ &= (1 \otimes a + a \otimes 1 + R) \cdot (1 \otimes b + b \otimes 1 + S) = \\ &= (a \otimes 1) \cdot \mu^*(b) + (b \otimes 1) \cdot \mu^*(a) + \\ &\quad + [1 \otimes ab - ab \otimes 1 + R \cdot 1 \otimes b + \\ &\quad + S \cdot 1 \otimes a + R \cdot S] = \\ &= (a \otimes 1) \cdot \mu^*(b) + (b \otimes 1) \cdot \mu^*(a) + T, \end{aligned}$$

где $R, S \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}$ и $T \in \mathcal{O} \otimes 1 + \mathcal{O} \hat{\otimes} \mathfrak{m}^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} D(a \cdot b) &= (1 \otimes F)[(a \otimes 1) \cdot \mu^*(b) + (b \otimes 1) \cdot \mu^*(a) + T] = \\ &= a \cdot [(1 \otimes F) \cdot \mu^*(b)] + b \cdot [(1 \otimes F) \cdot \mu^*(a)] = \\ &= a \cdot D(b) + b \cdot D(a). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы выберем базис $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Пусть f_1, \dots, f_n — двойственный базис; продолжим его до дифференцирований D_1, \dots, D_n кольца \mathcal{O} . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, \dots, a_n), \\ X^\alpha &= X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}, \\ \alpha! &= a_1! \dots a_n!, \\ |\alpha| &= \sum a_i, \quad a_i \geq 0, \\ D^\alpha(f) &= D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}(f); \end{aligned}$$

мы можем отобразить O гомоморфно в $k[[X_1, \dots, X_n]]$:

$$f \mapsto \sum_{0 \leq |\alpha| < \infty} \frac{D^\alpha(f)}{\alpha!} X^\alpha = A(f)$$

(здесь b — образ элемента $b \in O$ в k). С другой стороны, по общей теории полных локальных колец, существует сюръективное отображение

$$B: k[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow O,$$

такое, что $B(X_i) \equiv X_i \pmod{m^2}$. Поэтому $A \circ B$ представляет собой гомоморфизм кольца $k[[X_1, \dots, X_n]]$ в себя, индуцирующий единичное отображение по модулю $(X_1, \dots, X_n)^2$. Следовательно, $A \circ B$ — автоморфизм, а так как B сюръективно, это означает, что A — изоморфизм, ч. т. д.

Следствие. Если $\text{char}(k) = 0$, то все схемы $P(\xi)$ неособенны. Поэтому

$$\dim P(\xi) = \dim_k H^1(F, \mathcal{O}_F).$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы Картье в силу изоморфизма касательного пространства Зарисского к $P(\tau)$ в 0 и $H^1(F, \mathcal{O}_F)$.

Это доказывает теорему существования (A) и вновь доказывает теорему из лекции 23 для кривых D , таких, что $H^1(F, \mathcal{O}_F(D)) = (0)$.

ЛЕКЦИЯ 26

Кольцевые схемы. Схема Витта

§ 0. Краткое содержание

В § 1 вводится понятие кольцевой схемы, некоторые основные определения и конструкции.

В § 2 мы строим теорию кольцевой схемы Витта, связанной с простым числом p , и применяем ее к той

задаче, для решения которой она поначалу использовалась, — обращение функтора, обратимость которого трудно заподозрить. Эта задача изучается в разделах А и Б; в разделе В описывается схема Витта, а в разделе Г она используется для решения задачи. При чтении этих лекций была рассказана только часть В. Читатель, готовый пропустить все, что имеет лишь косвенное отношение к нашей теме, может прочитать только раздел В.

В § 3, А, мы развиваем теорию „универсальной схемы Витта“, видоизменяя конструкцию § 2 (вводя ее „обобщение“ в том смысле, что схема Витта, ассоциированная с любым простым p , получается „усечением“ универсальной схемы). Мы воспользуемся ею в разделе Б, чтобы построить „кольцо логарифмов“ — кольцо, аддитивная структура которого изоморфна мультиплликативной структуре множества формальных степенных рядов (над данным кольцом R) с первым коэффициентом 1. В разделах В, Г и Д мы описываем некоторые отображения и усечения схемы Витта, которыми воспользуемся позже, когда будем иметь дело со степенными рядами.

§ 1. Общие сведения

В любой категории C , имеющей прямые произведения и конечный объект P , мы можем определить „кольцевые объекты“: наборы из шести элементов (H, o, i, v, a, μ) , где H — объект, o, i, v, a и μ — отображения:

- $o: P \rightarrow H$ (нулевой элемент),
- $i: P \rightarrow H$ (единица),
- $v: H \rightarrow H$ (аддитивный обратный элемент),
- $a: H \times H \rightarrow H$ (сложение),
- $\mu: H \times H \rightarrow H$ (умножение),

которые должны удовлетворять очевидным обобщениям аксиом кольца для множеств и отображений множеств¹⁾.

Для любого другого объекта A нашей категории структура кольца индуцируется на $h_H(A)$, т. е. h_H превращается в контравариантный функтор из C в Rings .

¹⁾ Мы не включаем условие $1 \neq 0$ в число аксиом кольца; мы, таким образом, допускаем тривиальное кольцо.

В действительности мы уже хорошо знакомы с некоторыми примерами кольцевых объектов в категории схем. Многообразие всех $(n \times n)$ -матриц — это некоммутативная кольцевая схема. Более простым примером является аффинная прямая, которая имеет очевидную структуру кольцевой схемы.

Хотя наши определения годятся для категории Schemes схем над произвольной схемой S , мы будем здесь работать лишь с кольцевыми схемами над $\text{Spec } Z$ („абсолютными кольцевыми схемами“) и над локализациями Z . Кроме того, во всех случаях, с которыми мы будем иметь дело, соответствующие схемы будут аффинными. Отображения, определяющие кольцевые структуры схем, будут, таким образом, задаваться кольцевыми гомоморфизмами. Они будут направлены в противоположную сторону по сравнению с отображениями схем (так как связь между аффинными схемами и кольцами контравариантна), но они на самом деле приведут к ожидаемым уравнениям, только с другой точки зрения. Так, сложение на аффинной прямой, которое мы привыкли описывать как отображение $(x, x') \rightarrow x''$ (на точках $A^1 \times A^1 \rightarrow A^1$), $x'' = x' + x$, превращается в терминах колец в гомоморфизм $Z[X] \rightarrow Z[X] \otimes Z[X]$, определенный тем, что $X \rightarrow X \otimes 1 + 1 \otimes X$.

Менее тривиальный пример дает „функтор плоскости Аргана“, сопоставляющий каждому кольцу R кольцо пар $(x, y) \in R^2$ с почленным сложением и с умножением, заданным так: $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y')$. Он представляется кольцом $\text{Spec } Z[X, Y]$ со сложением

$$\alpha(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \alpha(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$$

и умножением

$$\mu(X) = X \otimes X - Y \otimes Y, \quad \mu(Y) = X \otimes Y + Y \otimes X.$$

Временно обозначим эту схему через \mathfrak{U} ; какому элементу кольца $h_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U})$ соответствует тождественное отображение?

Мы будем здесь интересоваться кольцевыми схемами H главным образом из-за ассоциированных функторов h_H . Кольцевые схемы представляют собой некоторый класс функториальных конструкций колец $h_H(R)$ над кольцами R . [По существу они описывают те конструкции, в которых результирующее кольцо может быть описано как множество

n -строк (с конечным или бесконечным n) из элементов кольца R , удовлетворяющих некоторым полиномиальным условиям, и где сложение и умножение задаются многочленами.]

Кольцевая схема над некоторой локализацией кольца Z будет соответствовать конструкции, в которой используемые многочлены могут содержать некоторые дробные коэффициенты, причем ее можно применить лишь к тем кольцам, в которых некоторые целые числа обратимы.

Функтор, который легко представить, сопоставляет кольцу R кольцо $R[[X]]$ формальных степенных рядов от одной переменной. Мы будем обозначать представляющую кольцевую схему через V . Как схема она совпадает с $\text{Spec } Z[A_0, A_1, \dots]$, где A_i — неизвестные, представляющие коэффициенты степенных рядов, а аддитивное и мультипликативное отображения задаются (в терминах кольца $Z[A_0, A_1, \dots]$) равенствами

$$\alpha(A_i) = A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i,$$

$$\mu(A_i) = \sum_{j=0}^i A_j \otimes A_{i-j}.$$

Усеченные кольца степенных рядов $R[X]/X^n$ представляются (конечномерными) схемами $V_n = \text{Spec } Z[A_0, \dots, A_{n-1}]$, схемами факторкольца V . Они образуют проективную систему: для каждой пары натуральных чисел $m \leq n$ существует усекающее отображение $V_n \rightarrow V_m$, соответствующее включению

$$Z[A_0, \dots, A_{m-1}] \subset Z[A_0, \dots, A_{n-1}],$$

и V представляет собой проективный предел этой системы.

[Несколько замечаний о представимости функторов $\text{Rings} \rightarrow \text{Rings}$ кольцевыми схемами.]

Такие функторы должны обладать свойством $h(R \otimes R') = h(R) \otimes h(R')$, следовательно, функтор, переводящий каждое кольцо в некоторое фиксированное кольцо A , не может быть представимым. Однако можно построить схему, которая отображает каждое кольцо со связным спектром в кольцо Z — это дискретное объединение бесконечного числа экземпляров $\text{Spec } Z$. Она не аффинна, так как некомпактива.

Если $A \rightarrow B$ представляет собой взаимно однозначное отображение колец, то $h(A) \rightarrow h(B)$ должно быть взаимно однозначным отображением колец. Следовательно, функтор $R \rightarrow R/p$ не

может быть представлен: взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ превращается в $\mathbb{Z}/p \rightarrow 0$.

Хотя функтор „кольцо степенных рядов“ представим, функтор „кольцо многочленов“, очевидно, не может быть представлен. [Что такое „общий многочлен конечной степени“?]

§ 2. p -адические кольца и функтор Витта

Большая часть этого материала имеется в книге Серра [4]; однако изложение там лаконичнее и несколько отличается от нашего по форме: формализм кольцевых схем не используется.

A. Музыкальные стулья¹⁾

Пусть p — простое число. Обозначим через A любое кольцо, в котором p порождает идеал, совпадающий со своим собственным радикалом (т. е. такой, что факторкольцо A/p не имеет нильпотентов). Тогда, если два элемента лежат в различных классах вычетов по $\text{mod } p$, то же верно для их p -х степеней: $a^p - b^p \equiv (a - b)^p \not\equiv 0 \pmod{p}$. Другими словами, эндоморфизм Фробениуса кольца A/p не имеет ядра.

Однако если два элемента лежат в *одном и том же* классе вычетов по $\text{mod } p$, то их p -е степени будут лежать в одном классе по $\text{mod } p^2$:

$$(a + px)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} px + \\ + \binom{p}{2} a^{p-2} (px)^2 + \dots \equiv a^p \pmod{p^2}.$$

Более общо, заменяя в этом выражении $a + px$ на $a + p^kx$, мы видим, что если два элемента сравнимы по $\text{mod } p^k$ ($k \neq 0$), то их p -е степени сравнимы по $\text{mod } p^{k+1}$, а отсюда, по индукции, их p^n -е степени сравнимы по $\text{mod } p^{k+n}$.

Таким образом, хотя операция возвведения в p -ю степень оставляет классы сравнимых по $\text{mod } p$ элементов

¹⁾ Музыкальные стулья — салонная игра, во время которой n играющих под музыку бегают вокруг $n - 1$ стульев. Когда музыка кончается, все рассаживаются, а тот, кто остался без места, выходит из игры. Перед следующим туром один стул убирается. — *Прим. перев.*

различными, она „сжимает“ каждый класс в p -адической метрике. Поскольку в общем случае эндоморфизм Фробениуса кольца A/p не является тождественным, эти классы сравнимых элементов, уменьшаясь, как бы ведут буйную игру в „музыкальные стулья“, несколько запутывая дело.

Предположим, однако, что кольцо A/p совершенно (т. е. что эндоморфизм Фробениуса является взаимно однозначным отображением на). Пусть $[a]$ — некоторый класс вычетов по $\text{mod } p$ в кольце A . Для каждого n p^n -я степень некоторого класса смежности будет принадлежать $[a]$. Так как p^n -е степени членов этого класса все сравнимы друг с другом по $\text{mod } p^{n+1}$, мы получаем канонический класс смежности по $\text{mod } p^{n+1}$, принадлежащий $[a]$. Более того, при возрастании n каждый последующий подкласс смежности в $[a]$ будет содержаться в предыдущем.

Очевидно, так определяется некоторый элемент из p -адического пополнения \hat{A} кольца A . (Чтобы это имело смысл, следует здесь предположить, что p -адическая топология отделима.) Если кольцо A с самого начала было полным, получается

Лемма 1. *Пусть A — кольцо, полное относительно p -адической топологии и такое, что A/p совершенно. Тогда существует каноническое отображение $f: A/p \rightarrow A$, переводящее каждый класс вычетов в тот единственный его элемент, который имеет корни p^n -й степени для всех n . Отображение f может быть охарактеризовано как единственный мультипликативный гомоморфизм $A/p \rightarrow A$, который определяет расщепление отображения $A \rightarrow A/p$.*

Доказательство последнего предложения предоставляем читателю.

Пример. Если A — обычное кольцо целых p -адических чисел, то $f(A/p)$ состоит из корней $(p - 1)$ -й степени из единицы и нуля.

Б. Конструкция Тейхмюллера

Хорошо известно, что любое p -адическое число однозначно представляется „степенным рядом“ $a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots$, где $a_i = 0, 1, \dots, p - 1$. Но это не очень

интересно с математической точки зрения, потому что выбор системы представителей $0, 1, \dots, p-1$ классов вычетов по $\text{mod } p$, очевидно, произволен.

Теперь, однако, мы имеем прекрасную функциональную систему представителей классов вычетов! Воспользовавшись ею (и обобщив на случай кольца A , которыми мы занимались в предыдущем разделе, — нам нужно лишь предположить дополнительно, что p не является делителем нуля в A , так что эти степенные ряды действительно единственны), получим следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть A — полное p -адическое кольцо, в котором p не является делителем нуля, такое, что A/p совершенno. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами A и последовательностями (ξ_0, ξ_1, \dots) элементов из A/p , определенное так:

$$(1) \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \leftrightarrow f(\xi_0) + pf(\xi_1) + p^2f(\xi_2) + \dots$$

Теперь предположим, что мы научились считать в A , используя эти последовательности представителей классов вычетов. Тогда получилось бы, что мы восстановили структуру кольца A по структуре A/p !

Оказывается, что это можно сделать, но результаты приобретут более удобную форму, если воспользоваться не в точности данным выше соответствием, а соответствием

$$(1) \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \leftrightarrow f(\xi_0) + pf(\xi_1^{p-1}) + p^2f(\xi_2^{p-2}) + \dots$$

(Это можно усмотреть из примера, разобранного в добавлении А.)

В. СХЕМА ВИТТА (на первый взгляд, интермедиум)

Пусть W — схема $\text{Spec } \mathbf{Z}[X_0, X_1, \dots]$; отобразим W в $A^\infty = \text{Spec } \mathbf{Z}[W_0, \dots]$ с помощью многочленов Витта:

$$(2) \quad \begin{aligned} W_0 &= X_0, \\ W_1 &= X_0^p + pX_1, \\ W_2 &= X_0^{p^2} + pX_1^p + p^2X_2, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ W_n &= X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^nX_n \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

[Здесь p — по-прежнему фиксированное простое число. Отметим, что обозначения рисуют быть ложно истолкованными: W_i — это координаты в A^∞ , а X_i — координаты в W .]

Придадим A^∞ структуру кольцевой схемы при помощи отображений:

$$\alpha(W_s) = W_s \otimes 1 + 1 \otimes W_s,$$

для всех s

$$\mu(W_s) = W_s \otimes W_s$$

A^∞ представляет функтор, который сопоставляет кольцу R кольцо бесконечных последовательностей (w_0, w_1, \dots) элементов из R с покомпонентным сложением и умножением, т. е. прямое произведение бесконечного количества экземпляров кольца R .

Мы утверждаем, что структура кольцевой схемы на A^∞ индуцирует структуру кольцевой схемы на W — единственную, в которой это отображение является гомоморфизмом.

Чтобы убедиться в этом, прежде всего заметим, что если мы позволим себе делить на p , то сможем разрешить уравнения (2) и выразить X_s через W_s . Это означает, в терминах R -значных точек, что если p обратимо в R , то можно считать X_s и W_s просто различными системами координат для элементов кольца R^∞ ; W -координаты более „простые“ в том смысле, что в них сложение и умножение в кольце соответствуют покоординатному сложению и умножению; но, очевидно, можно найти полиномиальные функции, описывающие эти кольцевые операции в терминах X_s -многочленов, коэффициенты которых должны лежать в $\mathbf{Z}[1/p]$.

„Главное чудо“ колец Витта состоит в том, что коэффициенты этих „арифметических многочленов“ и в самом деле лежат в \mathbf{Z} . Мы сейчас это докажем. Пусть w_n означает n -й полином Витта $w_n(X_0, \dots, X_n) = X_0^{p^n} + \dots + p^n X_n$. Чтобы охватить одновременно все арифметические операции (нам нужны сложение, умножение и, хотя мы и не упоминали об этом явно, аддитивный обратный элемент и константы 0, 1), обозначим через Φ любой многочлен от двух переменных (одна или обе они могут, впрочем, на самом деле отсутствовать) с целыми коэффициентами. Мы знаем,

что существуют многочлены

$$\varphi_0(X_0; X'_0), \dots, \varphi_n(X_0, \dots, X_n; X'_0, \dots, X'_n), \dots$$

такие, что для всех n

$$\begin{aligned} &\Phi(w_n(X_0, \dots, X_n), w_n(X'_0, \dots, X'_n)) = \\ &= w_n(\varphi_0(X_0; X'_0), \dots, \varphi_n(X_0, \dots, X_n; X'_0, \dots, X'_n)). \end{aligned}$$

или сокращенно $\Phi(w_n(X), w_n(X')) = w_n(\varphi(X, X'))$. [При употреблении этой сокращенной записи, желая напомнить о том, что $w_n(X)$ содержит только X_0, \dots, X_n , мы будем писать $w_n(X_{\dots n})$.]

Лемма 3. Все коэффициенты многочлена φ_n целые.

Вспомогательное утверждение. Если $x_l \equiv y_l \pmod{pR}$ ($l = 0, \dots, n$; $x_l, y_l \in R$, R — любое кольцо), то $w_n(x) \equiv w_n(y) \pmod{p^{n+1}R}$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из определения w_n и замечаний, сделанных в разд. А этого параграфа.

Доказательство леммы. Допустим, что результат верен для всех $l < n$.

Заметим, что $w_n(X) = w_{n-1}(X^p) + p^n X_n$ ¹). Применяя это к правой части уравнения $\Phi(w_n(X), w_n(X')) = w_n(\varphi(X, X'))$ и разрешая относительно $\varphi_n(X, X')$, получаем

$$\varphi_n(X, X') = \frac{\Phi(w_n(X), w_n(X')) - w_{n-1}(\varphi^p(X_{\dots n-1}), X_n)}{p^n}.$$

Это рекуррентная формула, по которой определяются φ_n . Чтобы установить, что φ_n имеет целые коэффициенты, мы должны показать, что $\Phi(w_n(X), w_n(X')) \equiv w_{n-1}(\varphi^p(X, X')) \pmod{p^n}$.

¹) При $n = 0$ мы интерпретируем w_{-1} как 0. Поскольку это многочлен от тех X_s , индекс которых меньше n , и он удовлетворяет вспомогательному утверждению, доказательство благополучно проходит.

Подставляя $w_n(X) = w_{n-1}(X^p) + p^n X_n$ в левую часть и замечая, что членами „ $p^n X_n$ “ можно пренебречь ($\text{mod } p^n$), мы получаем $\Phi(w_{n-1}(X^p), w_{n-1}(X'^p))$. Перепишем это выражение в виде $w_{n-1}(\varphi(X^p, X'^p))$. Чтобы показать, что оно сравнимо с $w_{n-1}(\varphi^p(X, X'))$, достаточно (согласно вспомогательному утверждению) заметить, что $\varphi_i(X^p, X'^p) \equiv \varphi_i^p(X, X') \pmod{p}$ — благодаря автоморфизму Фробениуса. (Именно здесь мы используем индуктивное предположение о том, что φ_i имеют целые коэффициенты.)

Отсюда следует, что эти многочлены можно использовать для определения кольцевой структуры на множестве бесконечных последовательностей элементов любого кольца R . Операции будут удовлетворять аксиомам кольца, потому что они задаются многочленами, которые удовлетворяют этим аксиомам для всех элементов из $\mathbf{Z}[1/p]$ и, следовательно, удовлетворяют им тождественно.

Получившееся кольцо уже не будет изоморфно R^∞ ; преобразование Витта дает нам лишь гомоморфизм в R^∞ . В случае когда p не является делителем нуля в R , можно убедиться в том, что этот гомоморфизм имеет тривиальное ядро, т. е. что кольцо Витта может быть отождествлено с подкольцом в R^∞ . Если же p является делителем нуля, например, если R имеет характеристику p , то это более слабое утверждение перестает быть верным.

В терминах теории схем приведенное выше рассуждение звучит так. Имеется отображение $w: W \rightarrow A^\infty$. Умножая тензорно на $\mathbf{Z}[1/p]$, мы обнаруживаем, что

$$w': W \times \text{Spec } \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \rightarrow A^\infty \times \text{Spec } \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$$

есть изоморфизм схем (потому что система (2) обратима над $\mathbf{Z}[1/p]$). Следовательно, структура кольцевой схемы $A^\infty \times \text{Spec } \mathbf{Z}[1/p]$ над $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/p]$ индуцирует аналогичную структуру на $W \times \text{Spec } \mathbf{Z}[1/p]$. Последнее множество плотно в W , и оказывается, что кольцевые операции непрерывно продолжаются на все W (т. е. они определяются уравнениями с целыми коэффициентами). Они будут удовлетворять аксиомам кольца, потому что это так на плотном подмножестве, а поскольку w — кольцевой гомоморфизм между плотными подмножествами в A и W , то он является коль-

щевым гомоморфизмом. Наконец, ясно, что структура кольцевой схемы, которой мы наделили W , — единственная, делающая w гомоморфизмом, ч. т. д.

Г. Торжественный финал

Вернемся к ситуации разд. Б.

Мы утверждаем, что многочлены, определяющие кольцевую структуру схемы W , — это как раз те многочлены, которые нам нужны для вычисления со „степенными рядами“. Мы попытаемся сначала интуитивно объяснить, почему это так.

Элемент кольца A , как мы знаем, представляется бесконечно многими способами в виде конечного или бесконечного степенного ряда $a_0 + pa_1 + p^2a_2 + \dots$. Если считать «правильным» то единственное представление, в котором каждый коэффициент a_i принадлежит $f(A/p)$, а «правильным по $\text{mod } p^n$ » такое представление, у которого каждый член $p^i a_i$ сравним по $\text{mod } p^n$ с соответствующим членом в «правильном» представлении, то, как легко проверить, достаточное условие правильности представления по $\text{mod } p^n$ состоит в том, что каждый коэффициент a_i есть p^{n-i} -я степень (при $i < n$).

Теперь, подставив произвольные значения x_0, x_1, \dots из A вместо X_0, X_1, \dots в преобразование (2):

$$\begin{aligned} w_0 &= x_0, \\ w_1 &= x_0^p + px_1, \\ w_2 &= x_0^{p^2} + px_1^p + p^2x_2, \\ w_3 &= x_0^{p^3} + px_1^{p^2} + p^2x_2^p + p^3x_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

мы видим, что последовательные w_i все более и более приближаются к «правильно» представленным. Подробнее рассматривая эту ситуацию, можно представить себе, почему многочлены, описывающие, что делать с x_i , чтобы построить арифметику из w_i , должны также объяснить, как обращаться с коэффициентами «правильного представления» элементов, чтобы построить арифметику этих элементов. То обстоятельство, что x_i появляются

с убывающими показателями, согласуется с нашим использованием представлений вида $f(\xi_0) + pf(\xi_1^{p-1}) + \dots$, а не $f(\xi_0) + pf(\xi_1) + \dots$.

Вот точное утверждение и его доказательство.

Лемма 4. Пусть заданы A и f , как в лемме 1, и Φ и φ_i , как в лемме 3; тогда для любых $\xi_0, \xi_1, \dots; \xi'_0, \xi'_1, \dots$ в кольце A/p имеем

$$\begin{aligned} &\Phi(f(\xi_0) + \dots + p^t f(\xi_t^{p-t}) + \dots; \\ &\quad f(\xi'_0) + \dots + p^t f(\xi'_t)^{p-t} + \dots) = \\ &= f(\varphi_0(\xi_0; \xi'_0)) + \dots + p^t f(\varphi_t(\xi_0, \dots, \xi_t; \xi'_0, \dots, \xi'_t)^{p-t}) + \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно показать, что это равенство выполняется по $\text{mod } p^{n+1}$ для заданного n . Следовательно, в нашей записи мы можем опустить все члены в вышеприведенном степенном ряде, начиная с p^{n+1} .

Сделаем замену $x_i = \xi_i^{p-n}, x'_i = \xi'_i{}^{p-n}$. Заметив, что p -е степени коммутируют со всеми операциями в A/p (по Фробениусу) и с f (так как это мультипликативный гомоморфизм), перепишем формулу, которую надо доказать, в виде

$$\begin{aligned} &\Phi(f(x_0)^{p^n} + \dots + p^t f(x_t)^{p^{n-t}} + \dots, \dots) \equiv \\ &\equiv f(\varphi_0(x_0, x'_0))^{p^n} + \dots \\ &\dots + p^t f(\varphi_t(x_0, \dots, x_t; \dots))^{p^{n-t}} + \dots \pmod{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть совпадает с $w_n(f(\varphi(x, x')))$, а левая — с $\Phi(w_n(f(x)), w_n(f(x')))$, что сводится к $w_n(\varphi(f(x), f(x')))$.

Согласно вспомогательному утверждению леммы 3, чтобы показать сравнимость обеих частей по $\text{mod } p^{n+1}$, достаточно проверить, что $f(\varphi_t(x, x')) \equiv \varphi_t(f(x), f(x')) \pmod{p}$. Это ясно, так как по построению f «сохраняет» классы вычетов по $\text{mod } p$.

Мы уже упоминали, что, выяснив, как проводить вычисления с этими «степенными рядами», мы смогли бы

восстановить A по A/p . Мы знаем теперь, как это делать; мы доказали следующий результат:

Теорема. Пусть A — такое же, как в лемме 2, $k = A/p$. Тогда $h_W(k) \cong A$ (канонический изоморфизм).

[Теперь нетрудно доказать обратное: если k — совершенное кольцо характеристики p , то $h_W(k)$ — кольцо, в котором p не является делителем нуля, полное относительно p -адической метрики и имеющее поле вычетов k по $\text{mod } p$. Нечего и говорить, что функторы h_W и $“/p”$ обратны (для рассматриваемых колец) как на уровне отображения, так и на уровне объектов. Так мы получаем изоморфизм между категорией совершенных колец характеристики p и некоторой категорией p -адических колец.]

§ 3. А. Универсальная схема Витта

Будем обозначать описанную выше схему Витта, соответствующую простому числу p , через W^p ; заметим также обозначения X_0, X_1, \dots и W_0, W_1, \dots на X_1, X_p, X_{p^2}, \dots и W_1, W_p, W_{p^2}, \dots . Преобразования (2) принимают вид

$$\begin{aligned} W_1 &= X_1, \\ W_p &= X_1^p + pX_p, \\ W_{p^2} &= X_1^{p^2} + pX_p^p + p^2X_{p^2}, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ W_{p^k} &= \sum p^l X_{p^l}^{p^{k-l}}. \end{aligned}$$

Это семейство многочленов, очевидно, содержится в семействе, которое не зависит от выбора p , именно:

$$(3) \quad \begin{aligned} W_1 &= X_1, \\ W_2 &= X_1^2 + 2X_2, \\ W_3 &= X_1^3 + 3X_2 + 3X_3, \\ W_4 &= X_1^4 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ W_n &= \sum_{d|n} dX_d^{n/d} \\ &\dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Мы можем показать для (3), как мы это сделали для (2), что арифметические операции над W_t соответствуют полиномиальным операциям над X_t с целыми коэффициентами.

Как и ранее, для заданного Φ мы построим функции φ_n , такие, что $\Phi(w_n(X), w_n(X')) = w_n(\varphi(X, X'))$. Если наши прежние функции „ φ_n “ зависели только от X_t и X'_t с $t \leq n$, то эти φ_n зависят только от тех X_d и X'_d , для которых $d|n$. Коэффициенты φ_n должны принадлежать \mathbf{Q} , но для каждого простого p верна

Лемма 4'. Знаменатели коэффициентов φ_n не делятся на p .

Вспомогательное утверждение. Если $p^k|n$ и $x \equiv y \pmod{p}$, то $w_n(x) \equiv w_n(y) \pmod{p^{k+1}}$.

(Доказывается так же, как прежде.)

Доказательство леммы. Предположим, что результат верен для всех собственных делителей n .

Пусть p^k — наибольшая степень p , делящая n , $n = p^k \cdot m$. Заметим, что

$$\begin{aligned} w_n(X) &= w_{n/p}(X^p) + \sum_{d' \mid m} p^k d' \cdot X_{p^k d'}^{m/d'} = \\ &= w_{n/p}(X^p) + p^k(mX_n + \text{члены, содержащие низшие } X_t)^1). \end{aligned}$$

Подставляя это в правую часть уравнения $\Phi(w_n(X), w_n(X')) = w_n(\varphi(X, X'))$ и разрешая относительно последнего члена, мы получаем

$$\begin{aligned} t\varphi_n + \text{члены, содержащие низшие } \varphi_t &= \\ &= \frac{\Phi(w_n(X), w_n(X')) - w_{n/p}(\varphi^p(X, X'))}{p^k}. \end{aligned}$$

Так как „низшие φ_t “ по индуктивному предположению имеют „целые коэффициенты“, достаточно показать, что

$$\Phi(w_n(X), w_n(X')) \equiv w_{n/p}(\varphi^p(X, X')) \pmod{p^k}.$$

¹⁾ Как и прежде, если $p \nmid n$, то мы полагаем $w_{n/p} = 0$. Подчеркнем, что под «низшими X_t » мы подразумеваем X_t , индексы которых являются собственными делителями n .

Это мы сделаем в точности так же, как прежде. Мы представим нашу формулу „ $w_n(X) =$ “ в левую часть, вынув „остаточный“ член, так как он делится на p^k , и используемся „перестановочностью“ Φ и $w_{n/p}$; интересующее нас сравнение примет вид

$$w_{n/p}(\Phi(X^p, X'^p)) \equiv w_{n/p}(\Phi^p(X, X')) \pmod{p^k}.$$

Оно выполняется в силу вспомогательного утверждения, д. т. д.

Следовательно, все коэффициенты должны лежать в \mathbf{Z} .

Поэтому, как и прежде, мы получаем схему W с гомоморфизмом

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & A^\infty \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Spec } \mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots] & & \text{Spec } \mathbf{Z}[W_1, W_2, \dots] \end{array}$$

который становится изоморфизмом при тензорном умножении на $\text{Spec}(\mathbf{Q})$.

Б. Логарифмы степенных рядов

Вспомнив, что V обозначает кольцевую схему „формальных степенных рядов“, обозначим через V^0 замкнутую подсхему, соответствующую уравнению $A_0 = 1$. Она представляет степенные ряды с постоянным членом 1 и является коммутативной групповой схемой относительно умножения в V . Мы будем записывать R -значную точку $(1, a_1, a_2, \dots)$ в V^0 в более привычном виде: $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$. Мы будем работать со схемой V^0 в терминах ее функтора \mathbb{K} -значных точек, чтобы иметь возможность использовать хорошо известные результаты о формальных степенных рядах.

Рассмотрим следующие отображения схем:

$$W \times \text{Spec}(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\psi} A^\infty \times \text{Spec}(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\Phi} V^0 \times \text{Spec}(\mathbf{Q}),$$

где

$$\psi(w_1, w_2, \dots) = \exp \left[- \sum \frac{w_m}{m} t^m \right].$$

Мы утверждаем, что эта композиция продолжается до изоморфизма схем W и V^0 . Чтобы проверить это, мы прежде

всего пересчитаем это отображение на R -значные точки в случае $R \supseteq \mathbf{Q}$. Пусть

$$\sum a_i t^i = \psi(w_1, w_2, \dots) = \psi \circ w(x_1, x_2, \dots).$$

Получаем

$$\begin{aligned} \sum a_i t^i &= \exp \left[- \sum_m \frac{w_m}{m} t^m \right] = \\ &= \exp \left[- \sum_m \frac{\sum_n n x_n^d}{m} t^m \right] = \\ &= \exp \left[- \sum_n \sum_d \frac{(x_n \cdot t^n)^d}{d} \right] = \\ &= \exp \left[\sum_n \log (1 - x_n t^n) \right] = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x_n t^n). \end{aligned}$$

Элементы a_i и x_i связаны теперь, очевидно, полиномиальными уравнениями с целыми коэффициентами, ч. т. д.

Но отображение из $A^\infty \times \text{Spec } \mathbf{Q}$ в $V^0 \times \text{Spec } \mathbf{Q}$ есть гомоморфизм структуры аддитивной группы исходной схемы в структуру мультиликативной группы последней схемы. Следовательно, композиция — такой же гомоморфизм. Таким образом, схемный изоморфизм между W и V^0 , будучи групповым гомоморфизмом на плотных подмножествах, является на самом деле изоморфизмом групповых схем:

W есть кольцевая схема с той же аддитивной структурой, что и групповая схема V^0 .

(Вопрос: „Какой операции на V^0 соответствует мультиликативная структура W ?“ — исследуется в добавлении Б.)

В. Усечения

Мы можем „усечь“ кольцевую схему степенных рядов V , потому что ее арифметические операции таковы, что n -й член суммы или произведения зависит только от n -х и низших членов данных элементов. В W n -й член зависит

только от тех членов, индекс которых делит n . В результате для любого множества S положительных целых чисел, которое содержит каждый делитель некоторого числа, если оно содержит это число, мы получаем кольцевую схему $W_S = \text{Spec } \mathbf{Z}[X_s]_{s \in S}$ — „усечение“ W . Мы будем называть такие множества S из целых чисел „множествами усечения“. Для любого множества усечения S определен гомоморфизм усечения

$$T_S: W \rightarrow W_S.$$

Легко проверяются различные утверждения об этих схемах: отображение $w: W \rightarrow A^\infty$ усекается до отображения $w_S: W_S \rightarrow A^S$ и кольцевая структура на W_S — единственная структура, делающая w_S кольцевым гомоморфизмом. Если заданы два множества усечения $S \subset S'$, то определен гомоморфизм усечения $T_{S', S}: W_{S'} \rightarrow W_S$ и $T_{S, S'} \circ T_{S', S''} = T_{S, S''}$. Схема W сама совпадает, конечно, с $W_{\mathbf{Z}^+}$, а $W_{\{1, p, p^2, \dots\}}$ с W^p — схемой, которая была построена в § 2. Схемы $W_{\{1, \dots, n-1\}}$ изоморфны усеченным группам степенных рядов V_n^0 , но другие усечения не соответствуют никаким знакомым конструкциям с кольцами степенных рядов.

Нам нужны в этом месте некоторые пустяки общего характера: гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ коммутативных групповых схем называется (1-1)-гомоморфизмом, если индуцированные отображения групп $h_f(X): h_A(X) \rightarrow h_B(X)$ являются (1-1)-отображениями для всех схем X , и гомоморфизмом „на“, если $h_f(X)$ все являются гомоморфизмами „на“.

Свойство быть (1-1)-гомоморфизмом ведет себя прекрасно. Оно эквивалентно, по определению, свойству быть мономорфизмом в категории схем. Для произвольного гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ можно построить (1-1)-гомоморфизм $K \rightarrow A$, функтор которого есть функтор ядер индуцированных групповых отображений. (Мы строим K как слой в A \mathbf{Z} -значной точки 0 схемы B . Как показать, что групповая операция поднимается до K ?)

С другой стороны, свойство, которое мы назвали «быть гомоморфизмом „на“» сильнее свойства «быть эпиморфизмом», как для схем, так и для групповых схем,

Оно эквивалентно существованию схемного отображения g из B назад в A , которое является сечением f — правого обратного отображения. Этого, очевидно, достаточно; чтобы убедиться в необходимости, заметим, что по нашему определению единичное отображение в $h_B(B)$ должно получаться из отображения g в $h_A(B)$, такого, что $f \cdot g$ — единичное отображение. (Но g не обязано быть гомоморфизмом групповых схем!)

Мы не можем в общем случае построить групповую схему со свойствами ядра для f . Следовательно, хотя точные последовательности можно определить (условием, что индуцированные последовательности $\rightarrow h_A(X) \rightarrow h_B(X) \rightarrow \rightarrow h_C(X)$ — все точны; заметим, что отсюда следует, что ядро каждого отображения есть ядро предыдущего), они встречаются нечасто. Однако, если задано отображение „на“ $A \rightarrow B \rightarrow 0$, то мы можем получить точную последовательность $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$.

Заметим, что свойства „1-1“, „на“ и „точный“ сохраняются при расширении базы.

Отображения усечения, которые мы определили, были все отображениями „на“: если заданы $S \subset S'$, мы получаем сечение из W_S назад в $W_{S'}$, „заполняя“ места отсутствующих координат X_s чем угодно, например нулями.

Г. Канонические отображения

Существуют два полезных множества отображений из W в W .

а) Определим $V_n: W \rightarrow W$ формулами

$$V_n^*(X_m) = \begin{cases} X_{m/n}, & \text{если } n \mid m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

[В терминах R -значных точек, например, $V_3(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, x_1, 0, 0, x_2, \dots)$.] Мы утверждаем, что

$$(1) V_n \circ V_m = V_{nm}.$$

(2) V_n — аддитивный изоморфизм из W на ядро усечения T_S , где $S = \{m \in \mathbb{Z}^+ \mid n \nmid m\}$.

Доказательство утверждения (1) очевидно; рассматривая R -значные точки, проверяем, что V_n есть по крайней

мере изоморфизм схемы W и этого ядра. Чтобы проверить аддитивность, достаточно тензорно умножить на \mathbf{Q} и показать, что индуцированное отображение из $A^\infty \times \text{Spec } \mathbf{Q}$ аддитивно. В самом деле, мы находим, что оно описывается формулами

$$W_m \mapsto \begin{cases} nW_{m/n}, & \text{если } n|m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что для любого множества усечения S определено аналогичное отображение

$$V_{S,n}: W_{S/n} \rightarrow W_S,$$

где $S/n = \{m \in \mathbf{Z} \mid nm \in S\}$, которое отождествляет $W_{S/n}$ с ядром усечения

$$W_S \rightarrow W_{S-n\mathbf{Z}}.$$

б) Определим гомоморфизм $F_n: W \rightarrow W$ его действием на R -значные точки изоморфной схемы V^0 : пусть $P(t)$ — степенной ряд от t с первым коэффициентом 1. Обозначим через τ_1, \dots, τ_n формальные корни n -й степени из t ; тогда произведение

$$\prod_t P(\tau_i),$$

симметричное по τ_i , будет снова степенным рядом от t , а его коэффициенты будут многочленами от коэффициентов ряда P . Исследование отображения, определяющего связь между V^0 и A^∞ , показывает, что F_n соответствует отображению

$$(w_1, w_2, \dots) \rightarrow (w_n, w_{2n}, \dots)$$

R -значных точек из A^∞ . Заметим, что это кольцевой гомоморфизм, поэтому F_n — кольцевой гомоморфизм. Кроме того, $F_n \circ F_m = F_{nm}$.

Обычными рассуждениями (типа «только те индексы, которые делят m ») мы получаем, что подобные отображения (также кольцевые гомоморфизмы) определяются между усеченными схемами:

$$F_{S,n}: W_S \rightarrow W_{S/n}.$$

в) Обратимся к $F_n \circ V_n$; проверяя это отображение на R -значных точках из A^∞ , находим:

$$F_n \circ V_n = \text{умножение на } n^1.$$

В некоторых случаях можно делить на n .

Лемма 5. Умножение на n обратимо в $W \times \text{Spec } Z[1/n]$.

Доказательство. Напомним, что можно извлекать корни n -й степени из степенных рядов со свободным членом единица, если допускать деление коэффициентов на n ; следовательно, в $W \times \text{Spec } Z[1/n]$ можно делить на n , ч. т. д.

Таким образом, над схемой $\text{Spec } Z[1/n]$ отображение $\frac{1}{n} V_n$ является правым обратным для F_n .

Д. Разложения в прямые произведения

Прямое произведение двух кольцевых схем H и H' над S определяется вполне аналогично прямому произведению двух колец. (Не путать это с тензорным произведением!) Его схема представляет собой произведение над S схем H и H' .

Начиная с коммутативной кольцевой схемы G , покажем, что существует (1-1)-соответствие между разложениями $G = H \times H'$ и S -значными идемпотентными точками ε в схеме G : элемент $(1, 0)$ из $H \times H'$ есть ε , а H и H' являются ядрами соответственно умножения на $1 - \varepsilon$ и ε .

Рассмотрим $A^\infty = \text{Spec } Z[W_1, W_2, \dots]$ над $\text{Spec}(Z)$. Для каждого подмножества I положительных целых чисел схема A^∞ имеет Z -значную идемпотентную точку η_I

$$\eta_I^*(W_i) = \begin{cases} 1, & i \in I, \\ 0, & i \notin I \end{cases}$$

¹⁾ Мы имеем в виду, конечно, операцию кольцевого умножения на n , которая не соответствует покоординатному умножению на n , за исключением координат W_i в A^∞ . То же подразумевается в следующей лемме, где рассматривается умножение на $\text{Spec } Z[1/n]$ -значную точку « $1/n$ ».

и соответствующее разложение

$$A^\infty = A^I \times A^{Z^+ - I}.$$

Следовательно, схема W также допускает все эти разложения, но над $\text{Spec } Q$. Возникает вопрос: пусть P — любое множество простых чисел и

$$\mathcal{P} = \text{Spec } Z[\dots, 1/p, \dots]_{p \notin P}.$$

В таком случае какие из этих разложений схемы $W \otimes \text{Spec } Q$ на самом деле определены над \mathcal{P} ? Или, что то же самое: какие из точек $e_i = w^{-1}(\eta_i)$ рациональны над \mathcal{P} , т. е. в знаменателях их координат нет простых чисел из P ?

Ясно, что если мы заменим схему W ее усечением W_S , тот же вопрос может быть поставлен для подмножеств $I \subset S$.

Пусть Q — множество простых чисел, не принадлежащих P . Пусть \bar{P} (соответственно \bar{Q}) обозначает мультиплексивную полугруппу положительных целых чисел, порожденную множеством P (соответственно множеством Q) и 1. Заметим, что множества $n\bar{P}$ для $n \in \bar{Q}$ определяют разбиение Z^+ .

Лемма 6. Для любого $n \in \bar{Q}$ точка $e_{n\bar{P}} \in W$ рациональна над \mathcal{P} .

Доказательство. Для любого числа $n \in \bar{Q}$ проекция, заданная точкой e_{nZ^+} , совпадает с $\frac{1}{n}V_nF_n$, следовательно, она рациональна над \mathcal{P} ; в частности, сама точка e_{nZ^+} является рациональной. Имеем

$$e_{n\bar{P}} = \prod_{p \in Q} (e_{nZ^+} - e_{pnZ^+}).$$

Формально это бесконечное произведение. Однако оно является покоординатно „сходящимся“ в том смысле, что каждая координата становится постоянной после некоторого числа членов. Это ясно в A^∞ -координатах, поэтому это верно и в W -координатах. Следовательно, левая часть рациональна.

Следствие. Для каждого множества усечения S и любого $n \in \bar{\mathbb{Q}}$ точка $e_{n\bar{P} \cap S} \in W_S$ рациональна над \mathcal{P} .

Лемма 7. Пусть S — множество усечения. Тогда над \mathcal{P} имеет место разложение

$$W_S = \bigtimes_{n \in \bar{\mathbb{Q}}} e_{n\bar{P} \cap S}(W_S)$$

(все схемы домножены тензорно на \mathcal{P}).

Доказательство. Если бы наше множество идеалов было конечным, метод доказательства был бы ясен. Оказывается, мы можем применить то же доказательство, не используя условия конечности. Мы должны проверить универсальное свойство произведений на X -значных точках. Если задано семейство отображений $a_n: X \rightarrow e_{n\bar{P} \cap S}(W_S)$, построим отображение $\sum_{\bar{\mathbb{Q}}} a_n: X \rightarrow W_S$. Эта бесконечная сумма определена по тем же причинам, что и в последней лемме; она является единственным отображением, композиции которого с проекциями дают a_n .

Следствие. Если множество I является объединением множеств $n\bar{P} \cap S$ для некоторых чисел $n \in \bar{\mathbb{Q}}$, то точка e_I рациональна над \mathcal{P} .

Лемма 8. Пусть $n \in \bar{\mathbb{Q}}$ и S — некоторое множество усечения. Тогда

$$e_{n\bar{P} \cap S}(W_S) \cong W_{\bar{P} \cap S/n}$$

(все схемы домножены тензорно на \mathcal{P}).

Доказательство. Рассмотрим отображения:

$$e_{n\bar{P} \cap S}(W_S) \xrightleftharpoons[\text{проекция}]{\text{включение}} W_S \xrightleftharpoons[(1/n)V_{S,n}]{} W_{S/n} \xrightleftharpoons[\text{усечение}]{\text{любое сечение}} W_{\bar{P} \cap S/n}.$$

Все они, рациональны над \mathcal{P} . Достаточно показать, что композиция отображений, направленных вправо, и композиция отображений, направленных влево, являются гомоморфизмами кольцевых схем и обратны друг другу. Умножая тензорно на $\text{Spec } \mathbb{Q}$ и используя А-координаты, мы легко проверяем, что это так.

Итак, для каждого множества усечения S и множества простых чисел P имеем

$$W_s \otimes \mathcal{P} = \bigtimes_{n \in \bar{Q}} e_{n\bar{P} \cap S} (W_s \otimes \mathcal{P}) \cong \bigtimes_{n \in \bar{Q}} W_{\bar{P} \cap S/n} \otimes \mathcal{P}.$$

[Можно было бы спросить, всегда ли то, что мы получили, является максимальным разложением в прямое произведение схемы $W_s \otimes \mathcal{P}$? Или, что то же самое, исчерпывают ли элементы e_i при I , равном объединению множеств $n\bar{P} \subset S (n \in \bar{Q})$, все идеалы из W_s ? Мы докажем в п. В добавления, что это действительно так.]

Добавление к лекции 26

А) (см. конец § 2, Б).

Вычислим явно, как складывать первые два члена ряда типа (1_0) . Мы должны решить относительно s_0 и s_1 сравнение

$$(f(a) + pf(b)) + (f(a') + pf(b')) \equiv \\ \equiv f(s_0) + pf(s_1) \pmod{p^2}.$$

Редуцируя по \pmod{p} и вспоминая, что $f(a)$ принадлежит тому же классу вычетов, что и a , получаем $a + a' = s_0$.

Подставляя это в исходное выражение и выделяя член, зависящий от s_1 , получаем

$$pf(s_1) \equiv pf(b) + pf(b') + \\ + (f(a) + f(a') - f(a + a')) \pmod{p^2}.$$

Мы знаем, что последнее выражение делится на p . Если бы мы могли представить его в таком виде явно, то можно было бы „сократить“ на p и этим закончить. Задача заключается в вычислении $f(a + a')$. Решение таково: $(f(a^{1/p}) + f(a'^{1/p}))^p$ принадлежит классу смежности $a + a'$ и, являясь p -й степенью, должно принадлежать подклассу по $\pmod{p^2}$ класса $f(a + a')$!

Но $(x + y)^p$ можно представить в виде $x^p + y^p + p[x, y]$, где $[x, y]$ — некоторый полином от x и y с целыми коэффициентами. Следовательно, $f(a + a') \equiv \\ \equiv (f(a^{1/p}) + f(a'^{1/p}))^p \equiv f(a) + f(a') + p[f(a^{1/p}), f(a'^{1/p})]$.

Отсюда

$$pf(s_1) \equiv pf(b) + pf(b') - p [f(a^{1/p}), f(a'^{1/p})] \pmod{p^2},$$

$$f(s_1) \equiv f(b) + f(b') - [f(a^{1/p}), f(a'^{1/p})] \pmod{p},$$

$$s_1 = b + b' - [a^{1/p}, a'^{1/p}].$$

$$\text{Итак, } (a, b, \dots) + (a', b', \dots) = (a + a', b + b' - [a^{1/p}, a'^{1/p}], \dots).$$

Если бы мы предпочли систему координат, в которой можно вычислять, пользуясь лишь полиномиальными операциями, то надо было бы сделать подстановку $a = a^p$ либо $b = b^{1/p}$. Первый выбор был бы неблагороден, так как, вводя третий член разложения, пришлось бы изменить все вновь, и т. д. Мы используем в последующем вторую возможность. В терминах разложения (1) приведенный выше результат выглядит так:

$$(a, \beta, \dots) + (a', \beta', \dots) = (a + a', \beta + \beta' - [a, a'], \dots)$$

Б) (см. конец § 3, Б).

Мы хотим исследовать „умножение“, индуцированное на V^0 изоморфизмом с W . Мы обратимся, как обычно, к R -значным точкам. Мы должны описать бинарную операцию над степенными рядами, которую мы будем обозначать символом \circ .

Прежде всего, используя формулу для изоморфизма между $A^\infty \times \text{Spec } Q$ и $V^0 \times \text{Spec } Q$, мы обнаруживаем, что $(1 - at) \circ (1 - bt) = 1 - (ab)t$, где a и b — элементы любого кольца, содержащего Q . Следовательно, это должно выполняться для a и b в любом кольце. Так как операция \circ дистрибутивна относительно умножения, мы получаем

$$\prod_{i=1}^m (1 - a_i t) \circ \prod_{j=1}^n (1 - \beta_j t) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (1 - a_i \beta_j t).$$

Ради простоты назовем a_i (а не $1/a_i$) „корнями“ многочлена $\prod_{i=1}^m (1 - a_i t)$. (По этому определению многочлен имеет неопределенное число нулевых корней.) Над алгебраически замкнутым полем k мы можем тогда точно

описать операцию \circ для конечных (т. е. обрывающихся) степенных рядов: указанная операция переводит любую пару многочленов в многочлен, корни которого являются попарными произведениями корней двух заданных многочленов. Отсюда легко видеть, что рациональные функции (отношения многочленов) образуют подкольцо, которое имеет структуру „группового кольца“ группы k^1 .

Кольцо полных степенных рядов является пополнением этого кольца относительно метрики, в которой две точки „близки“, если первые n симметрических функций на них совпадают (хотя, конечно, нужно повозиться, чтобы определить „симметрические функции“ на семействе, некоторые элементы которого входят с отрицательными кратностями).

Эта трактовка более или менее формально переносится на случай любого кольца без делителей нуля. Мы можем построить над любым таким кольцом единственный многочлен, все корни которого являются попарными произведениями корней двух данных многочленов, даже если эти корни не лежат в самом кольце. Рациональные функции в группе формальных степенных рядов, начинающихся с единицы, образуют подкольцо, которое можно представить себе как „полугрупповое кольцо“ ненулевых элементов, — но теперь мы должны допускать не только формальные суммы элементов, действительно лежащих

¹⁾ Интересно, что сходная конструкция появляется в алгебраической топологии. Комплексное векторное расслоение на пространстве X определяет многочлен „класса Чжэня“ над кольцом $H^1(X)$ для четных l . Оказывается, что операция \oplus на расслоениях соответствует умножению многочленов, в то время как взятие тензорных произведений расслоений соответствует операции, сопоставляющей паре двух многочленов многочлен, корнями которого служат попарные суммы корней «в» H^2 двух данных многочленов!

Такую операцию нельзя определить на нашем языке степенных рядов, потому что „неопределенное число нулевых корней“, на которые можно не обращать внимания при нашем „мультипликативном умножении“, вступает в неразрешимое противоречие с попыткой построить „аддитивное умножение“. Сущность проблемы заключается в том, что наши многочлены имеют неопределенную степень по t . Топологические же многочлены имеют определенную степень, соответствующую размерности рассматриваемого расслоения.

в кольце, но и суммы элементов, (целых) алгебраических над кольцом, пока они входят полными системами сопряженных элементов. Все кольцо снова получается пополнением.

Координаты W_n образа в A^∞ — это моменты $\sum a_i^n$.

В) Мы дадим набросок доказательства того, что разложение в прямое произведение схемы $W_s \otimes \mathcal{P}$, описанное в нашей последней теореме, максимально.

Во-первых, заметим, что каждый идемпотент из W_s над \mathcal{P} задает идемпотент в A^S , а единственные идемпотенты последней схемы — это η_I для подмножеств I в S ; поэтому единственны возможными идемпотентами первой схемы являются e_I . Мы хотим сейчас доказать, что точка e_I рациональна над \mathcal{P} тогда и только тогда, когда I представляет собой объединение множеств $n\bar{P} \cap S$ ($n \in \bar{Q}$). Вот равносильное утверждение: для каждого $p \in P$ и элементов m , таких, что $pm \in S$, имеем $m \in I \Leftrightarrow pm \in I$.

Достаточно, очевидно, проверить это для случая $P = \{p\}$. Итак, предположим, что у нас есть рациональная точка e_I с I , не удовлетворяющая этому условию. Тогда должны были бы существовать ненулевые $m \in \bar{Q}$ и k , такие, что $m, pm, \dots, p^{k-1}m \in I$, $p^k m \in S - I$ (при необходимости можно поменять местами I и $S - I$). Рассмотрим множитель W_s (мы будем опускать $\otimes \mathcal{P}$ для удобства), соответствующий $m\bar{P} \cap S$. Он изоморфен схеме $W_{\bar{P} \cap S/m}$, усечением которой является $W_{\{1, p, \dots, p^k\}}$. Если мы теперь проследим за поведением нашего идемпотента e_I при всех этих преобразованиях, то найдем, что он дает нам разложение в прямое произведение этой схемы, откуда можно заключить, что усечение

$$W_{\{1, \dots, p^k\}} \rightarrow W_{\{1, \dots, p^{k-1}\}}$$

(все схемы домножены тензорно на \mathcal{P}) распадается. Но если перейти к (\mathbb{Z}/p) -значным точкам, то это будет означать, согласно § 2Г, что

$$\mathbb{Z}/p^k \rightarrow \mathbb{Z}/p^{k-1} \text{ распадается.}$$

Противоречие!

ЛЕКЦИЯ 27

Основная теорема в случае характеристики p

1°. Пусть H —произвольная кольцевая схема над полем k . Тогда для всех схем X над k схема H определяет пучок колец $\langle H \rangle_X$ на X , заданный формулой

$$\Gamma(U, \langle H \rangle_X) = \text{Hom}_k(U, H).$$

В частности, если схеме A^1 придана ее каноническая структура кольцевой схемы, то

$$\langle A^1 \rangle_X \cong \mathcal{O}_X,$$

т. е. получается структурный пучок на X . С другой стороны, предположим, что характеристика равна p . Тогда, используя кольцевую схему Витта для p , мы можем получить интересный пучок колец

$$\mathcal{W}_{\infty, X} = \langle W_{\{1, p, p^2, \dots\}} \times \text{Spec } k \rangle_X.$$

Аналогично, для каждого конечного n строится пучок колец с помощью усеченной схемы

$$\mathcal{W}_{n, X} = \langle W_{\{1, p, p^2, \dots, p^{n-1}\}} \times \text{Spec } k \rangle_X.$$

Полученные пучки колец образуют проективную систему пучков относительно очевидных усечений:

$$T_{n, n'}: \mathcal{W}_{n, X} \rightarrow \mathcal{W}_{n', X} \quad (n > n')$$

с проективным пределом $\mathcal{W}_{\infty, X}$ и первым членом $\mathcal{W}_{1, X} = \langle W_{\{1\}} \rangle_X = \langle A^1 \rangle_X = \mathcal{O}_X$. Эти пучки были введены Серром [5]. Чтобы описать их когомологии, Серр ввел некоторые фундаментальные гомоморфизмы, названные *операциями Бокштейна*. Чтобы понять их, удобно принять очень общую функторную точку зрения.

Пусть C, C' —две абелевые категории и $F: C \rightarrow C'$ —точный слева функтор с производными функторами $R^i F$. Предположим, что

$$(a) \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \text{ и}$$

б) сюръективные гомоморфизмы $A_n \rightarrow A_{n'}$, все $n' \leq n$, образуют проективную систему.

Пусть $A_0 = (0)$ и $A_n \rightarrow A_0$ — нулевой гомоморфизм. Пусть $K_{n, n'}$ — ядро гомоморфизма $A_n \rightarrow A_{n'}$. Тогда существует спектральная последовательность с первым членом

$$E_1^{p, q} = R^{p+q} F(K_{p+1, p}).$$

(Это p не имеет отношения к характеристике поля k .) Действительно, полагая

$$B_r^{p, q} = \text{Ker } R^{p+q} F(K_{p+1, p}) \rightarrow R^{p+q} F(K_{p+1, p-r+1}),$$

$$Z_r^{p, q} = \text{Im } R^{p+q} F(K_{p+r, p}) \rightarrow R^{p+q} F(K_{p+1, p})$$

(относительно очевидных отображений), проверяем, что

$$(0) = B_1^{p, q} \subset B_2^{p, q} \subset B_3^{p, q} \subset \dots \subset Z_3^{p, q} \subset Z_2^{p, q} \subset Z_1^{p, q} = E_1^{p, q}.$$

Тогда, по определению,

$$E_r^{p, q} = Z_r^{p, q} / B_r^{p, q}.$$

Кроме того, существуют канонические гомоморфизмы

$$d_r: Z_r^{p, q} \rightarrow E_1^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1}.$$

Здесь ядром является следующая группа Z , а именно $Z_{r+1}^{p, q}$, а образом — следующая группа B , а именно

$$B_{r+1}^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1},$$

т. е. каждый последующий d определяется на ядре предыдущего d и принимает значения, определенные по модулю образа предыдущего d . Это и есть в точности спектральная последовательность.

[За подробностями надежнее всего обратиться к семинару Картана 1950/51, сообщение 8; однако, по моему опыту, легче и полезней проработать эти вещи самостоятельно для небольших r , чем старательно следить за чьими-то верхними и нижними индексами.]

Я предоставляю читателю проверить, что в хороших случаях эта последовательность сходится к

$$\varprojlim_p R^n F(A_p).$$

Мы хотим применить этот аппарат для получения критерия того, что элемент из $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ поднимается до

$H^1(X, \mathcal{W}_{\infty, X})$. С этой целью возьмем в качестве C категорию пучков абелевых групп на X , в качестве C' — категорию абелевых групп, F — функтор $H^0(X, \cdot)$, а A_n — пучок $\mathcal{W}_{n, X}$. Тогда

$$E_1^{p, q} = H^{p+q}(X, \text{Ker } \{\mathcal{W}_{p+1, X} \rightarrow \mathcal{W}_{p, X}\}).$$

В частности,

$$E_1^{0, q} = H^q(X, \mathcal{W}_{1, X}) = H^q(X, \mathcal{O}_X),$$

а $Z_r^{0, q}$ — подгруппа в $H^q(X, \mathcal{O}_X)$, которая поднимается до $H^q(X, \mathcal{W}_{r, X})$.

Определение. Гомоморфизмы d_r на $Z_r^{0, q} \subset H^q(X, \mathcal{O}_X)$ называются *операциями Бокштейна* β_r .

Дело в том, что

$$(*) \quad \bigcap_r \text{ker } (\beta_r) = \\ = \{x \in H^q(X, \mathcal{O}_X) \mid x \text{ поднимается до } H^q(X, \mathcal{W}_{r, X}) \text{ для всех } r\}.$$

Для лучшего овладения этим аппаратом нам нужен еще один факт.

Лемма. $\text{Ker } \{\mathcal{W}_{n+1, X} \rightarrow \mathcal{W}_{n, X}\} \cong \mathcal{O}_X$.

Доказательство. Это немедленно следует из соответствующего результата о кольцевых схемах Витта: ядро усечения

$$W_{\{1, p, p^2, \dots, p^n\}} \rightarrow W_{\{1, p, p^2, \dots, p^{n-1}\}}$$

изоморфно как аддитивная групповая схема схеме A^1 . Это было замечено в лекции 26, § 3Г, (а) (взять V_{p^n}).

Итак, β_{r+1} есть канонический гомоморфизм

$$\text{Ker } (\beta_r) \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O}_X)/\text{Im } (\beta_r) \\ \cap \\ H^q(X, \mathcal{O}_X).$$

2°. Пусть F — неособая проективная поверхность над k (на самом деле ни то, что она неособенна, ни то, что размерность равна 2, роли не играет). Мы можем теперь

доказать фундаментальную теорему о семействах кривых на F , когда $\text{char}(k) = p$. Пусть P — связная компонента единицы схемы Пикара для F . Мы знаем из лекции 24, что касательное пространство $T_{0, P}$ к P в 0 канонически изоморфно $H^1(F, \mathcal{O}_F)$; при этом отождествлении справедлива

Теорема. Касательное пространство к P_{red} соответствует подпространству в $H^1(F, \mathcal{O}_F)$, аннулируемому всеми операциями Бокштейна.

Доказательство. Пусть $t \in T_{0, P}$. Пусть

$$I_{(n)} = \text{Spec } k[\epsilon]/(\epsilon^n),$$

и пусть t соответствует гомоморфизму

$$h_2: I_{(2)} \rightarrow P.$$

(а) t касается P_{red} тогда и только тогда, когда для всех n гомоморфизм h_2 поднимается до морфизма h_n :

$$\begin{array}{ccc} I_{(2)} & \xrightarrow{h_2} & P \\ \cap & \nearrow h_n & \\ I_{(n)} & & \end{array}$$

Доказательство утверждения (а). В терминах локальных колец пусть $O = \mathcal{O}_{0, P}$, и пусть h_2 и t определяют гомоморфизм

$$f_2: O \rightarrow k[\epsilon]/(\epsilon^2).$$

Пусть $\mathfrak{n} \subset O$ — идеал нильпотентов. Если t касается P_{red} , то $f_2(\mathfrak{n}) = O$. Так как кольцо O/\mathfrak{n} регулярно, то, согласно предложению в лекции 22 (А), f_2 поднимается до f_n :

$$\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & O/\mathfrak{n} \xrightarrow{f_2} k[\epsilon]/(\epsilon^2) \\ & \searrow f_n & \uparrow \\ & \mathfrak{n} & k[\epsilon]/(\epsilon^n) \end{array}$$

следовательно, h_2 поднимается до h_n . Обратно, если h_2 поднимается до h_n , то f_2 поднимается для любого n до f_{n+1} . Предположим, что $x \in \mathfrak{n}$; тогда $x^m = 0$ при некотором m . Пусть $f_2(x) = a \cdot \epsilon$, $a \in k$. Тогда

$$0 = f_{n+1}(x^m) = [f_{n+1}(x)]^m = [a \cdot \epsilon + \dots]^m = a^m \cdot \epsilon^m.$$

Поэтому $a^m = 0$, откуда $a = 0$. Это означает, что f_2 аннулирует n , т. е. t касается P_{red} .

Теперь переведем это на язык функторов: для всех n

$$\begin{aligned} \text{Hom}(I_{(n)}, P) &\subset \text{Hom}\left(I_{(n)}, \prod_{\xi} P(\xi)\right) \\ &\quad \parallel \\ &\text{Pic}_F(I_{(n)}) \\ &\quad \parallel \\ &H^1(F, \mathcal{O}_F^* \times I_{(n)}) \\ &\quad \parallel \\ &H^1(F, (\mathcal{O}_F \otimes k[\varepsilon]/(\varepsilon^n))^*) \end{aligned}$$

Но $(\mathcal{O}_F \otimes k[\varepsilon]/(\varepsilon^n))^* \cong \mathcal{O}_F^* \cdot [1 + \mathcal{O}_F \otimes (\varepsilon)/(\varepsilon^n)]$, где (ε) означает идеал, порожденный элементом ε . Поэтому

$$\begin{aligned} H^1(F, (\mathcal{O}_F \otimes k[\varepsilon]/(\varepsilon^n))^*) &\cong \\ &\cong H^1(F, \mathcal{O}_F^*) \oplus H^1\left(F, 1 + \mathcal{O}_F \otimes \frac{(\varepsilon)}{(\varepsilon^n)}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\{\text{Подгруппа } I_{(n)}\text{-значных точек схемы } P \text{ над } 0\} \\ &\quad \parallel \\ &H^1\left(F, 1 + \mathcal{O}_F \otimes \frac{(\varepsilon)}{(\varepsilon^n)}\right) \\ &\quad \parallel \\ &H^1(F, \langle V_n^0 \rangle_F) \\ &\quad \parallel \\ &H^1(F, \langle W_{\{1, 2, \dots, n-1\}} \rangle_F) \end{aligned}$$

Теперь мы воспользуемся результатами лекции 26 (Д). Мы работаем с кольцевой схемой Витта над полем характеристики p , так что каждое простое число, кроме p , обратимо. Поэтому W разлагается, как в (Д), если положить

$Q = \text{все простые числа, кроме } p;$

$\bar{Q} = \text{целые, взаимно простые с } p;$

$P = \{p\}; \bar{P} = \{1, p, p^2, \dots\}.$

Поэтому если $p^l \leq n - 1$ и $p^{l+1} \geq n$, то мы получаем:

(б) При усечении

$$W_{\{1, 2, \dots, n-1\}} \times \text{Spec}(k) \rightarrow W_{\{1, p, p^2, \dots, p^l\}} \times \text{Spec}(k)$$

последняя кольцевая схема выделяется как прямое слагаемое первой.

Поэтому для каждого n мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} I_{(n)}\text{-значные точки} \\ \text{схемы } P \text{ над } 0 \end{array} \right\} & \cong & H^1(F, \langle W_{\{1, 2, \dots, n-1\}} \rangle_F) \\ \downarrow \text{ограничение} & \uparrow & \downarrow \\ H^1(F, \langle W_{\{1, p, \dots, p^l\}} \rangle_F) & \cong & H^1(F, \mathcal{W}_{l, F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} I_{(2)}\text{-значные точки} \\ \text{схемы } P \text{ над } 0 \end{array} \right\} & \cong & H^1(F, \langle W_{\{1\}} \rangle_F) \cong H^1(F, \mathcal{O}_F) \end{array}$$

Это показывает, что элемент $a \in H^1(F, \mathcal{O}_F)$ поднимается до $H^1(F, \mathcal{W}_{l, F})$ (для всех l) тогда и только тогда, когда он поднимается до $H^1(F, \langle W_{\{1, 2, \dots, n-1\}} \rangle_F)$ (для всех n), а это происходит тогда и только тогда, когда соответствующий касательный вектор t к P в 0 поднимается до $I_{(n)}$ -значной точки P (для всех n). В силу (а) теорема доказана.

Следствие. Схема P редуцирована тогда и только тогда, когда все операции Бокштейна из $H^1(F, \mathcal{O}_F)$ в $H^2(F, \mathcal{O}_F)$ равны 0.

Следствие. Пусть $D \subset F$ — кривая, такая, что $H^1(F, \mathcal{O}_F(D)) = (0)$. Пусть $\delta \in C(\xi)$ — соответствующая точка. Тогда $C(\xi)$ редуцирована в том и только в том случае, когда все операции Бокштейна равны 0.

Следствие (Севери — Накай). Если $H^2(F, \mathcal{O}_F) = (0)$, то схема P редуцирована и имеют место те же теоремы существования, что и при $\text{char} = (0)$.

Примеры ненулевых операций Бокштейна см. в статьях: Игуса [1], Сепп [5].

Lia t e r a t u r a

Андреотти, Залмон (Andreotti A., Salmon P.)

- [1] Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete, *Monatsh. für Math.*, **61** (1957), 97.

Браун (Brown E.)

- [1] Cohomology theories, *Ann. Math.*, **75** (1962), 467—484.

Бурбаки (Bourbaki N.)

- [1] Algèbre commutative, fasc. 27, 28, 30, Éléments de mathématique, Hermann, Paris, 1961—1964. (Готовится русский перевод.)

Годеман (Godement R.)

- [1] Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958. [Русский перевод: Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961.]

Гротендицк (Grothendieck A.)

- [1] EGA: Éléments de géométrie algébrique, Publ. Math. IHES, Paris, № 4, 8, 11, 17, 20, 24 etc.
[2] Séminaire de géométrie algébrique, IHES, Paris, 1960—1961.
[3] Fondements de la géométrie algébrique, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
[4] Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, **9** (1957), 119—221. [Русский перевод: Гротендицк А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961.]
[5] Sur une Note de Mattuck — Tate, *Crelle*, **20** (1958), 208. [Русский перевод: Гротендицк А., Об одной заметке Маттука — Тэйта, *Математика*, **4:2** (1960), 29—38.]

Зарисский (Zariski O.)

- [1] Algebraic surfaces, Heidelberg — Berlin, 1934.

Зарисский, Самюэль (Zariski O., Samuel P.)

- [1] Commutative algebra, Princeton, 1958. [Русский перевод: Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, М., 1963.]

Игуса (Igusa J. I.)

- [1] On some problems in abstract algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 964—967.

Картан (Cartan H.)

[1] Séminaire, Mimeographed notes, Sécretariat mathématique, Paris.

Клейман (Kleiman S.)

[1] A numerical theory of ampleness, thesis, Harvard, 1965, to appear in *Ann. Math.*

[2] A note on the Nakai—Moisezon test for ampleness of a divisor, *Am. J. Math.*, 87 (1965), 221—226.

Кодайра (Kodaira K.)

[1] A differential-geometric method in the theory of analytic stacks, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 39 (1953), 1268—1273. [Русский перевод: Кодайра К., О дифференциальном методе в теории аналитических пучков, сб. *Математика*, 2 : 6 (1958), 126—131.]

Кодайра, Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)

[1] A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, *Am. J. Math.*, 81 (1959), 477—502.

Лэнг (Lang S.)

[1] Abelian varieties, New York, 1959.

Лэнг, Нерон (Lang S., Neron A.)

[1] Rational points of abelian varieties over function fields, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 95—118. [Русский перевод: Лэнг С., Нерон А., Рациональные точки абелевых многообразий над функциональными полями, *Математика*, 5 : 6 (1961), 13—33.]

Мамфорд (Mumford D.)

[1] Geometric invariant theory, Heidelberg — Berlin — New-York, 1965.

[2]* Further patologies in algebraic geometry, II, III, *Amer. J. Math.*, 84, № 4 (1962), 642—648; 89, № 1 (1967), 94—104.

Маттук, Тэйт (Mattuck A., Tate J.)

[1] On the inequality of Castelnuovo — Severi, *Hamb. Abh.*, 22 (1958), 295—299. [Русский перевод: Маттук А., Тэйт Дж., О неравенстве Кастельнуово — Севери, *Математика*, 4 : 2 (1960), 25—28.]

Матсусака (Matsusaka T.)

[1] Theory of Q -varieties, *Publ. of Math. Soc. Japan*, № 8, 1965.

Матсусака, Мамфорд (Matsusaka T., Mumford D.)

[1] Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, *Amer. J. Math.*, 86, № 3 (1964), 668—684.

Мойшесон Б. Г.

[1] Критерий проективности полных алгебраических абстрактных многообразий, *ИАН*, 28 (1964), 179—224.

Мурре (Murre J. P.)

- [1] Contravariant functors from preschemes to abelian groups,
Publ. Math. IHÉS, № 23, Paris, 1964.

Нагата (Nagata M.)

- [1] Local rings, New-York, 1962.

Накай (Nakai Y.)

- [1] A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, *Am. J. Math.*, 85 (1963), 14—26.
[2] On the characteristic linear systems of algebraic families, *Ill. J. Math.*, 1 (1957), 552—561.

Пуанкаре (Poincaré H.)

- [1] Sur les courbes tracées sur les surfaces algébrique, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 27 (1910).

Серр (Serre J. P.)

- [1] GAGA: Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1955), 1—42.
[2] Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, 61 (1955), 197—278. [Русский перевод: Серр Ж. П., Когерентные алгебраические пучки, сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М., 1958, стр. 372—458.]
[3] Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1959. [Русский перевод: Серр Ж. П., Алгебранческие группы и поля классов, М., 1968.]
[4] Corps locaux, Hermann, Paris, 1962.
[4] Sur la topologie des variétés algébrique en caractéristique p , Symp. of Alg. Top., Mexico, 1956.

Тэйт (Tate J.)

- [1] Rigid analytic spaces, Mimeographed notes, IHÉS, Paris.

Ука з а т е л ь

- Абсолютная кольцевая схема 199
— предсхема 34
Алгебраическая предсхема над полем 26
Алгебраически эквивалентные кривые 13
Арифметический род 99
Аффинная схема 23
Аффинный морфизм 56
- Базисное число поверхности 109
Бокштейна операция 225
- Вейля дивизор 88
Витта многочлен 203
— схема 203
— универсальная 209
- Геометрические точки 29
Геометрический род поверхности 99
— слой морфизма 38
Гиперплоскость 87
Гиперповерхность 87
Главные дивизоры 86
Глобальное уравнение дивизора 85
Глубина модуля 60
Группа Пикара 45
— $\text{Num}(F)$ 108
— $\text{Pic } \tau(F)$ 108
Групповая предсхема 34
Групповой объект 33
- Цинвизор на поверхности 17
— отиосительный 95
- Замкнутая подсхема 54
Замкнутое погружение 55
Зарисского топология 23
 S -значные точки предсхемы 29
- Индекс пересечения дивизоров 107
— — кривых 106
— — обратимых пучков 107
Иррегулярность поверхности 99
- Каионические отображения 214
Картье дивизор 84
— — эффективный 85
Касательное пространство Зарисского 40
Квазикогерентный пучок 54
Квазикомпактное множество 26
Класс дивизоров 85
Когерентный t -регулярный пучок 125
— пучок на нётеровой схеме 57
Кольцевая схема 199
Кольцевой объект категории 198
Кольцо усеченное степенных рядов 200
Компонента пространства 58
Конечный морфизм 57
— объект категории 33
Конструкция Тейхмюллера 202
Кривая 101
— полурегуляризованная 183
— эллиптическая 105
- Линейная система 12
Линейно эквивалентные дивизоры 86
— — кривые 13

- Локальное уравнение дивизора 84
 Локально окольцованное пространство 23
 — свободный пучок ранга r 49
- Многообразие над полем 97
 — неособое 100
 — нормальное 100
 Морфизм конечного типа 26
 — конечный 57
 — предсхема 25
- Неособое многообразие 100
 Неприводимое подмножество в предсхеме 23
 Нормальное многообразие 100
 Носитель дивизора 85
- Обильный пучок 98
 Обратный пучок 44
 Общая точка множества 23
 Окольцованное пространство 22
 Операция Бокштейна 225
 Операция « A » 58
 « \sim » 53
 Относительная степень кривой 109
 — — пучка 109
 Относительный дивизор 95
 Очень обильный пучок 98
- Плоская (строго) A -алгебра 32
 Погружение схемы 55
 Подсхема 55
 Полиномы Витта 203
 Предмногообразие над полем 27
 Предсхема 22
 — абсолютная 34
 — алгебраическая над полем 26
 — групповая 34
 — редуцированная 27
 Предсхемы функтор точек 28
 Проективная схема 97
 Проективное пространство 43
- Проективный спектр градуированного кольца 43
 Пространство Iv 40
 — касательное к схеме 40
 — локально окольцованное 23
 — окольцованное 22
 Пучок квазикогерентный 54
 — когерентный на нётеровой схеме 57
 — — m -регулярный 125
 — конечной Тог-размерности 58
 — локально свободный ранга r 49
 — обильный 98
 — обратимый 44
 — очень обильный 98
 — плоский 58
- Разбиение пучка 81
 Разбиения схемы 76
 Размерность схемы 97
 — — неприводимой 97
 Расслоенное произведение 35
 Редуцированная предсхема 27
 Род арифметический 99
 — геометрический 99
- Семейство кривых 111
 — обратимых пучков 111
 Система линейная 12
 Слой морфизма 38
 Спектр проективный градуированный кольца 43
 Степенных рядов усеченное кольцо 200
 Степень кривой относительная 109
 — пучка относительная 109
 Строго плоская A -алгебра 32
 — устойчивый 0-цикл 168
 Схема 40
 — абсолютная кольцевая 199
 — аффинная 23
 — Витта 203
 — — универсальная 209
 — кольцевая 199
 — нётерова 56
 — проективная 97

-
- | | |
|---|---|
| Тейхмюллера конструкция 202 | Функтор точек гравссманна 51 |
| Топология Зарисского 23 | — — предсхемы 28 |
| Функторы Curves \mathbb{F} и Pic \mathbb{F} 111 | |
| Универсальная схема Витта 209 | Характеристическое отображение 180 |
| Уплощающие разбиения 75 | |
| Уравнение дивизора глобальное 85 | Цикл нульмерный на поверхности (0-цикл) 164 |
| — — локальное 84 | — — λ -независимый 164 |
| Усечения 212 | |
| Усеченное кольцо степенных рядов 200 | |
| Устойчивый строго 0-цикл 168 | Эллиптическая кривая 105 |

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	7
<i>Лекция 1.</i> Кривые на поверхностях; примеры и постановки задач	11
<i>Лекция 2.</i> Основная проблема существования и два аналитических доказательства	17
<i>Лекция 3.</i> Предсхемы и связанные с ними „функторы точек“	22
<i>Лекция 4.</i> Использование функтора точек	31
Добавление к лекции 4. О представимых функторах и касательных пространствах Зарисского	40
<i>Лекция 5.</i> Proj и обратимые пучки	42
Добавление к лекции 5	51
<i>Лекция 6.</i> Свойства морфизмов и пучков	53
<i>Лекция 7.</i> Обзор теории когомологий когерентных пучков на P_n	65
<i>Лекция 8.</i> Уплощающие разбиения	75
<i>Лекция 9.</i> Дивизоры Картье	82
<i>Лекция 10.</i> Функториальные свойства эффективных дивизоров Картье	90
<i>Лекция 11.</i> Возвращение к классическому случаю	97
<i>Лекция 12.</i> Полная классификация кривых на поверхностях	105
<i>Лекция 13.</i> Линейные системы и примеры	113
Добавление к лекции 13	122
<i>Лекция 14.</i> Некоторые теоремы об обращении в нуль	124
<i>Лекция 15.</i> Универсальные семейства кривых	130
<i>Лекция 16.</i> Метод схем Чжоу	136
<i>Лекция 17.</i> Хорошие кривые	144
<i>Лекция 18.</i> Теорема об индексе пересечения	152

<i>Лекция 19.</i> Схема Пикара: общие замечания	157
<i>Лекция 20.</i> Независимые 0-циклы на поверхности	164
<i>Лекция 21.</i> Схема Пикара: вывод	170
<i>Лекция 22.</i> Характеристическое отображение семейства кривых	176
<i>Лекция 23.</i> Основная теорема по Кодайре — Спенсеру	183
<i>Лекция 24.</i> Строение морфизма Φ	187
<i>Лекция 25.</i> Основная теорема по Гrotендику — Картье	194
<i>Лекция 26.</i> Кольцевые схемы. Схема Витта	197
Добавление к лекции 26	219
<i>Лекция 27.</i> Основная теорема в случае характеристики p	223
Литература	229
Указатель	232

Д. Мамфорд

ЛЕКЦИИ О КРИВЫХ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Редактор *Н. Плужникова*

Художественный редактор *В. Шаповалов*

Технический редактор *А. Резоухова*

Корректор *Л. Г. Чучукина*

Сдано в производство 22/XII 1967 г. Подписано к печати 11/VII 1968 г.
Бумага тип. № 3 84×108 $\frac{1}{2}$ —3,69 бум. л., усл. печ. л. 12,4. Уч.-изд. л. 10,37.
Изд. № 1/4423. Цена 72 коп. Темпплан 1968 г. изд-ва «Мир», пор. № 29.
Заказ № 1019.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29,