ABELIAN VARIETIES

by

DAVIS MUMFORD
in collaboration with
C. P. Ramanuajam

LECTURES IN TATA INSTITUTE
OF FUNDAMENTAL RESEARCH

Bombay, 1968

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Д. МАМФОРД
в сотрудничестве с К. П. Рамануджамом

Абелевы многообразия

Перевод с английского
Ю. И. МАНИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1971

УДК 513.6

Теория абелевых многообразий — один из самых ярких и важных в приложениях разделов алгебраической геометрии. Ее классический аспект связан с именами Абеля, Римана, Пуанкаре, а фундамент абстрактной теории заложен А. Вейлем.

В этой книге впервые в мировой литературе изложены оба аспекта теории с единой точки зрения, с использованием новейших концепций и технических средств. Ее автор, молодой американский математик, известен советскому читателю по книге „Лекции о кривых на алгебраической поверхности" („Мир", 1968).

Книга предназначена для специалистов по алгебраической геометрии, теории аналитических пространств и теории чисел. Она доступна аспирантам и студентам-математикам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. $\frac{2\text{-}2\text{-}3}{20\text{-}71}$

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Лекции Д. Мамфорда по теории абелевых многообразий, которые в русском переводе предлагаются читателю, восполняют существенный пробел в мировой литературе. Теория абелевых многообразий имеет два основных аспекта — классический язык тэта-функций, основы которого были заложены в работах Якоби, Абеля и Римана, и абстрактная алгебро-геометрическая теория, разработанная А. Вейлем и примененная им к доказательству таких глубоких теоретико-числовых результатов, как гипотеза Римана для дзета-функций над конечными полями. Монографическое изложение первого аспекта можно найти в книгах Конфорто [16] и и Вейля [6], второго — в книгах Вейля [7] и Ленга [17]. Однако бурное развитие алгебро-геометрической и комплексно-аналитической техники за последние два десятилетия привели к тому, что все эти изложения уже не соответствуют нынешнему уровню нашего понимания теории как методически, так и по степени охвата предмета.

Книга Мамфорда излагает оба аспекта теории с единой точки зрения и содержит много свежих методических находок и новых результатов. Более подробную информацию о том, что в ней есть (и чего нет), можно получить из авторского предисловия. Отметим лишь, что эта книга является естественным продолжением «Лекций о кривых на алгебраической поверхности» того же автора («Мир», 1968), где строятся специальные абелевы многообразия — так называемые многообразия Пикара алгебраических поверхностей.

Один из самых ярких арифметических результатов, не вошедших в книгу, — теорема Морделла — Вейля, — с полным доказательством изложен в добавлении переводчика. Мы надеемся, что эта книга еще долго будет служить неоценимым помощником всем математикам, желающим активно овладеть одним из важнейших разделов алгебраической геометрии.

Ю. И. Манин

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги положен курс лекций, читанный зимой 1967—1968 года в Тата-институте фундаментальных исследований (Бомбей, Индия). Записки этого курса были затем подготовлены К. П. Рамануджамом, который внес многочисленные усовершенствования по сравнению с устным вариантом. Окончательный текст является результатом наших совместных усилий.

Всеохватывающий курс теории абелевых многообразий потребовал бы огромной работы. В этой книге содержится примерно половина материала, который, по моему мнению, следовало бы изложить, чтобы добиться разумной полноты. Результаты, включенные сюда, содержат, в частности:

I) относящиеся к основаниям теории результаты из книг Вейля [7] и Ленга [17];

II) принадлежащую Картье и Гротендику технику из теории схем, которая позволяет дать ясное описание ситуации в конечной характеристике;

III) основы аналитической теории, развитой в книге Конфорто [16].

К сожалению, избранный мной способ подачи материала не столь элементарен, как мог бы быть. Возможно, впервые знакомящийся с этим предметом математик найдет его более доступным, если вместо моего изложения (или вместе с ним) будет читать какую-нибудь из более ранних книг. Все же я пытался не переусложнять доказательства, насколько это было совместимо с необходимостью охватить так много материала. В частности, глава II проще остальных (и не зависит от первой главы). Она излагает ряд технических средств в прозрачной классической ситуации. В третьей главе эта техника переносится на схемы, где требуются более тонкие соображения.

Если бы книга имела продолжение, я хотел бы включить в нее следующие темы:

(I) якобиевы многообразия;

(II) абелевы схемы: теория деформаций и модули;

(III) кольцо модулярных форм и глобальная структура пространства модулей;

(IV) «тонкая» структура в характеристике p (Дьедонне);

(V) арифметические результаты: абелевы схемы над локальными и глобальными полями.

В этой книге термин «якобиево многообразие», по моему, не упомянут ни разу. С упорством, достойным лучшего применения, я пытался показать, что теорию абелевых многообразий можно развить, не обращаясь к якобианам. Это стало возможным в основном благодаря систематическому использованию когомологий. Я особенно доволен доказательством основной теоремы в § 8, которая заменяет теорему 4 на стр. 99 книги Ленга [17]. Должен признаться, однако, что рассуждения Ленга иным могут показаться более «геометричными». Теорию якобиевых многообразий читатель найдет в книгах Вейля и Ленга; особенно важна теорема 31 на стр. 117 книги Вейля, опущенная Ленгом по непонятной причине.

Некоторые из основных фактов об абелевых схемах содержатся в шестой главе моей книги [21]. Положение в этой области было значительно прояснено недавними работами Рейно, которые должны скоро быть опубликованы.

Модулярным формам посвящены записки Маасса [19] и книга Ганнинга и Росси [9]. Их связь с пространствами модулей абелевых многообразий изложена в работах Бейли [4] и Шимуры [34], в их докладах в летней школе в Баулдере. Чисто алгебраическая теория «тэта-нуль значений» (модулярные формы специального вида) содержится в моей статье [23]. Интересно было бы выявить дальнейшие связи между алгебраической и аналитической теориями. Например, можно ли дать алгебраическое определение рядов Эйзенштейна как некоторых сечений определенных линейных расслоений на пространстве модулей?

К теории Дьедонне относятся статьи Манина [25], Оорта [27], записки семинара [31], работа Тэйта [32] и серия статей Барзотти [2], [3].

Литература по арифметической теории обширна; отмечу здесь лишь статью о модели Нерона [26] и теорему о стабильной редукции для нее [24]; работу Кодаиры [15]; книгу [18] с теоремой Морделла — Вейля; обзор Касселса [14] и работы Тэйта [32], [33].

Часть материала этой книги нова и публикуется впервые. Это относится к результатам § 16 об индексе невырожденного линейного расслоения и § 23 о тэта-группах $\mathcal{G}(L)$ в случае, когда морфизм φ_L несепарабелен. К. П. Рамануджаму принадлежат упрощения § 6, § 13 и §16, очень изящное добавление к § 4, в котором абелевы многообразия характеризуются как полные многообразия с произвольным законом композиции, допускающим двустороннюю единицу, а также изучение локальных инвариантов алгебр с делением и с инволюций второго рода содержащееся в § 21.

Я признателен К. П. Рамануджаму за все его усилия и Тата-институту за очень приятную и стимулирующую обстановку, в которой проходили лекции.

Д. Мамфорд

Глава I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Комплексные торы

В этой главе мы изучаем компактиые связные комплексные группы Ли X размерности g. Такая группа по определению представляет собой компактное связное комплексное многообразие размерности g, множество точек которого снабжено групповой структурой, для которой отображения

$$X \times X \to X\colon (x, y) \to xy \text{ и } X \to X\colon x \to x^{-1}$$

голоморфны. Пусть V — касательное пространство к X в единице $e \in X$. Это комплексное векторное пространство.

Напомним, что если X — *любая* комплексная группа Ли и V — ее касательное пространство в точке e, то для всякого $v \in V$ существует единственный голоморфный гомоморфизм

$$\varphi_v\colon \mathbf{C} \to V,$$

такой, что $d\varphi_v$ переводит единичный касательный вектор к $\mathbf{C}$ в нуле в $v \in V$. Кроме того, $\varphi_v(t)$ как функция от v и t является голоморфным отображением $\mathbf{C} \times V \to X$. *Экспоненциальное отображение* $\exp\colon V \to X$ определяется формулой $\exp(v) = \varphi_v(1)$. В силу единственности φ_v имеем $\varphi_{sv}(t) = \varphi_v(st)$, откуда $\varphi_v(t) = \exp(tv)$. Поэтому, если отождествить, как обычно, касательное пространство к V в 0 с самим V, дифференциал отображения exp в иуле превратится в тождественное отображение на V.

Возвращаясь теперь к случаю компактной связной группы X, докажем прежде всего следующий результат:

(1) *Группа X коммутативна.*

Доказательство. В самом деле, для любой точки $x \in X$ определено отображение C_x: $X \to X$, $C_x(y) = xyx^{-1}$. Его дифференциал $(dC_x)_e$ является автоморфизмом пространства V, и функция $x \to (dC_x)_e$ определяет голоморфное отображение группы X в $\mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{End}(V)$. Так как $\mathrm{End}(V)$ — конечномерное комплексное векторное пространство, а все голоморфные функции на компактном связном комплексном многообразии постоянны, отсюда следует, что $(dC_x)_e$ не зависит от $x \in X$, так что $(dC_x)_e = (dC_e)_e = 1_V$.

Далее, для любого гомоморфизма T: $X_1 \to X_2$ комплексных групп Ли

$$T(\exp_{X_1}(y)) = \exp_{X_2}((dT)_e\, y).$$

Это снова вытекает из единственности однопараметрических подгрупп $t \to \exp_{X_i}(tv)$. Отсюда легко следует, что

$$C_x(\exp(y)) = \exp((dC_x)\, y).$$

Так как $(dC_x)_e = 1_V$, это показывает, что

$$C_x(\exp(y)) = \exp(y);$$

стало быть, $\exp(V)$ лежит в центре X. Поскольку $d(\exp) = 1_V$ — тождественное отображение, из теоремы о неявных функциях вытекает, что exp определяет гомеоморфизм некоторой окрестности нуля в V с некоторой окрестностью e в X. Из связности X следует тогда, что $\exp(V)$ порождает X как группу. Стало быть, группа X коммутативна.

(2) *Экспоненциальное отображение* exp: $V \to X$ *является сюръективным гомоморфизмом комплексных групп Ли, ядро которого есть некоторая решетка*[1] $U \subset V$. *Этот гомоморфизм индуцирует изоморфизм* $V/U \rightleftarrows X$. *Иными словами, X является комплексным тором.*

[1] *Решеткой* в вещественном векторном пространстве V называется подгруппа, порожденная некоторым базисом пространства V.

Доказательство. Пусть x, $y \in V$. Так как группа X коммутативна, отображение $\mathbf{C} \to X$, определенное формулой $t \to \exp(tx)\exp(ty)$, является голоморфным гомоморфизмом, а образ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0$ при касательном отображении, как нетрудно видеть, совпадает с $x+y$. Но для любой точки $z \in V$ отображение $t \to \exp(tz)$ является единственным голоморфным гомоморфизмом, касательное отображение которого переводит $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0$ в $z \in V$. Следовательно, $\exp(tx)\exp(ty) = \exp(t(x+y))$. Полагая здесь $t=1$, получаем, что exp — гомоморфизм. Он сюръективен, потому что группа X связна, а $\exp(V)$ содержит некоторую окрестность e и, стало быть, открытую и замкнутую подгруппу группы X. Ядро U этого гомоморфизма дискретно в V, потому что существует окрестность N нуля в V, на которой отображение $\exp|_N\colon N \to X$ инъективно. Индуцированный гомоморфизм $V/U \to X$ голоморфен в силу определения структуры комплексного многообразия V/U и является алгебраическим гомоморфизмом групп. Касательное отображение в единице для этого гомоморфизма — изоморфизм. По теореме об обратной функции обратное к нему отображение голоморфно в e и, стало быть, всюду на X (потому что сдвиги являются голоморфными изоморфизмами на V/U и на X). Следовательно, X изоморфна V/U. Ядро U является решеткой, потому что это дискретная подгруппа векторного пространства с компактным фактором.

Впредь групповую операцию на X мы будем записывать аддитивно. Экспоненциальный гомоморфизм $V \to X$ до конца этой главы будет обозначаться символом π.

(3) *Как абстрактная группа X делима* (*т. е.* $nX = X$ *при* $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$). *Пусть* X_n ($n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$) — *подгруппа точек, аннулируемых умножением на* n. *Тогда* $X_n \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}$.

Доказательство. В силу утверждения (2) X как вещественная группа Ли изоморфна $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{2g} = (S^1)^{2g}$, где S^1 — окружность. Отсюда следует требуемый результат.

(4) *Определены канонические изоморфизмы*

$$H^r(X, \mathbf{Z}) \cong \left\{ \begin{matrix} \text{группа альтернированных } r\text{-форм} \\ U \times \ldots \times U \to \mathbf{Z} \end{matrix} \right\}$$

Доказательство. Очевидно, (V, π) является универсальным накрытием группы X. Поэтому группа $U = \pi^{-1}(0)$ совпадает с $\pi_1(X, 0)$. Так как для любого «хорошего» топологического пространства X

$$H^1(X, \mathbf{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \mathbf{Z}),$$

при $r = 1$ утверждение справедливо. Чтобы доказать его для всех r, достаточно проверить, что умножение индуцирует изоморфизм

$$(*) \qquad \wedge^r(H^1(X, \mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} H^r(X, \mathbf{Z}) \qquad \text{при всех } r.$$

Для этого заметим, что если условие $(*)$ выполняется для двух пространств X_1, X_2 с конечно порожденными группами когомологий, то оно выполняется, согласно формуле Кюннета, для произведения $X_1 \times X_2$;

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r(H^1(X_1 \times X_2, \mathbf{Z})) & \longrightarrow & H^r(X_1 \times X_2, \mathbf{Z}) \\ \wr\Vert & & \Vert \\ \wedge^r(H^1(X_1, \mathbf{Z}) \oplus H^1(X_2, \mathbf{Z})) & & \Vert \\ \wr\Vert & & \Vert \\ \sum\limits_{p+q=r} [\wedge^p H^1(X_1, \mathbf{Z}) \otimes \wedge^q H^1(X_2 \mathbf{Z})] & \xrightarrow{\sim} & \sum\limits_{p+q=r} H^p(X_1, \mathbf{Z}) \otimes H^q(X_2, \mathbf{Z}) \end{array}$$

(Обратите внимание, что из условия $(*)$ для X_1, X_2 следует отсутствие кручения в группах $H^r(X_i, \mathbf{Z})$, так что в формуле Кюннета член с Tor исчезает.) Так как X является произведением окружностей S^1, для которых $(*)$ тривиально выполнено, то утверждение доказано.

(5) *Вычисление групп $H^q(X, \Omega^p)$ (Ω^p — пучок еоломорфных p-форм на X).*

Группы когомологий $H^q(X, \Omega^p)$ приинадлежат к числу важнейших инвариантов любого компактного комплексного многообразия X. Оставшаяся часть этого параграфа будет посвящена их вычислению для торов.

Пусть $V = T_{0,X}$ — касательное пространство к X в нуле (рассматриваемое как комплексное векторное пространство), и пусть $T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$ — комплексное кокасательное пространство к X в нуле. Сдвиг с помощью группового закона на X позволяет продолжить любой комплексный p-ковектор $\alpha \in \bigwedge^p T$ до инвариантной голоморфной p-формы ω_α на X. В самом деле, пусть $T_x\colon X \to X$ — отображение $T_x(y) = x + y$. Требуемое продолжение задается формулой $(\omega_\alpha)_x = T^*_{-x}(\alpha)$. Отображение $\alpha \to \omega_\alpha$ определяет гомоморфизм пучков

$$(*) \qquad \mathcal{O}_X \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \bigwedge^p T \to \Omega^p.$$

Легко проверить, что в действительности это изоморфизм. Иными словами, Ω^p — *глобально* свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Поскольку единственными глобальными сечениями пучка $\mathcal{O}_X$ являются константы, глобальные сечения пучка Ω^p в точности совпадают с инвариантными p-формами ω_α. Более того, изоморфизм $(*)$ показывает, что

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^q(X, \mathcal{O}_X \otimes \bigwedge^p T) \cong H^q(X, \mathcal{O}_X) \otimes \bigwedge^p T.$$

Нашим основным результатом будет следующая

Теорема. *Положим* $\bar{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-антл}}(V, \mathbf{C})$ (*антилинейные формы*). *Тогда для всех q существуют естественные изоморфизмы*

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) \cong \bigwedge^q \bar{T},$$

так что

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \bigwedge^p T \otimes \bigwedge^q \bar{T}.$$

Близко следуя Вейлю [7], мы используем для доказательства этого хорошо известную резольвенту

Дольбо:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{C}^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^{0,1} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^{0,2} \longrightarrow \ldots,$$

где $\mathscr{C}^{p,q}$ — пучок комплекснозначных C^∞-дифференциальных форм типа (p, q) на X, а $\bar\partial$ — та компонента внешнего дифференциала d, которая отображает $\mathscr{C}^{p,q}$ в $\mathscr{C}^{p,q+1}$. Нужные нам общие сведения можно найти в книге Ганнинга и Росси [9, гл. VI]. Так как $\mathscr{C}^{p,q}$ — вялые пучки, эта резольвента определяет изоморфизмы

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) \cong \operatorname{Ker}(\mathscr{C}^{0,q} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^{0,q+1}) / \bar\partial \mathscr{C}^{0,q-1}.$$

Далее, пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{0,0}$ — пучок комплексных C^∞-функций на X. Тогда в точности то же рассуждение, что и с голоморфными формами, позволяет построить изоморфизм пучков

$$\varphi_{p,q}\colon \mathscr{C} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} [\Lambda^p T \otimes \Lambda^q \bar T] \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{p,q},$$

который переводит $\sum f_i \otimes \alpha_i$ в $\sum f_i \omega_{\alpha_i}$, где ω_α — инвариантная (p, q)-форма, принимающая в нуле значение $\alpha \in \Lambda^p T \otimes \Lambda^q \bar T$. Отметим, что инвариантные формы ω_α замкнуты. В самом деле, поскольку $\omega_{\alpha\wedge\beta} = \omega_\alpha \wedge \omega_\beta$, достаточно проверить это для ковекторов α типов (1, 0) и (0, 1). Далее, $\pi\colon V \to X$ — локальный изоморфизм, поэтому можно ограничиться проверкой того, что $d(\pi^*(\omega_\alpha)) = 0$. Рассматривая элемент $\alpha \in T \oplus \bar T$ как функцию на V, имеем тогда $\pi^*(\omega_\alpha) = d\alpha$. Поэтому $d(\pi^*(\omega_\alpha)) = d^2\alpha = 0$.

Пусть теперь $\Lambda^\bullet = \bigoplus_q \Lambda^q \bar T$ — внешняя алгебра пространства $\bar T$. Положим $\mathfrak{A} = \Gamma(X, \mathscr{C})$. Отображение $\varphi_{0,q}$ индуцирует изоморфизм

$$\mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Lambda^q \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathscr{C}^{0,q}).$$

Если на пространствах $\mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Lambda^q$ ввести дифференциал $\bar\partial$ формулой $\bar\partial(f \otimes \alpha) = \bar\partial f \wedge \alpha$, из замкнутости ω_α будет следовать, что комплексы $\mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}$ и $\Gamma(X, \mathscr{C}^{0,\bullet})$ изоморфны. Поэтому

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) \cong H^q(\mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}).$$

Теперь мы докажем, что вложение $i\colon \wedge^{\bullet} \to \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}$ определяет изоморфизм пространств когомологий, т. е. $\wedge^q_{\bullet} \xrightarrow{\sim} H^q(\mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet})$. С этой целью воспользуемся рядами Фурье. Пусть μ — мера на X, индуцированная евклидовой мерой на V и нормализованная так, чтобы $\mu(X) = 1$. Определим $\mathbf{C}$-линейное отображение $\mu\colon \mathfrak{A} \to \mathbf{C}$ формулой $\mu(f) = \int\limits_X f\mu$. Для любого векторного пространства W над $\mathbf{C}$ обозначим через μ_W отображение $\mu \otimes 1_W\colon \mathfrak{A} \otimes W \to W$. В частности, мы получаем отображение $\mu_{\wedge}\colon \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet} \to \wedge^{\bullet}$. Оно $\wedge^{\bullet}$-линейно и удовлетворяет условию $\mu_{\wedge} \circ i = \mathrm{Id}_{\wedge}$.

Лемма 1. *Для любого элемента* $\omega \in \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}$ *имеем* $\mu_{\wedge}(\bar{\partial}\omega) = 0$.

Доказательство. Так как отображение $\mu_{\wedge}$ $\wedge^{\bullet}$-линейно, достаточно проверить, что $\mu_{\wedge}(\bar{\partial} f) = 0$ при $f \in \mathfrak{A}$. Выбрав базис $\omega_1, \ldots, \omega_n$ пространства $\bar{T}$, мы можем представить элемент $\bar{\partial} f \in \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \bar{T}$ в виде $\sum h_i \otimes \omega_i$. Все коэффициенты h_i имеют вид $D(f)$, где D — некоторое инвариантное векторное поле на X. Утверждение леммы вытекает поэтому из следующего элементарного факта. Пусть f есть C^{∞}-функция на V, периодичная относительно решетки U, а D — инвариантное относительно сдвигов векторное поле на V. Тогда

$$\int\limits_{V/U} D(f)\, dx = 0$$

(здесь dx — элемент объема в некоторой евклидовой метрике).

Положим теперь $U^* = \mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z})$. Любой элемент $\lambda \in U^*$ продолжается до некоторого $\mathbf{R}$-линейного отображения $\lambda: V \to \mathbf{R}$, и мы можем рассмотреть на V функцию $x \to e^{2\pi i \lambda(x)}$. Она инвариантна относительно сдвигов из U, поэтому имеет вид $e_\lambda \circ \pi$, где e_λ — некоторая C^∞-функция на X. Определим $\mathbf{C}$-линейное отображение $Q_\lambda: \mathfrak{A} \to \mathbf{C}$, положив $Q_\lambda(f) = \mu(e_{-\lambda} f) = \int\limits_X e_{-\lambda} f \mu$. Более общо, для любого векторного пространства W определим $Q_\lambda: \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} W \to W$ формулой $Q_\lambda(f \otimes w) = \mu(e_{-\lambda} f) \otimes w$. Элементы $Q_\lambda(f)$ являются коэффициентами Фурье для f: каждый элемент $f \in \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} W$ допускает разложение

$$f = \sum_{\lambda \in U^*} e_\lambda \otimes Q_\lambda(f).$$

Операторы Q_λ, как и μ, перестановочны с $\mathbf{C}$-линейными отображениями $W \to W'$; в частности, $Q_\lambda: \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \bigwedge^\bullet \to \bigwedge^\bullet$ является $\bigwedge^\bullet$-линейным отображением.

Чтобы завершить доказательство, выберем некоторую эрмитову форму $\| \; \|$ на комплексном векторном пространстве V. Как обычно, она индуцирует некоторую норму на $\overline{T}$ и тем самым на $\bigwedge^\bullet$.

Определим отображение $\overline{C}: U^* \to \overline{T}$ как композицию следующих отображений:

$$U^* \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{R}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C}) \cong T \oplus \overline{T} \xrightarrow{\text{проекция}} \overline{T}.$$

Оно превращает U^* в подрешетку пространства $\overline{T}$. Ограничение нормы определяет норму $\| \; \|$ на U^*.

Лемма 2. (1) *Отображение $f \to \{Q_\lambda(f)\}_{\lambda \in U^*}$ является изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}$ и пространства всевозможных отображений $Q: U^* \to \mathbf{C}$, убывающих на бесконечности быстрее, чем $\|\lambda\|^{-n}$ при любом n: $|Q(\lambda)| = o(\|\lambda\|^{-n})$, n любое.*

(2) *Для любой формы* $\omega \in \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}$

$$Q_\lambda(\bar{\partial}\omega) = 2\pi i\,[Q_\lambda(\omega) \wedge \bar{C}(\lambda)].$$

Доказательство. Первое утверждеие — стандартный факт из анализа Фурье. Для доказательства второго заметим, что

$$\pi^*(\bar{\partial}e_{-\lambda}) = \bar{\partial}(e^{-2\pi i\lambda}) = -2\pi i e^{-2\pi i\lambda}\bar{\partial}\lambda =$$
$$= \pi^*[-2\pi i e_{-\lambda} \otimes \bar{C}(\lambda)],$$

стало быть, $\bar{\partial}e_{-\lambda} = -2\pi i e_{-\lambda} \otimes \bar{C}(\lambda)$. Поэтому в силу леммы 1 для всех $\omega \in \mathfrak{A} \otimes \wedge^{\bullet}$ имеем

$$0 = \mu_\wedge(\bar{\partial}(\omega e_{-\lambda})) =$$
$$= \mu_\wedge(e_{-\lambda}\bar{\partial}\omega) - 2\pi i\mu_\wedge(\omega e_{-\lambda} \wedge \bar{C}(\lambda)) =$$
$$= Q_\lambda(\bar{\partial}\omega) - 2\pi i Q_\lambda(\omega) \wedge \bar{C}(\lambda),$$

что завершает доказательство.

Следующее утверждение хорошо известно:

Лемма 3. *Пусть W — комплексное векторное пространство, $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(W, \mathbf{C})$. Тогда D продолжается до отображения $D \lrcorner\colon \wedge^p W \to \wedge^{p-1} W$ (при любом p), называемого внутренним умножением на D, которое определяется условиями*

(1) $D \lrcorner (X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) =$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} D(X_k)\, X_1 \wedge \ldots \wedge \hat{X}_k \wedge \ldots \wedge X_p;$$

(2) *в частности, при* $DX_0 = 1$ *для всех* $\omega \in \wedge^{\bullet} W$

$$D \lrcorner (\omega \wedge X_0) + (D \lrcorner \omega) \wedge X_0 = \omega.$$

Теперь мы в состоянии доказать, что отображение $i\colon \wedge^{\bullet} \to \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \wedge^{\bullet}$ является гомотопической эквивалентностью комплексов (относительно $\bar{\partial}$). Для любого элемента $\lambda \in U^*$, $\lambda \neq 0$, определим элемент $\lambda^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\bar{T}, \mathbf{C})$ с помощью эрмитова скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ на $\overline{T}$:

$$\lambda^*(x) = \frac{\langle x, \overline{C}(\lambda)\rangle}{2\pi i \|\overline{C}(\lambda)\|^2}.$$

Тогда $2\pi i\lambda^*(\overline{C}(\lambda)) = 1$ и $\|\lambda^*\| \leqslant (2\pi)^{-1}\|\lambda\|^{-1}$. Для всех $\omega \in \mathfrak{A} \otimes \Lambda^p$ определим $k(\omega) \in \mathfrak{A} \otimes \Lambda^{p-1}$, задав коэффициенты Фурье формулами

$$Q_\lambda(k(\omega)) = \lambda^* \lrcorner\, Q_\lambda(\omega) \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0,$$
$$Q_0(k(\omega)) = 0.$$

Несложные оценки вместе с леммой 2 показывают, что $k(\omega)$ существует и однозначно определяется этими условиями. Мы утверждаем теперь, что

$$(*) \qquad \bar{\partial}k + k\bar{\partial} = 1_{\mathfrak{A} \otimes \Lambda^\cdot} - i \circ \mu_\Lambda.$$

Для проверки вычислим коэффициенты Фурье значений обеих частей на любой форме $\omega \in \mathfrak{A} \otimes \Lambda^p$. Если $\lambda \neq 0$, то

$$Q_\lambda(\bar{\partial}k\omega + k\bar{\partial}\omega) = 2\pi i Q_\lambda(k\omega) \wedge \overline{C}\lambda + \lambda^* \lrcorner\, Q_\lambda(\bar{\partial}\omega) =$$
$$= 2\pi i\,[(\lambda^* \lrcorner\, Q_\lambda(\omega)) \wedge \overline{C}\lambda + \lambda^* \lrcorner\, (Q_\lambda(\omega) \wedge \overline{C}\lambda)] = Q_\lambda(\omega),$$

и $Q_\lambda(i(\mu_\Lambda\,\omega)) = 0$. Если же $\lambda = 0$, то $Q_0(k\,\bar{\partial}\omega) = 0$ и $Q_0(\bar{\partial}k\omega) = 0$, тогда как $Q_0(\omega) = Q_0(i(\mu_\Lambda\omega))$. Это доказывает соотношение $(*)$.

Отсюда ясно, что μ коммутирует с $\bar{\partial}$, а $i \circ \mu$ гомотопен тождественному отображению. Стало быть, $i\colon \Lambda^\cdot \to \mathfrak{A} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \Lambda^\cdot$ индуцирует изоморфизм когомологий, что и утверждалось.

Замечание 1. В построенном изоморфизме $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ с $\Lambda^q T$ умножение в когомологиях

$$H^{q_1}(X, \mathcal{O}_X) \times H^{q_2}(X, \mathcal{O}_X) \to H^{q_1+q_2}(X, \mathcal{O}_X)$$

отвечает внешнему умножению

$$\Lambda^{q_1}\overline{T} \times \Lambda^{q_2}\overline{T} \to \Lambda^{q_1+q_2}\overline{T}.$$

Это вытекает из общей теории пучков, поскольку мы использовали в качестве резольвенты для пучка $\mathbf{C}$-алгебр $\mathcal{O}_X$ пучки дифференциальных градуированных алгебр $(\mathscr{C}^{0,q}, \bar{\partial})$. В этом случае умножение в когомологиях индуцировано умножением в резольвенте (Годеман [10]).

Следствие 1. *Естественное отображение, индуцированное умножением*

$$\wedge^q (H^1 (X, \mathcal{O}_X)) \to H^q (X, \mathcal{O}_X),$$

является изоморфизмом.

Замечание 2. Тот же метод позволяет вычислить когомологии комплекса де Рама. Пусть $\mathscr{C}^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathscr{C}^{p,q}$ — пучок C^∞-комплексных n-форм. Тогда

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{C}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1 \xrightarrow{d} \ldots$$

— тонкая резольвента постоянного пучка $\mathbf{C}$, откуда, как обычно,

$$H^n (X, \mathbf{C}) \cong \operatorname{Ker} (C^n \xrightarrow{d} C^{n+1}) / dC^{n-1}.$$

Те же рассуждения, что и для $(0, q)$-форм, позволяют получить следующий результат: для любой d-замкнутой n-формы ω существует единственная инвариантная n-форма ω_α, $\alpha \in \wedge^n \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C})$, такая, что

$$\omega - \omega_\alpha = d\eta,$$

где η — некоторая $(n-1)$-форма. Поэтому $H^n (X, \mathbf{C}) \cong \cong \wedge^n [\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}} (V, \mathbf{C})]$. Эти изоморфизмы, как и прежде, переводят умножение в когомологиях во внешнее умножение. Поскольку, кроме того,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C}) \cong T \oplus \bar{T},$$

это показывает, что

$$\begin{aligned} H^n (X, \mathbf{C}) &\cong \wedge^n (T \oplus \bar{T}) \\ &\cong \bigoplus_{p+q=n} (\wedge^p T \otimes \wedge^q \bar{T}) \\ &\cong \bigoplus_{p+q=n} H^q (X, \Omega^p) \end{aligned}$$

— явный вид знаменитого разложения Ходжа.

Замечание 3. Рассмотрим полученные результаты несколько подробнее. Три пучка на X вложены друг в друга:

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{C} \subset \mathcal{O}_X$$

(пучки $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{C}$ постоянны). Мы нашли три *независимых описания* для их групп когомологий:

$H^1(X, \mathbf{Z}) \cong \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}) = U^*$ — с помощью изоморфизма $H^1(Y, \mathbf{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(Y), \mathbf{Z})$ для всех пространств

$\downarrow \alpha$

$H^1(X, \mathbf{C}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C}) = T \oplus \overline{T}$ — с помощью точной последовательности
$$0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{C}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1_{\text{замкн}} \to 0$$
и вложения
$$T \oplus \overline{T} \hookrightarrow H^0(\mathscr{C}^1_{\text{замкн}})$$

$\downarrow \beta$

$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \overline{T}$ — с помощью точной последовательности
$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathscr{C}^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{C}^{0,1}_{\text{замкн}} \to 0$$
и вложения $\overline{T} \hookrightarrow H^0(\mathscr{C}^{0,1}_{\text{замкн}})$

Естественно предположить, что вертикальные стрелки, связывающие эти группы, при таких отождествлениях переходят в канонические отображения

а) $\operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}) \to \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{C} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C})$,

б) проекция $T \oplus \overline{T}$ на $\overline{T}$.

Проверим, что так оно и есть на самом деле.

Первое отображение: $H^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Его можно вычислить, сравнив две резольвенты. Пусть $C_{0,1}$: $\mathscr{C}^1 = \mathscr{C}^{1,0} \oplus \mathscr{C}^{0,1} \to \mathscr{C}^{0,1}$ — проекция. Она переводит d-замкнутые формы в $\bar\partial$-замкнутые. Поэтому имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \mathscr{C}^1_{\text{замкн}} \arrow[r] \arrow[d, "C_{0,1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathscr{C}^{0,0} \arrow[r, "d"] & \mathscr{C}^{0,1}_{\text{замкн}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} T\oplus\overline{T} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{проекция}"'] & H^0\left(X, \mathscr{C}^1_{\text{замкн}}\right) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c_{0,1}"] & H^1(X, \mathbf{C}) \arrow[d, "\beta"] \\ \overline{T} \arrow[r, hook] & H^0\left(X, \mathscr{C}^{0,1}_{\text{замкн}}\right) \arrow[r, "\delta"] & H^1(X, \mathcal{O}_X). \end{tikzcd}$$

Это показывает, что β — именно такое отображение, как мы предполагали.

Следствие 2. *Отображение* β *сюръективно.*

Второе отображение: $H^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathbf{C})$. Пусть $a \in H^1(X, \mathbf{Z})$. Вычислим отвечающий ему гомоморфизм $\tilde{a}$ из группы $\pi_1(X)$ в $\mathbf{Z}$. Пусть φ: $S^1 \to X$ — петля в X, соответствующая элементу $[\varphi] \in \pi_1(X)$. Тогда $\tilde{a}([\varphi])$ есть образ элемента $\varphi^*(a) \in H^1(S^1, \mathbf{Z})$ при каноническом изоморфизме ε: $H^1(S^1, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$:

$$\tilde{a}([\varphi]) = \varepsilon(\varphi^*(a)).$$

В частности, для любого элемента $u \in U$ обозначим через φ_u: $S^1 \to X$ петлю

$$\varphi_u(t) = \pi(tu)$$

(где S' параметризуется элементами $t \in \mathbf{R} \bmod \mathbf{Z}$). Элемент a определяет $\tilde{a} \in U^*$ по формуле

$$\tilde{a}(u) = \varepsilon\left(\varphi_u^*(a)\right).$$

Рассмотрим теперь образ a в когомологиях с коэффициентами в $\mathbf{C}$, $\alpha(a) \in H^1(X, \mathbf{C})$. Существует единственный элемент $b \in T \oplus \overline{T}$, такой, что, обозначив через ω_b инвариантную 1-форму на X, принимающую в нуле значение b, получаем

$$\begin{array}{ccc} H^0\left(X, \mathscr{C}^1_{\text{замкн}}\right) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathbf{C}) \\ \Cup & & \Cup \\ \omega_b & \longrightarrow & \alpha(a). \end{array}$$

Поднимая эту диаграмму на S^1, находим

$$\begin{array}{ccc} H^0\left(S^1\ \mathscr{C}^1_{\text{замкн}}\right) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S^1, \mathbf{C}) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \varphi_u^*(\omega_b) & \xrightarrow{\delta} & \varphi_u^*(\alpha(a)) \\ & & \parallel \\ & & \alpha\left(\varphi_u^*(a)\right). \end{array}$$

Пусть теперь η — любая одномерная форма на S^1 (она автоматически замкнута), $\delta(\eta)$ — ее образ в $H^1(S^1, \mathbf{C})$, а $\varepsilon(\delta(\eta))$ — число, отвечающее ему при каноническом изоморфизме ε: $H^1(X, \mathbf{C}) \rightrightarrows \mathbf{C}$. Элементарные соображения показывают, что

$$\varepsilon(\delta(\eta)) = \int_{S^1} \eta.$$

Поэтому

$$\tilde{a}(u) = \varepsilon\left(\varphi_u^*(a)\right) = \varepsilon\left(\delta\left(\varphi_u^*(\omega_b)\right)\right) = \\ = \int_{S^1} \varphi_u^*(\omega_b) = \int_0^u \pi^*(\omega_b) = b(u).$$

Следовательно, $\tilde{a}$ совпадает с ограничением функции b с V на U.

Пользуясь совместимостью наших отождествлений групп когомологий с умножением, мы можем вывести отсюда следующие отождествления естественных отображений между этими группами:

$$\begin{array}{ccl} H^n(X, \mathbf{Z}) & \cong & \Lambda^n(U^*) \\ \downarrow & & \downarrow \Lambda^n \text{ от вложения } U^* \subset T \oplus \overline{T} \\ H^n(X, \mathbf{C}) & \cong & \Lambda^n(T \oplus \overline{T}) = \bigoplus\limits_{p+q=n} \Lambda^p T \otimes \Lambda^q \overline{T} \\ \downarrow & & \downarrow \text{проекция на } (0, n)\text{-слагаемое} \\ H^n(X, \mathcal{O}_X) & \cong & \Lambda^n \overline{T} \end{array}$$

§ 2. Линейные расслоения на комплексном торе

Напомним следующий хорошо известный результат:

Теорема. *Для всех целых чисел* $p > 0$ *имеем* $H^p(\mathbf{C}^N, \mathcal{O}) = (0)$.

Доказательство можно найти в книге Ганнинга и Росси [9], стр. 232.

Следствие. $H^p(\mathbf{C}^N, \mathcal{O}^*) = (1)$ *при всех* $p > 0$. *В частности, все голоморфные линейные расслоения на* $\mathbf{C}^N$ *тривиальны.*

Доказательство. Воспользуемся точной последовательностью

$$0 \to Z \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i(\,)}} \mathcal{O}^* \to 0$$

и тем, что $H^p(\mathbf{C}^N, \mathbf{Z}) = (0)$ при всех $p > 0$.

Наша цель — дать прямое геометрическое описание всевозможных линейных расслоений L на комплексном торе X. Согласно следствию, расслоение π^*L на V тривиально. Выберем некоторый изоморфизм

$$\chi\colon \pi^*L \xrightarrow{\sim} \mathbf{C} \times V.$$

Группа U канонически действует на π^*L (так что факторпространство пространства π^*L относительно U изоморфно L). Тривиализация χ переводит это действие в линейное действие на тривиальном расслоении, совместимое с действием сдвигами на базе. Обозначим через H^* мультипликативную группу $H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$ не обращающихся в нуль голоморфных функций на V. Поскольку все голоморфные автоморфизмы линейного расслоения, тривиальные на базе, совпадают с умножением на обратимые голоморфные сечения, действие U на $\mathbf{C} \times V$ задается формулами

$$\text{(A)} \qquad (\alpha, z) \to \varphi_u(\alpha, z) = (e_u(z)\,\alpha, z + u), \qquad u \in U,$$

где $e_u \in H^*$. Выписывая явно условия $\varphi_u(\varphi_{u'}(\alpha, z)) = \varphi_{u+u'}(\alpha, z)$, получаем, что $u \to e_u$ является

1-*коциклом* группы U с коэффициентами в H^*:

$$e_{u+u'}(z) = e_u(z+u')\, e_{u'}(z).$$

Далее, заменив тривиализацию χ новой, которая получается из прежней умножением на голоморфную обратимую функцию f на V, найдем, что $\{e_u\}$ заменится когомологичным коциклом

$$e'_u(z) = e_u(z)\, f(z+u)\, f(z)^{-1}.$$

Тем самым мы определили отображение из $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ в $H^1(U, H^*)$. Легко определить и обратное отображение. Начнем с 1-коцикла $\{e_u\}$ с коэффициентами в H^* и определим лииейное расслоение L на X как факторпространство $\mathbf{C} \times V$ относительно действия U, определенного формулой $(\alpha, z) \to (e_u(z)\alpha, z+u)$.

Эти конструкции определяют изоморфизм

$$\varphi\colon H^1(U, H^*) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}^*_X).$$

Более общо, для любого пучка $\mathcal{F}$ на X определено естественное отображение φ: $H^1(U, \Gamma(U, \pi^*\mathcal{F})) \to \to H^1(X, \mathcal{F})$. Его конструкция и свойства напоминаются в приложении к этому параграфу. Так как $H^i(V, \mathcal{O}^*_V) = (1)$ при всех $i \geqslant 1$, отображение φ также является изоморфизмом. Проверим, что в рассматриваемом случае он совпадает с тем, который был описан выше.

Выберем открытое покрытие $\{V_i\}$ тора X достаточно малыми связными открытыми множествами V_i. Тогда

a) $\pi^{-1}(V_i)$ есть объединение непересекающихся открытых множеств $u + W_i$, где $u \in U$.

b) Пусть π_i — ограничение π на W_i. Тогда $\pi_i\colon W_i \xrightarrow{\sim} V_i$ — гомеоморфизм.

c) Если $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, то существует такой элемент $u_{ij} \in V$, что

$$\pi_j^{-1}(V_i \cap V_j) = \pi_i^{-1}(V_i \cap V_j) + u_{ij}.$$

Отображение φ, определенное в приложении, переводит групповой 1-коцикл $\{e_u\}$ в 1-коцикл Чеха $\{f_{ij}\}$,

$f_{ij} \in \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}_X^*)$, который задается формулой

$$f_{ij}(z) = e_{u_{ij}}(\pi_i^{-1}(z)).$$

Но $\{f_{ij}\}$ определяет линейное расслоение L, которое получается склеиванием тривиальных расслоений $\mathbf{C} \times V_i$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times V_i & & \mathbf{C} \times V_j \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{C} \times (V_i \cap V_j) & \tilde{\to} & \mathbf{C} \times (V_i \cap V_j), \\ & (\alpha, x) \to (\alpha, f_{ij}(x), x). & \end{array}$$

Кроме того, π_i индуцирует изоморфизм $\mathbf{C} \times W_i$ с $\mathbf{C} \times V_i$, так что L можно описать как расслоение, склеенное из $\mathbf{C} \times W_i$ посредством отображений

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times W_i & & \mathbf{C} \times W_j \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{C} \times \pi_i^{-1}(V_i \cap V_j) & \tilde{\to} & \mathbf{C} \times \pi_j^{-1}(V_i \cap V_j), \\ & (\alpha, x) \to (\alpha f_{ij}(\pi_i(x)), x + u_{ij}) = \varphi_{u_{ij}}(\alpha, x). & \end{array}$$

Но объединение $\mathbf{C} \times W_i$ совпадает с прообразом $\mathbf{C} \times V$ на $\bigcup W_i$, а описанные выше склеивания совпадают с отношением эквивалентности на этом прообразе, которое индуцировано отношением эквивалентности на $\mathbf{C} \times V$, заданным посредством действия группы U. Поэтому L в точности совпадает с факторпространством $\mathbf{C} \times V/U$.

На любом комплексном аналитическом пространстве X точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{e^{2\pi i(\ )}} \mathcal{O}_X^* \to 0$$

определяет кограничный гомоморфизм δ: $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$. Если линейное расслоение L соответствует классу когомологий $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, то $\delta(\lambda)$ называется *первым классом Чжэня* расслоения L. Возвращаясь к нашему случаю, предположим, что L определено, как и выше, 1-коциклом $\{e_u\}$ со значениями в H^*. Мы хотим вычислить первый класс Чжэня соответствующего расслоения. Заметим, прежде всего, что поскольку $H^i(V, \mathbf{Z}) = (0)$ при $i > 0$, из результатов приложения вытекает, что отображения

$$\varphi\colon H^i(U, \mathbf{Z}) = H^i(U, H^0(V, \mathbf{Z})) \to H^i(X, \mathbf{Z})$$

являются изоморфизмами.

Обозначая через H кольцо голоморфных функций на V, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^0(V, \pi^*\mathbf{Z}) & \to & H^0(V, \pi^*\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{e^{2\pi i(\ )}} & H^0(V, \pi^*\mathcal{O}_X^*) & \to 0 \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \mathbf{Z} & & H & & H^* & \end{array}$$

(V односвязно). Согласованность φ и δ (см. приложение) приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^1(U, H^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(U, \mathbf{Z}) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X, \mathbf{Z}). \end{array}$$

Отождествляя поэтому $H^2(U, \mathbf{Z})$ и $H^2(X, \mathbf{Z})$ с помощью описанных гомоморфизмов, мы получаем, что класс Чжэня расслоения L равен $\delta(\mathrm{cl}\{e_u\})$. Положим $e_u(z) = e^{2\pi i f_u(z)}$, где f_u — голоморфная функция на V. По определению класс $\delta(\mathrm{cl}\{e_u\}) \in H^2(U, \mathbf{Z})$ задается коциклом

$$(*)\qquad F(u_1, u_2) = f_{u_2}(z + u_1) - f_{u_1+u_2}(z) + f_{u_1}(z) \in \mathbf{Z}.$$

Воспользуемся теперь следующим стандартным обстоятельством:

Лемма. *Пусть оператор A переводит всякое отображение $F\colon U \times U \to \mathbf{Z}$ в отображение $AF\colon U \times U \to \mathbf{Z}$, определенное формулой $AF(u_1, u_2) = F(u_1, u_2) - F(u_2, u_1)$. Если F принадлежит $Z^2(U, \mathbf{Z})$ (группе 2-коциклов), то AF является кососимметрическим отображением $U \times U \to \mathbf{Z}$, а A индуцирует изоморфизм*

$$A\colon H^2(U, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\wedge^2 U, \mathbf{Z}) \cong \wedge^2 \mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z}).$$

Далее, для любых элементов $\xi, \eta \in \mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z}) = H^1(U, \mathbf{Z})$ имеем $A(\xi \cup \eta) = \xi \wedge \eta$.

Доказательство. Проверим сначала, что если $F \in Z^2(U, \mathbf{Z})$, то отображение $E = AF$ билинейно.

Имеем

$$\text{(i)}\ F(u_2, u_3) - F(u_1+u_2, u_3) + F(u_1, u_2+u_3) - F(u_1, u_2) = 0,$$
$$u_1, u_2, u_3 \in U.$$

Подставим в это уравнение вместо u_1, u_2, u_3 сначала u_3, u_1, u_2, а затем u_1, u_3, u_2. Получившиеся уравнения обозначим через (ii) и (iii) соответственно. Вычисляя (i) + (ii) − (iii), получаем, что

$$E(u_3, u_1+u_2) = E(u_3, u_1) + E(u_3, u_2).$$

Так как, кроме того, $E(u, u) = 0$ и $E(u, v) = -E(v, u)$, отсюда следует, что E — кососимметрическая билинейная форма. Если $F = \delta G$, то

$$AF(u_1, u_2) = (\delta G)(u_1, u_2) - (\delta G)(u_2, u_1) =$$
$$= [G(u_2) - G(u_1+u_2) + G(u_1)] - [G(u_1) -$$
$$- G(u_1+u_2) + G(u_2)] = 0.$$

Следовательно, A индуцирует некоторый гомоморфизм

$$H^2(U, \mathbf{Z}) \to \operatorname{Hom}(\wedge^2 U, \mathbf{Z}) \cong \wedge^2 \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}).$$

С другой стороны, существует изоморфизм алгебр φ: $H^*(U, \mathbf{Z}) \to H^*(X, \mathbf{Z})$, где X — тор (см. приложение). Так как $H^*(X, \mathbf{Z})$ является внешней алгеброй модуля $H^1(X, \mathbf{Z})$, отсюда следует, что $H^*(U, \mathbf{Z})$ — внешняя алгебра модуля $H^1(U, \mathbf{Z})$. Поэтому для доказательства того, что A — изоморфизм, достаточно проверить последнее утверждение леммы. Пусть ξ (соответственно η) задается гомоморфизмом f (соответственно g): $U \to \mathbf{Z}$. Тогда $\xi \cup \eta$ определяется 2-коциклом $c(s, t) = f(s)g(t)$, так что $A(\xi \cup \eta)$ имеет вид

$$A(\xi \cup \eta)(s, t) = f(s)g(t) - f(t)g(s) = (f \wedge g)(s, t).$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы определили тем самым изоморфизм $H^2(X, \mathbf{Z}) \rightleftarrows H^2(U, \mathbf{Z}) \xrightarrow{A} \wedge^2 \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z})$. Он совпадает с изоморфизмом $H^2(X, \mathbf{Z}) \rightleftarrows \wedge^2 \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z})$, построенным в § 1 с помощью умножения в группе $H^*(X, \mathbf{Z})$ и изоморфизма $H^1(X, \mathbf{Z}) \rightleftarrows \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z})$. Действительно, φ сохраняет произведения, а A переводит умножение в когомологиях во внешнее умножение в силу леммы. Наконец, изоморфизм φ: $H^1(U, \mathbf{Z}) = \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathbf{Z})$, как нетрудно проверить, пользуясь естественностью φ, обратен к изоморфизму, построенному в § 1. Поэтому впредь можно отождествлять $H^i(X, \mathbf{Z})$ с $\Lambda^i \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z})$, не следя каждый раз за возможным несовпадением изоморфизмов.

Вернемся теперь к линейному расслоению L, которое отвечает коциклу $\{e_u\} \in Z^1(U, H^*)$. Резюмируя сказанное, получаем

Предложение. *Класс Чжэня линейного расслоения L, соответствующего коциклу $\{e_u\} \in Z^1(U, H^*)$, является целозначной альтернированной двумерной формой на U, которая определяется формулой*

$$(**)\qquad E(u_1, u_2) = f_{u_2}(z + u_1) + f_{u_1}(z + u_2) - f_{u_2}(z), \quad z \in V,$$

где

$$e_u(z) = e^{2\pi i f_u(z)}.$$

Следствие. *Продолжим E до $\mathbf{R}$-линейного отображения $V \times V \to \mathbf{R}$. Тогда E удовлетворяет тождеству $E(ix, iy) = E(x, y)$ при всех $x, y \in V$.*

Доказательство. В самом деле, так как E представляет элемент группы $H^2(X, \mathbf{Z})$, принадлежащий образу группы $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, он должен переходить в нуль при гомоморфизме $H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$. Это последнее отображение совпадает с композицией $H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i} H^2(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{j} H^2(X, \mathcal{O}_X)$. Положим

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C}) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C}) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}\text{-антн}}(V, \mathbf{C}) = T \oplus \overline{T}.$$

Выше мы построили изоморфизмы

$$H^2(X, \mathbf{C}) \cong \Lambda^2(T \oplus \overline{T}) \cong \Lambda^2 T \oplus (T \otimes \overline{T}) \oplus \Lambda^2 \overline{T},$$
$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong \Lambda^2 \overline{T}.$$

При этих отождествлениях j переходит в проекцию $\Lambda^2(T \oplus \overline{T}) \to \Lambda^2 \overline{T}$. Кроме того, $i(E)$ совпадает с $\mathbf{R}$-линейным продолжением E (ср. § 1, замечание 3), которое мы по-прежнему будем обозначать через E.

Положим $E = E_1 + E_2 + E_3$, где $E_1 \in \wedge^2 T$, $E_2 \in \wedge^2 \bar{T}$, $E_3 \in T \otimes \bar{T}$. Так как форма E вещественна, $E_1 = \bar{E}_2$; поэтому $j(E) = 0$ в том и только том случае, когда $E = E_3$, а это означает, что $E(x, y) = E(ix, iy)$.

Наша ближайшая цель — возможно более явно описать все линейные расслоения на комплексном торе X, т. е. найти коциклы $\{e_u\}$ простейшего вида, представляющие все классы когомологий в $H^1(U, H^*)$. В свою очередь, это равносильно отысканию системы функций $\{f_u\}_{u \in U}$, голоморфных на V и удовлетворяющих условию $(*)$.

Итак, *фиксируем* некоторую альтернированную форму E: $U \times U \to \mathbf{Z}$, для которой $E(ix, iy) = E(x, y)$, и попытаемся описать системы функций $\{f_u\}$, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $(**)$. Рассмотрим случай линейных функций f_u (не обязательно обращающихся в нуль в начале координат). Воспользуемся следующим элементарным результатом:

Лемма. *Пусть V — комплексное векторное пространство. Существует взаимно однозначное соответствие между эрмитовыми формами H на V и вещественными кососимметрическими формами E на V, удовлетворяющими тождеству $E(ix, iy) = E(x, y)$. Это соответствие определяется так:*

$$E(x, y) = \operatorname{Im} H(x, y),$$

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y).$$

Доказательство мы оставляем читателю.

Построим теперь по форме E форму H. Немедленно проверяется, что функции

$$f_u(z) = \frac{1}{2i} H(z, u) + \beta_u$$

удовлетворяют условию $(**)$ при любом выборе констант β_u. Читатель может проверить при желании, что этим исчерпываются все линейные решения $(**)$, голоморфные по z. Подставляя в $(*)$, получаем новые условия:

$$\frac{1}{2} H(u_1, u_2) + i\beta_{u_1} + i\beta_{u_2} - i\beta_{u_1+u_2} \in i\mathbf{Z}$$

при всех $u_1, u_2 \in U$. Подстановка $i\beta_u = \gamma_u + \frac{1}{4} H(u, u)$ превращает эти условия в

$$\gamma_{u_1} + \gamma_{u_2} - \gamma_{u_1+u_2} + \frac{i}{2} E(u_1, u_2) \in i\mathbf{Z}.$$

Заметим теперь, что к if_u можно добавить кограницу любой $\mathbf{C}$-линейной формы L на V. При этом γ_u заменится на $\gamma_u - L(u)$, где $L\colon V \to \mathbf{C}$ $\mathbf{C}$-линейно. Выписанное условие показывает, что $\operatorname{Re}\gamma_u$ аддитивна на U и, следовательно, продолжается до $\mathbf{R}$-линейного отображения $\lambda\colon V \to \mathbf{R}$. Существует единственная $\mathbf{C}$-линейная форма L на V с $\operatorname{Re} L = \lambda$ (именно, $L(v) = \lambda(v) - i\lambda(iv)$). Изменив γ с помощью этой формы L, можно считать, что константы γ чисто мнимые. Положим $\alpha(u) = e^{2\pi\gamma_u}$. Эти новые константы должны удовлетворять условиям

$$|\alpha(u)| = 1,$$

$$\frac{\alpha(u_1 + u_2)}{\alpha(u_1)\,\alpha(u_2)} = e^{i\pi E(u_1, u_2)}.$$

Можно проверить, что для любой данной формы E такие α существуют. Иными словами, существует такое отображение $\delta\colon U \to \mathbf{R}$, что

$$\delta(u_1 + u_2) - \delta(u_1) - \delta(u_2) \equiv \frac{1}{2} E(u_1, u_2) \pmod 1$$

при всех $u_1, u_2 \in U$. Мы оставляем проверку читателю в качестве упражнения.

Подведем итог.

Лемма. *Пусть H — такая эрмитова форма на V, что $E(U \times U) \subset \mathbf{Z}$, где $E = \operatorname{Im} H$. Обозначим через*

$$\alpha\colon U \to \mathbf{C}_1^* = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$$

отображение, для которого

$$\alpha(u_1 + u_2) = e^{i\pi E(u_1, u_2)} \alpha(u_1)\,\alpha(u_2), \quad u_i \in U.$$

Для любой формы H такие отображения существуют. Положим

$$e_u(z) = \alpha(u)\, e^{\pi H(z,\, u) + \frac{\pi}{2} H(u,\, u)}.$$

Тогда $u \to e_u$ есть 1-коцикл на группе U с коэффициентами в $H^0(V, \mathcal{O}_V^*) = H^*$, и класс Чжэня соответствующего ему линейного расслоения равен $E \in H^2(X, \mathbf{Z})$.

Определение. Символом $L(H, \alpha)$ обозначается линейное расслоение, которое изоморфно факторпространству $\mathbf{C} \times V/U$ относительно действия

$$\varphi_u(\lambda, z) = \left(\alpha(u)\, e^{\pi H(z,\, u) + \frac{\pi}{2} H(u,\, u)} \lambda,\; z + u\right).$$

Отметим, что если коциклы $\{e_u^{(i)}\}$ отвечают парам (H_i, α_i), то $\{e_u^{(1)} e_u^{(2)}\}$ соответствует паре $(H_1 + H_2, \alpha_1\alpha_2)$. Поэтому

$$L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2) \cong L(H_1 + H_2, \alpha_1\alpha_2).$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема Аппеля—Гумберта. *Любое линейное расслоение на комплексном торе X изоморфно расслоению вида $L(H, \alpha)$, где H и α определены однозначно и удовлетворяют условиям предыдущей леммы. Определен изоморфизм точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \operatorname{Hom}(U, \mathbf{C}_1^*) & \to & \{\text{группа пар } (H, \alpha)\} & \to & \left\{\begin{matrix}\text{группа эрмитовых} \\ \text{форм } H: V \times V \to \mathbf{C} \\ \text{со свойством} \\ (\operatorname{Im} H)(U \times U) \subset \mathbf{Z}\end{matrix}\right\} & & & \to 0 \\
 & \wr\downarrow\lambda & & \wr\downarrow\mu & & \wr\downarrow\nu & & & \\
0 \to & \operatorname{Pic}{}^\circ X & \longrightarrow & \operatorname{Pic} X & \xrightarrow{C'} & \operatorname{Ker}\,[H^2(X, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{O}_X)] & \to 0
\end{array}$$

Здесь $\operatorname{Pic} X$ *— группа классов линейных расслоений на X,* $\operatorname{Pic}{}^\circ X$ *— подгруппа классов топологически тривиальных расслоений, а последняя вертикальная стрелка совпадает с отображением $H \to \operatorname{Im} H$ (при обычном отождествлении $H^2(X, \mathbf{Z})$ с альтернированными целочисленными 2-формами на U).*

Доказательство. Мы уже показали, что альтернированная целочисленная 2-форма E на U как элемент группы $H^2(X, \mathbf{Z})$ переходит в нуль при отображении в $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ в том и только том случае, когда $E(ix, iy) = E(x, y)$ (если E продолжена на $V \times V$ $\mathbf{R}$-линейно).

Это условие равносильно тому, что $E = \operatorname{Im} H$, где форма H эрмитова. Поэтому ν — изоморфизм. Точность первой строки следует из определений и леммы о существовании отображения α для всех H. Точность второй строки следует из того, что топологическая тривиальность расслоения L равносильна обращению в нуль его класса Чжэня, а ν является изоморфизмом.

Для доказательства теоремы остается показать, что λ — изоморфизм. Пусть $\alpha \in \operatorname{Hom}(U, \mathbf{C}_1^*)$ и $\lambda(\alpha) = 1$. Тогда существует функция $g \in H^* = H^0(V, \mathcal{O}_V^*)$, для которой

$$\frac{g(z+u)}{g(z)} = \alpha(u).$$

Обозначим через $K \subset V$ компакт, для которого $K + U = V$. Тогда $|g(z)| \leqslant \sup_K |g(z)|$ для всех $z \in V$, потому что $|\alpha| = 1$. Следовательно, g является константой; поэтому $\alpha = 1$, что показывает инъективность λ.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_1(U, \mathbf{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(U, H) \arrow[r, "e^{2\pi i(\ )}"] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Ker}[H^1(U, H^*) \to H^2(U, \mathbf{Z})] \arrow[d, "\wr"] \\
H_1(X, \mathbf{C}) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "e^{2\pi i(\ )}"] & \operatorname{Ker}\left[H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})\right] = \operatorname{Pic}^\circ X.
\end{tikzcd}$$

Вертикальные стрелки в ней являются изоморфизмами, а отображения $e^{2\pi i(\ )}$ сюръективны.

В § 1 мы показали, что отображение $H^1(X, \mathbf{C}) \to H(X, \mathcal{O}_X)$ сюръективно. Отсюда следует, что любое линейное расслоение $L \in \operatorname{Pic}^\circ X$ можно представить в виде $\mathbf{C} \times V/U$ относительно действия U, выражаемого формулами

$$\varphi_u(\lambda, z) = (\lambda\alpha(u), z + u),$$

где $\alpha\colon U \to \mathbf{C}^*$ — гомоморфизм. Но мы уже проверили, что, используя автоморфизмы $\mathbf{C} \times V$, можно нормализовать α так, чтобы $\alpha(U) \subset \mathbf{C}_1^*$. Следовательно, λ сюръективно. Это завершает доказательство.

Приложение к § 2

Мы собираемся изучить группы когомологий пучков в следующей ситуации. Пусть $Y = X/G$, где G — дискретная группа, действующая свободно и дискретно на достаточно хорошем топологическом пространстве X (это означает, что для любой точки $x \in X$ должна существовать окрестность U_x, такая, что $U_x \cap \sigma(U_x) = \varnothing$ при всех $\sigma \in G$, $\sigma \neq e$). Обозначим символом $\pi\colon X \to Y$ естественную проекцию.

Напомним сначала определение групп когомологий абстрактной группы G.

Пусть M — некоторый G-модуль. Положим $C^p(G, M) = \{$группа функций $f\colon G^p \to M\}$. Гомоморфизм $\delta\colon C^p \to C^{p+1}$ определяется формулами

$$\delta f(\sigma_0, \ldots, \sigma_p) = \sigma_0(f(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} f(\sigma_0, \ldots, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_p) + (-1)^{p+1} f(\sigma_0, \ldots, \sigma_{p-1}),$$

$$Z^p(G, M) = \operatorname{Ker}(\delta); \qquad B^p(G, M) = \operatorname{Im}(\delta),$$

$$H^p(G, M) = Z^p(G, M)/B^p(G, M).$$

Эти группы когомологий совпадают с производными от функтора

$$M \to H^0(G, M) = \{m \in M \mid \sigma(m) = m \text{ при всех } \sigma \in G\} = M^G.$$

Любое G-линейное спаривание G-модулей $M \times N \xrightarrow{*} P$ определяет умножение

$$\cup\colon H^p(G, M) \times H^q(G, N) \to H^{p+q}(G, P),$$

$$f \cup g(\sigma_1, \ldots, \sigma_{p+q}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) * (\sigma_1 \ldots \sigma_p)\, g(\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{p+q}),$$

$$f \in C^p(G, M), \qquad g \in C^q(G, N).$$

Результат, который мы использовали в § 2, формулируется следующим образом:

Для всех пучков $\mathscr{F}$ на Y определено естественное отображение

$$\varphi\colon H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F})) \to H^p(Y, \mathscr{F})$$

со следующими свойствами:

(a) *Пусть $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ — точная последовательность пучков на Y. Если, кроме того, последовательность групп*

$$0 \to \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}') \to \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}) \to \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}'') \to 0$$

точна, то φ определяет гомоморфизм когомологических последовательностей $H^p(G, \cdot)$ в $H^p(Y, \cdot)$.

(b) *Отображения φ коммутируют с $\cup$-умножением.*

(c) *Если $H^i(X, \pi^*\mathscr{F}) = (0)$ при $i \geqslant 1$, то*

$$\varphi\colon H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F})) \to H^p(Y, \mathscr{F})$$

является изоморфизмом.

Чтобы определить φ, выберем такое покрытие $\{V_i\}_{i \in I}$ пространства Y, что для любого i

(1) $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup\limits_{\sigma \in G} \sigma(U_i)$, здесь $U_i \subset X$ — такие открытые множества, что $\operatorname{res}\pi\colon U_i \xrightarrow{\sim} V_i$ — гомеоморфизм.

(2) Для любых i, j существует самое большее один элемент $\sigma \in G$, такой, что $U_i \cap \sigma(U_j) \neq \varnothing$. Если он существует, обозначим его σ_{ij}.

Определим теперь гомоморфизм из групповых коцепей в чеховские

$$\varphi_p\colon C^p(G, \Gamma(\pi^*\mathscr{F})) \to C^p(\{V_i\}, \mathscr{F})$$

формулой

$$(\varphi_p f)_{i_0, \ldots, i_p} = \operatorname{res} \circ (\pi^*)_{i_0}^{-1}\left[f\left(\sigma_{i_0, i_1}, \ldots, \sigma_{i_{p-1}, i_p}\right)\right],$$

где

$$(\pi^*)_i^{-1}\colon \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}) \to \Gamma(V_i, \mathscr{F})$$

— композиция отображений

$$\Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}) \xrightarrow{\text{res}} \Gamma(U_i, \pi^*\mathscr{F}) \underset{\pi^*}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \Gamma(V_i, \mathscr{F}).$$

Легко проверить, что $\delta\varphi_p = \varphi_{p+1}\delta$, так что φ_p индуцирует отображение $\varphi\colon H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathcal{F})) \to H^p(Y, \mathcal{F})$. Свойства (a) и (b) проверяются прямым вычислением. Для доказательства (c) проведем индукцию по p. При $p=0$ утверждение очевидно. Вложим $\mathcal{F}$ в инъективный $\mathcal{O}_Y$-пучок $\mathcal{F}'$ и положим $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'/\mathcal{F}$. Тогда последовательность

$$0 \to \Gamma(X, \pi^*\mathcal{F}) \to \Gamma(X, \pi^*\mathcal{F}') \to \Gamma(X, \pi^*\mathcal{F}'') \to$$
$$\to H^1(X, \pi^*\mathcal{F}) = 0$$

точна, что дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p-1}(G, \Gamma(\pi^*\mathcal{F}')) & \to & H^{p-1}(G, \Gamma(\pi^*\mathcal{F}'')) & \to & H^p(G, \Gamma(\pi^*\mathcal{F})) & \to & H^p(G, \Gamma(\pi^*\mathcal{F}')) \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow \\
H^{p-1}(Y, \mathcal{F}') & \longrightarrow & H^{p-1}(Y, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & H^p(Y, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^p(Y, \mathcal{F}')
\end{array}$$

Достаточно проверить, что G-модуль $\Gamma(\pi^*\mathcal{F}')$ инъективен и $H^i(X, \pi^*\mathcal{F}') = 0$ при $i \geqslant 1$. Действительно, тогда $H^i(X, \pi^*\mathcal{F}'') = 0$ при $i \geqslant 1$, так что φ_1, φ_2 будут изоморфизмами по предположению индукции, а стало быть, и φ_3 будет изоморфизмом.

Лемма. *Пусть $\mathcal{F}$ — инъективный $\mathcal{O}_Y$-пучок. Тогда $\pi^*\mathcal{F}$ — вялый $\mathcal{O}_X$-пучок, а $\Gamma(\pi^*\mathcal{F})$ — инъективный G-модуль.*

Доказательство. Для произвольного G-модуля M обозначим той же буквой постоянный пучок на X, отвечающий M. Группа G очевидным образом действует на M согласованно с действием на базе X. Следовательно, G действует и на $\pi_*(M)$, так что можно построить пучок инвариантов $\pi_*(M)^G$. Нетрудно проверить, что

$$\mathrm{Hom}_G(M, \Gamma(\pi^*\mathcal{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\pi_*(M)^G, \mathcal{F}).$$

Следовательно, если $M_1 \subset M_2$, то $\pi_*(M_1)^G \subset \pi_*(M_2)^G$, откуда вытекает сюръективность отображения

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\pi_*(M_2)^G, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\pi_*(M_1)^G, \mathcal{F})$$

и отображения

$$\mathrm{Hom}_G(M_2, \Gamma(\pi^*\mathcal{F})) \to \mathrm{Hom}_G(M_1, \Gamma(\pi^*\mathcal{F})),$$

Это показывает, что пучок $\Gamma(\pi^*\mathcal{F})$ инъективен. Из инъективности $\mathcal{F}$ следует, что $\mathcal{F}$ — вялый пучок, а так как π — локальный гомеоморфизм, пучок $\pi^*\mathcal{F}$ также вялый. Это завершает доказательство. (Ср. Гротендик [11], в особенности гл. V.)

§ 3. Алгебраические торы

Мы доказали, что любое линейное расслоение L на комплексном торе $X = V/U$ изоморфно однозначно определенному расслоению вида $L(H, \alpha)$, где $H: V \times V \to \mathbf{C}$ — эрмитова форма, мнимая часть $E = \operatorname{Im} H$ которой целочисленна на $U \times U$, а отображение $\alpha: U \to \mathbf{C}_1^*$ удовлетворяет тождествам

$$\alpha(u_1 + u_2) = e^{i\pi E(u_1, u_2)}\alpha(u_1)\alpha(u_2).$$

Расслоение $L(H, \alpha)$ получается факторизацией $\mathbf{C} \times V$ по U относительно действия

$$\varphi_u(\lambda, z) = ((e_u cz)\lambda, z + u),$$

$$e_u(z) = \alpha(u) e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)}.$$

Изучим теперь сечения расслоения $L(H, \alpha)$. Эти сечения находятся во взаимно однозначном соответствии с теми сечениями тривиального расслоения $\mathbf{C} \times V$ над V (т. е. голоморфными функциями θ на V), которые инвариантны относительно указанного действия U, т. е. удовлетворяют функциональному уравнению

$$\theta(z + u) = e_u\theta(z) = \alpha(u) e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)}\theta(z), \quad z \in V, \quad u \in U.$$

Всякая такая функция называется *тэта-функцией, связанной с эрмитовой формой H и мультипликатором α.*

Рассмотрим сначала случай, когда форма H вырожденна. Поскольку $E = \operatorname{Im} H$ и $H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y)$, то

$$N = \{x \in V \mid H(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\} = \{x \in V \mid E(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\},$$

Первое равенство показывает, что N является комплексным подпространством в V. Из целочисленности E на $U \times U$ и второго равенства следует, что $N \cap U$ есть решетка в N.

Пусть θ — некоторая тэта-функция, связанная с формой H. Тогда

$$\theta(z+u) = \alpha(u)\theta(z) \quad \text{для всех} \quad u \in N \cap U.$$

Обозначая через K некоторый компакт в N со свойством $N = K + (N \cap U)$, получаем, что

$$|\theta(z_0+z')| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |\theta(z_0+\zeta)| = c(z_0)$$

при всех $z' \in N$. Из принципа максимума следует поэтому, что $\theta(z_0+z') = \theta(z_0)$ для всех $z' \in N$, т. е. функция θ постоянна на смежных классах $\operatorname{mod} N$. Следовательно, если $\theta \neq 0$, то $\alpha(u) = 1$ при всех $u \in N \cap U$. Стало быть, любая тэта-функция, связанная с (H, α), получается подъемом относительно естественного отображения $V \to V/N$ из некоторой тэта-функции на V/N (связанной с формой $\overline{H}$, индуцированной формой H, решеткой $U/N \cap U$ и мультипликатором, индуцированным α). Так как форма $\overline{H}$ невырожденна на $V/N = \overline{V}$, изучение тэта-функций, связанных с (H, α), сводится к изучению тэта-функций, связанных с невырожденной формой.

В частности, если H вырожденна и N — ее нуль-пространство, то всякая тэта-функция θ, обращающаяся в нуль в точке $z \in V$, равна нулю на множестве $z + N$. Стало быть, всякое сечение σ расслоения $L(H, \alpha)$, равное нулю в точке $x \in X = V/U$, равно нулю на смежном классе $x + X'$, где X' — подтор $N/U \cap N \subset X$. Значит, если даже сечения расслоения $L(H, \alpha)$ определяют морфизм тора X в проективное пространство, этот морфизм стягивает всякий смежный класс $\operatorname{mod} X'$ в точку. Поэтому расслоение $L(H, \alpha)$ не может быть обильным, если форма H вырожденна.

Предположим теперь, что существует комплексное подпространство $W \subset V$ ненулевой размерности, такое, что $H(w, w) < 0$ при $w \in W$, $w \neq 0$. Обозначим через K компакт в V, для которого $V = U + K$.

Пусть $z_0 \in V$ и $w \in W$; положим $w = d + u$, $d \in K$, $u \in U$. Тогда

$$|\theta(z_0 + w)| = |\theta(z_0 + d + u)| =$$
$$= |\theta(z_0 + d)| \, e^{\pi \operatorname{Re} H(z_0 + d, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)}.$$

Далее,

$$\operatorname{Re} H(z_0 + d, u) + \frac{1}{2} H(u, u) =$$
$$= \operatorname{Re} H(z_0 + d, w) - \operatorname{Re} H(z_0 + d, d) +$$
$$+ \frac{1}{2} H(w, w) + \frac{1}{2} H(d, d) - \operatorname{Re} H(w, d) =$$
$$= \frac{1}{2} H(w, w) + \operatorname{Re} H(z_0, w) + c(d, z_0).$$

При фиксированном z_0 первый из членов в правой части формулы представляет собой вещественную отрицательно определенную квадратнчную форму от w, второй линеен по w, а третий ограничен (ибо d остается в компактном подмножестве K). Следовательно, показатель экспоненты стремится к $-\infty$, когда $w \to \infty$ внутри W. Применяя принцип максимума к $\theta(z_0 + w)$ как функции от w, заключаем отсюда, что $\theta(z_0 + w) = 0$ и, следовательно, $\theta \equiv 0$. Тем самым, $L(H, \alpha)$ в этом случае вообще не имеет ненулевых сечений, так что для обильности $L(H, \alpha)$ необходимо, чтобы форма H была положительно определена.

Впредь мы будем считать, что это условие выполнено (и, разумеется, форма $E = \operatorname{Im} H$ целочисленна на $U \times U$). Докажем следующее

Предложение. *Пусть H положительно определена. Записав коэффициенты $E = \operatorname{Im} H$ в виде матрицы (в каком-нибудь $\mathbf{Z}$-базисе U), получаем следующее выражение для размерности пространства тэта-функций, связанных с (H, α):*

$$\dim H^0(X, L(H, \alpha)) = \sqrt{\det E}.$$

Доказательство. Оно основано на следующей идее: так как в $e_u(z)$ в показатель степени z входит линейно, можно надеяться, что, умножая θ на $e^{Q(z)}$ с подходящей квадратичной функцией Q, можно добиться, чтобы новая функция стала периодичной относительно достаточно большой подгруппы $U' \subset U$. Эту периодическую функцию затем можно разложить в ряд Фурье, а поведение θ при сдвигах на точки решетки, не принадлежащие U', накладывает линейные условия на коэффициенты Фурье. Это позволяет подсчитать число линейно независимых решений.

Итак, пусть, как обычно, $e_u(z) = \alpha(u) e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)}$, и пусть θ — голоморфная функция на V, удовлетворяющая уравнению $\theta(z+u) = e_u(z)\theta(z)$. Для любой комплексной симметричной билинейной формы $B\colon V \times V \to \mathbf{C}$ функция $\theta^*(z) = e^{-\frac{\pi}{2} B(z, z)} \theta(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta^*(z+u) = \alpha(u) e^{\pi (H-B)(z, u) + \frac{\pi}{2} (H-B)(u, u)} \theta^*(z)$$

для всех $u \in U$. Существует подгруппа $U' \subset U$ ранга $g = \dim V$, такая, что

$$(1) \qquad E(U' \times U') = 0,$$

$$(2) \qquad U' = W \cap U, \quad \text{где} \quad W = \mathbf{R}U'.$$

Пересечение $W \cap iW$ является тогда комплексным подпространством V, на котором E, а значит, и H тождественно обращается в нуль. Из невырожденности H следует, что $W \cap iW = (0)$, так что

$$V = W \oplus iW \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} U' \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} W.$$

Поскольку $E(W \times W) = 0$, ограничение H на W вещественно и симметрично; стало быть, существует однозначно определенная симметричная комплексная билинейная форма B на V, для которой $B|_{W \times W} = H|_{W \times W}$. Из $\mathbf{C}$-линейности H по первому аргументу следует, что $H(z, w) = B(z, w)$ при $w \in W$, $z \in V$. Так как $E|_{U' \times U'} = 0$, ограничение $\alpha|_{U'}\colon U' \to \mathbf{C}_1^*$ является гомоморфизмом. Поэтому можно найти $\mathbf{C}$-линейную форму λ на V, вещественную на W и такую, что $\alpha(u) = e^{2\pi i\lambda(u)}$ при $u \in U'$. Функциональное уравнение для θ^* показывает, что функция $e^{-2\pi i\lambda(z)}\theta^*(z)$ периодична относительно подгруппы U'.

Положив $\widehat{U}' = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(U', \mathbf{Z}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$ и разложив $e^{-2\pi i\lambda(z)}\theta^*(z)$ в ряд Фурье, получим для $\theta^*(z)$ выражение

(1) $$\theta^*(z) = \sum_{\chi \in \widehat{U}'} c_\chi e^{2\pi i(\chi(z)+\lambda(z))}.$$

Для любых векторов $u \in U$, $u' \in U'$

$$(H - B)(u', u) = \overline{H(u, u')} - B(u, u') = \\ = -2i \operatorname{Im} H(u, u') = 2iE(u', u).$$

Определив для всякого $\hat{u} \in \widehat{U}'$ $\mathbf{C}$-линейную функцию $\hat{u}(z)$ на V условием $\hat{u}(u') = E(u', u)$, получаем, что $(H - B)(z, u) = 2i\hat{u}(z)$. Подставив ряд Фурье (1) в функциональное уравнение, получим для любых $u \in U$:

$$\sum_{\chi \in \widehat{U}'} c_\chi e^{2\pi i[\chi(u)+\lambda(u)]} e^{2\pi i[\chi(z)+\lambda(z)]} = \\ = \alpha(u) e^{i\pi\hat{u}(u)} \sum_{\chi \in \widehat{U}'} c_\chi e^{2\pi i[\chi(z)+\lambda(z)+\hat{u}(z)]}.$$

Сравнение коэффициентов дает

(2) $$c_\chi = \alpha(u) e^{i\pi\hat{u}(u) - 2\pi i[\chi(u)+\lambda(u)]} c_{\chi-\hat{u}}.$$

Пусть M — образ U при гомоморфизме $U \to \widehat{U}'$: $u \to \hat{u}$. Тогда задание коэффициентов c_χ на некоторой системе представителей классов $\widehat{U}'/M$ определяет однозначно все коэффициенты. (Обратите внимание, что если $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ для $u_1, u_2 \in U$, то $E(U', u_1 - u_2) = 0$, так что $u_1 - u_2 \in U'$, и соотношения, полученные из (2) подстановкой вместо u элементов u_1 и u_2 соответственно, совпадают.)

Покажем, что и обратно, по любой системе констант $\{c_\chi\}$, $\chi \in \widehat{U}'$, удовлетворяющей тождествам (2), можно построить соответствующую функцию. Иначе говоря, ряд Фурье (1) сходится к голоморфной функции. Достаточно проверить, что он сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах V. Фиксируем $\chi_0 \in \widehat{U}'$; достаточно проверить сходимость для такой системы: $c_\chi = 0$ при $\chi - \chi_0 \notin M$, $c_{\chi_0} = 1$. Положим $\chi = \chi_0 + \hat{u}$, где $\chi \in \chi_0 + M$. Когда z меняется в компактном подмножестве $K \subset V$, ряд (1) мажорируется рядом

$$\sum_{\hat{u} \in M} | c_{\chi_0 + \hat{u}} | e^{2\pi | \hat{u}(z) |}$$

и, стало быть, рядом

$$\sum_{\hat{u} \in M} e^{\pi \operatorname{Im} \hat{u}(u) + A \|\hat{u}\|},$$

где $\|u\|$ — подходящая норма на M, а A — положительная константа, зависящая от χ_0, K, α и H. Так как $V = W \oplus iW$, существуют $\mathbf{R}$-линейные функции φ, ψ: $V \to W$, такие, что $z = \varphi(z) + i\psi(z)$. Из вещественности $\hat{u}$ на W и условия $E(W \times W) = 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \hat{u}(u) &= \operatorname{Im}[\hat{u}(\varphi(u)) + i\hat{u}(\psi(u))] = \\ &= \hat{u}(\psi(u)) = E(\psi(u), u) = \\ &= E(\psi(u), \varphi(u) + i\psi(u)) = \\ &= E(\psi(u), i\psi(u)) = -H(\psi(u), \psi(u)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\psi(u) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(u) \Leftrightarrow u \in W \Leftrightarrow \hat{u} = 0,$$

так что $\operatorname{Im} \hat{u}$ — отрицательно определенная квадратичная форма на M. Поэтому ряд Фурье сходится очень быстро.

Отсюда следует, что размерность пространства тэта-функций, связанных с (H, α), равна мощности $\widehat{U}'/M$.

Поэтому остается лишь показать, что для любой свободной абелевой группы U ранга $2g$, невырожденной над $\mathbf{Q}$ кососимметрической билинейной формы E на U с целыми значениями и прямого слагаемого $U' \subset U$ ранга g, на котором $E \equiv 0$, имеем $|\det E| = n^2$, где n — порядок коядра отображения $U \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\widehat{U}', \mathbf{Z})$, определенного формулой $u \to E(\cdot, u)$.

Это следует из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & U' & \longrightarrow & U & \to & U/U' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \to & \widehat{U/U'} & \to & \hat{U} & \to & \hat{U}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками и столбцами. Отображения α, β, γ индуцированы формой E, и α, γ с точностью до знака сопряжены, так что их коядра имеют одинаковый порядок, а порядок коядра отображения β равен $|\det E|$.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат этого параграфа.

Теорема Лефшеца. *Пусть $X = V/U$ — комплексный тор, H — эрмитова форма на V, мнимая часть которой $E = \operatorname{Im} H$ целочисленна на $U \times U$, α — отображение $U \to \mathbf{C}_1^*$ со свойством $\alpha(u_1 + u_2) = \alpha(u_1)\alpha(u_2)e^{i\pi E(u_1, u_2)}$ и $L(H, \alpha)$ — соответствующее линейное расслоение на X. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Для всякого комплексного подтора $Y \subset X$ существует такое целое число $N > 0$, такое сечение σ расслоения $L^{\otimes N}$ и две точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 - x_2 \in Y$, что $\sigma(x_1) = 0$, $\sigma(x_2) \neq 0$.*

2) *Эрмитова форма H положительно определена.*

3) *При $n \geqslant 3$ пространство голоморфных сечений расслоения $L^{\otimes n}$ определяет погружение X как замкнутого комплексного подмногообразия в проективное пространство.*

Доказательство. Импликация 1)$\Rightarrow$2) была доказана ранее, а 3)$\Rightarrow$1) очевидна. Остается вывести 3) из 2).

Мы будем употреблять на равных правах выражения „тэта-функция, связанная с (H, α)“, и „сечение расслоения $L(H, \alpha)$“, отождествляя эти понятия, как и выше. Проведем доказательство утверждения 3) для $n=3$ (случай $n>3$ разбирается совершенно аналогично).

Прежде всего для любого сечения θ расслоения $L(H, \alpha)$ и любой пары точек $a, b \in V$ функция $\theta(z-a)\,\theta(z-b)\,\theta(z+a+b)$ является сечением расслоения $L(3H, \alpha^3)$. В самом деле, после сдвига аргумента на u она умножается на выражение

$$\alpha(u)^2 \exp\left\{\pi H(z-a, u)+\pi H(z-b, u)+\right.$$
$$\left.+\pi H(z+a+b, u)+\frac{3\pi}{2} H(u, u)\right\}=$$
$$=\alpha(u)^3 e^{\pi 3H(z, u)+\frac{\pi}{2} 3H(u, u)},$$

что и доказывает требуемое. Следовательно, для любой точки $z_0 \in V$ существует сечение φ расслоения L^3, не обращающееся в нуль в z_0. В самом деле, для его построения достаточно взять ненулевое сечение θ расслоения $L(H, \alpha)$ (оно существует по предложению, доказанному выше) и затем выбрать точки $a, b \in V$ так, чтобы $\theta(z_0-a) \neq 0$, $\theta(z_0-b) \neq 0$ и $\theta(z_0+a+b) \neq 0$. Сечение $\varphi=\theta(z-a)\,\theta(z-b)\,\theta(z+a+b)$ обладает нужным свойством.

Стало быть, любой базис $\theta_0, \ldots, \theta_d$ сечений расслоения L^3 определяет голоморфное отображение

$$\Theta\colon X \to \mathbf{P}^d,$$

которое в однородных координатах имеет вид

$$\Theta(\pi(z))=(\theta_0(z), \theta_1(z), \ldots, \theta_d(z)) \in \mathbf{P}^d, \quad z \in V.$$

Докажем теперь, что Θ инъективно. В противном случае существуют такие точки $z_1, z_2 \in V$, $z_1-z_2 \notin U$, и такая ненулевая константа $\gamma \in \mathbf{C}^*$, что для всех тэта-функций φ, связанных с $(3H, \alpha^3)$, имеем $\varphi(z_2)=\gamma\varphi(z_1)$. В частности, для всех $a, b \in V$ и любой тэта-функции θ, связанной с (H, α),

$$\theta(z_1-a)\,\theta(z_1-b)\,\theta(z_1+a+b)=$$
$$=\gamma\theta(z_2-a)\,\theta(z_2-b)\,\theta(z_2+a+b).$$

Фиксируем b и рассмотрим обе части равенства как функции от a. Возьмем логарифмическую производную, чтобы исключить γ. Обозначая через ω (мероморфный) дифференциал $\frac{d\theta}{\theta}$, получаем соотношение

$$-\omega(z_1-a)+\omega(z_1+a+b)=-\omega(z_2-a)+\omega(z_2+a+b),$$
$$a,\ b\in V.$$

Оно означает, что дифференциал $\omega(z_2+z)-\omega(z_1+z)$ инвариантен относительно сдвигов, т. е. имеет вид $dl(z)$, где l есть $\mathbf{C}$-линейная форма на V. Но тогда он совпадает с дифференциалом функции $\log\frac{\theta(z+z_2)}{\theta(z+z_1)}$, что дает тождество

$$\theta(z+z_2)=A_1e^{l(z)}\theta(z+z_1),$$

где $A_1\in\mathbf{C}^*$. Полагая $\sigma=z_2-z_1$, мы можем записать это равенство в виде

$$\theta(z+\sigma)=Ae^{l(z)}\theta(z),$$

где $A\in\mathbf{C}^*$ — фиксированная константа. Подставляя сюда $z+u$ вместо z, пользуясь функциональным уравнением для θ и сравнивая множители при обеих частях равенства, получаем

$$e^{\pi H(\sigma,\ u)}=e^{l(u)},\quad u\in U,$$

т. е.

$$\pi H(\sigma,\ u)-l(u)\in 2\pi i\mathbf{Z},\quad u\in U.$$

Отсюда следует, что функция

$$\pi H(\sigma,\ u)-l(u)=\pi H(u,\ \sigma)-l(u)+\pi(H(\sigma,\ u)-H(u,\ \sigma))=$$
$$=\pi H(u,\ \sigma)-l(u)+2\pi iE(\sigma,\ u)$$

при всех $u\in V$ принимает чисто мнимые значения. То же верно, следовательно, для $\pi H(u,\ \sigma)-l(u)$, а так как эта функция комплексно-линейна по u, то $\pi H(u,\ \sigma)=l(u)$ при всех $u\in V$. Но тогда $2\pi iE(\sigma,\ u)\in 2\pi i\mathbf{Z}$ при всех $u\in U$, так что

$$\sigma\in U^{\perp}=\{x\in V\mid E(x,\ u)\in\mathbf{Z}\quad\forall u\in U\}.$$

Здесь $U^{\perp}$ — решетка в V, содержащая U в качестве подрешетки конечного индекса. Так как по предположению $\sigma \notin U$, то $U + \mathbf{Z}\sigma \neq U$, и уравнение

$$\theta(z+\sigma) = Ae^{l(z)}\theta(z) = A'e^{\pi H(z,\sigma)+\frac{\pi}{2}H(\sigma,\sigma)}\theta(z)$$

показывает, что θ является на самом деле θ-функцией для решетки $U + \sigma\mathbf{Z}$, эрмитовой формы H и подходящего мультипликатора α' на $U + \sigma\mathbf{Z}$, продолжающего α. Этим свойством должно обладать любое сечение расслоения $L(H, \alpha)$, и размерность пространства таких сечений равна $\sqrt{\det_U E}$. С другой стороны, для любой решетки $U' = U + \mathbf{Z}\sigma$, не совпадающей с U, размерность пространства тэта-функций, связанных с U' и любым мультипликатором α', равна $\sqrt{\det_{U'} E}$. Но так как, очевидно, $\det_U E > \det_{U'} E$ и существует лишь конечное множество α', продолжающих α, отсюда следует, что почти все тэта-функции, связанные с H, α, U, не могут быть тэта-функциями для H, α', U' ни при каком α'. Полученное противоречие показывает, что отображение Θ: $X \to \mathbf{P}^d$ инъективно.

Для завершения доказательства теоремы остается лишь установить, что Θ индуцирует инъективное отображение касательных пространств в любой точке тора X. Пусть это не так, и ненулевой касательный вектор $\sum_{1}^{g} \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ в точке $z_0 \in V$ отображается в нулевой вектор в точке $\Theta(\pi(z_0))$ в $\mathbf{P}^d$. Тогда существует элемент $\alpha_0 \in \mathbf{C}$, такой, что при всех $\varphi \in \Gamma(X, L(3H, \alpha^3))$

$$\alpha_0\varphi(z_0) + \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}(z_0) = 0,$$

т. е.

$$D(\log\varphi)(z_0) = -\alpha_0$$

для всех таких φ, где $D = \sum_{1}^{g} \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Как выше, рассмотрим $\varphi(z) = \theta(z-a)\theta(z-b)\theta(z+a+b)$, где

$a, b \in V$, и $\theta \in \Gamma(L(H, \alpha))$. Положив $f(z) = D(\log\theta)(z)$, получим, что

$$f(z_0 - a) + f(z_0 - b) + f(z_0 + a + b) = -\alpha_0$$

для всех a, $b \in V$. Отсюда легко следует, что f — линейная (не обязательно однородная) функция от z. Интегрируя уравнение $f(z) = D(\log\theta)(z)$, находим, что для некоторого ненулевого вектора $\alpha \in V$ и всех $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\theta(z + \lambda\alpha) = e^{c\lambda^2 + \lambda f(z)}\theta(z),$$

где c — некоторая константа. Выписывая функциональные уравнения для обеих частей равенства (при сдвиге $z \to z + u$, $u \in U$), получаем, как и выше, что при всех $\lambda \in \mathbf{C}$ вектор $\lambda\alpha$ принадлежит решетке $U^{\perp} = \{z \in V \mid E(u, z) \in \mathbf{Z} \quad \forall u \in U\}$. Очевидное противоречие завершает доказательство теоремы.

Напомним теперь некоторые определения.

Пусть X — алгебраическое многообразие над $\mathbf{C}$. На множестве его точек имеется каноническая структура аналитического пространства. Обозначим его через X_{hol}, а его структурный пучок — через $\mathcal{O}_{X, \text{hol}}$. Часто для краткости мы будем говорить просто о голоморфных функциях на X, голоморфных отображениях с областью определения или значений X и т. п. Аналитическое пространство X мы будем называть *алгебраическим* или *алгебраизуемым*, если существует такое алгебраическое многообразие Y, что $Y_{\text{hol}} \cong X$. Заметим, далее, что полнота алгебраического многообразия X равносильна компактности пространства X_{hol} (это легко следует из леммы Чжоу).

Напомним теперь следующий результат:

Теорема Чжоу. *Пусть X — полное алгебраическое многообразие, Y — замкнутое аналитическое подмножество в X_{hol}. Тогда Y замкнуто в топологии Зарисского многообразия X.*

Чжоу доказал эту теорему для $X = \mathbf{P}^N$; общий результат немедленно вытекает отсюда с помощью леммы Чжоу.

Отсюда легко следует, что если X, Y — полные алгебраические многообразия, то любое голоморфное отображение $f: X_{\text{hol}} \to Y_{\text{hol}}$ индуцировано алгебраическим морфизмом. Для доказательства обозначим через Γ график f в $X_{\text{hol}} \times Y_{\text{hol}} = (X \times Y)_{\text{hol}}$. Это замкнутое аналитическое подмножество, поэтому оно замкнуто в топологии Зариского на $X \times Y$. Для любой точки $(x, f(x)) \in \Gamma$ проекция $\Gamma \to X$ индуцирует локальный гомоморфизм алгебраических локальных колец $\mathcal{O}_{x, X} \to \mathcal{O}_{(x, f(x)), \Gamma}$. Пусть $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{x, X}$, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{(x, f(x)), \Gamma}$. Покажем, что $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — изоморфизм. Прежде всего воспользуемся тем, что проекция $\Gamma \to X$ собственна и биективна. В силу основной теоремы Зариского это означает, что $\mathcal{O}_2$ — конечный $\mathcal{O}_1$-модуль. Пусть $\tilde{\mathcal{O}}_2 = \mathcal{O}_{(x, f(x)), \Gamma, \text{hol}}$ и $\tilde{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_{x, X, \text{hol}}$. Так как $\Gamma \to X$ — аналитический изоморфизм, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1 & \to & \mathcal{O}_2 \\ \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\ \tilde{\mathcal{O}}_1 & \xrightarrow{\sim} & \tilde{\mathcal{O}}_2. \end{array}$$

В частности, отображение $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ инъективно. Пусть $\mathfrak{m}_i$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_i$. Факторизуя по $\mathfrak{m}_i^2$, находим

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1/\mathfrak{m}_1^2 & \to & \mathcal{O}_2/\mathfrak{m}_2^2 \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \tilde{\mathcal{O}}_1/\mathfrak{m}_1^2\tilde{\mathcal{O}}_1 & \to & \tilde{\mathcal{O}}_2/\mathfrak{m}_2^2\tilde{\mathcal{O}}_2, \end{array}$$

откуда $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1\mathcal{O}_2 + \mathfrak{m}_2^2$. Следовательно, $\mathcal{O}_2$-модуль $\mathfrak{m}_2/\mathfrak{m}_1^2$ обращается в нуль после тензорного умножения над $\mathcal{O}_2$ на $\mathcal{O}_2/\mathfrak{m}_2$. Из леммы Накаямы следует тогда, что $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1\mathcal{O}_2$. Поскольку $\mathcal{O}_1$-модуль $\mathcal{O}_2/\mathcal{O}_1$ обращается в нуль после тензорного умножения над $\mathcal{O}_1$ на $\mathcal{O}_1/\mathfrak{m}_1$, то по лемме Накаямы $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1$. Это показывает, что $\Gamma \to X$ — алгебраический изоморфизм; стало быть, f — алгебраический морфизм.

Отсюда, в частности, вытекает, что компактное комплексное пространство может иметь *не более одной алгебраической структуры*[1]).

Нам понадобится еще следующее утверждение. Пусть X — полное алгебраическое многообразие. Тогда любая мероморфная функция на X_{hol} является рациональной функцией на X, то есть принадлежит полю $\mathbf{C}(X)$. Это можно доказать тем же способом, рассмотрев „график" функции f и применив к нему теорему Чжоу.

Возвращаясь теперь к комплексным торам, получаем

Следствие. *Пусть $X = V/U$ есть g-мерный комплексный тор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *X — комплексное пространство, связанное с проективным алгебраическим многообразием.*

2) *X — комплексное пространство, связанное с некоторым алгебраическим многообразием.*

3) *На X имеется g алгебраически независимых мероморфных функций.*

4) *Существует такая положительно определенная эрмитова форма H на V, что $\operatorname{Im} H$ целочисленна на $U \times U$.*

Доказательство. Импликации 1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3) очевидны, 4)$\Rightarrow$1) была доказана выше. Остается установить 3)$\Rightarrow$4). Пусть $f_1, \ldots, f_g$ — независимые меро-

---

[1]) Это совершенно неверно для некомпактных комплексных пространств. Серру принадлежит следующий пример. Для любого одномерного абелева многообразия X над $\mathbf{C}$ существует единственная алгебраическая группа G, являющаяся (как алгебраическая группа) нетривиальным расширением

$$0 \to \mathbf{C} \to G \to X \to 0.$$

Легко проверить, что $\Gamma(\mathcal{O}_G) = \mathbf{C}$, где $\mathcal{O}_G$ — (алгебраический) структурный пучок. С другой стороны, переходя к универсальному накрытию G, имеем аналитический изоморфизм $G = V/U$, где V — двумерное комплексное векторное пространство, $U = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_i \in \mathbf{Z}\}$, ω_1, ω_2 — некоторый $\mathbf{C}$-базис в V. Обозначив через $\mathbf{C}_m$ мультипликативную алгебраическую группу, получаем, что G и $\mathbf{C}_m \times \mathbf{G}_m$ индуцируют две различные алгебраизации одной и той же аналитической группы.

морфные функции. Обозначим через D_i дивизор полюсов f_i, пусть $D = \sum D_i$ и L — линейное расслоение, отвечающее D. Расслоение L имеет $g+1$ сечений $\sigma_0, \ldots, \sigma_g$, таких, что $\sigma_i = f_i\sigma_0$ во всех точках, где f_i регулярна. По теореме Аппеля — Гумберта существует такая эрмитова форма H на V с $\operatorname{Im} H(U \times U) \subset \mathbf{Z}$ и мультипликатор α, что $L = L(H, \alpha)$. Так как L имеет сечения, форма H по крайней мере положительно полуопределена. Пусть V_0 — ее нуль-пространство и $X_0 = V_0/V_0 \cap U$ — соответствующий подтор в X. Тогда фактортор X/X_0 совпадает с $(V/V_0)/$(образ U), а форма H индуцирована положительно определенной формой $\overline{H}$ на V/V_0, причем $\operatorname{Im} \overline{H}$ целочисленна на решетке $U/U \cap V_0$. В силу теоремы Лефшеца X/X_0 — проективное алгебраическое многообразие. Кроме того, выше было показано, что нули любого сечения σ расслоения L являются объединением смежных классов по модулю X_0. Применяя это соображение к сечениям $\sum\limits_{i=1}^{g} \alpha_i\sigma_i$, получаем, что любое аналитическое множество $f_i = \text{const}$ является объединением смежных классов по модулю Y_0, так что каждая функция f_i индуцирована некоторой мероморфной функцией $\overline{f}_i$ на X/X_0. Обозначим через $\mathbf{C}(X/X_0)$ поле рациональных функций на X/X_0. Тогда

$$g = \operatorname{tr} \deg_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_g) \leqslant \operatorname{tr} \deg_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(X/X_0) = \\ = \dim X/X_0 \leqslant \dim X = g.$$

Поэтому $\dim X_0 = 0$, так что форма H невырожденна. Это завершает доказательство.

Заметим, что отсюда немедленно следует, например, алгебраичность одномерных торов. В самом деле, пусть $X = \mathbf{C}/\{n + m\omega \mid n, m \in \mathbf{Z}\}$. Положим

$$H(z, w) = \frac{1}{\operatorname{Im} \omega} z\bar{w}.$$

Легко проверить, что H удовлетворяет всем условиям, потому что

$$\operatorname{Im} H(1, 1) = \operatorname{Im} H(\omega, \omega) = 0,$$
$$\operatorname{Im} H(\omega, 1) = -\operatorname{Im} H(1, \omega) = 1.$$

Ряд проективных вложений X хорошо известен в классической теории (см. курс Гурвица — Куранта). Например, $\wp$-функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,\, m) \neq (0,\, 0)} \left[\frac{1}{(z-n-m\omega)^2} - \frac{1}{(n+m\omega)^2}\right]$$

мероморфна, имеет периоды 1, ω и двойные полюсы в точках $n+m\omega$. Отображение

$$\mathbf{C} \to \mathbf{P}^2,$$
$$z \to (1, \wp(z), \wp'(z)) \text{ (в проективных координатах)}$$

индуцирует изоморфизм тора X с плоской кубической кривой, которая задается уравнением

$$X_0 X_2^2 = 4X_1^3 + aX_0^2 X_1 + bX_0^3$$

(константы a, b зависят от ω).

Нетрудно убедиться, с другой стороны, что в размерности $\geqslant 2$ почти все торы неалгебраичны. Более того, для почти всех торов X выполняется равенство $\operatorname{Pic} X = \operatorname{Pic}^\circ X$, или, что то же самое (по теореме Аппеля — Гумберта), не существует кососимметрических форм E: $V \times V \to \mathbf{R}$, целочисленных на $U \times U$ и таких, что $E(ix, iy) = E(x, y)$.

В самом деле, пусть $X = V/U$, $T = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$, $\overline{T} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}\text{-анти}}(V, \mathbf{C})$, как выше. Рассмотрим отображение

$$\begin{array}{c} \Lambda^2 \operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}) \to \Lambda^2_{\mathbf{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(U, \mathbf{C}) \\ \| \\ \Lambda^2_{\mathbf{C}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C}) \\ \| \\ \Lambda^2_{\mathbf{C}}(T \oplus \overline{T}) \cong (\Lambda^2_{\mathbf{C}} T) \oplus (T \otimes \overline{T}) \oplus (\Lambda^2_{\mathbf{C}} \overline{T}). \end{array}$$

Мы хотим установить, что для почти всех решеток $U \subset V$ никакой элемент $\Lambda^2_{\mathbf{Z}}(\operatorname{Hom}(U, \mathbf{Z}))$ не попадает целиком в среднюю компоненту $T \otimes \overline{T}$ последнего пространства. Достаточно проверить, что отображение $\bigwedge^2_{\mathbf{Z}}(\mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z})) \to \bigwedge^2_{\mathbf{C}} T$ инъективно. Но $\mathrm{Hom}(U, \mathbf{Z})$ проектируется в некоторую решетку в T, и так можно получить любую решетку, подходящим образом выбрав U.

Поэтому наше утверждение вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Пусть V есть g-мерное комплексное векторное пространство. Тогда для почти всех решеток $U \subset V$ отображение $\bigwedge^g_{\mathbf{Z}} U \to \bigwedge^g_{\mathbf{C}} V \cong \mathbf{C}$ инъективно (так что все отображения $\bigwedge^k_{\mathbf{Z}} U \to \bigwedge^k_{\mathbf{C}} V$ при $k \leqslant g$ инъективны).*

Здесь „почти все“ означает следующее. Введем в V систему координат и будем задавать U посредством $(g \times 2g)$-матрицы (ω_{ij}), состоящей из координат векторов некоторого базиса этой решетки. Тогда исключительные решетки отвечают объединению счетной системы $(2g^2 - 1)$-мерных аналитических подмножеств.

Доказательство этой леммы мы оставляем читателю.

Глава II

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ЯЗЫК МНОГООБРАЗИЙ

§ 4. Определение абелевых многообразий

Мы переходим теперь к изучению абелевых многообразий над произвольным алгебраически замкнутым полем k.

Определение. *Абелевым многообразием* X называется полное алгебраическое многообразие[1]) над k вместе с групповым законом композиции $m: X \times X \to X$, таким, что m и отображение взятия обратного являются морфизмами многообразий.

Заметим, что при $k = \mathbf{C}$ комплексное аналитическое пространство, отвечающее абелевому многообразию, является компактной комплексно-аналитической группой, стало быть, комплексным тором в силу результатов § 1. В случае $k \neq \mathbf{C}$ первая задача теории абелевых многообразий состоит в доказательстве того, что их свойства аналогичны свойствам комплексных торов. Разумеется, при $\operatorname{char} k = 0$ многие результаты такого типа можно установить, сводя ситуацию к случаю $k = \mathbf{C}$ (принцип Лефшеца), но при $\operatorname{char} k \neq 0$ это невозможно.

Мы намерены изучить следующие основные вопросы:

Вопрос 1. *Определить структуру X как абстрактной группы.*

Мы покажем, что группа X коммутативна и делима. Пусть, далее, n_X — морфизм умножения на n ($n > 0$ целое) в X. Мы установим, что ядро X_n морфизма n_X, или, что то же, группа точек $x \in X$, для которых

---

[1]) В частности, это означает, что X неприводимо.

$nx=0$, имеет следующую структуру:

$$X_n \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k \nmid n,$$
$$X_{p^m} \cong (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^i, \quad \text{если} \quad p=\operatorname{char} k, \ m \geqslant 0,$$

где i может принимать произвольное значение в интервале $0 \leqslant i \leqslant g = \dim X$. Это целое число i называется *p-рангом* многообразия X.

Вопрос 2. *Вычислить группы когомологий $H^q(X, \Omega^p)$ (Ω^p — пучок p-форм на X).*

Как и в классическом случае, мы построим канонические изоморфизмы

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \wedge^p [H^0(X, \Omega^1)] \underset{k}{\otimes} \wedge^q [H^1(X, \mathcal{O}_X)]$$

и покажем, что

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega^1) = g.$$

Мы установим, кроме того, что фундаментальная группа $\pi_1(X)$ (в алгебраическом смысле, т. е. проективный предел конечных групп Галуа неразветвленных накрытий) изоморфна $\prod_l (\mathbf{Z}_l)^{2g}$ в характеристике 0 и $\prod_{l \neq p} (\mathbf{Z}_l)^{2g} \times \mathbf{Z}_p^i$ в характеристике p. Точнее, пусть $Y \xrightarrow{f} X$ — такой морфизм, что некоторая конечная группа G действует свободно на Y, а X является фактормногообразием Y по G. Мы покажем, что тогда существуют целое число $n>0$ и коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "n_X"] & & X \end{tikzcd}$$

Далее, на Y существует структура абелева многообразия, относительно которой f и g являются гомоморфизмами.

Вопрос 3. *Определить структуру* $\operatorname{Pic} X$.

Мы покажем, что существует точная последовательность групп

$$0 \to \operatorname{Pic}^\circ X \to \operatorname{Pic} X \to NS(X) \to 0,$$

в которой $\operatorname{Pic}^\circ X$ имеет естественную структуру абелева многообразия, а $NS(X)$ — свободная абелева группа с конечным числом образующих, ранг ρ которой называется *базисным числом* многообразия X.

Мы попытаемся также найти аналогии классического описания группы $NS(X)$ с помощью римановых форм E.

Вот еще два связанных с этим вопроса:

(а) показать, что для любой пары абелевых многообразий X, Y абелева группа $\operatorname{Hom}(X, Y)$ свободна и конечно порождена (здесь Hom означает множество отображений, одновременно являющихся морфизмами многообразий и гомоморфизмами групп);

(б) найти некоторые матричные представления этой группы гомоморфизмов (в классическом случае такие представления индуцируются в $\operatorname{Hom}(H_1(X), H_1(Y))$).

Вопрос 4. *Охарактеризовать обильные обратимые пучки.* Более общая задача: вычислить когомологии произвольного обратимого пучка и, в частности, размерность пространства его сечений — так называемая задача Римана — Роха.

Прежде всего заметим, что

(1) *Любое абелево многообразие всюду неособо.*

В самом деле, хоть одна неособая точка $x_0 \in X$ существует, а для любой другой точки $x \in X$ морфизм сдвига $T_{xx_0^{-1}}: X \to X$, определенный формулой $T_{xx_0^{-1}}(y) = xx_0^{-1}y$, является автоморфизмом X и переводит x_0 в x, так что и точка x неособая.

(2) *Группа X коммутативна.*

Мы приведем два доказательства, одно здесь, а другое несколько позже. Первое доказательство обобщает рассуждение, использованное в классическом случае. Мы рассмотрим не только присоединенное представление X в касательном пространстве к единице e (или в пространстве дифференциалов), но также во всех пространствах $\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e}$, где $\mathcal{O}_{X,e}$ — локальное кольцо многообразия X в точке e, а $\mathfrak{m}_{X,e}$ — его максимальный идеал. Для любой точки $x \in X$ обозначим через C_x: $X \to X$ отображение $C_x(y) = xyx^{-1}$, так что $C_x(e) = e$. Оно индуцирует автоморфизм $C^*_{x,n}$ векторного пространства $\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e}$, который получается из автоморфизма C^*_x: $\mathcal{O}_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}$ локальных колец. Тем самым мы получаем теоретико-множественное отображение γ: $X \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e})$, $x \to C^*_{x,n}$. Снабдив группу $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e})$ естественной структурой алгебраического многообразия (индуцированной вложением $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e}) \subset \subset \mathrm{End}(\mathcal{O}_{X,e}/\mathfrak{m}^n_{X,e})$ в конечномерное векторное пространство над k), легко проверить, что γ является морфизмом многообразий. Но второе многообразие аффинное, в то время как X полно и связно, стало быть, отображение γ должно быть постоянным! Так как $\gamma(e)$ тождественно, $C^*_{x,n}$ тождественно для всех $x \in X$ и $n > 0$. Но $\bigcap_n \mathfrak{m}^n_{X,e} = (0)$, так что и отображение C^*_x: $\mathcal{O}_{X,e} \to \mathcal{O}_{X,e}$ тождественно. Поэтому C_x тождественно в некоторой окрестности единицы $e \in X$. Из неприводимости X следует, что C_x тождественно всюду на X для всех x, т. е. X — коммутативная группа.

Впредь мы будем записывать групповой закон в X аддитивно. Кроме того, следующие обозначения будут стандартными: для любой точки $x \in X$ через T_x: $X \to X$ обозначается морфизм сдвига $T_x(y) = x + y$; символ n_X означает отображение $x \to nx$.

(3) *Пусть $T = T_{X,0}$ — касательное пространство к X в нуле, а Ω_0 — двойственное к нему пространство $T^*_{X,0}$ дифференциалов. Тогда существует естественный изоморфизм*

$$\Omega_0 \otimes_k \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_X,$$

где Ω^1_X — пучок регулярных 1-форм на X.

Это отображение определяется следующим образом. Для каждого элемента $\theta \in \Omega_0$ определим 1-форму ω_θ на X, положив $(\omega_\theta)_x = T^*_{-x}(\theta)$. Иначе говоря, ω_θ — единственная инвариантная относительно сдвигов 1-форма на X, принимающая в точке 0 значение θ. Легко проверить, что ω_θ регулярна; это определяет естественный гомоморфизм пучков. Так как в любой точке x отображение T^*_{-x} индуцирует изоморфизм пространства дифференциалов в x с пространством Ω_0, отсюда следует, что описанный гомоморфизм пучков индуцирует изоморфизм их слоев в точке x по модулю максимального идеала $\mathfrak{m}_{X,x}$ этой точки. Из леммы Накаяма вытекает тогда, что рассматриваемое отображение является изоморфизмом пучков.

Многообразие X полно и связно и $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. Поэтому из установленного изоморфизма пучков следует, что пространство всюду регулярных форм совпадает с пространством инвариантных форм.

(4) *Для каждого n, не делящегося на характеристику p поля k, эндоморфизм n_X сюръективен.*

Начнем со следующего наблюдения. Касательное пространство $T_{X\times X,(0,0)}$ к $X \times X$ в точке $(0, 0)$ канонически распадается в прямую сумму $T_1 \oplus T_2$, где T_1 (соответственно T_2) — изоморфный образ $T_{X,0}$ относительно погружения $X \to X \times X$, определенного формулой $x \xrightarrow{i_0} (x, 0)$ (соответственно $x \xrightarrow{i_1} (0, x)$). Отождествляя T_i с $T_{X,0} = T$ с помощью этих изоморфизмов, легко обнаружить, что дифференциал dm: $T \oplus T \to T$ отображения сложения m: $X \times X \to X$, $m(x, y) = x + y$, есть просто сложение компонент: $dm(t_1, t_2) = t_1 + t_2$. В самом деле, по линейности достаточно проверить это на каждом из двух слагаемых T пространства $T \oplus T$, а для них это следует из того, что сквозные отображения $X \xrightarrow{i_0} X \times X \xrightarrow{m} X$ и $X \xrightarrow{i_1} X \times X \xrightarrow{m} X$ тождественны.

Индукция по n показывает, что для всех $n < 0$ (и, значит, также $n \leqslant 0$) отображение $(dn_X)_0$ совпадает с умножением на n. Стало быть, при $p \nmid n$ дифференциал dn_X является изоморфизмом. Если бы отображение n_X не было сюръективным, из теоремы о размерности следовало бы, что $\dim_0 n_X^{-1}(0)>0$, и мы могли бы найти ненулевой вектор $t\in T$, касательный к $n_X^{-1}(0)$ в точке 0. Но тогда $dn_X(t)=0$ (потому что $n_X^{-1}(0)$ отображается в точку 0) в противоречие с только что доказанным.

Следующая лемма, помимо прочих важных приложений, дает другое доказательство коммутативности группы X.

Лемма о жесткости (первая формулировка). *Пусть X — полное многообразие, Y и Z — любые многообразия и f: $X\times Y\to Z$ — такой морфизм, что для некоторой точки $y_0\in Y$ образ $f(X\times\{y_0\})$ является точкой z_0 многообразия Z. Тогда существует такой морфизм g: $Y\to Z$, что, обозначая через p_2: $X\times Y\to Y$ естественную проекцию, получаем, что $f=g\circ p_2$.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0\in X$ и определим отображение g: $Y\to Z$ формулой $g(y)=f(x_0, y)$. Так как $X\times Y$ — многообразие, для доказательства того, что $f=g\circ p_2$, достаточно проверить совпадение этих морфизмов на некотором открытом подмножестве $X\times Y$. Пусть U — аффинная открытая окрестность точки $z_0\in Z$, $F=Z\setminus U$, $G=p_2(f^{-1}(F))$. Тогда G замкнуто в Y, потому что многообразие X полно, и, стало быть, p_2 — замкнутое отображение. Далее, $y_0\notin G$, поскольку $f(X\times\{y_0\})=\{z_0\}$. Поэтому $Y\setminus G=V$ — непустое открытое подмножество в Y. Для любой точки $y\in V$ полное многообразие $X\times\{y\}$ отображается морфизмом f в аффинное многообразие U, и, значит, его образом является одна точка. Но это и означает, что для всех $x\in X$, $y\in V$ имеет место $f(x, y)=f(x_0, y)=g\circ p_2(x, y)$, что доказывает наше утверждение.

Следствие 1. *Пусть X, Y — абелевы многообразия и f: $X\to Y$ — произвольный морфизм. Тогда $f(x)=h(x)+a$, где h — некоторый гомоморфизм X в Y и $a\in Y$.*

Доказательство. Заменив f на $f-f(0)$, мы можем считать, что $f(0)=0$, и должны проверить, что тогда f является гомоморфизмом. Рассмотрим морфизм $X\times X\xrightarrow{\varphi} Y$, определенный формулой $\varphi(x, y)=f(x+y)-f(y)-f(x)$. Тогда $\varphi(X\times\{0\})=$ $=\varphi(\{0\}\times X)=0$, из леммы следует, что $\varphi\equiv 0$ на $X\times X$, а это и означает, что f — гомоморфизм.

Заметим, что в доказательстве этого следствия, несмотря на аддитивные обозначения, коммутативность X никак не использовалась. Поэтому из него можно извлечь второе доказательство коммутативности X:

Следствие 2. *X — коммутативная группа.*

В самом деле, морфизм обращения $X\to X$ должен быть гомоморфизмом в силу следствия 1. Поэтому для всех $x, y\in X$ имеем $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}=y^{-1}x^{-1}$, т. е. группа X коммутативна.

Следствие 3. *Пусть X — абелево многообразие (с отмеченной точкой 0). Тогда на категории полных многообразий с отмеченной точкой функтор $S\to$ $\to\mathrm{Hom}(S, X)$ (здесь Hom означает множество морфизмов, сохраняющих отмеченные точки) линеен. Иначе говоря, для любых S, T в этой категории естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}(S, X)\times\mathrm{Hom}(T, X)\to\mathrm{Hom}(S\times T, X),$$

для которого $(f, g)\to h$, $h(s, t)=f(s)+g(t)$, взаимно однозначно.

Доказательство. Инъективность этого отображения будет доказана, если в уравнении $h(s, t)=$ $=f(s)+g(t)$ взять в качестве отмеченных точек s, t вместо s_0, t_0 соответственно. Возьмем теперь произвольный морфизм $h\in\mathrm{Hom}(S\times T, X)$ и положим $f(s)=h(s, t_0)$, $g(t)=h(s_0, t)$, $k(s, t)=h(s, t)-f(s)-$ $-g(t)$. Тогда $k(S\times\{t_0\})=k(\{s_0\}\times T)=0$, и из леммы о жесткости следует, что $k\equiv 0$.

Приложение к § 4

Мы докажем следующий результат:

Теорема. *Пусть X — полное многообразие, $e \in X$ — некоторая точка и*

$$m\colon X \times X \to X$$

— такой морфизм, что $m(x, e) = m(e, x) = x$ для всех $x \in X$. Тогда X — абелево многообразие с групповым законом m и нулем e.

Доказательство. Будем писать xy вместо $m(x, y)$. Рассмотрим морфизм

$$\psi\colon X \times X \to X \times X,$$

$$\psi(x, y) = (xy, y).$$

Тогда $\psi^{-1}(e, e) = \{(e, e)\}$, так что по теореме о размерности $\dim(\psi(X \times X)) = \dim(X \times X)$. В силу полноты многообразия X отсюда следует, что отображение ψ сюръективно. В частности, для любой точки $x \in X$ существует такая точка $x' \in X$, что $x'x = e$. Таким образом, полагая $\Gamma' = \{(x, y) \in X \times X \mid xy = e\}$ и обозначая через p_i $(i = 1, 2)$ i-ю проекцию $X \times X$, находим, что $p_2(\Gamma') = X$. Выберем неприводимую компоненту Γ многообразия Γ', для которой $p_2(\Gamma) = X$. Заметим, что $\dim \Gamma \geqslant \dim X$. Пусть $p_i' = p_i|_\Gamma$; тогда $p_1'^{-1}(e) = \{(e, e)\}$, так что снова по теореме о размерности $\dim(p_1'(\Gamma)) = \dim X$. В силу полноты Γ отсюда следует сюръективность p_1'.

Определим отображение $\varphi\colon \Gamma \times X \to X$, положив $\varphi((x', x), y) = x'(xy)$. Тогда $\varphi(\Gamma \times \{e\}) = \{e\}$, так что, согласно лемме о жесткости, $\varphi((x', x), y) = \varphi((e, e), y)) = y$, т. е.

$$x'(xy) = y \quad \forall (x', x) \in \Gamma,\ y \in X. \tag{1}$$

В частности, при $(x', x) \in \Gamma$ имеем $x'(xx') = x'$. Выберем некоторую точку $(x'', x') \in \Gamma$ и умножим последнее уравнение слева на x''. Это дает соотношение

$$x''(x'(xx')) = x''x'.$$

Но $x''x' = e$ и в силу формулы (1) $x''(x'(xx')) = xx'$. Поэтому для любой точки $(x', x) \in \Gamma$ не только $x'x = e$, но и $xx' = e$.

Обозначим через χ: $\Gamma \times X \times X \to X$ отображение $\chi((x', x), y, z) = x((x'y)z)$. Поскольку $\chi(\Gamma \times \{e\} \times \{e\}) = e$, из леммы о жесткости следует, что

$$x((x'y(z) = e((ey)z) = yz.$$

Умножая это уравнение слева на x' и пользуясь равенством (1), находим, что

$$(x'y)z = x'(x((x'y)z)) = x'(yz).$$

Так как проекция p_1' сюръективна, это верно для любой точки $x' \in X$, так что умножение ассоциативно. Тем самым показано, что X — группа с групповым законом m. В частности, для любой точки $x_0 \in X$ сдвиг $x \to x_0 x$ является автоморфизмом многообразия X, так что оно неособое. Это же рассуждение показывает, что ψ биективно. Но отображение, касательное к ψ в точке (e, e), тоже биективно, потому что $\psi(x, e) = (x, e)$ и $\psi(e, x) = (x, x)$. Поэтому ψ не может быть несепарабельным, и, значит, по основной теореме Зариского отображение ψ является изоморфизмом. Обратное к ψ отображение задается формулой $(x, y) \to (xy^{-1}, y)$, которая показывает, что отображение $y \to y^{-1}$ также есть морфизм. Поэтому X — абелево многообразие.

§ 5. Когомологии и замена базы

Для дальнейшего нам понадобится доказательство одной теоремы Гротендика о поведении групп когомологий семейства векторных расслоений E_y над плоским семейством многообразий X_y, параметризированных точками $y \in X$. Важным следствием этого результата будет полунепрерывность размерности пространств когомологий расслоений E_y.

Примем без доказательства следующий фундаментальный результат:

Теорема. *Пусть f: $X \to Y$ — собственный морфизм локально нётеровых предсхем, и пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей на X. Тогда для всех $p \geqslant 0$ прямые образы $R^p f_*(\mathcal{F})$ являются когерентными пучками $\mathcal{O}_Y$-модулей.*

Напомним теперь определение плоскости. Пусть дан морфизм предсхем f: $X \to Y$ и квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на X. Пучок $\mathcal{F}$ называется *плоским над* Y или *f-плоским*, если для всякой точки $x \in X$ слой $\mathcal{F}_x$ (с его естественной структурой $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$-модуля) будет плоским над $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$. Без труда проверяется эквивалентность этого условия следующему: для любой пары открытых аффинных подмножеств $U \subset X$, $V \subset Y$ с условием $f(U) \subset V$ модуль $\mathcal{F}(U)$ является плоским над кольцом $\mathcal{O}_Y(V)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема. *Пусть f: $X \to Y$ — собственный морфизм нётеровых схем, где $Y = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, плоский над Y.*

Тогда существует конечный комплекс $0 \to K^0 \to K^1 \to \ldots \to K^n \to 0$ конечно порожденных проективных A-модулей и изоморфизм функторов

$$H^p(X \underset{Y}{\times} \operatorname{Spec} B, \mathcal{F} \underset{A}{\otimes} B) \cong H^p(K^{\cdot} \underset{A}{\otimes} B), \quad p \geqslant 0,$$

на категории A-алгебр B.

Доказательство. Выберем конечное покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ схемы X аффинными открытыми подмножествами. Тогда комплекс Чеха $C^{\cdot} = C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ альтернированных коцепей Чеха покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ является конечным комплексом A-плоских модулей, когомологии которого изоморфны группам когомологий $H^p(X, \mathcal{F})$.

Далее, для любой A-алгебры B множества $\{U_i \times_Y \operatorname{Spec} B\}$ образуют аффинное покрытие схемы $X \times_Y \operatorname{Spec} B$, а $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \otimes_A B$ представляет собой модуль p-коцепей Чеха этого покрытия с коэффициентами в пучке $\mathcal{F} \otimes_A B$. Поэтому

$$H^p(X \times_Y \operatorname{Spec} B, \mathcal{F} \otimes_A B) \cong H^p(C^{\cdot} \otimes_A B)$$

для всех B, и этот изоморфизм функториален по B.

Теперь нам понадобится следующая основная лемма:

Лемма 1. *Пусть $C^{\cdot}$ — некоторый комплекс A-модулей (A — нётерово кольцо), такой, что модули $H^i(C^{\cdot})$ конечно порождены и $C^p = 0$ при $p < 0$, $p > n$. Тогда существует такой комплекс $K^{\cdot}$ конечно порожденных A-модулей, что $K^p = 0$ при $p < 0$, $p > n$, K^p свободны при $1 \leqslant p \leqslant n$ и существует гомоморфизм комплексов φ: $K^{\cdot} \to C^{\cdot}$, индуцирующий изоморфизмы $H^i(K^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^i(C^{\cdot})$ для всех i. Кроме того, если все модули C^p являются A-плоскими, K^0 тоже будет плоским.*

Доказательство. Индукцией вниз по m мы построим диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & K^m & \xrightarrow{\partial^m} & K^{m+1} & \xrightarrow{\partial^{m+1}} & K^{m+2} & \to & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_m} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{m+2}} & & \\
\dots \to C^{m-1} & \to & C^m & \xrightarrow[\partial^m]{} & C^{m+1} & \xrightarrow[\partial^{m+1}]{} & C^{m+2} & \to & \dots .
\end{array}$$

Положим $K^p = 0$ при $p > n$. Допустим, что $(K^p, \varphi_p, \partial^p)$ уже определены при $p \geqslant m+1$ так, что выполняются следующие условия:

(i) $\partial^p \varphi_p = \varphi_{p+1} \partial^p$, $p \geqslant m+1$;

(ii) $\partial^{p+1} \partial^p = 0$, $p \geqslant m+1$;

(iii) отображения φ_q индуцируют изоморфизмы групп когомологий $H^q(K^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^q(C^{\cdot})$ при $q \geqslant m+2$ и эпиморфизм $\operatorname{Ker}(\partial^{m+1}) \to H^{m+1}(C^{\cdot})$;

(iv) модули K^p A-свободны и конечно порождены при $p \geqslant m+1$.

Построим тогда K^m, ∂^m, φ_m так, что условия (i) — (iii) будут по-прежнему выполнены, если заменить $m+1$ на m.

Пусть сначала $m \geqslant 0$. Обозначим через B^{m+1} ядро гомоморфизма $\operatorname{Ker}(\partial^{m+1}) \to H^{m+1}(C^{\cdot})$. Так как кольцо A нётерово, B^{m+1} конечно порожден над A, можно найти конечно порожденный свободный модуль K'^m и сюръективное отображение ∂': $K'^m \to B^{m+1}$. Далее, модуль $H^m(C^{\cdot})$ конечно порожден, так что существует сюръективное отображение $K''^m \xrightarrow{\lambda} H^m(C^{\cdot})$, где K''^m — конечно порожденный свободный модуль. Обозначим через μ: $K''^m \to Z^m(C^{\cdot})$ какой-нибудь подъем λ, и пусть φ''_m: $K''^m \to C^m$ — композиция μ и вложения $Z^m(C^{\cdot}) \to C^m$. Положим $K^m = K'^m \oplus K''^m$ и определим гомоморфизм ∂^m: $K^m \to K^{m+1}$, совпадающий с ∂' на K'^m и нулевой на K''^m. Так как $\varphi_{m+1}\partial'(K'^m) \subset \partial C^m$, существует такой гомоморфизм φ'_m: $K'^m \to C^m$, что $\partial\varphi'_m = \varphi_{m+1}\partial'$. Определим теперь гомоморфизм φ_m: $K^m \to C^m$, совпадающий с φ'_m на K'^m и с φ''_m на K''^m. Условия (i) — (iii), очевидно, по-прежнему будут выполнены, если заменить в них $m+1$ на m.

Рассмотрим теперь случай $m = -1$, т. е. предположим, что $\{K^p, \varphi_p, \partial^p\}$ с условиями (i) — (iii) уже определены для всех $p \geqslant 0$. Заменим K^0 на $K^0/\operatorname{Ker}(\partial^0) \cap \operatorname{Ker}(\varphi_0)$ и в качестве φ_0: $K^0 \to C^0$ и ∂^0: $K^0 \to K^1$ возьмем индуцированные отображения. Положив $K^p = 0$ при $p < 0$, мы получим комплекс

$$0 \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to K^3 \to \dots \to K^n \to 0$$

и некоторый гомоморфизм φ: $K^{\cdot} \to C^{\cdot}$, который по построению индуцирует изоморфизмы групп когомологий. Нужно лишь проверить, что если все модули C^p плоские, то K^0 тоже плоский. Рассмотрим комплекс „цилиндр отображения“ L, для которого $L^p = K^p \oplus C^{p-1}$ при $p \in \mathbf{Z}$, а граничные гомоморфизмы ∂: $L^p \to L^{p+1}$ определены формулами $\partial(x, 0) = (\partial x, \varphi(x))$, $\partial(0, y) = (0, -\partial y)$.

Обозначая через $C^{\cdot}[-1]$ комплекс, который получается из $C^{\cdot}$ сдвигом степеней на единицу (и некоторой заменой знаков у ∂), $C[-1]^p = C^{p-1}$, мы получим точную последовательность комплексов $0 \to C^{\cdot}[-1] \to L^{\cdot} \to K^{\cdot} \to 0$ и соответствующую точную когомологическую последовательность

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H^p(C^{\cdot}) & & & & H^{p+1}(C^{\cdot}) \\ & & \| & & & & \| \\ H^p(K^{\cdot}) & \to & H^{p+1}(C^{\cdot}[-1]) & \to & H^{p+1}(L^{\cdot}) & \to H^{p+1}(K^{\cdot}) \to & H^{p+2}(C^{\cdot}[-1]). \end{array}$$

Обращаясь к определениям, нетрудно убедиться в том, что отображения на когомологиях $H^p(K^{\cdot}) \to H^{p+1}(C^{\cdot}[-1]) \cong H^p(C^{\cdot})$ индуцированы гомоморфизмом φ: $K^{\cdot} \to C^{\cdot}$. Так как все они являются изоморфизмами, $H^p(L^{\cdot}) = (0)$ при $p \in \mathbf{Z}$. Но это означает, что последовательность $0 \to K^0 = L^0 \to L^1 \to \ldots \to L^{n+1} \to 0$ точна. Так как модули L^i плоские при $i \geqslant 1$, модуль K^0 также A-плоский.

Применим теперь эту лемму к нашей ситуации. Мы получим некоторый комплекс $K^{\cdot}$ и гомоморфизм $K^{\cdot} \to C^{\cdot}$, такие, что

$$H^p(K^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^p(C^{\cdot}) \cong H^p(X, \mathcal{F}) \quad \text{при всех} \quad p.$$

Заметим, что модуль K^0 A-проективен, ибо он плоский и конечно порожден над нётеровым кольцом A. Остается проверить, что для всех A-алгебр B отображения $H^p(K^{\cdot} \otimes_A B) \to H^p(C^{\cdot} \otimes_A B)$ также являются изоморфизмами. Это вытекает из следующего результата

Лемма 2. *Пусть $C^{\cdot}$, $K^{\cdot}$ — конечные комплексы плоских A-модулей, и пусть $C^{\cdot} \to K^{\cdot}$ — гомоморфизм комплексов, индуцирующий изоморфизмы когомологий $H^p(C^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^p(K^{\cdot})$ при всех p. Тогда для любой A-алгебры B отображения $H^p(C^{\cdot} \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} H^p(K^{\cdot} \otimes_A B)$ являются изоморфизмами.*

Доказательство. Построим комплекс „цилиндр отображения“ $L^{\cdot}$ в точности как в доказательстве леммы 1. Как и выше, можно убедиться, что $L^{\cdot}$ — точный конечный комплекс плоских A-модулей. Легко видеть, далее, что все модули $Z^p = \operatorname{Ker}\left(L^p \xrightarrow{\partial^p} L^{p+1}\right)$ тоже являются плоскими, так что точная последовательность

$$0 \to Z^p \to L^p \to Z^{p+1} \to 0$$

состоит из плоских A-модулей. Стало быть, последовательность

$$0 \to Z^p \otimes_A B \to L^p \otimes_A B \to Z^{p+1} \otimes_A B \to 0$$

точна, откуда следует, что комплекс $L^{\cdot} \otimes_A B$ точен. Но он является комплексом „цилиндр отображения“ $K^{\cdot} \otimes_A B \to C^{\cdot} \otimes_A B$. Поэтому, снова пользуясь когомологической последовательностью, мы убеждаемся, что отображения $H^p(K^{\cdot} \otimes_A B) \to H^p(C^{\cdot} \otimes_A B)$ являются изоморфизмами.

Это завершает доказательство леммы и теоремы.

Пусть теперь $f: X \to Y$ — любой морфизм схем, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Для всякой точки $y \in Y$ символом X_y мы будем обозначать слой f над y (то есть расслоенное произведение $X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ как схему над $k(y)$), а символом $\mathcal{F}_y$ — пучок $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$ на X_y.

Из доказанного результата вытекает важное следствие:

Следствие 1. *Пусть X, Y, $\mathcal{F}$ и f удовлетворяют условиям теоремы (но схема Y не обязательно аффинная). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *Для всех $p \geqslant 0$ функция $Y \to \mathbf{Z}$:*

$$y \to \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$$

полунепрерывна сверху на Y.

(b) *Функция* $Y \to \mathbf{Z}$:

$$y \to \chi(\mathcal{F}_y) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$$

локально постоянна на Y.

Доказательство. Так как утверждения локальны по Y, можно считать Y аффинной схемой. Пусть $K^\bullet$ — комплекс, существование которого доказано в теореме. Локализуя дополнительно по Y, мы можем считать его свободным. Обозначим через $d^p\colon K^p \to K^{p+1}$ кограничные операторы комплекса $K^\bullet$. Тогда

$$(*) \quad \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y) = \dim_{k(y)} [\operatorname{Ker}(d^p \otimes_A k(y))] - \dim_{k(y)} \left[\operatorname{Im}\left(d^{p-1} \otimes_A k(y)\right)\right] =$$
$$= \dim_{k(y)} [K^p \otimes k(y)] - \dim_{k(y)} [\operatorname{Im}(d^p \otimes k(y))] - \dim_{k(y)} \left[\operatorname{Im}\left(d^{p-1} \otimes k(y)\right)\right].$$

Поскольку первый член локально постоянен на Y, утверждение (b) получается, если взять альтернированную сумму тождеств (*) по всем p.

Далее, мы утверждаем, что для всякого $p \geqslant 0$ функция $\rho_p(y) = \dim_{k(y)} [\operatorname{Im}(d^p \otimes k(y))]$ полунепрерывна снизу на Y. В самом деле, пусть $r \geqslant 0$ — любое целое число и $d_r^p\colon \bigwedge^r K^p \to \bigwedge^r K^{p+1}$ — отображение, индуцированное гомоморфизмом d^p. Тогда

$$\{y \in Y \mid \rho_p(y) < r\} = \{y \in Y \mid d_r^p \otimes k(y) = 0\},$$

и это множество замкнуто, потому что d_r^p есть гомоморфизм свободных конечно порожденных модулей, который описывается некоторой матрицей с элементами в A. Интересующее нас множество есть множество общих нулей всех элементов этой матрицы. Отсюда следует утверждение (a).

Далее, доказанная теорема дает следующий критерий возможности объединить группы когомологий пучка $\mathcal{F}$ вдоль слоев морфизма f в векторное расслоение на Y:

Следствие 2. *Пусть X, Y, f и $\mathscr{F}$ удовлетворяют прежним условиям. Пусть, далее, схема Y приведена и связна. Тогда для любого значения p следующие утверждения равносильны:*

(i) $y \to \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$ — *постоянная функция;*

(ii) $R^p f_*(\mathscr{F})$ — *локально свободный пучок $\mathscr{E}$ на Y, и для всех точек $y \in Y$ естественные отображения*

$$\mathscr{E} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} k(y) \to H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

являются изоморфизмами.

Кроме того, если эти утверждения справедливы, то отображения

$$R^{p-1} f_*(\mathscr{F}) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} k(y) \to H^{p-1}(X_y, \mathscr{F}_y)$$

являются изоморфизмами для всех $y \in Y$.

Доказательство. По-прежнему можно считать Y аффинной схемой; пусть $K^{\cdot}$ — комплекс, построенный в теореме. Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) очевидна. Для доказательства (i)$\Rightarrow$(ii) нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть Y — приведенная схема, и пусть $\mathscr{F}$ — такой когерентный пучок на Y, что $\dim_{k(y)} [\mathscr{F} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} k(y)] = r$ для всех $y \in Y$. Тогда $\mathscr{F}$ локально свободен ранга r на Y.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathscr{F}_y$ — элементы, индуцирующие некоторый базис пространства $\mathscr{F}_y \otimes k(y)$. Эти элементы продолжаются до сечений пучка $\mathscr{F}$ над некоторой окрестностью V точки y, чем определяется гомоморфизм σ: $\mathcal{O}_Y^r|_V \to \mathscr{F}|_V$ над этой окрестностью. Он сюръективен на слое в точке y в силу леммы Накаямы. Поэтому пучок $\mathrm{Coker}(\sigma)$ в точке y нулевой, стало быть, он нулевой в некоторой ее окрестности. Тем самым можно считать, что σ — сюръективный гомоморфизм. По предположению леммы для всякой точки $y' \in V$ отображение $\sigma \otimes k(y')$: $k(y')^r \to \mathscr{F}_{y'} \underset{\mathcal{O}_{y'}}{\otimes} k(y')$ является изоморфизмом. Обозначая через $\mathscr{G}$ ядро σ, получаем поэтому, что

$\mathscr{G}_{y'} \subset \mathfrak{m}_{y'}\mathcal{O}^r_{y'}$ для всех $y' \in V$. Из приведенности Y тогда следует, что $\mathscr{G} = (0)$, так что σ — изоморфизм.

Мы применим это лемму к доказательству следующего результата:

Лемма 2. *Пусть Y — приведенная нётерова аффинная схема и*

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}$$

гомоморфизм когерентных локально свободных $\mathcal{O}_Y$-пучков. Если функция $\dim_{k(y)}[\operatorname{Im}(\varphi \otimes k(y))]$ *локально постоянна, пучки $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ расщепляются,*

$$\mathscr{F} \cong \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2,$$

$$\mathscr{G} \cong \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2,$$

таким образом, что $\varphi|_{\mathscr{F}_1} = 0$, $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathscr{G}_1$, *а* φ: $\mathscr{F}_2 \to \mathscr{G}_1$ *есть изоморфизм, т. е.*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \text{изоморфизм} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. По лемме 1 пучок $\mathscr{G}/\varphi(\mathscr{F})$ локально свободен. Пусть $Y = \operatorname{Spec} A$, $M = \Gamma(Y, \mathscr{F})$, $N = \Gamma(Y, \mathscr{G})$; тогда модуль $N/\varphi(M)$ проективен над A. Поэтому N расщепляется в прямую сумму $\varphi(M)$ и второго подмодуля, который изоморфен $N/\varphi(M)$. В терминах пучков это означает, что $\mathscr{G} \cong \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2$, где $\mathscr{G}_1 = \operatorname{Im}(\varphi)$. Далее, это показывает, что и A-модуль $\varphi(M)$ проективен, так что M расщепляется в прямую сумму $\operatorname{Ker}(\varphi)$ и второго подмодуля, изоморфного $\varphi(M)$. В терминах пучков это означает, что $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2$, где $\varphi(\mathscr{F}_1) = (0)$, φ: $\mathscr{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_1$.

Вернемся теперь к доказательству следствия 2. Пусть выполнено утверждение (i). Обозначим через $K^\cdot$ комплекс, построенный в теореме. Как и в доказательстве следствия 1 получается, что функции $\dim[\operatorname{Im}(d^{p-1} \otimes k(y))]$ и $\dim[\operatorname{Im}(d^p \otimes k(y))]$ локально постоянны. Применяя лемму 2 сначала к d_p: $K^p \to K^{p+1}$ и затем к d_{p-1}: $K^{p-1} \to \operatorname{Ker}(d_p)$, мы построим разложения на проективные слагаемые:

$$\begin{array}{ccccc} Z_{p-1}\oplus K'_{p-1} & & B_p\oplus H_p\oplus K'_p & & B_{p+1}\oplus K'_{p+1} \\ \| & & \| & & \| \\ K_{p-1} & \longrightarrow & K_p & \longrightarrow & K_{p+1}, \end{array}$$

где $Z_{p-1}=\operatorname{Ker}(d_{p-1})$, $d_{p-1}\colon K'_{p-1}\to B_p$ — некоторый изоморфизм, $B_p\oplus H_p=\operatorname{Ker}(d_p)$ и $d_p\colon K'_p\to B_{p+1}$ — снова изоморфизм. Отсюда немедленно следует, что

$$H^p(K^\cdot\underset{A}{\otimes}B)\cong H_p\underset{A}{\otimes}B\cong H^p(K^\cdot)\underset{A}{\otimes}B \quad \text{для всех} \quad B$$

и

$$H^{p-1}(K^\cdot\underset{A}{\otimes}B)\cong Z_{p-1}\underset{A}{\otimes}B/\operatorname{Im}(d_{p-2}\otimes B)\cong$$
$$\cong H^{p-1}(K^\bullet)\underset{A}{\otimes}B \quad \text{для всех} \quad B.$$

Это доказывает (ii).

Следствие 3. *Пусть X, Y, f и $\mathscr{F}$ определены, как выше (в отличие от требований следствия 2 схема Y не обязана быть приведенной). Пусть для некоторого p и всех точек $y\in Y$ имеем $H^p(X_y,\mathscr{F}_y)=(0)$. Тогда естественное отображение*

$$R^{p-1}f_*(\mathscr{F})\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}k(y)\to H^{p-1}(X_y,\mathscr{F}_y)$$

является изоморфизмом для всех $y\in Y$.

Доказательство. Пусть снова $Y=\operatorname{Spec}A$ и $K^\cdot$ — комплекс, построенный в теореме. Для всех $y\in Y$ последовательность

$$K^{p-1}\otimes k(y)\xrightarrow{d^{p-1}}K^p\otimes k(y)\xrightarrow{d^p}K^{p+1}\otimes k(y)$$

точна. Разложим векторное пространство $K^p\otimes k(y)$ в прямую сумму $\overline{W}_1\oplus\overline{W}_2$, где $\overline{W}_1$ — образ $K^{p-1}\oplus k(y)$, а $\overline{W}_2$ отображается инъективно в $K^{p+1}\otimes k(y)$. Чтобы доказать утверждение для точки y, мы можем заменить кольцо A его произвольной локализацией A_f, $f\in A$, $f(y)\neq 0$. Выбрав f подходящим образом, мы можем считать, что весь подмодуль K^p расщепляется в прямую сумму свободных модулей $W_1\oplus W_2$ так, что (a) $\overline{W}_i = W_i \otimes k(y)$; (b) $W_1 \subset \operatorname{Im}(d^{p-1})$. Чтобы добиться этого, достаточно поднять базис пространства $\overline{W}_1$ до элементов из образа d^{p-1}, а базис пространства $\overline{W}_2$ — любым способом. Из инъективности отображения $W_2 \otimes k(y) \to K^{p+1} \otimes k(y)$ следует, что и отображение $W_2 \to K^{p+1}$ будет инъективно, если кольцо A снова заменить подходящей локализацией A_f. Но тогда $\operatorname{Im}(d^{p-1}) \cap W_2 = (0)$, так что $W_1 = \operatorname{Im}(d^{p-1})$. Поскольку модуль W_1 проективен, расширение $K^{p-1} \to \to W_1 \to 0$ расщепляется и $K^{p-1} \cong \operatorname{Ker}(d^{p-1}) \oplus W_1$. Отсюда получаются точные последовательности

$$K^{p-2} \to \operatorname{Ker}(d^{p-1}) \to H^{p-1}(X, \mathcal{F}) \to 0,$$

$$K^{p-2} \otimes k(y) \to \operatorname{Ker}(d^{p-1}) \otimes k(y) \to H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y) \to 0,$$

так что $H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y) \cong H^{p-1}(X, \mathcal{F}) \otimes k(y)$, как и утверждалось.

Следствие 4. *В тех же предположениях относительно X, Y, f и $\mathcal{F}$ допустим, что $R^k f_*(\mathcal{F}) = (0)$ при $k \geqslant k_0$. Тогда $H^k(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$ для всех $y \in Y$ при $k \geqslant k_0$.*

Доказательство. Индукция вниз по k_0 с использованием следствия 3.

Следствие 5. *В прежних предположениях об X, Y, f и $\mathcal{F}$ для любой плоской A-алгебры B*

$$H^p(X \underset{Y}{\times} \operatorname{Spec} B, \mathcal{F} \underset{A}{\otimes} B) \cong H^p(X, \mathcal{F} \underset{A}{\otimes} B).$$

Доказательство. Это немедленно следует из того, что для любой плоской A-алгебры B и *любого* комплекса $K^\cdot$ имеем

$$H^p(K^\cdot \underset{A}{\otimes} B) \cong H^p(K^\cdot) \underset{A}{\otimes} B.$$

Следствие 6. (Теорема о качелях, предварительная формулировка.) *Пусть X — некоторое полное многообразие, T — любое многообразие и L — линейное расслоение над $X \times T$. Тогда множество*

$$T_1 = \{t \in T \mid \ L|_{X \times \{t\}} \text{ тривиально на } X \times \{t\}\}$$

замкнуто в T. Далее, пусть p_2: $X \times T_1 \to T_1$ — морфизм проекции. Тогда $L|_{X \times T_1} \cong p_2^*M$, для некоторого линейного расслоения M над T_1.

Доказательство. Начнем со следующего замечания: линейное расслоение M на полном многообразии X тривиально тогда и только тогда, когда $\dim H^0(X, \mathscr{M}) > 0$ и $\dim H^0(X, \mathscr{M}^{-1}) > 0$. В самом деле, необходимость этих условий очевидна. Обратно, пусть они выполнены. Из первого утверждения следует существование ненулевого гомоморфизма $\mathscr{O}_X \xrightarrow{\sigma} \mathscr{M}$, а из второго — гомоморфизма $\mathscr{O}_X \to \mathscr{M}^{-1}$, и, по двойственности, гомоморфизма $\mathscr{M} \xrightarrow{\tau} \mathscr{O}_X$. Сечение $\tau(\sigma(1))$ пучка $\mathscr{O}_X$ ненулевое. Из полноты и связности X следует, что оно постоянно. Тем самым $\tau \circ \sigma$ — изоморфизм пучков; значит, σ и τ — изоморфизмы.

Следовательно, T_1 совпадает со множеством тех точек $t \in T$, для которых $\dim H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}|_{X \times \{t\}}) > 0$ и $\dim H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}^{-1}|_{X \times \{t\}}) > 0$ одновременно. Согласно следствию 1, множество T_1 замкнуто. Заменив T на T_1 (так что с этого места T является приведенной схемой конического типа над полем k), а L — его ограничением на $X \times T_1$, мы можем считать, что все расслоения $L|_{X \times \{t\}}$ для $t \in T$ тривиальны. Отсюда следует, что $\dim H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}|_{X \times \{t\}}) = 1$ для всех $t \in T$. В силу следствия 2 пучок $p_{2*}(\mathscr{L}) = \mathscr{M}$ обратим на T, а отображения $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_T} k(t) \to H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}|_{X \times \{t\}})$ являются изоморфизмами. Из тривиальности $\mathscr{L}|_{X \times \{t\}}$, очевидно, следует, что естественное отображение $p_2^*(\mathscr{M}) \to \mathscr{L}$ является изоморфизмом. Пусть M — расслоение, отвечающее пучку $\mathscr{M}$; тогда $p_2^*M \cong L$.

§ 6. Теорема о кубе, I

Теорема. *Пусть X, Y — полные многообразия, Z — любое мноеообразие и x_0, y_0, z_0 — отмеченные точки многообразий X, Y, Z соответственно. Любое линейное расслоение L на $X \times Y \times Z$, ограничения* *которого на* $\{x_0\}\times Y\times Z$, $X\times\{y_0\}\times Z$ *и* $X\times Y\times\{z_0\}$ *тривиальны, само тривиально.*

Замечание. Пусть T — некоторый контравариантный функтор на категории полных многообразий со значениями в категории $\mathcal{A}\ell$ абелевых групп. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — любое семейство полных многообразий, $x_i^0 \in X_i$ — отмеченные точки, $\pi_i\colon X_1\times\ldots\times X_n\to X_1\times\ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n$ — морфизмы проекции, $\sigma_i\colon X_1\times\ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n\to X_1\times\ldots\times X_n$ — вложения, определенные формулой

$$\sigma_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$\alpha_T^n\colon \prod_{i=1}^n T(X_1\times\ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n)\to T(X_1\times\ldots\times X_n),$$

$$\beta_T^n\colon T(X_1\times\ldots\times X_n)\to\prod_{i=1}^n T(X_1\times\ldots\times\hat{X}_i\times\ldots\times X_n),$$

полагая

$$\alpha_T^n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_1^n \pi_i^*(\xi_i),$$

$$\beta_T^n(\eta) = (\sigma_1^*(\eta), \sigma_2^*(\eta), \ldots, \sigma_n^*(\eta)).$$

Простая индукция по n показывает тогда, что существует естественное расщепление $T(X_1\times\ldots\times X_n) = \operatorname{Im}(\alpha)\oplus\operatorname{Ker}(\beta)$. Функтор T называется функтором *порядка* n (*линейным* при $n=1$, *квадратичным* при $n=2$ и т. п.), если гомоморфизм α сюръективен, или, что то же самое, β инъективен. (Заметим, что определение α не зависит от выбора отмеченных точек.)

Тем самым сформулированная теорема (в случае, когда Z также предполагается полным) утверждает, что функтор $\operatorname{Pic} X$ квадратичен на категории полных многообразий.

Пусть теперь T_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$ — контравариантные функторы на категории полных многообразий со значениями в $\mathcal{A}\ell$, и пусть $T_1\xrightarrow{f}T_2$, $T_2\xrightarrow{g}T_3$ — такие морфизмы функторов, что последовательность $T_1 \xrightarrow{f} T_2 \xrightarrow{g} T_3$ точна. Тогда, если T_1 и T_3 имеют порядок n, T_2 тоже имеет порядок n. Это следует из точности последовательности

$$0 = \operatorname{Ker}\left(\beta^n_{T_1}(X_1, \ldots, X_n)\right) \to \operatorname{Ker}\left(\beta^n_{T_2}(X_1, \ldots, X_n)\right) \to \\ \to \operatorname{Ker}\left(\beta^n_{T_3}(X_1, \ldots, X_n)\right) = 0.$$

Отсюда следует доказательство теоремы о кубе в случае основного поля $\mathbf{C}$, потому что определены функториальные по X точные последовательности

$$H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$$

и группа $H^1(X, \mathcal{O})$ линейна (стало быть, квадратична) по X, а $H^2(X, \mathbf{Z})$ квадратична по X — в силу формул Кюннета.

Доказательство теоремы о кубе (по Вейлю и Мурре). Согласно „теореме о качелях“, достаточно доказать, что для всех точек $(x, z) \in X \times Z$ ограничения L на $\{x\} \times Y \times \{z\}$ тривиальны; действительно, уже дано, что ограничение L на $X \times \{y_0\} \times Z$ тривиально. Следующая лемма позволяет свести доказательство к случаю, когда X — полная неособая кривая.

Лемма. *Пусть X — произвольное многообразие, и пусть x_0, $x_1 \in X$. Тогда на X лежит неприводимая кривая, содержащая x_0 и x_1.*

Доказательство. Можно считать, что $\dim X > 1$. По лемме Чжоу можно предполагать, что многообразие X проективно. Кроме того, индукция по $\dim X$ показывает, что достаточно найти подмногообразие $Y \subset X$ коразмерности единица, содержащее x_0 и x_1. Можно построить бирациональный морфизм $X' \xrightarrow{f} X$, где X' — проективное многообразие и $\dim f^{-1}(x_i) \geqslant 1$ (в самом деле, пусть h — любая мероморфная функция на X, для которой x_0 и x_1 — точки неопределенности. Тогда в качестве X' можно взять замыкание графика h в $X \times \mathbf{P}^1$). Для любого вложения $X' \subset \mathbf{P}^N$ в силу теоремы Бертини существует гиперплоскость $H \subset \mathbf{P}^N$, такая, что пересечение $H \cap X' = Y'$ неприводимо. Кроме того, $H \cap f^{-1}(x_i) \neq \varnothing$, потому что $\dim f^{-1}(x_i) \geqslant 1$. Поэтому многообразие $Y = f(Y')$ неприводимо и содержит x_0 и x_1, что доказывает лемму.

Возвращаясь к доказательству теоремы, найдем для любой точки $x \in X$ полную неприводимую кривую C_1 в X, соединяющую x_0 с x. Пусть π: $C \to C_1$ — нормализация кривой C_1, а π': $C \times Y \times Z \to X \times Y \times Z$ — индуцированное отображение. Все предположения теоремы, очевидно, выполнены для расслоения π'^*L на $C \times Y \times Z$ (с заменой X на C и x_0 на любую точку из C, лежащую над x_0). Поэтому достаточно проверить тривиальность этого расслоения: отсюда будет следовать, что ограничение L на слой $\{x\} \times Y \times \{z\}$ тривиально при любых $x \in X$, $z \in Z$.

Будем теперь считать, что X — полная неособая кривая. Достаточно показать, что существует непустое открытое подмножество $Z' \subset Z$, такое, что ограничение L на $X \times Y \times Z'$ тривиально. Действительно, отсюда следует тривиальность $L|_{X \times Y \times \{z\}}$ для всех $z \in Z'$ и по непрерывности для всех $z \in Z$.

Обозначим через Ω^1 пучок регулярных 1-форм на X и обозначим через $g = \dim H^0(X, \Omega^1)$ род кривой X. Очевидно, можно найти g точек $P_1, \ldots, P_g$ на X, таких, что, полагая $D = \sum_1^g P_i$, получаем $\dim H^0(X, \Omega^1 \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0$. Обозначим через p_1 проекцию $X \times Y \times Z \to X$ и положим $L' = L \otimes p_1^*(L_X(D))$ (где $L_X(D)$ — расслоение на X, связанное с пучком $\mathcal{O}_X(D)$). Для любой точки $(y, z) \in Y \times Z$ пусть $L'_{(y, z)}$ — ограничение L' на $X \times \{y\} \times \{z\}$. Поскольку $L'_{(y, z_0)} = L_X(D)$, то $\dim H^1(X, \mathscr{L}'_{(y, z_0)}) = \dim H^0(X, \Omega^1 \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0$ по теореме Римана — Роха. Поэтому замкнутое множество

$$F = \{(y, z) \in Y \times Z \mid \dim H^1(X, \mathscr{L}'_{(y, z)}) \geqslant 1\} \subset Y \times Z$$

не пересекается с $Y \times \{z_0\}$. Из полноты Y тогда следует, что существует открытое подмножество $Z' \subset Z$, содержащее z_0 и такое, что $Y \times Z' \cap F = \varnothing$. Поэтому, ограничиваясь рассмотрением Z', мы можем считать, что $H^1(X, \mathscr{L}_{(y, z)}) = 0$ для всех $(y, z) \in Y \times Z$. Но это означает, что для всех $(y, z) \in Y \times Z$

$$\dim H^0(X, \mathscr{L}'_{(y, z)}) = \chi(\mathscr{L}'_{(y, z)}) = \chi(\mathscr{L}_{(y_0, z_0)}) =$$
$$= \chi(\mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D = 1.$$

Применим следствие 2 из основной теоремы к морфизму проекции p_{23}: $X \times Y \times Z \to Y \times Z$. Оно показывает, что пучок $p_{23*}(\mathscr{L}')$ обратим на $Y \times Z$ и для любых точек (y, z) естественное отображение $p_{23*}(\mathscr{L}') \otimes \otimes k(y, z) \to H^0(X, \mathscr{L}'_{(y, z)})$ является изоморфизмом. Пусть U — открытое подмножество в $Y \times Z$, над которым пучок $p_{23*}(\mathscr{L}')$ тривиален, и $\sigma_U \in \Gamma(U, p_{23*}(\mathscr{L}')) = \Gamma(p_{23}^{-1}(U), \mathscr{L}')$ — какое-нибудь порождающее его сечение. Обозначим через $\tilde{D}_u$ дивизор нулей σ_U в $p_{23}^{-1}(U)$. Поскольку для любых двух открытых множеств U, $U' \subset Y \times Z$ сечения σ_U и $\sigma_{U'}$ отличаются на $U \cap U'$ на множитель, нигде не обращающийся в нуль, то $\tilde{D}_U \cap p_{23}^{-1}(U \cap U') = \tilde{D}_{U'} \cap p_{23}^{-1}(U \cap U')$. Стало быть, на $X \times Y \times Z$ определен такой эффективный дивизор $\tilde{D}$, что $\tilde{D}|_{p_{23}^{-1}(U)} = \tilde{D}_U$. Для любой точки $(y, z) \in Y \times Z$ ограничение $\tilde{D}$ на $X \times \{y\} \times \{z\}$ является дивизором нулей некоторого ненулевого сечения из $H^0(\mathscr{L}'_{(y, z)})$. В частности, ограничения $\tilde{D}$ на $X \times \{y\} \times \{z_0\}$ и $X \times \times \{y_0\} \times \{z\}$ для любых точек $y \in Y$, $z \in Z$ должны совпадать с $D = \sum P_i$. Поэтому при $P \in X$, $P \neq P_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ ограничение $\tilde{D}$ на $\{P\} \times Y \times Z$ имеет своим носителем некоторое множество S, не пересекающееся ни с $\{P\} \times Y \times \{z_0\}$, ни с $\{P\} \times \{y_0\} \times Z$. Проекция T этого множества на Z является поэтому собственным замкнутым подмножеством Z, а так как S имеет чистую коразмерность 1 в $\{P\} \times Y \times Z$, S должно иметь вид $\bigcup_{i=1}^{m}\{P\}\times Y\times T_i$, где T_i замкнуты и имеют коразмерность 1 в Z. Но $S\cap\{P\}\times\{y_0\}\times Z=\varnothing$, поэтому $S=\varnothing$. Следовательно, носитель $\tilde{D}$ не пересекается с $\{P\}\times Y\times Z$ для $P\in X$, $P\neq P_i$. Это означает, что дивизор $\tilde{D}$ должен иметь вид $\sum_1^g n_i(\{P_i\}\times Y\times Z)$. Ограничивая его на $X\times\{y_0\}\times\{z_0\}$, получаем, что $\tilde{D}=\sum_1^g(\{P_i\}\times Y\times Z)$. Значит, для любой точки $(y, z)\in\in Y\times Z$ расслоение $L'_{(y,z)}$ изоморфно $L_X(D)$, так что ограничение L на $X\times\{y\}\times\{z\}$ тривиально.

Следствие 1. *В условиях теоремы любое линейное расслоение на $X\times Y\times Z$ изоморфно расслоению вида $p_{12}^*L\otimes p_{13}^*M\otimes p_{23}^*P$, где p_{ij} — проекция $X\times Y\times Z$ на произведение i-го и j-го множителей, а L, M, P — линейные расслоения на $X\times Y$, $X\times Z$ и $Y\times Z$ соответственно.*

Доказательство. Это следует из замечания, предшествующего доказательству теоремы.

Следствие 2. *Пусть X — любое многообразие, Y — абелево многообразие и f, g, h: $X\to Y$ — морфизмы. Тогда для всех $L\in\operatorname{Pic}Y$*

$$(f+g+h)^*L\cong(f+g)^*L\otimes(f+h)^*L\otimes(g+h)^*L\otimes$$
$$\otimes f^*L^{-1}\otimes g^*L^{-1}\otimes h^*L^{-1}.$$

Доказательство. Пусть p_i: $Y\times Y\times Y\to Y$ — проекция на i-й множитель. Положим $m_{ij}=p_i+p_j$: $Y\times Y\times Y\to Y$ и $m=p_1+p_2+p_3$: $Y\times Y\times Y\to Y$. Рассмотрим линейное расслоение

$$M=m^*L\otimes m_{12}^*L^{-1}\otimes m_{13}^*L^{-1}\otimes m_{23}^*L^{-1}\otimes p_1^*L\otimes p_2^*L\otimes p_3^*L$$

на $Y\times Y\times Y$. Обозначая через q: $Y\times Y\to Y\times Y\times Y$ отображение $q(y, y')=(0, y, y')$, получаем, что

$$q^*M=n^*L\otimes q_1^*L^{-1}\otimes q_2^*L^{-1}\otimes n^*L^{-1}\otimes 0^*L\otimes q_1^*L\otimes q_2^*L,$$

где 0, q_1, q_2, n: $Y \times Y \to Y$ — соответственно морфизм 0, проекции и сложение. Это означает, что расслоение q^*M тривиально. По симметрии, ограничения M на $Y \times (0) \times Y$ и $Y \times Y \times (0)$ тоже тривиальны. В силу теоремы M тривиально. То же относится к прообразу M относительно отображения (f, g, h): $X \to Y \times \times Y \times Y$, откуда следует требуемое

Следствие 3. *Пусть X — абелево многообразие, и $n \in \mathbf{Z}$. Тогда для любого линейного расслоения L на X имеем*

$$n_X^* L \cong L^{\frac{n^2+n}{2}} \otimes (-1_X)^* L^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

Доказательство. Применяя следствие 2 к морфизмам $f = (n+1)_X$, $g = 1_X$ и $h = (-1)_X$, находим формулу для „второй разности“

$$(n+2)_X^* L \otimes (n+1)_X^* L^{-2} \otimes n_X^* L \cong 1_X^* L \otimes (-1)_X^* L,$$

откуда следует существование таких линейных расслоений M_1, M_2, что

$$n_X^* L \cong \left[L \otimes (-1)_X^* L\right]^{\frac{n(n-1)}{2}} \otimes M_1^n \otimes M_2.$$

Полагая $n = 0$, находим, что M_2 тривиально; подстановка $n = 1$ показывает, что $M_1 \cong L$.

Следствие 4 („теорема о квадрате“). *Для любых линейных расслоений L и точек $x, y \in X$ имеем*

$$T_{x+y}^* L \otimes L \cong T_x^* L \otimes T_y^* L.$$

В частности, положим

$$\varphi_L(x) = \text{класс } T_x^* L \otimes L^{-1} \in \operatorname{Pic} X;$$

тогда φ_L — гомоморфизм X в $\operatorname{Pic} X$.

Доказательство. Нужно применить следствие 2 к случаю $X = Y$, f и g — постоянные отображения с образами x, y соответственно, h — тождественное отображение.

В терминах дивизоров следствие 4 утверждает, что для любого дивизора D на X и любых точек

$x,\ y \in X$
$$T^*_{x+y}D + D \equiv T^*_xD + T^*_yD,$$
где $\equiv$ означает линейную эквивалентность.

Введенное отображение φ_L очень важно; всюду в дальнейшем мы сохраняем для него это обозначение. Заметим, что

a) $\varphi_{L_1 \otimes L_2} = \varphi_{L_1} + \varphi_{L_2}$ (сложение справа индуцировано тензорным умножением в $\operatorname{Pic} X$),

b) $\varphi_{T^*_x L} = \varphi_L$.

Определение. $K(L) = \operatorname{Ker}(\varphi_L) = \{x \in X \mid T^*_x L \cong L\}$.

Предложение. *Подгруппа $K(L) \subset X$ замкнута в топологии Зариского.*

Доказательство. Применим теорему о качелях к расслоению $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}$ на $X \times X$ (где $m\colon X \times X \to X$ — сложение). Из нее следует, что множество точек $x \in X$, для которых ограничение $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}$ на $\{x\} \times X$ тривиально, замкнуто в топологии Зариского. Но $m^*L \otimes p_2^*L^{-1}|_{\{x\} \times X} \cong T^*_x L \otimes L^{-1}$, так что это множество совпадает с $K(L)$.

Приложение 1. *Пусть D — эффективный дивизор на абелевом многообразии X, и пусть $L = L(D)$ — связанное с ним линейное расслоение. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *Подгруппа $H = \{x \in X \mid T^*_x(D) = D\}$ многообразия X конечна (имеется в виду равенство дивизоров, а не их классов).*

(ii) *Группа $K(L)$ конечна.*

(iii) *Линейная система $|2D|$ не имеет базисных точек и определяет конечный морфизм $X \to \mathbf{P}^N$.*

(iv) *Расслоение L обильно на X.*

Доказательство. Импликация (iii)$\Rightarrow$(iv) следует из общего утверждения [EGA, гл. III (2.6.1) или (4.4.2)].

Установим импликацию (iv)$\Rightarrow$(ii). Допустим, что группа $K(L)$ бесконечна. Обозначим через Y связную компоненту нуля в ней. Тогда Y — абелево многообразие ненулевой размерности, и ограничение L_Y расслоения L на Y обильно на Y. Кроме того, $T_y^*(L_Y) \cong L_Y$ для всех $y \in Y$. Пусть m: $Y \times Y \to Y$ — сложение и p_i: $Y \times Y \to Y$ — проекции; из теоремы о качелях тогда следует, что линейное расслоение $m^*(L_Y) \otimes p_1^*(L_Y^{-1}) \otimes$ $\otimes\, p_2^*(L_Y^{-1})$ тривиально на $Y \times Y$. Рассматривая его прообраз относительно морфизма $Y \to Y \times Y$, $y \to (y, -y)$, находим, что расслоение $L_Y \otimes (-1_Y)^*(L_Y)$ тривиально на Y. Но расслоение L_Y обильно; вместе с ним обильно и расслюение $(-1_Y)^*(L_Y)$, потому что -1_Y — автоморфизм многообразия Y. Следовательно, $L_Y \otimes (-1_Y)^*(L_Y)$ тоже обильно. Это противоречит предположеиию о том, что $\dim Y > 0$ и доказывает импликацию (iv)$\Rightarrow$(ii). Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) тривиальна, потому что $K(L) \supset H$.

Покажем теперь, что (i)$\Rightarrow$(iii). В силу следствия 4, линейная система $|2D|$ содержнт дивизоры $T_x^*(D) +$ $+\, T_{-x}^*(D)$. Для любой точки $u \in X$ существует такая точка $x \in X$, что $u \pm x \notin \operatorname{Supp} D$, т. е. что $u \notin$ $\notin \operatorname{Supp}\left(T_x^*(D) + T_{-x}^*(D)\right)$. Поэтому линейная система $|2D|$ не имеет базисных точек и определяет морфизм φ: $X \to \mathbf{P}^N$. Если бы этот морфизм не был конечным, мы могли бы найти такую неприводимую кривую C, что $\varphi(C)$ — одна точка. Это означает, что любой дивизор $E \in |2D|$ либо содержит C, либо не пересекается с C. В частности, для почти всех $x \in X$ кривая C не пересекается с $T_x^*(D) + T_{-x}^*(D)$. Отметим теперь следующий общий факт:

Лемма. *Пусть C — кривая на X и E — такой неприводимый дивизор на X, что $C \cap E = \varnothing$. Тогда E инвариантен относительно сдвига на все точки вида $x_1 - x_2$, где $x_i \in C$.*

Доказательство. Положим $L = L(E)$. Ограничение L на C тривиально, потому что C и E не пересекаются. Поэтому ограничение расслоения T_x^*L на C для всех $x \in X$ имеет степень 0. Значит, $T_x(C)$ и E не могут пересекаться по непустому конечному множеству точек — иначе степень $T_x^*L|_C$ была бы положительна. Это означает, что для любой точки x либо $T_x(C)$ и E не пересекаются вовсе, либо $T_x(C) \subset E$. Пусть $x_1, x_2 \in C$, $y \in C$. Тогда $T_{y-x_2}(C) \cap E \ni y$. Поэтому $T_{y-x_2}(C) \subset E$, так что $y - x_2 + x_1 \in E$. Это доказывает лемму.

Пусть теперь $D = \sum n_i D_i$, где D_i неприводимы. В силу леммы каждый из дивизоров D_i инвариантен относительно сдвигов на точки вида $x_1 - x_2$, $x_i \in C$. Это противоречит (i) и доказывает импликацию (i)$\Rightarrow$(iii), чем завершается доказательство эквивалентности.

Теперь легко показать, что любое абелево многообразие X проективно. В самом деле, пусть $U \subset X$ — произвольное его аффинное открытое подмножество, $D_1, \ldots, D_t$ — компоненты дополнения $X \setminus U$ и $D = \sum_1^t D_i$ — дивизор. Покажем, что D удовлетворяет условию (i). Сделав при необходимости сдвиг, мы можем считать, что $0 \in U$. Тогда $H = \{x \in X \mid T_x^*(D) = D\}$ — замкнутая подгруппа, при всех $x \in H$ множество U инвариантно относительно T_x. Так как $0 \in U$, отсюда следует, что $H \subset U$; но группа H полна, а подмножество U аффинно, так что H конечна.

Приложение 2. *Группа точек абелева многообразия X делима, и при всех $n \geqslant 1$ группа X_n конечна.*

В самом деле, рассматривая гомоморфизм $n_X\colon X \to X$, убеждаемся, что $\dim \operatorname{Ker}(n_X) > 0$ тогда и только тогда, когда $\dim \operatorname{Im}(n_X) < \dim X$. Следовательно, для доказательства сюръективности n_X достаточно проверить конечность группы $X_n = \operatorname{Ker}(n_X)$. Обозначим через L произвольное обильное расслоение на X. Тогда $n_X^* L \cong L^{\frac{n(n+1)}{2}} \otimes (-1_X)^* L^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поскольку -1_X — автоморфизм многообразия X, расслоение $(-1_X)^* L$ также обильно, а так как $\frac{n(n+1)}{2} > 0$, $\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 0$, обильно и расслоение $n_X^* L$. Но тогда его ограничение на произвольное подмногообразие положительной размерности нетривиально. Так как ограничение $n_X^* L\,|_{\mathrm{Ker}\,(n_X)}$ тривиально, ядро $\mathrm{Ker}\,(n_X)$ должно быть конечно.

Приложение 3. Мы можем продвинуться еще дальше и вычислить порядок группы X_n в случае, когда характеристика p поля k не делит n. Напомним сначала несколько общих фактов. Пусть X, Y — полные многообразия одной и той же размерности n, и пусть f: $X \to Y$ — некоторый сюръективный морфизм. Тогда f^* превращает $k(X)$ в конечное алгебраическое расширение поля $k(Y)$. *Степенью* (соответственно *сепарабельной* и *несепарабельной степенью*) морфизма f называется тогда степень $d = [k(X) : k(Y)]$ этого расширения полей (соответственно $[k(X) : k(Y)]_s$, $[k(X) : k(Y)]_i$). Если морфизм f сепарабелен, т. е. поле $k(X)$ сепарабельно над $k(Y)$, то степень d совпадает с числом точек в прообразе $f^{-1}(y)$ для почти всех точек $y \in Y$. Если f несепарабелен, то сепарабельная степень $k(X)$ над $k(Y)$ совпадает с порядком прообраза $f^{-1}(y)$ для почти всех $y \in Y$. Фундаментальную роль для нас играет то обстоятельство, что для любых дивизоров Картье $D_1, \ldots, D_n$ на Y имеет место следующее соотношение между индексами пересечения:

$$(f^*D_1 \cdot \cdots \cdot f^*D_n)_X = d\,(D_1 \ldots D_n)_Y.$$

Пусть теперь X и Y — абелевы многообразия. Гомоморфизм f: $X \to Y$ называется *изогенией*, если он сюръективен и имеет конечное ядро. Мы только что установили, что n_X: $X \to X$ — изогения. Для всякой изогении f определена степень d, и так как порядок ядра f, $\# [\mathrm{Ker}\,(f)]$, совпадает с порядком прообраза $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$, мы находим

$$(*) \qquad \# [\mathrm{Ker}\,(f)] = \text{Сепарабельная степень } f.$$

Рассмотрим случай $f = n_X$. Пусть D — обильный симметричный дивизор на X (мы уже показали, что обильные дивизоры D существуют, а тогда $D + (-1_X)^* D$ обилен и симметричен). В силу следствия 3 тогда дивизор n_X^*D линейно эквивалентен n^2D. Поэтому, полагая $g=\dim X$, имеем

$$\text{степень}\,(n_X)\,(\overbrace{D\ \dots\ D}^{g})_X=(\overbrace{n_X^*D\dots n_X^*D}^{g})_X=n^{2g}(\overbrace{D\ \dots\ D}^{g})_X,$$

так что степень $(n_X)=n^{2g}$.

При каких условиях морфизм n_X сепарабелен? Если $p\nmid n$, по доказанному $p\nmid$(степень n_X), так что n_X сепарабелен. С другой стороны, в § 4 мы убедились, что при $p\mid n$ дифференциал $d(n_X)$, отображающий $T_{X,0}$ в $T_{X,0}$, является нулевым морфизмом. Обозначим через ω любую инвариантную дифференциальную форму на X. Форма $n_X^*\omega$, во-первых, инвариантна относительно сдвигов, и, во-вторых, обращается в нуль на касательном пространстве к X в нуле и, стало быть, тождественно равна нулю. Поскольку инвариантные диффереициалы на X порождают пучок Ω_X^1 над $\mathcal{O}_X$, они порождают $k(X)$-модуль $k(X)/k$-дифференциалов. Тем самым при $p\mid n$ индуцированное на бирациональных дифференциалах $\Omega^1_{k(X)/k}$ отображение n_X^* является тождественным нулем. Отсюда следует, что индуцированное отображение полей переводит $k(X)$ внутрь $k(X)^p$, так что несепарабельная степень p_X не меньше, чем p^g.

Мы установили, что при $p\nmid n$ $\#(X_n)=n^{2g}$. Стало быть, X_n — конечная абелева группа, период которой делит n и которая для всякого $m\mid n$ содержит в точности m^{2g} элементов периода, делящего m. Из элементарной теории групп следует, что такая группа должна быть изоморфна группе $(\mathbf{Z}\mid n\mathbf{Z})^{2g}$. С другой стороны, так как группа X_p имеет период p и порядок, равный сепарабельной степени морфизма p_X, т. е. p^i, $0\leqslant i\leqslant g$, то $X_p\cong(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^i$. Из делимости X индукцией по m следует, что для всякого $m\geqslant 1$

$$X_{p^m}\cong(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^i.$$

Собирая воедино все доказанное, находим

Предложение.

1) *Степень* $(n_X) = n^{2g}$.

2) *Морфизм* n_X *сепарабелен* $\Leftrightarrow p \nmid n$.

3) *Если* $p \nmid n$, *то* $X_n \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}$.

4) *Существует такое целое число* i, $0 \leqslant i \leqslant g$, *что для всех* $m \geqslant 1$

$$X_{p^m} \cong (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^i.$$

§ 7. Факторизация многообразий под действием конечных групп автоморфизмов

Пусть f: $X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий (над алгебраически замкнутым полем k). Он называется *этальным*, если выполнены следующие условия:

(i) f — плоский морфизм.

(ii) Для всех $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, если через $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$ обозначить максимальные идеалы колец $\mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}_y$, то $f^*(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$.

Эти условия вместе равносильны требованию, чтобы f был „формальным изоморфизмом“ в следующем смысле:

(i′) Для всех $x \in X$, $y = f(x) \in Y$ обозначим через $\hat{\mathcal{O}}_x$, $\hat{\mathcal{O}}_y$ пополнения локальных колец $\mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}_y$. Тогда естественные отображения

$$\hat{f}^*\colon \hat{\mathcal{O}}_y \to \hat{\mathcal{O}}_x$$

являются изоморфизмами (ср. Мамфорд [22]). При $k = \mathbf{C}$ это условие равносильно требованию, чтобы морфизм f был локальным изоморфизмом аналитических пространств. Главный результат этого параграфа — следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть X — алгебраическое многообразие, G — его конечная группа автоморфизмов. Допустим, что для любой точки $x \in X$ ее орбита Gx содержится в некотором открытом аффинном подмножестве X. Тогда существует пара (Y, π), состоящая* *из многообразия Y и морфизма π: $X \to Y$, со следующими свойствами*:

(i) *Как топологическое пространство* (Y, π) *является фактором* X *относительно группы* G.

(ii) *Пусть* $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ *означает подпучок* G*-инвариантов пучка* $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ *относительно действия* G *на* $\pi_*(\mathcal{O}_X)$, *которое определено в силу* (i). *Тогда естественный гомоморфизм* $\mathcal{O}_Y \to \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ *является изоморфизмом.*

Пара (Y, π) *определена этими условиями с точностью до изоморфизма. Морфизм* π *конечен, сюръективен и сепарабелен. Если* X — *аффинное многообразие, то и* Y *аффинно.*

Наконец, если G *свободно действует на* X (*т. е. если* $gx \neq x$ *для всех* $x \in X$ и $g \in G$, $g \neq e$), *то* π — *этальный морфизм.*

Доказательство. Так как условия (i) и (ii) определяют топологию и структурный пучок на Y, единственность Y тривиальна. Проблема существования сводится к доказательству того, что $Y = X/G$ (как топологическое пространство) вместе со структурным пучком $\mathcal{O}_Y = \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ является алгебраическим многообразием. Предположим сначала, что теорема (в ее полной формулировке) уже доказана для аффинных многообразий X. Для каждой точки $x \in X$ выберем аффинное открытое подмножество $U' \subset X$, содержащее Gx. Тогда $U = \bigcap_{g \in G} gU'$ — аффинное открытое подмножество X, содержащее x и G-инвариантное. Следовательно, X можно покрыть G-инвариантными аффинными открытыми подмножествами U. Каждое множество $\pi(U)$ открыто в Y и $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$, поэтому из справедливости теоремы в аффинном случае следует, что $\pi(U)$ вместе с ограничением пучка $\mathcal{O}_Y$ на него является аффинным многообразием. Но открытые подмножества $\pi(U)$ покрывают Y; поэтому теорема верна для многообразия X.

Тем самым можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$. Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Группа G действует на A по закону

$$g(f)(x) = f(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad f \in A, \quad x \in X.$$

Пусть v — порядок группы G. Для всех $f \in A$ и $1 \leqslant k \leqslant v$ обозначим через $\sigma_k(f)$ элементарную симметрическую функцию степени k от $\{g(f)\}_{g \in G}$ и положим $B' = k[\sigma_i(x_j)]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant v \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Очевидно, B' — конечно порожденная k-алгебра, содержащаяся в алгебре $B = A^G$ G-инвариантов кольца A. Но элементы x_j целы над B, потому что они удовлетворяют уравнениям

$$X^v - \sigma_1(x_j) X^{v-1} + \ldots + (-1)^v \sigma_v(x_j) = 0,$$

так что A является конечным B'-модулем. Поскольку $B' \subset B \subset A$ и B' нётерово, B также является конечным B'-модулем и, стало быть, k-алгеброй конечного типа, а A — конечный B-модуль. Положим $Y = \operatorname{Spec} B$. Это — многообразие; вложению $B \subset A$ отвечает морфизм $\pi \colon X \to Y$, который конечен и сюръективен. Пусть, далее, R — поле частных кольца A. Тогда действие G на A однозначно продолжается до действия на R. Если $a/b \in R^G$, a, $b \in A$, $b \neq 0$, то

$$a/b = a \prod_{g \neq e} g(b) \Big/ \prod_{g \in G} g(b),$$

так что $a \prod_{g \neq e} g(b) \in A^G$. Следовательно, R^G является полем частных кольца $A^G = B$. Это показывает, что R — расширение Галуа поля частных кольца B. В частности, морфизм π сепарабелен. Заметим, далее, что пучок $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ когерентен на Y, потому что он является пересечением ядер гомоморфизмов $\varphi_g \colon \pi_*(\mathcal{O}_X) \to \pi_*(\mathcal{O}_X)$, $\varphi_g(f) = gf - f$, $g \in G$. Естественный гомоморфизм $\mathcal{O}_Y \to \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ индуцирует изоморфизм модулей глобальных сечений и, следовательно, является изоморфизмом. Далее, пусть точки x, $x' \in X$ имеют разные орбиты: $Gx \neq Gx'$. Тогда существует элемент $f \in A$, такой, что $f(gx) = 1$ для всех $g \in G$, $f(gx') = 0$ для всех $g \in G$. Полагая $\varphi = \prod_{g \in G} g(f)$, получаем, что $\varphi \in B$ и $\varphi(\pi(x)) = 1$, $\varphi(\pi(x')) = 0$. Это показывает, что $\pi(x) \neq \pi(x')$. Тем самым как множество Y является факторпространством X по G. Но морфизм $\pi \colon X \to Y$

конечен, поэтому он замкнут и непрерывен, так что топология на Y совпадает с фактортопологией.

Остается проверить последнее утверждение теоремы. Пусть $x \in X$, $y = f(x)$ и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки y в кольце B. Рассматривая A как B-модуль конечного типа, построим пополнения $\hat{B}$ и $\hat{A}$ в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Тогда естественный гомоморфизм $\hat{B} \otimes_B A \to \hat{A}$ будет изоморфизмом. Кроме того, $\hat{B}$ совпадает с пополнением $\hat{\mathcal{O}}_{Y, y}$ кольца $\mathcal{O}_{Y, y}$ относительно максимального идеала. С другой стороны, простые идеалы кольца A, содержащие $\mathfrak{m}A$, являются максимальными идеалами точек gx, $g \in G$. В силу китайской теоремы об остатках существует изоморфизм

$$\hat{A} \xrightarrow{\sim} \prod_{g \in G} \hat{\mathcal{O}}_{X, gx},$$

где $\hat{\mathcal{O}}_{X, gx}$ — пополнение кольца $\mathcal{O}_{X, gx}$ относительно максимального идеала. Группа G действует на A и, следовательно, на каждом из колец, выписанных в предыдущей формуле. Действие на $\hat{B} \otimes_B A$ определяется формулой $h(b \otimes a) = b \otimes h(a)$, где $h \in G$, $b \in B$, $a \in A$. То обстоятельство, что B совпадает с кольцом инвариантов кольца A, равносильно точности последовательности B-модулей

$$0 \to B \to A \to \prod_{h \in G} A,$$

$$a \to (\ldots, h(a) - a, \ldots).$$

Так как $\hat{B}$ — плоский B-модуль, последовательность

$$0 \to \hat{B} \to \hat{B} \otimes_B A \to \prod_{h \in G} (\hat{B} \otimes_B A),$$

$$b \otimes a \to (\ldots, b \otimes (h(a) - a), \ldots)$$

также точна; следовательно, $\hat{B}$ совпадает с подкольцом G-инвариантов в $\hat{B} \otimes_B A \cong \hat{A}$. С другой стороны, действие $h \in G$ определяет изоморфизм $\hat{\mathcal{O}}_{X, x} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X, hx}$.

Если с помощью этих изоморфизмов отождествить $\prod_{g \in G} \hat{\mathcal{O}}_{X, gx}$ с $\prod_{g \in G} \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$, действие G на последнем кольце сведется к некоторой перестановке множителей: $h(\{\alpha_g\})_{g \in G} = \{\alpha_{(h^{-1}g)}\}_{g \in G}$ для всех $h \in G$ и $\{\alpha_g\}_{g \in G} \in \prod_{g \in G} \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$. Поэтому подкольцо инвариантов совпадает с диагонально вложенным кольцом $\hat{\mathcal{O}}_{X, x} \to \prod_{g \in G} \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$.

Тем самым, естественный гомоморфизм $\hat{\mathcal{O}}_{Y, y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X, x}$ является изоморфизмом, так что f в точке x является этальным морфизмом. Доказательство окончено.

Замечание. Требование, чтобы каждая G-орбита в X содержалась в аффинном открытом подмножестве, автоматически выполнено, если многообразие X квазипроективно. В самом деле, пусть X — локально замкнутое подмножество $\mathbf{P}^N$, $\overline{X}$ — его замыкание в $\mathbf{P}^N$ и x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — любое конечное множество точек в X. Всегда можно найти гиперповерхность $S \subset \mathbf{P}^N$, *содержащую* $\overline{X} \setminus X$, но не содержащую ни одной из точек x_i. Тогда дополнение $\overline{X} \setminus (\overline{X} \cap S) = X \setminus X \cap S$ аффинно, открыто в X и содержит все точки x_i.

В ситуации, описанной в формулировке теоремы, многообразие Y называется *фактором* X по G и обозначается X/G.

Пусть теперь G действует на X, (Y, π) — фактормногообразие и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на Y. Поскольку для любого элемента $g \in G$ треугольная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна, существует естественный автоморфизм $g^*\colon \pi^*(\mathcal{F}) \to \pi^*(\mathcal{F})$, совместимый с действием g на X. Это означает, что G действует на $\pi^*(\mathcal{F})$ согласованно с действием на X. Вообще, когерентным *G-пучком* на X мы будем называть когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль, на котором группа G действует согласованно с действием на X.

Предложение 2. *Пусть G действует на X свободно, и пусть $Y = X/G$. Тогда функтор $\mathcal{F} \to \pi^*(\mathcal{F})$ определяет эквивалентность категории когерентных $\mathcal{O}_Y$-модулей и категории когерентных G-пучков на X. Обратный функтор имеет вид $\mathcal{G} \to \pi_*(\mathcal{G})^G$. Локально свободные пучки переходят в локально свободные пучки того же ранга.*

Доказательство. Существуют естественные гомоморфизмы

$$S(\mathcal{F})\colon \mathcal{F} \to \pi_*(\pi^*(\mathcal{F}))^G, \quad \mathcal{F} \text{ — пучок на } Y;$$

$$T(\mathcal{G})\colon \pi^*(\pi_*(\mathcal{G})^G) \to \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \text{ — } G\text{-пучок на } X.$$

Покажем, что S и T — изоморфизмы. Снова можно считать, что многообразия X и Y аффинные: $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $B = A^G$. Нужно установить, что естественные отображения

$$S(M)\colon M \to (M \otimes_B A)^G, \qquad M \text{ — } B\text{-модуль},$$

$$T(N)\colon N^G \otimes_B A \to N, \qquad N \text{ — } G\text{-}A\text{-модуль}$$

являются изоморфизмами. Но для любого B-модуля M композиция

$$M \otimes_B A \xrightarrow{S(M) \otimes 1_A} (M \otimes_B A)^G \otimes_B A \xrightarrow{T(M \otimes_B A)} M \otimes_B A$$

является тождественным отображением. Так как кольцо A является строго плоским над B, отображение $S(M) \otimes 1_A$ будет изоморфизмом в том и только в том случае, когда $S(M)$ — изоморфизм. Поэтому достаточно доказать, что все отображения T являются изоморфизмами.

В случае, когда кольцо A изоморфно произведению $B \times \ldots \times B$, а G действует на это произведение как просто транзитивная группа перестановок, совершенно очевидно, что $T(N)$ является изоморфизмом для всякого G-A-модуля N. С другой стороны, общее утверждение можно свести к этому случаю, переходя к пополнениям. Пусть $x \in X$, $y = f(x)$ и $\widehat{B} = \widehat{\mathcal{O}}_{Y, y}$. Чтобы доказать, что $T(N)$ — изоморфизм, достаточно проверить, что отображение

$$[N^G \underset{B}{\otimes} A] \underset{B}{\otimes} \widehat{B} \xrightarrow{T(N)\otimes 1_{\widehat{B}}} N \underset{B}{\otimes} \widehat{B}$$

является изоморфизмом для любой точки $y \in Y$. Но так как алгебра $\widehat{B}$ плоска над B, подмодуль G-инвариантов в $N \underset{B}{\otimes} B$ совпадает с $N^G \underset{B}{\otimes} \widehat{B}$ (ср. доказательство теоремы). Это дает диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
[N^G \underset{B}{\otimes} A] \underset{B}{\otimes} \widehat{B} & \xrightarrow{T(N)\otimes 1_{\widehat{B}}} & N \underset{B}{\otimes} \widehat{B} \\
\wr\| & & \| \\
[N^G \underset{B}{\otimes} \widehat{B}] \underset{\widehat{B}}{\otimes} (A \underset{B}{\otimes} \widehat{B}) & & \\
\wr\| & & \\
(N \underset{B}{\otimes} \widehat{B})^G \underset{\widehat{B}}{\otimes} (A \underset{B}{\otimes} \widehat{B}) & \xrightarrow{T(N \underset{B}{\otimes} \widehat{B})} & N \underset{B}{\otimes} \widehat{B}.
\end{array}$$

Так как кольцо $A \underset{B}{\otimes} \widehat{B}$ изоморфно $\prod_{g \in G} \widehat{\mathcal{O}}_{X, g(x)}$ и, значит, $\widehat{B} \times \ldots \times \widehat{B}$, отображение $T(N \underset{B}{\otimes} \widehat{B})$ является изоморфизмом, что доказывает предложение 2.

Теперь мы подробнее изучим случай, когда X — полное многообразие, а G действует на X свободно. Обозначим через $\widehat{G}$ группу $\mathrm{Hom}(G, k^*)$ характеров G со значениями в k^*.

Предложение 3. *В принятых соглашениях для любого характера α: $G \to k^*$ введем обозначение*

$$\mathcal{L}_\alpha = \{a \in \pi_*(\mathcal{O}_X) \mid g(a) = \alpha(g)\, a \text{ для всех } g \in G\}.$$

Тогда $\mathcal{L}_\alpha$ — обратимый пучок на Y. Умножение в пучке $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{L}_\beta \to \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$. Отображение $\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$ определяет изоморфизм

$$\widehat{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X].$$

Доказательство. Согласно предложению 2, $\operatorname{Ker}[\operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X]$ можно отождествить (как множество) с множеством действий G на тривиальном пучке $\mathcal{O}_X$, согласованных с действием G на X. Для любого такого действия образ единичного сечения $\mathcal{O}_X$ под действием $g \in G$ является сечением пучка $\mathcal{O}_X$, которое нигде не обращается в нуль и потому является ненулевым скаляром $\alpha^{-1}(g) \in k^*$ в силу полноты X. Очевидно, отображение α: $G \to k^*$ является гомоморфизмом. Наоборот, для любого такого гомоморфизма можно определить действие группы G на $\mathcal{O}_X$, совместимое с действием на базе, положив $g(f) = \alpha^{-1}(g)(fg^{-1})$. Это определяет биекцию $\hat{G} \rightleftarrows \operatorname{Ker}[\operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X]$. Легко проверить, что она является также гомоморфизмом групп.

Пусть теперь задано действие σ группы G на $\mathcal{O}_X$, отвечающее характеру α. Обозначим естественное действие G на $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ так: $(g, f) \to g(f) = fg^{-1}$. Тогда G действует на $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ в соответствии с σ по формуле

$$\sigma(g) f = \alpha^{-1}(g) g(f).$$

Так как соответствующий обратимый пучок $\mathscr{L}_\alpha$ является подпучком инвариантов в $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ относительно этого действия, мы получаем

$$\mathscr{L}_\alpha \cong \{a \in \pi_*(\mathcal{O}_X) \mid g(a) = \alpha(g) a\}.$$

Рассматривая $\mathscr{L}_\alpha$ как подпучки пучка $\pi_*(\mathcal{O}_X)$, находим, очевидно, что $\mathscr{L}_\alpha \mathscr{L}_\beta \subseteq \mathscr{L}_{\alpha+\beta}$. С другой стороны, нигде не обращающееся в нуль над некоторым открытым множеством сечение обратимого пучка на Y индуцирует также нигде не обращающееся в нуль сечение прообраза этого пучка над прообразом этого множества. Поэтому любое образующее сечение $f \in \mathscr{L}_\alpha(U) \subset \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ имеет обратное сечение f^{-1} в $\pi_*(\mathcal{O}_X)(U)$. Это показывает, что отображение $\mathscr{L}_\alpha \otimes \mathscr{L}_\beta \to \mathscr{L}_{\alpha+\beta}$ сюръективно. Поскольку оба пучка обратимы, это изоморфизм.

Замечания. 1) Пусть порядок группы G взаимно прост с характеристикой. Тогда представления G в k-пространствах $\pi_*(\mathcal{O}_X)(V)$ для любого открытого множества $V \subset Y$ вполне приводимы. Пользуясь этим, нетрудно проверить, что

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{E},$$

где представление группы G в любом из векторных пространств $\mathcal{E}(V)$ не содержит одномерных подпредставлений. Если группа G к тому же коммутативна, то

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} \mathcal{L}_\alpha.$$

Так как $\pi_*(\pi^*(\mathcal{F})) \cong \mathcal{F} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \pi_*(\mathcal{O})_X$ для всякого $\mathcal{O}_Y$-модуля $\mathcal{F}$, отсюда вытекает

Следствие. *Если порядок группы G взаимно прост с характеристикой, то всякий когерентный $\mathcal{O}_Y$-модуль $\mathcal{F}$ выделяется прямым слагаемым из $\pi_*(\pi^*(\mathcal{F}))$.*

Применим теперь полученные результаты к абелевым многообразиям. Главное следствие несколько напоминает основную теорему теории Галуа.

Теорема 4. *Пусть X — абелево многообразие. Существует взаимно однозначное соответствие между двумя множествами объектов:*

а) *конечные подгруппы $K \subset X$,*

б) *сепарабельные изогении $f\colon X \to Y$. При этом две изогении $f_1\colon X \to Y_1$, $f_2\colon X \to Y_2$ отождествляются, если существует такой изоморфизм $h\colon Y_1 \to Y_2$, что $f_2 = hf_1$.*

Это соответствие определяется так: $K = \operatorname{Ker}(f)$, $Y = X/K$.

Доказательство. Начнем с конечной подгруппы $K \subset X$. Она свободно действует на X сдвигами, так что можно построить фактор $(X/K, f)$. Отображение f будет этальным сюръективным конечным морфизмом $X \to X/K$. С другой стороны, множество X/K является фактором абстрактной группы X по подгруппе K и потому само имеет групповую структуру. Этот групповой закон является морфизмом. Для доказательства рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X/K \times X/K \arrow[r, "n"] & X/K, \end{tikzcd}$$

в которой m — групповой закон на X (морфизм), а n — групповой закон на X/K (пока просто отображение). Нетрудно проверить, что $X/K \times X/K = X \times X/K \times K$. С другой стороны, морфизм fm: $X \times X \to X/K$ тривиализирует действие $K \times K$. Поэтому его можно провести через $X \times X/K \times K$, откуда и следует, что n — морфизм. Аналогично проверяется, что обращение в X/K является морфизмом. Следовательно, X/K — алгебраическая группа. Наконец, многообразие X/K полно, ибо оно является образом полного многообразия. Тем самым X/K — абелево многообразие, а f: $X \to X/K$ — сепарабельная изогения. Очевидно, ядро f совпадает с K.

Наоборот, пусть f: $X \to Y$ — некоторая сепарабельная изогения. Обозначим через K ее ядро и, как выше, построим новую сепарабельную изогению g: $X \to X/K$. Так как f тривиализирует действия K, существует морфизм h, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/K \arrow[rr, "h"'] & & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна. Но отображение h, очевидно, биективно и сепарабельно в силу сепарабельности f. Поэтому h бирационально и, следовательно, является изоморфизмом по основной теореме Зариского.

Следствие 1. *Любая сепарабельная изогения f: $X \to Y$ является этальным морфизмом.*

Следствие 2. *Пусть f: $X \to Y$ — изогения порядка, взаимно простого с p. Тогда ядро f и ядро гомоморфизма f^*:* $\mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X$ *являются двойственными конечными абелевыми группами.*

Доказательство. Применить предложение 3 и теорему 4.

§ 8. Двойственное абелево многообразие: случай характеристики 0

(Предположение о характеристике будет использовано лишь в конце параграфа.)

Определение. Символом $\mathrm{Pic}^\circ X$ обозначается *подгруппа группы* $\mathrm{Pic}\, X$, *состоящая из классов расслоений* L, *для которых* φ_L — *нулевой гомоморфизм.*

По теореме о квадрате *образ* гомоморфизма φ_L всегда принадлежит $\mathrm{Pic}^\circ X$, что дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Pic}^\circ X \to \mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Hom}\,(X,\ \mathrm{Pic}^\circ X),$$
$$L \to \varphi_L.$$

Главная цель этого параграфа — показать, что в случае характеристики 0 группа $\mathrm{Pic}^\circ X$ имеет естественную структуру абелева многообразия $\hat{X}$, которое называется двойственным к X. Начнем с нескольких общих замечаний о $\mathrm{Pic}^\circ X$:

(i) $L \in \mathrm{Pic}^\circ X \Leftrightarrow T_x^* L \cong L$ *для всех* $x \in X \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^* L \cong p_1^* L \otimes p_2^* L$ *на* $X \times X$.

Доказательство. По теореме о качелях расслоение $m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$ тривиально в том и только том случае, когда оно тривиально на $X \times \{a\}$ и $\{0\} \times X$. Но на втором слое оно всегда тривиально, а его ограничение на $X \times \{a\}$ изоморфно $T_a^* L \otimes L^{-1}$.

(ii) *Если* $L \in \mathrm{Pic}^\circ X$, *то для любой схемы* S *и для любых морфизмов* f, g: $S \rightrightarrows X$ *имеем* $(fg)^* L \cong f^* L \otimes g^* L$.

Доказательство. Для доказательства следует рассмотреть последний изоморфизм в (i) и перенести его на S с помощью морфизма (f, g): $S \to X \times X$.

(iii) *Если* $L \in \mathrm{Pic}^\circ X$, *то* $n_X^* L \cong L^n$.

Доказательство. Индукция по n с использованием (ii).

(iv) *Для любого* $L \in \operatorname{Pic} X$ *имеем*

$$n_X^* L \otimes L^{-n^2} \in \operatorname{Pic}^\circ X.$$

Доказательство. В самом деле, в силу результатов § 6 $n_X^* L \cong L^{n^2} \otimes \left[L \otimes (-1)_X^* L^{-1}\right]^{\frac{n-n^2}{2}}$. Тем самым, достаточно проверить, что $L \otimes (-1_X)^* L^{-1} \in \operatorname{Pic}^\circ X$. Применяя сдвиг на x, находим, что

$$\begin{aligned} T_x^* \left(L \otimes (-1_X)^* L^{-1}\right) &\cong T_x^* L \otimes (-1_X)^* T_{-x}^* L^{-1} \cong \\ &\cong T_x^* L \otimes (-1_X)^* \left[L \otimes T_{-x}^* L^{-1}\right] \otimes (-1_X)^* L^{-1} \cong \\ &\cong T_x^* L \otimes L^{-1} \otimes T_{-x}^* L \otimes (-1_X)^* L^{-1} \cong \\ &\cong L \otimes (-1_X)^* L^{-1} \end{aligned}$$

(применить (iii) к пучку в квадратных скобках, который принадлежит $\operatorname{Pic}^\circ X$).

(v) *Если* $L \in \operatorname{Pic} X$ *имеет конечный порядок, то* $L \in \operatorname{Pic}^\circ X$.

Доказательство. Из тривиальности L^n следует, что $0 = \varphi_{L^n}(x) = n\varphi_L(x) = \varphi_L(nx)$ для всех $x \in X$. Так как группа X делима, то $\varphi_L \equiv 0$.

(vi) *Пусть S — произвольное многообразие и L — линейное расслоение на $X \times S$. Тогда, полагая* $L_s = L|_{X \times \{s\}}$, *получаем, что*

$$L_{s_1} \otimes L_{s_0}^{-1} \in \operatorname{Pic}^\circ X \qquad (s_0,\ s_1 \in S).$$

Доказательство. Заменив S подходящим открытым множеством из достаточно мелкого покрытия многообразия S, мы можем считать, что $L|_{\{0\} \times S}$ тривиально. Далее, заменив L на $L \otimes p_1^*(L_{s_0}^{-1})$, мы можем принять, что расслоение L_{s_0} тривиально. Нужно установить, что тогда $L_s \in \operatorname{Pic}^\circ X$ при всех $s \in S$. Покажем, что расслоение $m^*(L_s) \otimes p_1^*(L_s^{-1}) \otimes p_2^*(L_s^{-1})$ тривиально для всех s. В самом деле, построим расслоение M на $X \times X \times S$, положив

$$M = \mu^* L \otimes p_{13}^* L^{-1} \otimes p_{23}^* L^{-1},$$
$$\mu(x, y, s) = (x + y, s);$$
$$p_{13}(x, y, s) = (x, s),$$
$$p_{23}(x, y, s) = (y, s).$$

Его ограничения на $X \times \{0\} \times S$, $\{0\} \times X \times S$ и $X \times X \times (s_0)$ тривиальны. Поэтому в силу теоремы о кубе M тривиально. Но его ограничение на $X \times X \times (s)$ изоморфно $m^*(L_s) \otimes p_1^*(L_s^{-1}) \otimes p_2^*(L_s^{-1})$, что доказывает требуемое.

(vii) *Если $L \in \mathrm{Pic}^\circ X$ и L нетривиально, то $H^i(X, \mathscr{L}) = (0)$ для всех i.*

Доказательство. Пусть $H^0(\mathscr{L}) \neq 0$. Тогда $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ для некоторого неотрицательного дивизора D, т. е. $\mathscr{L}^{-1} \cong (-1_X)^* \mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X((-1_X)^* D)$ и $\mathcal{O}_X \cong \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X(D + (-1_X)^* D)$. Следовательно, $D + (-1_X)^* D = 0$, откуда $D = 0$ и $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_X$ вопреки предположению. Стало быть, $H^0(\mathscr{L}) = (0)$. Пусть теперь k — наименьшее целое число, такое, что $H^k(\mathscr{L}) \neq (0)$. Обозначим через s_1: $X \to X \times X$ отображение $s_1(x) = (x, 0)$. Пользуясь тем, что $m^* \mathscr{L} \cong p_1^* \mathscr{L} \otimes p_2^* \mathscr{L}$, и формулой Кюннета, получаем диаграмму

$$X \xrightarrow{s_1} X \times X \xrightarrow{m} X,$$

$$\begin{array}{ccccc} H^k(x, \mathscr{L}) & \xrightarrow{s_1} & H^k(X \times X, m^* \mathscr{L}) & \xleftarrow{m^*} & H^k(X, \mathscr{L}) \\ & & \wr\| & & \\ & & H^k(X \times X, p_1^* \mathscr{L} \otimes p_2^* \mathscr{L}) & & \\ & & \wr\| & & \\ & & \sum\limits_{i+j=k} H^i(X, \mathscr{L}) \otimes H^j(X, \mathscr{L}). & & \end{array}$$

Поскольку $ms_1 = 1_X$, композиция отображений в первой строке тождественна. Но если $i + j = k \geqslant 1$, то либо $i < k$, либо $j < k$, так что во всех случаях

$$H^i(X, \mathscr{L}) \otimes H^j(X, \mathscr{L}) = (0).$$

Поскольку тождественное отображение $H^k(X, \mathscr{L}) \to \to H^k(X, \mathscr{L})$ можно провести через нулевую группу, то $H^k(X, \mathscr{L}) = (0)$ вопреки предположению.

Мы подошли теперь к решающему рассуждению в теории Pic°.

Теорема 1. *Пусть L — обильное расслоение и $M \in \mathrm{Pic}^\circ X$. Тогда для некоторой точки $x \in X$*

$$M \cong T_x^* L \otimes L^{-1}.$$

Иначе говоря, отображение $\varphi_L \colon X \to \mathrm{Pic}^\circ X$ сюръективно.

Доказательство. Основная идея состоит в рассмотрении когомологий расслоения

$$K = m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* (L^{-1} \otimes M^{-1})$$

на $X \times X$. К ним сходятся две спектральные последовательности Лере, связанные с двумя проекциями $X \times X$ на X:

$$H^l(X, R^k p_{1*}(\mathscr{K})) \Rightarrow H^{k+l}(X \times X, \mathscr{K}), \tag{1}$$

$$H^l(X, R^k p_{2*}(\mathscr{K})) \Rightarrow H^{k+l}(X \times X, \mathscr{K}). \tag{2}$$

Ограничения K на слои $\{x\} \times X$ и $X \times \{x\}$ проекций p_1, p_2 имеют вид

$$K|_{\{x\} \times X} \cong T_x^* L \otimes L^{-1} \otimes M^{-1},$$

$$K|_{X \times \{x\}} \cong T_x^* L \otimes L^{-1}.$$

Следовательно, если $M \not\cong T_x^* L \otimes L^{-1}$ для всех x, ограничение $K|_{\{x\} \times X}$ должно быть нетривиальным элементом из Pic° для всех x. В силу свойства (vii) это означает, что все группы когомологий такого ограничения тривиальны. Поэтому $R^k p_{1*}(\mathscr{K}) = (0)$ при всех k в силу следствия 2 § 5. Спектральная последовательность (1) показывает тогда, что $H^k(X \times X, \mathscr{K}) = = (0)$.

Воспользуемся теперь второй спектральной последовательностью. Так как при $x \notin K(L)$ расслоение $T_x^* L \otimes L^{-1}$ нетривиально и принадлежит Pic°, находим, что

$$\operatorname{supp}(R^k p_{2*}(\mathscr{K})) \subset K(L).$$

Поскольку $K(L)$ — конечное множество, спектральная последовательность (2) вырождается:

$$\bigoplus_{x \in K(L)} R^k p_{2*}(\mathscr{K})_x \cong H^k(X \times X,\ \mathscr{K}).$$

Но $H^k(X \times X,\ \mathscr{K}) = (0)$, поэтому $R^k p_{2*}(\mathscr{K}) = (0)$. Тем самым $H^k(X,\ \mathscr{K}|_{X \times \{x\}}) = (0)$ для всех x по следствию 4 § 5. Это, однако, невозможно: $K|_{X \times \{0\}}$ — тривиальное расслоение, так что оно имеет ненулевую группу сечений. Полученное противоречие доказывает теорему.

Другое доказательство несколько более слабого утверждения можно найти в книге Ленга [17]. Важная теорема, установленная нами, показывает, что как абстрактная группа $\operatorname{Pic}^\circ X$ изоморфна абелеву многообразию $X/K(L)$. Пусть вообще $\hat{X}$ — некоторое абелево многообразие, изоморфное $\operatorname{Pic}^\circ X$ как группа; какие его естественные свойства могут охарактеризовать однозначно эту дополнительную структуру на $\operatorname{Pic}^\circ X$?

(a) На $X \times \hat{X}$ должно быть задано линейное расслоение P, *„расслоение Пикара“*, такое, что для всех $\alpha \in \hat{X}$ его ограничение P_α на $X \times \{\alpha\}$ представляет элемент $\operatorname{Pic}^\circ X$, отвечающий α при выбранном изоморфизме $\operatorname{Pic}^\circ(X) \cong \hat{X}$. Кроме того, ограничение, $P|_{\{0\} \times \hat{X}}$ должно быть тривиально (эти условия определяют P однозначно по теореме о качелях).

(b) Пусть задано любое нормальное многообразие S и линейное расслоение K на $X \times S$ со следующими свойствами: (i) $K_s = K|_{X \times \{s\}}$ принадлежит $\operatorname{Pic}^\circ X$ для одной и, значит, для всех точек $s \in S$; (ii) ограничение $K|_{\{0\} \times S}$ тривиально. Тогда однозначно определенное отображение

$$f\colon S \to X,$$

для которого $K_s \cong P_{f(s)}$, должно быть морфизмом, а K должно быть изоморфно $(1_X \times f)^* P$.

Свойства (a) и (b) вместе однозначно определяют $\widehat{X}$ и P с точностью до канонического изоморфизма. Задача состоит в построении таких $\widehat{X}$ и P. С этой целью зафиксируем обильное расслоение L на X и, пользуясь результатом теоремы, возьмем в качестве $\widehat{X}$ фактор $X/K(L)$, построенный в § 7. Пусть $\pi\colon X \to \widehat{X}$ — соответствующий морфизм. Для построения P используем предложение 2 § 7. Мы хотим, чтобы расслоение $(1_X \times \pi)^* P$ было изоморфно $K = m^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes \otimes p_2^*L^{-1}$ на $X \times X$ (это необходимо: применим (b) к случаю $S = X$, $K = m^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes p_2^*L^{-1}$. Тогда $f = \pi$, так что $K \cong (1_X \times \pi)^*P$). Согласно предложению 2, мы должны поднять действие группы $\operatorname{Ker}(1_X \times \pi) = (0) \times K(L)$ сдвигом на $X \times X$ до некоторого ее действия на расслоение K. Вычислим сначала $T^*_{(0,a)}K$ для любой точки $a \in K(L)$:

$$\begin{aligned} T^*_{(0,a)}K &\cong T^*_{(0,a)}m^*L \otimes T^*_{(0,a)}p_1^*L^{-1} \otimes T^*_{(0,a)}p_2^*L^{-1} \cong \\ &\cong m^*T_a^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes p_2^*T_a^*L^{-1} \cong \\ &\cong m^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes p_2^*L^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому существует автоморфизм $\varphi_a\colon K \to K$, продолжающий автоморфизм $T_{(0,a)}\colon X \times X \to X \times X$ базы. Кроме того, каждый из автоморфизмов φ_a можно умножить на любой скаляр, так что нет оснований ожидать, что равенство $\varphi_a\varphi_b = \varphi_{a+b}$ будет справедливо, если φ_a выбраны как попало. Пусть, однако, $L^{-1}(0)$ — слой расслоения L^{-1} над нулем. Заметим, что тогда существует *канонический* изоморфизм:

$$\begin{aligned} K\,|_{\{0\}\times X} &\cong m^*L\,|_{\{0\}\times X} \otimes p_1^*L^{-1}\big|_{\{0\}\times X} \otimes p_2^*L^{-1}\big|_{\{0\}\times X} \cong \\ &\cong L \otimes \begin{pmatrix} \text{тривиальное расслоение} \\ L^{-1}(0) \times X \end{pmatrix} \otimes L^{-1} \cong L^{-1}(0) \times X. \end{aligned}$$

Потребуем теперь, чтобы автоморфизм φ_a расслоения K при ограничении на $\{0\} \times X$ индуцировал отображение

$$L^{-1}(0) \times X \to L^{-1}(0) \times X,$$
$$(\lambda, x) \to (\lambda, x + a).$$

Очевидно, такой φ_a существует и определен однозначно. Кроме того, на ограничениях верны тождества $\varphi_a\varphi_b = \varphi_{a+b}$, стало быть, они верны на всем $X \times X$. Определив таким образом действие $\operatorname{Ker}(1_X \times \pi)$ на K, построим расслоение P на $X \times \hat{X}$ со свойством $(1_X \times \pi)^*_\cdot P \cong K$.

Заметим прежде всего, что для любой точки $\alpha \in \hat{X}$, $\alpha = \pi(x)$, выполняются соотношения

$$P_\alpha \overset{\text{def}}{=} P\,|_{X+\{\alpha\}} \cong \pi^*(P)\,|_{X \times \{x\}} \cong T_x^* L \otimes L^{-1},$$

так что P_α представляет элемент $\varphi_L(x) \in \operatorname{Pic}^\circ X$. Поэтому первая часть требования (а) будет выполнена, если $\hat{X}$ отождествить с $\operatorname{Pic}^\circ X$, так чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Pic}^\circ X \arrow[dd, equal] \\ X \arrow[ur, "\varphi_L"] \arrow[dr, "\pi"'] & \\ & \hat{X} \end{tikzcd}$$

была коммутативной. Далее, $P\,|_{\{0\} \times \hat{X}}$ будет фактором $K\,|_{\{0\} \times X}$ по $\operatorname{Ker}(\pi)$, т. е. фактором $L^{-1}(0) \times X$ относительно действия $K(L)$, описанного выше. Следовательно, $P_{\{0\} \times \hat{X}} \cong L^{-1}(0) \times X$ — тривиальное расслоение. Значит, и вторая часть требования (а) выполиена.

Для проверки условия (b) рассмотрим некоторые S и K и построим на $X \times S \times \hat{X}$ расслоение $E = p_{12}^* K \otimes p_{13}^* P^{-1}$. Тогда $E\,|_{X \times \{\alpha,\, s\}} \cong K_s \otimes P_\alpha^{-1}$ и подмножество

$$\Gamma = \{(s, \alpha) \mid E\,|_{X \times \{s,\, \alpha\}} \text{ тривиально}\} \subset S \times X$$

замкнуто в топологии Зариского на $S \times X$. Но ограничение $E\,|_{X \times (s,\, \alpha)}$ тривиально в том и только в том случае, когда $K_s \cong P_\alpha$. Поэтому Γ — это график теоретико-множественного отображения f. В частности, проекция $\Gamma \to S$ биективна. Вспомним теперь, что характеристика равна нулю [1]). Поэтому Γ и S — бирационально эквивалентные многообразия; из нормальности S тогда следует, что проекция $\Gamma \to S$ является изоморфизмом в силу основной теоремы Зариского. Следовательно, Γ — график некоторого морфизма, т. е. отображение f является морфизмом. Последнее утверждение в (b) следует из теоремы о качелях.

Замечания. 1) Для *любого* линейного расслоения L на X отображение φ_L: $X \to \hat{X}$ является морфизмом. Это следует из свойства универсальности b), примененного к расслоению $m^*(L) \otimes p_1^*(L^{-1}) \otimes p_2^*(L^{-1})$ на $X \times X$.

2) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — гомоморфизм абелевых многообразий. Тогда индуцированное отображение $\operatorname{Pic} Y \to \to \operatorname{Pic} X$ переводит отображение $\operatorname{Pic}^\circ Y$ в $\operatorname{Pic}^\circ X$. Тем самым, определено естественное отображение $\hat{f}$: $\hat{Y} \to \hat{X}$; оно является морфизмом. В самом деле, пусть Q — расслоение Пуанкаре на $Y \times \hat{Y}$. Тогда $(f \times 1)^*(Q)$ — линейное расслоение на $X \times \hat{Y}$, такое, что для любой точки $\hat{y} \in \hat{Y}$ расслоение $(f \times 1_{\hat{Y}})^* Q|_{X \times \{\hat{y}\}}$ отвечает точке $f^*(\hat{y}) \in \operatorname{Pic}^\circ X$. Следовательно, по свойству универсальности $\hat{f}$: $\hat{Y} \to \hat{X}$ является морфизмом.

3) Пусть f: $X \to Y$ — некоторая изогения. Тогда и морфизм $\hat{f}$: $\hat{Y} \to \hat{X}$ является изогенией, и ядра $\operatorname{Ker}(f)$ и $\operatorname{Ker}(\hat{f})$ канонически двойственны (как конечные абелевы группы).

Доказательство. В § 7 было установлено, что ядра $\operatorname{Ker}(f)$ и $\operatorname{Ker}(f^*$: $\operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X)$ двойственны. Пусть $\hat{y} \in \operatorname{Pic} Y$ — такая точка, что $f^*(\hat{y}) = 0$; тогда

---

[1]) Это единственное место, где используется характеристика! Тем не менее оно очень существенно. Многообразие $\hat{X}$, которое мы построили, могло бы оказаться „неправильным" в характеристике p.

она имеет конечный порядок и, значит, $\mathcal{Y} \in \mathrm{Pic}^\circ Y$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(f^*\colon \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X) = \mathrm{Ker}(\widehat{f})$. Наконец, поскольку $\dim \widehat{X} = \dim X = \dim Y = \dim \widehat{Y}$, $\widehat{f}$ является изогенией.

Последнее обстоятельство, которое мы хотим отметить, состоит в том, что отношение между X и $\widehat{X}$ на самом деле *симметрично*, подобно отношению между двумя векторными пространствами, связанными невырожденным билинейным спариванием. Вот точная формулировка:

Определение. Пусть X, Y — абелевы многообразия. *Дивизорным соответствием* между X и Y называется любое линейное расслоение Q на $X \times Y$, ограничения которого на $\{0\} \times Y$ и $X \times \{0\}$ тривиальны.

Предложение 2. *Пусть X, Y — абелевы многообразия одинаковой размерности и Q — дивизорное соответствие между X и Y. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Если расслоение $Q|_{\{x\}\times Y}$ тривиально, то $x = 0$.*

(2) *Если расслоение $Q|_{X\times\{y\}}$ тривиально, то $y = 0$.*

Если эти условия выполнены, то $X \cong \widehat{Y}$ и Q изоморфно расслоению Пуанкаре P_Y для Y; кроме того, $Y \cong \widehat{X}$ и Q изоморфно расслоению Пуанкаре P_X для X.

Доказательство. По симметрии достаточно вывести (2) из (1). Если выполнено условие (1), существует такой инъективный морфизм $\varphi\colon X \to \widehat{Y}$, что $Q \cong (\varphi \times 1_X)^* P_Y$, где P_Y — расслоение Пуанкаре на $\widehat{Y} \times Y$. Поскольку $\dim X = \dim \widehat{Y}$ и φ инъективен, он также сюръективен. Отсюда следует, что φ — изоморфизм, потому что характеристика равна нулю. Тем самым $X \cong \widehat{Y}$.

Пусть теперь $\psi\colon Y \to \widehat{X}$ — такой морфизм, что $(1_X \times \psi)^* P_X = Q$, где P_X — расслоение Пуанкаре на $X \times \widehat{X}$. Для доказательства утверждения (2) следует показать, что ψ инъективен. В противном случае можно найти конечную подгруппу $K \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, $K \neq (0)$ и представить ψ в виде композиции $Y \xrightarrow{\eta} Y/K \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widehat{X}$, где η — естественный гомоморфизм. Обозначая через L линейное расслоение $(1_X \times \bar{\psi})^* P_X$ на $X \times Y/K$, получаем поэтому, что $Q \cong (1_X \times \eta)^* (L)$. Но L индуцирует некоторый гомоморфизм α: $X \to \widehat{(Y/K)}$, и изоморфизм $Q \cong (1_X \times \eta)^* (L)$ означает, что композиция $X \xrightarrow{\alpha} \widehat{(Y/K)} \xrightarrow{\hat{\eta}} \hat{Y}$ совпадает с гомоморфизмом, отвечающим расслоению Q. Следовательно, эта композиция является изоморфизмом. Поэтому α — инъективное отображение, а так как $\dim X = \dim \widehat{(Y/K)}$, α и $\hat{\eta}$ — изоморфизмы. С другой стороны, $\hat{\eta}$ имеет нетривиальное ядро, двойственное к K. Это противоречие доказывает инъективность ψ.

§ 9. Случай $k = \mathbf{C}$

В этом параграфе мы сравним методы первой и второй главы.

С этой целью будем работать над основным полем $k = \mathbf{C}$. Пусть $X = V/U$ (V — комплексное векторное пространство, U — некоторая решетка) — абелево многообразие над $\mathbf{C}$. Напомним, что всякое линейное расслоение над X изоморфно расслоению вида $L(H, \alpha)$, где H — однозначно определенная эрмитова форма на V, такая, что $E = \operatorname{Im} H$ принимает целые значения на $U \times U$, а α: $U \to \mathbf{C}_1^*$ — однозначно определенное отображение, удовлетворяющее тождеству

$$\frac{\alpha(u_1 + u_2)}{\alpha(u_1)\,\alpha(u_2)} = e^{i\pi E(u_1, u_2)}, \quad u_1, u_2 \in U.$$

Расслоение $L(H, \alpha)$ по определению является факторпространством $(\mathbf{C} \times V)/U$ относительно действия

$$\varphi_u(\lambda, z) = \left(\lambda\alpha(u)\, e^{\pi H(z, u) + \frac{\pi}{2} H(u, u)},\ z + u\right).$$

Мы займемся двумя задачами:

(A) Вычислим $T^*_{\pi(x)}(L(H, \alpha))$, $x \in V$, явно и тем самым дадим аналитическое описание отображения $\varphi_{L(H, \alpha)}$.

(B) Опишем дивизорные соответствия в терминах расслоений $L(H, \alpha)$ и тем самым вычислим $\widehat{X}$ аналитически.

Задача (A). Чтобы яснее представить себе положение дел, полезно несколько обобщить постановку вопроса. Пусть некоторая дискретная группа U действует свободно и дискретно на V_1 и V_2. Пусть T: $V_1 \to V_2$ — некоторый U-морфизм, $X_i = V_i/U$ и $\overline{T}$: $X_1 \to X_2$ — отображение, индуцированное T. Определим линейное действие U на $\mathbf{C} \times V_2$, положив

$$\varphi_u(\lambda, z) = (\lambda e_u(z), u(z)), \quad z \in V_2, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad u \in U,$$

где $e_u(z)$ — мультипликативный коцикл

$$e_{u_1+u_2}(z) = e_{u_1}(u_2(z))\, e_{u_2}(z).$$

Положим $L_2 = (\mathbf{C} \times V_2)/U$. Линейное расслоение $L_1 = \overline{T}^*(L_2)$ описывается следующим образом:

$$L_1 = X_1 \underset{X_2}{\times} L_2 \cong [V_1 \underset{V_2}{\times} (\mathbf{C} \times V_2)]/U,$$

где U действует на оба множителя. Иначе говоря, $L_1 \cong (\mathbf{C} \times V_1)/U$ относительно действия

$$\varphi_u(\lambda, z) = (\lambda e_u(Tz), u(z)), \quad z \in V_1, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \ u \in U.$$

Может оказаться, что коцикл $\{e_u\}$ нормализован каким-нибудь образом и имеет специальный вид, которого не имеет коцикл $\{e_u T\}$. Тогда можно подействовать на него автоморфизмом многообразия $\mathbf{C} \times V_1$:

$$\mathbf{C} \times V_1 \to \mathbf{C} \times V_1,$$
$$(\lambda, z) \to (\lambda g(z), z),$$

и, заново вычисляя действие U,

$$\varphi_u(\lambda, z) = \left(\lambda e_u(Tz)\, g(u(z))\, g(z)^{-1}, u(z)\right),$$

получить новое описание L_1 как факторпространства $\mathbf{C} \times V_1/U$.

Применим эти соображения к случаю $V_1 = V_2 = V$, $X_1 = X_2 = X$, T_a — сдвиг на точку $a \in V$, $\overline{T} = T_{\pi(a)}$ — сдвиг на $\pi(a)$ и $L_2 = L(H, \alpha)$. Тогда $T^*_{\pi(a)}(L(H, \alpha)) =$

$=(\mathbf{C}\times U)/U$, где действие U определено формулой

$$\varphi_u(\lambda,\ z)=\Big(\underbrace{\lambda\alpha(u)\,e^{\pi H(z+a,\ u)+\frac{\pi}{2}H(u,\ u)}}_{\lambda\left[\alpha(u)\,e^{\pi H(a,\ u)}\right]e^{\pi H(z,\ u)+\frac{\pi}{2}H(u,\ u)}},\ z+u\Big).$$

Чтобы упростить получившийся коцикл, возьмем в качестве $g(z)$ ненулевую голоморфную функцию $e^{-\pi H(z,\ a)}$. Новое действие U тогда описывается формулой

$$\varphi'_u(\lambda,\ z)=\left(\lambda\alpha(u)\,e^{\pi[H(a,\ u)-H(u,\ a)]}\,e^{\pi H(z,\ u)+\frac{\pi}{2}H(u,\ u)},\ z+u\right),$$

а так как $H(a,\ u)-H(u,\ a)=2iE(a,\ u)$, получаем, наконец,

Предложение. *$T^*_{\pi(a)}(L(H,\ \alpha))\cong L(H,\ \alpha\gamma_a)$, где $\gamma_a(u)=e^{2\pi iE(a,\ u)}$.*

Отсюда вытекает целый ряд полезных следствий:

i) Точка $\varphi_{L(H,\ \alpha)}(\pi(a))\in \mathrm{Pic}^\circ X$ отвечает расслоению $L(0,\ \gamma_a)$.

ii) Имеет место соотношение $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}=\gamma_{a_1+a_2}$, так что $\varphi_{L(H,\ \alpha)}$ — гомоморфизм: это — теорема о квадрате.

iii) $$K(L(H,\ \alpha))=U^\perp/U\subset V/U=X,$$

где
$$U^\perp=\{a\mid E(a,\ u)\in\mathbf{Z}\quad\text{при всех}\quad u\in U\}.$$

iv) Поэтому принадлежность расслоения $L(H,\ \alpha)$ группе $\mathrm{Pic}^\circ X$, определенной алгебраически, равносильна любому из следующих условий:

$$K(L(H,\ \alpha))=X\Leftrightarrow U^\perp=V\Leftrightarrow E\equiv 0\Leftrightarrow H\equiv 0,$$

т. е. принадлежности $L(H,\ \alpha)$ группе $\mathrm{Pic}^\circ X$, определенной аналитически.

v) Кроме того,

группа $K(L(H, \alpha))$ конечна $\Leftrightarrow$ группа $U^{\perp}/U$ конечна $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $U^{\perp}$ — решетка $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ форма E невырожденна $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ форма H вырожденна.

vi) Заметим, что если форма H невырожденна, т. е. если расслоение $L(H, \alpha)$ обильно, то любой гомоморфизм $U \to \mathbf{R}$ имеет вид $u \to E(a, u)$ для некоторой точки $a \in V$. Поэтому любой гомоморфизм α: $U \to \mathbf{C}_1^*$ можно представить в виде

$$u \to e^{2\pi i E(a, u)}$$

для некоторой точки $a \in V$. Тем самым расслоения $L(0, \gamma a)$, $a \in V$, исчерпывают группу $\operatorname{Pic}^{\circ} X$, что доказывает основную теорему § 8 в случае $k = \mathbf{C}$.

Задача (В). Рассмотрим два абелевых многообразия $X_i = V_i/U_i$. Расслоение $Q = L(H, \alpha)$ на $X_1 \times X_2$ является дивизорным соответствием, если оно тривиально на $\{0\} \times X_2$ и на $X_1 \times \{0\}$. Это означает, что a) эрмитова форма H обращается в нуль на $\{0\} \times V_2$ и на $V_1 \times \{0\}$ и что b) $\alpha \equiv 1$ на $\{0\} \times U_2$ и на $U_1 \times \{0\}$. Положим

$$B(x_1, x_2) = H((x_1, 0), (0, x_2)).$$

Это $\mathbf{R}$-билинейная форма на $V_1 \times V_2$, комплексно-линейная по V_1 и антилинейная по V_2. Положим $\operatorname{Im} B = \beta$. Форма β цела на $U_1 \times U_2$, и

$$\begin{aligned} H((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= H((x_1, 0), (y_1, 0)) + \\ &+ H((x_1, 0), (0, y_2)) + H((0, x_2), (y_1, 0)) + \\ &+ H((0, x_2), (0, y_2)) = B(x_1, y_2) + \overline{B(y_1, x_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha((u_1, u_2)) &= \alpha((u_1, 0))\,\alpha((0, u_2))\, e^{\pi i E((u_1, 0), (0, u_2))} = \\ &= e^{\pi i \beta(u_1, u_2)}. \end{aligned}$$

Тем самым форма B полностью определяет дивизорное соответствие Q.

Чтобы определить отображение $X_2 \to \hat{X}_1$, индуцированное Q, вычислим ограничение Q на $X_1 \times \{\pi_2(a_2)\}$, $a_2 \in V_2$. Пусть $Q' = (\mathbf{C} \times V_1 \times V_2)/U_1$. Тогда $Q' \cong (1 \times \pi_2)^* Q$, где $1 \times \pi_2$: $X_1 \times V_2 \to X_1 \times X_2$ — естественное отображение, и $Q'|_{X_1 \times \{a_2\}} \cong Q|_{X_1 \times \pi_2(a_2)}$. Действие U_1 на $\mathbf{C} \times V_1 \times V_2$ задается формулой

$$\varphi'_{u_1}(\lambda, x_1, x_2) = \left(\lambda e^{\pi \overline{B(u_1, x_2)}}, x_1 + u_1, x_2\right).$$

Ограничивая его на $V_1 \times \{a_2\}$, находим, что $Q'|_{X_1 \times \{a_2\}} = (\mathbf{C} \times V_1)/U_1$ относительно действия

$$\varphi''_{u_1}(\lambda, x_1) = \left(\lambda e^{\pi \overline{B(u_1, a_2)}}, x_1 + u_1\right).$$

Применив к $\mathbf{C} \times V_1$ автоморфизм скалярного умножения на $e^{-\pi B(x_1, a_2)}$, получаем новое действие

$$\varphi'''_{u_1}(\lambda, x_1) = \left(\lambda e^{-2\pi i \beta(u_1, a_2)}, x_1 + u_1\right).$$

Отсюда следует

Предложение. $Q|_{X_1 \times \{\pi_2(a_2)\}} \cong L(0, \delta_{a_2})$, *где* $\delta a_2(u_1) = e^{-2\pi i \beta(u_1, a_2)}$.

Отсюда, в частности, вытекает, что условия предложения 2 § 8 выполнены для расслоения Q на $X_1 \times X_2$ в том и только в том случае, когда $\dim X_1 = \dim X_2$, и для любой точки $x_2 \in V_2$ включение $x_2 \in U_2$ равносильно тому, что форма $\beta(u_1, x_2)$ принимает целые значения для всех $u_1 \in U_1$. Тем самым B — невырожденное спаривание между V_1 и V_2. Отсюда находим:

Следствие. *Соответствие Q определяет изоморфизмы $X_1 \cong \hat{X}_2$ и $X_2 \cong \hat{X}_1$ в том и только в том случае, когда*

i) *форма B невырожденна,*

ii) *решетки U_1 и U_2 двойственны относительно формы β, т. е.*

$$U_2 = \{x_2 \in V_2 \mid \beta(u_1, x_2) \in \mathbf{Z} \ \forall u_1 \in U_1\}, \text{ и обратно.}$$

Поэтому, полагая $X = V/U$, находим следующую явную конструкцию абелева многообразия $\hat{X}$:

Обозначим через $\overline{T}$ множество антилинейных отображений V в $\mathbf{C}$, и пусть

$$U' = \{l \in \overline{T} \mid \operatorname{Im} l(u) \in \mathbf{Z} \quad \forall u \in U\}.$$

Тогда $\hat{X} = \overline{T}/U'$. Форма $B\colon V \times \overline{T} \to \mathbf{C}$ имеет вид $B(x, l) = \overline{l(x)}$, а расслоение Пуанкаре P_X на $X \times \hat{X}$ совпадает с $L(H, \alpha)$, где

$$H((x_1, l_1), (x_2, l_2)) = \overline{l_2(x_1)} + l_1(x_2),$$
$$\alpha((u, l)) = e^{-\pi i \operatorname{Im} l(u)}.$$

Кроме того, линейное расслоение на X, отвечающее точке $\pi(l) \in X$ $(l \in \overline{T})$, совпадает с $L(0, \alpha_l)$, где

$$\alpha_l(u) = e^{2\pi i \operatorname{Im} l(u)}, \quad u \in U.$$

Возникает еще вопрос о согласованности двух конструкций. Мы только что построили $\hat{X} = \overline{T}/U'$ и показали, что $\hat{X} \cong \operatorname{Pic}^\circ X$. С другой стороны, в § 2 с помощью точной последовательности $0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$ мы установили изоморфизм

$$\operatorname{Pic}^\circ X \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z}),$$

а в § 1 был построен изоморфизм $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \overline{T}$. Хотелось бы увериться, что оба этих описания $\operatorname{Pic}^\circ X$ по существу совпадают. Как мы только что убедились, второе описание $\operatorname{Pic}^\circ X$ основано на существовании отображений

$$\overline{T} \to \operatorname{Pic}^\circ X,$$
$$l \to L(0, \alpha_l).$$

Вычислим теперь сквозное отображение

$$\overline{T} \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{e^{2\pi i}} \operatorname{Pic} X,$$

приводящее к первой конструкции $\operatorname{Pic}^\circ X$. Это отображение совпадает с композицией

$$\overline{T} \subset T \oplus \overline{T} \underset{f}{\xrightarrow{\sim}} H^1(X, \mathbf{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{e^{2\pi i}} \operatorname{Pic} X.$$

В терминах когомологий группы U получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(U, \mathbf{C}) = H^1\,(U, \mathbf{C}) & \xrightarrow{e^{2\pi i}} & H^1\,(U, H^*) \\ \wr\| \qquad\qquad \Big\| & & \Big\| \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}\,(V, \mathbf{C}) \qquad\quad \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \wr\downarrow \qquad\qquad\qquad & & \\ \overline{T} \subset T \oplus \overline{T} \underset{f}{\xrightarrow{\sim}} H^1\,(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{e^{2\pi i}} & \mathrm{Pic}\, X. \end{array}$$

Здесь H^* — мультипликативная группа ненулевых голоморфных функций на V, а левый квадрат коммутативен, потому что согласованность фигурирующих в нем гомоморфизмов была проверена в § 1. Следовательно, любому элементу $l \in \overline{T}$ первая конструкция ставит в соответствие U-коцикл $u \to e^{2\pi i l(u)}$. С другой стороны,

$$e^{2\pi i l(u)} = \frac{g\,(z+u)}{g\,(z)}\, e^{4\pi i\, \mathrm{Re}\,[l\,(u)]},$$

где $g\,(z) = e^{-2\pi i \overline{l(z)}}$ — голоморфная функция от z. Иными словами, первая конструкция основана на отображениях

$$\overline{T} \to \mathrm{Pic}^\circ\,(X),$$

$$l \to L\left(0,\ \alpha_l^*\right),$$

$$\alpha_l^*\,(u) = e^{4\pi i\, \mathrm{Re}\,[l\,(u)]}.$$

Тем самым сравниваемые отображения отличаются лишь множителем $2i$ (ошибка эксперимента!).

Глава III

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ: ЯЗЫК СХЕМ

§ 10. Теорема о кубе, II

В этой главе термин „схема“ всегда означает схему конечного типа над некоторым алгебраически замкнутым полем, а „точкой“ называется замкнутая точка схемы.

Начнем с невинного на первый взгляд обобщения следствия 3 — теоремы о полунепрерывности.

Предложение. *Пусть X — полное многообразие, Y — любая схема, L — линейное расслоение над $X \times Y$. Тогда существует единственная замкнутая подсхема $Y_1 \hookrightarrow Y$ со следующими свойствами:*

a) *Пусть L_1 — ограничение L на $X \times Y_1$; тогда существует линейное расслоение M_1 на Y_1 и изоморфизм $p_2^*(M_1) \cong L_1$ на $X \times Y_1$.*

b) *Пусть f: $Z \to Y$ — такой морфизм, что существуют линейное расслоение K на Z и изоморфизм $p_2^*(K) \cong (1 \times f)^*(L)$ на $X \times Z$. Тогда f можно представить в виде композиции $Z \to Y_1 \hookrightarrow Y$.*

Доказательство. Единственность Z очевидна: если бы существовали две замкнутые подсхемы $Y_1 \hookrightarrow Y$, $Y_1' \hookrightarrow Y$, удовлетворяющие условиям a) и b), каждое из этих замкнутых погружений можно было бы провести через другое, так что они должны совпадать.

Заметим теперь, что если $p_2^*(M_1) \cong L_1$, то $\mathscr{M}_1 = p_{2*}(\mathscr{L}_1)$ (в силу формулы Кюннета). Поэтому для доказательства существования линейного расслоения M_1 со свойством $p_2^*(M_1) \cong L_1$ достаточно проверить, что пучок $p_{2*}(\mathscr{L}_1) = \mathscr{M}_1'$ обратим и что естественный гомоморфизм $p_2^*(\mathscr{M}_1') \to \mathscr{L}_1$ является изоморфизмом.

Дело сводится, таким образом, к построению такого открытого покрытия $\{V_i\}$ схемы Y, что предложение справедливо для произведений $X \times V_i \to V_i$ и ограничений L на $X \times V_i$. В самом деле, если такое покрытие найдено, то существуют замкнутые подсхемы $W_i \subset V_i$, для которых выполнены утверждения а) и b) (с очевидными изменениями). Тогда $W_i \cap (V_i \cap V_j)$ и $W_j \cap (V_i \cap V_j)$ — две замкнутые подсхемы пересечения $V_i \cap V_j$, для которых также верны утверждения а) и b). В силу единственности они совпадают. Это дает замкнутую подсхему $Y_1 \subset Y$, для которой $Y_1 \cap V_i = W_i$. Утверждение а) для нее, очевидно, выполнено, потому что мы нашли для него локальную переформулировку. Далее, локальный вариант свойства b) показывает, что для всех i морфизм $f^{-1}(V_i) \to V_i$ проводится через W_i. Поэтому каждый из морфизмов $f^{-1}(V_i) \to Y$ проводится через W, и, стало быть, морфизм $Z \xrightarrow{f} Y$ также обладает этим свойством.

Таким образом, можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$. Для каждой точки $y \in Y$ следует найти окрестность, над которой предложение справедливо. Уменьшив Y в случае необходимости, мы можем считать, что существует свободный комплекс $0 \to A^{r_0} \xrightarrow{\varphi} A^{r_1} \to \ldots$, с помощью которого универсально строятся прямые образы L, как в § 5. Обозначим через M коядро гомоморфизма ${}^t\varphi$, сопряженного с φ:

$$A^{r_1} \xrightarrow{{}^t\varphi} A^{r_0} \to M \to 0.$$

Для любой A-алгебры B последовательность $B^{r_1} \xrightarrow{{}^t\varphi_B} B^{r_0} \to M \otimes_A B \to 0$ точна; стало быть, точна и последовательность $0 \to \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, B) \to B^{r_0} \xrightarrow{\varphi_B} B^{r_1}$. Это показывает, что для любого морфизма $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ имеем $p_{2*}((1_X \times f)^*(\mathscr{L})) \cong \operatorname{Hom}_A(M, B)$. Пусть теперь F — множество таких точек $y \in Y$, что ограничение $L_y = L|_{X \times \{y\}}$ тривиально. Это множество замкнуто в Y в силу нашего предыдущего результата (примененного к Y_{red} и ограннчению L иа $X \times Y_{\mathrm{red}}$).

Положим, $Y' = Y \setminus F$; тогда пустая подсхема $Y_1 = \varnothing$ схемы Y' удовлетворяет утверждениям a) и b) относительно Y'. Поэтому достаточно проверить, что любая точка $y \in F$ имеет открытую окрестность, в которой предложение выполняется. Пусть $y \in F$; тогда $1 = \dim H^0(X \times \{y\}, \mathscr{L}_y) = \dim \operatorname{Hom}_A(M, A/\mathfrak{m}_y) = \dim_k M/\mathfrak{m}_y M$, так что по лемме Накаямы существует элемент из M, порождающий M в некоторой открытой окрестности точки y. Ограничиваясь этой окрестностью, мы можем считать, что $M \cong A/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал кольца A. Пусть Y_1' — замкнутая подсхема, определенная идеалом $\mathfrak{a}$, L_1' — ограничение L на $X \times Y_1'$ и $\mathscr{L}_1'$ — соответствующий пучок. Тогда $p_{2*}(\mathscr{L}_1')$ — пучок, отвечающий модулю $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a}) \cong A/\mathfrak{a}$ на Y_1'; поэтому это свободный пучок ранга 1. Рассмотрим естественный гомоморфизм $p_2^*(p_{2*}(\mathscr{L}_1')) \xrightarrow{\lambda} \mathscr{L}_1'$ на $X \times Y_1'$. Так как оба — локально свободные пучки ранга 1, этот гомоморфизм является изоморфизмом в окрестности точки $z \in X \times Y_1'$ тогда и только тогда, когда индуцируемый гомоморфизм „слоев“

$$[p_2^*(p_{2*}(\mathscr{L}_1'))_z] \underset{\mathcal{O}_z}{\otimes} k \to [\mathscr{L}_{1z}'] \underset{\mathcal{O}_z}{\otimes} k$$

сюръективен. Но гомоморфизм $\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{m}_y) = H^0(X \times \{y\}, L|_{X \times \{y\}})$ сюръективен, а расслоение $L|_{X \times \{y\}}$ тривиально. Поэтому λ является изоморфизмом во всех точках $X \times \{y\}$. С другой стороны, множество Z тех точек $X \times Y_1'$, в которых λ не является изоморфизмом, является объединением носителей $\operatorname{Ker}(\lambda)$ и $\operatorname{Coker}(\lambda)$. Поэтому оно замкнуто и не пересекается с $X \times \{y\}$. Следовательно, его проекция на Y замкнута и не содержит y. Ограничиваясь некоторой аффинной открытой окрестностью точки y, не пересекающейся с этой проекцией, мы можем считать, что $M \cong A/\mathfrak{a}$ и что условие (a) выполнено для замкнутой подсхемы Y_1, определенной идеалом $\mathfrak{a}$. Мы утверждаем, что условие (b) следует отсюда. В самом деле, возможность провести морфизм $f\colon Z \to Y$ через Y_1 можно проверять локально по Z. Поэтому можно считать, что схема $Z = \operatorname{Spec} B$ аффинная, и f превращает B в A-алгебру. Далее можно считать, что K тривиально на Z, так что $(1_X \times f)^*(\mathscr{L}) \cong \mathcal{O}_{X \times Z}$ и $p_{2*}((1_X \times f)^*(\mathscr{L})) \cong p_{2*}(\mathcal{O}_{X \times Z}) \cong \mathcal{O}_Z$ (потому что X — полное миогообразие). Стало быть, определен изоморфизм B-модулей $B \cong \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, B)$, так что $\mathfrak{a}B = 0$ и, значит, $\mathfrak{a}$ содержится в ядре гомоморфизма $A \to B$. Следовательно, морфизм f можно провести через Y_1, что доказывает предложение.

Впредь мы будем называть замкнутую подсхему $Y_1 \subset Y$, описанную в этом предложении, *максимальной замкнутой подсхемой, над которой пучок $\mathscr{L}$ тривиален.*

Теперь мы можем дать прямое доказательство следующего усиленного варианта теоремы о кубе.

Теорема. *Пусть X и Y — полные многообразия, Z — связная схема, а L — линейное расслоение на $X \times Y \times Z$, ограничения которого на $\{x_0\} \times Y \times Z$, $X \times \{y_0\} \times Z$ и $X \times Y \times \{z_0\}$ тривиальны для некоторых точек $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $z_0 \in Z$. Тогда L тривиально.*

Доказательство. Пусть Z' — максимальная замкнутая подсхема схемы Z, над которой L тривиально; она непуста, ибо $z_0 \in Z'$. Мы хотим показать, что $Z' = Z$. В силу связности Z достаточно проверить, что у любой точки $z_0 \in Z'$ есть открытая (как подсхема в Z) окрестность, принадлежащая Z'. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_{Z, z_0}$, $I = I_{z_0}$ — идеал, определяющий Z' в точке z_0, $I \subset \mathfrak{m}$. Нужно показать, что $I = (0)$. Пусть это не так; поскольку по теореме Крулля $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n = (0)$, можно найти такое целое число $n > 0$, что $\mathfrak{m}^n \supset I$, $\mathfrak{m}^{n+1} \not\supset I$, так что $[\mathfrak{m}^{n+1} + I/\mathfrak{m}^{n+1}] \subset$ $\subset [\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}]$ — неиулевое векторное пространство над k. Поэтому, полагая $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{m}^{n+1} + I$, мы можем найти некоторый идеал $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{m}^{n+1}$, для которого $\dim_k \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_2 = 1$. Это означает, что $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 + ka$, $a \in \mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_1 \supset I$, но $\mathfrak{a}_2 \not\supset I$. Положим $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{m}$. Обозначим через Z_i замкнутую подсхему Z, состоящую из одной точки z_0 со структурным пучком $\mathcal{O}_{Z,\,z_0}/\mathfrak{a}_i$, так что

$$\begin{array}{ccccc} & & & Z' & \\ & & \cup & & \cap \\ \{z_0\} = Z_0 \subset & Z_1 & \uplus & & Z \\ & & \cap & & \cup \\ & & & Z_2 & \end{array}$$

Пусть $\mathscr{L}_i$ $(i=0,\ 1,\ 2)$ — ограничение на $X\times Y\times Z_i$ пучка $\mathscr{L}$ сечений расслоения L. Заметим, что пучки $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$ тривиальны на $X\times Y\times Z_0$, $X\times Y\times Z_1$ соответственно, потому что $Z_0,\ Z_1\subset Z'$. Следовательно, существуют изоморфизмы $\mathscr{L}_i\cong\mathcal{O}_{X\times Y\times Z_i}$ $(i=0,\ 1)$. Далее, структурные пучки схем Z_0, Z_1, Z_2 связаны точной последовательностью

$$0\to\mathcal{O}_{Z_0}\xrightarrow{\text{умножение на } a}\mathcal{O}_{Z_2}\xrightarrow{\text{ограничение}}\mathcal{O}_{Z_1}\to 0,$$

которая приводит к точной последовательности пучков на топологическом пространстве Z_0:

$$0\to\mathscr{L}_0\xrightarrow{\text{умножение на } a}\mathscr{L}_2\xrightarrow{\text{ограничение}}\mathscr{L}_1\to 0.$$

Рассмотрим сечение $s\in\Gamma(X\times Y\times Z_1,\ \mathscr{L}_1)$, совпадающее с $\lambda(1)$ относительно изоморфизма $\lambda\colon\ \mathcal{O}_{X\times Y\times Z_1}\xrightarrow{\sim}\mathscr{L}_1$. Необходимое и достаточное условие тривиальности пучка $\mathscr{L}_2$ состоит в возможности поднять s до сечения s' пучка $\mathscr{L}_2$. В самом деле, тогда умножение на s' определяет гомоморфизм $\lambda'\colon\ \mathcal{O}_{X\times Y\times Z_2}\to\mathscr{L}_2$, редукция которого по модулю максимального идеала любой точки $\zeta\in X\times Z\times\{z_0\}$ является изоморфизмом $k\xrightarrow{\sim}\mathscr{L}_2\underset{\mathcal{O}_\zeta}{\otimes}k$. Отсюда следует, что λ' — изоморфизм, потому что пучки локально свободны. Обратно, если пучок $\mathscr{L}_2$ тривиален, то при согласованной тривиализации пучка $\mathscr{L}_1$ отображение $\Gamma(\mathscr{L}_2)\to\Gamma(\mathscr{L}_1)$ превращается в эпиморфизм $\Gamma(\mathcal{O}_{Z_2})\to\Gamma(\mathcal{O}_{Z_1})$. Фиксируем теперь некоторый изоморфизм $\mathscr{L}_0\cong\mathcal{O}_{X\times Y}$. Препятствием к подъему сечения s в $\Gamma(\mathscr{L}_2)$ является некоторый элемент $\xi\in H^1(X\times Y,\ \mathcal{O}_{X\times Y})$. Ограничения L на $X\times\{y_0\}\times Z$ и $\{x_0\}\times Y\times Z$, а, значит, также и на $X\times\{y_0\}\times Z_2$ и $\{x_0\}\times Y\times Z_2$ тривиальны. Поэтому ограничения s на $X\times\{y_0\}\times Z_1$ и $\{x_0\}\times Y\times Z_1$ можно поднять до сечений пучков $\mathscr{L}\,|_{X\times\{y_0\}\times Z_2}$ и $\mathscr{L}\,|_{\{x_0\}\times Y\times Z_2}$

соответственно. Это означает, что образы ξ при отображениях $H^1(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ и $H^1(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \to H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$, индуцированных вложениями $x \to (x, y_0)$ и $y \to (x_0, y)$, нулевые. Но в силу формулы Кюннета эти отображения индуцируют изоморфизм $H^1(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. Следовательно, $\xi = 0$, s поднимается до сечения над $X \times Y \times Z_2$, и пучок $\mathcal{L}_2$ тривиален. Полученное противоречие показывает, что Z' содержит открытую окрестность точки z_0.

§ 11. Элементы теории групповых схем

Мы по-прежнему работаем с фиксированным алгебраически замкнутым полем k, рассматриваем лишь схемы конечного типа над k и их замкнутые точки. Через $\mathcal{S}ch$ обозначается категория схем конечного типа над k.

Одним из самых фундаментальных средств теории схем является понятие *S-значных точек*: пусть X и S — схемы; S-значной точкой схемы X называется произвольный морфизм из S в X. Их множество обозначается через

$$\mathrm{Hom}_k(S, X) \quad \text{или} \quad \mathcal{X}(S).$$

Фиксируем X; тогда отображение $S \to \mathcal{X}(S)$ является контравариантным функтором

$$\mathcal{X}\colon \mathcal{S}ch^\circ \to \mathcal{S}ets.$$

Важная роль этого функтора объясняется двумя обстоятельствами. Для любых двух схем X, Y

(а) произвольный морфизм $f\colon X \to Y$ определяет некоторый морфизм функтора $\mathcal{X}$ в функтор $\mathcal{Y}$. Иначе говоря, для каждой схемы S определено отображение $f(S)\colon \mathcal{X}(S) \to \mathcal{Y}(S)$, и для любого морфизма $g\colon S \to T$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}(S) \arrow[d, "f(S)"'] & \mathcal{X}(T) \arrow[l] \arrow[d, "f(T)"] \\ \mathcal{Y}(S) & \mathcal{Y}(T) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

коммутативна;

(b) обратно, любой морфизм функтора $\mathscr{X}$ в функтор $\mathscr{Y}$ задается одиозначно определениым морфизмом схем $f\colon X \to Y$.

Утверждения (a) и (b) вместе почти тавтологичны и выполняются для любой категории: читателю следует проверить их, если он не сталкивался с ними раньше.

Мы увидим, что это замечание указывает превосходный способ построения морфизмов. Формально говоря, утверждения (a) и (b) вместе означают, что отображение $X \to \mathscr{X}$ является вполне строгим функтором из категории $\mathscr{S}ch$ в категорию $\mathrm{Fun}(\mathscr{S}ch^\circ, \mathscr{S}ets)$ всех контравариантиых функторов из Obj в категорию множеств $\mathscr{S}ets$. Стало быть, $\mathscr{S}ch$ эквивалентна иекоторой полной подкатегории категории $\mathrm{Fun}(\mathscr{S}ch^\circ, \mathscr{S}ets)$. (Ср. Мамфорд [20], стр. 31.)

Обозначим через $\mathscr{A}lg$ категорию k-алгебр конечного типа, и для любого элемента $R \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}lg$ положим $\mathscr{X}(R) = \mathscr{X}(\mathrm{Spec}\,R)$. Тогда X определяет ковариантный функтор из $\mathscr{A}lg$ в $\mathscr{S}ets$, который мы по-прежнему будем обозначать через $\mathscr{X}$. Элементы множества $\mathscr{X}(R)$ мы будем называть также R-значными точками схемы X. Полагая $\mathscr{C} = \mathrm{Fun}(\mathscr{A}lg, \mathscr{S}ets)$, нетрудно проверить, что отображение $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}ch}(X, Y) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ по-прежнему биективно, так что $\mathscr{S}ch$ можно отождествить с полиой подкатегорией категории $\mathscr{C}$.

Определение. *Групповой схемой называется система, состоящая из схемы G вместе с морфизмами*

(a) *умножения* $m\colon G \times G \to G$,

(b) *единицы* $e\colon \mathrm{Spec}\,k \to G$,

(c) *обращения* $i\colon G \to G$,

для которой выполняются следующие аксиомы:

(1) *ассоциативность: диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

коммутативна,

(2) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
G \times \operatorname{Spec} k \arrow[r, "1_G \times e"] \arrow[d, equal] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[r, "1_G"] & G \\
\operatorname{Spec} k \times G \arrow[r, "e \times 1_G"] \arrow[u, equal] & G \times G \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна;

(3) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dr, "m"] & \\
G \arrow[ur, "(1_G, i)"] \arrow[r] \arrow[dr, "(i, 1_G)"'] & \operatorname{Spec} k \arrow[r, "e"] & G \\
 & G \times G \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть теперь G — некоторая схема. Опишем данные, определяющие структуру групповой схемы на G, в терминах функтора, который представляет G (определенного на $\mathcal{S}ch$ или $\mathcal{A}lg$). Учитывая наши предыдущие замечания и то обстоятельство, что произведения в $\mathcal{S}ch$ отвечают произведениям фуикторов, мы получаем, что морфизмы m, i и e доставляют соответствеино отображения множеств $\mathcal{G}(S)\times\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S)$, $\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S)$ и отмеченный элемент в $\mathcal{G}(S)$. Эти отображеиия функториальны по S в очевидном смысле слова. Условия (1) — (3) означают попросту, что для любой схемы S множество $\mathcal{G}(S)$ является группой (m, i и e определяют соответствеино закон композиции, взятие обратного и единичный элемент) и что для любого морфизма схем $S' \to S$ индуцированное отображеиие $\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S')$ является гомоморфизмом групп. Таким образом, задать на схеме G-групповую структуру — это значит превратить все множества S-зиачиых точек схемы G в группы функториальио по S. Достаточно даже ввести групповые структуры только на множествах всех R-значных точек схемы G функториально по R, где R пробегает k-алгебры.

Пусть теперь x — обычная точка группы G. Тогда морфизм

$$R_x\colon G \rightrightarrows G \times \{x\} \subset G \times G \xrightarrow{m} G$$

является автоморфизмом схемы G, который называется *правым сдвигом на* x. Вообще, любая S-значиая точка $x\colon S \to G$ индуцирует некоторый автоморфизм R_x схемы $G \times S$ иад S, называемый правым сдвигом на x. Для его конструкции рассмотрим морфизм $m \circ (1_G \times x)\colon G \times S \to G$ и положим $R_x = (m \circ (1_G \times x), p_2)$; тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[rr, "R_x"] \arrow[dr] & & G \times S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Легко проверить, что $R_{x,y} = R_y \circ R_x$ относительно групповой структуры на $\mathscr{G}(S)$. Меняя местами множители в $G \times G$, мы можем аналогичио определить левый сдвиг L_x.

Алгебра Ли. Пусть X — некоторая схема, Ω_X — пучок кэлеровых дифференциалов на X над k. *Векторным полем* на X мы будем называть любое k-линейное отображение пучков $D\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, такое, что для всякого открытого множества U индуцированное отображение $D\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ является дифференцированием над k. Иными словами, D можно представить в виде композиции

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X,$$

где f — некоторый $\mathcal{O}_X$-линейный гомоморфизм пучков.

Касательным вектором в точке $x \in X$ мы будем называть произвольное дифференцирование $\mathcal{O}_{X,x} \to k$, или, что то же самое, элемент пространства $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X,x}, k)$. Пусть $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_{X,x}$. Хорошо известно, что естественное отображение

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \Omega_{X,x} \underset{\mathcal{O}_{X,x}}{\otimes} k,$$

$$\bar{f} \to df \otimes 1$$

является изоморфизмом. Поэтому касательный вектор однозначно определяется заданием линейной формы на пространстве $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Очевидно, любое векторное поле в окрестности точки x определяет некоторый касательиый вектор в точке x (композицию дифференцирования $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$ и морфизма „значение фуикции в точке" $\mathcal{O}_{X,x} \to k$). Этот вектор мы будем называть *значением векторного поля в точке* x.

Пусть X, Y — две схемы, D — некоторое векторное поле на X. Пусть p_i — проекция $X \times Y$ на i-й множитель, $i = 1, 2$. Тогда определен канонический изоморфизм $p_1^*(\Omega_X) \oplus p_2^*(\Omega_Y) \rightleftarrows \Omega_{X \times Y}$. Поэтому на $X \times Y$ однозначно определено векторное поле $D \otimes 1$, которое как морфизм $\Omega_{X \times Y} \to \mathcal{O}_{X \times Y}$ совпадает с D на слагаемом $p_1^*(\Omega_X)$ и обращается в нуль на $p_2^*(\Omega_Y)$. Иначе говоря, $(D \otimes 1)(f \otimes g) = Df \otimes g$.

Пусть теперь G — некоторая групповая схема. Векторное поле D на G называется *левоинвариантным*, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_G \arrow[r, "D"] \arrow[d, "m^*"'] & \mathcal{O}_G \arrow[d, "m^*"] \\
\mathcal{O}_{G \times G} \arrow[r, "1 \otimes D"] & \mathcal{O}_{G \times G}.
\end{tikzcd}$$

Здесь вертикальные стрелки индуцированы морфизмом умножения $G \times G \xrightarrow{m} G$.

Предложение. *Для любого касательного вектора t в единице $e \in G$ существует единственное левоинвариантное векторное поле на G, принимающее в e значение t.*

Доказательство. Прежде всего дадим несколько иную интерпретацию понятий „касательный вектор" и „векторное поле". Пусть Λ есть k-алгебра

$k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ и η: $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \to k$ — гомоморфизм, для которого $\eta(\varepsilon) = 0$. Пусть A и B — некоторые k-алгебры, а B — произвольная A-алгебра. Тогда k-дифференцирования D алгебры A со значениями в B находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами алгебр φ: $A \to B[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \cong B \underset{k}{\otimes} \Lambda$, для которых $\varphi(a) = a \cdot 1 +$ кратность ε. Это соответствие определяется так: $D \leftrightarrow \varphi$, если $\varphi(a) = a \cdot 1 + (Da)\varepsilon$. Отсюда вытекает, что для любой схемы X и точки $x \in X$ касательный вектор в точке x есть морфизм $\operatorname{Spec} \Lambda \to X$, теоретико-множественный образ которого совпадает с x. Векторным же полем D на X является произвольный автоморфизм над Λ:

$$\begin{tikzcd} X \times \operatorname{Spec} \Lambda \arrow[rr, "\widetilde{D}"] \arrow[dr] & & X \times \operatorname{Spec} \Lambda \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} \Lambda & \end{tikzcd},$$

ограничение которого на слой над точкой $\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spec} \Lambda$ является тождественным отображением 1_X: $X \to X$.

Теперь нетрудно убедиться, что векторное поле D на групповой схеме G левоинвариантно, если и только если для соответствующего автоморфизма $\widetilde{D}$ диаграмма

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G \times G \times \operatorname{Spec} \Lambda \arrow[r, "1_G \times \widetilde{D}"] \arrow[d, "m \times 1"] & G \times G \times \operatorname{Spec} \Lambda \arrow[d, "m \times 1"] \\ G \times \operatorname{Spec} \Lambda \arrow[r, "\widetilde{D}"] & G \times \operatorname{Spec} \Lambda \end{tikzcd}$$

коммутативна. Положим $D' = p_1 \circ \widetilde{D}$: $G \times \operatorname{Spec} \Lambda \to G$. Это требование означает, что для любых S-значных точек x, y схемы G и точки l схемы $\operatorname{Spec} \Lambda$

$$D'(xy, l) = xD'(y, l).$$

Очевидно, что для этого необходимо и достаточно выполнение тождества $D'(x, l) = xD'(e, l)$ для всех x и l. Иными словами, обозначая через $\tilde{l}$ точку $p_1 \circ \widetilde{D} \circ (e, 1)$: $\operatorname{Spec} \Lambda \to G$, мы требуем, чтобы $\widetilde{D}$

совпадало с правым сдвигом на Λ-значную точку $\tilde{t}$ группы G. Поэтому для любой такой точки $\tilde{t}$ можно построить единственный автоморфизм $\tilde{D}$ схемы $G \times \operatorname{Spec} \Lambda$, для которого диаграмма (*) коммутативна и $p_1 \circ \tilde{D} \circ (e, 1) = \tilde{t}$. Но это в точности и означает, что поле D левоинвариантно и принимает значение t в точке e.

Мы получили, таким образом, канонический изоморфизм k-векторного пространства левоинвариантных векторных полей на G и касательного пространства в точке $e \in G$. Пусть теперь D_1, D_2 — два векторных поля на схеме X. Рассматривая их как эндоморфизмы пучка $\mathcal{O}$, легко видеть, что $D = [D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ снова является векторным полем, которое называется *скобкой Пуассона* полей D_1 и D_2. Далее, если $\operatorname{char} k = p > 0$, D_1^p также есть векторное поле. Тривиально проверяется, что скобки Пуассона и возведение в p-ю степень переводит левоинвариантные векторные поля на групповой схеме в левоинвариантные поля.

Определение. *Алгеброй Ли* групповой схемы называется k-векторное пространство левоинвариантных векторных полей, снабженное законом композиции „скобка Пуассона" и оператором „возведение в p-ю степень" в случае $\operatorname{char} k = p > 0$.

Впредь мы будем обозначать алгебры Ли групп G, H, G_1 ... соответствующими готическими буквами $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}_1$, ...

Справедливы следующие утверждения:

(1) Отображение $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $(X, Y) \to [X, Y]$ билинейно над k, а отображение $X \to X^p$ удовлетворяет тождеству $(\lambda X)^p = \lambda^p X^p$.

(2) $[X, X] = 0$ для всех $X \in \mathfrak{G}$.

(3) Для любых X, Y, $Z \in \mathfrak{G}$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(4) Пусть $\operatorname{char} k = p > 0$. Существует универсальный некоммутативный многочлен от двух перемен-

ных F_p, зависящий лишь от p, такой, что

$$\operatorname{ad}(X^p) = (\operatorname{ad} X)^p,$$
$$(X+Y)^p = X^p + Y^p + F_p(\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y) Y,$$

где $\operatorname{ad} X$ — эндоморфизм пространства $\mathfrak{G}$, определенный формулой $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$.

Явная формула для F_p для нас несущественна. Этот многочлен однозначно определен следующим условием: для любой ассоциативной k-алгебры A, в которой введены операции $[X, Y] = XY - YX$ и X^p (p-я степень в A), должны выполняться тождества (4). Тем самым F_p можно вычислить, взяв в качестве A свободную ассоциативную алгебру над k с двумя образующими X, Y и показав, что $(X+Y)^p$ допускает представление (4) в A. Поскольку нас будет интересовать главным образом случай „абелевой" алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. такой, в которой $[X, Y] = 0$ при всех $X, Y \in \mathfrak{G}$, достаточно знать, что F_p не имеет „постоянного члена", т. е. что $F_p(0, 0) = 0$. Тем самым в абелевом случае оператор $X \to X^p$ является просто p-линейным отображением (т. е. таким аддитивным отображением $\mathfrak{G}$ в себя, что $(\lambda X)^p = \lambda^p X^p$). Отображение возведения в p-ю степень в алгебре Ли абелева многообразия называется *отображением Хассе — Витта.*

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ абелева, если группа G коммутативна, т. е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

где σ — морфизм перестановки множителей: $\sigma = (p_2, p_1)$. Для доказательства этого начнем со следующего замечания. Пусть D_i $(i = 1, 2)$ — векторные поля на произвольной схеме X, $D_3 = [D_2, D_1]$, $\tilde{D}_i$: $X \times \operatorname{Spec} \Lambda \to X \times \operatorname{Spec} \Lambda$ — соответствующие автоморфизмы, где $\Lambda = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Положим $\Lambda' = k[\varepsilon, \varepsilon']/(\varepsilon^2, \varepsilon'^2)$ и σ_i: $\Lambda \to \Lambda'$ — гомоморфизмы k-алгебр, определенные условиями $\sigma_1(\varepsilon) = \varepsilon$, $\sigma_2(\varepsilon) = \varepsilon'$ и $\sigma_3(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon'$. Они индуцируют морфизмы $\varphi_i = \operatorname{Spec} \sigma_i$: $\operatorname{Spec} \Lambda' \to \operatorname{Spec} \Lambda$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

Произведя замену базы $\operatorname{Spec}\Lambda$ (в произведении $X\times\operatorname{Spec}\Lambda$) на $\operatorname{Spec}\Lambda'$ относительно морфизма $\varphi_i = \operatorname{Spec}\sigma_i$, получим из $\widetilde{D}_i$ автоморфизмы

$$\begin{tikzcd} X \times \operatorname{Spec}\Lambda' \arrow[rr, "\chi_i"] \arrow[dr] & & X \times \operatorname{Spec}\Lambda' \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec}\Lambda' & \end{tikzcd}$$

Легко проверить (сведя задачу к случаю аффинной схемы X), что $\chi_3 = [\chi_1, \chi_2] = \chi_1\chi_2\chi_1^{-1}\chi_2^{-1}$. Пусть теперь G — групповая схема, t_i: $\operatorname{Spec}\Lambda \to G$ $(i = 1, 2)$ — касательные векторы в e, D_i — соответствующие левоинвариантные векторные поля. Тогда $\widetilde{D}_i$ — правый сдвиг на t_i. Кроме того, полагая $t_i\circ\varphi_i = T_i$: $\operatorname{Spec}\Lambda' \to G$, получаем, что χ_i — правый сдвиг $G\times\operatorname{Spec}\Lambda'$ на точку $T_i \in \mathcal{G}(\Lambda')$. Поэтому $\chi_1\chi_2\chi_1^{-1}\chi_2^{-1}$ — правый сдвиг на точку $[T_1, T_2] \in \mathcal{G}(\Lambda')$. Поскольку $\mathcal{G}(\Lambda')$ — коммутативная группа, отсюда следует, что $[T_1, T_2] = 0$, и, значит, $\chi_1\chi_2\chi_1^{-1}\chi_2^{-1} = \chi_3$ — тождественный морфизм, так что $[D_1, D_2] = 0$.

Теорема. *Любая групповая схема над полем k характеристики* 0 *является гладкой* (*и, в частности, приведенной*).

Доказательство. Мы докажем следующее утверждение. Пусть X — любая схема над полем k характеристики 0, x — некоторая точка X, в окрестности которой существуют векторные поля $D_1, \ldots, D_n$, где $n = \dim_k \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, индуцирующие независимые касательные вектора в точке x. Тогда схема X гладка в точке x.

Выберем элементы x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в $\mathfrak{m}_x$, классы которых образуют базис пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, такие, что $(D_i x_j)(x) = \delta_{ij}$. Очевидно, $D_i(\mathfrak{m}_x^p) \subset \mathfrak{m}_x^{p-1}$, поэтому D_i продолжаются до дифференцирований пополнения $\widehat{\mathcal{O}}_x$ кольца $\mathcal{O}_x$. Существует однозначно определенный k-гомоморфизм α: $k[[t_1, \ldots, t_n]] \to \widehat{\mathcal{O}}_x$, для которого $\alpha(t_i) = x_i$. С другой стороны, определим отображение $\beta\colon \hat{\mathcal{O}}_x \to k[[t_1, \ldots, t_n]]$, положив

$$\beta(f) = \sum_{\substack{\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n) \\ \nu_i \geqslant 0}} \frac{D^\nu f}{\nu!}(x) t^\nu,$$

где $D^\nu f = D_1^{\nu_1} \ldots D_n^{\nu_n} f$, $\nu! = \nu_1! \ldots \nu_n!$ и $t^\nu = t_1^{\nu_1} \ldots t_n^{\nu_n}$. Пользуясь формулой Лейбница и индукцией по n, легко проверить, что β также является непрерывным k-гомоморфизмом локальных колец.

Гомоморфизм α сюръективен, потому что в его образе содержится некоторая система образующих идеала $\mathfrak{m}_x$, а кольцо $k[[t_1, \ldots, t_n]]$ полно. С другой стороны, $\beta(x_i) \equiv t_i (\mathrm{mod}\,(t_1, \ldots, t_n)^2)$, так что элементы $\beta(x_i)$ порождают максимальный идеал кольца $k[[t_1, \ldots, t_n]]$ и, следовательно, β сюръективен. Тем самым гомоморфизм $\beta \circ \alpha$ сюръективен и, значит, является автоморфизмом кольца $k[[t_1, \ldots, t_n]]$. Поэтому α инъективен и, значит, является изоморфизмом. Таким образом, кольца $\hat{\mathcal{O}}_x$ и $\mathcal{O}_x$ регулярны и, следовательно, схема X гладка в точке x.

Скоро мы убедимся на многих примерах, что в случае положительной характеристики существуют неприведенные групповые схемы.

Схемы подгрупп, ядра, факторы. Пусть G — некоторая групповая схема, H — ее замкнутая подсхема. Она будет называться схемой подгруппы (или групповой подсхемой), если морфизм $m \circ (i \times i)\colon H \times H \to G$, где $i\colon H \hookrightarrow G$ — замкнутое вложение, можно провести через H:

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[rr, "m \circ (i \times i)"] \arrow[dr, dashed] & & G \\ & H \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Равносильная формулировка: для любой схемы $S \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{S}ch$ множество $\mathcal{H}(S)$ является подгруппой в $\mathcal{G}(S)$. Очевидно, H представляет собой в этом случае групповую схему, а морфизм $i\colon H \to G$ является гомоморфизмом групповых схем (определение очевидно).

Любой групповой схеме G над полем k характеристики $p>0$ можно естественно сопоставить возрастающую последовательность G_n замкнутых подсхем ($n\geqslant 0$), сосредоточенных в единичной точке группы G. Пусть $\mathcal{O}=\mathcal{O}_e$ — локальное кольцо в единице группы G, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $\mathfrak{m}^{(p^n)}$ — идеал, порожденный элементами $\{x^{p^n} \mid x\in\mathfrak{m}\}$. Положим $G_n=\operatorname{Spec}[\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{(p^n)}]$, так что G_n — замкнутая подсхема схемы G с носителем e. Пусть $\mathcal{O}'=\mathcal{O}_{e\times e,\, G\times G}$ — локальное кольцо в точке (e, e) на $G\times G$, так что $\mathcal{O}'$ — локализация $\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}$ относительно максимального идеала $\mathfrak{m}\otimes\mathcal{O}+\mathcal{O}\otimes\mathfrak{m}$. Морфизм умножения m индуцирует локальный гомоморфизм колец $m^*\colon \mathcal{O}\to\mathcal{O}'$, так что для всех $f\in\mathfrak{m}$ имеем $m^*(f)=g/h$, $g\in\mathfrak{m}\otimes\mathcal{O}+\mathcal{O}\otimes\mathfrak{m}$, h — обратимый элемент из $\mathcal{O}'$. Поэтому $m^*(f^{p^n})\in[\mathfrak{m}^{(p^n)}\otimes\mathcal{O}+\mathcal{O}\otimes\mathfrak{m}^{(p^n)}]\mathcal{O}'$. Это показывает, что композиция $G_n\times G_n\to G\times G\xrightarrow{m} G$ проводится через подсхему G_n. Тем самым доказывается, что G_n является схемой подгруппы. Очевидно, алгебры Ли групп G_n и G совпадают при $n\geqslant 1$.

Примеры. (1) Определим аддитивную группу $\mathbf{G}_a$ над полем k любой характеристики как $\operatorname{Spec} k[T]=\mathbf{A}^1$ с законом композиции «сложение». В терминах колец он задается гомоморфизмом

$$m^*\colon\ k[T]\to k[T]\otimes k[T],\qquad m^*(T)=T\otimes 1+1\otimes T.$$

Группа S-значных точек $\mathcal{G}_a(S)$ совпадает с группой $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

В случае $\operatorname{char} k=p>0$ обозначим символом α_{p^n} схему подгруппы $(\mathbf{G}_a)_n$, т. е. $\alpha_{p^n}=\operatorname{Spec} k[T]/(T^{p^n})$. Алгебры Ли групп $\mathbf{G}_a$ и α_{p^n} имеют вид $k\dfrac{\partial}{\partial T}$, $n\geqslant 1$, и

$$\alpha_{p^n}(S)=\{f\in\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \mid f^{p^n}=0\}.$$

(2) Определим мультипликативную группу $\mathbf{G}_m$ над полем k любой характеристикн как схему $\mathbf{A}^1-\{0\}$ с умножением в качестве закона композиции. Если

$\mathbf{G}_m = \operatorname{Spec} k\left[T, \frac{1}{T}\right]$, гомоморфизм m^*: $k\left[T, \frac{1}{T}\right] \to$ $\to k\left[T, \frac{1}{T}\right] \underset{k}{\otimes} k\left[T, \frac{1}{T}\right]$ задается формулой $m^*(T) =$ $= T \otimes T$. Группа S-значных точек схемы $\mathbf{G}_m$ совпадает с $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$.

В случае $\operatorname{char} k = p > 0$ положим

$$\mu_{p^n} = (\mathbf{G}_m)_n = \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]/\left((T-1)^{p^n}\right) = \\ = \operatorname{Spec} k[T]/(T^{p^n} - 1).$$

Алгебры Ли групп $\mathbf{G}_m$ и μ_{p^n} $(n \geqslant 1)$ имеют вид $kT\frac{\partial}{\partial T}$ и

$$\mu_{p^n}(S) = \left\{f \in \Gamma\left(S, \mathcal{O}_S^*\right) \mid f^{p^n} = 1\right\}.$$

Пусть теперь G и H — групповые схемы, и пусть f: $G \to H$ — некоторый гомоморфизм. Слой $f^{-1}(e_H) =$ $= G \underset{H}{\times} \{e_H\}$ над единичной замкнутой точкой e_H схемы H является замкнутой подсхемой K в G. Согласно определению, S-значная точка φ: $S \to G$ схемы G проводится через K, если и только если $f \circ \varphi$ проводится через e_H: $\operatorname{Spec} k \to H$. Иными словами, $\mathcal{K}(S)$ совпадает с ядром гомоморфизма $\mathcal{G}(S) \to \mathcal{H}(S)$. Поэтому K является схемой подгруппы группы G.

В качестве примера рассмотрим гомоморфизм $\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$, для которого $X \to X^n$. Его ядро обозначается символом μ_n. Если $(n, p) = 1$, то μ_n — дискретная группа (т. е. приведенная и конечная), изоморфная группе корней n-й степени из единицы в k^*. С другой стороны, из определения следует, что группа μ_{p^n} совпадает с группой, которая обозначалась этим символом выше.

Пусть снова G и H — групповые схемы, и φ: $H \to G$ — некоторый гомоморфизм. Пара $(G/H, \eta)$, где G/H — некоторая схема, а η: $G \to G/H$ — морфизм, называется *фактором* G по H, если она обладает универсальным свойством в классе всех пар (S, f), где S — некоторая схема, а f: $G \to S$ — морфизм, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} H \times G \arrow[r, "m \circ (\varphi \times 1)"] \arrow[d, "p_1"'] & G \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Можно показать, что факторы всегда существуют, что f — плоский сюръективный морфизм и, наконец, если H — схема нормальной подгруппы в G (т. е. все $\mathscr{H}(S)$ — нормальные делители в $\mathscr{G}(S)$), то G/H обладает единственной структурой групповой схемы, для которой η: $G \to G/H$ — гомоморфизм. Ядро этого гомоморфизма в точности равно H.

Этот результат понадобится нам не в полной общности, а лишь в случае, когда H — конечная группа. Этот случай будет рассмотрен в § 12.

Левоинвариантные дифференциальные операторы. Изучим алгебру отображений $\mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$, порожденную левоинвариантными дифференцированиями. Введем сначала *гипералгебру* $\mathbf{H}$ группы G:

$$\mathbf{H}_x = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{O}_{G,\,x}, k),$$

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{x \in G} \mathbf{H}_x,$$

где $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}$ означает множество отображений L: $\mathcal{O}_x \to k$, непрерывных в том смысле, что $L(\mathfrak{m}_x^{N+1}) = 0$ для некоторого N (зависящего от L). Иначе говоря,

$$\mathbf{H} = \varinjlim \Gamma(\mathcal{O}_Z)^*,$$

где предел берется по системе 0-мерных подсхем $Z \subset G$, а W^* означает k-векторное пространство, двойственное к пространству W. Если элемент $L \in \mathbf{H}$ лежит в подпространстве $\Gamma(\mathcal{O}_Z)^*$, мы будем говорить, что его носитель содержится в Z. Из определения очевидно, что $\mathbf{H}$ является алгебро-геометрическим аналогом пространства распределений на группе Ли, сосредоточенных на конечных множествах.

$\mathbf{H}$ обладает целым рядом структур.

(1) Ассоциативное и дистрибутивное произведение — свертка

$$*\colon \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \to \mathbf{H}$$

определяется формулой

$$(\natural) \qquad L_1 * L_2(f) = L_1 \otimes L_2(m^*(f)).$$

Точнее, пусть носитель L_i содержится в Z_i, $i = 1, 2$, и пусть $Z_3 \subset G$ — такая конечная подсхема, что композиция Z_1 и Z_2 проводится через нее:

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \times Z_2 & \dashrightarrow & Z_3 \\ \cap & & \cap \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}.$$

Тогда носитель $L_1 * L_2$ содержится в Z_3, и в уравнении ($\natural$) следует считать f элементом $\Gamma(\mathcal{O}_{Z_3})$, а m — ограничением m на $Z_1 \times Z_2$.

(2) Оператор „значение в точке $x \in G$“ является непрерывным линейным отображением $\delta_x\colon \mathcal{O}_x \to k$ и потому принадлежит $\mathbf{H}$ и имеет носителем приведенную подсхему x. Отображение δ_e является двусторонней единицей относительно свертки:

$$\delta_e * L = L * \delta_e = L.$$

Оператор „значение элемента $L \in \mathbf{H}$ на функции $1 \in \Gamma(\mathcal{O}_G)$“ индуцирует гомоморфизм пополнения

$$\varepsilon\colon \mathbf{H} \to k.$$

Заметим, что, если группа G конечна и приведена, элементы δ_x составляют базис алгебры $\mathbf{H}$ над полем k, а так как $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, $\mathbf{H}$ совпадает с групповой алгеброй $k[G]$ группы G.

(3) Обычное умножение функций $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x$ индуцирует коумножение

$$s\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H} \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}.$$

Оно удовлетворяет ряду тождеств, которые мы рассмотрим позже в § 14 для конечных коммутативных групповых схем G.

Существенно, что элементы $L \in \mathbf{H}$ однозначно продолжаются до левоинвариантных операторов D_L: $\mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$ так, что, грубо говоря, $(D_L f)(e) = L(f)$. Эти операторы D_L являются комбинациями дифференциальных операторов (которые отображают $\mathcal{O}_G(U)$ в $\mathcal{O}_G(U)$ для всякого открытого множества $U \subset G$) и операторов сдвига $f \to f'$, $f'(x) = f(xa)$ (которые отображают $\mathcal{O}_G(U)$ в $\mathcal{O}_G(Ua^{-1})$). Для точной формулировки нам понадобится несколько определений.

Определение. *Дифференциальным оператором D на схеме X* называется k-линейный эндоморфизм структурного пучка $\mathcal{O}_X$, для которого существует целое число $N \geqslant 0$ с тем свойством, что если $f \in \mathfrak{m}_x^{N+1}$ для некоторой точки $x \in X$, то $Df(x) = 0$. Наименьшее такое число N называется порядком оператора D.

Например, дифференциальные операторы порядка 0 — это умножения на функции, а порядка 1 — суммы дифференцирований и умножений на функции.

Пусть теперь носитель распределения $L \in \mathbf{H}$ содержится в подсхеме

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{a_i}/\mathfrak{m}_{a_i}^{d_i}\right).$$

Определим оператор D_L: $\mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$, состоящий из системы отображений

$$D_L\colon \mathcal{O}_G(U) \to \mathcal{O}_G(V),$$

определенных для пар V, U с $Va_i \subset U$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Эти отображения совместимы с ограничениями. Пусть D_L есть композиция отображений

$$\mathcal{O}_G \xrightarrow{m^*} \mathcal{O}_{G\times G} \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_{G\times Z} \xrightarrow{1\otimes L} \mathcal{O}_G.$$

Легко видеть, что D_L является суммой операторов $D_{L,i}$, каждый из которых есть композиция дифференциального оператора порядка $\leqslant d_i$ и правого сдвига на a_i. В частности, при $L \in \mathbf{H}_e$ оператор D_L является дифференциальным оператором. Кроме того,

D_L левоинвариантен, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_G \arrow[r, "D_L"] \arrow[d, "m^*"'] & \mathcal{O}_G \arrow[d, "m^*"] \\
\mathcal{O}_{G\times G} \arrow[r, "1\otimes D_L"] & \mathcal{O}_{G\times G}
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Действительно, эта диаграмма по определению D_L совпадает с внешним прямоугольником диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_G \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"'] & \mathcal{O}_{G\times Z} \arrow[r, "1\otimes L"] \arrow[d, "m^*\otimes 1_Z"] & \mathcal{O}_G \arrow[d, "m^*"] \\
\mathcal{O}_{G\times G} \arrow[r, "1_G\otimes m^*"] & \mathcal{O}_{G\times G\times Z} \arrow[r, "1\otimes 1\otimes L"] & \mathcal{O}_{G\times G}
\end{tikzcd}$$

в которой коммутативность левого квадрата следует из ассоциативности группового закона m, а коммутативность правого очевидна.

Из определений немедленно следует, что если $f\in\mathcal{O}_G(U)$ и $a_i\in U$, $1\leqslant i\leqslant n$, то функция D_Lf определена в e, и $D_Lf(e)=L(f)$. Мы предоставляем читателю проверить при желании, что D_L — единственный левоинвариантный оператор, продолжающий отображение L в этом смысле. В самом деле, любой левоинвариантный оператор $D\colon \mathcal{O}_G\to\mathcal{O}_G$, являющийся комбинацией сдвигов и дифференциальных операторов, совпадает с D_L, где $L\in\mathbf{H}$ определен однозначно. Соответствие $L\to D_L$ обобщает изоморфизм $T_{e,G}$ и пространства левоинвариантных дифференцирований, использованный для определения алгебры Ли группы G. В самом деле, касательное пространство $T_{e,G}$ естественно вкладывается в $\mathbf{H}$:

$$T_{e,G}\cong\left\{L\colon \mathcal{O}_{G,e}\to k \mid L(1)=0,\ L\left(m_e^2\right)=(0)\right\}\subset\mathbf{H},$$

и для любого оператора $L\in T_{e,G}$ элемент D_L является единственным левоинвариантным дифференцированием, принимающим в e значение L.

Важно, что свертка элементов L переходит в композицию операторов:

$$(*) \qquad D_{L_1 * L_2} = D_{L_1} \circ D_{L_2}.$$

Доказательство проводится непосредственно, и мы оставляем его читателю. Отсюда, в частности, следует, что скобка Пуассона левоинвариантных дифференцирований совпадает с коммутатором относительно свертки в $\mathbf{H}$, а p-ю степень левоинвариантного дифференцирования можно вычислять как p-ю степень в $\mathbf{H}$. Заметим, что если группа G коммутативна, то морфизм $m^*\colon \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_{G\times G}$ кокоммутативен, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{G\times G} \arrow[dd, "\text{перестановка множителей}"] \\ \mathcal{O}_G \arrow[ur, "m^*"] \arrow[dr, "m^*"'] & \\ & \mathcal{O}_{G\times G} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда следует, что и умножение-свертка в $\mathbf{H}$ коммутативно. Это дает другое доказательство абелевости алгебры Ли коммутативной группы.

Вычислим для примера гиперaлгебры простейших групп $G = \mu_p$ и $G = \alpha_p$. Пусть

$$\mu_p = \operatorname{Spec} k[X]/(X^p - 1),$$
$$\alpha_p = \operatorname{Spec} k[X]/(X^p).$$

В первом случае левоинвариантные дифференциальные операторы имеют вид

$$f \to a_0 f + a_1 X \frac{df}{dX} + \ldots + a_{p-1}\left(X\frac{d}{dX}\right)^{p-1} f,$$

а во втором

$$f \to a_0 f + a_1 \frac{df}{dX} + \ldots + a_{p-1}\frac{d^{p-1} f}{dX^p}.$$

Тем самым $\mathbf{H} \cong k[D]/(D^p - D)$ или $k[D] \cong k[D]/(D^p)$, где $D = X\dfrac{d}{dX}$ или $D = \dfrac{d}{dX}$ соответственно.

§ 12. Факторизация относительно конечной групповой схемы

Действием групповой схемы G на схеме X называется морфизм

$$\mu\colon G \times X \to X,$$

удовлетворяющий условиям:

(i) композиция

$$X \cong \operatorname{Spec} k \times X \xrightarrow{e \times 1_X} G \times X \xrightarrow{\mu} X$$

является тождественным отображением;

(ii) диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "m \times 1_X"] \arrow[d, "1_G \times \mu"] & G \times X \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

(Здесь, как обычно, e — морфизм единицы, а m — умножения.) Иными словами, группа $\mathcal{G}(S)$ действует на множестве $\mathcal{X}(S)$ для любой (или любой аффинной) схемы S функториально по S. Подробнее, для любой S-значной точки $x \in \mathcal{G}(S)$ определен автоморфизм над S

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[rr, "T_x"] \arrow[dr, "p_2"'] & & X \times S \arrow[dl, "p_2"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

причем

(i) $T_x \circ T_y = T_{xy}$ для любых $x, y \in \mathcal{G}(S)$.

(ii) Пусть $f\colon S_1 \to S_2$ — морфизм, $x\colon S_2 \to G$ — некоторая S_2-значная точка, а $x \circ f\colon S_1 \to G$ — некоторая S_1-значная точка; тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times S_1 \arrow[r, "T_{x \circ f}"] \arrow[d, "1_X \times f"] & X \times S_1 \arrow[d, "1_X \times f"] \\ X \times S_2 \arrow[r, "T_x"] & X \times S_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Операторы T_x определены через μ формулой $T_x = (\mu \circ (1_X \times x), p_2)$. Наоборот, положив $S = G$ и взяв в качестве x G-значную точку 1_G: $G \to G$ группы G, получим морфизм $p_1 \circ T_x$: $X \times G \to X$, совпадающий с μ (с точностью до перестановки множителей).

Морфизм f: $X \to Y$ называется *G-инвариантным*, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

коммутативна. Иначе говоря, для любых S-значных точек g и x схем G и X соответственно имеем $f(\mu(g, x)) = f(x)$. В частности, при $Y = \mathbf{A}^1$ мы приходим к понятию G-инвариантной функции.

Группа G действует на X *свободно*, если морфизм

$$(\mu, p_2): G \times X \to X \times X$$

является замкнутым вложением.

Действие группы G на схеме X можно рассматривать не только с теоретико-множественной, но и с дифференциально-геометрической точки зрения. Обозначим через $\mathbf{H}_e$ часть гипер態алгебры группы G с носителем в точке e. Любой элемент $L \in \mathbf{H}_e$ определяет дифференциальный оператор D_L на X:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\mu^*} \mathcal{O}_{G \times X} \xrightarrow{L \otimes 1} \mathcal{O}_{\{e\} \times X} \cong \mathcal{O}_X.$$

Легко проверить, что

(a) $D_{L_1 * L_2} = D_{L_2} \circ D_{L_1}$;

(b) D_δ — тождественное отображение;

(c) Если $L \in T_{e,G} \subset \mathbf{H}_e$, то D_L — дифференциальный оператор первого порядка, т. е. дифференцирование из $\mathcal{O}_X$ в $\mathcal{O}_X$. В частности, определено представление алгебры Ли группы G дифференцированиями пучка $\mathcal{O}_X$.

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. *Продолжением* (или *подъемом*) действия μ на $\mathcal{F}$ называется по определению любой изоморфизм λ: $p_2^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mu^*(\mathcal{F})$

пучков на $G \times X$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} p_3^*(\mathscr{F}) \arrow[rr, "(p_2,\, p_3)^*(\lambda)"] \arrow[dr, "(m \times 1_X)^*(\lambda)"'] & & \xi^*(\mathscr{F}) \arrow[dl, "(1_G \times \mu)^*(\lambda)"] \\ & \eta^*(\mathscr{F}) & \end{tikzcd}$$

пучков на $G \times G \times X$ коммутативна. Здесь $\xi = \mu \circ (p_2, p_3)$, $\eta = \mu \circ (m, 1_X) = \mu \circ (1_G, \mu)$, а p_i есть i-я проекция схемы $G \times G \times X$.

Продолжение действия μ можно определить удобнее, потребовав, чтобы для любой S-значной точки f группы G был задан некоторый автоморфизм λ_f пучка $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_S$ на $X \times S$, согласованный с автоморфизмом μ_f схемы $X \times S$.

Автоморфизмы λ_f должны удовлетворять тождествам $\lambda_{f \circ g} = \lambda_g \circ \lambda_f$ и функториально зависеть от f.

Приняв эти определения, мы можем теперь обобщить основные результаты § 6 о факторизации по конечным группам на случай конечных групповых схем. Следующая теорема доказывается аналогично первому предложению § 6, так что мы лишь укажем, что нужно изменить в приведенных там рассуждениях.

Теорема 1 (A). *Пусть G — конечная групповая схема, действующая на схеме X так, что орбита любой точки содержится в некотором аффинном открытом подмножестве из X. Тогда существует пара (Y, π), состоящая из схемы Y и морфизма π: $X \to Y$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) *Как топологическое пространство (Y, π) является фактором X под действием соответствующей конечной группы.*

(ii) *Морфизм π: $X \to Y$ G-инвариантен. Пусть $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ — подпучок пучка $\pi_*(\mathcal{O}_X)$, состоящий из G-инвариантных функций. Тогда естественный гомоморфизм $\mathcal{O}_Y \to \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ является изоморфизмом.*

Пара (Y, π) определена этими условиями однозначно с точностью до изоморфизма. Морфизм π конечен и сюръективен.

Схема Y будет обозначаться символом X/G; она обладает следующим функторным свойством: для любого G-инвариантного морфизма $f\colon X \to Z$ существует единственный морфизм $g\colon Y \to Z$, такой, что $f = g \circ \pi$.

(B) *Предположим, кроме того, что G действует свободно и $G = \operatorname{Spec} R$, $n = \dim_k R$. Тогда π — плоский морфизм степени n. Иными словами, $\pi_*(\mathcal{O}_X)$ — локально свободный $\mathcal{O}_Y$-модуль ранга n, а подсхема в $X \times X$, определенная замкнутым вложением*

$$(\mu, p_2)\colon G \times X \to X \times X,$$

совпадает с подсхемой $X \underset{Y}{\times} X \subset X \times X$.

Наконец, для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на Y действие G естественно продолжается на пучок $\pi^*\mathcal{F}$ согласованно с действием на X, и отображение $\mathcal{F} \to \pi^*\mathcal{F}$ устанавливает эквивалентность категории когерентных $\mathcal{O}_Y$-модулей (соответственно локально свободных $\mathcal{O}_Y$-модулей конечного ранга) с категорией когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, снабженных действием G (соответственно с категорией локально свободных $\mathcal{O}_X$-модулей конечного ранга, снабженных действием G).

Доказательство утверждения (A). Как и прежде, дело сводится к случаю аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$. Пусть R — кольцо группы G, $\varepsilon\colon R \to k$ — гомоморфизм „значение в e“, $m^*\colon R \to R \underset{k}{\otimes} R$ и $\mu^*\colon A \to R \underset{k}{\otimes} A$ — гомоморфизмы k-алгебр, индуцированные отображениями m и μ. Обозначим через $B = A^G = \{a \in A \mid \mu^* a = 1 \otimes a\}$ алгебру G-инвариантов кольца A. Пусть $\operatorname{Nm}_A\colon R \underset{k}{\otimes} A \to A$ — норменное отображение (оно определено, потому что $R \underset{k}{\otimes} A$ — свободный A-модуль конечного ранга). Отображение Nm мультипликативно и является однородной полиномиальной функцией на A степени $n = \dim_k R$. Определим отображение $N\colon A \to A$, положив $N(\alpha) = \operatorname{Nm}(\mu^* \alpha)$, так что N — по-прежнему мультипликативное k-однородное отображение степени n. Мы утверждаем, что $N(A) \subset B$.

Достаточно доказать, что для любой k-алгебры K и любой K-значной точки группы G элемент $N(\alpha)\otimes 1$ в $A \underset{k}{\otimes} K$ инвариантен относительно K-автоморфизма этой алгебры, индуцированного действием соответствующей точки. Рассмотрим сначала простейший случай обычной k-значной точки σ_0 группы G. Сдвиг на эту точку индуцирует автоморфизмы

$$\varphi\colon\ R\to R,\qquad \alpha(\sigma)\longmapsto\alpha(\sigma\sigma_0),$$
$$\psi\colon\ A\to A,\qquad \alpha(x)\longmapsto\alpha(\sigma_0 x).$$

Заметим, что, если $\alpha\in A$, элемент $\beta=\mu^*\alpha\in R\underset{k}{\otimes} A$ следует рассматривать как функцию двух переменных $\beta(\sigma, x)=\alpha(\sigma, x)$. Пользуясь этим, легко обнаружить, что образы β при двух отображениях

$$R\underset{k}{\otimes} A \underset{1_R\otimes\psi}{\overset{\varphi\otimes 1_A}{\rightrightarrows}} R\underset{k}{\otimes} A$$

совпадают. Действительно,

$$(*)\qquad \begin{aligned}&[\varphi\otimes 1_A(\beta)](\sigma, x)=\beta(\sigma\sigma_0, x)=\alpha(\sigma\sigma_0 x),\\ &[1_R\otimes\psi(\beta)](\sigma, x)=\beta(\sigma, \sigma_0 x)=\alpha(\sigma\sigma_0 x).\end{aligned}$$

Это рассуждение с вычислением значений функций в точках выглядит пригодным лишь для приведенных схем G и X, потому что только в этом случае функции, принимающие одинаковые значения в схемных точках, совпадают. Но на самом деле можно заставить σ и x пробегать K-значные точки G и X соответственно; тогда значение $\beta(\sigma, x)$ будет также принадлежать K. Мы можем перемножить σ и σ_0 и подействовать посредством σ_0 на x, потому что k-значная точка σ_0 группы G может рассматриваться и как K-значная точка благодаря включению $k\subset K$.

Далее, норменное отображение обладает обычным свойством: для любого кольца A, свободной A-алгебры B и ψ-линейного автоморфизма $T\colon B\to B$ (где ψ — некоторый автоморфизм кольца R) имеем $\mathrm{Nm}(T(x))=\psi(\mathrm{Nm}(x))$ при всех $x\in B$. Применим это свойство к случаям $B=R\underset{k}{\otimes} A$, $x=\beta$ и (1) $T=\varphi\otimes 1_A$,

(2) $T = 1_R \otimes \psi$. Для первого значения T имеем $\mathrm{Nm}(\varphi \otimes 1_A(\beta)) = \mathrm{Nm}(\beta)$, а для второго $\mathrm{Nm}(1_R \otimes \psi(\beta)) = \psi(\mathrm{Nm}(\beta))$. Но $\varphi \otimes 1_A(\beta) = 1_R \otimes \psi(\beta)$, так что $N(\alpha) = \mathrm{Nm}(\beta) = \psi(\mathrm{Nm}(\beta)) = \psi(N(\alpha))$.

То же рассуждение проходит для любой K-значной точки σ_0 группы G вместо k-значной. Умножение на σ_0 и действие σ_0 определяет соответственно автоморфизмы K-алгебр

$$\varphi\colon R \underset{k}{\otimes} K \to R \underset{k}{\otimes} K,$$

$$\psi\colon A \underset{k}{\otimes} K \to A \underset{k}{\otimes} K$$

(обозначая через $\sigma_0^*\colon R \to K$ гомоморфизм „значение в точке σ_0“, получаем, что $\varphi(\alpha \otimes 1) = 1_R \otimes \sigma_0^*(m^*\alpha)$ и $\psi(\alpha \otimes 1) = 1_A \otimes \sigma_0^*(\mu^*\alpha)$). Равенства (*) получаются прежним способом — вычислением значений образов β в K'-значных точках для любой K-алгебры K'. Заметим, что при $\alpha \in A$ элемент $N(\alpha) \otimes 1 \in A \underset{k}{\otimes} K$ является нормой $\mu^*\alpha$ как элемента алгебры $(R \underset{k}{\otimes} K) \underset{K}{\otimes} (A \underset{k}{\otimes} K)$, свободной как модуль над $A \underset{k}{\otimes} K$. Оставшаяся часть рассуждения не меняется.

Далее, группа G действует также на $X \times \mathbf{A}^1$ (действие на $\mathbf{A}^1$ тривиально); поэтому определено и отображение $N\colon A[T] \to A[T]$. Для любого элемента $a \in A$ положим $\chi_a(T) = N(T - a)$. Тогда элемент $\chi_a(T) = T^n + s_1 T^{n-1} + \ldots + S_n$ G-инвариантен и является характеристическим многочленом того эндоморфизма свободного A-модуля $R \underset{k}{\otimes} A$, который отвечает умножению на $\mu^*(a)$. Так как отображение $\varepsilon \otimes 1\colon R \underset{k}{\otimes} A \to A$ сюръективно и $(\varepsilon \otimes 1)(\mu^*(a)) = a$, элемент $\mu^*(a) - a$ в факторе A модуля $R \underset{k}{\otimes} A$ (гомоморфизм $\varepsilon \otimes 1$) определяет нулевое отображение. Поэтому $\det(\mu^*(a) - a) = \chi_a(a) = 0$. Уравнение $\chi_a(a) = 0$ показывает, что a цел над B. Тем самым B-алгебра A цела. Так как она конечно порождена над k, она цела над некоторой конечно порожденной подалгеброй кольца B. Следовательно, над этой подалгеброй A, а значит, и B, являются конечными модулями, так что алгебра B конечно порождена над k. Положим $Y = \operatorname{Spec} B$, и пусть $\pi\colon X \to Y$ — индуцированный морфизм. Он конечен и сюръективен. Пользуясь отображением N, как выше, убеждаемся, что π разделяет орбиты, так что условие (i) выполняется. Далее, π, очевидно, G-инвариантен. Поэтому имеет место вложение $\mathcal{O}_Y \subset \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$, индуцирующее изоморфизм глобальных сечений. С другой стороны, $\pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ — когерентный $\mathcal{O}_Y$-модуль, ибо он является ядром $\mathcal{O}_Y$-гомоморфизма $\lambda\colon \pi_*(\mathcal{O}_X) \to \pi_*(\mathcal{O}_X) \otimes_k R$, $\lambda(f) = \mu^*(f) - f \otimes 1$, а это показывает, что $\mathcal{O}_Y = \pi_*(\mathcal{O}_X)\sigma$ и устанавливает утверждение (ii).

Доказательство утверждения (B). Следующее обстоятельство играет основную роль в конструкции действия G на $\pi^*(\mathcal{F})$. Рассмотрим морфизмы $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ и пучок $\mathcal{O}_Z$-модулей $\mathcal{F}$; тогда существует естественный изоморфизм $\lambda_{f,g}(\mathcal{F})\colon (g \circ f)^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} f^*(g^*(\mathcal{F}))$. При этом для произвольных морфизмов $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^*g^*h^*(\mathcal{F}) & \xleftarrow{f^*(\lambda_{g,h})} & f^*(h \circ g)^*(\mathcal{F}) \\ \uparrow{\scriptstyle \lambda_{f,g}(h^*(\mathcal{F}))} & & \uparrow{\scriptstyle \lambda_{f,h\circ g}} \\ (g \circ f)^* h^*(\mathcal{F}) & \xleftarrow{\lambda_{g\circ f,h}} & (h \circ g \circ f)^*(\mathcal{F}) \end{array}$$

коммутативна.

В интересующем нас частном случае совпадение двух сквозных морфизмов $G \times X \underset{p_2}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\pi} Y$ позволяет (с помощью λ) определить некоторый изоморфизм $\lambda\colon p_2^*(\mathcal{G}) \to \mu^*(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = \pi^*(\mathcal{F})$. Предшествующее замечание показывает, что это действие группы G.

Обратно, пусть $\mathcal{G}$ — некоторый пучок на X, и пусть группа G действует на нем согласованно с действием на X. Сечение $\sigma \in \mathcal{G}(X)$ называется *G-инвариантным*, если $\lambda(p_2^*(\sigma)) = \mu^*(\sigma')$. Локализуя это понятие, приходим к определению подпучка $\pi_*(\mathcal{G})^G$ G-инвариантов пучка $\pi_*(\mathcal{G})$. Очевидно, он является когерентным

$\mathcal{O}$-модулем: это подпучок пучка $\pi_*(\mathcal{G})$, на котором два $\mathcal{O}_Y$-гомоморфизма $\pi_*(\mathcal{G}) \rightrightarrows \pi_*(\mathcal{G} \underset{k}{\otimes} R)$ совпадают. Как и выше, определены очевидные естественные преобразования $S(\mathcal{F})$: $\mathcal{F} \to \pi_*(\pi^*(\mathcal{F}))^G$ и $T(\mathcal{G})$: $\pi^*(\pi_*(\mathcal{G})^G) \to \mathcal{G}$. По-прежнему достаточно проверить, что (в случае свободного действия) морфизм π плоский, $G \times X \rightrightarrows X_Y \times X$, а $T(\mathcal{G})$ — изоморфизм для любого G-пучка $\mathcal{G}$ на X (как в доказательстве предложения 2 § 7). Учитывая все эти замечания и локальный характер определений, мы можем считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Напомним, что по определению свободного действия морфизм

$$(\mu, p_2)\colon\ G \times X \to X \times X$$

является замкнутым вложением. Поскольку морфизм π G-инвариантен, (μ, p_2) можно провести через замкнутое вложение схемы $G \times X$ в $X \underset{Y}{\times} X$. На языке колец это означает, что гомоморфизм

$$\lambda\colon\ A \underset{B}{\otimes} A \to R \underset{k}{\otimes} A,$$

$$\lambda(a_1 \otimes a_a) = \mu^*(a_1)(1 \otimes a_2),$$

сюръективен. Мы должны установить три обстоятельства:

(a) кольцо A плоско над $B = A^G$ и гомоморфизм λ инъективен;

(b) пусть $\mathcal{G}$ есть G-пучок на X и $\mathcal{G}(X) = M$; тогда $A \underset{B}{\otimes} M^G \to M$ — изоморфизм;

(c) если A-модуль M проективен, то B-модуль M^G проективен.

Заметим, что (c) немедленно следует из (a) и (b). В самом деле, достаточно проверить, что B-модуль M^G плоский, т. е. функтор $N \to N \underset{A^G}{\otimes} M^G$ точен на категории A^G-модулей. Но кольцо A является строго плоским над A^G. Поэтому достаточно установить точность функтора

$$N \to (N \underset{A^G}{\otimes} M^G) \underset{A^G}{\otimes} A \cong (N \underset{A^G}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} (A \underset{A^G}{\otimes} M^G) \cong (N \underset{A^G}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} M,$$

а это следует из (a).

Для доказательства (а) можно локализовать A и B по дополнению к любому максимальному идеалу кольца B. Поэтому кольцо A можно считать локальным, а B — полулокальным. Рассмотрим гомоморфизм $A \otimes_B A \xrightarrow{\lambda} R \otimes_k A$, определенный формулой $\lambda(a_1 \otimes a_2) = \mu^*(a_1)(1 \otimes a_2)$. Поскольку действие свободно, λ сюръективен. Рассмотрим оба кольца как A-модули (действие на правые сомножители). Тогда λ является A-гомоморфизмом, так что $R \otimes_k A$ порождено $\mu^*(A)$. Из полулокальности A и из того, что $\mu^*(A)$ порождает свободный модуль $R \otimes_k A$, легко следует существование таких элементов $\{a_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n = \dim_k R)$, что $\mu^*(a_i)$ образуют базис $R \otimes_k A$ над A. Рассмотрим теперь некоторую систему элементов $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A$. Имеет место следующее утверждение:

$$(*) \qquad \left[\mu^*(a) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes \lambda_i)\,\mu^*(a_i)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[a = \sum \lambda_i a_i \text{ и } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in B\right].$$

Импликация $\Leftarrow$ очевидна, потому что $\mu^*(\lambda_i) = 1 \otimes \lambda_i$ при $\lambda_i \in B$. Для доказательства обратного утверждения воспользуемся тождеством $(1 \otimes \mu^*)(\mu^* a) = (m^* \otimes 1)(\mu^* a)$ в $R \otimes_k R \otimes_k A$. Подставляя сюда разложение $\mu^*(a)$, находим

$$\sum_1^n (1 \otimes \mu^*\lambda_i)(1 \otimes \mu^*)(\mu^* a_i) =$$
$$= \sum_1^n (1 \otimes 1 \otimes \lambda_i)(m^* \otimes 1)(\mu^* a_i) =$$
$$= \sum_1^n (1 \otimes 1 \otimes \lambda_i)(1 \otimes \mu^*)(\mu^* a_i).$$

Так как элементы $\mu^*(a_i)$ линейно независимы над A в $R \otimes A$, их образы $(1 \otimes \mu^*)(\mu^* a_i)$ линейно независимы над $R \otimes_k A$ в $R \otimes_k R \otimes_k A$ (действие через последние два множителя). Поэтому из выписанного равенства следует, что $1 \otimes \mu^*(\lambda) = 1 \otimes 1 \otimes \lambda_i$, т. е. что $\lambda_i \in A^G = B$. Применяя теперь к равенству $\mu^*(a) = \sum (1 \otimes \lambda_i) \mu^*(a_i)$ гомоморфизм $\varepsilon \otimes 1$, находим, что $a = \sum \lambda_i a_i$, а это и требуется. Это доказывает утверждение (*), которое означает, что A — свободный B-модуль с базисом $a_1, \ldots, a_n$ и что гомоморфизм $\lambda: A \underset{B}{\otimes} A \to R \underset{k}{\otimes} A$, рассмотренный как отображение свободных A-модулей (действие через второй сомножитель), переводит базис $a_i \otimes 1$ первого из них в базис $\mu^*(a_i)$ второго. Следовательно, λ — изоморфизм.

Перейдем к доказательству (b). Сначала опишем действие G на $\mathcal{G}$ в терминах A-модуля $M = \mathcal{G}(X)$. Прежде всего будем рассматривать $M \underset{B}{\otimes} A$ и $A \underset{B}{\otimes} M$ как $A \underset{B}{\otimes} A$-модули таким образом, что 1-й и 2-й сомножители $A \underset{B}{\otimes} A$ действуют соответственно на 1-й и 2-й сомножители модулей. Легко видеть, что оба эти модуля получаются из M заменой кольца A посредством двух гомоморфизмов $A \rightrightarrows A \underset{B}{\otimes} A$, $a \to a \otimes 1$ и $a \to 1 \otimes a$. Ввиду этого обстоятельства и существования естественного изоморфизма $R \underset{k}{\otimes} A \cong A \underset{B}{\otimes} A$ легко проверяется, что действие G на $\mathcal{G}$ сводится к заданию некоторого изоморфизма $A \underset{B}{\otimes} A$-модулей:

$$\tau: A \underset{B}{\otimes} M \to M \underset{B}{\otimes} A.$$

Он должен удовлетворять условию:

(α) *Диаграмма $A \underset{B}{\otimes} A \underset{B}{\otimes} A$-модулей*

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes M \arrow[dl, "1_A\otimes\tau"'] \arrow[dd, "\begin{array}{l}\tau \text{ на 1-м и 3-м сомножителях}\\ 1_A \text{ на 2-м сомножителе}\end{array}"] \\
A\otimes M\otimes A & \\
 & M\otimes A\otimes A \arrow[ul, "\tau\otimes 1_A"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Нужно доказать, что B-подмодуль

$$N = \{m \in M \mid \tau(1 \otimes m) = m \otimes 1\}$$

модуля M обладает следующим свойством: естественное отображение $N \otimes_B A \to M$ есть изоморфизм. По определению N совпадает с ядром гомоморфизма B-модулей

$$\varphi\colon\ M \to M \otimes_B A,$$

$$\varphi(m) = m \otimes 1 - \tau(1 \otimes m).$$

Из плоскости A над B вытекает, что $N \otimes_B A$ — ядро гомоморфизма

$$\psi;\ M \otimes_B A \to M \otimes_B A \otimes_B A,$$

$$\psi(m \otimes a) = m \otimes 1 \otimes a - \tau(1 \otimes m) \otimes a.$$

Иными словами,

$$N \otimes_B A = \left\{\sum m_i \otimes a_i \in M \otimes_B A \,\middle|\, \sum m_i \otimes 1 \otimes a_i = \sum \tau(1 \otimes m_i) \otimes a_i\right\}.$$

Ассоциативный закон (α), примененный к элементу $1 \otimes 1 \otimes m \in A \otimes A \otimes M$, показывает, что элемент $\tau(1 \otimes m) \in M \otimes_B A$ удовлетворяет уравнению в фигурных скобках. Следовательно, $N \otimes_B A \supset \tau(1 \otimes M)$ (оба множества считаются вложенными в $M \otimes_B A$). Но оба эти множества являются модулями над подкольцом $1 \otimes A \subset A \otimes_B A$. Кроме того, $N \otimes_B A$ порожден над этим подкольцом элементами вида $n \otimes 1$, $n \in N$, а из равенства $\tau(1 \otimes n) = n \otimes 1$ следует, что они принадлежат $\tau(1 \otimes M)$. Тем самым $N \otimes_B A = \tau(1 \otimes M)$. Наконец, отображения

$$M \to 1 \otimes M \xrightarrow{\tau} \tau(1 \otimes M),$$

$$m \to 1 \otimes m$$

являются изоморфизмами, потому что A — строго плоская B-алгебра. Это устанавливает канонический изоморфизм и доказывает (b).

Определение. Гомоморфизм групповых схем $f: X \to Y$ называется эпиморфизмом, если он сюръективен, а морфизм пучков $f^* \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ инъективен.

Следствие 1. *Пусть X — групповая схема, а G — ее конечная нормальная групповая подсхема (т. е. $\mathcal{G}(S) \subset \mathcal{X}(S)$ — нормальный делитель для всех S). Тогда X/G — также групповая схема, $\pi: X \to X/G$ — эпиморфизм и $G = \operatorname{Ker}(\pi)$. Наоборот, для любого эпиморфизма $f: X \to Y$ групповых схем с конечным ядром $G = \operatorname{Ker}(f)$ имеем $Y \cong X/G$.*

Иными словами, для любой групповой схемы X мы установили соответствие типа Галуа между (a) нормальными конечными групповыми подсхемами G и (b) конечными эпиморфизмами $\pi: X \to Y$. Это соответствие сохраняется, даже если отбросить требование конечности, что мы, однако, не будем доказывать здесь.

Доказательство. Пусть X — групповая схема, $G \subset X$ ее конечная нормальная подгруппа. Обозначим через $m: X \times X \to X$ групповой закон и рассмотрим сплошные стрелки в диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/G \times X/G \arrow[r, dashed] & X/G. \end{tikzcd}$$

Произведение $X/G \times X/G$ является фактором $X \times X$ по $G \times G$, и можно утверждать, что морфизм πm $G \times G$-инвариантен. Действительно, для любых S-значных точек x_1, x_2, g_1, g_2 схем X и G соответственно $\pi(m(x_1 g_1 \times x_2 g_2)) = \pi(x_1 g_1 x_2 g_2) = \pi(x_1 x_2 g_3) = \pi(x_1 x_2) = \pi(m(x_1 \times x_2))$, где $g_3 = (x_2^{-1} g_1 x_2) g_2 \in \mathcal{G}(S)$. Легко проверить теперь, что пунктирная стрелка диаграммы определяет некоторый групповой закон m' на X/G, для которого π является гомоморфизмом. Но $G \times X \cong X \times_Y X$, поэтому если x_1, $x_2 \in \mathcal{X}(S)$ и

$\pi(x_1)=\pi(x_2)$, то $x_1=x_2g$ для некоторой точки $g\in\mathcal{G}(S)$. В частности, полагая $K=\operatorname{Ker}(\pi)$, имеем

$$x_1\in\mathcal{K}(S)\Leftrightarrow\pi(x_1)=\pi(e)\Leftrightarrow x_1=g,\quad g\in\mathcal{G}(S).$$

Тем самым $G=\operatorname{Ker}(\pi)$.

Труднее доказать вторую половину следствия. Пусть $\pi\colon X\to X/G$ — каноническое отображение. Из G-инвариантности морфизма f следует существование единственного морфизма $g\colon X/G\to Y$, такого, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/G \arrow[rr, "g"'] & & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна. По первой части следствия X/G—групповая схема; нетрудно проверить, что g — гомоморфизм. Кроме того, g — эпиморфизм с тривиальным ядром. Поэтому все сводится к доказательству частного случая: любой эпиморфизм $f\colon X\to Y$ с тривиальным ядром является изоморфизмом. Напомним, что для любого морфизма $g\colon S\to T$, все слои $g^{-1}(t)$ которого конечны, существует плотное открытое множество $T_0\subset T$, над которым морфизм $g|_{S_0}\colon S_0\to T_0$, $S_0=g^{-1}(T_0)$, конечен. Пусть в нашем случае конечен морфизм $f|_{X_0}\colon X_0\to Y_0$. Обозначая через R_x правый сдвиг на точку $x\in X$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "R_x", "\approx"'] \arrow[d, "\operatorname{res} f"'] & X_0\cdot x \arrow[d, "\operatorname{res} f"] \\ Y_0 \arrow[r, "R_{f(x)}", "\approx"'] & Y_0\cdot f(x). \end{tikzcd}$$

Она показывает, что ограничение f на $X_0\cdot x$ является конечным морфизмом в $Y_0\cdot f(x)$. Поскольку открытые множества $Y_0\cdot f(x)$ покрывают Y, морфизм f конечен. Для доказательства того, что это изоморфизм, достаточно установить, следовательно, что $f^*\colon\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$ — изоморфизм пучков. Мы знаем, что он инъективен. В силу леммы Накаяма сюръективность его следовала бы из сюръективности отображений

$$f_y^*\colon k \cong \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \to f_*(\mathcal{O}_X) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} (\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y)$$

для всех точек $y \in Y$. Но $\operatorname{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X)) \otimes \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y$ — это слой $f^{-1}(y)$, а сдвиг показывает, что все слои f изоморфны ядру f. Ядро же тривиально, так что $f^{-1}(y)$ — одна точка со структурой приведенной подсхемы. Тем самым f_y^* сюръективны, и f — изоморфизм.

Следствие 2. *Пусть $Y = X/G$ (в условиях теоремы). Обозначим через $\mathcal{G}$ любой когерентный пучок на X, снабженный действием G. Тогда существует естественный изоморфизм*

$$\pi^*(\pi_*(\mathcal{G})) \cong \mathcal{G} \underset{k}{\otimes} R.$$

Доказательство. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

и пучок $\mathcal{G}$ на X. Тогда естественный гомоморфизм $f^*(f_*(\mathcal{G})) \to \mathcal{G}$ индуцирует гомоморфизм $g'^* f^*(f_*(\mathcal{G})) \to \to g'^*(\mathcal{G})$, т. е. $f'^* g^*(f_*(\mathcal{G})) \to g'^*(\mathcal{G})$, или, что то же самое, $g^*(f_*(\mathcal{G})) \to f'_*(g'^*(\mathcal{G}))$. В случае когда f — аффинный морфизм и $X' = Y' \underset{Y}{\times} X$, последний гомоморфизм пучков является изоморфизмом. Действительно, так как утверждение локально по Y и Y', можно считать эти схемы (и, стало быть, также X, Y, X', Y') аффинными. В этом случае все очевидно.

Применив это замечание к ситуации $X = Y'$, $f = g = \pi$, находим, что $\pi^*(\pi_*(\mathcal{G})) = p_{2*}p_1^*(\mathcal{G})$, где $p_i\colon X \underset{Y}{\times} X \to X$ проекции. Обозначая через q_i i-ю проекцию произведения $G \times X$ и пользуясь изоморфизмом $(\mu, q_2)\colon G \times X \to X \times X$ и G-действием на $\mathcal{G}$, получаем, что

$$\pi^*(\pi_*(\mathcal{G})) \cong q_{2*}\mu^*(\mathcal{G}) \cong q_{2*}q_2^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \underset{k}{\otimes} R,$$

что доказывает следствие.

Мы докажем теперь теорему о поведении эйлеровой характеристики обратных образов когерентных пучков для некоторого класса морфизмов. Начнем с нескольких определений.

Пусть G — конечная групповая схема, свободно действующая на схеме X, так что существует фактор X/G. Пусть F — конечная схема, на которой действует G. Тогда G очевидным образом действует на $X \times F$. Легко проверить, что это действие также свободно, фактор $U = (X \times F)/G$ существует и определен естественный морфизм $U \xrightarrow{\pi} V = X/G$. Такой морфизм мы будем называть *расслоением с конечными слоями*, ассоциированным с некоторым главным G-расслоением. Морфизм π конечный и плоский, так что пучок $\pi_*(\mathcal{O}_U)$ локально свободен над $\mathcal{O}_V$ и имеет конечный ранг. Этот ранг называется *степенью* морфизма π.

Теорема 2. *Пусть π: $U \to V$ — расслоение с конечными слоями, ассоциированное с главным G-расслоением над V, где G — конечная групповая схема. Тогда для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на V*

$$\chi(\pi^*(\mathcal{F})) = (\deg \pi)\chi(\mathcal{F}).$$

Доказательство. Достаточно установить эту теорему в ситуации, когда G действует свободно на U и $V = U/G$. Действительно, в общем случае результат верен для первого морфизма и композиции в диаграмме $X \times F \to X \times F/G \to X/G$; стало быть, он верен и для второго морфизма.

Итак, пусть $V = U/G$, G свободно действует на U, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на V. Обозначим через $\mathcal{J}$ пучок идеалов, аннулирующий $\mathcal{F}$, и назовем *носителем* $\mathcal{F}$ замкнутую подсхему V, определенную пучком $\mathcal{J}$. Можно считать, что $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на этой подсхеме. Предположим, что теорема неверна.

Так как пространство V нётерово, можно найти пучок $\mathcal{F}$ с носителем $V' \subset V$, для которого теорема все еще иеверна, а для всех пучков со строго меньшим носителем уже верна. Положим $U' = \pi^{-1}(V')$. Утверждение (B) теоремы 1 показывает, что U' — главное G-расслоение над V'. Заменив U и V на U' и V' соответственно, мы можем считать, что теорема верна для всех пучков, носитель которых строго меньше V, т. е. $\mathrm{Ann}(\mathcal{F}) \neq (0)$. Очевидно, далее, что если теорема верна для двух пучков из трех членов короткой точной последовательности, то она верна и для третьего (напомним, что π — плоский морфизм).

Если схема V приводима, можно найти точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}_2 \to 0$, крайние члены которой сосредоточены на части неприводимых компонент V, так что теорема верна для $\mathcal{F}$. Поэтому можно считать, что V неприводима.

Если $\mathcal{I} \neq 0$ — подпучок нильпотентов на V, то оба крайних члена в последовательности $0 \to \mathcal{I} \to \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F} \to 0$ сосредоточены на собственных замкнутых подсхемах V. Тем самым можно считать, что V неприводима и приведена. Пусть r — ранг общего слоя пучка $\mathcal{F}$. Тогда на X существует пучок идеалов $\mathcal{I}$ и инъективный гомоморфизм $\mathcal{I}^r \to \mathcal{F}$, носитель коядра которого не совпадает с V. Стало быть, теорема верна для $\mathcal{F}$, если и только если она верна для $\mathcal{I}^r$, а точная последовательность $0 \to \mathcal{I} \to \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_{V/\mathcal{I}} \to 0$ показывает, что это равносильно справедливости теоремы для $\mathcal{O}_V$. Тем самым достаточно установить теорему для *одного* когерентного пучка ненулевого ранга на V. Но в качестве такого пучка можно взять $\pi_*(\mathcal{O}_U)$: действительно, следствие 2 из предложения показывает, что

$$\chi(\pi^*(\pi_*(\mathcal{O}_U))) = \chi(\mathcal{O}_U \underset{k}{\otimes} R) = (\deg \pi)\, \chi(\mathcal{O}_U) = \\ = (\deg \pi)\, \chi(\pi_*(\mathcal{O}_U)),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Мы рассматривали ассоциированные расслоения, не ограничиваясь случаем свободного действия группы G, по следующей причине.

Пусть $f\colon U \to V$ — конечный этальный морфизм, всюду степени n. Его тогда можно реализовать как ассоциированное расслоение с конечными слоями для некоторого главного $\Sigma(n)$-расслоения, где $\Sigma(n)$ — симметрическая группа n-го порядка. Действительно, в n-кратном расслоенном произведении $U \underset{V}{\times} U \underset{V}{\times} \ldots \underset{V}{\times} U$ рассмотрим множество P точек $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Оно открыто и замкнуто в $U \underset{V}{\times} U \underset{V}{\times} \ldots \underset{V}{\times} U$ и переходит в себя под действием $\Sigma(n)$. Далее, $P \to V$ — этальный морфизм и V — теоретико-множественное факторпространство $P/\Sigma(n)$. Отсюда следует, что то же верно в схемном смысле, и P — главное расслоение над V со структурной группой $\Sigma(n)$. Обозначим через F приведенную схему с n точками $[1, 2, \ldots, n]$, на которой $\Sigma(n)$ действует перестановками. Определим морфизм $P \times F \to V$: $((x_1, \ldots, x_n), i) \to x_i$. Он $\Sigma(n)$-инвариантен, а V является теоретико-множественным фактором. Так как морфизм $P \times F \to V$ также накрывающий, V является схемным фактором $(P \times F)/\Sigma(n)$.

Отсюда вытекает, что теорема 2 применима к любому конечному этальному морфизму постоянной степени n.

§ 13. Двойственное абелево многообразие над полем любой характеристики

Пусть X — абелево многообразие и L — линейное расслоение на нем. Выше мы определим замкнутое подмножество $K(L) \subset X$, состоящее из тех точек $x \in X$, для которых $T_x^* L \cong L$. Мы доказали также, что это множество является подгруппой. Теперь мы введем на $K(L)$ структуру подсхемы. Рассмотрим стандартное линейное расслоение $M = m^*(L) \otimes \otimes p_1^*(L)^{-1} \otimes p_2^*(L)^{-1}$ на $X \times X$ и определим $K(L)$ как максимальную подсхему схемы X, для которой ограничение $M|_{K(L) \times X}$ тривиально (см. § 10).

Множество S-значных точек подсхемы $K(L)$, грубо говоря, состоит из тех точек $f\colon S \to X$, сдвиг на которые не меняет L. Точнее, пусть $X_S = X \times S$ и T_f — автоморфизм X_S, индуцированный f (т. е. $T_f(x, s) = (x + f(s), s)$ для любой пары (x, s) T-значных точек схем X, S соответственно). Обозначим через L_S расслоение p_1^*L, индуцированное на X_S. Если схема S „достаточно велика“, условие $T_f^*(L_S) \cong L_S$ является слишком сильным: например, расслоения L_S и $T_f^*(L_S)$ могут оказаться изоморфными при ограничении на $X \times U_i$, где $\{U_i\}$ — некоторое открытое покрытие S, но ие изоморфными в целом. Правильное требование формулируется так:

(*) $T_f^*(L_S) \cong L_S \otimes p_2^*M$, где M — некоторое линейное расслоение на S.

Предложение. *Условие (*) выполнено тогда и только тогда, когда f является S-значной точкой подсхемы $K(L)$.*

Доказательство. Заметим, что композиция $X \times S \xrightarrow{T_f} X \times S \xrightarrow{p_1} X$ совпадает с композицией $X \times S \xrightarrow{1_X \times f} X \times X \xrightarrow{m} X$, так что $T_f^*(L_S) \cong (1_X \times f)^* m^* L$. Стало быть, расслоение $L_S|_{(0) \times S}$ тривиально, тогда как $T_f^*(L_S)|_{(0) \times S} \cong f^*L$. Если теперь выполнено условие (*), фигурирующее в нем расслоение M можно восстановить, ограничив обе части равенства на $(0) \times S$:

$$f^*(L) \cong T_f^*(L_S)\big|_{(0) \times S} \cong L_S \otimes p_2^*M\big|_{(0) \times S} \cong M.$$

Значит, условие (*) равносильно изоморфизму

$$(1_X \times f)^* m^* L \cong p_1^* L \otimes p_2^*(f^*L).$$

Но $(1_X \times f)^* m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^*(f^*L)^{-1} \cong (1_X \times f)^* M$, поэтому условие (*) выполняется в том и только том случае, когда расслоение $(1_X \times f)^* M$ тривиально, а это по определению означает, что f проводится через $K(L)$.

Отсюда немедленно следует, что множество $\mathcal{K}(\mathcal{L})(S)$ является *подгруппой* $\mathcal{X}(S)$, так что $K(L)$ есть групповая подсхема схемы X.

Наша следующая цель — построить абелево многообразие, двойственное к X, следуя тому же плану действий, что и в характеристике 0. Выберем обильный пучок L. Тогда $K(L)$ — конечная групповая схема. Определим $\hat{X}$ как фактормногообразие $X/K(L)$. Обозначим через $\pi\colon X \to \hat{X}$ естественный гомоморфизм. Как и выше, мы намерены определить расслоение Пуанкаре P на $\hat{X} \times X$. Оно будет фактором расслоения M на $X \times X$ относительно некоторого действия группы $K(L) \times \{0\}$, согласованного с действием посредством сдвига на $X \times X$ (без труда проверяется, что естественный гомоморфизм $X \times X/K(L) \times \{0\} \tilde{\to} X/K(L) \times X$ есть изоморфизм).

Напомним, что действие подгруппы $H \subset X$ на когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X можно описать, задав для любой схемы $S \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{S}ch$ действие абстрактной группы $\mathcal{H}(S)$ на $\mathcal{F}_S = \mathcal{F} \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_S$, согласованное с действием на X_S, причем эти данные должны функториально зависеть от S в очевидном смысле слова.

Условимся отмечать индексом S объекты, полученные заменой базы на S. Группа $\mathcal{K}(\mathcal{L})(S)$ состоит из тех точек $x \in \mathcal{X}(S)$, для которых $T_x^*(L_S) \cong L_S \otimes L_0$, где $T_x\colon X_S \to X_S$ — сдвиг на x, а L_0 — линейное расслоение на X_S, поднятое с S. На схеме $X_S \underset{S}{\times} X_S = (X \times X)_S$ имеем

$$M_S \cong m_S^*(L_S) \otimes p_1^*(L_0)^{-1} \otimes p_2^*(L_S)^{-1},$$

так что

$$T_{(x,\,0)}^*(M_S) \cong m_S^* T_x^*(L_S) \otimes p_1^* T_x^*(L_S)^{-1} \otimes p_2^*(L_S)^{-1} \cong$$
$$\cong M_S \otimes m_S^*(L_0) \otimes p_1^*(L_0)^{-1} \cong M_S.$$

Тем самым $T_{(x,\,0)}^*(M_S) \cong M_S$. Поэтому, чтобы поднять $T_{(x,\,0)}$ на M_S, т. е. задать изоморфизм расслоений $T_{(x,\,0)}^*(M_S)$ и M_S, достаточно определить этот изоморфизм на подсхеме $X_S \underset{S}{\times} 0_S$. Действительно, любые два изоморфизма линейных расслоений, все равно на $X_S \underset{S}{\times} X_S$ или на $X_S \underset{S}{\times} 0_S$, отличаются умножением на обратимую функцию. Но обе группы $H^0((X \times X)_S, \mathcal{O}^*_{(X\times X)_S})$ и $H^0\left(X_S \underset{S}{\times} 0_S, \mathcal{O}^*_{X_S \underset{S}{\times} 0_S}\right)$ изоморфны $H^0(S, \mathcal{O}^*_S)$. Поэтому ограничение

$$H^0\left((X \times X)_S, \mathcal{O}^*_{(X\times X)_S}\right) \xrightarrow{\sim} H^0\left(X_S \underset{S}{\times} 0_S, \mathcal{O}^*_{X_S \underset{S}{\times} 0_S}\right)$$

является изоморфизмом.

Обозначим теперь через V одномерное векторное пространство, двойственное к слою $L/\mathfrak{m}_0(L)$ расслоения L на X в точке 0, и пусть $V \times X_S$ — тривиальное расслоение на X_S со слоем V. Пусть $i\colon X_S = X_S \underset{S}{\times} 0_S \to$ $\to X_S \underset{S}{\times} X_S$ — замкнутое вложение; тогда

$$i^*(M_S) \cong i^*m^*(L_S) \otimes i^*p_1^*(L_S)^{-1} \otimes i^*p_2^*(L_S)^{-1} \cong$$
$$\cong L_S \otimes L_S^{-1} \underset{k}{\otimes} V \cong V \times X_S,$$

где все изоморфизмы *канонические*. Поэтому можно однозначно поднять сдвиг $T_{(x,0)}$ на M_S, если потребовать, чтобы его ограничение на $X_S \underset{S}{\times} 0_S$ совпадало с $1_V \times T_x$ на $V \times X_S$. Нетрудно проверить, что так определенное действие $\mathcal{K}(\mathcal{L})(S)$ на M_S является групповым действием.

Отсюда вытекает, что на $\hat{X} \times X = X/K(L) \times X$ существует единственное расслоение P, подъем которого на $X \times X$ изоморфен M с учетом действия $K(L)$. Ограничения P на $\{0\} \times X$ и $\hat{X} \times \{0\}$ тривиальны. Поскольку, далее, отображение $\varphi_L\colon X \to \operatorname{Pic}^\circ \hat{X}$ сюръективно, а ядро его совпадает с $K(L)$, существует индуцированный изоморфизм абстрактных групп $\hat{X} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}^\circ X$. Далее, для любой точки $\alpha \in \hat{X}$ ограничение P на $\{\alpha\} \times X$ как линейное расслоение на X отвечает образу α в $\operatorname{Pic}^\circ X$. Тем самым мы установим, что $\hat{X}$ — двойственное многообразие, а P — расслоение Пуанкаре на $\hat{X} \times X$, если докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть S — любая схема, а L — линейное расслоение на $S \times X$, такое, что ограничение $L|_{S \times \{0\}}$ тривиально и $L|_{\{s\} \times X} \in \mathrm{Pic}^\circ X$ для всех $s \in S$. Тогда существует единственный морфизм φ: $S \to \hat{X}$ со свойством $L \cong (\varphi \times 1_X)^* (P)$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное расслоение $M = p_{23}^*(P) \otimes p_{13}^*(L)^{-1}$ на схеме $S \times \hat{X} \times X$ и обозначим через Γ_S максимальную подсхему $S \times \hat{X}$, над которой это расслоение тривиально. Пусть π: $\Gamma_S \to S$ — ограничение на Γ_S проекции $S \times X \to S$. Основная трудность — доказательство того, что π — изоморфизм. С этой целью, очевидно, достаточно проверить, что для любой замкнутой подсхемы $S_0 \subset S$, сосредоточенной в одной точке, отображение $(S_0 \underset{S}{\times} \Gamma_S) \to S_0$ является изоморфизмом. Рассмотрим схему Γ_{S_0}, построенную так же, как Γ_S, с помощью расслоения $L|_{S_0 \times X}$ на $S_0 \times X$. Тогда $S_0 \underset{S}{\times} \Gamma_S = \Gamma_{S_0}$ по определению Γ_S. Стало быть, в доказательстве этого основного утверждения можно считать, что $S = \mathrm{Spec}\, B$, где B — конечномерная локальная k-алгебра. Пусть, далее, s — единственная точка S. Легко видеть тогда, что доказываемое утверждение не изменится при замене L на $L \otimes p_2^* \left(L|_{\{s\} \times X}\right)^{-1}$ (действительно, существует такая точка $\hat{x} \in \hat{X}$, что $L|_{\{s\} \times X} \cong p|_{\{\hat{x}\} \times X}$). Поэтому можно, кроме того, считать, что ограничение $L|_{\{s\} \times X}$ тривиально.

Но для всех точек $(s, x) \in S \times X$ ограничение M на $\{s\} \times X \times \{x\}$ принадлежит группе $\mathrm{Pic}^\circ X$ (потому что это так для точки $(s, 0)$). Кроме того, не более чем для конечного числа точек (s, x) ограничение M на $\{s\} \times X \times \{x\}$ тривиально, потому что не более чем для конечного числа точек $x \in X$ расслоение $m^*(L) \otimes \otimes p_1^*(L)^{-1} \otimes p_2^*(L)^{-1}|_{X \times \{x\}} = T_x^*(L) \otimes L^{-1}$ тривиально. Следовательно, носители всех прямых образов $R^p p_{13*}(M)$ на $S \times X$ дискретны, так что из спектральной последовательности Лере находим $H^p(S \times \hat{X} \times X, M) \cong$

$\cong H^0(S\times X,\ R^p p_{13*}(M))$. С другой стороны, $R^p p_{13*}(M)\cong$ $\cong R^p p_{13*}(p_{23}^*(P))\otimes L^{-1}$, так что определены изоморфизмы B-модулей.

$$H^p(S\times\hat{X}\times X,\ M)\cong H^p(S\times\hat{X}\times X,\ p_{23}^*(P))\cong$$
$$\cong B\bigotimes_k H^p(\hat{X}\times X,\ P),\qquad p\geqslant 0.$$

Следовательно, эти модули свободны. Рассмотрим, с другой стороны, прямые образы $R^p p_{12*}(M)$. Поскольку расслоение $M|_{\{s\}\times\{\hat{x}\}\times X}$ принадлежит $\mathrm{Pic}^\circ X$ при любом $\hat{x}$ и тривиально лишь при $\hat{x}=0$, все пучки $R^p p_{12*}(M)$ сконцентрированы в точке $(s,0)\in$ $\in S\times\hat{X}$. Пусть $0\to K_0\to K_1\to\ \dots\ \to K_g\to 0$ — тот комплекс свободных модулей конечного типа над локальным кольцом $A=B\bigotimes_k\mathcal{O}_{\hat{X},0}$ точки $(s,0)\in S\times\hat{X}$, который фигурирует в теореме о замене базы и прямых образах. Тогда модули $H^i(K)\cong[R^i p_{12*}(M)]_{(s,0)}$ имеют конечную длину над A и, следовательно, над $\mathcal{O}_{0,\hat{X}}$ тоже.

Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма. *Пусть $\mathcal{O}$ — регулярное локальное кольцо размерности g, а $0\to K_0\to K_1\to\ \dots\ \to K_g\to 0$ — комплекс конечно порожденных свободных $\mathcal{O}$-модулей. Если все модули $H^i(K_\cdot)$ артиновы, то $H^i(K_\cdot)=0$ при $0\leqslant i<g$.*

Доказательство. Так как при $g=0$ результат тривиален, можно считать, что $g>0$ и что для меньших размерностей лемма уже доказана. Выберем элемент $x\in\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$), но $x\notin\mathfrak{m}^2$. Тогда кольцо $\overline{\mathcal{O}}=\mathcal{O}/\mathcal{O}_x$ регулярно размерности $g-1$. Положим $\overline{K}_\cdot=\overline{\mathcal{O}}\bigotimes_{\mathcal{O}}K_\cdot$. Точная последовательность комплексов $0\to K_\cdot\xrightarrow{x}K_\cdot\to\overline{K}_\cdot\to 0$ индуцирует точную последовательность когомологий

$$H^p(K_\cdot)\xrightarrow{x}H^p(K_\cdot)\to H^p(\overline{K}_\cdot)\to H^{p+1}(K_\cdot)\xrightarrow{x}H^{p+1}(K_\cdot).$$

Она показывает, что модули $H^p(\bar{K}_.)$ артиновы. По индуктивному предположению $H^p(\bar{K}_.)=0$ при $p<g-1$, так что отображение $H^{p+1}(K_.)\xrightarrow{x}H^{p+1}(K_.)$ инъективно при $p<g-1$. Но модуль $H^{p+1}(K_.)$ артинов, поэтому некоторая степень x аннулирует $H^{p+1}(K_.)$, так что $H^{p+1}(K_.)=0$ при $p<g-1$. Лемма доказана.

Применим эту лемму к рассмотренному выше комплексу A-свободных (и потому $\mathcal{O}_{\hat{X},0}$-свободных) модулей. Она показывает, что $R^ip_{12*}(M)=0$ при $0\leqslant i<g$ и что

$$0\to K_0\to K_1\to\ \ldots\ \to K_g\to N\to 0$$

— точная последовательность A-модулей. Здесь $N=$ $=[R^gp_{12*}(M)]_{(s,\,0)}\cong H^g(S\times\hat{X}\times X,\ M)$, и этот модуль, как мы видели, свободен. Далее, модули когомологий комплекса

$$0\to\hat{K}_g\to\hat{K}_{g-1}\to\ \ldots\ \to\hat{K}_0\to 0,\qquad \hat{K}_i=\mathrm{Hom}_A(K_i,\ A)$$

снова артиновы. По лемме получаем комплекс

$$0\to\hat{K}_g\to\ \ldots\ \to\hat{K}_0\to K\to 0,$$

где K — артинов A-модуль. Из точности последовательности

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad k \\ \qquad\qquad\qquad \wr\| \\ 0\to H^0\left(\{s\}\times\{0\}\times X,\ P\left|_{\{s\}\times\{0\}\times X}\right.\right)\to K_0\underset{A}{\otimes}k\to k_1\underset{A}{\otimes}k \end{array}$$

следует, что коядро гомоморфизма $\hat{K}_1\otimes k\to\hat{K}_0\otimes k$ одномерно над k, т. е. пространство $K\underset{A}{\otimes}k=K/\mathfrak{m}_AK$ одномерно. Поэтому как A-модуль $K\cong A/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}\subset A$ — некоторый идеал, а свободный комплекс $(\hat{K}_i)$ является резольвентой $A/\mathfrak{a}$. Отсюда следует, что когомологии двойственного комплекса аннулируются умножением на $\mathfrak{a}$, т. е. что $\mathfrak{a}N=0$. Поскольку модуль N B-свободен, то $\mathfrak{a}\cap B\otimes 1=(0)$, т. е. отображение $B\to A/\mathfrak{a}$ инъективно. Пусть $\mathfrak{b}$ — любой $\mathfrak{m}$-примарный идеал, а $V(\mathfrak{b})$ — определенная им замкнутая подсхема в $S\times\hat{X}$. Тогда

$$H^0(V(\mathfrak{b})\times X,\ M|_{V(\mathfrak{b})\times X})\cong \operatorname{Ker}[K_0/\mathfrak{b}K_0\to K_1/\mathfrak{b}K_1]\cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a},\ A/\mathfrak{b}),$$

откуда следует, что $V(\mathfrak{a})$ содержит максимальную подсхему $\Gamma_S\subset S\times X$, над которой расслоение M тривиально. С другой стороны,

$$H^0(V(\mathfrak{a})\times X,\ M|_{V(\mathfrak{a})\times X})\cong \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a},\ A/\mathfrak{a})\cong A/\mathfrak{a},$$

и естественное отображение линейных расслоений

$$\mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})\times X}\underset{A/\mathfrak{a}}{\otimes} H^0(V(\mathfrak{a})\times X,\ M|_{V(\mathfrak{a})\times X})\to M|_{V(\mathfrak{a})\times X}$$

сюръективно, потому что соответствующее отображение групп сечений, редуцированное по модулю максимального идеала

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a},\ A/\mathfrak{a}) & & \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a},\ A/\mathfrak{m}_A)\\
\wr\Vert & & \wr\Vert\\
H^0(V(\mathfrak{a})\times X,\ M|_{V(\mathfrak{a})\times X}) & \to & H^0(\{s\}\times\{0\}\times X,\ M|_{\{s\}\times\{0\}\times X})
\end{array}$$

сюръективно, а расслоение $M|_{\{s\}\times\{0\}\times X}$ тривиально. Следовательно, расслоение $M|_{V(\mathfrak{a})\times X}$ тривиально, откуда вытекает, что $\Gamma_S=V(\mathfrak{a})$. В частности, гомоморфизм $B\to H^0(\Gamma_S,\ \mathcal{O}_{\Gamma_S})=A/\mathfrak{a}$ инъективен. С другой стороны, слой $\pi^{-1}(s)$ является замкнутой подсхемой в $\Gamma_S\cap\{s\}\times X$, а ограничение $\{s\}\times P$ на $\pi^{-1}(s)\times X$ тривиально. Так как $\{0\}$ — максимальная подсхема в $\hat{X}$, над которой P тривиально (в силу конструкции $\hat{X}$), слой $\pi^{-1}(s)$ совпадает с приведенной точкой $(s,0)$. Это означает, что $A/\mathfrak{a}+\mathfrak{m}_B A=k$, так что гомоморфизм $B\to A/\mathfrak{a}$ сюръективен и, стало быть, является изоморфизмом. Поэтому $\pi\colon \Gamma_S\to S$ — изоморфизм.

Рассмотрим теперь любую схему S и расслоение L на $S\times X$, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть $\varphi\colon S\to X$ — любой морфизм, $\Gamma_\varphi\colon S\to S\times X$ — его график. Тогда

$$(\varphi\times 1_X)^*(P)\cong L\Leftrightarrow \Gamma_\varphi(S)\subset\Gamma_S.$$

Поэтому теорема следует из того обстоятельства, что Γ_S — график однозначно определенного морфизма из S в X.

Следствие 1.
$$H^i(\hat{X}\times X, P)=\begin{cases}(0) & \text{при } i\neq g,\\ k & \text{при } i=g.\end{cases}$$

Доказательство. В прежних обозначениях, где $B=k$ и L — тривиальное расслоение, было показано, что $K\cong k$, т. е. что комплекс
$$0\to\hat{K}_g\to\hat{K}_{g-1}\to\ \ldots\ \to\hat{K}_0\to k\to 0$$
является свободной резольвентой для k. С другой стороны, любые две свободные резольвенты одного и того же модуля гомотопны, а поле вычетов k любого регулярного локального кольца, в том числе $\mathcal{O}_{\hat{X},0}$, обладает хорошо известной стандартной резольвентой — комплексом Кошуля. Именно, пусть классы элементов $x_1,\ldots,x_g\in\mathfrak{m}_0$ составляют базис пространства $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Обозначим через L_k свободный $\mathcal{O}_{\hat{X},0}$-модуль с базисом $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\ldots$ $\ldots<i_k\leqslant g)$. Комплекс Кошуля имеет вид
$$0\to L_g\xrightarrow{d_g}L_{g-1}\xrightarrow{d_{g-1}}\ldots\xrightarrow{d_1}L_0\xrightarrow{d_0}k\to 0,$$
$$d_k(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})=$$
$$=\sum_{l=1}^{k}(-1)^l x_{i_l}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge\hat{e}_{i_l}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}.$$

Двойственный к $\hat{K}_.$ комплекс
$$0\to K_0\to K_1\to\ \ldots\ \to K_g\to 0$$
гомотопен поэтому двойственному к комплексу Кошуля, который, как легко видеть, изоморфен комплексу Кошуля.

Прямое вычисление когомологий доказывает следствие 1.

Следствие 2. *Пусть X есть g-мерное абелево многообразие. Тогда*

$$\dim_k H^p(X, \mathcal{O}) = \binom{g}{p}.$$

Доказательство. Действительно, $H^p(X, \mathcal{O})$ изоморфно p-му пространству когомологий комплекса

$$0 \to K_0 \otimes k \to K_1 \otimes k \to \ldots \to K_g \otimes k \to 0,$$

который гомотопен комплексу Кошуля, тензорно умноженному на k. Но кограничные операторы комплекса Кошуля после тензорного умножения на k становятся нулевыми. Поэтому $\dim_k H^p(X, \mathcal{O})$ совпадает с рангом модуля p-коцепей комплекса Кошуля, т. е. с $\binom{g}{p}$.

Следствие 3. *Касательное пространство к $(0) \in \hat{X}$ канонически изоморфно $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.*

Доказательство. Положим $S = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, так что касательное пространство к $\hat{X}$ в нуле канонически изоморфно $\operatorname{Hom}_0(S, \hat{X})$ (Hom_0 — множество морфизмов, переводящих в 0 единственную точку s_0 схемы S). С другой стороны, в силу теоремы

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_0(S, \hat{X}) = \{&\text{линейные расслоения на } S \times X, \\ &\text{тривиальные на } \{s_0\} \times X\} = \\ &= \operatorname{Ker}\left[H^1(S \times X, \mathcal{O}^*_{S \times X}) \to H^1_X(\{s_0\} \times X, \mathcal{O}^*_X)\right].\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим точную последовательность пучков мультипликативных групп

$$1 \to 1 + \varepsilon\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^*_{S \times X} \to \mathcal{O}^*_X \to 1.$$

Учитывая, что $1 + \varepsilon\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$ (как пучки абелевых групп), находим из точной последовательности когомологий:

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(S \times X, \mathcal{O}^*_{S \times X}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*_X).$$

Это доставляет естественный изоморфизм касательного пространства к $0 \in \hat{X}$ с пространством $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ как абелевых групп. Можно проверить, что на самом деле это изоморфизм k-пространств.

Пусть теперь f: $X \to X$ — изогения абелевых многообразий. Из теоремы следует, что существует единственный гомоморфизм $\hat{f}$: $\hat{Y} \to \hat{X}$ двойственных абелевых многообразий со следующим свойством. Пусть P_X, P_Y — расслоения Пуанкаре на $X \times \hat{X}$, $Y \times \hat{Y}$ соответственно; тогда

$$(1 \times \hat{f})^* (P_X) \cong (f \times 1)^* (P_Y).$$

Обозначив это расслоение через Q и применив к нему предложение из § 12, находим, что

$$\chi(Q) = \deg \hat{f} \cdot \chi(P_X) = \deg f \cdot \chi(P_X),$$

а так как $\chi(P_X) = \chi(P_Y) = (-1)^g$ по следствию 1, то

Следствие 4. *Пусть f: $X \to Y$ — изогения абелевых многообразий; тогда*

$$\deg f = \deg \hat{f}.$$

Следствие 5. *Для любого линейного расслоения L на X теоретико-множественный гомоморфизм φ_L: $X \to \mathrm{Pic}\,^\circ X \cong \hat{X}$ является морфизмом, а $K(L)$ с введенной выше структурой схемы — его ядром.*

Доказательство. В самом деле, φ_L — единственный морфизм из X в $\hat{X}$ со свойством

$$(\varphi_L \otimes 1_X)^* P \cong m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}.$$

Но по определению $K(L)$ — наибольшая подсхема $S \subset X$, такая, что расслоение, стоящее справа, тривиально на $S \times X$. В силу универсального свойства расслоения P $\mathrm{Ker}(\varphi_L)$ представляет собой наибольшую подсхему $S \subset X$, такую, что левое расслоение тривиально на $S \times X$. Это доказывает следствие.

Симметричное определение многообразия $\hat{X}$. Мы хотим представить отношение между X и $\hat{X}$ так, чтобы его симметричность стала очевидной. Назовем *дивизорным соответствием* между двумя абелевыми многообразиями X, Y одинаковой размерности любое линейное расслоение на $X \times Y$, ограничения которого на $\{0\} \times Y$ и $X \times \{0\}$ тривиальны.

Предложение. *Следующие свойства дивизорного соответствия Q между многообразиями X, Y равносильны*:

(a) *не существует подсхемы $Z \subset X$, отличной от* (0), *для которой ограничение Q на $Z \times Y$ тривиально*;

(b) *не существует подсхемы $Z' \subset Y$, отличной от* (0), *для которой ограничение Q на $X \times Z'$ тривиально*;

(c) $|\chi(Q)| = 1$.

Если эти условия выполнены, Y канонически изоморфно многообразию, двойственному к X; то же самое с заменой X на Y.

Доказательство. По симметрии достаточно проверить импликации (b)$\Leftrightarrow$(c). Прежде всего определен морфизм f: $Y \to \hat{X}$, для которого $(1_X \times f)^* P = Q$. Этот морфизм является гомоморфизмом, потому что $f(0) = 0$. Очевидно, условие (b) означает, что ядро f тривиально. Если это так, то в силу равенств $\dim Y = \dim X = \dim \hat{X}$ морфизм f является изогенией и, значит, изоморфизмом по следствию 1 § 12. Нужно доказать, следовательно, что f есть изоморфизм в том и только том случае, когда $|\chi(Q)| = 1$. По теореме 2 § 12 если f является изогенией, то

$$|\chi(Q)| = \deg f \cdot |\chi(P)| = \deg f,$$

откуда и следует требуемое утверждение. Если же размерность ядра f положительна, то можно найти конечную подгруппу $F \subset \operatorname{Ker}(f)$ сколь угодно большого порядка d. Отображение $1_X \times f$: $X \times Y \to X \times \hat{X}$ представляется в виде композиции

$$X \times Y \to X \times Y/F \to X \times \hat{X},$$

так что Q является прообразом некоторого линейного расслоения на $X \times Y/F$. По теореме 2 § 12 имеем $d \mid |\chi(Q)|$, что возможно лишь при $\chi(Q) = 0$, так как d сколь угодно велико.

Следствие (условие двойственности). *Для любого абелева многообразия X канонический морфизм i: $X \to \hat{\hat{X}}$, отвечающий расслоению Пуанкаре на $X \times \hat{X}$ (которое рассматривается как семейство линейных* *расслоений на $\hat{X}$, параметризованное многообразием X), является изоморфизмом.*

Доказательство. В самом деле, дивизорное соответствие P на $X \times \hat{X}$ удовлетворяет условиям (b) (и (c)), а значит, и (a).

§ 14. Теория двойственности конечных коммутативных групповых схем

В этом параграфе предполагается, что основное поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику $p > 0$.

Конечная коммутативная групповая схема G аффинна, так что $G = \operatorname{Spec} R$, где R — конечномерная k-алгебра. Групповой закон определяет отображение μ: $R \to R \otimes_k R$, обращение — гомоморфизм i: $R \to R$, а „значение функции в единице e“ — пополняющее отображение δ: $R \to k$. Гипералгебра $\mathbf{H}$ группы G в этом случае изоморфна векторному пространству R^*, двойственному к R, и мы будем пользоваться обозначением R^* вместо $\mathbf{H}$. Как в § 11, групповой закон μ по двойственности определяет ассоциативное умножение

$$\mu^*: R^* \otimes_k R^* \to R^*.$$

Из коммутативности G следует, что μ кокоммутативно и, значит, μ^* коммутативно. Функционал δ^*, как и в § 11, определяет единицу алгебры R^*. С другой стороны, умножение в R, m: $R \otimes_k R \to R$, по двойственности определяет коассоциативное и кокоммутативное отображение m^*: $R^* \to R^* \otimes_k R^*$. Дуализация i^*: $R^* \to R^*$ вместе с m^* превращает $\hat{G} = \operatorname{Spec} R^*$ в новую конечную коммутативную групповую схему. Ее *единица* отвечает гомоморфизму $R^* \to k$ „значение линейного функционала в $1 \in R$“. Тем самым с каждой конечной коммутативной групповой схемой G мы канонически связали другую конечную коммутативную групповую схему $\hat{G}$, которую назовем *двойственной* к G. Эта конструкция принадлежит Картье. Теперь мы дадим несколько более „геометрическое" определение (ср. Оорт [27], стр. III.16.2).

Пусть G, H — групповые схемы, S — любая схема; символом $\mathrm{Hom}_S(G, H)$ обозначим множество таких морфизмов f: $S \times G \to S \times H$, для которых диаграммы

$$\begin{tikzcd} S \times G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & S \times H \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (S \times G) \underset{S}{\times} (S \times G) \arrow[r, "m_{S,G}"] \arrow[d, "f \underset{S}{\times} f"] & S \times G \arrow[d, "f"] \\ (S \times H) \underset{S}{\times} (S \times H) \arrow[r, "m_{S,H}"] & S \times H \end{tikzcd}$$

коммутативны. Здесь $m_{S,G}$ и $m_{S,H}$ — умножения в G и H, поднятые до $S \times G$ и $S \times H$ соответственно. Такие морфизмы f назовем S-гомоморфизмами из G в H. Легко проверить, что если H коммутативна, закон композиции $f + g = m_{S,H} \circ (f, g)$ превращает $\mathrm{Hom}_S(G, H)$ в коммутативную группу. Любому морфизму $T \to S$ отвечает гомоморфизм $\mathrm{Hom}_S(G, H) \to \mathrm{Hom}_T(G, H)$, заданный формулой $f \to f \underset{S}{\times} T$, так что, фиксировав G, H, мы получаем функтор $S \to \mathrm{Hom}_S(G, H)$: $\mathcal{S}ch \to \mathcal{S}ets$, который принимает значения даже в категории абелевых групп, если H коммутативна.

Пусть теперь $G = \mathrm{Spec}\, A$ — конечная коммутативная групповая схема и H — мультипликативная группа $\mathbf{G}_m$. Мы утверждаем, что функтор $\mathcal{S}ch \to \mathcal{A}b$: $S \to \mathrm{Hom}_S(G, \mathbf{G}_m)$ представлен в этом случае группой $\hat{G}$, т. е. что для каждой схемы S определен канонический изоморфизм

$$\hat{\mathcal{G}}(S) \cong \mathrm{Hom}_S(G, \mathbf{G}_m),$$

и эти изоморфизмы функториальны по S. Для доказательства заметим, что когда S пробегает семейство открытых подмножеств фиксированной схемы, оба функтора определяют пучки на этой схеме. Стандартное рассуждение тогда показывает, что достаточно установить требуемый изоморфизм на категории аффинных схем $S = \mathrm{Spec}\, R$. Как обычно, объекты, морфизмы и пр., полученные заменой базы на R, будем отмечать индексом R. Координатные кольца групп G_R и $\mathbf{G}_{mR}$ превращаются тогда в биалгебры над R. Иначе говоря, это — алгебры с единицей над R, снабженные дополнительно коумножением $A_R \to A_R \underset{R}{\otimes} A_R$ и т. п. с обычными тождествами. Гомоморфизм биалгебр определяется очевидным образом. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{G}}(R) &= \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} R, \hat{G}) = \operatorname{Hom}_{k\text{-алг}}(A^*, R) = \\ &= \operatorname{Hom}_{R\text{-алг}}(R \underset{k}{\otimes} A^*, R) = \operatorname{Hom}_{R\text{-алг}}((A_R)^*, R),\end{aligned}$$

где $(A_R)^*$ есть R-алгебра $\operatorname{Hom}_R(A_R, R)$. Далее,

$$\operatorname{Hom}_R(G, \mathbf{G}_m) = \operatorname{Hom}_{R\text{-биалг}}(R[T, T^{-1}], A_R) \xhookrightarrow{i^*} A_R,$$

где i — вложение, определенное формулой $i(\varphi) = \varphi(T)$. Очевидно, элемент $\alpha \in A_R$ принадлежит образу i тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

(i) α обратим в A_R;

(ii) $\mu_R(\alpha) = \alpha \otimes \alpha$.

Но если второе условие выполнено, первое превращается в

(i′) $\varepsilon_R(\alpha) = 1$, где ε_R: $A_R \to R$ — гомоморфизм „значение в единице". Действительно, из (i) следует, что элемент $\varepsilon_R(\alpha)$ обратим; с другой стороны, $(\varepsilon_R \otimes \otimes \varepsilon_R)(\mu(\alpha)) = \varepsilon_R(\alpha)$, т. е. $\varepsilon_R(\alpha)^2 = \varepsilon_R(\alpha)$, или $\varepsilon_R(\alpha) = 1$. Наоборот, пусть i: $A_R \to A_R$ — гомоморфизм обращения; тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G_R \times G_R \arrow[dr, "m_R"] & \\ G_R \arrow[ur, "{(1, i)}"] \arrow[dr] & & G_R \\ & \operatorname{Spec} R \arrow[ur, "e_R"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Рассматривая прообраз функции α относительно двух морфизмов, находим, что $\alpha \cdot i^*(\alpha) = 1$, так что α обратима.

Теперь заметим, что A_R является R-свободной алгеброй конечного ранга. Поэтому имеется естествен-

6 Зак. 842

ный изоморфизм

$$A_R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R((A_R)^*, R),$$

при котором элементы α, удовлетворяющие условиям (i′) и (ii), переходят в элементы $f \in \mathrm{Hom}_R((A_R)^*, R)$ со свойствами $f(1) = 1$ и $f(XY) = f(X)f(Y)$ для всех X, $Y \in (A_R)^*$ (потому что $XY = \mu_R^*(X \otimes Y)$). Этим устанавливается теоретико-множественная биекция между $\widehat{\mathscr{G}}(R)$ и $\mathrm{Hom}_R(G, \mathbf{G}_m)$, функториальная по R. Проверка того, что это — изоморфизм групп, предоставляется читателю.

Положим здесь, в частности, $S = G$. Единице группы $\widehat{\mathscr{G}}(\widehat{G})$ отвечает тогда некоторый морфизм $\widehat{G} \times G \to \mathbf{G}_m$, определяющий гомоморфизм k-алгебр $k[T, T^{-1}] \to A^* \otimes_k A$, $T \to \delta$, где δ — „диагональный" элемент в $A^* \otimes_k A$ (переходящий в 1_A при каноническом изоморфизме $A^* \otimes_k A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(A, A)$). Пользуясь этим, нетрудно проверить, что так определенный „универсальный характер" $\widehat{G} \times G \to \mathbf{G}_m$ является билинейным отображением групповых схем в очевидном смысле слова.

Примеры. 1) Пусть G — дискретная (т. е. приведенная) конечная группа порядка n, взаимно простого с p. Согласно сказанному выше, геометрические точки $\widehat{G}$ образуют группу, изоморфную $\mathrm{Hom}(G, k^*)$, порядок которой тоже равен n. С другой стороны, обозначая через A кольцо функций на G, имеем $\dim A = \dim A^* = n$, откуда следует, что группа $\widehat{G}$ также приведена и как дискретная группа изоморфна $\mathrm{Hom}(G, k^*)$.

2) Пусть теперь G приведена и изоморфна $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Для любой приведенной группы G символом $k[G]$ обозначим ее групповую алгебру. Отождествив элемент $g \in G$ с линейной формой „коэффициент при g" $A \to k$, получим изоморфизм векторных пространств $k[G] \xrightarrow{\sim} A^*$. Тривиально проверяется, что это изоморфизм алгебр. Следовательно, координатное кольцо A^*

группы $\widehat{G}$ изоморфио групповой алгебре группы $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, т. е. $A^* \cong k[X]/(X^{p^n}-1)$, где элемент X соответствует коэффициенту при образующей $\overline{1} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. С другой стороны, для любых f, $g \in A$

$$\overline{1}(fg) = (fg)(\overline{1}) = f(\overline{1})\, g(\overline{1}) = (\overline{1} \otimes \overline{1})(f \otimes g),$$

так что коумножение в A^* задается формулой $X \to X \otimes X$. Стало быть, мы установили изоморфизм

$$(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})\widehat{\ } \cong \mu_{p^n},$$

а также

$$(\mu_{p^n})\widehat{\ } \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

Пусть теперь G — любая конечная коммутативная групповая схема. Будем говорить, что она типа l (локальная) или r (приведенная), если ее пространство состоит из одной точки или если она приведена соответственно. Будем говорить, что G имеет тип (l, l) (соответственно (l, r), (r, l), (r, r)), если G типа l и $\widehat{G}$ типа l (соответственно G типа l, а $\widehat{G}$ типа r и т. п.). Покажем, что любая группа однозначно разлагается в произведение

$$G = G_{rr} \times G_{rl} \times G_{lr} \times G_{ll}$$

групп указанных типов. В самом деле, пусть G° — связная компонента единицы в G, рассматриваемая как открытая и замкнутая подсхема, а G_{red} — приведенная группа. Тогда замкнутые вложения $G^\circ \hookrightarrow G$ и $G_{\mathrm{red}} \hookrightarrow G$ индуцируют гомоморфизм $G^\circ \times G_{\mathrm{red}} \to G$, который, очевидно, является изоморфизмом. Это разложеиие G в произведение приведенной и локальной групп, очевидно, единственно. Поэтому достаточно показать, что всякая локальная (соответственно приведенная) группа однозначно разлагается в произведение $G_{lr} \times G_{ll}$ (соответственно $G_{rr} \times G_{rl}$). В самом деле, пусть G приведена. Тогда G однозначно представляется в виде $G_1 \times G_2$, где порядок G_1 взаимно прост с p, а G_2 есть p-группа. По доказанному выше $\widehat{G}_1$ приведена, а $\widehat{G}_2$ локальна, что доказывает результат для приведенных групп. В случае когда G локальна, разложим $\widehat{G}$ в произведение локальной и приведенной групп и снова дуализируем. Это приведет к однозначно определенному разложению локальной группы G в произведение групп типов (l, r) и (l, l) соответственно, что доказывает утверждение для локальных групп.

Из этого обсуждения следует, что к типу (r, r) принадлежат в точности приведенные группы порядка, взаимно простого с p, т. е. прямые произведения примарных циклических групп периода, взаимно простого с p. Далее, тип (r, l) состоит из p-групп, т. е. прямых произведений групп $\mathbf{Z}/p^{n_i}\mathbf{Z}$. Наконец, тип (l, r) по двойственности состоит из прямых произведений групп $\mu_{p^{n_i}}$.

Групп типа (l, l) очень много. К ним принадлежат, в частности, группы α_{p^n}. В самом деле, касательное пространство к группе $\operatorname{Spec} k[X]/(X^{p^n})$ одномерно, так что она не разлагается в произведение; поэтому достаточно проверить, что она не изоморфна μ_{p^n}. Достаточно даже установить это для α_p. Обозначим через ξ линейную форму на $A = k[X]/(X^p)$,

$$\xi(X^i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq p-1, \\ 1 & \text{при } i = p-1. \end{cases}$$

Тогда имеем $\xi^2(X^i) = (\xi \otimes \xi)((1 \otimes X + X \otimes 1)^i) = 0$ при $i \leqslant p-1$, так что A^* не приведена.

До сих пор мы занимались кругом идей, связанных с гомоморфизмами группы G в $\mathbf{G}_m$. Обратимся теперь к гомоморфизмам G в $\mathbf{G}_a$ и смежным вопросам. Положим, как выше, $G = \operatorname{Spec} R$, $\widehat{G} = \operatorname{Spec} R^*$. Будем обозначать буквами $x, y, \ldots$ элементы R, а буквами $\alpha, \beta, \ldots$ — элементы R^*. Пусть s и s^* — коумножения в R и R^* соответственно. Напомним, что в § 11 было построено естественное действие R^* на пучке $\mathcal{O}_G$. В нашем аффинном случае оно определяет естественное вложение

$$R^* \hookrightarrow \operatorname{Hom}_k(R, R).$$

Вот его явное описание. Пусть α: $R \to k$ — некоторый элемент из R^*. Отображение D_α: $R \to R$ совпадает с композицией

$$R \xrightarrow{s} R \underset{k}{\otimes} R \xrightarrow{1 \otimes \alpha} R.$$

В частности, если $\alpha(1) = 0$, $\alpha(\mathfrak{m}_e^2) = (0)$, то D_α — дифференцирование R над k. Все операторы D_α инвариантны относительно сдвигов в очевидном смысле слова. Сопряженный оператор D_α^*: $R^* \to R^*$ имеет вид

$$\begin{array}{c} R^* \xleftarrow{\text{умножение}} R^* \underset{k}{\otimes} R^* \leftarrow R^*, \\ \qquad\qquad\qquad \beta \otimes \alpha \leftarrow \beta, \end{array}$$

т. е. совпадает с умножением на α.

В качестве приложения дадим новую интерпретацию группы $\mathrm{Hom}(\hat{G}, \mathbf{G}_a)$:

$$\mathrm{Hom}_{\text{Гр. сх.}}(\hat{G}, \mathbf{G}_a) \cong \mathrm{Hom}_{\text{биалг}}(k[X], R^*) \cong$$
$$\cong \{\alpha \in R^* \mid s^*\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha\}.$$

(слева стоят гомоморфизмы групповых схем, а справа — биалгебр). Действительно, любой гомоморфизм φ: $k[X] \to R^*$ определяется образом $\alpha = \varphi(X)$; φ совместим с коумножением в том и только том случае, когда $s^*\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$. Такие α называются *примитивными* элементами биалгебры R^*. Сопоставляя с ними отображения D_α (сопряженные с умножением на α), убеждаемся, что примитивные элементы в точности соответствует инвариантным дифференцированиям биалгебры R:

$$\{\alpha \in R^* \mid s^*\alpha = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha\} \cong \{D\colon R \to R \mid D \text{ — инвариантное дифференцирование}\} \cong$$
$$\cong \mathrm{Lie}(G).$$

Итак, $\mathrm{Hom}(\hat{G}, \mathbf{G}_a) \cong \mathrm{Lie}(G)$. Кроме того, операция возведения в p-ю степень в $\mathrm{Lie}(G)$ переводит D в p-кратную итерацию этого оператора, что соответствует композиции отображения φ: $\hat{G} \to \mathbf{G}_a$ с морфизмом Фробениуса F: $\mathbf{G}_a \to \mathbf{G}_a$ (ибо $F^*(X) = X^p$).

Изучим теперь подробнее один специальный класс групп.

Определение. Групповая схема G имеет *высоту* 1, если она состоит из одной точки e и $x^p=0$ для *всех* $x \in \mathfrak{m}_e$ (группа G не предполагается коммутативной).

Легко видеть, что *схема* любой такой группы изоморфна $\operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^p, \ldots, X_n^p)$. В самом деле, выберем элементы $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{m}_e$, классы которых составляют базис пространства $\mathfrak{m}_e/\mathfrak{m}_e^2$, и положим $R=\Gamma(\mathcal{O}_G)$. Очевидно, R изоморфно факторкольцу кольца $k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^p, \ldots, X_n^p)$. С другой стороны, у R есть дифференцирования $D_i: R \to R$, такие, что $D_i(X_j) \equiv \delta_{ij} \pmod{\mathfrak{m}_e}$. Отсюда легко вывести, что одночлены $\prod_{i=1}^{n} X_i^{a_i}$, $0 \leqslant a_i < p$ все линейно независимы над k.

Мы видели в § 11, что у любой групповой схемы G есть максимальная групповая подсхема $G^{(p)} \subset G$ высоты 1, алгебра Ли которой та же, что и у группы G. Классическая эквивалентность категорий алгебр Ли и локальных групп Ли имеет следующий аналог в характеристике p:

Теорема. *Функтор $G \to \operatorname{Lie}(G)$ является эквивалентностью категорий конечных групповых схем высоты* 1 *и конечномерных p-алгебр Ли над полем k, (т. е. конечномерных пространств над k, снабженных скобкой Пуассона и оператором взятия p-й степени).*

Мы установим это лишь для коммутативных групп G, соответствующих алгебрам Ли с тривиальной скобкой.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — любое векторное пространство над k, снабженное p-линейиым отображением $\alpha \to \alpha^{(p)}$. Обозначим через $U(\mathfrak{G})$ k-алгебру $S(\mathfrak{G})/I$, где I — идеал в симметрической алгебре $S(\mathfrak{G})$ пространства $\mathfrak{G}$, порожденный элементами вида $\alpha^{(p)}-\alpha^p$, $\alpha \in \mathfrak{G}$. Заметим, что если элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ составляют базис $\mathfrak{G}$, одночлены $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{r_i}$, $0 \leqslant r_i < p$

составляют базис $U(\mathfrak{G})$. Определим коумножение $s\colon U(\mathfrak{G})\to U(\mathfrak{G})\underset{k}{\otimes} U(\mathfrak{G})$, положив $s\alpha=1\otimes\alpha+\alpha\otimes 1$ для всех $\alpha\in\mathfrak{G}$ (проверьте, что это отображение продолжается до гомоморфизма алгебр). Легко проверить, что $U(\mathfrak{G})$ — коммутативная конечномерная биалгебра и что отображение $\mathfrak{G}\to U(\mathfrak{G})$ определяет ковариантный функтор от $\mathfrak{G}$. Положим $R(\mathfrak{G})=U(\mathfrak{G})^*$ и рассмотрим групповую схему $G(\mathfrak{G})=\operatorname{Spec} U(\mathfrak{G})^*$. Покажем, что функторы

$$G\to \operatorname{Lie}(G),$$

$$\mathfrak{G}\to G(\mathfrak{G})$$

взаимно обратины.

Прежде всего установим, что для любого пространства $\mathfrak{G}$, снабженного p-линейным отображением, группа $G(\mathfrak{G})$ имеет высоту 1, и построим естественный изоморфизм $\mathfrak{G}\xrightarrow{\sim}\operatorname{Lie}(G(\mathfrak{G}))$. Действительно, определено естественное вложение $\mathfrak{G}\hookrightarrow U(\mathfrak{G})$. Так как элементы из $\mathfrak{G}$ примитивны, это приводит к вложению $\mathfrak{G}\hookrightarrow\operatorname{Lie}(G(\mathfrak{G}))$. Чтобы проверить, что высота группы равна единице, достаточно показать, что для любого элемента $x\in R(\mathfrak{G})$, принадлежащего максимальному идеалу точки 0, имеем $x^p=0$. Отображение D отождествляет $U(\mathfrak{G})$ с некоторой подалгеброй алгебры $\operatorname{End}_k(R(\mathfrak{G}))$. Поэтому достаточно проверить, что $D_\alpha(x^p)=0$ для всех $\alpha\in U(\mathfrak{G})$. Но это очевидно, потому что D_α — дифференцирование. Остается показать, что отображение $\mathfrak{G}\to\operatorname{Lie}(G(\mathfrak{G}))$ сюръективно. Пусть $n=\dim_k(\mathfrak{G})$, $m=\dim_k\operatorname{Lie}(G(\mathfrak{G}))$. В силу нашего замечания о базисе кольца $U(\mathfrak{G})$, $p^n=\dim_k U(\mathfrak{G})$; с другой стороны, согласно результату о структуре кольца $\Gamma(\mathcal{O}_{G(\mathfrak{G})})$, $p^m=\dim_k R(\mathfrak{G})$. Тем самым $n=m$, так что $\mathfrak{G}\xrightarrow{\sim}\operatorname{Lie}(G(\mathfrak{G}))$.

Обратно, пусть G — коммутативная групповая схема высоты 1 с координатным кольцом R. Пусть $\varphi\colon\operatorname{Lie}(G)\to R^*$ — обычное вложение. В § 11 мы видели, что $\varphi(\alpha^{(p)})=\varphi(\alpha)^p$, так что φ продолжается до гомоморфизма

$$\tilde{\varphi}\colon U(\operatorname{Lie}(G))\to R^*.$$

Поскольку для всех $\alpha \in \mathrm{Lie}(G)$ элементы α и $\varphi(\alpha)$ примитивны относительно коумножения в $U(\mathrm{Lie}(G))$ и R^* соответственно, $\tilde{\varphi}$ является гомоморфизмом биалгебр. Сопряженный морфизм тоже является гомоморфизмом биалгебр:

$$\tilde{\varphi}^*\colon\ R \to R(\mathrm{Lie}(G)).$$

Переходя к спектрам, получаем некоторый гомоморфизм групповых схем:

$$\varphi'\colon\ G(\mathrm{Lie}(G)) \to G.$$

Согласно первой части доказательства, $\mathrm{Lie}(G)$ совпадает с алгеброй Ли группы $G(\mathrm{Lie}(G))$, а из нашей конструкции видно, что дифференциал отображения φ' индуцирует некоторый изоморфизм алгебр Ли групп $G(\mathrm{Lie}\, G)$ и G. В силу леммы Накаямы любой морфизм одноточечных схем $f\colon X \to Y$ с инъективным дифференциалом является замкнутым вложением. Применив это к φ', находим, что отображение $\tilde{\varphi}^*$ сюръективно. Положив $n = \dim_k \mathrm{Lie}(G)$, получаем, что $p^n = \dim_k R = \dim_k R(\mathrm{Lie}(G))$. Поэтому $\tilde{\varphi}^*$ и φ' — изоморфизмы.

Следствие. *Пусть G — коммутативная групповая схема высоты* 1. *Тогда гомоморфизм p_G (умножение на p в G) нулевой.*

Доказательство. В самом деле, умножение на p является нулевым гомоморфизмом алгебр Ли, так что результат следует из теоремы.

Не только групповая структура групповой схемы $G = \mathrm{Spec}\, R$ высоты 1 определяется ее алгеброй Ли. Задание действия такой группы G на схеме X также можно описать через действие $\mathrm{Lie}(G)$ на X, т. е. k-линейное отображение $\alpha \to D_\alpha$ из $\mathrm{Lie}(G)$ в пространство дифференцирований $D_\alpha\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, такое, что выполняются два условия:

(i) $$[D_\alpha, D_\beta] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{Lie}(G),$$

(ii) $$D_\alpha^{(p)} = (D_\alpha)^p \quad \forall \alpha \in \mathrm{Lie}(G).$$

Проверка этого распадается на несколько шагов:

(1) Задать отображение $\alpha \mapsto D_\alpha$ с указанными свойствами — это то же, что задать гомоморфизм

алгебр

$$D\colon U(\mathrm{Lie}(G)) \to \mathrm{Diff}(\mathcal{O}_X)$$

(где $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}_X)$ — алгебра дифференциальных операторов на $\mathcal{O}_X$), переводящий $\mathrm{Lie}(G)$ в дифференцирования.

(2) Интерпретируя D как отображение

$$\tilde{D}\colon U(\mathrm{Lie}(G)) \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

и пользуясь тем, что координатное кольцо R двойственно к $U(\mathrm{Lie}(G))$, находим, что задание $\tilde{D}$ равносильно заданию сопряженного отображения

$$\mu^*\colon \mathcal{O}_X \to R \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_X.$$

Условия $D(1)=1$ и $D_{\alpha\beta}=D_\alpha \circ D_\beta$ превращаются соответственно в коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} & R \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_X \arrow[dr, "\varepsilon\otimes 1"] & \\ \mathcal{O}_X \arrow[ur, "\mu^*"] \arrow[rr, "1"] & & \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} & R \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_X \arrow[dr, "s\otimes 1"] & \\ \mathcal{O}_X \arrow[ur, "\mu^*"] \arrow[dr, "\mu^*"'] & & R\otimes R\otimes \mathcal{O}_X. \\ & R \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_X \arrow[ur, "1\otimes\mu^*"'] & \end{tikzcd}$$

Можно также проверить, что требование, чтобы образ $\mathrm{Lie}(G)$ состоял из дифференцирований, т. е. перестановочность D с коумножением, означает, что μ^* является гомоморфизмом алгебр.

(3) Задание гомоморфизма μ^* равносильно заданию некоторого морфизма $\mu\colon G\times X\to X$, входящего в две коммутативные диаграммы, которые выражают в точности, что μ — действие G на X.

Рассмотрим, наконец, разложение коммутативной конечной групповой схемы G высоты 1 на множители одного типа. Имеем

$$(*)\qquad G = G_{lr} \times G_{ll},$$

и оба множителя G_{lr} и G_{ll} имеют высоту 1. Так как группа G_{lr} аннулируется умножением на p, то

$$G_{lr} \cong \mu_p^n$$

для некоторого n. Мы видели, что алгебра $\mathrm{Lie}(\mu_p)$ одномерна и ее образующая e удовлетворяет условию $e^{(p)} = e$. Разложение $(*)$ индуцирует разложение

$$(**)\qquad \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G_{lr}) \oplus \mathrm{Lie}(G_{ll}) = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2.$$

Из сказанного ясно, что $\mathfrak{G}_1$ обладает базисом $e_1, \ldots, e_n$, для которого $e_i^{(p)} = e_i$. С другой стороны, группа $\widehat{G}_{ll}$ также локальна, а $\mathfrak{G}_2$ содержится в максимальном идеале кольца $\Gamma(\mathcal{O}_{\widehat{G}_{ll}})$, так что при достаточно большом n выполняется $\alpha^{(p^n)} = 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{G}_2$. Отсюда и из теоремы получаем в качестве следствия результат из „p-линейной“ алгебры.

Следствие. *Любое*[1]) *векторное пространство V с p-линейным отображением $x \to x^{(p)}$ однозначно разлагается в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно $x \to x^{(p)}$,*

$$V = V_s \oplus V_n,$$

со следующими свойствами: пространство V_s имеет базис $x_1, \ldots, x_n$, для которого $x_i^{(p)} = x_i$; на пространстве V_n отображение $x \to x^{(p)}$ нильпотентно.

Подпространства V_s и V_n называются полупростым и нильпотентным подпространствами пространства V соответственно. В случае $V = \mathrm{Lie}(G)$

$$\mathrm{Lie}(G)_s = \mathrm{Lie}(G_{lr}),$$
$$\mathrm{Lie}(G)_n = \mathrm{Lie}(G_{ll}).$$

---

[1]) Конечномерное над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 0$. — *Прим. перев.*

§ 15. Приложения к абелевым многообразиям

Теорема 1. *Пусть f: $X \to Y$ — изогения абелевых многообразий с ядром K. Обозначим через $\hat{f}$: $\hat{Y} \to \hat{X}$ двойственное отображение с ядром K'. Тогда существует канонический изоморфизм между группой K' и двойственной к K группой $\hat{K}$.*

Доказательство. Пусть L — любое линейное расслоение на Y и $x \in X$. Тогда точка $\varphi_{f^*L}(x) \in \hat{Y}$ представляет линейное расслоение $T_x^*(f^*L) \otimes f^*L^{-1}$, а так как

$$T_x^*(f^*L) \otimes f^*L^{-1} \cong f^*[T_{f(x)}^* L \otimes L^{-1}],$$

отсюда следует, что

$$\varphi_{f^*L}(x) = \hat{f}(\varphi_L(f(x))).$$

Если, в частности, φ_{f^*L} — нулевое отображение, то и φ_L должно быть нулевым; иначе говоря, $f^*L \in \in \mathrm{Pic}^\circ Y \Rightarrow L \in \mathrm{Pic}^\circ X$. Отсюда следует, что для любой схемы S определены естественные изоморфизмы

$$\mathcal{K}'(S) \cong \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Hom}(S, \hat{Y}) \to \mathrm{Hom}(S, \hat{X})] \cong$$

$$\cong \mathrm{Ker}\left[\begin{pmatrix}\text{лииейные рас-}\\ \text{слоения на } S \times Y,\\ \text{тривиальные}\\ \text{на } S \times (0)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\text{линейные рас-}\\ \text{слоения на } S \times X,\\ \text{тривиальные}\\ \text{на } S \times (0)\end{pmatrix}\right] \cong$$

$$\cong \mathrm{Ker}\left[\begin{pmatrix}\text{линейные расслое-}\\ \text{ния на } S \times Y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\text{линейные расслое-}\\ \text{ния на } S \times X\end{pmatrix}\right].$$

Последнее отображение является изоморфизмом, потому что любое расслоение на $S \times Y$, которое становится тривиальным на $S \times X$, тривиально на $S \times (0)$. Но $S \times Y$ есть факторпространство $S \times X$ относительно свободного действия группы K. Поэтому, пользуясь результатами § 12, находим естествеиный изоморфизм

$$\operatorname{Ker}\left[\begin{pmatrix}\text{линейные расслое-}\\ \text{ния на } S\times Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\text{линейные расслое-}\\ \text{ния на } S\times X\end{pmatrix}\right]\cong$$
$$\cong\begin{bmatrix}\text{продолжения действия } K \text{ на } S\times X\\ \text{до действия на } S\times X\times \mathbf{A}^1\end{bmatrix}.$$

Заметим теперь, что действие группы K на $S\times X\times \mathbf{A}^1$ описывается морфизмом μ, который входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K\times S\times X\times \mathbf{A}^1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_{123}"] & S\times X\times \mathbf{A}^1 \arrow[d, "p_{12}"] \\
K\times S\times X \arrow[r, "\mu_0"] & S\times X,
\end{tikzcd}$$

где μ_0 — действие K на X сдвигами, дополненное тривиальным действием на S. Обозначим через $\lambda=p_3\circ\mu$ индуцированный морфизм $K\times S\times X\times \mathbf{A}^1\to \mathbf{A}^1$. Тогда в терминах T-значных точек продолжение действия группы K можно описать формулой

$$k\colon (s,\ x,\ \alpha)\to(s,\ x+k,\ \lambda(k,\ s,\ x,\ \alpha)),$$

$k\in\mathcal{K}(T)$, $s\in\mathcal{S}(T)$, $x\in\mathcal{X}(T)$, $\alpha\in\mathcal{A}^1(T)$. Так как на $\mathbf{A}^1$ это действие должно быть *линейным*, то

$$\lambda(k,\ s,\ x,\ \alpha)=\alpha\lambda(k,\ s,\ x,\ 1).$$

Из полноты X следует, что для любой схемы W имеем $\Gamma(\mathcal{O}_{W\times X})\cong\Gamma(\mathcal{O}_W)$, так что все морфизмы $W\times X\to\mathbf{A}^1$ пропускаются через W. В частности, значение λ не зависит от аргумента $x\in\mathcal{X}(T)$. Тем самым интересующее нас действие должно иметь вид

$$k\colon (s,\ x,\ \alpha)\to(s,\ x+k,\ \lambda(k,\ s,\ 0,\ 1)\alpha).$$

Кроме того,

$$\lambda(k_1+k_2,\ s,\ 0,\ 1)=\lambda(k_1,\ s,\ 0,\ 1)\,\lambda(k_2,\ s,\ 0,\ 1),$$
$$\lambda(0,\ s,\ 0,\ 1)=1.$$

Иными словами, λ задается S-значным гомоморфизмом $\chi\colon K\times S\to\mathbf{G}_m$. Наоборот, любой такой гомоморфизм χ определяет некоторое действие μ по

формуле
$$\mu(k)(s, x, \alpha) = (s, x+k, \chi(k, s)\alpha).$$
Поэтому
$$\begin{bmatrix}\text{продолжения действия } K \text{ на } S\times X\\ \text{до действия на } S\times X\times \mathbf{A}^1\end{bmatrix}\cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S(K, \mathbf{G}_m) \cong \hat{\mathscr{H}}(S).$$

Собирая воедино все доказанное, приходим к выводу, что $K' \cong \hat{K}$.

Определение. Изогения $f\colon X\to Y$ абелевых многообразий имеет *высоту* 1, если $k(X)^p\subset k(Y)$, где $k(X)$, $k(Y)$ — поля функций на этих многообразиях.

Покажем, что f имеет высоту 1 в том и только том случае, когда $\mathrm{Ker}(f)$ есть групповая схема высоты 1.

В самом деле, если f имеет высоту 1, то $\mathcal{O}_{X,0}$ совпадает с целым замыканием кольца $\mathcal{O}_{Y,0}$ в поле $k(X)$, а кольцо $\mathcal{O}_{Y,0}$ в своем поле частных целозамкнуто. Поэтому $\mathcal{O}_{Y,0}=\mathcal{O}_{X,0}\cap k(Y)\supset\{f^p\mid f\in\mathcal{O}_{X,0}\}$, так что $\mathfrak{m}_{Y,0}\supset$ $\supset\{f^p\mid f\in\mathfrak{m}_{X,0}\}$. Так как $\mathrm{Ker}(f)\cong\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,0}/\mathfrak{m}_{Y,0}\mathcal{O}_{X,0})$, это показывает, что группа $\mathrm{Ker}(f)$ имеет высоту 1. Наоборот, пусть $K=\mathrm{Ker}(f)$ — группа высоты 1, и пусть R^* — ее биалгебра. Обозначим через U любое непустое аффинное открытое подмножество X с координатным кольцом A. Действие K на U определяется гомоморфизмом R^* в алгебру дифференциальных операторов на A; при этом некоторая система образующих алгебры R^* переходит в векторные поля на U. Поэтому элементы A, инвариантные относительно действия K — это в точности элементы, аннулируемые соответствующими дифференцированиями. В частности, они содержат кольцо $A^{(p)}=\{f^p\mid f\in A\}$, так что $k(X)^p\subset k(Y)$.

Теорема 2. *Для всякого абелева многообразия X существует взаимно однозначное соответствие между изогениями $f\colon X\to Y$ высоты 1 (с точностью до изоморфизма) и p-подалгебрами алгебры Ли многообразия X.*

Доказательство. В самом деле, изогении высоты 1 однозначно с точностью до изоморфизма определены своими ядрами, которые являются групповыми подсхемами высоты 1. В свою очередь они лежат в максимальной групповой подсхеме высоты 1: $X_p = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,0}/\mathfrak{m}_{X,0}^{(p)})$. Но, как уже было доказано, ее групповые подсхемы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с p-подалгебрами Ли алгебры $\operatorname{Lie}(X_p) = \operatorname{Lie}(X)$.

Пример. Пользуясь доказанной теоремой, мы можем привести пример абелева многообразия X, у которого есть бесконечно много разных изогений $X \to Y$ высоты 1.

В самом деле, для любого простого числа $p > 0$ существует эллиптическая кривая E, определенная однозначно с точностью до изогении и такая, что в $\operatorname{Lie}(X)$ отображение p-й степени нулевое (Дойринг [13]; см. также § 21). Пусть E — такая кривая и $X = E \times E$. Тогда любое одномерное подпространство в $\operatorname{Lie}(X)$ инвариантно относительно отображения p-й степени и, значит, определяет изогению высоты 1.

p-ранг. Пусть X — абелево многообразие размерности g над полем характеристики $p > 0$ и $n = p^r m$ — целое число, $r \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, $(p, m) = 1$. Проанализируем строение конечной групповой схемы $X_n = \operatorname{Ker}(n_X)$. Очевидно, X_m и X_{p^r} являются групповыми подсхемами схемы X_n, так что определен гомоморфизм $X_m \times X_{p^r} \to X_n$. В действительности, это изоморфизм, потому что X_m есть (r, r)-компонента группы X_n, а X_{p^r} — произведение (r, l), (l, r) и (l, l)-компонент. В § 6 мы убедились, что X_m — дискретная приведенная группа, изоморфная $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^{2g}$. Поэтому достаточно изучить строение группы X_{p^n}, которую мы теперь будем обозначать G_n. Пусть $(G_1)_{\mathrm{red}} = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$. Так как группа X делима, для любого $n \geqslant 1$ определена точная последовательность

$$0 \to G_{1,\,\mathrm{red}} \to G_{n+1,\,\mathrm{red}} \xrightarrow{p} G_{n,\,\mathrm{red}} \to 0.$$

Индукция показывает тогда, что $G_{n,\,\mathrm{red}}=(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^r$ при всех $n\geqslant 1$. По теореме 1 этого параграфа $\widehat{G}_n$ совпадает с ядром $(p^n)_{\widehat{X}}$, поэтому существует такое целое число s, что $\widehat{G}_{n,\,\mathrm{red}}=(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^s$ при всех $n\geqslant 0$. Стало быть, разложение G_n на компоненты имеет вид

$$G_n=(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^r\times\widehat{(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^s}\times G_n^\circ=(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^r\times\mu_{p^n}^s\times G_n^\circ,$$

где G_n° — локально-локальная группа. Поскольку порядок G_n равен p^{2ng}, отсюда следует существование такого целого числа $t\geqslant 0$, что $r+s+t=2g$; порядок G_n° равен p^{nt}.

Покажем теперь, что для изогенных абелевых многообразий числа $r=r_X$, $s=s_X$ и $t=t_X$ совпадают. Достаточно проверить это для r и s, потому что $r+s+t=2g$. Больше того, можно ограничиться рассмотрением r, потому что $s_X=r_{\widehat{X}}$. Пусть $f\colon X\to Y$ — некоторая изогения, k — порядок ее ядра. Так как $f(X_{p^n})\subseteq Y_{p^n}$, порядок $X_{p^n,\,\mathrm{red}}$ не более чем в k раз превосходит порядок $Y_{p^n,\,\mathrm{red}}$, т. е. $p^{nr_X}\leqslant kp^{nr_Y}$ при всех n, откуда $r_X\leqslant r_Y$. Далее, $\mathrm{Ker}(f)$ — конечная групповая схема; поэтому она аннулируется умножением на некоторое целое число $N>0$, так что $\mathrm{Ker}(N_X)\supset\supset\mathrm{Ker}(f)$. Следовательно, гомоморфизм N_X разлагается в композицию $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}X$. Здесь $Y\xrightarrow{g}X$ — изогения, так что $r_Y\leqslant r_X$. Отсюда следует, что числа r, s и t — инварианты относительно изогений. В частности, $r_X=r_{\widehat{X}}=s_X$, потому что любое абелево многообразие X изогенно двойственному многообразию $\widehat{X}$. Таким образом,

$$G_n=(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^r\times(\mu_{p^n})^r\times G_n^\circ,$$

где группа G_n° локально-локальная порядка p^{nt}, $2r+t=2g$. В частности, $r\leqslant g$. Число r называется *p-рангом* многообразия X и является инвариантом относительно изогений.

Учитывая, что p_X индуцирует нулевое отображение алгебр Ли, находим, что

$$\mathrm{Lie}(X) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}(p_X)) = \mathrm{Lie}(G_1) = \mathrm{Lie}(\mu_p)^r \oplus \mathrm{Lie}(G_n^\circ).$$

Так как группа G_n° локально-локальна, отображение p-й степени на $\mathrm{Lie}(G_n^\circ)$ нильпотентно, а $\mathrm{Lie}(\mu_p)^r$ имеет такой базис $e_1, \ldots, e_r$, для которого $e_i^p = e_i$. Следовательно, p-ранг многообразия X совпадает с размерностью полупростой компоненты пространства $\mathrm{Lie}(X)$ относительно отображения p-й степени. Тот же результат верен для $\mathrm{Lie}(\hat{X})$, потому что p-ранги многообразий X и $\hat{X}$ совпадают. С другой стороны, мы построили канонический изоморфизм $\mathrm{Lie}(\hat{X}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть F: $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ — гомоморфизм Фробениуса $F(\alpha) = \alpha^p$; той же буквой F обозначим индуцированное им p-линейное отображение $H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Покажем, что при изоморфизме $\mathrm{Lie}(\hat{X}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ отображение p-й степени в $\mathrm{Lie}(X)$ переходит в F. Отсюда будет следовать, что p-ранг многообразия X совпадает также с размерностью полупростой компоненты пространства $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ относительно отображения Фробениуса F.

Теорема 3. *При естественном изоморфизме* $\mathrm{Lie}(\hat{X}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ *отображение p-й степени в* $\mathrm{Lie}(X)$ *переходит в отображение Фробениуса в пространстве* $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Доказательство. Прежде всего опишем оператор p-й степени на векторных полях на схеме X с помощью функтора $\mathscr{X}$ подобно тому, как это было сделано в § 11 для скобок Пуассона. Пусть D — некоторое векторное поле, рассматриваемое здесь как автоморфизм схемы $X \times \mathrm{Spec}\,\Lambda$ над $\mathrm{Spec}\,\Lambda$ (где $\Lambda = k[\varepsilon]/(\varepsilon)^2$), тождественный на замкнутом слое $X \hookrightarrow X \times \mathrm{Spec}\,\Lambda$. Пусть $M = k[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p]/(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_p^2)$ и η_i: $\Lambda \to M$ — гомоморфизмы k-алгебр, для которых $\eta_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$. Пусть $\varphi_i = \mathrm{Spec}\,\eta_i$: $\mathrm{Spec}\,M \to \mathrm{Spec}\,\Lambda$ — соответствующие морфизмы схем. Замена базы посредством φ_i переводит D в некоторый автоморфизм D_i

схемы $X \times \operatorname{Spec} M$ над $\operatorname{Spec} M$; поэтому $D' = D_1 D_2 \ldots D_p$ является также некоторым автоморфизмом схемы $X \times \operatorname{Spec} M$ над $\operatorname{Spec} M$. Обозначим через s_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ элементарную симметрическую функцию степени i от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ в M. Тривиально проверяется, что $s_1 s_i = (i+1) s_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Поэтому $s_1, \ldots, s_p$ порождают в M подкольцо $M' = k[s_1, s_p]$. Обозначим через ψ: $\operatorname{Spec} M \to \operatorname{Spec} M'$ естественный морфизм. Мы утверждаем, что существует единственный автоморфизм D'' схемы $X \times \operatorname{Spec} M'$ над $\operatorname{Spec} M'$, индуцирующий D' при замене базы на $\operatorname{Spec} M$. Далее, все соотношения между s_1, s_p в кольце $M' = k[s_1, s_p]$ порождены $s_1^p = 0$, $s_p^2 = 0$, так что определен гомоморфизм η: $M' \to \Lambda$, $\eta(s_1) = 0$, $\eta(s_p) = \varepsilon$. Пусть $\varphi = \operatorname{Spec} \eta$: $\operatorname{Spec} \Lambda \to \operatorname{Spec} M'$. Мы определили следующие отображения:

$$\Lambda \xrightarrow{\eta_i} M \supset M' \xrightarrow{\eta} \Lambda,$$

$$\operatorname{Spec} \Lambda \xleftarrow{\varphi_i} \operatorname{Spec} M \xrightarrow{\psi} \operatorname{Spec} M' \xleftarrow{\varphi} \operatorname{Spec} \Lambda.$$

Автоморфизм D'' индуцирует некоторый автоморфизм D''' схемы $X \times \operatorname{Spec} \Lambda$ над $\operatorname{Spec} \Lambda$, тождественный на замкнутом слое $X \hookrightarrow X \times \operatorname{Spec} \Lambda$. Поэтому D''' можно рассматривать как векторное поле на X. Мы утверждаем, что $D''' = D^{(p)}$.

Достаточно проверить это в случае $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда D_i отвечает автоморфизму M-алгебры $A \underset{k}{\otimes} M \to A \underset{k}{\otimes} M$, для которого $a \to a + (Da)\varepsilon_i$, а D' — автоморфизму $A \underset{k}{\otimes} M$ над M, который определен формулой

$$a \to \left\{ \prod_i (1 + \varepsilon_i D) \right\} a = (1 + s_1 D + s_2 D^2 + \ldots + s_p D^p)\, a.$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Пусть теперь G — некоторая групповая схема, а D — левоинвариантное векторное поле, которое принимает в единице значение $t \in \mathscr{G}(\Lambda)$. Соответствующий автоморфизм $G \times \operatorname{Spec} \Lambda$ совпадает тогда со сдвигом на t, а D_i является сдвигом

$G \times \operatorname{Spec} M$ на образ t относительно морфизма $\mathscr{G}(\Lambda) \xrightarrow{\mathscr{G}(\eta_i)} \mathscr{G}(M)$. Тем самым D' есть сдвиг на $t' = \prod_{i=1}^{p} \mathscr{G}(\eta_i)(t) \in \mathscr{G}(M)$. Но t' является образом некоторого элемента $t'' \in \mathscr{G}(M')$ при отображении $\mathscr{G}(M') \to \mathscr{G}(M)$. Гомоморфизм $\mathscr{G}(M)$: $\mathscr{G}(M') \to \mathscr{G}(\Lambda)$ переводит t'' в $t^{(p)}$:

$$\begin{array}{ccccccc} t & & t' & & t'' & & t^{(p)} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \mathscr{G}(\Lambda) & \to & \mathscr{G}(M) & \leftarrow & \mathscr{G}(M') & \to & \mathscr{G}(\Lambda). \end{array}$$

Применим эти замечания к случаю, когда X — абелево многообразие, $\hat{X}$ — двойственное многообразие, $G = \hat{X}$. Тогда для любой k-алгебры R группа $\mathscr{G}(R)$ совпадает с группой линейных расслоений L на $X \times \operatorname{Spec} R$, тривиальных на $\{0\} \times \operatorname{Spec} R$ и таких, что для любой точки $P \in \operatorname{Spec} R$ ограничение $L|_{X \times \{P\}}$ принадлежит $\operatorname{Pic}^\circ X$. Из определений видно, что если 1-коцикл $\{f_{ij}\}$ в некотором покрытии $\mathfrak{A}$ многообразия X с коэффициентами в структурном пучке $\mathcal{O}_X$ представляет класс когомологий $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$, то соответствующий касательный вектор $t_\xi \in \operatorname{Lie}(\hat{X}) \subset \mathscr{X}(\Lambda) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*_{X \times \operatorname{Spec} \Lambda})$ представлен 1-коциклом $\{1 + \varepsilon f_{ij}\}$ в том же покрытии. Следовательно, интересующий нас элемент из $\mathscr{X}(M) \subset H^1(X, \mathcal{O}^*_{X \times \operatorname{Spec} M})$ представлен 1-коциклом $\prod_{r=1}^{p} (1 + \varepsilon_r f_{ij}) = (1 + f_{ij}s_1 + f^2_{ij}s_2 + \ldots + f^p_{ij}s_p)$. Отсюда следует, что $t^{(p)}_\xi \in \operatorname{Lie}(X) \subset \mathscr{X}(\Lambda)$ представлен 1-коциклом $\{1 + f^p_{ij}\varepsilon\}$, который отвечает 1-коциклу $\{f^p_{ij}\}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}_X$. Это завершает доказательство.

§ 16. Когомологии обратимых пучков

Наша ближайшая цель в этом параграфе — доказательство следующих двух теорем:

(1) Теорема Римана — Роха. *Пусть L — линейное расслоение на абелевом многообразии X, $L \cong$*

$\cong \mathcal{O}_X(D)$. *Тогда*

$$\chi(L) = \frac{(D^g)}{g!},$$

$$\chi(L)^2 = \deg \varphi_L,$$

где (D^g) — *индекс* g-*кратного самопересечения дивизора* D.

(2) Теорема об обращении в нуль. *В прежних предположениях пусть группа* $K(L)$ *конечна. Тогда существует единственное целое число* $i = i(L)$, $0 \leqslant i(L) \leqslant g$, *такое, что* $H^p(X, L) = (0)$ *при* $p \neq i$ *и* $H^i(X, L) \neq 0$. *Далее,* $i(L^{-1}) = g - i(L)$.

Доказательства. (1) Пусть L_1, L_2 — такие линейные расслоения на X, что $L_1 \otimes L_2^{-1} \in \operatorname{Pic}^\circ X$. Тогда $\chi(L_1) = \chi(L_2)$. Действительно, рассмотрим на $X \times \hat{X}$ линейное расслоение $p_1^*(L_1) \otimes P$. Тогда эйлерова характеристика его ограничения L_y на $X \times \{y\}$, $y \in \hat{X}$, не зависит от y. Но оба пучка L_1 и L_2 изоморфны таким ограничениям, так что $\chi(L_1) = \chi(L_2)$.

Далее, если расслоение L симметрично, то $n_X^*(L^m) \cong L^{mn^2}$, так что

$$(*) \qquad \chi\left(L^{mn^2}\right) = \chi\left(n_X^*\left(L^m\right)\right) = \deg n_X \chi\left(L^m\right) = n^{2g}\chi\left(L^m\right).$$

Поскольку $\chi(L^k)$ есть многочлен от k, формула (*) показывает, что этот многочлен (для любого L) однороден степени g. Положим

$$\chi(L^k) = a(L)\frac{k^g}{g!},$$

так что $\chi(L) = \frac{a(L)}{g!}$. Нужно показать лишь, что $a(L) = (D^g)$ при $L = \mathcal{O}(D)$. Примем сначала, что это уже доказано для очень обильных расслоений L, и пусть L_i, $i = 1, 2$, очень обильны. Тогда функция

$$P(n_1, n_2) = g!\,\chi\left(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2}\right)$$

является многочленом от n_1 и n_2. Поскольку $\chi\left(L_1^{kn_1} \otimes L_2^{kn_2}\right) = k^g\chi\left(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2}\right)$, он однороден степени g.

Пусть, далее, $L_i = \mathcal{O}(D_i)$. Учитывая, что расслоение $L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2}$ очень обильно при n_1, $n_2 \geqslant 1$, приходим к формуле

$$P(n_1, n_2) = ((n_1 D_1 + n_2 D_2)^g) = \sum_{i=0}^{g} \binom{g}{i} n_1^i n_2^{g-i} (D_1^i D_2^{g-i}) \text{ при } n_1, n_2 \geqslant 1;$$

отсюда следует, что то же равенство выполнено для всех $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, в частности для $n_1 = 1$, $n_2 = -1$. Но в виде $L_1 \otimes L_2^{-1}$, где L_i очень обильны, можно представить любое расслоение на X.

Остается тем самым установить формулу $a(L) = (D^g)$ для очень обильных расслоений L. У такого расслоения есть набор сечений $\sigma_0, \ldots, \sigma_g$, таких, что (i) σ_i не имеют общих нулей; (ii) дивизоры нулей сечений $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$ пересекаются трансверсально в (D^g) различных точках. Условие (i) определяет морфизм $X \xrightarrow{\varphi} \mathbf{P}^g$: $x \to (\sigma_0(x), \ldots, \sigma_g(x))$, в силу условия (ii) нульмерный цикл $\varphi^{-1}((1, 0, \ldots, 0))$ имеет степень (D^g), так что степень φ равна (D^g). Следовательно, по приложению 3 § 6, коэффициент $a(L)$ отличается от старшего коэффициента многочлена $g!\,\chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^g}(n))$ множителем (D^g), т. е. $a(L) = (D^g)$.

Мы должны показать теперь, что $\chi(L)^2 = \deg \varphi_L$. Пусть сначала группа $K(L)$ конечна. Тогда по определению φ_L имеем

$$(1_X \times \varphi_L)^* P \cong m^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1}$$

на $X \times X$. Высшие прямые образы пучка $m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$ на первом множителе сосредоточены на конечном множестве $K(L)$: это показывают такие же рассуждения, как в § 8 и в § 13. Поэтому

$$R^i p_{1*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) \cong R^i p_{1*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}) \cong R^i p_{1*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}),$$

откуда

$$\chi\left(m^*\mathscr{L}\otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\chi\left(R^ip_{1*}\left(m^*\mathscr{L}\otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right)\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\chi\left(R^ip_{1*}\left(m^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right)\right)=$$
$$=\chi\left(m^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right).$$

Поскольку $(m,\ p_2)$: $X\times X\to X\times X$ — изоморфизм и $(m,\ p_2)^*\left[p_1^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right]\cong m^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}$, находим

$$\chi\left(m^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right)=\chi\left(p_1^*\mathscr{L}\otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right)=$$
$$=\chi(\mathscr{L})\,\chi(\mathscr{L}^{-1})=(-1)^g\chi(\mathscr{L})^2.$$

Так как $X\times\hat{X}$ — факторпространство $X\times X$ относительно свободного действия $K(L)$, отсюда следует, что

$$(-1)^g\deg\varphi_L=\deg\varphi_L\chi(P)=\chi\left(\left(1_X\times\varphi_L\right)^*(P)\right)=$$
$$=\chi\left(m^*L\otimes p_1^*L^{-1}\otimes p_2^*L^{-1}\right)=(-1)^g\chi(L)^2.$$

Пусть, наконец, группа $K(L)$ бесконечна. Тогда можно найти конечную подгруппу $F\subset K(L)$ сколь угодно большого порядка f. Отображение $1_X\times\varphi_L$: $X\times X\to\to X\times\hat{X}$ можно представить в виде композиции $X\times X\to X\times X/F\to X\times\hat{X}$. Поэтому эйлерова характеристика расслоения $m^*L\otimes p_1^*L^{-1}$, обратного образа $P\otimes p_2^*L$ относительно $1_X\times\varphi_L$, делится на f. Так как это верно для сколь угодно больших f, $\chi\left(m^*\mathscr{L}\otimes\otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}\right)=0$. Как и выше, находим, что $\chi\left(m^*\mathscr{L}\otimes\otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}\right)=(-1)^g\chi(\mathscr{L})^2$. Поэтому $\chi(L)=0$ и $\deg\varphi_L=0$.

Это завершает доказательство теоремы Римана — Роха.

(2) Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
X\times X & \xrightarrow{p_2} & X\\
{\scriptstyle 1\times\varphi_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_L}\\
X\times\hat{X} & \xrightarrow{p_2'} & \hat{X}
\end{array}$$

(Это означает, что объект в левом верхнем углу отождествляется с расслоенным произведением объектов в левом нижнем и правом верхнем углах над объектом в правом нижнем углу.) Тогда $m^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes \otimes p_2^*L^{-1} \cong (1 \times \varphi_L)^*(P)$. Поскольку φ_L — плоский морфизм, следствие 5 из § 5 показывает, что

$$\varphi_L^*(R^q p'_{2*}(\mathscr{P})) \cong R^q p_{2*}((1 \times \varphi_L)^*(\mathscr{P})) \cong$$
$$\cong R^q p_{2*}\left(m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right).$$

Но в § 13 мы убедились, что $R^q p'_{2*}(\mathscr{P}) = 0$ при $q \neq g$, и $R^g p'_{2*}(\mathscr{P})$ — поле вычетов $k(0)$ в точке $0 \in X$. Отсюда выводится, что

$$(*)\quad R^q p_{2*}\left(m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}\right) = \begin{cases} (0) & \text{при } q \neq g, \\ \mathcal{O}_{K(L)} & \text{при } q = g. \end{cases}$$

Поскольку группа $K(L)$ конечна, аргументы, использованные в доказательстве (1), позволяют заменить в формуле (*) расслоение $m^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes p_2^*L^{-1}$ на $m^*L \otimes p_1^*L^{-1}$. Переходя к гомологиям, находим

$$\dim H^q\left(X \times X,\ m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq g, \\ \deg \varphi_L & \text{при } q = g. \end{cases}$$

В этой формуле, как в (1), мы можем заменить $m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}$ на $p_2^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}$. Применяя формулу Кюннета, получаем тогда, что

$$\sum_{i=0}^{q} h^i(L)\, h^{q-i}(L^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq g, \\ \deg \varphi_L & \text{при } q = g, \end{cases}$$

где $h^i(L) = \dim H^i(X, \mathscr{L})$.

Так как все числа h^i неотрицательны, отсюда следует, что *лишь одна* из размерностей $h^i(L)$ положительна и *лишь одна* из размерностей $h^j(L^{-1})$ положительна, причем $i + j = g$.

Замечания. Рассмотрим случай $k = \mathbf{C}$, $X = V/U$, где V есть g-мерное комплексное векторное пространство, $U \subset V$ — некоторая решетка. Пусть $L = L(H, \alpha)$ —

линейиое расслоеиие на X, $E = \operatorname{Im} H$, так что E — кососимметричная вещественная билинейная форма на V и $E(U \times U) \subset \mathbf{Z}$. Комплексная структура вводит ориентацию на V. Для любого базиса $u_1, \ldots, u_{2g}$ решетки U вычислим $\det(E(u_i, u_j))$ — это определитель решетки, он положителен и от выбора базиса не зависит. Мы видели, что конечность группы $K(L)$ равносильна невырожденности формы E и что

$$\deg \varphi_L = \text{порядок } K(L) = \text{порядок } (U^{\perp}/U),$$

где $U^{\perp} = \{x \in V \mid E(x, u) \in \mathbf{Z}\, \forall u \in U\}$. Элементы λ_i, определенные формулой $\lambda_i(x) = E(x, u_i)$, образуют базис двойственной к $U^{\perp}$ решетки $\operatorname{Hom}(U^{\perp}, \mathbf{Z})$, так что

$$\deg \varphi_L = \det(\lambda_i(u_j)) = \det(E(u_i, u_j)).$$

Отсюда находим, что $|\chi(L)| = \sqrt{\det(E(u_i, u_j))}$. Воспользуемся теперь тем, что для любой кососимметрической матрицы A степени $2g$ существует однозначно определенная полиномиальная функция $Pf(A)$, пфаффиаи A, со свойствами $Pf(A)^2 = \det A$ и $Pf((E_0)) = 1$, где E_0 — матрица вида

$$E_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right)$$

Когда X пробегает $SL(2g, \mathbf{C})$, то $Pf(X'AX)^2 = \det(X'AX) = \det A = Pf(A)^2$. Из связности группы $SL(2g, \mathbf{C})$ следует, что $Pf(X'AX) = Pf(A)$ для всех $X \in SL(2g, \mathbf{C})$. Но два разных базиса $u_1, \ldots, u_{2g}$ решетки U с *положительным* произведением $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{2g}$ отличаются преобразованием из $SL(2g, \mathbf{R})$; поэтому для таких базисов $Pf(E(u_i, u_j))$ постоянен. Стало быть, этот пфаффиан одиозиачно определяется формой E, решеткой U и ориентацией пространства V, которую индуцирует комплексная структура.

Мы утверждаем теперь, что

$$\chi(L) = Pf(E(u_i, u_j)).$$

Действительно, обе части равенства продолжаются до функций на $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \operatorname{Pic} X$, полиномиальных на любом конечномерном подпространстве. Поэтому либо $\chi(L) = Pf(E(u_i, u_j))$ для всех L, либо $\chi(L) = -Pf(E(u_i, u_j))$ для всех L. Мы установим справедливость первого тождества, если покажем, что для обильного расслоения L число $Pf(E(u_i, u_j))$ положительно. В самом деле, тогда $L = L(H, \alpha)$, где H — положительно определенная эрмитова форма. Тем самым нужно лишь проверить, что для любой положительно определенной эрмитовой формы H на комплексном векторном пространстве V и любого вещественного базиса $u_1, u_2, \ldots, u_{2g}$ с положительным определителем $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{2g}$ пфаффиан $Pf(\operatorname{Im} H(u_i, u_j))$ положителен. В силу нашего предыдущего замечания это верно для всех базисов, если верно для одного из них. В частности, достаточно рассмотреть $\mathbf{R}$-базис $u_1, iu_1, u_2, iu_2, \ldots, iu_g$, для которого $H(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Но матрица $\operatorname{Im} H$ в этом базисе принимает вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -0 & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right)$$

и ее пфаффиан равен 1. Это доказывает утверждение.

Индекс линейных расслоений. Цель оставшейся части этого параграфа — установить следующее выражение для индекса $i(L)$.

Теорема. *Пусть L — обильное линейное расслоение на абелевом многообразии X, M — невырожденное линейное расслоение. Обозначим через $P(t)$ много-*

член, для которого $P(n) = \chi(L^n \otimes M)$. *Все* g *корней многочлена* P *вещественны, и индекс расслоения* M *совпадает с числом положительных корней (учитывая кратность) этого многочлена.*

Мы разобъем доказательство на ряд шагов. При этом будет существенио использоваться одна общая лемма. Прежде чем формулировать ее, условимся о некоторых обозначениях. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{Z}^k$; мы пишем $|a| = \sum_{i=1}^{k} |a_i|$, и для любого семейства $L = (L_1, \ldots, L_k)$ линейиых расслоений обозначаем расслоение $L_1^{a_1} \otimes L_2^{a_2} \otimes \ldots \otimes L_k^{a_k}$ символом L^a.

Лемма. *Пусть* X — *проективное* r*-мерное многообразие,* $L_1, \ldots, L_k$ — *линейные расслоения на* X. *Тогда существует константа* c, *зависящая только от* L_i *и такая, что*

$$\dim H^i(L^a) \leqslant c(1 + |a|^r)$$

при всех $i \geqslant 0$ *и* $a \in \mathbf{Z}^k$.

Доказательство. Утверждение легко сводится к случаю, когда все расслоеиия L_i очень обильны. В самом деле, выберем очень обильное расслоение L_{k+1}, такое, что все $L_i \otimes L_{k+1}$ очень обильны, и положим $L'_i = L_i \otimes L_{k+1}$, $L'_{k+1} = L_{k+1}$. Тогда существует (линейиый) автоморфизм T группы $\mathbf{Z}^{k+1}$, такой, что для всех $a = (a_1, \ldots, a_{k+1}) \in \mathbf{Z}^{k+1}$ справедливо равенство $L_1^{a_1} \otimes \ldots \otimes L_{k+1}^{a_{k+1}} = (L')^{Ta}$ и $\alpha^{-1}|a| \leqslant |Ta| \leqslant \alpha|a|$ с подходящей константой $\alpha > 0$.

Предположим теперь, что все L_i очень обильиы. Проведем индукцию по числу $\nu = \dim X + k$. При $\nu = 0$ утверждение тривиально. Можно считать поэтому, что $\nu > 0$ и что для меньших значений ν утверждение уже доказано. Если к тому же $k = 0$, утверждение снова очевидно. Пусть $k > 0$, обозначим через L' семейство расслоений $\{L_1, \ldots, L_{k-1}\}$ и для всех $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{Z}^k$ положим $a' = (a_1, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbf{Z}^{k-1}$. Существование константы c и требуемой оценки для всех $a \in \mathbf{Z}^k$ с $a_k = 0$ следует тогда из индуктивного предположения. Для любого $\mu \in \mathbf{Z}$ определена точная последовательность

$$0 \to L'^{a'} \otimes L_k^{\mu} \to L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1} \to L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}|_H \to 0,$$

где H — некоторое гиперплоское сечение X относительно проективного вложения, отвечающего расслоению L_k. Пусть теперь $a_k > 0$. Из точной последовательности

$$H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu}) \to H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}) \to H^i(H, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}|_H)$$

находим, пользуясь предположением индукции,

$$\dim H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}) - \dim H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu}) \leqslant \leqslant \dim H^i(H, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}|_H) \leqslant c(|a|^{r-1} + 1)$$

для всех $0 \leqslant \mu < a_k$ и подходящей константы c. Суммируя по всем таким μ, получаем, что

$$\dim H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{a_k}) \leqslant c|a_k|(|a|^{r-1} + 1) + \dim H^i(L'^{a'}) \leqslant \leqslant c'(|a|^r + 1).$$

Аналогично, при $a_k < 0$ из точной последовательности

$$H^{i-1}(H, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}|_H) \to \to H^i(X, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu}) \to H^i(X, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1})$$

получаем для всех $0 > \mu \geqslant a_k$ неравенства

$$\dim H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu}) - \dim H^i(L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}) \leqslant \leqslant \dim H^{i-1}(H, L'^{a'} \otimes L_k^{\mu+1}|_H) \leqslant c(1 + |a|^{r-1}),$$

и, суммируя по всем таким μ, находим, как и выше, требуемую оценку. Лемма доказана.

Шаг А. *Пусть L — невырожденное линейное расслоение на абелевом многообразии X, H — очень обильное расслоение, P — многочлен от двух переменных, для которого $P(m, n) = \chi(L^m \otimes H^n)$. Если $P(1, t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $i(L) = i(L \otimes H)$.*

Доказательство. Следующее замечание существенно для дальнейшего. Пусть $f\colon X \to Y$ — изогения абелевых многообразий степени, взаимно простой с p, L — линейное расслоение на Y, для которого $\chi(L) \neq 0$. Тогда $i(f^*(L)) = i(L)$. В самом деле, из предложения в § 7 известно, что L выделяется прямым слагаемым в $f_*(f^*(L))$ и что $H^i(X, f^*(L)) \cong \cong H^i(Y, f_*(f^*(L)))$. Поэтому

$$H^i(L) \neq (0) \Rightarrow H^i(f_*(f^*(L))) \neq (0) \Rightarrow H^i(f^*(L)) \neq (0).$$

Кроме того, для всех $L_0 \in \operatorname{Pic}^\circ X$ имеем $i(L) = = i(L \otimes L_0)$. Действительно, $L \otimes L_0 \cong T_x^*(L)$ для некоторой точки $x \in X$, так что $H^i(L) \neq (0) \Rightarrow H^i(T_x^*(L)) \neq \neq (0) \Rightarrow H^i(L \otimes L_0) \neq (0)$. В частности, поскольку $n_X^*(L) = L^{n^2} \otimes L_0$, где $L_0 \in \operatorname{Pic}^\circ X$, то $i(L^{n^2}) = i(L)$ для всех $n > 0$, взаимно простых с p.

Пусть теперь N — квадрат большого целого числа, взаимно простого с p. Если $i(L) \neq i(L \otimes H)$, то $i(L^N) \neq i(L^N \otimes H^N)$, так что на отрезке $0 < a \leqslant N$ существует наименьшее целое число a, для которого $i_1 = i(L^N \otimes H^a) \neq i(L^N \otimes H^{a-1}) = i(L^N)$. (Отметим, что поскольку многочлен $P(1, t)$ не имеет рациональных нулей при $0 \leqslant t \leqslant 1$, все расслоения $L^N \otimes H^a$ невырожденны, так что индекс $i(L^N \otimes H^a)$ определен.) Точная последовательность $0 \to L^N \otimes H^{a-1} \to L^N \otimes H^a \to \to L^N \otimes H^a|_V \to 0$, где V — некоторое гиперплоское сечение многообразия X относительно вложения, отвечающего H, индуцирует вложение

$$0 \to H^{i_1}(L^N \otimes H^a) \to H^{i_1}(L^N \otimes H^a|_V),$$

так что

$$\dim H^{i_1}(V, L^n \otimes H^a|_V) \geqslant \dim H^{i_1}(L^N \otimes H^a) = \\ = |\chi(L^N \otimes H^a)| = N^g P\left(1, \frac{a}{N}\right).$$

С другой стороны, тривиально верна оценка снизу

$$P(1, t) \geqslant c > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Учитывая, что сечение V $(g-1)$-мерно при достаточно больших N, получаем противоречие с леммой.

Шаг В. *Пусть L_1, L_2 — два линейных расслоения на абелевом многообразии, $F(s, t)$ — однородный многочлен, для которого $F(m, n) = \chi(L_1^m \otimes L_2^n)$. Если $F(t, 1-t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $i(L_1) = i(L_2)$.*

Доказательство. Выберем такое очень обильное расслоение L_3, что $L_1 \otimes L_3 \otimes L_2^{-1}$ тоже очень обильно. Положим $f(a, b, c) = \chi(L_1^a \otimes L_2^b \otimes L_3^c)$, так что $f(a, b, 0) = F(a, b)$. Поскольку $F(t, 1-t) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, по непрерывности можно выбрать такой большой квадрат N, взаимно простой с p, что при $0 \leqslant r \leqslant N-1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$f(N-r, r, t) = N^g f\left(1 - \frac{r}{N}, \frac{r}{N}, \frac{t}{N}\right) \neq 0,$$

$$f(N-r-1+t, r+1-t, t) =$$
$$= N^g f\left(1 - \frac{r+1-t}{N}, \frac{r+1-t}{N}, \frac{t}{N}\right) \neq 0.$$

Применяя результат шага А к $0 \leqslant r \leqslant N-1$ (это возможно в силу первого неравенства), получаем для всех целых r между 0 и $N-1$ соотношение

$$i(L_1^{N-r} \otimes L_2^r) = i(L_1^{N-r} \otimes L_2^r \otimes L_3).$$

Аналогично, второе неравенство для тех же значений r дает

$$i(L_1^{N-r} \otimes L_2^r \otimes L_3) = i(L_1^{N-r-1} \otimes L_2^{r+1}).$$

Таким образом, в этих границах

$$i(L_1^{N-r} \otimes L_2^r) = i(L_1^{N-r-1} \otimes L_2^{r+1}),$$

откуда

$$i(L_1) = i(L_1^N) = i(L_2^N) = i(L_2),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если расслоение L невырожденно, то для всех $n > 0$*

$$i(L) = i(L^n).$$

Шаг C. *Если расслоения* L_1, L_2 *и* $L_1 \otimes L_2$ *невырожденны, то*

$$i(L_1 \otimes L_2) \leqslant i(L_1) + i(L_2).$$

Доказательство. Обозначим через ν: $X \times X \to X$ морфизм $\nu(x, y) = x - y$ и положим $L = p_1^*(L_1) \otimes p_2^*(L_2)$. Тогда $\nu^{-1}(0)$ — диагональ в $X \times X$. Отождествим ее с X; ограничение $L|_{\nu^{-1}(0)}$ изоморфно $L_1 \otimes L_2$, откуда следует, что расслоение $L|_{\nu^{-1}(x)}$ невырожденно для любой точки $x \in X$ и имеет индекс $i = i(L_1 \otimes L_2)$. Следовательно, прямые образы $R^j \nu_*(L)$ обращаются в нуль при $j < i$. Из спектральной последовательности Лере следует, что $H^p(X \times X, L) = 0$ при $p < i$. Но

$$H^{i(L_1)+i(L_2)}\left(X \times X,\ p_1^*(L_1) \otimes p_2^*(L_2)\right) = \\ = H^{i(L_1)}(X, L_1) \otimes H^{i(L_2)}(X, L_2) \neq 0,$$

так что $i(L_1) + i(L_2) \geqslant i(L_1 \otimes L_2)$.

Шаг D. *Пусть* L_1, L_2 — *такие невырожденные линейные расслоения на абелевом многообразии* X, *что* $L_1 \otimes L_2^{-1}$ *обильно. Положим* $f(m, n) = \chi(L_1^m \otimes L_2^n)$ *и допустим, что* $f(t, 1-t)$ *имеет на отрезке* $[0, 1]$ *единственный нуль* τ *кратности* λ. *Тогда*

$$0 \leqslant i(L_2) - i(L_1) \leqslant \lambda.$$

Доказательство. В силу шага C

$$i(L_1) = i(L_1 \otimes L_2^{-1} \otimes L_2) \leqslant i(L_1 \otimes L_2^{-1}) + i(L_2) = i(L_2),$$

откуда следует первое неравенство.

Из однородности f и равенств $i(L^n) = i(L)$ при $n > 0$ следует, что можно, заменив L_1 и L_2 подходящими их степенями, считать расслоение $L_1 \otimes L_2^{-1}$ очень обильным. Будем обозначать через H, H^2, ... соответственно гиперплоское сечение многообразия X, гиперплоское сечение этого сечения и т. п. относительно проективного вложения, отвечающего расслоению $L_1 \otimes L_2^{-1}$.

Пусть N — большое целое число; если τ рационально, потребуем еще, чтобы N было взаимно простым с знаменателем τ. Тогда существует единственное целое число r, такое, что $0 < r \leqslant N$ и $\frac{r-1}{N} < \tau < \frac{r}{N}$. Положим $s = N - r$, $i(L_1) = i_1$ и $i(L_2) = i_2$.

Прежде всего индукцией по α покажем, что при $k \leqslant r-1$, $l = N-k$

$$H^p(H^\alpha, L_1^k \otimes L_2^l) = (0) \quad \text{при} \quad p \leqslant i_2 - \alpha - 1.$$

Это утверждение при $\alpha = 0$ очевидно, ибо в силу шага В

$$i(L_1^{r-1} \otimes L_2^{s+1}) = i(L_1^{r-2} \otimes L_2^{s+2}) = \ldots = i(L_2^N) = i_2.$$

Допустим теперь, что $\alpha > 0$ и что требуемое равенство для $\alpha - 1$ вместо α установлено. Из точной последовательности

$$0 \to L_1^{k-1} \otimes L_2^{l+1}|_{H^{\alpha-1}} \to L_1^k \otimes L_2^l|_{H^{\alpha-1}} \to L_1^k \otimes L_2^l|_{H^\alpha} \to 0$$

находим точную последовательность

$$H^p(L_1^k \otimes L_2^l|_{H^{\alpha-1}}) \to H^p(L_1^k \otimes L_2^l|_{H^\alpha}) \to$$
$$\to H^{p+1}(L_1^{k-1} \otimes L_2^{l+1}|_{H^{\alpha-1}}),$$

откуда требуемое утверждение следует с помощью индуктивного предположения.

Учитывая этот результат и точность последовательности

$$H^p(L_1^{r-1} \otimes L_2^{s+1}|_{H^{\alpha-1}}) \to H^p(L_1^r \otimes L_2^s|_{H^{\alpha-1}}) \to$$
$$\to H^p(L_1^r \otimes L_2^s|_{H^\alpha}),$$

получаем, что отображение

$$H^p(L_1^r \otimes L_2^s|_{H^{\alpha-1}}) \to H^p(L_1^r \otimes L_2^s|_{H^\alpha})$$

инъективно при $p \leqslant i_2 - \alpha$. Положив $p = i_1$, находим, что отображение

$$H^{i_1}(X, L_1^r \otimes L_2^s) \to H^i(H^{i_2-i_1}, L_1^r \otimes L_2^s|_{H^{i_2-i_1}})$$

инъективно. Отсюда следует, что

$$\lim H^{i_1}\left(L_1^r \otimes L_2^s\big|_{H^{i_2-i_1}}\right) \geqslant \dim H^{i_1}\left(L_1^r \otimes L_2^s\right) = \\ = \left|\chi\left(L_1^r \otimes L_2^s\right)\right| = N^g \left| f\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right)\right|.$$

Пользуясь первой леммой, получаем, что существует такая константа $c > 0$, что для всех больших N (взаимно простых со знаменателем τ, если τ рационально)

$$N^g \left| f\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right)\right| \leqslant c N^{g-(i_2-i_1)}$$

или

$$\left| f\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right)\right| \leqslant \frac{c}{N^{i_2-i_1}}.$$

Но $f(t, 1-t) = (t-\tau)^\lambda g(t)$, где $g(t)$ не обращается в нуль в точке τ. Стало быть, для всех больших чисел N указанного типа

$$\left|\frac{r}{N} - \tau\right|^\lambda \leqslant \frac{c'}{N^{i_2-i_1}}$$

или

$$\left|\frac{r}{N} - \tau\right| \leqslant c'' N^{-\frac{(i_2-i_1)}{\lambda}}.$$

Если корень τ рационален и N взаимно просто с знаменателем q числа τ, то $\left|\frac{r}{N} - \tau\right| \geqslant \frac{1}{Nq}$ для всех r, так что $\frac{i_2-i_1}{\lambda} \leqslant 1$, откуда $i_2 \leqslant i_1 + \lambda$. Если же τ иррационален, то в силу теоремы Кронекера о распределении дробных долей чисел $N\tau$ существует такая последовательность $N_i \to \infty$, что расстояние от $N_i\tau$ до ближайшего целого стремится к $1/2$. Поэтому снова $\frac{i_2-i_1}{\lambda} \leqslant 1$ и $i_2 \leqslant i_1 + \lambda$. Этим завершается шаг D.

Доказательство теоремы. Напомним, что дано обильное расслоение L и невырожденное расслоение M. Положим $P(n, m) = \chi(L^n \otimes M^m)$. Мы должны доказать, что все g нулей многочлена $P(t, 1)$

вещественны и что $i(M)$ совпадает с числом положительных корней ($t=0$ не является корнем, потому что M невырожденно). Выберем такое рациональное число $\alpha = p/q$, что вещественные корни $t_1, \ldots, t_k$ многочлена $P(t, 1)$ разделены целыми кратными α:

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_k, \qquad \alpha(r_i - 1) < t_i < \alpha r_i.$$

Обозначим через λ_i кратность корня t_i. Из результатов шагов B и D следует, что, полагая $i(r) = i(L^{rp} \otimes M^q)$, получаем

$$\begin{aligned}\forall R \geqslant r_k \qquad i(R) = i(r_k) \leqslant i(r_k - 1) = i(r_{k-1}) \leqslant \\ \leqslant i(r_{k-1} - 1) = \ldots = i(r_2) \leqslant i(r_2 - 1) = \\ = i(r_1) \leqslant i(r_1 - 1) = i(r) \qquad \forall r \leqslant r_1 - 1\end{aligned}$$

и $i(r_l - 1) - i(r_l) \leqslant \lambda_l$. Но для больших r расслоение $L^{rp} \otimes M^q$ обильно, так что $i(r) = 0$. А для больших *отрицательных* r расслоение $(L^{rp} \otimes M^q)^{-1}$ обильно, так что $i(r) = g$ в силу последнего утверждения теоремы об обращении в нуль. Следовательно,

$$g = i(r \to -\infty) - i(r \to \infty) = \left[\sum_{l=1}^{k} i(r_l - 1) - i(r_l)\right] \leqslant \sum_{1}^{k} \lambda_l.$$

Но сумма $\sum \lambda_l$, будучи числом вещественных корней многочлена $P(t, 1)$, не превосходит g, поэтому, на самом деле, имеет место равенство, а число $i(0) = i(M)$ совпадает с количеством тех λ_l, для которых соответствующий корень t_l положителен.

Следствие. *Пусть V — комплексное g-мерное векторное пространство, U — такая решетка в нем, что $X = V/U$ — абелево многообразие. Обозначим через $L = L(H, \alpha)$ невырожденное линейное расслоение на X, так что H — невырожденная эрмитова форма на V. Тогда $i(L)$ совпадает с числом отрицательных собственных значений формы H.*

Доказательство. Выберем такой $\mathbf{Z}$-базис $u_1, u_2, \ldots, u_{2g}$ решетки U, что $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_{2g}$ определяет ориентацию V. Пусть $L_0 = L(H_0, \alpha_0)$ — некоторое обильное линейное расслоение на X, так что форма H_0

положительно определена. Положим $E=\operatorname{Im}(H)$ и $E_0=\operatorname{Im} H_0$. Тогда

$$\chi\left(L_0^n \otimes L\right)=Pf\,(nE_0+E),$$

где E_0 и E рассматриваются как кососимметрические матрицы (в выбранном базисе U). При переходе к любому другому положительно ориентированному вещественному базису пространства V пфаффиан умножается на положительную константу. В частности, вычислять его знак можно, пользуясь базисом e_1, ie_1, e_2, ..., e_g, ie_g, где e_1, ..., e_g — некоторый $\mathbf{C}$-базис пространства V. Выберем векторы e_i так, что $H(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ и $H_0(e_i, e_j)=\lambda_i\delta_{ij}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}^*$. Тогда матрица nE_0+E имеет вид

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -n-\lambda_1 & & & \\ n+\lambda_1 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline & & 0 & -n-\lambda_2 & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & n+\lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{0} & \ddots \end{array}\right),$$

а ее пфаффиан равен $\prod\limits_{1}^{g}(n+\lambda_i)$ (ибо его квадрат совпадает с определителем, а при $n=0$ он равен $\lambda_1 \ldots \lambda_g$, в частности 1, если $\forall\lambda_i=+1$). Стало быть, индекс L совпадает с числом отрицательных λ_i, что и требовалось доказать.

Это следствие можно вывести также из результатов Андреотти и Грауэрта [1].

§ 17. Очень обильные линейные расслоения

Цель этого раздела — доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Пусть L — любое обильное линейное расслоение на абелевом многообразии X. Тогда расслоение L^n очень обильно при всех $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $n=3$. При $n>3$ доказательство проходит аналогично. Так как $H^0(X, \mathscr{L})=\chi(L)>0$, можно найти такой эффективный дивизор D, что $\mathcal{O}_X(D)$ изоморфен пучку сечений расслоения L. Далее, можно считать, что D не содержит кратных компонент. Действительно, пусть E — неприводимый дивизор и $D-kE>0$; тогда kE линейно эквивалентен дивизору $\sum\limits_{i=1}^{k} T_{x_i}^*(E)$, если и только если $\sum\limits_{1}^{k} x_i=0$. Подходящим образом выбирая точки x_i, можно добиться того, чтобы все дивизоры $T_{x_i}^*(E)$ были различны и не совпадали с остальными компонентами D.

Итак, пусть D не имеет кратных компонент. Заметим, что для всех $x, y\in X$ имеем $T_x^*(D)+T_y^*(D)+$ $+T_{-x-y}^*(D)\in|3D|$. Нужно проверить следующие утверждения:

(1) для любых двух точек x_0, $x_1\in X$ с $x_0\neq x_1$ существует такой дивизор $D'\in|3D|$, что $x_0\in \operatorname{Supp} D'$, $x_1\notin \operatorname{Supp} D'$;

(2) для любого касательного вектора t к X в точке x_0 существует такой дивизор $D'\in|3D|$, что $x_0\in\operatorname{Supp} D'$ и t не касается D' (иначе говоря, $\langle t, d\varphi\rangle\neq 0$, где $\varphi=0$ — локальное уравнение для D' в точке x_0).

Поскольку мы доказываем эти утверждения для любого обильного расслоения L, достаточно проверить их при $x_0=0$ — общий случай получится применением этого частного результата к сдвигу L.

Допустим, что (1) неверно (для $x_0=0$). Тогда для всякого дивизора D описанного типа и любых $x, y\in X$ верна импликация

$$0\in\operatorname{Supp} D-x\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_1\in(\operatorname{Supp} D-x)\cup(\operatorname{Supp} D-y)\cup(\operatorname{Supp} D-x-y).$$

Очевидно, y можно выбрать так, чтобы точка x_1 не содержалась в двух последних множествах. Поэтому из включения $x\in\operatorname{Supp} D$ должно следовать включение $x \in \operatorname{Supp} D - x_1$, т. е. $\operatorname{Supp} D = \operatorname{Supp} D - x_1$. Так как дивизор D не имеет кратных компонент, это означает, что $T_{x_1}(D) = D$. В частности, $x_1 \in K(L)$, так что x_1 имеет конечный порядок. Пусть x_1 порождает конечную группу F. Она определяет этальный морфизм $\pi\colon X \to X/F$, и образ $D_1 = \pi(\operatorname{Supp} D)$ является замкнутым подмножеством чистой коразмерности 1. Его можно рассматривать как дивизор без кратных компонент. Так как π — этальный морфизм, $\pi^*(D_1)$ также является дивизором без кратных компонент с носителем D, так что $D = \pi^*(D_1)$ и $\mathcal{L} = \pi^*(\mathcal{O}_{X/F}(D_1))$. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, \mathcal{L}) = \chi(L) - (\text{порядок } F)\,\chi(\mathcal{O}_{X/F}(D_1)) = \\ = (\text{порядок } F) \dim H^0(X/F, \mathcal{O}_{X/F}(D_1)) > \\ > \dim H^0(X/F, \mathcal{O}_{X/F}(D_1)).\end{aligned}$$

Так как множество всех дивизоров D_1, для которых $\mathcal{L} \cong \pi^*(\mathcal{O}_{X/F}(D_1))$, содержится в конечном числе классов по модулю линейной эквивалентности, отсюда следует, что сечения $s \in \Gamma(\mathcal{L})$ либо определяют кратные дивизоры, либо принадлежат конечному числу собственных подпространств типа $\pi^*\Gamma(\mathcal{O}_{X/F}(D_1))$. Это невозможно; поэтому утверждение (1) справедливо.

Пусть теперь утверждение (2) относительно некоторого ненулевого касательного вектора в нуле t неверно, и пусть T — инвариантное векторное поле, полученное сдвигом на t. Если (2) неверно для всех дивизоров $D' = T_x^*(D) + T_y^*(D) + T_{-x-y}^*(D)$, то для всех точек $x \in \operatorname{Supp} D$ вектор T_x касается дивизора D в точке x. Так как D не имеет кратных компонент, это равносильно следующему:

(*) *для всякого открытого множества $U \subset X$ существуют локальные уравнения дивизора D в U вида $\varphi = 0$, такие, что $T(\varphi) = \alpha\varphi$, где $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$.*

Иначе говоря, дивизор D как подсхема X инвариантен относительно $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-значного автоморфизма X, отвечающего полю T. Отсюда следует, что $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-значная точка X, отвечающая вектору t, принадлежит подгруппе точек $K(L)$, оставляющих L инвариантным. В случае характеристики нуль все групповые схемы приведены, поэтому группа $K(L)$ конечна и дискретна, так что это может быть лишь при $t=0$. Пусть теперь характеристика равна $p \neq 0$, и пусть H — наименьшая подгруппа $K(L)$, содержащая t. Тогда $H \subset X^{(p)}$, и H определена своей алгеброй Ли $\mathfrak{H}$, которая натянута на t и все p-е степени t. Легко видеть, что D инвариантен относительно сдвигов на все точки H. (Действительно, пусть $H = \operatorname{Spec} R$. Действие H определяет гомоморфизм алгебры R^* в кольцо дифференциальных операторов на X, отображающий элементы из $\mathfrak{H}$ в соответствующие им инвариантные дифференцирования. Так как $\mathfrak{H}$ порождает R^*, а пучок идеалов $\mathcal{O}_X(-D)$ инвариантен относительно $\mathfrak{H}$ в силу (*), он также инвариантен относительно действия R^*, что определяет гомоморфизм $R^* \to \operatorname{Diff}(\mathcal{O}_D)$, т. е. некоторое действие H на D.) Положим $X' = X/H$, $D' = D/H$. Согласно результатам § 12, морфизм $\pi\colon X \to X'$ плоский и сюръективный, D' является замкнутой подсхемой в X' и $D \cong D' \times_{X'} X$. Пусть $\mathcal{J}'$ — пучок идеалов, определяющий D'; тогда

$$\mathcal{O}_X(-D) \cong \mathcal{J}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X.$$

Так как D — дивизор, пучок $\mathcal{O}_X(-D)$ локально свободен, так что в силу теоремы 1 § 12 (часть (B)) $\mathcal{J}'$ — локально свободный пучок; стало быть, D' — тоже дивизор. Далее, $D = \pi^*(D')$ и, как и выше,

$$\dim H^0(X, \mathcal{L}) = \deg \pi \cdot \dim H^0(X/H, \mathcal{O}_X(D')) > \\ > \dim H^0(X/H, \mathcal{O}_X(D')).$$

В точности, как раньше, отсюда следует, что сечения $s \in \Gamma(\mathcal{L})$, определяющие некратные дивизоры, должны лежать в одном из конечного числа собственных подпространств, что невозможно.

Глава IV

Hom (X, X) И l-АДИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 18. Этальные накрытия

Главный результат этого параграфа — следующая

Теорема (Серр — Ленг). *Пусть X — абелево многообразие, Y — некоторое многообразие, $f\colon Y \to X$ — этальное накрытие. Тогда Y обладает структурой абелева многообразия, превращающей f в изогению.*

Доказательство. Пусть Γ_m — график морфизма умножения $m\colon X \times X \to X$ в $X \times X \times X$, Γ' — обратный образ Γ_m в $Y \times Y \times Y$ относительно морфизма $f \times f \times f$. Мы утверждаем, что проекция $p_{12}\colon \Gamma' \to Y \times Y$ является этальным накрытием. Это следует из того, что

(1) $\Gamma' \to \Gamma_m$ — этальное накрытие;

(2) $p_{12}\colon \Gamma_m \to X \times X$ — изоморфизм;

(3) диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma' \arrow[r] \arrow[d, "p_{12}"'] & \Gamma_m \arrow[d, "p_{12}"] \\ Y \times Y \arrow[r, "f \times f"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

коммутативна;

(4) $f \times f$ — этальное накрытие.

Выберем теперь точку $y_0 \in Y$ с $f(y_0) = 0$ и обозначим через Γ связную компоненту Γ', содержащую (y_0, y_0, y_0) (эта точка принадлежит Γ', потому что $f(y_0) = 0$ и $(0, 0, 0) \in \Gamma_m$). Ограничение $p\colon \Gamma \to Y \times Y$ проекции p_{12} по-прежнему является этальным накрытием, так что его степень совпадает с числом точек в *любом* слое морфизма p. Мы хотим показать, что p — изоморфизм, т. е. что существует единственная точка на $Y \times Y$, прообраз которой в Γ совпадает с данной точкой. Определим морфизмы $\sigma_1, \sigma_2\colon Y \to \Gamma$, положив $\sigma_1(y) = (y_0, y, y)$, $\sigma_2(y) = (y, y_0, y)$ $(\sigma_i(Y) \subset \Gamma$, потому что $\sigma_i(Y) \subset \Gamma'$ и $(y_0, y_0, y_0) \in \sigma_i(Y))$. Ограничение p на $\sigma_2(Y)$ является биекцией $\sigma_2(Y)$ на $Y \times \{y_0\}$.

Поэтому достаточно установить, что $p^{-1}(Y \times \{y_0\}) = \sigma_2(Y)$, или, что то же самое, $q^{-1}(y_0) = \sigma_2(Y)$, где $q\colon \Gamma \to Y$ — ограничение $p_2\colon Y \times Y \times Y \to Y$ на Γ. Поскольку $\sigma_2(Y)$ — неприводимая компонента $q^{-1}(y_0)$, достаточно проверить, что $q^{-1}(y_0)$ неприводимо. Но многообразие Γ, этальное над $Y \times Y$ и, стало быть, над $X \times X$, неособо. Так как оно связно, оно неприводимо. Далее, морфизм $q\colon \Gamma \to Y$ гладкий, потому что он совпадает с композицией этального морфизма $\Gamma \to Y \times Y$ и проекции $Y \times Y \xrightarrow{p_2} Y$. Наконец, $\sigma_1\colon Y \to \Gamma$ — сечение для q. Поэтому неприводимость $q^{-1}(y_0)$ вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — собственный гладкий морфизм неприводимых многообразий, и пусть существует сечение $\sigma\colon Y \to X$, $f \circ \sigma = 1_Y$. Тогда все слои f неприводимы.*

Доказательство. Можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$ — аффинное многообразие. Пусть $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Это целостная A-алгебра (потому что X неприводимо), конечная как A-модуль (потому что f — собственный морфизм). Морфизм f разлагается в композицию $X \xrightarrow{g} \operatorname{Spec} B \xrightarrow{h} Y$, где $\operatorname{Spec} B$ — неприводимое многообразие. Но $g \circ \sigma$ — сечение морфизма h, а так как $\dim(\operatorname{Spec} B) = \dim Y$, морфизм $g \circ \sigma$ сюръективен. Стало быть, h — изоморфизм, и $A = B$.

Из гладкости f следует, что его слои неособы. Поэтому достаточно проверить, что они связны. Пусть $0 \to K_0 \to K_1 \to \ldots$ — комплекс свободных конечно порожденных A-модулей, позволяющий универсально вычислять прямые образы пучка $\mathcal{O}_X$. Тогда по сказанному выше, определена точная последовательность $0 \to A \to K_0 \to K_1$. Пусть $y \in Y$ — любая точка, $\mathfrak{m}$ — ее максимальный идеал в кольце A. Поскольку пополнение в $\mathfrak{m}$-адической топологии — точный функтор, имеет место точная последовательность $0 \to \hat{A} \to \hat{K}_0 \to \hat{K}_1$, так что

$$\hat{A} \cong \varprojlim_n \operatorname{Ker}[K_0/\mathfrak{m}^n K_0 \to K_1/\mathfrak{m}^n K_1].$$

Но $\operatorname{Ker}[K_0/\mathfrak{m}^n K_0 \to K_1/\mathfrak{m}^n K_1] = H^0(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^n \mathcal{O}_X)$, поэтому естественное отображение $\hat{A} \rightrightarrows \varprojlim H^0(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_X)$ является изоморфизмом колец. Если бы слой $f^{-1}(y)$ был несвязен, существовало бы разложение $f^{-1}(y) = Z_1 \cup Z_2$, где Z_i замкнуты, $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ и $Z_i \neq f^{-1}(y)$. Однозначно определено сечение $f_n \in H^0(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_X)$, ограничение которого на Z_1 равно 1, а на Z_2 — нулю. Последовательность $\{f_n\}$ определяет элемент $f \in \varprojlim H^0(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_X) \cong \hat{A}$ с $f^2 = f$ и $f \neq 0$ или 1. Это, однако, невозможно, потому что A — локальное кольцо. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Мы показали, что $p_{12}\colon \Gamma' \to Y \times Y$ — изоморфизм, так что определен морфизм $\nu = p_3 \circ p_{12}^{-1}\colon Y \times Y \to Y$. Мы уже убедились, что Γ' содержит $\sigma_1(Y)$ и $\sigma_2(Y)$; поэтому $\nu(y, y_0) = y = \nu(y_0, y)$. Следовательно, из теоремы, доказанной в приложении к § 4, вытекает, что Y — абелево многообразие с законом композиции ν и нулем y_0. Поскольку $f(y_0) = 0$, f — гомоморфизм абелевых многообразий. Это доказывает теорему.

Замечание. Для любой изогении абелевых многообразий $f\colon Y \to X$ существует такая изогения $g\colon X \to Y$, что $f \circ g = n_X$ для некоторого $n > 0$. В самом деле, $\operatorname{Ker}(f)$ как конечная групповая схема аннулируется умножением на некоторое целое число $n > 0$; поэтому $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(n_Y)$. Поскольку $X \cong Y/\operatorname{Ker}(f)$, отсюда следует, что n_Y представляется в виде $n_Y = g \circ f$, где $g\colon X \to Y$ — некоторый гомоморфизм. Но тогда $f \circ g = n_X$, потому что для всякой точки $x \in X$ существует точка $y \in Y$, такая, что $x = f(y)$ и, стало быть,

$$f \circ g(x) = f(g(f(y))) = f(ny) = nf(y) = nx.$$

Эти результаты можно интерпретировать в терминах фундаментальной группы $\pi_1(X)$. Напомним, что для любого неособого многообразия X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ строится следующим образом[1]). Рассмотрим множество всех пар, состоящих

[1]) Подробности см. в записках SGA [28].

из морфизма $\pi\colon Y \to X$ и точки $y_0 \in Y$, лежащей над x_0, со свойствами:

1) существует конечная группа G_Y, свободно действующая на Y и такая, что $X \cong Y/G_Y$;

2) многообразие Y связно (и, следовательно, неособо).

Если даны две такие пары (π', y_0') и (π'', y_0''), существует не больше одного морфизма $f\colon Y' \to Y''$, для которого

i) $\pi'' \circ f = \pi'$;

ii) $f(y_0') = y_0''$.

Если такой морфизм существует, однозначно определен сюръективный гомоморфизм

$$\rho\colon G_{Y'} \to G_{Y''},$$

для которого $f(\sigma y) = \rho(\sigma) f(y)$ при всех $\sigma \in G_{Y'}$, $y \in Y'$. Упорядочим тройки (Y, y_0, π), положив $(Y', y_0', \pi') > > (Y'', y_0'', \pi'')$, если морфизм f существует. Множество таких троек образует тогда проективную систему. По определению

$$\pi_1(X, x_0) = \varprojlim_{(Y, y_0, \pi)} G_Y.$$

Пусть теперь X — абелево многообразие и $x_0 = 0$. Тогда все многообразия Y абелевы, а G_Y совпадает с ядром π, действующим на Y сдвигами. В частности, группа $\pi_1(X)$ абелева. Чтобы описать эту группу более явно, удобно разбить ее в произведение l-примарных компонент, отвечающих простым числам l. Пусть сначала $l \neq p$.

Замечание к теореме показывает, что множество этальных накрытий

$$X \xrightarrow{l_X^n} X$$

конфинально в множестве всех этальных накрытий

$$Y \xrightarrow{\pi} X, \quad \text{где} \quad \#(\mathrm{Ker}(\pi)) = l^m \quad \text{при некотором } m.$$

Поэтому l-адическая компонента группы $\pi_1(X)$ является проективным пределом групп $\mathrm{Ker}(l_X^n)$, т. е. X_{l^n}. Этот предел называется *l-адической группой Тэйта многообразия* X:

Определение. $T_l(X) = \varprojlim_n X_{l^n}$, где гомоморфизмы в проективной системе задаются умножением на l:

$$\ldots \to X_{l^{n+1}} \xrightarrow{l_X} X_{l^n} \xrightarrow{l_X} \ldots \xrightarrow{l_X} X_l.$$

Как любой проективный предел конечных абелевых l-периодических групп, $T_l(X)$ обладает структурой модуля над кольцом целых l-адических чисел $\mathbf{Z}_l$. Поскольку $X_{l^n} \cong (\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})^{2g}$, легко видеть, что $T_l(X) \cong Z_l^{2g}$ как $\mathbf{Z}_l$-модуль.

Пусть теперь $l = p$. В этом случае рассмотрим разложение

$$\operatorname{Ker}\left(p_X^n\right) = X^0_{p^n} \times X^r_{p^n}$$

на локальную $X^0_{p^n}$ и приведенную $X^r_{p^n}$ компоненты.

В силу замечания к теореме множество этальных накрытий π_n, входящих в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_X^n} & X \\ & {\scriptstyle\sigma_n}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\pi_n} & \\ & X/X^0_{p^n} & \\ & \| & \\ & Y_n & \end{array}$$

конфинально во множестве всех этальных накрытий X степеней p^k. Но $\operatorname{Ker}(\pi_n) = \sigma_n\left(X^r_{p^n}\right) \cong X^r_{p^n}$; поэтому p-адическая компонента группы $\pi_1(X)$ по-прежнему совпадает с p-адической „*дискретной*" группой Тэйта:

Определение. $T_p(X) = \varprojlim_n X^r_{p^n}$ (гомоморфизмы в проективной системе определены, как выше).

Группа $T_p(X)$ является $\mathbf{Z}$-модулем; полагая $r =$ $= p$-ранг X, получаем, очевидно, что $T_p(X) \cong (\mathbf{Z}_p)^r$, Полная фундаментальная группа, следовательно, имеет вид

$$\pi_1(X) \cong \prod_{l \text{ простые}} T_l(X).$$

Пусть теперь $k = \mathbf{C}$ и $X = V/U$, где, как обычно, V — комплексное векторное пространство, а U — решетка в нем. Тогда кроме вычисленной только что алгебраической фундаментальной группы, определена обычная топологическая фундаментальная группа $\pi_1^{\text{top}}(X)$. В § 1 мы видели, что она канонически изоморфна U. С другой стороны, изоморфизм

$$X_{l^n} \cong \frac{1}{l^n} U/U \subset V/U = X$$

показывает, что

$$T_l(X) \cong \varprojlim_n \frac{1}{l^n} U/U$$

$$\text{с отображениями } \frac{1}{l^{n+1}} U/U \xrightarrow{l} \frac{1}{l^n} U/U$$

или

$$T_l(X) \cong \varprojlim_n U/l^n U$$

$$\text{с отображениями } U/l^{n+1}U \xrightarrow{l} U/l^n U.$$

Иными словами, $T_l(X)$ совпадает с l-адическим пополнением группы $U = \pi_1^{\text{top}}(X)$, и

$$\begin{aligned}\pi_1^{\text{alg}}(X) &= \prod_l T_l(X) = \\ &= \varprojlim_n U/n!U = \\ &= \text{Проконечное пополнение решетки } U = \\ &= \widehat{\pi_1^{\text{top}}(X)}.\end{aligned}$$

§ 19. Строение Hom (X, X)

Пусть X, Y — абелевы многообразия; символом Hom (X, Y) обозначим группу гомоморфизмов $X \to Y$, символом End (X) — кольцо Hom (X, X). Положим, далее, $\mathrm{Hom}^\circ(X, Y) = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(X, Y)$ и $\mathrm{End}^\circ(X) =$

$= \mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \operatorname{End} X$ (это кольцо в классической теории называется алгеброй комплексных умножений многообразия X).

Композиция гомоморфизмов однозначно продолжается до $\mathbf{Q}$-билинейного отображения $\operatorname{Hom}^\circ(X, Y) \times \times \operatorname{Hom}^\circ(Y, Z) \to \operatorname{Hom}^\circ(X, Z)$. Поэтому можно образовать категорию, объектами которой являются абелевы многообразия, а морфизмами $X \to Y$ — элементы группы $\operatorname{Hom}^\circ(X, Y)$. Это так называемая категория „абелевых многообразий с точностью до изогении“. Как мы уже отмечали, для любой изогении $f\colon Y \to X$ существует другая изогения $g\colon X \to Y$ со свойством $f \circ g = n_X$. Это показывает, что в последней категории изогении являются изоморфизмами. В дальнейшем поэтому для любой изогении $f\colon Y \to X$ символом f^{-1} будет обозначаться обратный к f элемент из $\operatorname{Hom}^\circ(X, Y)$. Очевидно, группе $\operatorname{Hom}^\circ(X, Y)$ можно дать следующее более модное определение:

$$\operatorname{Hom}^\circ(X, Y) = \varinjlim_{(\text{изогении } X' \to X)} \operatorname{Hom}(X', Y).$$

Теорема 1 (теорема Пуанкаре о полной приводимости). *Пусть X — некоторое абелево многообразие, Y — его абелево подмногообразие. Существует такое абелево подмногообразие $Z \subset X$, что $Y \cap Z$ конечно и $Y + Z = X$. Иными словами, X изогенно $Y + Z$.*

Доказательство. Пусть $i\colon Y \to X$ — морфизм вложения, $\hat{i}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ — двойственный морфизм. Выберем обильное расслоение L на X, определяющее изогению $\varphi_L\colon X \to \hat{X}$. Обозначим через Z связную компоненту нуля в прообразе $\varphi_L^{-1}(\operatorname{Ker}(\hat{i}))$. Тогда

$$\dim Z = \dim \operatorname{Ker}(\hat{i}) \geqslant \dim \hat{X} - \dim \hat{Y} = \dim X - \dim Y.$$

Далее, по определению $\hat{i}$ и φ_L для любой точки $z \in Y$

$$z \in \varphi_L^{-1}(\operatorname{Ker}(\hat{i})) \cap Y \Leftrightarrow T_z^* L \otimes L^{-1}|_Y \text{ тривиально} \Leftrightarrow \Leftrightarrow z \in K(L|_Y).$$

Так как расслоение $L|_Y$ обильно, группа $K(L|_Y)$ конечна, так что конечно пересечение $Z \cap Y$. Это означает, что естественный гомоморфизм $Z \times Y \to X$ имеет конечное ядро. Он сюръективен, потому что $\dim(Z \times Y) = \dim Z + \dim Y \geqslant \dim X$. Это доказывает утверждение.

Замечание. Над комплексным полем полная приводимость доказывается совсем без труда. В самом деле, пусть $X = V/U$, где V — комплексное векторное пространство, U — некоторая решетка, и пусть H — положительная невырожденная эрмитова форма на V, мнимая часть которой $E = \operatorname{Im} H$ цела на $U \times U$. Тогда любое абелево подмногообразие $Y \subset X$ имеет вид $V_1/U \cap V_1$, где V_1 — комплексное подпространство V, такое, что $V_1 \cap U$ — решетка в V_1. Обозначим через V_2 ортогональное дополнение к V_1 относительно H. Тогда: (a) V_2 является также ортогональным дополнением к V_1 относительно E, поэтому группа $U \cap V_2$ имеет максимальный ранг в V_2; (b) $V_1 \cap V_2 = (0)$, потому что H положительно определена. Поэтому $Z = V_2/V_2 \cap U$ является комплексным подтором тора X, и пересечение $Y \cap Z$ конечно.

Ограничение H на V_2 определяет форму Римана на V_2, откуда следует, что Z — абелево подмногообразие.

В новомодной терминологии доказанная теорема означает, что категория абелевых многообразий с точностью до изогении является „полупростой абелевой категорией, все объекты которой имеют конечную длину“. Конкретнее, следующие результаты выводятся стандартными рассуждениями.

Определение. *Абелево многообразие называется простым, если оно не содержит собственных абелевых подмногообразий.*

Следствие 1. *Любое абелево многообразие изогенно произведению вида $X_1^{n_1} \times \ldots \times X_k^{n_k}$, где X_i — простые попарно неизогенные многообразия. Целые числа n_i и набор изогенных типов X_i определены однозначно.*

(Доказательство стандартное.)

Следствие 2. *Если X — простое многообразие, то* $\mathrm{End}^\circ(X)$ — *алгебра с делением. Если* $X = X_1^{n_1} \times \ldots \times X_k^{n_k}$, *где X_i — простые попарно неизогенные многообразия, то*

$$\mathrm{End}^\circ(X) = M_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(D_k), \quad D_i = \mathrm{End}^\circ(X_i).$$

(Здесь $M_k(R)$ — кольцо $(k \times k)$-матриц над R.)

Доказательство. Если X — простое многообразие, то любой ненулевой эндоморфизм X является изогенией, стало быть, он обратим в $\mathrm{End}^\circ(X)$, что доказывает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что $\mathrm{Hom}\left(X_i^{n_i}, X_j^{n_j}\right) = (0)$ при $i \neq j$, так что $\mathrm{End}^\circ(X) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{End}^\circ\left(X_i^{n_i}\right)$. Очевидно, $\mathrm{End}^\circ\left(X_i^{n_i}\right)$ является алгеброй матриц порядка n_i над алгеброй с делением D_i.

Пусть φ — функция на векторном пространстве V. Назовем ее *полиномиальной функцией степени n*, если ее ограничение на любое конечномерное подпространство является полиномиальной функцией степени n, т. е. для любых $v_0, v_1 \in V$ функция $\varphi(x_0 v_0 + x_1 v_1)$ является многочленом от x_0, x_1 степени n. Например, характеристика $\chi(L)$ продолжается до однородной полиномиальной функции степени g на векторном пространстве $NS(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Теорема 2. *Функция* $\varphi \to \deg \varphi$ *на* $\mathrm{End}(X)$ *продолжается до однородной полиномиальной функции степени* $2g$ *на* $\mathrm{End}^\circ(X)$.

Доказательство. Поскольку при $\varphi \in \mathrm{End}(X)$ и $n \in \mathbf{Z}$ выполняются соотношения $\deg n\varphi = \deg n_X \cdot \deg \varphi = n^{2g} \deg \varphi$, достаточно показать, что для всех $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(X)$ функция $P(n) = \deg(n\varphi + \psi)$ полиномиальна. Для любого обильного линейного расслоения L

$$\deg(n\varphi + \psi) = \frac{\chi((n\varphi + \psi)^*(L))}{\chi(L)}.$$

Поэтому достаточно проверить, что функция $\chi((n\varphi+\psi)^*(L))$ полиномиальна по n. Положив $L_{(n)} = (n\varphi+\psi)^*(L)$ и применив следствие 2 из теоремы о кубе к трем морфизмам $n\varphi+\psi$, φ, φ соответственно, получаем, что

$$L_{(n+2)} \otimes L_{(n+1)}^{-2} \otimes L_{(n)} \otimes (2\varphi)^* L^{-1} \otimes \varphi^* L \otimes \varphi^* L = 1.$$

Отсюда индукцией по n получаем, что существуют подходящие линейные расслоения L_1, L_2, L_3 на X, такие, что

$$L_{(n)} = L_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \otimes L_2^n \otimes L_3.$$

Так как $\chi(L)$ — полиномиальная функция от L, $\chi(L_{(n)})$ полиномиальна по n, что доказывает требуемый результат.

Чтобы продвинуться дальше и доказать, в частности, конечномерность $\mathrm{Hom}^\circ(X, Y)$ над $\mathbf{Q}$, нужно привлечь существенно новые соображения.

В случае $k = \mathbf{C}$ группа $\mathrm{Hom}(X, Y)$ легко вычисляется следующим образом.

Пусть

$$X_1 = V_1/U_1, \qquad g_1 = \dim X_1,$$
$$X_2 = V_2/U_2, \qquad g_2 = \dim X_2,$$

V_i — комплексные векторные пространства, U_i — решетки.

Тогда любой алгебраический гомоморфизм $f\colon X_1 \to X_2$ поднимается до комплексно-аналитического гомоморфизма $\tilde{f}\colon V_1 \to V_2$. Хорошо известно, что такие гомоморфизмы являются просто *комплексно-линейными* отображениями из V_1 в V_2. Наоборот, комплексно-линейное отображение $L\colon V_1 \to V_2$ индуцирует аналитический гомоморфизм $f\colon X_1 \to X_2$ в том и только том случае, когда $L(U_1) \subset U_2$. Кроме того, по теореме Чжоу (ср. § 1) все аналитические гомоморфизмы $f\colon X_1 \to X_2$ алгебраичны. Этим устанавливается изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(X_1, X_2) \cong \{L\colon V_1 \to V_2 \mid L(U_1) \subset U_2,\ L\ \mathbf{C}\text{-линейно}\}.$$

В частности, отображение L определяется своим ограничением на U_1; этим определяется вложение

$$T\colon \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(U_1, U_2).$$

Поскольку U_i совпадает с топологической фундаментальной группой $\pi_1^{\mathrm{top}}(X_i)$ (или с группой гомологий $H_1(X_i)$), отображение T совпадает с функторным представлением отображений пространств отображениями их фундаментальных групп (или групп H_1). Фиксировав базисы групп, мы получаем точное представление группы $\operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ целочисленными $(2g_1 \times 2g_2)$-матрицами. В частности, $\operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ — свободная абелева группа ранга не более $4g_1g_2$.

Аналогичные соображения применимы и в случае $k \neq \mathbf{C}$. Вместо свободного $\mathbf{Z}$-модуля $U = \pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ нужно использовать свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль $T_l(X)$. В самом деле, $T_l(X)$ есть l-примарная компонента алгебраической фундаментальной группы $\pi_1(X)$, так что при $k = \mathbf{C}$ модуль $T_l(X)$ совпадает с l-адическим пополнением группы U. Пусть X_1, X_2 — абелевы многообразия; тогда любой гомоморфизм $f\colon X_1 \to X_2$ определяет отображения $f\colon (X_1)_{l^n} \to (X_2)_{l^n}$ и, следовательно, отображения

$$T_l(f)\colon T_l(X_1) \to T_l(X_2).$$

Отображение $f \to T_l(f)$ есть канонический гомоморфизм

$$T_l\colon \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X_1), T_l(X_2)),$$

известный как „*l-адическое представление*“. Выбрав базисы пространств $T_l(X_i)$ над $\mathbf{Z}_l$, получаем представление гомоморфизмов $f \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ $(2g_1 \times 2g_2)$-матрицами с коэффициентами в $\mathbf{Z}_l$.

Докажем теперь следующий результат:

Теорема 3. *Для любой пары абелевых многообразий X, Y группа* $\operatorname{Hom}(X, Y)$ *абелева, конечно порождена и естественное отображение*

$$(*) \qquad \mathbf{Z}_l \otimes \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y)),$$

индуцированное гомоморфизмом T_l: $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y))$ ($l \neq \mathrm{char}\, k$ — *простое число*), *инъективно.*

Доказательство. Заметим, что так как группа $\mathrm{Hom}(X, Y)$ не имеет кручения, определено вложение $\mathrm{Hom}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}^{\circ}(X, Y)$.

Шаг I. *Для любой конечно порожденной подгруппы* $M \subset \mathrm{Hom}(X, Y)$ *группа*

$$\mathbf{Q}M \cap \mathrm{Hom}(X, Y) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y) \mid \exists n \neq 0, \quad n\varphi \in M\}$$

также конечно порождена.

Для доказательства выберем изогении $\prod X_i^{n_i} \to X$ и $Y \to \prod Y_j^{n_j}$, где X_i, Y_j — простые абелевы многообразия. Тогда группа $\mathrm{Hom}(X, Y)$ инъективно отображается в $\prod\limits_{i, j} \mathrm{Hom}(X_i, Y_j)$, так что достаточно установить этот результат для простых X, Y. Если X, Y не изогеины, то $\mathrm{Hom}(X, Y) = (0)$; можно считать поэтому, что X, Y изогенны. Изогения $Y \to X$ в этом случае определяет вложение $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{End}(X)$. Дело тем самым сводится к случаю $X = Y$, X простое. По предыдущей теореме существует однородная полиномиальная функция P на $\mathrm{End}^{\circ}(X)$, такая, что $P(\varphi) = \deg \varphi \in \mathbf{Z}$ для всех $\varphi \in \mathrm{End}(X)$. Так как любой ненулевой элемент φ является изогенией, $P(\varphi) \geqslant 1$, если $\varphi \in \mathrm{End}(X)$ и $\varphi \neq 0$. Далее, пространство $\mathbf{Q}M$ конечномерно, а неравенство $|P(\varphi)| < 1$ определяет окрестность нуля U в этом пространстве. Имеем $U \cap \mathrm{End}(X) = (0)$, так что группа $\mathrm{End}(X) \cap \mathbf{Q}M$ дискретна в $\mathbf{Q}M$ и потому конечно порождена.

Шаг II. *Для всех* $l \neq p$ *отображение* (*) *инъективно.*

В самом деле, согласно результату первого шага, достаточно проверить, что для любого конечно порожденного (и потому свободного) подмодуля M модуля $\mathrm{Hom}(X, Y)$ со свойством $M = \mathbf{Q}M \cap \mathrm{Hom}(X, Y)$ отображение

$$\mathbf{Z}_l \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} M \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y))$$

инъективно. Пусть $f_1, \ldots, f_p$ — некоторый $\mathbf{Z}$-базис модуля M. Допустим, что указанное выше отображение не инъективно. Так как модуль слева $\mathbf{Z}_l$-свободен, мы можем найти элементы $\alpha_i \in \mathbf{Z}_l$, из которых хоть один обратим, такие, что $\sum \alpha_i f_i \to 0$. Поэтому можно найти целые числа n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, не все $\equiv 0 \mod l$, такие, что $T_l\left(\sum\limits_1^p n_i f_i\right)$ отображает $T_l(X)$ в $lT_l(Y)$. По самому определению $T_l(f)$ это означает, что отображение $\sum\limits_1^p n_i f_i = f$ переводит X_l в 0. Но это означает, что f представляется в виде композиции $X \xrightarrow{l} X \xrightarrow{g} Y$, а так как $g \in \mathbf{Q}M \cap \operatorname{Hom}(X, Y) = M$, находим, что $g = \sum\limits_1^p m_i f_i$. Тем самым $\sum n_i f_i = l \sum m_i f_i$, а так как $f_1, \ldots, f_p$ — базис M, имеем $l \mid n_i$ при всех i — противоречие.

Отсюда следует наша теорема. В самом деле, из инъективности отображения (*) вытекает, что пространство $\operatorname{Hom}^\circ(X, Y)$ конечномерно над $\mathbf{Q}$. По результату шага I группа $\operatorname{Hom}(X, Y)$ конечно порождена. Так как она не имеет кручения, она свободна.

Следствие 1. $\operatorname{Hom}(X, Y) \cong \mathbf{Z}^\rho$, *где* $\rho \leqslant 4 \dim X \times \times \dim Y$.

Доказательство. В самом деле, ранг модуля $\operatorname{Hom}(X, Y)$ не превосходит ранга модуля $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X), T_l(Y))$, т. е. $4 \dim X \cdot \dim Y$.

Следствие 2. *Для любого абелева многообразия X группа $NS(X) = \operatorname{Pic} X / \operatorname{Pic}^\circ X$ является свободной группой конечного ранга (который называется базисным числом многообразия X).*

Доказательство. В самом деле, гомоморфизм $L \to \varphi_L$ индуцирует вложение $NS(X)$ в $\operatorname{Hom}(X, X)$.

Следствие 3. $\operatorname{End}^\circ(X)$ — *конечномерная полупростая алгебра над* $\mathbf{Q}$.

Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем Γ, которое для простоты будем считать бесконечным. *Следовой формой* алгебры A над Γ назовем любую Γ-линейную форму

$$S\colon A \to \Gamma$$

со свойством $S(XY) = S(YX)$ для всех $X, Y \in A$. *Норменной формой* алгебры A над Γ назовем любую ненулевую полиномиальную функцию

$$N\colon A \to \Gamma$$

(в терминах базиса алгебры A над Γ это означает, что $N(a)$ можно записать как многочлен над Γ от компонент элемента a) со свойством $N(X, Y) = N(X)N(Y)$ для всех $X, Y \in A$. Следующая лемма хорошо известна, но для полноты мы приведем ее с доказательством.

Лемма. *Пусть A — конечномерная ассоциативная простая алгебра над бесконечным полем Γ, центр Λ которой сепарабелен над Γ. Тогда существуют такие канонические формы — норменная N° и следовая* Tr° *алгебры A над Λ, что любая норменная (соответственно следовая) форма A над Γ имеет вид* $(\mathrm{Nm}_{\Lambda/\Gamma} \circ N^\circ)^k$, *где $k \geqslant 0$ — целое число (соответственно* $\varphi \circ \mathrm{Tr}^\circ$, *где* $\varphi\colon \Lambda \to \Gamma$ *— линейное отображение). Если $[A : \Lambda] = d^2$, то форма N° однородна степени d.*

Доказательство. Если поле $\Gamma = \Lambda$ сепарабельно замкнуто, то A изоморфна матричной алгебре $M_d(\Gamma)$. В этом случае элементы вида $XY - YX$ порождают векторное подпространство матриц с нулевым следом, а любая норменная форма определяет рациональный гомоморфизм алгебраических групп $GL(d) \to \mathbf{G}_m$. Это показывает справедливость леммы для форм Tr° = след матрицы, N° = определитель матрицы.

В общем случае обозначим через $\overline{\Gamma}$ сепарабельное замыкание поля Γ, через $\sigma_i\colon \Lambda \to \overline{\Gamma}$ $(1 \leqslant i \leqslant [\Lambda : \Gamma])$ — различные вложения Λ в $\overline{\Gamma}$ над Γ, а через $\overline{\Gamma}_{(i)}$ — поле $\overline{\Gamma}$, рассматриваемое как Λ-алгебра относительно отображения σ_i. Определен изоморфизм $\overline{\Gamma}$-алгебр

$$A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma} \cong A \underset{\Lambda}{\otimes} (\Lambda \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma}) \cong \prod_i A \underset{\Lambda}{\otimes} \overline{\Gamma}_{(i)}.$$

Обозначим образ элемента $\alpha \in A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma}$ относительно этого изоморфизма через $\{\varphi_i(\alpha)\}$. Любая норменная форма N на A над Γ продолжается до норменной формы алгебры $A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma}$ над $\overline{\Gamma}$ и, следовательно, определяет норменную форму N_i на $A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma}_{(i)}$: $N_i(\xi) = N(1, \ldots, 1, \xi, 1, \ldots, 1)$. В силу доказанного выше $N_i = (N_i^\circ)^{n_i}$, где N_i° — приведенная норма алгебры $A \underset{\Lambda}{\otimes} \overline{\Gamma}_{(i)}$ над $\overline{\Gamma}_{(i)}$, так что

$$N(\alpha) = \prod_i N_i^\circ(\varphi_i(\alpha))^{n_i}.$$

Покажем, что норма $\alpha \to \prod_i N_i^\circ(\varphi_i(\alpha))^{n_i}$ алгебры $\Lambda \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma}$ над $\overline{\Gamma}$ получается из некоторой нормы алгебры A над Γ с помощью расширения базы тогда и только тогда, когда все показатели n_i совпадают. Поскольку $\overline{\Gamma}$ — сепарабельное замыкание поля Γ, N индуцирована нормой над Γ в том и только том случае, когда для любого автоморфизма σ поля $\overline{\Gamma}$ над Γ имеем $N((1 \otimes \sigma)\alpha) = \sigma(N\alpha)$, т. е.

$$\prod_i N_i^\circ(\varphi_i((1 \otimes \sigma)\alpha))^{n_i} = \sigma \prod_i N_i^\circ(\varphi_i(\alpha))^{n_i}.$$

Существует такая перестановка π целых чисел от 1 до $[\Lambda : \Gamma]$, что $\sigma \circ \sigma_i = \sigma_{\pi(i)}$. Она определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma} & \xrightarrow{\varphi_i} & A \underset{\Lambda}{\otimes} \overline{\Gamma}_{(i)} \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \sigma} \\ A \underset{\Gamma}{\otimes} \overline{\Gamma} & \xrightarrow{\varphi_{\pi(i)}} & A \underset{\Lambda}{\otimes} \overline{\Gamma}_{\pi(i)}. \end{array}$$

Так как правая вертикальная стрелка является изоморфизмом простых алгебр, который продолжает изоморфизм σ сепарабельно замкнутых основных полей, получаем отсюда, что

$$N^{\circ}_{\pi(i)}\left[\varphi_{\pi(i)}\left((1 \otimes \sigma)(\alpha)\right)\right] = \sigma N^{\circ}_{i}(\varphi_i(\alpha)).$$

Подставляя в норменное произведение, убеждаемся, что $n_{\pi(i)} = n_i$ для всех i. Но группа Галуа поля $\overline{\Gamma}$ над Γ действует транзитивно на вложениях в $\overline{\Gamma}$ над Λ, так что все n_i совпадают.

Таким образом, можно положить $N^{\circ}(\alpha) = \prod\limits_i N^{\circ}_i(\varphi_i(\alpha))$ в утверждении леммы и $N(\alpha) = \mathrm{Nm}_{\Lambda/\Gamma}(N^{\circ}_{A/\Lambda}(\alpha))^{n_i}$. Утверждение о следе еще проще.

Определение. $\mathrm{Nm}_{\Lambda/\Gamma} \circ N^{\circ}$ называется *приведенной нормой алгебры A над* Γ, а $\mathrm{Tr}_{\Lambda/\Gamma} \circ \mathrm{Tr}^{\circ}$ называется *приведенным следом алгебры A над* Γ.

Теперь мы можем доказать следующий важный результат:

Теорема 4. *Пусть f — эндоморфизм абелева многообразия X, $T_l(f)$ — индуцированный эндоморфизм модуля $T_l(X)$ ($l \neq$ характеристике). Тогда*

$$\deg f = \det T_l(f),$$

так что

$$\deg(n1_X - f) = P(n),$$

где $P(t)$ — характеристический многочлен $\det(t - T_l(f))$ эндоморфизма $T_l(f)$. Степень многочлена P равна $2g$, старший коэффициент — единице, остальные коэффициенты — целые рациональные числа и $P(f) = 0$.

Доказательство. Обе функции $f \to \deg f$ и $f \to \det T_l(f)$ однозначно продолжаются соответственно до норменных форм N_1 и N_2 степени $2g$ на полупростой $\mathbf{Q}_l$-алгебре $\mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{End}(X)$, где $\mathbf{Q}_l$ — поле l-адических чисел. Пусть $|\ \ |$ есть l-адическая абсолютная величина. Мы утверждаем, что $|N_1\alpha| = |N_2\alpha|$ для всех $\alpha \in \mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{End}(X)$. Действительно, это достаточно проверить для элементов $\alpha \in \mathbf{Z}_l \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \operatorname{End}(X)$ (в силу однородности) и даже элементов $\alpha \in \operatorname{End}(X)$ (по непрерывности). Нужно, стало быть, установить, что степень l, делящая $\deg f$, совпадает со степенью l, делящей $\det T_l(f)$. Но первое число совпадает с порядком ядра $X_{l^n} \xrightarrow{f} X_{l^n}$ для достаточно больших n, или, что то же самое, с порядком коядра этого гомоморфизма для достаточно больших n. Переходя к пределу, находим, что эта степень равна порядку коядра эндоморфизма $T_l(f)$, который и равен l^ν, где ν — показатель степени, с которым l входит в $\det T_l(f)$.

Пусть теперь $\mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \operatorname{End}(X) \cong \prod_{j=1}^{r} A_j$ — разложение $\mathbf{Q}_l \otimes \operatorname{End}(X)$ в произведение простых алгебр. В силу леммы нормы N_1 и N_2 переходят в нормы на $\prod_j A_j$, т. е. в произведения степеней

$$N_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \prod_{j=1}^{r} N_j^\circ(\alpha_j)^{\nu_{ij}} \qquad (i = 1, 2),$$

где N_j° — норменные формы низшей степени на A_j над $\mathbf{Q}_l$. Полагая $\alpha_j = 1$ при $j \neq j_0$, получаем, что $|N_{j_0}(\alpha_{j_0})|^{\nu_{1j_0} - \nu_{2j_0}} = 1$ при всех $\alpha_{j_0} \in A_{j_0}$. Так как N_{j_0} однородна положительной степени, находим отсюда, что $\nu_{1j_0} = \nu_{2j_0}$ при всех j_0, т. е. $N_1 = N_2$.

Это доказывает первое утверждение теоремы. Второе следует из него, если подставить $n1_X - f$ вместо f и учесть, что $T_l(n1_X - f) = n1_{T_l(X)} - T_l(f)$. Далее, старший коэффициент многочлена P, очевидно, равен единице, а степень равна $2g$; все коэффициенты рациональны, потому что все $P(n)$ — целые числа. Но $\operatorname{End}(X)$ — конечный $\mathbf{Z}$-модуль, поэтому элемент f цел над $\mathbf{Z}$, так что f и $T_l(f)$ удовлетворяют уравнению целой зависимости над $\mathbf{Z}$. Стало быть, все собственные значения матрицы $T_l(f)$ — целые алгебраические числа, и коэффициенты ее характеристического многочлена — тоже целые алгебраические числа. Выше уже было установлено, что они рациональны.

В частности, $P(f)$ — однозначно определенный элемент кольца $\mathrm{End}(X)$; он равен нулю, потому что $T_l(P(f)) = P(T_l(f)) = 0$, что доказывает теорему.

Определение. Описанный выше многочлен $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$ (он не зависит от l) называется *характеристическим многочленом элемента* f. Его свободный член и коэффициент при t с обратным знаком называются соответственно *нормой* и *следом элемента* f.

Пусть $\mathrm{End}^\circ(X) = A_1 \times \ldots \times A_k$, где A_i — простые алгебры над $\mathbf{Q}$, и пусть f_i — компоненты элемента $f \in \mathrm{End}^\circ(X)$ в A_i. Обозначим приведенные норму и след алгебры A_i над $\mathbf{Q}$ через Nm° и Tr° соответственно. Тогда

$$\mathrm{Nm}\, f = \prod_{i=1}^{k} (\mathrm{Nm}^\circ f_i)^{n_i},$$

$$\mathrm{Tr}\, f = \sum_{i=1}^{k} n_i \,\mathrm{Tr}^\circ f,$$

где $n_i > 0$ — целые числа.

Следствие. *Пусть X — простое абелево многообразие размерности g, K — центр алгебры* $\mathrm{End}^\circ(X)$, $[K: \mathbf{Q}] = e$, $[\mathrm{End}^\circ(X) : K] = d^2$. *Тогда de делит $2g$.*

Доказательство. Имеем $\mathrm{Nm}\, f = (\mathrm{Nm}^\circ f)^n$ для некоторого n. Но Nm — полиномиальная функция степени $2g$, а Nm° — полиномиальная функция степени de. Доказательство закончено.

Замечание. Если характеристика поля k равна нулю, в тех же предположениях можно утверждать даже, что d^2e делит $2g$. Действительно, по принципу Лефшеца можно считать, что k — поле комплексных чисел. Пусть $X = V/U$ в обычных обозначениях. Тогда кольцо с делением $\mathrm{End}^\circ(X)$ имеет точное представление в $\mathbf{Q}$-векторном пространстве $U \otimes \mathbf{Q}$. Поэтому $\dim U \otimes \mathbf{Q} = 2g$ должно делиться на $\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{End}^\circ(X) = d^2e$.

Это неверно в конечной характеристике. В § 22 мы увидим, что для любого простого $p > 0$ существует эллиптическая кривая X p-ранга 0 и что для такой кривой кольцо $\mathrm{End}^\circ(X)$ некоммутативно и имеет ранг 4 над центром $\mathbf{Q}$. В этом случае, стало быть, $de = 2 = 2g$.

Определение. Простое абелево многообразие X называется *многообразием* CM-*типа*, если $de = 2g$, где d^2 — степень $\mathrm{End}^\circ(X)$ над центром K, e — степень K над $\mathbf{Q}$, а g — размерность X.

Хорошо известно, что все максимальные коммутативные подполя алгебры с делением A ранга d^2 над центром K имеют степень d над K. Тем самым простое абелево многообразие X принадлежит к CM-типу в том и только том случае, когда в $\mathrm{End}^\circ(X)$ содержится подполе степени $2g$ (ибо $de \leqslant 2g$ в любом случае).

§ 20. Формы Римана

Пусть l — простое число, отличное от характеристики поля k, и пусть μ_{l^n} — группа корней из 1 степени l^n в k^*. Отображение $\xi \to \xi^l$ определяет гомоморфизмы $\mu_{l^{n+1}} \to \mu_{l^n}$, превращающие $\{\mu_{l^n}\}$ в проективную систему. Положим $M_l = \varprojlim \mu_{l^n}$. Тогда M_l имеет естественную структуру $\mathbf{Z}_l$-модуля. Так как существуют изоморфизмы $\mu_{l^n} \simeq \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$, при которых отображения $\mu_{l^{n+1}} \to \mu_{l^n}$ превращаются в естественные гомоморфизмы $\mathbf{Z}/l^{n+1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$, проективный предел M_l (неканонически) изоморфен $\mathbf{Z}_l$.

Пусть теперь n — любое целое число, взаимно простое с характеристикой. Ранее мы установили каноническую двойственность между группами $\mathrm{Ker}(n_X)$ и $\mathrm{Ker}(n_{\hat{X}})$, т. е. определили спаривание $\bar{e}_n$: $X_n \times (\hat{X})_n \to \mu_n$, где μ_n — группа корней из 1 степени n в k^*. Напомним его конструкцию.

Пусть $a \in X_n$, $\lambda \in (\hat{X})_n$, L — расслоение, соответствующее λ. Тогда расслоение L^n тривиально; поэтому $n_X^* L$ тривиально, и

$$L \cong \mathbf{A}^1 \times X \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \text{действие } X_n: \\ \varphi_u(\alpha, x) = (\chi(u)\,\alpha, \; x + u) \end{array} \right\},$$

где χ: $X_n \to k^*$ — некоторый характер. По определению

$$\bar{e}_n(a, \lambda) = \chi(a).$$

Иным словами, каноническое действие X_n на $n_X^* L$ мы рассматриваем как действие на тривиальном расслоении, где оно задается некоторым характером χ. Полезно другое определение $\bar{e}_n$, использующее дивизоры вместо линейных расслоений. Пусть D — такой дивизор, что

$$\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{L}.$$

Так как расслоения L^n и $n_X^* L$ тривиальны, на X существуют такие рациональные функции f и g, что

$$(f) = nD,$$
$$(g) = n_X^{-1} D.$$

Тогда

$$(n_X^* f) = n n_X^{-1} D = (g^n),$$

так что для некоторой константы α

$$g^n(x) = \alpha f(nx) \qquad \forall x \in X.$$

Отсюда следует, что $[g(x)/g(x+a)]^n = 1$ для всех $x \in X$, так что $g(x)/g(x+a)$ — не зависящий от x корень n-й степени из 1.

Лемма. $\bar{e}_n(a, \lambda) = \dfrac{g(x)}{g(x+a)}$.

Доказательство. Положим $g(x)/g(x+a) = \eta(a)$ и рассмотрим диаграмму отображений пучков

$$\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{n_X^*} \mathcal{O}_X(n_X^{-1} D) \xleftarrow[\text{умножение на } g]{\sim} \mathcal{O}_X.$$

Для всех аффинных открытых множеств $U \subset X$, полагая $V = n_X^{-1}(U)$, получаем диаграмму

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{n_X^*} \Gamma(V, \mathcal{O}_X(n_X^{-1} D)) \xleftarrow[\text{умножение на } g]{\sim} \Gamma(V, \mathcal{O}_X),$$

которая отождествляет $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D))$ с подпространством $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, состоящим из функций $f(x)$, для которых

$$f(x+u)\,g(x+u)=f(x)\,g(x) \qquad \forall u \in X_n.$$

С другой стороны, обозначим через M факторпространство $\mathbf{A}^1 \times X$ под действием группы X_n вида

$$\varphi_u(\alpha,\ x)=(\eta(u)\,\alpha,\ x+u).$$

Тогда $\Gamma(U,\ \mathcal{M})$ отождествляется с подпространством $\Gamma(V,\ \mathcal{O}_X)$, состоящим из таких функций $f(x)$, что

$$\varphi_u(f(x),\ x)=(f(x+u),\ x+u) \qquad \forall u \in X_n,$$

т. е. $f(x+u)=\eta(u)\,f(x)$ при всех $u \in X_n$. Это условие совпадает с прежним, так что $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_X(D)$, т. е. $M \cong L$. Следовательно, η совпадает с χ, что завершает доказательство.

Теперь мы перейдем к пределу по n, воспользовавшись следующим фактом:

Предложение. *Пусть m, n — целые числа, взаимно простые с характеристикой, $x \in X_{mn}$, $y \in (\widehat{X})_{mn}$. Тогда*

$$\bar{e}_n(mx,\ my)=(\bar{e}_{mn}(x,\ y))^m.$$

Доказательство. Пусть V — полное многообразие, G — конечная группа, свободно действующая на V, H — некоторый ее нормальный делитель, L — линейное расслоение на V/G, прообраз которого на V/H тривиален. Описанная выше конструкция позволяет построить гомоморфизм χ: $G/H \to k^*$. Но L становится тривиальным и на V, что определяет гомоморфизм χ': $G \to k^*$. Из построения очевидно, что $\chi'=\chi \circ \eta$, где η: $G \to G/H$ — естественный гомоморфизм.

Применим теперь это замечание к случаю $V=X$, $G=X_{mn}$ и $H=X_m$. Морфизмы факторизации $X \to X/G$, $X \to X/H$ и $X/H \to X/G$ превращаются соответственно в морфизмы $(mn)_X$: $X \to X$, m_X: $X \to X$ и n_X: $X \to X$, а естественный гомоморфизм $G \to G/H$ отвечает умножению $X_{mn} \xrightarrow{m_X} X_n$. Поэтому для всякого линейного расслоения L на X с тривиальным n_X^*L и для любой точки $x \in X_{mn}$ в силу сделанного выше замечания

$$\bar{e}_n(mx, \lambda) = \bar{e}_{mn}(x, \lambda),$$

где $\lambda \in (\hat{X})_n$ соответствует L. Положив $\lambda = my$, где $y \in (\hat{X})_{mn}$, получаем требуемое.

В частности, при $n = l^k$ и $m = l$ находим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_{l^{k+1}} \times (\hat{X})_{l^{k+1}} & \xrightarrow{\bar{e}_{l^{k+1}}} & \mu_{l^{k+1}} \\ \downarrow{\scriptstyle l \times l} & & \downarrow{\scriptstyle l} \\ X_{l^k} \times (\hat{X})_{l^k} & \xrightarrow{\bar{e}_{l^k}} & \mu_{l^k}, \end{array}$$

так что, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем естественное спаривание

$$e_l\colon T_l(X) \times T_l(\hat{X}) \to M_l.$$

Тривиальио проверяется, что оно $\mathbf{Z}_l$-билинейно и невырожденно. Далее, пусть $f\colon X \to Y$ — гомоморфизм абелевых многообразий, $\hat{f}$ — двойственный гомоморфизм, $T_l(f)$ и $T_l(\hat{f})$ — индуцированные гомоморфизмы модулей Тэйта. Тогда для любых $\xi \in T_l(X)$ и $\eta \in T_l(\hat{Y})$

$$\text{(I)} \qquad e_l(T_l(f)(\xi), \eta) = e_l(\xi, T_l(\hat{f})(\eta)).$$

Это устанавливается предельным переходом, исходя из соответствующего факта для $\bar{e}_n$, который проверяется прямым выписыванием определений.

Форма Римана, связанная с дивизором.

Определение. Пусть L — линейное расслоение на абелевом многообразии X, l — простое число, отличное от характеристики поля k. *Формой Римана* E^L, *связанной с* L, называется $\mathbf{Z}_l$-билинейное отображение

$$E^L\colon T_l(X) \times T_l(X) \to M_l,$$

определенное формулой

$$E^L(x, y) = e_l(x, T_l(\varphi_L)(y)).$$

Теорема 1. *Форма Римана E^L, связанная с любым расслоением L, кососимметрична.*

В § 23 мы докажем этот результат на языке теории пучков. Здесь воспользуемся языком дивизоров, позволяющим обойтись без диаграммного поиска.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\bar{e}_n(a, \varphi_L(a)) = 1$ при всех $a \in X_n$. Пусть дивизор D представляет расслоение L. Пусть $a \in X_n$ и g имеет дивизор

$$(g) = n_X^{-1}(T_a^{-1}D - D).$$

Нужно установить, что $g(x+a) = g(x)$ для всех $x \in X$. Выберем точку b, такую, что $nb = a$, и положим $E = n_X^{-1}D$, так что $(g) = T_b^{-1}E - E$. Тогда

$$(T_{ib}^{*}g) = T_{(i+1)b}^{-1}E - T_{ib}^{-1}E.$$

Из инвариантности E относительно T_a следует, что

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} T_{ib}^{*}g\right) = \sum_{i=0}^{n-1} T_{(i+1)b}^{-1}E - T_{ib}^{-1}E = 0.$$

Поэтому функция $h(x) = \prod_{i=0}^{n-1} g(x+ib)$ постоянна, так что

$$1 = h(x+b)/h(x) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} g(x+b+ib)\right)\Big/\left(\prod_{i=0}^{n-1} g(x+ib)\right) = g(x+a)/g(x).$$

Это доказывает теорему.

Тем самым формы Римана $L \to E^L$ определяют отображение

$$\begin{array}{l} NS(X) \to \left\{\begin{array}{l}\text{альтернированные 2-формы} \\ T_l(X) \times T_l(X) \to M_l\end{array}\right\}. \\ \big\|\text{def} \\ \operatorname{Pic} X/\operatorname{Pic}^{\circ} X \end{array}$$

Это отображение инъективно: если $E^L = 0$, то $\varphi_L = 0$ в силу невырожденности e_l. Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — гомоморфизм абелевых многообразий, а L — линейное расслоение на Y. Тогда

(II) $\quad E^{f^*L}(x, y) = E^L(T_l f(x), T_l f(y)), \; x, y \in T_l(X).$

Доказательство.

$$E^{f^*L}(x, y) = e_l(x, \varphi_{f^*L}y) = \\ = e_l(x, T_l\hat{f} \circ \varphi_L \circ T_lf(y)) = \\ = e_l(T_lf(x), \varphi_L(T_lf(y))) = \\ = E^L(T_lf(x), T_lf(y)).$$

Вычислим теперь E^P, где P — расслоение Пуанкаре на $X \times \hat{X}$. Отождествляя $T_l(X \times \hat{X})$ с $T_l(X) \times \times T_l(\hat{X})$, получаем, что

(III) $$E^P((x, \hat{x}), (y, \hat{y})) = e_l(x, \hat{y}) - e_l(y, \hat{x}).$$

Доказательство. Так как обе формы билинейны и кососимметричны, достаточно показать, что

$$E^P((x, 0), (y, 0)) = E^P((0, \hat{x}), (0, \hat{y})) = 0,$$
$$E^P((x, 0), (0, \hat{y})) = e_l(x, \hat{y}).$$

Пользуясь функторным свойством E относительно вложения $X \times (0)$ в $X \times \hat{X}$ и тривиальностью ограничения P на $X \times (0)$, находим $E^P((x, 0), (y, 0)) = 0$. Аналогично проверяется, что $E^P((0, \hat{x}), (0, \hat{y})) = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что существует изоморфизм $(\widehat{X \times Y}) \rightleftarrows \hat{X} \times \hat{Y}$, который задается отображением $L \to (L|_{X \times (0)}, L|_{(0) \times Y})$ для любого $L \in \mathrm{Pic}^\circ(X \times Y)$. В частности, положив $Y = \hat{X}$, получаем отождествление $(\widehat{X \times \hat{X}})$ с $\hat{X} \times \hat{\hat{X}}$. Но для любой точки $(x, \hat{x}) \in X \times \hat{X}$ точка $\varphi_P((x, \hat{x}))$ отвечает линейному расслоению $T^*_{(x, \hat{x})}P \otimes P^{-1}$, которое соответствует паре расслоений

$$\left(T^*_{(x, \hat{x})}P \otimes P^{-1}|_{X \times (0)}, T^*_{(x, \hat{x})}P \otimes P^{-1}|_{(0) \times \hat{X}}\right) \cong \\ \cong \left(P|_{X \times \{\hat{x}\}}, P|_{\{x\} \times \hat{X}}\right).$$

Поэтому $\varphi_P((x, \hat{x})) = (\hat{x}, i(x))$, где $i\colon X \to \hat{\hat{X}}$ — естественный изоморфизм. Таким образом,

$$E^P((x, 0), (0, \hat{y})) = e_l((x, 0), (\hat{y}, 0)) = e_l(x, \hat{y}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 допускает частичное обращение.

Теорема 2. *Пусть X — абелево многообразие, $\varphi: X \to \hat{X}$ некоторый гомоморфизм. Тогда билинейная форма $(x, y) \to e_l(x, \varphi y)$ на $T_l(X)$ кососимметрична в том и только том случае, когда на X существует линейное расслоение L со свойством $2\varphi = \varphi_L$.*

Доказательство. Если $2\varphi = \varphi_L$, то по теореме 1 кососимметрична форма $2e_l(x, \varphi y) = e_l(x, \varphi_L y)$ и, стало быть, $e_l(x, \varphi y)$. Обратно, пусть последняя форма кососимметрична. Обозначим через L прообраз расслоения Пуанкаре P относительно гомоморфизма $(1, \varphi): X \to X \times \hat{X}$. Утверждается, что $2\varphi = \varphi_L$. В силу невырожденности e_l достаточно показать, что $2e_l(x, \varphi y) = e_l(x, \varphi_L y)$ для всех $x, y \in T_l(X)$. В самом деле,

$$e_l(x, \varphi_L y) = E^L(x, y) = E^P((1, \varphi)x, (1, \varphi)y) = \\ = e_l(x, \varphi y) - e_l(y, \varphi x) = 2e_l(x, \varphi y)$$

ввиду формул (II) и (III) и кососимметричности $e_l(x, \varphi y)$. Это доказывает требуемое.

Замечание. В § 23 мы покажем, что если $2\varphi = \varphi_L$ для некоторого линейного расслоения L, то $\varphi = \varphi_{L'}$ для другого расслоения L'. Поэтому доказанная теорема указывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы гомоморфизм $\varphi: X \to \hat{X}$ имел вид φ_L.

Инволюция Розати. Фиксируем некоторое обильное линейное расслоение L на многообразии X, так что $\varphi_L: X \to \hat{X}$ — изогения.

Определение. *Инволюцией Розати алгебры* $\mathrm{End}^\circ(X)$ *относительно расслоения* L называется инволюция $\varphi \rightsquigarrow \varphi' = \varphi_L^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ \varphi_L$.

Это отображение обладает следующими свойствами:

(1) *Для всех* $\varphi, \psi \in \mathrm{End}^\circ(X)$, $a \in \mathbf{Q}$

$$(a\varphi)' = a\varphi',$$
$$(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi',$$
$$(\varphi\psi)' = \psi'\varphi'.$$

Эти свойства очевидны.

(2) *Продолжим гомоморфизм колец* T_l: $\operatorname{End}(X) \to \operatorname{End}_{\mathbf{Z}_l}(T_l(X))$ *до гомоморфизма* $\operatorname{End}^\circ(X) \to \operatorname{End}_{\mathbf{Q}_l}(\mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} T_l(X))$ *и обозначим результат продолжения снова через* T_l. *Тогда для любого элемента* $\varphi \in \operatorname{End}^\circ(X)$ *эндоморфизм* $T_l(\varphi')$ *сопряжен с* $T_l(\varphi)$ *относительно невырожденной билинейной формы* E^L, *т. е.*

$$E^L(\varphi x,\ y) = E^L(x,\ \varphi' y).$$

В частности, $\varphi'' = \varphi$, *т. е. отображение* $\varphi \to \varphi'$ *является инволюцией.*

Доказательство.

$$E^L(x,\ \varphi' y) = e_l(x,\ \varphi_L \circ \varphi_L^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ \varphi_L y) =$$
$$= e_l(x,\ \hat{\varphi} \circ \varphi_L y) = e_l(\varphi x,\ \varphi_L y) = E^L(\varphi x,\ y).$$

(3) *Отождествим* $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} NS(X) = \mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} (\operatorname{Pic} X/\operatorname{Pic}^\circ X)$ *с подпространством в* $\operatorname{Hom}^\circ(X,\ X)$ *с помощью отображения* $M \to \varphi_M$. *Тогда изоморфизм* $\operatorname{Hom}^\circ(X,\ X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}^\circ(X)$, $\psi \to \varphi_L^{-1} \circ \psi$, *переводит это подпространство в подпространство* $\{\psi \in \operatorname{End}^\circ(X) \mid \psi' = \psi\}$ *элементов, симметрических относительно инволюции Розати.*

Доказательство. В самом деле, в силу последней теоремы элемент $\psi \in \operatorname{End}^\circ(X)$ принадлежит образу группы Нерона — Севери, если и только если $e_l(x,\ \varphi y) = -e_l(y,\ \varphi x)$, где $\varphi = \varphi_L \circ \psi$. Но это условие означает, что $E^L(x,\ \psi y) = -E^L(y,\ \psi x)$, т. е. $E^L(x, \psi y) = E^L(\psi x,\ y) = E^L(x,\ \psi' y)$ для всех $x,\ y \in T_l(X)$. Отсюда следует требуемое, потому что форма E^L невырожденна, а представление $\psi \to T_l(\psi)$ точное.

Теорема 3. *Пусть* X — *некоторое абелево многообразие. Тогда существует образующая*

$$v \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_l}\left(\bigwedge^{2g} T_l(X),\ M^{\otimes g}\right)$$

со следующим свойством. Для любых дивизоров $D_1, \ldots, D_g$ *на* X *обозначим через* L_i *линейные расслоения* $\mathcal{O}_X(D_i)$, *а через* $E_i = E^{L_i}$ — *их формы Римана.*

Тогда

$$E_1 \wedge \ldots \wedge E_g = (D_1 \circ \ldots \circ D_g) \circ v.$$

Доказательство. Так как обе части равенства являются полиномиальными функциями от образов расслоений L_i в группе $NS(X)$, эта формула получается поляризацией из ее частного случая, в котором $L_1 = \ldots = L_g$, $D_1 = \ldots = D_g$. Пользуясь еще тем, что $\chi(L) = (D^g)/g!$, мы сведем дело к доказательству формулы

$$[E^L]^{\wedge g} = g!\chi(L)\, v.$$

Фиксируем некоторый изоморфизм $M_l \cong \mathbf{Z}_l$ и выберем базис $T_l(X)$ над $\mathbf{Z}_l$. С помощью этого базиса $\wedge^{2g} T_l(X)$ отождествляется с $\mathbf{Z}_l$, а $[E^L]^{\wedge g}$ становится скаляром. Далее, E^L представляется в этом базисе некоторой матрицей. Покажем, что

$$\left([E^L]^{\wedge g}\right)^2 = (\det E^L)\,(g!)^2.$$

В самом деле, это равенство инвариантно относительно любой замены базиса в $\mathbf{Q}_l \otimes T_l(X)$, и оно легко проверяется в базисе, для которого матрица E^L имеет стандартный вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Тем самым нужно проверить, что $\chi(L)^2 = c \cdot \det E^L$, где c — некоторая l-адическая единица, потому что обе части равенства полиномиально зависят от L. В силу теоремы Римана — Роха это равносильно тождеству $\deg \varphi_L = c \cdot \det E^L$, где c — некоторая l-адическая единица. Но $E^L(x, y) = e_l(x, \varphi_L y)$, а так как e_l — невырожденное спаривание над $\mathbf{Z}_l$, мы находим, что $\det E^L = \det T_l(\varphi_L)$, где определитель отвечает матричному представлению в некотором двойственном базисе модуля $T_l(\widehat{X})$.

Теперь выберем изогению ψ: $\widehat{X} \to X$. Тогда

$$\begin{aligned}\det\psi \det\varphi_L &= \det(\psi\circ\varphi_L) = \\ &= \det[T_l(\psi)\circ T_l(\varphi_L)] = \\ &= \det(T_l(\psi))\det(T_l(\varphi_L)).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы теперь остается заметить, что $\deg\psi/\det T_l(\psi)$ есть l-адическая единица, потому что наибольшая степень l, делящая $\deg\psi$, совпадает с порядком ядра или коядра гомоморфизма $\psi|_{X_{l^n}}$: $X_{l^n} \to X_{l^n}$ для больших n и, стало быть, с наибольшей степенью l, делящей $\det T_l(\psi)$.

Следствие. *Пусть X — простое абелево многообразие размерности g, и пусть $K \subset \mathrm{End}^\circ(X)$ — такая $\mathbf{Q}$-подалгебра, что $\varphi = \varphi'$ для всех $\varphi \in K$. Тогда $[K:\mathbf{Q}]$ делит g.*

Доказательство. Так как $\varphi\psi = \varphi'\psi' = (\psi\varphi)' = \psi\varphi$ для всех $\varphi, \psi \in K$, то K является подполем. Поскольку K состоит из симметрических элементов, оно содержится в образе группы $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} (\mathrm{Pic}\, X/\mathrm{Pic}^\circ X)$ относительно отображения $M \to \varphi_L^{-1}\circ\varphi_M$. Но $\chi(M)$ зависит лишь от эндоморфизма $\varphi_L^{-1}\circ\varphi_M$ и продолжается до однородной полиномиальной функции степени g на пространстве симметрических элементов в $\mathrm{End}^\circ(X)$. Мы утверждаем, что ограничение функции $\chi(M)/\chi(L)$ на K является норменной функцией. Так как она полиномиальна, достаточно лишь проверить, что ее квадрат мультипликативен. Но

$$\chi^2(M)/\chi^2(L) = \deg\varphi_M/\deg\varphi_L = \deg\varphi_L^{-1}\circ\varphi_M,$$

а последняя функция мультипликативна по $\varphi_L^{-1}\circ\varphi_M$. Стало быть, на K определена норменная функция степени g. Следствие получается отсюда, если учесть, что K — поле степени $[K:\mathbf{Q}]$.

§ 21. Положительность инволюции Розати

Теорема 1. *Пусть H — обильный дивизор на абелевом многообразии X, $L = L_X(H)$ — связанное с ним расслоение, $'$ — соответствующая инволюция Розати. Тогда для любого элемента $\varphi \in \operatorname{End}(X)$ имеем*

$$\operatorname{Tr}(\varphi\varphi') = \frac{2g}{(H^g)} (H^{q-1} \cdot \varphi^*(H)),$$

где $(\cdot)$ — индекс пересечения. В частности, квадратичная форма $\varphi \to \operatorname{Tr}(\varphi\varphi')$ на $\operatorname{End}^\circ(X)$ положительно определена.

Доказательство. Очевидно, второе утверждение следует из первого, потому что $(H^{g-1} \cdot D) > 0$ для всякого эффективного дивизора D и обильного дивизора H. Достаточно поэтому доказать первое утверждение.

Выберем и зафиксируем базисы модулей $T_l(X)$ и M_l. Применяя теорему 3 § 19, получим, что

$$[E^L]^{\wedge g} = c \cdot (H^g),$$

$$[E^L]^{\wedge (g-1)} \wedge E^{\varphi^*(L)} = c \cdot (H^{n-1} \cdot \varphi^*(H)),$$

где c — некоторая l-адическая константа. Поэтому

$$\frac{[E^L]^{\wedge (g-1)} \wedge E\varphi^*(L)}{[E^L]^{\wedge g}} = \frac{(H^{g-1} \cdot \varphi^*(H))}{(H^g)}.$$

Так как $E^{\varphi^*(L)} = E^L \circ (\varphi \times \varphi)$, дело сводится к доказательству следующего тождества:

$$\frac{[E^L]^{\wedge (g-1)} \wedge (E^L \circ (\varphi \times \varphi))}{[E^L]^{\wedge g}} = \frac{1}{2g} \operatorname{Tr}(\varphi\varphi'),$$

где φ' — эндоморфизм, сопряженный с φ относительно формы E^L. Это задача чистой линейной алгебры. Рассмотрим такой базис $e_1, e_2, \ldots, e_{2g}$ пространства $\mathbf{Q}_l \otimes T_l(X)$, что $E^L(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1$ и $E^L(e_{2i-1}, e_j) = E^L(e_{2i}, e_j) = 0$ при $j \neq 2i$ или $2i-1$. Тогда по определению внешнего умножения левая часть превращается в

$$\sum_{i_1, \ldots, i_g \equiv 1 \pmod 2} E^L(\varphi(e_{i_g}), \varphi(e_{i_g+1})) \Big/ \sum_{i_1, \ldots, i_g \equiv 1 \pmod 2} 1 =$$

$$= \frac{(g-1)!}{g!} \sum_{i \equiv 1 \pmod 2} E^L(\varphi(e_i), \varphi(e_{i+1})) =$$

$$= \frac{1}{2g} \sum_{i \equiv 1 \pmod 2} [E^L(e_i, \varphi\varphi'(e_{i+1})) + E^L(\varphi'\varphi(e_i), e_{i+1})] =$$

$$= \frac{1}{2g} \operatorname{Tr}(\varphi'\varphi),$$

что доказывает требуемое.

Приложение I. Строение алгебры $\operatorname{End}^\circ(X)$ для простых X. Мы показали, что для простого абелева многообразия X $D = \operatorname{End}^\circ(X)$ есть алгебра с делением конечного ранга над $\mathbf{Q}$, обладающая такой инволюцией $x \to x'$, что $\operatorname{Tr}(xx') > 0$, если $x \neq 0$, где Tr — приведенный след над $\mathbf{Q}$ (или любая его положительная кратность).

Изложим теперь принадлежащую Альберту классификацию всевозможных пар $(D, ')$, где D — алгебра с делением конечного ранга n над $\mathbf{Q}$, а $x \to x'$ — положительно определенная инволюция. Мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями: K — центр D, $K_0 = \{x \in K \mid x' = x\}$ — множество центральных элементов, инвариантных относительно инволюции. Далее, $[D : K] = d^2$, $[K : \mathbf{Q}] = e$ и $[K_0 : Q] = e_0$ (так что $n = ed^2$ и $e = e_0$ или $e = 2e_0$ в зависимости от того, тривиальна инволюция на K или нет). Не оговаривая этого каждый раз заново, мы будем пользоваться тем, что ограничение $\operatorname{Tr}_{D/\mathbf{Q}}$ на любую простую подалгебру в $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} D$ лишь положительным множителем отличается от приведенного следа над $\mathbf{R}$ этой подалгебры.

Шаг I. Пусть теперь $\sigma_i \colon K_0 \to \mathbf{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant r_1)$ — множество различных вещественных вложений поля K_0, а $\sigma_{r_1+j} \colon K_0 \to \mathbf{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant r_2)$ — множество комплексных вложений, такое, что из всякой пары комплексно сопряженных вложений в это множество входит ровно одно. Тем самым $r_1 + 2r_2 = e_0$. Определен изоморфизм

$\mathbf{R}$-алгебр

$$\sigma\colon\ \mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2},$$

$$\sigma(1 \otimes x) = (\sigma_1(x), \ \ldots, \ \sigma_{r_1}(x), \ \sigma_{r_1+1}(x), \ \ldots, \ \sigma_{r_1+r_2}(x)).$$

Так как инволюция на K_0 тождественна, то $\operatorname{Tr} x^2 > 0$ для всех $x \in K_0^*$; поэтому то же самое верно в $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K_0$ (в самом деле, эта квадратичная форма в силу непрерывности положительно полуопределена на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K_0$, а ее нуль-пространство, будучи ортогональным дополнением ко всему пространству, определено над $\mathbf{Q}$ и потому тривиально). Отсюда легко вытекает, что $r_2 = 0$, так что поле K_0 вполне вещественно.

Предположим, что $K \neq K_0$. Тогда $K = K_0(\sqrt{\alpha})$ для некоторого $\alpha \in K_0$, $\sqrt{\alpha} \notin K_0$ и $(\sqrt{\alpha})' = -\sqrt{\alpha}$. Имеем

$$\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K \cong (\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K_0) \underset{K_0}{\otimes} K \cong \prod_{i=1}^{e_0} \mathbf{R}_{(i)} \underset{K_0}{\otimes} K,$$

где $\mathbf{R}_{(i)}$ — поле $\mathbf{R}$ со структурой K_0-алгебры относительно гомоморфизма σ_i. Но $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}_{(i)} \underset{K_0}{\otimes} K$ изоморфна либо $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$ в зависимости от того, $\sigma_i(\alpha) > 0$ или $\sigma_i(\alpha) < 0$. Инволюция в первом случае переставляет сомножители, а во втором является комплексным сопряжением. Но прежнее рассуждение с положительной определенностью $\operatorname{Tr}(xx')$ на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ показывает, что $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ не может возникнуть. Значит, K — вполне мнимое поле и $\sigma_i(\alpha) < 0$ при всех i.

Будем говорить, что при $K = K_0$ инволюция *первого рода*, а при $K \neq K_0$ — *второго рода*.

Шаг II. Инволюция первого рода определяет изоморфизм алгебры D и ее инверсной над центром K, так что ее класс в группе Брауэра $\operatorname{Br}(K)$ имеет период 1 или 2. В первом случае $D = K$. Пусть теперь период равен 2. По теореме Хассе — Брауэра — Нётер ранг центральной алгебры с делением над числовым полем равен квадрату ее периода в группе Брауэра.

Поэтому ранг D равен 4 над K (иначе говоря, D — кватернионное тело над K). В этом случае D имеет над K каноническую инволюцию $x \to x^* = \mathrm{Tr}^{\circ}_{D/K}\, x - x$, где Tr° — приведенный след (для проверки того, что это инволюция, нужно расширить K до алгебраического замыкания; дело сведется к тривиальной проверке этого утверждения для (2×2)-матричной алгебры над полем). По теореме Сколема — Нётер существует такой элемент $a \in D \setminus \{0\}$, что $x' = ax^*a^{-1}$. Условие $x'' = x$ показывает, что $a^* = \varepsilon a$, где $\varepsilon \in K^*$. Но $a = a^{**} = (\varepsilon a)^* = \varepsilon^2 a$, поэтому $\varepsilon = \pm 1$.

Если теперь $\varepsilon = 1$, то $a^* = \mathrm{Tr}_{D/K}\, a - a = a$, так что $a \in K$ и $x' = x^*$. Рассмотрим изоморфизм

$$(*)\quad \mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} D \cong (\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K) \underset{K}{\otimes} D \rightrightarrows (\mathbf{R}_{(1)} \underset{K}{\otimes} D) \times \ldots \times (\mathbf{R}_{(e)} \underset{K}{\otimes} D),$$

где $\mathbf{R}_{(i)}$, — как выше, поле $\mathbf{R}$ со структурой K-алгебры относительно i-го вложения σ_i, а каждый сомножитель $\mathbf{R}_{(i)} \underset{K}{\otimes} D$ $\mathbf{R}$-изоморфен либо матричной алгебре $M_2(\mathbf{R})$, либо стандартной алгебре кватернионов $\mathbf{K}$ над $\mathbf{R}$. Если бы факторы типа $M_2(\mathbf{R})$ реально возникали, для любого элемента $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A \neq 0$, мы имели бы $\mathrm{Tr}((\mathrm{Tr}\, A - A)A) > 0$, т. е. $(\mathrm{Tr}\, A)^2 > \mathrm{Tr}\, A^2$, что не верно для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Стало быть, все факторы в указанном разложении изоморфны $\mathbf{K}$, а ограничение инволюции на каждом из них совпадает с канонической инволюцией. Так как для нее $\mathrm{Tr}(xx^*) > 0$ при $x \neq 0$, отсутствие множителей $M_2(\mathbf{R})$ достаточно для определенности инволюции (при $\varepsilon = 1$).

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon = -1$. В разложении $(*)$ обозначим через a_i образ элемента a в сомножителе $\mathbf{R}_{(i)} \underset{K}{\otimes} D = D_i$. На этом множителе, стало быть, инволюция имеет вид $x \to a_i\left(\mathrm{Tr}_{D_i/\mathbf{R}}\, x - x\right)a_i^{-1}$. Кроме того, $a_i^* = \mathrm{Tr}_{D_i/\mathbf{R}}\, a_i - a_i = -a_i$, так что $\mathrm{Tr}_{D_i/\mathbf{R}}\, a_i = 0$. Покажем, что D_i не может быть $\mathbf{R}$-изоморфно $\mathbf{K}$. Так как $a_i a_i^*$ — вещественное положительное число, a_i удовлетворяет уравнению $x^2 + \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$, так что по теореме Сколема — Нётер существует такой изоморфизм D_i

с $\mathbf{K}$, что a_i переходит в $\lambda i \in \mathbf{K} = \mathbf{R} + \mathbf{R}i + \mathbf{R}j + \mathbf{R}k$. Положим $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, тогда $\operatorname{Tr}(xx') = 2(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$, а эта форма не положительно определена, и все факторы D_i изоморфны $M_2(\mathbf{R})$. Далее, $K[a]$ является подполем D, инвариантным относительно инволюции, меняющей знак у a. Поэтому $a^2 \in K$ и число a^2 отрицательно при всех вещественных вложениях K. Стало быть, каждое число a_i удовлетворяет некоторому минимальному уравнению $a_i^2 = \lambda_i \in \mathbf{R}$ в $M_2(\mathbf{R})$, где $\lambda_i < 0$. Снова теорема Сколема — Нётер (или прямая проверка) показывает существование изоморфизма $\mathbf{R}_{(i)} \underset{K}{\otimes} D \cong M_2(\mathbf{R})$, при котором a_i переходит в $\mu_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $\mu_i > 0$, $\mu_i \in \mathbf{R}$. Но инволюция на таком факторе должна быть транспонированием (матриц) и $\operatorname{Tr}(A^t A) > 0$ при $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A \neq 0$. Итак, сформулированные условия достаточны для положительной определенности $\operatorname{Tr}(xx')$.

Шаг III. Перейдем теперь к инволюциям второго рода. Соберем воедино нужные нам результаты теории полей классов о структуре группы Брауэра полей алгебраических чисел и p-адических полей.

Теорема. 1) *Группа Брауэра локального поля канонически изоморфна* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Пусть* $L \supset K$ — *два таких поля,* $[L: K] = n$. *При указанном изоморфизме индуцированное отображение* $\operatorname{Br}(K) \to \operatorname{Br}(L)$ *превращается в умножение на* n *в* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Группа Брауэра поля $\mathbf{R}$ *циклична порядка два, и мы отождествим ее с единственной циклической подгруппой порядка 2 в* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Группа Брауэра поля $\mathbf{C}$ *тривиальна.*

2) *Пусть* K — *поле алгебраических чисел,* v — *любая его конечная или бесконечная точка,* K_v — *пополнение* K *относительно* v, $\operatorname{Inv}_v(D)$ — *элемент* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *отвечающий классу* $D \otimes K_v$ *для центральной простой* K-*алгебры* D *в* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Тогда последовательность*

$$0 \to \operatorname{Br}(K) \to \prod_v \operatorname{Br}(K_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

где второе отображение — суммирование компонент в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *точна.*

Исследуем теперь алгебры с делением и инволюцией второго рода над $\mathbf{Q}$. Пусть σ — ограничение инволюции на K, так что σ индуцирует некоторый автоморфизм $\operatorname{Br}(K)$. Для инволюции второго рода имеем $\sigma(\operatorname{cl}(D)) = -\operatorname{cl}(D)$, т. е. для любой точки v

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{Inv}_v(D) + \operatorname{Inv}_{\sigma v}(D) = 0.$$

Поскольку мы уже показали, что K — вполне мнимое поле, это условие тривиально выполнено для бесконечных v. Из него следует, что алгебра D изоморфна алгебре, инверсной к $D_{(\sigma)}$. Это означает, что можно найти такое отображение $D \to D$: $x \to x^*$, что при $\lambda \in K$ имеем $(\lambda x)^* = \sigma(\lambda)\, x^*$ и $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(xy)^* = y^* x^*$. По теореме Сколема — Нётер любая инволюция, индуцирующая σ на K, должна иметь вид $x' = a x^* a^{-1}$, где $a \in D$ — некоторый ненулевой элемент. Так как $x \to x^{**}$ есть K-автоморфизм алгебры D, то $x^{**} = \alpha x \alpha^{-1}$ для некоторого $\alpha \in D$. Из равенств

$$\alpha x^* \alpha^{-1} = (x^*)^{**} = (x^{**})^* = (\alpha x \alpha^{-1})^* = \alpha^{*-1} x^* \alpha^*, \qquad x \in D,$$

следует, что $\alpha^* \alpha \in K$, а из равенства $(\alpha^*\alpha)^* = \alpha^*\alpha$, — что $\alpha^*\alpha \in K_0$. Так как отображение $x \to x' = a x^* a^{-1}$ должно быть инволюцией, находим, что $a a^{*-1} \alpha x \alpha^{-1} a^* a^{-1} = x$ при всех $x \in D$, т. е. $a a^{*-1} \alpha \in K$, или, что то же самое, $\alpha^{-1} a^* = \mu a$ для некоторого $\mu \in K$. Положим $\varphi(x) = \alpha^{-1} x^*$ для $x \in D$. Тогда отображение φ σ-линейно. Из разрешимости уравнения $\varphi(a) = \mu a$ при $a \neq 0$ следует, что

$$(\alpha^*\alpha)^{-1} a = a(\alpha^*\alpha)^{-1} = \alpha^{-1} a a \alpha^{-1} a \alpha^{*-1} =$$
$$= \alpha^{-1}(\alpha^{-1} a^*)^* = \varphi^2(a) = \mu \cdot \sigma\mu \cdot a = \operatorname{Nm}_{K/K_0}(\mu)\, a,$$

откуда $\alpha^*\alpha \in \operatorname{Nm}_{K/K_0} K^*$. Наоборот, пусть это включение имеет место. Тогда $(\alpha^*\alpha)^{-1} = \operatorname{Nm}_{K/K_0}\lambda$, так что для любого $x \in D$ и $a = \lambda x + \varphi(x)$

$$\varphi(a) = \sigma(\lambda)\varphi(x) + (\alpha^*\alpha)^{-1} x = \sigma(\lambda)(\lambda x + \varphi(x)) = \sigma(\lambda)\, a.$$

Таким образом, при условии (А), если инволюция * и элемент α определены, как выше, для существования инволюции с нужным свойством необходимо и достаточно, чтобы $\alpha^*\alpha \in \mathrm{Nm}_{K/K_0} K^*$. Так как расширение K/K_0 квадратично (и, значит, циклично), это условие равносильно тому, чтобы элемент $\alpha^*\alpha$ был в любом поле $(K_0)_{v_0}$ нормой некоторого элемента из алгебры K_{v_0} — прямого произведения пополнений поля K во всех точках K, лежащих над v_0. Если точка v_0 бесконечна и отвечает вложеиию σ_i: $K_0 \to \mathbf{R}$, то

$$D \underset{K_0}{\otimes} \mathbf{R} = D \underset{K}{\otimes} (K \underset{K_0}{\otimes} \mathbf{R}) \cong D \underset{K}{\otimes} \mathbf{C} \cong M_d(\mathbf{C})$$

и инволюция * продолжается до отображения алгебры $M_d(\mathbf{C})$ на себя вида $X^* = A\bar{X}^t A^{-1}$, $A \in GL(d, \mathbf{C})$. Поэтому $X^{**} = A(\bar{A}^t)^{-1} X \bar{A}^t A^{-1}$, так что образ α в $D \underset{K_0}{\otimes} \mathbf{R}$ имеет вид $\lambda A(\bar{A}^t)^{-1}$, где $\lambda \in \mathbf{C}^*$, а образ $\alpha^*\alpha$ равен $|\lambda|^2$, т. е. является нормой комплексного числа. Достаточно поэтому рассмотреть архимедовы точки v_0. Если v_0 продолжается на K двумя способами, K_{v_0} является прямым произведением двух экземпляров $(K_0)_{v_0}$-алгебры $(K_0)_{v_0}$, так что норменное условие становится тривиальным.

Остается разобрать случай, когда $\sigma v = v$. Тогда $\mathrm{Inv}_v(D) = 0$ или $^1/_2$ в силу условия (А). Если $\mathrm{Inv}_v(D) = 0$, то $D \underset{K}{\otimes} K_v$ является матричной алгеброй над K_v, а $A \longrightarrow \sigma(A)^t$ — ее инволюцией, индуцирующей σ на K_v. Предыдущее рассуждение, примененное к локальному случаю, показывает, что $\alpha^*\alpha$ — норма. Пусть теперь $\mathrm{Inv}_v(D) = {}^1/_2$, так что $D_v = D \underset{K}{\otimes} K_v$ — матричная алгебра над кватернионной алгеброй с делением Q над K_v. Так как σ индуцирует тождественное отображение на $\mathrm{Br}(K_v)$ (см. структурную теорему), условие (А) доставляет σ-линейное отображение $Q \to Q$, $X \to \hat{X}$, для которого $\widehat{(XY)} = \hat{Y}\hat{X}$. Положим $\hat{\hat{X}} = \beta \times \beta^{-1}$ для некоторого $\beta \in Q$ и $X^* = A\hat{X}^t A^{-1}$ для всех $X \in D_v$, где

$A \in D_v$ — фиксированный элемент. Тогда с точностью до центрального множителя α совпадает с $A(\hat{A}^t)^{-1}\beta$, а $\alpha^*\alpha$ отличается от

$$A\left(A(\hat{A}^t)^{-1}\beta\right)^{\wedge t} A^{-1}A(\hat{A}^t)^{-1}\beta = A\hat{\beta}\hat{\hat{A}}^{-1}\beta = \hat{\beta}\beta$$

множителем из $\mathrm{Nm}_{K_v/K_{0v}} K_v^*$. Поэтому $\alpha^*\alpha$ является нормой в K_{0v} одновременно с $\hat{\beta}\beta$, т. е. точно в случае, когда Q обладает инволюцией, индуцирующей σ на K_v. Пусть $'$ — такая инволюция. В силу функториальности следа имеем тогда равенство $\mathrm{Tr}\, x' = \sigma(\mathrm{Tr}\, x)$. Поэтому, обозначая через i: $Q \to Q$ каноническую инволюцию на Q, получаем, что $i(x') = i(x)'$. Следовательно, $x \xrightarrow{\varphi} i(x')$ — автоморфизм второго порядка алгебры Q, индуцирующий автоморфизм σ на K. Положим $Q_0 = \{x \in Q \mid \varphi(x) = x\}$. Это K_0-подалгебра в Q, и $K_v \underset{K_{0v}}{\otimes} Q_0 \to Q$ — изоморфизм. Но ранг Q_0 над K_{0v} равен четырем, следовательно, это кватернионная алгебра. Но отображение $\mathrm{Br}(K_{0v}) \to \mathrm{Br}(K)_v$ совпадает с умножением на 2 в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, поэтому $Q = Q_0 \underset{K_{0v}}{\otimes} K_v$ — матричная алгебра над K_v — противоречие.

Поэтому в случае когда K_0 — вполне вещественное поле, K — чисто мнимое квадратичное расширение поля K_0, а D — центральная алгебра с делением над K, необходимое и достаточное условие существования инволюции на D, индуцирующей нетривиальный автоморфизм σ расширения K/K_0, состоит, в дополнение к условию (A), в том, чтобы

(B) $\qquad \mathrm{Inv}_v(D) = 0, \quad \text{если} \quad \sigma v = v.$

Шаг IV. Пусть теперь условия (A) и (B) выполнены, и пусть $x \to x^*$ — некоторая инволюция. Покажем, что положительные инволюции тоже существуют, и расклассифицируем их. С этой целью выберем некоторый изоморфизм

$$D \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \overbrace{M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})}^{e_0}.$$

Заданная инволюция продолжается на произведение матричных алгебр справа и имеет там вид

$$(X_1, X_2, \ldots, X_{e_0}) \to (A_1 \overline{X}_1^t A_1^{-1}, \ldots, A_{e_0} \overline{X}_{e_0}^t A_{e_0}^{-1}),$$

где $\overline{A}_i^t = \eta_i A_i$, $\eta_i \in \mathbf{C}^*$, $A_i \in GL(d, \mathbf{C})$. Обязательно $|\eta_i| = 1$; умножив A_i на некоторый скаляр, можем считать, что $\eta_i = 1$, так что $\overline{A}_i^t = A_i$. Тогда $A^* = A$, где $A = (A_1, \ldots, A_{e_0})$. Множество всех элементов $A \in D \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R}$ со свойством $A^* = A$ имеет вид $V \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R}$, где V — некоторое $\mathbf{Q}$-подпространство в D. Поэтому можно найти такой элемент $\alpha \in V$, что $\alpha \otimes 1$ как угодно близок к $A \in D \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R}$. Отображение $x \to x' = \alpha^{-1} x^* \alpha$ снова является инволюцией D, а ее продолжение на $M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$ как угодно близко к $(X_1, \ldots, X_{e_0}) \to (\overline{X}_1^t, \ldots, \overline{X}_e^t)$. Поэтому, приближая A с помощью α достаточно хорошо, получаем, что $\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{Q}}(xx') > 0$, если $x \neq 0$, $x \in D$. На $M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$ эта инволюция имеет вид

$$(X_1, \ldots, X_{e_0}) \to (A_1 \overline{X}_1^t A_1^{-1}, \ldots, A_{e_0} \overline{X}_{e_0}^t A_{e_0}^{-1}),$$

где A_i — эрмитовы матрицы, близкие к I и, следовательно, положительно определенные. Пусть B_i — положительный квадратный корень из A_i. Подействовав на выбранный изоморфизм $D \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$ внутренним автоморфизмом, отвечающим $B = (B_1, \ldots, B_{e_0})$, мы можем считать, что продолжение инволюции на $M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$ совпадает со стандартной инволюцией

$$(X_1, \ldots, X_e) \to (\overline{X}_1^t, \ldots, \overline{X}_{e_0}^t),$$

которая, очевидно, положительна.

Тем самым, из условий (А) и (В) мы вывели существование положительной инволюции на D, которая при некотором изоморфизме $D \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$ переходит в стандартную инволюцию, указанную выше. Пусть теперь * — любая другая положительная инволюция, так что $x^* = \alpha x' \alpha^{-1}$, $\alpha' = \lambda\alpha$, $\lambda \in K$. Так как $\lambda\lambda' = \mathrm{Nm}_{K/K_0}\lambda = 1$, то $\lambda = \sigma\mu/\mu$ для некоторого $\mu \in K$; заменив α на $\mu\alpha$, мы не меняем инволюцию, а новый элемент α удовлетворяет условию $\alpha' = \alpha$. Следовательно, α переходит в элемент $(A_1, \ldots, A_{e_0}) \in M_d(\mathbf{C}) \times \ldots \times M_d(\mathbf{C})$, состоящий из эрмитовых матриц A_i. Из положительности $\mathrm{Tr}(xx^*)$ следует, что $\mathrm{Tr}(XA_i\overline{X}^t A_i^{-1}) > 0$ при $X \in M_d(\mathbf{C})$, т. е. для некоторой унитарной матрицы U и любой матрицы $X \in M_d(\mathbf{C})$

$$\mathrm{Tr}(UXU^{-1}A_iU\overline{X}^tU^{-1}A_i^{-1}) = \\ = \mathrm{Tr}(XU^{-1}A_iU\overline{X}^tU^{-1}A_i^{-1}U) > 0.$$

Выберем U так, чтобы $U^{-1}A_iU = D_i$ была вещественной диагональной матрицей с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Тогда $\mathrm{Tr}(XD\overline{X}^tD^{-1}) > 0$ при всех $X \in M_d(\mathbf{C})$. Но для $X = (x_{ij})$

$$\mathrm{Tr}(XD\overline{X}^tD^{-1}) = \sum_{j,\ k=1}^{d} |x_{jk}|^2 \frac{\lambda_j}{\lambda_k},$$

так что наше условие означает (положительную или отрицательную) определенность матрицы D. Так как α можно заменить на $-\alpha$, это показывает, что все положительные инволюции имеют вид $x \to \alpha x' \alpha^{-1}$, где все эрмитовы матрицы A_i положительно определены.

Собирая воедино полученные результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть D — алгебра с делением конечного ранга над $\mathbf{Q}$ с инволюцией $'$, такой, что $\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{Q}}(x, x') > 0$ при $x \in D$, $x \neq 0$. Пусть K — центр алгебры D, а K_0 — подполе элементов K, инвариантных относительно инволюции. Тогда пара $(D, ')$ принадлежит одному из следующих типов.*

Тип I. *$D = K = K_0$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, а инволюция тождественна.*

Тип II. *$K = K_0$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, D — кватернионная алгебра с деле-*

нием над K (*т. е. центральное тело ранга* 4 *над* K), *такая, что для любого вложения* $\sigma\colon K\to\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}_{(\sigma)}\underset{K}{\otimes}D\cong M_2(\mathbf{R}).$$

Пусть $x^*=\operatorname{Tr}x-x$ — *стандартная инволюция на* D, $a\in D$ — *такой элемент, что* $a^2\in K$ *и* a^2 *вполне отрицателен. Тогда* $x'=ax^*a^{-1}$ — *положительная инволюция, и все положительные инволюции получаются так. Для любой такой инволюции существует изоморфизм*

$$\mathbf{R}\underset{\mathbf{Q}}{\otimes}D\rightrightarrows M_2(\mathbf{R})\times\ldots\times M_2(\mathbf{R})\quad (e=[K:\mathbf{Q}]\text{ множителей}),$$

такой, что продолжение инволюции по $\mathbf{R}$-*линейности на правую часть имеет вид* $(X_1,\ldots,X_e)\to(X_1^t,\ldots,X_e^t)$.

Тип III. $K=K_0$ — *вполне вещественное поле алгебраических чисел,* D — *кватернионная алгебра с делением над* K, *такая, что для любого вложения* $\sigma\colon K\to\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}_{(\sigma)}\underset{K}{\otimes}D\cong\mathbf{K},$$

где $\mathbf{K}$ — *стандартная алгебра кватернионов над* $\mathbf{R}$. *В этом случае инволюция стандартна,* $x'=\operatorname{Tr}_{D/K}x-x$, *и существует изоморфизм*

$$\mathbf{R}\underset{\mathbf{Q}}{\otimes}D\rightrightarrows\mathbf{K}\times\ldots\times\mathbf{K},$$

переводящий инволюцию в произведение стандартных инволюций на множителях $\mathbf{K}$.

Тип IV. K_0 — *вполне вещественное поле алгебраических чисел,* K — *вполне мнимое квадратичное расширение* K_0, σ — *автоморфизм сопряжения* K/K_0. *Тогда* D — *алгебра с делением с центром* K, *с локальными инвариантами, равными нулю во всех* σ-*инвариантных конечных точках, и такая, что* $\operatorname{Inv}_v(D)+\operatorname{Inv}_{\sigma v}(D)=0$ *для всех конечных точек* v *поля* K.

В этом случае положительные инволюции $x\to x'$ *существуют, и каждая такая инволюция при некотором изоморфизме*

$$\mathbf{R}\underset{\mathbf{Q}}{\otimes}D\rightrightarrows M_d(\mathbf{C})\times\ldots\times M_d(\mathbf{C})$$

переходит в стандартную инволюцию $(X_1, \ldots, X_{e_0}) \to \to (\bar{X}_1^t, \ldots, \bar{X}_{e_0}^t)$. *Если одна такая инволюция* $'$ *фиксирована, любая другая имеет вид* $x^* = ax'a^{-1}$, *где* $a \in D$, $a' = a$ *и образ* $1 \otimes a$ *при указанном изоморфизме имеет вид* $(A_1, \ldots, A_{e_0})$, A_i — *эрмитовы положительно определенные матрицы.*

Следующая таблица показывает численные инварианты алгебр всех четырех типов и ограничения на них, накладываемые условием $D = \mathrm{End}^\circ(X)$, где X — простое g-мерное абелево многообразие. Символы e, e_0 и d были выведены выше,

$$S = \{x \in D \mid x' = x\} \quad \text{и} \quad \eta = \dim_{\mathbf{Q}} S / \dim_{\mathbf{Q}} D.$$

Тип	e	d	η	Ограничения в Char $k = 0$ при $D = \mathrm{End}^\circ(X)$, $\dim X = g$	Ограничения в Char $k = p > 0$ при $D = \mathrm{End}^\circ(X)$, $\dim X = g$
I	e_0	1	1	$e \mid g$	$e \mid g$
II	e_0	2	$\frac{3}{4}$	$2e \mid g$	$2e \mid g$
III	e_0	2	$\frac{1}{4}$	$2e \mid g$	$e \mid g$
IV	$2e_0$	d	$\frac{1}{2}$	$e_0 d^2 \mid g$	$e_0 d \mid g$

Все утверждения, содержащиеся в таблице, кроме „ограничений“, уже доказаны. Последние же немедленно следуют из трех результатов о делимости, установленных раньше. Именно:

(I) в $\mathrm{Char}\, k = 0$: $\dim D \mid 2 \dim X$;

(II) в $\mathrm{Char}\, k = p > 0$: $ed \mid 2 \dim X$;

(III) пусть $L \subset D$ — подполе элементов, инвариантных относительно инволюции. Тогда $[L : \mathbf{Q}] \mid g$.

Можно поставить вопрос, в какой мере полон этот список свойств колец эндоморфизмов простых абелевых многообразий. Иначе говоря, пусть дана алгебра с делением одного из описанных четырех типов и целое число g, удовлетворяющее указанным условиям.

Существует ли простое g-мерное абелево многообразие с такой алгеброй эндоморфизмов?

По крайней мере в характеристике нуль ответ известен; он был получен Альбертом. Такое многообразие всегда существует, за исключением случаев, когда D имеет тип III и $g/2e=1$ или 2 или же D имеет тип IV и $g/e_0d^2=1$ или 2. В этих исключительных случаях известны дополнительные условия, обеспечивающие существование многообразия.

С другой стороны, над полями положительной характеристики, по-видимому, известно немногое.

Приложение II. Гипотеза Римана. Докажем прежде всего

Предложение. *Пусть X — абелево многообразие, $'$ — инволюция Розати в* $\mathrm{End}^\circ(X)$, *отвечающая какому-нибудь обильному линейному расслоению,* $\alpha\in\mathrm{End}(X)$ — *такой элемент, что* $\alpha'\alpha=a\in\mathbf{Z}$. *Обозначим через* $\omega_1,\ldots,\omega_{2g}$ (*комплексные*) *корни характеристического многочлена* P *элемента* α.

Подалгебра $\mathbf{Q}[\alpha]\subset\mathrm{End}(X)$, *порожденная элементом* α, *полупроста, и справедливы следующие утверждения*:

(i) $|\omega_i|^2=a$ *при всех* i;

(ii) *отображение* $\omega_i\to\dfrac{a}{\omega_i}$ *является перестановкой корней* ω_i.

Доказательство. Второе утверждение непосредственно следует из первого, потому что $a/\omega_i=\bar{\omega}_i$, а P — многочлен с целыми коэффициентами.

Обозначим через $Q(X)$ минимальный многочлен элемента $\alpha\in\mathrm{End}(X)$ над $\mathbf{Q}$. Тогда P и Q имеют общие корни. В самом деле, $Q\mid P$, потому что P имеет целые коэффициенты и $P(\alpha)=0$. С другой стороны, P является характеристическим многочленом элемента $T_l(\alpha)$ в матричном представлении

$$T_l\colon\ \mathrm{End}(X)\to\mathrm{End}(T_l(X)).$$

Если элемент $\omega\in\overline{\mathbf{Q}}_l$ алгебраического замыкания поля $\mathbf{Q}_l$ является корнем P, то он есть собственное значение $T_l(\alpha)$. Поэтому $Q(\omega)$ — собственное значение

$T_l(Q(\alpha))$. Но $T_l(\underline{Q(\alpha)})=0$, так что $Q(\omega)=0$. Стало быть, все корни P в $\overline{\mathbf{Q}}_l$ являются корнями Q. Следовательно, $P \mid Q^n$ при некотором n, так что множества комплексных корней P и Q совпадают.

Обозначим через S ограничение на $\mathbf{Q}[\alpha]$ функции следа в алгебре $\operatorname{End}^\circ(X)$. Это следовая форма на $\mathbf{Q}[\alpha]$, обладающая свойством $S(X, X')>0$ при $X \in \mathbf{Q}[\alpha]$, $X \neq 0$. Так как, кроме того, элемент α обратим в $\operatorname{End}^\circ(X)$, а алгебра $\mathbf{Q}[\alpha]$ конечномерна, то $\alpha^{-1} \in \mathbf{Q}[\alpha]$. Следовательно, $\alpha'=a/\alpha \in \mathbf{Q}[\alpha]$, так что $\mathbf{Q}[\alpha]$ инвариантна относительно инволюции. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathbf{Q}[\alpha]$ — любой идеал, а $\mathfrak{b}$ — его ортогональное дополнение в $\mathbf{Q}[\alpha]$ относительно квадратичной формы $S(X, X')$. Тогда $\mathfrak{b}$ является идеалом и $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}=(0)$, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}=\mathbf{Q}[\alpha]$. Стало быть, алгебра $\mathbf{Q}[\alpha]$ полупроста и потому изоморфна произведению $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_p$, где K_i — поля алгебраических чисел. Инволюция, будучи автоморфизмом алгебры $\mathbf{Q}[\alpha]$, как-то переставляет множители K_i. Эта перестановка может быть лишь тривиальной, потому что $S(XX')>0$ для всех $X \neq 0$. Следовательно, ограничение S на каждое поле K_i является положительной следовой формой (над $\mathbf{Q}$). Отсюда вытекает, что любое поле K_i является либо вполне вещественным с тождественной инволюцией, либо вполне мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля с комплексным сопряжением в качестве инволюции. Но корнями минимального многочлена элемента α являются образы α относительно всевозможных вложений φ_j полей K_i в $\mathbf{C}$. Так как $\varphi_j(x')=\overline{\varphi_j(x)}$ для всех элементов $x \in \mathbf{Q}[\alpha]$, отсюда следует, что

$$a=\varphi_j(a)=\varphi_j(\alpha' \circ \alpha)=|\varphi_j(\alpha)|^2,$$

а это и требовалось доказать.

Мы применим это предложение к доказательству гипотезы Римана для дзета-функций абелевых многообразий над конечными полями. Пусть $\mathbf{F}=\mathbf{F}_q$ — конечное поле из $q=p^f$ элементов, а X_0 — схема конечного типа над $\mathbf{F}$. (Мы рассматриваем X_0 не как многообразие, точками которого являются геометрические точки со значениями в каком-то алгебраически замкнутом поле, но как схему в смысле Гротендика.) Определим *морфизм Фробениуса* π_0: $X_0 \to X_0$ схемы X_0 как отображение, тождественное на ее топологическом пространстве, дополненное гомоморфизмом пучков $\mathcal{O}_{X_0} \to \mathcal{O}_{X_0}$ вида $f \to f^q$. Заметим, что $\lambda^q = \lambda$ при $\lambda \in \mathbf{F}$, поэтому π_0 — морфизм над $\operatorname{Spec} \mathbf{F}$. Обозначим теперь через k алгебраическое замыкание поля $\mathbf{F}_q$ и положим $X = k \underset{\mathbf{F}}{\otimes} X_0$. Морфизм π: $X \to X$, получающийся заменой базы из π_0, называется *морфизмом Фробениуса* схемы X относительно $\mathbf{F}$ и X_0.

Рассмотрим, как он действует на геометрических (или замкнутых) точках схемы X. Пусть $X_0 = \operatorname{Spec} A$, где $A = \mathbf{F}[X_1, \ldots, X_m]/\mathfrak{a}$. Иначе говоря, X_0 погружена в качестве замкнутой подсхемы в $\mathbf{A}^m_{\mathbf{F}}$, и замкнутые точки X можно рассматривать как элементы пространства k^m. Морфизм π_0 отвечает гомоморфизму $\mathbf{F}$-алгебр $A \to A$, который отображает $\overline{X}_i$ в $\overline{X}_i^q$. Поэтому геометрическую точку $(x_1, \ldots, x_m)$ он переводит в $(x_1^q, \ldots, x_m^q)$. В частности, точка $(x_1, \ldots, x_m)$ инвариантна относительно π^n тогда и только тогда, когда $x_i^{q^n} = x_i$, т. е. когда x_i принадлежат полю $\mathbf{F}_{q^n}$ из q^n элементов.

Морфизм Фробениуса обладает следующим функторным свойством. Пусть f: $X_0 \to Y_0$ — морфизм $\mathbf{F}$-схем. Тогда $\pi_{0, Y_0} \circ f = f \circ \pi_{0, X_0}$, где π_{0, X_0}, π_{0, Y_0} — морфизмы Фробениуса схем X_0 и Y_0 соответственно.

Наконец, на касательных пространствах в любой точке π индуцирует нулевое отображение, потому что $D(f^q) = 0$ для любого дифференцирования D кольца A характеристики p и для любого элемента $f \in A$.

Теорема 3 (Ленг). *Пусть X_0 — такая схема над $\mathbf{F}_q$, что $X = k \underset{\mathbf{F}}{\otimes} X_0$ — абелево многообразие. Тогда на X_0 есть точка, рациональная над $\mathbf{F}_q$.*

Доказательство. Обозначим через π морфизм Фробениуса. Имеем $\pi(x) = x_0 + f(x)$, где $x_0 \in X$ —

некоторая замкнутая точка, а f — эндоморфизм X. Эндоморфизм $1-f$ индуцирует тождественное отображение на касательном пространстве в нуле, потому что π и, значит, f имеют нулевой дифференциал. Следовательно, ядро $1-f$ нульмерно, так что $1-f$ — эпиморфизм. Пусть $(1-f)(x_1)=x_0$. Тогда $x_1=x_0+f(x_1)=\pi(x_1)$, так что точка x_1 рациональна над $\mathbf{F}_q$. Это доказывает требуемый результат.

Отсюда следует, что если X — абелево многообразие, то, изменив его нуль, можно считать, что он рационален над $\mathbf{F}$. Все морфизмы π^n являются тогда эндоморфизмами многообразия X. Кроме того, морфизмы $1-\pi^n$ сепарабельны, потому что они индуцируют тождественные отображения на касательном пространстве в нуле. Поэтому

$$N_n = \text{число } \mathbf{F}_{q^n}\text{-рациональных точек на } X =$$
$$= \text{порядок } \operatorname{Ker}(1-\pi^n) = \deg(1-\pi^n).$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ — корни характеристического многочлена эндоморфизма π. Тогда характеристический многочлен $P_n(t)$ эндоморфизма π^n равен $\prod_{i=1}^{2g}(t-\omega_i^n)$ (для любого n). Так как $\deg(1-\pi^n)=P_n(1)$, находим, что

$$N_n = \prod_{i=1}^{2g}(1-\omega_i^n).$$

Покажем теперь, что $|\omega_i| = \sqrt{q}$: это утверждение равносильно гипотезе Римана для дзета-функции X. Достаточно проверить, что $|\omega_i^m| = \sqrt{q^m}$ для некоторого m; это позволяет при необходимости заменить $\mathbf{F}_q$ на $\mathbf{F}_{q^m}$, X_0 на $\mathbf{F}_{q^m} \otimes_{\mathbf{F}} X_0$ и π на π^m. Мы можем поэтому считать, что на X_0 существует такое линейное расслоение L_0, что $L = k \otimes_{\mathbf{F}} L_0$ обильно на X (действительно, любое линейное расслоение на X определено над достаточно большим конечным полем). Обозначив через $'$ инволюцию Розати, отвечающую L

покажем, что

(I) $$\pi' \circ \pi = q.$$

Это позволит применить доказанное выше предложение.

Действительно, по определению $'$ это равенство означает, что

(II) $$\hat{\pi}(\varphi_L(\pi(x))) = q\varphi_L(x)$$

при всех $x \in X$. Но π_0 действует на $\mathcal{O}_{X_0}$ по формуле $f \to f^q$, поэтому $\overset{*}{\pi}_0 L_0 \cong L_0^q$. Следовательно, $\pi^* L \cong L^q$, и

(III) $$\pi^*\left(T^*_{\pi x} L \otimes L^{-1}\right) \cong T^*_x \pi^* L \otimes (\pi^* L)^{-1} \cong$$
$$\cong \left(T^*_x L \otimes L^{-1}\right)^{\otimes q}.$$

Линейное расслоение слева представляет точку $\hat{\pi}(\varphi_L(\pi)(x)))$, а справа — точку $q\varphi_L(x)$. Отсюда следует (II) и (I).

В итоге получаем:

Теорема 4 (Вейль). *Пусть X_0 — такая схема над $\mathbf{F}_q$, что $X = k \underset{\mathbf{F}}{\otimes} X_0$ — абелево многообразие. Обозначим через N_n число точек на X, рациональных над полем $\mathbf{F}_{q^n}$. Тогда*

$$N_n = \prod_{i=1}^{2g} \left(\omega_i^{2g} - 1\right),$$

где $\omega_i \in \mathbf{C}$ — комплексные числа, удовлетворяющие условиям

(i) $|\omega_i| = \sqrt{q}$,

(ii) $\omega_{\pi i} = q/\omega_i$, *где π — некоторая перестановка.*

В качестве другого следствия из предыдущего предложения докажем такой результат Серра:

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 3$, L — обильное расслоение на абелевом многообразии X. Тогда гомоморфизм ограничения*

$$\left\{\alpha \in \operatorname{Aut} X \mid \alpha^* L \otimes L^{-1} \in \operatorname{Pic}^\circ X\right\} \to \operatorname{Aut} X_n$$

инъективен (*здесь X_n — ядро n_X как схема*).

Доказательство. Если $\alpha^* L \otimes L^{-1} \in \mathrm{Pic}^\circ X$, то $\varphi_{\alpha^* L} = \varphi_L$. Поэтому $\hat{\alpha} \circ \varphi_L \circ \alpha = \varphi_L$. Это означает, что $\alpha' \alpha = 1$ (инволюция Розати определена расслоением L). Из предложения следует, что все характеристические корни α являются целыми алгебраическими числами, по модулю равными 1, и, значит, корнями из единицы.

Предположим теперь, что α действует тождественно на X_n, $n \geqslant 3$. Тогда ограничение $\alpha - 1$ на X_n нулевое, так что $(\alpha - 1) = n\beta$, где $\beta \in \mathrm{End}(X)$. Отсюда следует, что для любого характеристического корня ω морфизма α имеем $\omega - 1 = n\eta$, где η — некоторое целое алгебраическое число. Теорема Серра поэтому сводится к следующей лемме.

Лемма. *Пусть ω — такой корень из единицы, что $\omega = 1 + n\eta$, где $n \geqslant 3$ — целое рациональное число, а η — целое алгебраическое число. Тогда $\omega = 1$.*

Доказательство. Пусть это не так. Возводя ω в подходящую степень, можем считать, что ω — примитивный корень из 1 простой степени p. Беря нормы от правой и левой частей равенства $\omega - 1 = n\eta$, находим, что

$$\prod_{i=1}^{p-1} (1 - \omega^i) = n^{p-1} N,$$

где $N = (-1)^{p-l}\, \mathrm{Nm}\, \eta$ — целое рациональное число. Но левая часть этого равенства есть значение производной многочлена $X^p - 1 = \prod_{i=0}^{p-1} (X - \omega^i)$ в точке $X = 1$, т. е. p. Стало быть, n^{p-1} делит p, что невозможно при $n \geqslant 3$.

Применяя эту лемму, получаем, что характеристические корни α все равны 1, так что $1 - \alpha$ — нильпотентный элемент. Это противоречит доказанному выше предложению, потому что алгебра $\mathbf{Q}[\alpha]$ полупроста и, значит, не содержит нильпотентных элементов. Следовательно, $\alpha = 1$.

Приложение III. Структура группы $NS^\circ(X)$. Пусть X — абелево многообразие. Положим $NS^\circ(X) = NS(X) \otimes \mathbf{Q}$. Фиксировав, как в § 20, обильное расслоение L на X, получаем изоморфизм

$$NS^\circ(X) \underset{\rho}{\xrightarrow{\sim}} \{\alpha \in \operatorname{End}^\circ(X) \mid \alpha' = \alpha\}.$$

В частности, на $NS^\circ(X)$ можно ввести естественную структуру йордановой алгебры над $\mathbf{Q}$, если использовать композицию в $\operatorname{End}^\circ(X)$:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}\rho^{-1}(\rho(\alpha)\rho(\beta) + \rho(\beta)\rho(\alpha)), \quad \alpha, \beta \in NS^\circ(X).$$

Что можно сказать об этой алгебре?

Прежде всего из неравенств $\operatorname{Tr}(\rho(\alpha)^2) > 0$ при всех $\alpha \in NS^\circ(X)$ непосредственно следует, что алгебра $NS^\circ(X)$ *формально вещественна*, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

(см. Браун и Кехер [5], гл. 11, § 3).

Формально вещественные йордановы алгебры над $\mathbf{R}$ были полностью классифицированы: см. Браун и Кехер [5, гл. 11, § 5]. Алгебры $NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$ не могут быть всех существующих типов.

Теорема 6. *Йорданова алгебра $NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$ изоморфна произведению алгебр следующих типов:*

$\mathcal{H}_r(\mathbf{R})$ — *симметрические вещественные $(r \times r)$-матрицы;*

$\mathcal{H}_r(\mathbf{C})$ — *эрмитовы комплексные $(r \times r)$-матрицы;*

$\mathcal{H}_r(\mathbf{K})$ — *эрмитовы кватернионные $(r \times r)$-матрицы, т. е. ${}^t\overline{X} = X$, где $x \to \bar{x}$ — стандартная инволюция на $\mathbf{K}$.*

Доказательство. Разложим $\operatorname{End}^\circ(X) \otimes \mathbf{C}$ в произведение алгебр $M_n(\mathbf{R})$, $M_n(\mathbf{C})$ и $M_n(\mathbf{K})$. Алгебра $NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$ совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно некоторой положительной инволюции. Легко проверить, что любая такая инволюция переводит каждый множитель

$M_n(K)$, $K = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{K}$ в себя и, с точностью до внутреннего автоморфизма, приводится на нем к виду $X \to {}^t\overline{X}$. (См. доказательство теоремы 2, шаг IV, для случая $K = \mathbf{C}$. Остальные случаи разбираются аналогично. Сначала нужно проверить, что любая положительная инволюция на $M_n(K)$ имеет вид $X \to A{}^t\overline{X}A^{-1}$, где ${}^t\overline{A} = A$. Затем устанавливается, что $A = UDU^{-1}$, где D — диагональная матрица, все элементы которой одного знака, и ${}^t\overline{U} = U^{-1}$. Наконец, из уравнения $\pm D = E^2$ находится матрица E, такая, что UEU^{-1} приводит инволюцию к стандартному виду.) Это завершает доказательство.

Теперь фиксируем некоторые изоморфизмы φ, ψ:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{End}^\circ(X) \otimes \mathbf{R} & \underset{\varphi}{\rightrightarrows} & \prod M_{r_i}(\mathbf{R}) \times \prod M_{s_i}(\mathbf{C}) \times \prod M_{t_i}(\mathbf{K}) \\ \cup\uparrow\rho & & \cup \\ NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R} & \underset{\psi}{\rightrightarrows} & \prod \mathcal{H}_{r_i}(\mathbf{R}) \times \prod \mathcal{H}_{s_i}(\mathbf{C}) \times \prod \mathcal{H}_{t_i}(\mathbf{K}). \end{array}$$

Как вычислить в их терминах полиномиальную функцию χ: $NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R} \to \mathbf{R}$? Обозначим для любого элемента $x \in \mathrm{End}^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$ через $\varphi_{i,1}(x)$, $\varphi_{i,2}(x)$, $\varphi_{i,3}(x)$ компоненты $\varphi(x)$ в указанном разложении.

Мы уже установили, что

$$\text{(II)}\qquad \deg x = \prod \det(\varphi_{i,1}(x))^{a_i} \prod |\det \varphi_{i,2}(x)|^{2b_i} \times \times \prod \mathrm{Nm}(\varphi_{i,3}(x))^{c_i},$$

где Nm: $M_t(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ — приведенная норма (мультипликативный многочлен степени $2t$). Но на $NS(X)$ имеем $\deg(\rho x) = \alpha\chi(x)^2$, где α — некоторая константа. Отсюда следует, что все a_i — четные числа, и функция χ может быть записана в виде

$$\text{(III)}\qquad \chi(x) = \mathrm{const} \prod \det(\psi_{i,1}(x))^{a_i/2} \prod \det(\psi_{i,2}(x))^{b_i} \times \times \prod \mathrm{HNm}(\psi_{i,3}(x))^{c_i}$$

для всех $x \in NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$. (Заметим, что матрица $\psi_{i,2}(x)$ эрмитова, так что ее определитель вещественен.) Здесь HNm — „Haupt Norm“ в терминологии Брауна и Кехера [5, гл. 2, § 4] — вещественная полиномиальная функция степени t на $\mathscr{H}_t(\mathbf{K})$. Пусть $\lambda_0 \in NS^\circ(X) \otimes \otimes \mathbf{R}$ — класс того обильного расслоения L на X, с помощью которого определялось отображение ρ. Тогда $\rho(\lambda_0) = 1$, так что $\psi_{i,j}(\lambda_0) = 1$; следовательно, константа в формуле (III) равна $\chi(\lambda_0)$. Учитывая результаты § 16, находим, наконец:

(IV) *Если* $\chi(x) \neq 0$, *то*

$i(x) = \sum \frac{a_i}{2}$ (число отрицательных собственных значений $\psi_{i,1}(x)) + \sum b_i$ (число отрицательных собственных значений $\psi_{i,2}(x)) +$

$+ \sum c_i$ (число отрицательных собственных значений $\psi_{i,3}(x))$.

(Собственные значения кватернионной эрмитовой матрицы определяются как диагональные элементы такой диагональной матрицы D, что $H = UDU^{-1}$, ${}^t\bar{U} = U^{-1}$.)

Поскольку обильные линейные расслоения L характеризуются свойством $\chi(L) \neq 0$, $i(L) = 0$, из (III) и (IV) следует, что классы обильных расслоений в $NS(X)$ в точности совпадают с вполне положительными элементами формально вещественной йордановой алгебры $NS^\circ(X) \otimes \mathbf{R}$.

§ 22. Примеры

Первый пример. *Абелевы многообразия CM-типа над* $\mathbf{C}$.

Пусть X — простое g-мерное абелево многообразие, $D = \mathrm{End}^\circ(X)$, K — центр тела D, $d^2 = [D:K]$ и $e = [K:\mathbf{Q}]$. Напомним, что $ed \mid 2g$ и что X называется многообразием CM-типа, если $ed = 2g$. Мы хотим классифицировать такие многообразия в случае $k = \mathbf{C}$. Таблица в § 20 показывает, что $K = D$, где K — вполне мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля K_0 степени g над $\mathbf{Q}$.

Слегка видоизменим постановку задачи. Пусть дано вполне вещественное числовое поле K_0 степени g над $\mathbf{Q}$ и его вполне мнимое квадратичное расширение K. Рассмотрим всевозможные пары (i, X), где X — абелево многообразие над $\mathbf{C}$ размерности g, а $i: K \to \mathrm{End}^\circ(X)$ — вложение поля K в кольцо $\mathrm{End}^\circ(X)$. Назовем две такие пары (i, X), (j, Y) эквивалентными, если существует такая изогения $\alpha: X \to Y$, что $\tilde{\alpha} \circ i = j$, где $\tilde{\alpha}: \mathrm{End}^\circ(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^\circ(Y)$ — индуцированный изоморфизм. Легко проверить, что это — отношение эквивалентности. Поставим себе целью описать полную систему представителей таких классов эквивалентности.

Пусть (i, X) — любая пара описанного вида, V — касательное пространство к X в нуле, U — ядро экспоненциального отображения $V \to X$, так что имеет место естественный изоморфизм $V/U \xrightarrow{\sim} X$. Тогда $\mathrm{End}(X)$ действует $\mathbf{C}$-линейно на V, переводя U в себя. Отсюда следует, что кольцо $i^{-1}(\mathrm{End}(X)) = A \subset K$ является порядком (конечно порожденным кольцом максимального ранга) в поле K, а U имеет структуру A-модуля. В частности, $\mathbf{Q}U \subset V$ является векторным пространством над $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} A = K$. Так как размерности K и $\mathbf{Q}U$ над $\mathbf{Q}$ равны $2g$, пространство $\mathbf{Q}U$ одномерно над K. Выберем ненулевой элемент $u_0 \in U$; тогда отображение $\varphi: A \to U$, $\varphi(a) = au_0$ вкладывает A в U в качестве подгруппы конечного индекса. Заменяя X на изогенное многообразие, мы можем сначала уменьшить U до $\varphi(A)$, а затем увеличить U до $U = \varphi(A_0)$, где A_0 — кольцо целых чисел поля K.

Далее, отображение φ продолжается до некоторого $\mathbf{R}$-линейного отображения, которое мы по-прежнему будем обозначать через φ:

$$\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K = \mathbf{R} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} A_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} U = V.$$

Оно определяет изоморфизм *вещественных* торов:

$$\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K/A_0 \xrightarrow{\sim} V/U = X.$$

Заметим, что этот изоморфизм переводит умножение на $1 \otimes a$ в $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$, $a \in A_0$, в эндоморфизм $i(a)\colon X \to X$.

Обозначим теперь через Φ комплексную структуру на вещественном векторном пространстве $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$, которая получается переносом комплексной структуры с V посредством отображения φ. Так как умножение на $1 \otimes a$ в $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ $(a \in A_0)$ превращается в $\mathbf{C}$-линейное отображение $V \to V$, это умножение должно быть $\mathbf{C}$-линейным также относительно комплексной структуры Φ. Иными словами, Φ превращает $\mathbf{R}$-алгебру $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ в $\mathbf{C}$-алгебру, а не только в векторное пространство.

Теперь обратим эту конструкцию.

Определение. Пусть K имеет прежнее значение, A_0 — кольцо целых чисел в K, Φ — некоторая структура $\mathbf{C}$-алгебры на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$. Положим

$$X(K, \Phi) \text{ — \textit{комплексный тор} } \mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K/1 \otimes A_0,$$

и определим $i_\Phi\colon A_0 \to \mathrm{Hom}_{\text{компл. торы}}(X(K, \Phi), X(K, \Phi))$ как отображение, при котором $i_\Phi(a)$ есть умножение на $1 \otimes a$.

Мы показали уже, что для данного K и любой пары (i, X) на $\mathbf{R}$-алгебре $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ существует такая структура $\mathbf{C}$-алгебры, что пара (i, X) эквивалентна $(i_\Phi, X(K, \Phi))$.

Теперь мы установим следующие факты:

(i) *Для любой структуры Φ комплексной алгебры на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ тор $X(K, \Phi) = \mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K/1 \otimes A_0$ является абелевым многообразием*;

(ii) *Если Φ_1, Φ_2 — различные комплексные структуры на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$, то $(i_{\Phi_1}, X(K, \Phi_1))$ и $(i_{\Phi_2}, X(K, \Phi_2))$ неэквивалентны.*

Для доказательства первого утверждения изучим детальнее структуру Φ. Ее задание равносильно заданию гомоморфизма $\mathbf{R}$-алгебр $\widetilde{\Phi}: C \to \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K$. С другой стороны, обозначая через σ_i $(1 \leqslant i \leqslant g)$ различные вложения K_0 в $\mathbf{R}$, получаем изоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр

$$\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}_{(1)} \otimes_{K_0} K) \times (\mathbf{R}_{(2)} \otimes_{K_0} K) \times \ldots \times (\mathbf{R}_{(g)} \otimes_{K_0} K),$$

$$\lambda \otimes \alpha \to (\lambda \otimes \alpha, \lambda \otimes \alpha, \ldots, \lambda \otimes \alpha),$$

где $\mathbf{R}_{(i)}$ — это $\mathbf{R}$ со структурой K_0-алгебры, определяемой вложением σ_i. Следовательно, гомоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр $\widetilde{\Phi}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K$ в свою очередь состоит из набора *изоморфизмов* Φ_i: $\mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}_{(i)} \otimes_{K_0} K$, $1 \leqslant i \leqslant g$. Очевидно, для каждого i есть ровно два возможных $\mathbf{R}$-изоморфизма. Следовательно, на $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K$ имеется ровно 2^g возможных $\mathbf{C}$-структур Φ, каждая из которых определена набором $\mathbf{R}$-изоморфизмов Φ_i: $\mathbf{C} \to \mathbf{R}_{(i)} \otimes_{K_0} K$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$.

Обозначим через τ_i: $\mathbf{R}_{(i)} \otimes_{K_0} K \to \mathbf{C}$ изоморфизм, обратный к Φ_i. Его ограничение на $K \cong 1 \otimes K \subset \mathbf{R}_{(i)} \otimes_{K_0} K$ является вложением K в $\mathbf{C}$, которое продолжает вложение σ_i: $K_0 \to \mathbf{R}$. Можно выбрать такой элемент $\alpha \in K$, что $\alpha^2 \in K_0$ и $\tau_i(\alpha) = \sqrt{-1}\,\beta_i$, $\beta_i \in \mathbf{R}$, $\beta_i > 0$. В самом деле, пусть $K = K_0(\sqrt{\delta})$, тогда $\tau_i(\sqrt{\delta}) = \sqrt{-1}\,\gamma_i$, где $\gamma_i \in \mathbf{R}^*$, и можно найти такой элемент $\eta \in K_0$, что знаки $\sigma_i(\eta)$ и γ_i совпадают; после этого положим $\alpha = \eta\sqrt{\delta}$. Далее, можно считать α целым алгебраическим числом. Пусть $\tau_i(\alpha) = \sqrt{-1}\,\beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$; определим эрмитову форму H на $(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K, \Phi)$, положив

$$H(x, y) = 2\sum_{i=1}^{g} \beta_i \tau_i(x)\overline{\tau_i(y)}, \qquad x, y \in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} K.$$

Очевидно, она положительно определена. Покажем, что $\operatorname{Im} H$ целочисленна на решетке A_0. Действительно, для любых $x,\ y \in A_0$

$$\operatorname{Im} H(x, y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{g} \sqrt{-1}\, \beta_i \tau_i(x) \overline{\tau_i(y)} =$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{g} \operatorname{Re} \tau_i(\alpha x \bar{y}) = -\sum_{i=1}^{g} (\tau_i(\alpha x \bar{y}) + \bar{\tau}_i(\alpha x \bar{y})) =$$

$$= -\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\alpha x \bar{y}) \in \mathbf{Z},$$

где $\bar{y}$ — элемент, сопряженный с $y \in K$ над K_0. Тем самым для любой структуры комплексной алгебры Φ на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ и решетки A_0 в ней форма H, определенная выше, является формой Римана, так что $X(K, \Phi)$ есть абелево многообразие.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим некоторую эквивалентность пар $(i_{\Phi_1}, (X(K, \Phi_1))$, $(i_{\Phi_2}, X(K, \Phi_2))$. Она индуцирует такой изоморфизм $\mathbf{C}$-линейных пространств λ: $(\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K, \Phi_1) \overset{\sim}{\to} (\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K, \Phi_2)$, что $\lambda(1 \otimes K) = 1 \otimes K$, и λ является одновременно изоморфизмом K-модулей. Пусть $\lambda(1 \otimes 1) = 1 \otimes x$, $x \in K^*$. Заменив λ на $(1 \otimes x^{-1})\lambda$, можно считать, что $\lambda(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$. Так как λ одновременно K- и $\mathbf{R}$-линеен, получаем, что $\lambda(a \otimes x) = a \otimes x$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in K$, так что λ — тождественное отображение. Из $\mathbf{C}$-линейности λ следует далее, что $\Phi_1 = \Phi_2$, откуда вытекает (ii).

Итак, мы установили следующий результат.

Теорема. *Пусть K_0 — вполне вещественное числовое поле степени g над $\mathbf{Q}$, K — его мнимое квадратичное расширение. Рассмотрим всевозможные пары (i, X), состоящие из абелева многообразия X, определенного над $\mathbf{C}$, и вложения i: $K \to \operatorname{End}^\circ(X)$, по модулю определенного выше отношения эквивалентности.*

Существует ровно 2^g таких классов. Пусть Φ пробегает всевозможные комплексные структуры на $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$, превращающие $\mathbf{R} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} K$ в $\mathbf{C}$-алгебру. Тогда пары $(i_\Phi, X(K, \Phi))$ образуют полную систему представителей этих классов.

Замечания. 1) Многообразие $X(K, \Phi)$ не обязано быть простым. Можно показать, что для простоты $X(K, \Phi)$ необходимо и достаточно, чтобы у K отсутствовали подполя L со следующими свойствами:

(i) L является квадратичным расширением $L \cap K_0$;

(ii) Пусть Φ отвечает вложениям $\tau_1, \ldots, \tau_g$ поля K в $\mathbf{C}$; тогда из совпадения $\tau_i|_{L \cap K_0} = \tau_j|_{L \cap K_0}$ следует, что $\tau_i|_L = \tau_j|_L$.

Если же такое подполе существует, то $X(K, \Phi)$ изогенно некоторой степени многообразия $X(L, \Psi)$, где Ψ отвечает вложениям $\{\tau_i|_{L \cap K_0}\}$.

2) Рассмотрим одномерный случай — эллиптические кривые над $\mathbf{C}$. Для любой такой кривой X имеем $\operatorname{End}^\circ(X) = \mathbf{Q}$ или $\operatorname{End}^\circ(X) = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, где $d \in \mathbf{Z}$, $d > 0$. Кроме того, для любого мнимого квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ существует эллиптическая кривая X с $\operatorname{End}^\circ(X) \cong \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Все такие кривые изогенны тору $X \cong \mathbf{C}/\{n + m\sqrt{-d} \mid n, m \in \mathbf{Z}\}$.

Второй пример. *Эллиптические кривые в характеристике $p > 0$.*

Прежде всего напомним некоторые основные результаты об одномерных абелевых многообразиях (или эллиптических кривых). Все они непосредственно следуют из нашей общей теории, в чем читатель может убедиться самостоятельно.

Пусть X — одномерное абелево многообразие. Дивизор, отвечающий точке P, обозначим символом $[P]$. Для любого дивизора D на X имеем $\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D$. Далее, если $\deg D > 0$, то $\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(D))$ и $H^1(\mathcal{O}_X(D)) = (0)$. Класс дивизора D принадлежит $\operatorname{Pic}^\circ X$ тогда и только тогда, когда $\deg D = 0$. Дивизор $D = \sum n_i [P_i]$ степени нуль линейно эквивалентен нулю в том и только том случае, когда $\sum n_i P_i = 0$ на X. Любой дивизор D степени $n \geqslant 3$ очень обилен.

Пусть теперь характеристика основного поля отлична от двух. Пусть $0 \in X$ — нулевая точка; P_1, P_2 и P_3 — точки второго порядка на X. Поскольку $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2[0])) = 2$, существует непостоянная функция x с двойным полюсом в нуле и регулярная в остальных точках. Вычитая из нее константу, мы можем считать, что $x(P_1) = 0$. Так как сумма точек, где функция обращается в нуль (с надлежащей кратностью), должна быть нулевой точкой, отсюда следует, что P_1 — двойной нуль функции x и других нулей нет. Деля x на константу, можем считать поэтому, что $x(P_2)=1$ и $x(P_3)=\lambda\in k^*$. Применяя прежнее рассуждение к $x-1$, убеждаемся, что $\lambda\neq 0, 1$. Поскольку размерность пространства $H^0(\mathcal{O}_X(3[0]))$ равна трем, существует функция y с тройным полюсом в нуле и регулярная в остальных точках. Вычтя из y подходящую линейную комбинацию $ax+b$, можем считать, что $y(P_1)=y(P_2)=0$. Поскольку y имеет всего три нуля (с учетом кратностей), сумма которых равна нулю, отсюда следует, что y имеет простые нули в точках P_1, P_2 и $P_3=-P_1-P_2$.

Обе функции y^2 и $x(x-1)(x-\lambda)$ имеют полюсы шестого порядка в нулевой точке, двойные нули в P_1, P_2, P_3 и не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в остальных точках. Стало быть, они отличаются ненулевым скалярным множителем. Нормируя y, мы приходим к уравнению

$$(\mathrm{N}_p)\qquad X_\lambda: y^2=x(x-1)(x-\lambda),$$

задающему аффинную кривую $X-\{0\}$ в $\mathbf{A}^2(k)$.

Наоборот, кривая $y^2t=x(x-t)(x-\lambda t)$ неособая и имеет род 1 при $\lambda\neq 0, 1$; следовательно, она является эллиптической кривой X_λ в $\mathbf{P}^2(k)$.

Мы хотим определить, при каких значениях λ p-ранг кривой X_λ равен нулю в характеристике $p>2$. Известно, что это условие равносильно тривиальности действия отображения Фробениуса на группе $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Мероморфная форма dx на X регулярна на $X-\{0\}$ и имеет нули первого порядка в точках $P_1=(0, 0)$, $P_2=(1, 0)$ и $P_3=(\lambda, 0)$. Других нулей у нее нет (потому что условия $dx(P)=0$ и $x(P)=\alpha$ означают, что $x-\alpha$ обращается в нуль второго порядка в точке P, так что $2P=0$). Следовательно, форма $\omega=\dfrac{dx}{y}$ регулярна и нигде не обращается в нуль на $X-\{0\}$. Поэтому она должна быть регулярной и ненулевой и в 0.

Рассмотрим аффинное покрытие кривой X открытыми множествами $U_0 = X - \{0\}$, $U_1 = X - \{P_1\}$, $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Одномерным коциклом в этом покрытии является любая функция f, регулярная на $U_0 \cap U_1 = X - \{0\} - \{P_1\}$. Она является кограницей тогда и только тогда, когда $f = g - h$, где g регулярна на U_0, а h — на U_1. Рассмотрим линейную форму на $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_X)$: $f \to \operatorname{Res}_{P_1}(f\omega)$.

Если мероморфная форма имеет единственный полюс на X (любого порядка), то ее вычет в этой точке равен нулю в силу теоремы о вычетах. Отсюда вытекает, что $\operatorname{Res}_{P_1}(f\omega) = 0$, если f — кограница. С другой стороны, функция y/x регулярна на $U_0 \cap U_1$ и имеет в P_1 простой полюс, так что $\operatorname{Res}_{P_1}\left(\frac{y}{x}\,\omega\right) \neq 0$. Так как $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1$, форма-вычет индуцирует изоморфизм $H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} k$, а $y/x \in \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_X)$ определяет ненулевой класс когомологий в $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Поэтому отображение Фробениуса на $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ тривиально в том и только том случае, когда $y^p/x^p \in \Gamma(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}_X)$ является кограницей, т. е. $\operatorname{Res}_{P_1}\left(\frac{y^p}{x^p}\,\frac{dx}{y}\right) = 0$. Тогда

$$\operatorname{Res}_{P_1}\left(\frac{y^p}{x^p}\,\frac{dx}{y}\right) = \operatorname{Res}_{P_1}\left(\frac{(y^2)^{\frac{p-1}{2}}}{x^{p-1}}\,\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= 2\left\{\text{коэффициент при } x^{p-1} \text{ в } (y^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{\frac{p-1}{2}}(x-1)^{\frac{p-1}{2}}(x-\lambda)^{\frac{p-1}{2}}\right\} =$$

$$= 2\left\{\text{коэффициент при } x^{\frac{p-1}{2}} \text{ в } (x-1)^{\frac{p-1}{2}}(x-\lambda)^{\frac{p-1}{2}}\right\} =$$

$$= \pm 2 \sum_{\nu=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{\nu}^2 \lambda^\nu = \pm 2\Phi(\lambda),$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{\nu}^2 \lambda^\nu.$$

Заметим теперь, что $\Phi(0)$ — коэффициент при $x^{(p-1)/2}$ в $x^{(p-1)/2}(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$, а $\Phi(1)$ — коэффициент при $x^{(p-1)/2}$ в $(x-1)^{p-1}=\frac{xp-1}{x-1}=1+x+\ldots$, так что $\Phi(0)\neq 0$, $\Phi(1)\neq 0$. Следовательно, любой корень Φ определяет эллиптическую кривую X_λ p-ранга 0, и все такие кривые исчерпываются ими.

Эллиптическая кривая в характеристике $p>0$, p-ранг которой равен нулю, называется *суперсингулярной*. Мы показали, что *при $p>2$ любая суперсингулярная кривая изоморфна одной из кривых X_λ, где λ — некоторый корень многочлена* $\Phi(\lambda)$.

При $p=2$ нетрудно проверить, что существует ровно одна суперсингулярная кривая. Она задается уравнением $y^2+y=x^3$. Проверку мы опускаем. Стало быть, для каждого ненулевого значения характеристики множество суперсингулярных кривых конечно и непусто.

Изучим теперь алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}^\circ(X)$ эллиптической кривой X над полем характеристики $p>0$. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, над которым мы работаем. Будем говорить, что абелево многообразие X определено над подполем $k_0\subset k$, если существует такая схема X_0 над k_0, что $X\cong k\underset{k_0}{\otimes} X$. Нетрудно установить тогда, что существует конечное алгебраическое расширение $k_1\supset k_0$, рациональная точка 0 на $k_1\underset{k_0}{\otimes} X_0=X_1$ и морфизм m_1: $X_1\underset{k_1}{\times} X_1\to X_1$ над k_1, такие, что, расширив основное поле до k, мы получим с точностью до изоморфизма первоначальную тройку $(X, 0, m)$. Впредь, говоря об абелевых многообразиях, определенных над различными полями, мы будем подразумевать, что нуль и закон композиции определены над тем же полем.

Заметим в связи с этим, что если абелевы многообразия X, Y связаны *сепарабельной* изогенией f: $X\to Y$ и одно из них определено иад алгебраически замкнутым подполем k_0 поля k, то другое многообразие и изогения также определены над этим подполем. Это очевидно, если X определено над k_0. Действительно, тогда Y есть фактормногообразие X по ядру изогении, которое является приведенной конечной подгруппой, так что все его точки рациональны над k_0. Пусть теперь Y определено над k_0. Индукция по порядку ядра f позволяет ограничиться случаем, когда степень f является простым числом l. Если $l \neq p$, то существует сепарабельная изогения g: $Y \to X$, определенная над k и такая, что $f \circ g$: $Y \to Y$ совпадает с l_Y. Это сводит вопрос к уже разобранному случаю. Пусть теперь $l = p$. Обозначим через G локальную компоненту $\mathrm{Ker}(p_Y)$ и положим $Y' = Y/G$. Обе группы G и Y' определены над k_0. Кроме того, существует сепарабельная изогения g: $Y' \to X$, определенная иад k и такая, что композиция $Y \to Y' \to X \to Y$ совпадает с p_Y. Тем самым дело снова сводится к уже разобранному случаю.

Теорема (Дейринг). *Пусть X — эллиптическая кривая над полем характеристики $p > 0$. Справедливы следующие импликации:*

(a) *X не имеет конечного поля определения* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{End}^\circ(X) = \mathbf{Q}$.

(b) *Пусть X определена над конечным полем k_0. Тогда*

(i) *алгебра* $\mathrm{End}^\circ(X)$ *является квадратичным мнимым расширением* $\mathbf{Q} \Leftrightarrow$ *p-ранг кривой X равен* $1 \Leftrightarrow \pi^n \neq p_X^m$ *ни для каких целых чисел n, m (где π — морфизм Фробениуса над k_0)*;

(ii) *если p-ранг кривой X равен нулю, то* $\mathrm{End}^\circ(X)$ *изоморфна кватернионной алгебре с делением* $\mathbf{K}_{(p)}$ *над* $\mathbf{Q}$ *с инвариантами* $\mathrm{Inv}_l \mathbf{K}_{(p)} = 0$, *если $l \neq p$, l конечно,* $\mathrm{Inv}_p \mathbf{K}_{(p)} = \mathrm{Inv}_\infty \mathbf{K}(p) = 1/2$. *(Эта алгебра определена однозначно с точностью до изоморфизма.)*

Наконец, для любого p множество кривых X со свойством (ii) *(с точностью до изоморфизма) конечно и непусто.*

Доказательство. Рассмотрим сначала следующие три утверждения:

(A) p-ранг кривой X равен нулю;

(B) алгебра $\mathrm{End}^\circ(X)$ коммутативна;

(C) кривая X определена над конечным полем, и $\pi^n = p_X^m$ для подходящих значений n, $m > 0$, где π — морфизм Фробениуса над этим полем.

Докажем импликации (A) $\Leftrightarrow$ (B) и (A) $\Leftrightarrow$ (C).

Пусть справедливо утверждение (B). Таблица из § 20 показывает тогда, что $\mathrm{End}^\circ(X)$ — центральная простая кватернионная алгебра над $\mathbf{Q}$. Поэтому $\mathbf{Q}_p \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathrm{End}^\circ(X)$ — тоже центральная простая алгебра над $\mathbf{Q}_p$. Если бы p-ранг кривой X был равен 1, алгебра $\mathbf{Q}_p \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathrm{End}^\circ(X)$ допускала бы представление в одномерном $\mathbf{Q}_p$-пространстве $\mathbf{Q}_p \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} T_p(X)$, что невозможно. Стало быть, p-ранг кривой X равен нулю, что доказывает утверждение (A).

Пусть теперь выполнено свойство (A). Предположим, кроме того, что алгебра $\mathrm{End}(X)$ коммутативна, т. е. $\mathrm{End}^\circ(X) = K$ — поле алгебраических чисел. Поскольку p-ранг любой кривой, изогенной X, равен нулю и таких кривых с точностью до изоморфизма конечное число, то, обозначая через R кольцо целых чисел поля K, получаем, что $NR \subset \mathrm{End}(X')$ для некоторого целого числа N и любой кривой X', изогенной X. Выберем такое простое число l, не делящее pN, чтобы идеал Rl был простым в R. (Хорошо известно, что такие l существуют.) Обозначим через α ненулевой элемент модуля $T_l(X)$, не делящийся на l, и пусть K_n — циклическая подгруппа, порожденная образом α при естественном гомоморфизме $T_l(X) \to X_{l^n}$. Тогда $K_n \underset{\neq}{\subset} K_{n+1}$. Снова пользуясь тем, что число неизоморфных кривых p-ранга нуль конечно, мы можем найти два целых числа $m > n$, таких, что существует изоморфизм $\xi: X/K_m \xrightarrow{\sim} X/K_n$. Пусть $\eta: X/K_n \to X/K_m$ — естественный гомоморфизм, индуцированный вложением $K_n \subset K_m$. Композиция $\alpha = \eta \circ \xi \in \mathrm{End}(X')$, $X' = X/K_m$, является эндоморфизмом с циклическим ядром порядка l^k, $k > 0$. Поскольку степень α и, значит, $\mathrm{Nm}_{K/\mathbf{Q}} \alpha$ является степенью l, а идеал Rl прост в R, то $\alpha = l^r u$, где u — обратимый элемент в R и $r > 0$.

Следовательно, $N\alpha = l^r Nu$ и $Nu \in \operatorname{End}(X')$. Но степень Nu равна N^2, потому что u обратим в R, так что l-примарная компонента ядра $l^r Nu$ изоморфна $(\mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})^2$. С другой стороны, l-примарная компонента ядра $\operatorname{Ker}(N\alpha)$ изоморфна $\operatorname{Ker}(\alpha)$ и, стало быть, циклична. Это противоречие доказывает утверждение (B).

Докажем теперь эквивалентность (A)$\Leftrightarrow$(C). Мы уже установили, что свойство (A) выполнено лишь для кривых с конечным полем определения. Пусть π — морфизм Фробениуса над таким полем. Поскольку алгебра $\operatorname{End}(X)$ конечно порождена, любой ее элемент определен над некоторым конечным расширением основного поля; пусть его степень равна n. Тогда π^n принадлежит центру алгебры $\operatorname{End}(X)$. Из свойства (A) следует (B), так что $\operatorname{End}^\circ(X)$ — кватернионная алгебра с центром $\mathbf{Q}$. Следовательно, π^n — целое число. Рассматривая степень этого эндоморфизма, находим, что $\pi^n = \pm p^m$, т. е. $\pi^{2n} = p^{2m}$. Наоборот, если $\pi^n = p_X^m$ для некоторых n, $m > 0$, то морфизм p_X биективен, потому что π биективен. Следовательно, p-ранг X равен нулю.

Мы показали тем самым эквивалентность утверждений (A), (B), (C).

Предположим теперь, что алгебра $\operatorname{End}^\circ(X)$ некоммутативна, тогда она является кватернионной алгеброй с делением над $\mathbf{Q}$, а так как при $l \neq p$ $\mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \operatorname{End}^\circ(X) \to \operatorname{End}_{\mathbf{Q}_l}(\mathbf{Q}_l \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} T_l(X))$ инъективно и обе алгебры четырехмерны, то это отображение — изоморфизм, следовательно, $\operatorname{Inv}_l(\operatorname{End}^\circ(X)) = 0$, если l конечно и $l \neq p$. Из того, что $\sum_v \operatorname{Inv}_v(\operatorname{End}^\circ(X)) = 0$, где сумма распространена на все (конечные и бесконечные) точки $\mathbf{Q}$, получаем, что $\operatorname{Inv}_\infty(\operatorname{End}^\circ(X)) = \operatorname{Inv}_p(\operatorname{End}^\circ(X)) = 1/2$, потому что вообще $\operatorname{Inv}_\infty(\operatorname{End}^\circ(X)) = 0$ или $1/2$. Это утверждение b), (ii).

Покажем, что если кривая X определена над конечным полем, то $\operatorname{End}^\circ(X) \neq \mathbf{Q}$. Это уже установлено для кривых X p-ранга нуль. Пусть теперь p-ранг X равен 1. Как прежде, π является биективным эндоморфизмом кривой X, степень которого равна степени p. Поэтому $\pi \neq m_X$, $m \in \mathbf{Z}$. Из таблицы в § 20 видно, что $\mathrm{End}^\circ(X)$ является квадратичным мнимым расширением поля $\mathbf{Q}$. Это доказывает утверждение b) (i).

Заодно мы показали, что, если $\mathrm{End}^\circ(X) = \mathbf{Q}$, кривая не может быть определена над конечным полем. Наоборот, пусть X не имеет конечного поля определения. Можно считать, что при $p > 2$ кривая X задана уравнением (N_p) с трансцендентным λ (при $p = 2$ уравнеиие имеет несколько другую нормальную форму, но к нему применимы аналогичные аргументы). Обозначим эту кривую через X_λ. Так как любые два трансцендентных элемента λ и λ' сопряжены над простым полем, алгебры $\mathrm{End}(X_\lambda) = A$ должны быть изоморфны при всевозможных λ. Из уже доказанных результатов следует, что алгебра $\mathrm{End}^\circ(X)$ должна быть изоморфна либо полю $\mathbf{Q}$, либо мнимому квадратичному расширению поля $\mathbf{Q}$. (Иначе, она является некоммутативным телом, а тогда p-ранг кривой X_λ равен нулю, и элемент λ алгебраичен.) Допустим, что $\mathrm{End}^\circ(X)$ является мнимым квадратичным расширением $\mathbf{Q}$. Тогда существует элемент $\alpha \in A$, такой, что $\alpha^2 = N \in \mathbf{Z}$, $N < 0$. Стало быть, для любого элемента μ, трансцендентного над простым полем, существует эндоморфизм $\alpha_\mu \in \mathrm{End}(X_\mu)$ со свойством $\alpha_\mu^2 = N$. Пусть l — простое число, не делящее pN, и $\xi \in T_l(X_\lambda)$. Обозначим через K_n циклическую группу, порожденную образом ξ относительно отображения $T_l(X) \to X_{l^n}$, положим $Y = X/K_n$ и обозначим через $p\colon X \to X/K_n$ естественный гомоморфизм. Выше было показано, что кривая X/K_n не может быть определена над конечным полем, так что она изоморфна X_μ, где μ — некоторый элемент, трансцендентный над простым полем. Отображение $\mathrm{End}^\circ(X_\mu) \to \mathrm{End}^\circ(X_\lambda)$: $\alpha \to p^{-1} \circ \alpha \circ p$ является изоморфизмом алгебр; в частности, $(p^{-1} \circ \alpha_\mu \circ p)^2 = N_X$, а так как $\alpha_\lambda^2 = N_X$ и $\mathrm{End}^\circ(X)$ — поле, то $p^{-1} \circ \alpha_\mu \circ p = \pm \alpha_\lambda$, т. е. $\alpha_\mu \circ p = \pm p \circ \alpha_\lambda$. Следовательно, $\alpha_\lambda(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p)$, т. е. $\alpha_\lambda(K_n) \subset K_n$. Так как это верно для любого значения n, то $\alpha_\lambda(\xi) = a\xi$, где $a \in \mathbf{Z}_l$. Стало быть, относительно действия α_λ на $T_l(X)$ любой вектор является собственным. Значит, α_λ действует как умножение на скаляр. Но коэффициенты характеристического многочлена этого эндоморфизма целые. Поэтому собственное значение рационально, так что его квадрат не может быть отрицателен. Это противоречие показывает, что если кривая X не определена над конечным полем, то $\mathrm{End}^\circ(X) = \mathbf{Q}$, чем и завершается доказательство утверждения (а).

Тэйт и Гротендик показали, что часть этих результатов допускает значительное обобщение на многомерный случай. Пусть характеристика основного поля конечна, а X — простое абелево многообразие.

Теорема. *Многообразие X изогенно многообразию X', определенному над конечным полем, в том и только том случае, когда X является многообразием* CM-*типа.*

(В одну сторону утверждение было доказано Тэйтом [31], в другую — Гротендиком [30].)

Тэйт, кроме того, устанавливает следующий результат:

Теорема. *Если абелево многообразие X определено над конечным полем k_0, π — соответствующий эндоморфизм Фробениуса, а* $\mathrm{End}(X, k_0)$ — *кольцо эндоморфизмов, определенных над k_0, то*

$$\mathrm{End}(X, k_0)_Q \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}_l \text{ — централизатор } T_l(\pi) \text{ в } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_l}(T_l(X), T_l(X)).$$

§ 23. Группа $\mathscr{G}(L)$

Существует еще один подход к изучению римановой формы, связанной с расслоением. Применяемая здесь техника важна в других вопросах — в теории модулей и при детальном изучении линейных систем на абелевых многообразиях. Начнем с небольшого отступления, в котором вводится один класс групповых схем, важный для дальнейшего.

Определение. *Тэта-группой* называется последовательность групповых схем

$$1 \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \to 1$$

со следующими свойствами:

(a) группа K коммутативна (G не предполагается коммутативной);

(b) существует открытое покрытие $\{U_i\}$ группы K, над элементами которого морфизм π имеет сечения

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & {}^{\sigma_i}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ U_i & \subset & K \end{array}$$

(c) i — замкнутое вложение, отождествляющее $\mathbf{G}_m$ с ядром морфизма π;

(d) $\mathbf{G}_m$ лежит в центре G.

Если K — конечная групповая схема, существует глобальное сечение σ: $K \to G$ морфизма π. В этом случае $G \cong \mathbf{G}_m \times K$ *как схема* (изоморфизм φ: $\mathbf{G}_m \times \times K \to G$ можно определить, например, формулой $\varphi(\alpha, k) = i(\alpha)\sigma(k)$). Фиксировав такое расщепление, мы можем превратить групповой закон на G в „скрученный" групповой закон на $\mathbf{G}_m \times K$. Точнее, существует такой морфизм f: $K \times K \to \mathbf{G}_m$, что скрученный групповой закон имеет вид

$$(*) \qquad (\alpha, k)(\alpha', k') = (\alpha\alpha' f(k, k'),\ k + k').$$

Здесь α, α' суть S-значные точки группы $\mathbf{G}_m$, k, k' — некоторые S-значные точки группы K, композиция в которой записывается аддитивно. Морфизм f должен быть 2-коциклом:

$$f(k + k', k'')f(k, k') = f(k, k' + k'')f(k', k'').$$

Замена сечения σ меняет f на кограницу:

$$f^*(k, k') = f(k, k')g(k + k')g(k)^{-1}g(k')^{-1}.$$

Наоборот, любой коцикл f превращает $\mathbf{G}_m \times K$ в тэта-группу с законом композиции $(*)$. Иными словами, множество классов тэта-групп с фиксированным конечным фактором K изоморфно группе когомологий

$H^2(k, \mathbf{G}_m)$, которая определяется с помощью коцепей-морфизмов.

Отклонение G от коммутативности нетрудно измерить, вычисляя коммутаторы. Пусть x, y — любые S-значные точки группы G. Тогда

(1) $xyx^{-1}y^{-1}$ есть S-значная точка $\mathbf{G}_m$;

(2) она зависит лишь от $\pi(x)$, $\pi(y)$, но не от x, y. Следовательно, определен морфизм

$$e\colon K \times K \to \mathbf{G}_m,$$

такой, что

$$xyx^{-1}y^{-1} = e(\pi x, \pi y) \text{ при всех } x, y \in G(S) \text{ и любых } S.$$

Нетрудно проверить, что e — кососимметрический бигомоморфизм:

a) $$e(k + k', k'') = e(k, k'')\, e(k', k''),$$

b) $$e(k, k' + k'') = e(k, k')\, e(k, k''),$$

c) $$e(k, k) = 1.$$

Если морфизм $G \to K$ допускает глобальное сечение и, следовательно, G описывается некоторым коциклом f, то

d) $$e(k, k') = f(k, k')/f(k', k).$$

В случае конечной группы K можно дать несимметричное описание бигомоморфизма посредством гомоморфизма

$$\gamma\colon K \to \hat{K}.$$

Действительно, рассмотрим $K \times K$ и $\mathbf{G}_m \times K$ как групповые схемы над K относительно морфизма p_2. Тогда $(e, p_2)\colon K \times K \to \mathbf{G}_m \times K$ есть K-гомоморфизм, т. е. K-значный характер группы K. Поэтому он определяется морфизмом $\gamma\colon K \to \hat{K}$. Обозначая через $\langle\ ,\ \rangle\colon K \times \hat{K} \to \mathbf{G}_m$ универсальное спаривание, получаем описание γ в терминах действия на S-значные точки k, k' группы K:

$$e(k, k') = \langle k, \gamma(k') \rangle.$$

Предложение. *Пусть K — конечная группа, γ: $K \to \hat{K}$ — введенный выше гомоморфизм. Тогда для любой S-значной точки x группы G*

$$[p(x) \in \mathrm{Ker}(\gamma)] \Leftrightarrow [x \text{ лежит в центре группы } G].$$

Последнее утверждение означает, что для всех S-схем S' и всевозможных S'-значных точек y группы G выполняется равенство $xy = yx$.

Доказательство. В самом деле, $\gamma(p(x)) \neq 0 \Leftrightarrow$ характер $\gamma(p(x))$: $K \times S \to \mathbf{G}_m \times S$ нетривиален $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \gamma(p(x))(k) \neq 1$ для некоторой S'-значной точки k группы $K \Leftrightarrow \langle k, \gamma(p(x)) \rangle \neq 1$ для некоторой точки $k \Leftrightarrow e(k, p(x)) \neq 1$ для некоторой точки $k \Leftrightarrow xy \neq yx$ для некоторой S'-значной точки y группы G.

Следствие. *Следующие свойства эквивалентны:*

(i) γ — *изоморфизм.*

(ii) *Группа $i(\mathbf{G}_m)$ является центром $\mathbf{G}$. Иначе говоря, всякая S-значная точка x группы G, коммутирующая со всевозможными S'-значными точками для S-схем S', принадлежит $i(\mathbf{G}_m)$.*

Тэта-группы с этими свойствами называются *невырожденными.*

Нам понадобятся также некоторые сведения о другом крайнем случае, когда расширение G тривиально.

Лемма 1. (i) *Если группа K конечна, а G коммутативна, то $G \cong \mathbf{G}_m \times K$ как группа. Иначе говоря, в категории коммутативных групповых схем $\mathrm{Ext}^1(K, \mathbf{G}_m) = 0$ для конечных групп K.*

(ii) *Если K — конечная группа простого порядка, то группа G коммутативна.*

Доказательство. Первое утверждение принадлежит к числу стандартных фактов теории коммутативных алгебраических групповых схем. Для его доказательства можно, например, свести вопрос к случаю, когда $K = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p или α_p, с помощью точной последовательности Ext-ов и того обстоятельства, что K является расширением групп такого типа. Далее, в случаях $K = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ образующую

K можно поднять до точки группы G того же порядка (ибо группа k^* делима). В остальных двух случаях прямое вычисление показывает, что p-алгебра Ли группы G расщепляется. Детали читатель найдет в лекциях Оорта [27] или в записках семинара [30].

Для доказательства утверждения (ii) в случаях $K = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ следует поднять образующую группы K в G и воспользоваться тем, что приведенная групповая схема, порожденная центральной подгруппой и еще одним элементом, коммутативна. В случаях $K = \mu_p$ или α_p обозначим через $\mathfrak{G}$ алгебру Ли группы G. Тогда $\mathfrak{G} = kx + ky$, где x порождает алгебру Ли группы $\mathbf{G}_m$, а y — группы K. Так как $\mathbf{G}_m$ лежит в центре, $[x, z] = 0$ для всех $z \in \mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ — абелева алгебра Ли, так что группа $G^{(p)}$ коммутативна. (См. записи семинаров [29] или [30].) Изоморфизм схем $G \cong \mathbf{G}_m \times K$ позволяет рассматривать любую S-значную точку G как пару S-значных точек групп $\mathbf{G}_m$ и K или групп $\mathbf{G}_m$ и $G^{(p)}$. Из того, что $\mathbf{G}_m$ лежит в центре, а $G^{(p)}$ коммутативна, вытекает коммутативность группы G, что завершает доказательство.

Чтобы установить (ii) в случае, когда группа K простого порядка, естественно было бы попытаться доказать, что не существует нетривиальных кососимметрических бигомоморфизмов

$$e: K \times K \to \mathbf{G}_m.$$

Это, однако, неверно в случае характеристики 2 и $K = \alpha_2$!

Вернемся теперь к абелевым многообразиям. Прежде всего пусть L — линейное расслоение над X с проекцией $p: L \to X$, и пусть $\sigma: X \to X$ — какой-нибудь автоморфизм X. Автоморфизмом $\tau: L \to L$, продолжающим σ, называется всякий *послойно линейный* автоморфизм, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\tau} & L \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

коммутативна. Всякое отображение τ индуцирует некоторый изоморфизм σ': $L \xrightarrow{\sim} \sigma^*(L)$ и в свою очередь однозначно определяется любым таким изоморфизмом.

Напомним, далее, что для любого абелева многообразия X, всякой схемы S и S-значной точки f: $S \to X$ сдвиг T_f на f определяется как S-изоморфизм схем $(p_1, m \circ (f \times 1_X))$: $S \times X \to S \times X$, где m — сложение на X.

Тэта-группы возникают в следующей ситуации:

Теорема 1. *Пусть L — линейное расслоение на абелевом многообразии X. Для любой схемы S обозначим через $\mathscr{A}ut(L/X)(S)$ группу автоморфизмов $S \times L$, продолжающих какой-нибудь сдвиг на схеме $S \times X$. Этим определяется контравариантный функтор $\mathscr{A}ut(L/X)$ на категории $\mathscr{S}ch$ со значениями в категории групп. Он представим, иначе говоря, существует групповая схема $\mathscr{G}(L)$ и изоморфизм групповых функторов*

$$\mathscr{A}ut(L/X) \cong \mathscr{G}(L).$$

Для любой схемы S естественные гомоморфизмы групп

$$1 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^*) \to \mathscr{A}ut(L/X)(S) \to$$

$$\to \left\{ \begin{matrix} S\text{-значные точки } f\colon S \to X \\ \text{со свойством} \\ T_f^*(S \times L) \cong S \times L \end{matrix} \right\} \to 1$$

индуцируют гомоморфизмы групповых схем

$$1 \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{i} \mathscr{G}(L) \xrightarrow{j} K(L) \to 1,$$

превращающие $\mathscr{G}(L)$ в тэта-группу.

Доказательство. Обозначим через L^* дополнение к нулевому сечению расслоения L. Это главное расслоение над X со структурной группой $\mathbf{G}_m$. Зафиксируем базисную точку $P_0 \in p^{-1}(0) \cap L^*$ и положим $\mathscr{G}(L) = p^{-1}(K(L)) \cap L^*$. Для любого автоморфизма α расслоения $S \times L$, продолжающего сдвиг T_f на $S \times X$, $f \in X(S)$, определен морфизм $\tilde{\alpha}$: $S \to L^*$, $\tilde{\alpha} = p_2 \circ \alpha \circ s_0$, где s_0 — отображение $S \cong S \times \{P_0\} \hookrightarrow S \times L$, а p_2: $S \times L \to L$ — проекция. Так как $p \circ \bar{\alpha}$ совпадает с морфизмом f, а $f \in K(L)(S)$, отсюда следует, что $\bar{\alpha}$ можно провести через $\mathcal{G}(L)$:

$$S \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{G}(L) \hookrightarrow L^*.$$

Отображение $\alpha \to \bar{\alpha}$ индуцирует гомоморфизм

$$\mathcal{A}ut(L/X)(S) \to \mathcal{G}(L)(S),$$

функториальный по S. Покажем, что он является изоморфизмом. Действительно, пусть элементы α, $\beta \in \mathcal{A}ut(L/X)(S)$, продолжающие T_f и T_g соответственно, имеют один и тот же образ, $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Тогда $f = p \circ \bar{\alpha} = p \circ \bar{\beta} = g$, и отображение $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$ является таким автоморфизмом $S \times L$ над базой $S \times X$, что композиция $S \xrightarrow{s_0} S \times L \xrightarrow{\gamma} S \times L$ совпадает с s_0. Но γ отвечает умножению на некоторый элемент $\gamma_1 \in H^0(S \times X, \mathcal{O}^*_{S \times X})$. Из равенства $s_0 = \gamma \circ s_0$ следует, что $\gamma_1|_{S \times \{P_0\}} = 1$. Так как, кроме того, $H^0(S \times X, \mathcal{O}^*_{S \times X}) \cong H^0(S, \mathcal{O}^*_S)$, то $\gamma_1 = 1$, так что $\gamma = 1_{S \times L}$. Следовательно, отображение $\alpha \to \bar{\alpha}$ инъективно. Для доказательства сюръективности возьмем $\varphi \in \mathcal{G}(L)(S)$ и положим $f = p \circ \varphi$. По определению $K(L)$

$$T_f^*(S \times L) \cong (S \times L) \otimes p_1^*(M),$$

где M — некоторое линейное расслоение на S. Мы можем покрыть S открытыми множествами $\{U_i\}$, над которыми $M|_{U_i}$ тривиальны. Ограничения расслоений $T_f^*(S \times L)$ и $S \times L$ на $U_i \times X$ тогда изоморфны, так что существуют автоморфизмы χ_i расслоений $U_i \times L$, продолжающие Tf_i, где f_i — ограничение f на U_i. Обозначим через φ_i ограничение φ на U_i и рассмотрим два подъема морфизма f_i в $\mathcal{G}(L)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}(L) \arrow[d] \\ U_i \arrow[ur, shift left, "\chi_i"] \arrow[ur, shift right, "\varphi_i"'] \arrow[r, "f_i"'] & K(L) \end{tikzcd}$$

Так как $\mathscr{G}(L)$ — главное расслоение над $K(L)$ со структурной группой $\mathbf{G}_m$, существует такое обратимое сечение $\varepsilon_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_S^*)$, что $\varphi_i = \varepsilon_i(\bar{\chi}_i)$. Обозначим через λ_i автоморфизм „умножение на ε_i“ расслоения $U_i \times L$. Тогда $\overline{\lambda_i\chi_i} = \varepsilon_i(\bar{\chi}_i) = \varphi_i$. Наконец, поскольку φ_i и φ_j согласованы на $U_i \cap U_j$, автоморфизмы $\lambda_i\chi_i$ и $\lambda_j\chi_j$ согласованы на $(U_i \cap U_j) \times L$ (это следует из инъективности отображения $\alpha \to \bar{\alpha}$). Поэтому существует автоморфизм χ расслоения $S \times L$, продолжающий все $\lambda_i\chi_i$. Очевидно, $\bar{\chi} = \varphi$, откуда и следует сюръективность отображения $\alpha \to \bar{\alpha}$.

Мы установили изоморфизм функторов $\mathscr{A}ut(L/X) \cong \mathscr{G}(L)$. Поскольку первый из них групповой, схема $\mathscr{G}(L)$ имеет структуру групповой схемы. Определим гомоморфизмы i: $\mathbf{G}_m \to \mathscr{G}(L)$ и j: $\mathscr{G}(L) \to K(L)$ их действием на функторе точек:

$$\mathbf{G}_m(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*) \to \mathscr{A}ut(L/X)(S) \cong \mathscr{G}(L)(S),$$

$$\varepsilon \to \text{умножение на } \varepsilon;$$

$$\mathscr{G}(L)(S) \cong \mathscr{A}ut(L/X)(S) \to K(L)(S),$$

$$\alpha \to \left\{ \begin{array}{l} S\text{-значная точка } f \text{ схемы } X, \\ \text{такая, что } \alpha \text{ продолжает } T_f \end{array} \right\}.$$

Очевидно, морфизм i инъективен, а j совпадает с проекцией p, и $\operatorname{Im}(i) = \operatorname{Ker}(j)$. Так как проекция p: $L \to K$ локально имеет сечения, то же верно и для p: $\mathscr{G}(L) \to K(L)$. Наконец, для всякого элемента $\varepsilon \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ автоморфизм „умножение на ε“, очевидно, коммутирует со всеми остальными автоморфизмами $\alpha \in \mathscr{A}ut(L/X)(S)$, так что $i(\mathbf{G}_m)$ принадлежит центру группы $\mathscr{G}(L)$. Это завершает доказательство того, что $\mathscr{G}(L)$ вместе с морфизмами i и j является тэта-группой.

Определение. *Отображение* e^L: $K(L) \times K(L) \to \mathbf{G}_m$ *определяется как кососимметрический бигомоморфизм, индуцированный коммутатором в тэта-группе* $\mathscr{G}(L)$.

Пусть сначала $L \in \operatorname{Pic}^\circ X$. Тогда $K(L) = X$, а морфизм e^L отображает полное многообразие $X \times X$

в аффинное многообразие $\mathbf{G}_m$. Поэтому $e^L \equiv 1$, так что $\mathscr{G}(L)$ — коммутативная групповая схема, расширение X с помощью $\mathbf{G}_m$. Можно показать, что получаемое таким способом отображение

$$\operatorname{Pic}^\circ X \to \operatorname{Ext}^1(X, \mathbf{G}_m),$$
$$L \to \mathscr{G}(L)$$

(Ext в категории коммутативных групповых схем) является изоморфизмом (теорема Серра и Розенлихта).

Предположим теперь, что расслоение L связано с дивизором D: $\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X(D)$. Оставим читателю проверку того, что дискретная группа $\mathscr{G}(L)_k$ допускает следующее описание:

$$\mathscr{G}(L)_k = \{(x, f) \mid x \in X,\ f \in k(X),\ T_x^{-1}D = D + (f)\},$$
$$(x, f)(y, g) = (x + y,\ T_x^* g \cdot f).$$

Оно корректио, потому что

$$T_{x+y}^{-1}D - D - (T_x^* g \cdot f) = T_x^{-1}(T_y^{-1}D - D) +$$
$$+ (T_x^{-1}D - D) - T_x^{-1}(g) - (f) =$$
$$= T_x^{-1}(T_y^{-1}D - D - (g)) + (T_x^{-1}D - D - (f)) = 0.$$

Подгруппа $k^*(\mathbf{G}_m)_k \subset \mathscr{G}(L)_k$ состоит из пар $x = 0$. $f = \alpha \in k^*$; проекция $\mathscr{G}(L)_k \to K(L)_k$ имеет вид $(x, f) \to x$.

Функторные свойства бигомоморфизма e^L. В следующих ниже формулах буквы x, y и т. п. обозначают R-значные точки, где R — любая k-алгебра. Другой способ интерпретации этих формул — коммутативность некоторых диаграмм морфизмов. Имея это в виду, мы часто будем опускать упоминание об R в формулировках и доказательствах, рассуждая так, как если бы речь шла об обычных точках. Следует помнить, однако, что все утверждения относятся к точкам в схемном понимании.

1) *Пусть f: $X \to Y$ — гомоморфизм абелевых многообразий, и пусть L — линейное расслоение на Y. Тогда*

$$e^{f^*(L)}(x, y) = e^L(f(x), f(y)), \qquad x, y \in f^{-1}(K(L)).$$

2) *Для любых линейных расслоений* L_1, L_2 *на* X

$$e^{L_1\otimes L_2}(x, y) = e^{L_1}(x, y)\, e^{L_2}(x, y), \quad x, y \in K(L_1)\cap K(L_2).$$

3) *Если* L_1, L_2 *алгебраически эквивалентны на* X, *то* $e^{L_1} = e^{L_2}$.

4) *Пусть* $x \in K(L)$ *и* $y \in n_X^{-1}(K(L))$; *тогда*

$$e^{L^n}(x, y) = e^{L}(x, ny).$$

5) *Пусть* $x \in X_n$ *и* $y \in n_X^{-1}(K(L)) = \varphi_L^{-1}(X_n)$ $(p \nmid n)$, *тогда*

$$\bar{e}_n(x, \varphi_L(y)) = e^{L^n}(x, y).$$

Доказательства. 1) Пусть $f(x) = j(\xi)$, $f(y) = j(\eta)$, где $j\colon \mathcal{G}(L) \to K(L)$ — естественный гомоморфизм. (Если x, y суть R-значные точки, ξ, η ищутся локально над $\operatorname{Spec} R$.) Поднимем ξ, η до автоморфизмов φ, ψ расслоения $f^*(L)$, продолжающих T_x и T_y соответственно. Тогда $\varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$ есть подъем морфизма $\xi\eta\xi^{-1}\eta^{-1}$, что и утверждает формула 1).

2) Как и выше, пусть φ_i, ψ_i — автоморфизмы L_i, $i = 1, 2$, продолжающие T_x и T_y. Тогда $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ и $\psi_1 \otimes \psi_2$ — автоморфизмы $L_1 \otimes L_2$, продолжающие T_x, T_y соответственно, и их коммутатор совпадает с тензорным произведением коммутаторов φ_i и ψ_i, $i = 1, 2$, что доказывает утверждение 2).

3) Положим $L_3 = L_1 \otimes L_2^{-1}$, тогда $L_3 \in \operatorname{Pic}^0 X$ и $L_1 = L_2 \otimes L_3$, $K(L_3) = X$. Применим формулу 2) к L_2 и L_3.

4) Заменив при необходимости кольцо R некоторым кольцом $R' \supset R$, можем считать, что $x = nz$, где $z \in n_X^{-1}(K(L))$. (Действительно, пусть $\operatorname{Spec} R' = \operatorname{Spec} R \times_{K(L)} n_X^{-1}(K(L))$; это произведение конечное и плоское над $\operatorname{Spec} R$, поэтому оно является аффинной схемой с кольцом, содержащим R.) Тогда z, $y \in n_X^{-1}(K(L)) = K(L^n)$; применяя 1) к расслоению $n_X^*(L)$ и затем последовательно 2) (расслоения $n_X^*(L)$ и L^{n^2}

алгебраически эквивалентны), находим, что

$$e^L(nz, ny) = e^{n_X^*(L)}(z, y) = e^{L^{n^2}}(z, y) =$$
$$= \left(e^{L^n}(z, y)\right)^n = e^{L^n}(nz, y).$$

5) Как и выше, можно считать, что $y = nz$, и равенство, которое нужно доказать, принимает вид

$$\bar{e}_n(x, \varphi_L(y)) = e^{L^n}(x, nz).$$

Но

$$e^{L^n}(x, nz) = e^{L^{n^2}}(x, z) = e^{n_X^*(L)}(x, z),$$

потому что L^{n^2} алгебраически эквивалентно $n_X^*(L)$, и $z \in K\left(L^{n^2}\right) = K\left(n_X^*(L)\right)$. Включение $z \in K\left(n_X^*(L)\right)$ означает, что существует автоморфизм σ расслоения $n_X^*(L)$, продолжающий сдвиг T_z (здесь при необходимости следует локализовать по Spec R).

Пусть M, N — линейные расслоения на X. Условимся (временно) обозначать через Hom (M, N) линейное расслоение, связанное с локально свободным пучком ростков гомоморфизмов M в N. Существует естественный изоморфизм Hom $(M, N) \rightleftarrows M^{-1} \otimes N$. Заметим, что группа X_n естественно действует на любом расслоении $n_X^*(M)$ (согласованно с действием сдвигами на базе). Это действие переносится на всевозможные тензорные произведения, Hom-ы и сдвиги таких расслоений (потому что любые сдвиги коммутируют). Учитывая это, заметим, что определены *естественные* изоморфизмы расслоений, совместимые с описанным действием:

$$n_X^*(T_y^*L \otimes L^{-1}) \cong n_X^*(T_y^*(L)) \otimes n_X^*(L^{-1}) \cong$$
$$\cong T_z^*(n_X^*(L)) \otimes n_X^*(L)^{-1} \cong \mathrm{Hom}\left[n_X^*(L), T_z^*(n_X^*(L))\right].$$

Теперь вычислим $\bar{e}_n(\cdot, \varphi_L(y))$. Расслоение $n_X^*(T_y^*L \otimes L^{-1})$ изоморфно тривиальному, и $\bar{e}_n(\cdot, \varphi_L(y))$ вычисляется обычным способом через действие X_n на тривиальном расслоении. Иными словами, $n_X^*(T_y^*L \times L^{-1})$ имеет сечение, которое нигде не обращается в нуль и определено однозначно с точностью до умножения на константу. Действие X_n на это сечение и описывает $e_n(\cdot, \varphi_L(y))$.

Применим теперь это рассуждение к самому правому расслоению (вместо самого левого) в цепочке изоморфизмов, выписанной выше. Нигде не обращающееся в нуль сечение этого расслоения есть изоморфизм $n_X^*(L) \xrightarrow{\varphi} n_X^*(L)$, продолжающий T_z, а естественное действие $x \in X_n$ справа переводит это сечение в φ': $n_X^*(L) \to n_X^*(L)$, где $\varphi' = \eta_x \circ \varphi \circ \eta_x^{-1}$, а η_x: $n_X^*(L) \to \to n_X^*(L)$ — естественный изоморфизм, продолжающий T_x. Поэтому $\eta_x \circ \varphi \circ \eta_x^{-1} = e_n(x, \varphi_L(y))\varphi$. Применяя эту формулу к автоморфизму σ, продолжающему T_z, который был выбран раньше, находим, что

$$\eta_x \circ \sigma \circ \eta_x^{-1} \circ \sigma^{-1} = \bar{e}_n(x, \varphi_L(y)).$$

По определению эта формула равносильна тождеству $e^{n_X^*(L)}(x, z) = \bar{e}_n(x, \varphi_L(y))$.

В качестве следствия отсюда получается другое доказательство кососимметричности римановой формы расслоения L:

$$\bar{e}_n(x, \varphi_L(y)) = e^{L^n}(x, y) = e^{L^n}(y, x)^{-1} = \bar{e}_n(y, \varphi_L(x))^{-1}$$

при $x, y \in X_n$. Формулы 4) и 5) вместе показывают, как по данным e^L можно вычислить формы Римана и, наоборот, по данным формам Римана вычислить e^L на точках порядка l^n.

Теорема 2. *Пусть π: $X \to Y$ — изогения абелевых многообразий и L — линейное расслоение на X. Тогда следующие два множества находятся в естественном взаимно однозначном соответствии:*

(a) *классы (с точностью до изоморфизма) линейных расслоений M на Y со свойством $\pi^*(M) \cong L$;*

(b) *гомоморфизмы α: $\ker(\pi) \to \mathcal{G}(L)$, поднимающие вложение $\operatorname{Ker}(\pi) \hookrightarrow X$.*

Доказательство. Это просто переформулировка общей теоремы о спуске когерентных пучков при факторизации по конечным групповым схемам, приведенной в § 12. Следует лишь заметить, что

$$\mathrm{Hom}_X(\mathrm{Ker}(\pi), \mathcal{G}(L)) \cong \left\{\begin{matrix}\text{действия } \mathrm{Ker}(\pi) \text{ на } L,\\ \text{продолжающие действие}\\ \text{сдвигом на } X\end{matrix}\right\}.$$

Следствие. *Пусть дана изогения $\pi\colon X \to Y$ и L — линейное расслоение на X. Тогда на Y существует расслоение M со свойством $\pi^*(M) \cong L$, если и только если $e^L|_{\mathrm{Ker}(\pi) \times \mathrm{Ker}(\pi)} \equiv 1$.*

Доказательство. Пусть $p\colon \mathcal{G}(L) \to K(L)$ — морфизм проекции, и пусть $G = p^{-1}(\mathrm{Ker}(\pi))$. Тогда G — тэта-группа над $\mathrm{Ker}(\pi)$. По первой части леммы, доказанной в начале этого параграфа, имеем

$e^L|_{\mathrm{Ker}(\pi) \times \mathrm{Ker}(\pi)} \equiv 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G$ — коммутативная группа $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G \cong \mathbf{G}_m \times \mathrm{Ker}(\pi)$ как групповая схема $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существует гомоморфизм $\alpha\colon \mathrm{Ker}(\pi) \to G$, такой, что $p \circ \alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существует расслоение M.

Докажем теперь следующий результат, сформулированный в § 20.

Теорема 3. *Пусть L — линейное расслоение на абелевом многообразии X и $n \in \mathbf{Z}$. Изоморфизм $L \cong M^n$ для некоторого линейного расслоения M существует в том и только том случае, когда $K(L) \supset X_n$.*

Доказательство. Необходимость следует из равенства $\varphi_L = n\varphi_M$. Наоборот, пусть $K(L) \supset X_n$. Вместо изоморфизма $L \cong M^n$ достаточно показать, что $L^n \cong$ $\cong n_X^*(N)$ для некоторого N. Действительно, тогда $(L \otimes N^{-n})^n \in \mathrm{Pic}^\circ X$, так что $L \otimes N^{-n} \in \mathrm{Pic}^\circ X$. Пусть $P \in \mathrm{Pic}^\circ X$, $L \otimes N^{-n} \cong P^n$; тогда $L \cong (N \otimes P)^n$.

Для доказательства изоморфизма $L^n \cong n_X^*(N)$ достаточно воспользоваться следствием из теоремы 2. Действительно, для любых R-значных точек x, y

ядра X_n

$$e^{L^n}(x, y) = e^L(x, ny) = 1,$$

что доказывает требуемое утверждение.

Наш последний результат выясняет условия невырожденности группы $\mathcal{G}(L)$. Начнем с некоторых вспомогательных результатов.

Пусть e: $K \times K \to \mathbf{G}_m$ — кососимметрический бигомоморфизм, K — конечная группа. Пусть γ: $K \to \hat{K}$ — связанный с e гомоморфизм. Для любой подгруппы $H \subset K$ существует другая подгруппа $H^\perp$, которая характеризуется следующим свойством:

> для всякой S-значной точки группы K включение $k \in H^\perp(S)$ равносильно тому, что $e(k, k') = 1$ для всех S'/S и всех S'-значных точек k' схемы H.

Действительно, ограничивая характеры группы K на H, получаем морфизм q: $\hat{K} \to \hat{H}$, и $H^\perp$, очевидно, является ядром композиции $q \circ \gamma$: $K \to \hat{H}$.

Пусть теперь π: $X \to Y$ — изогения абелевых многообразий, M — некоторое линейное расслоение на Y и $L = \pi^*(M)$. Положим $H = \operatorname{Ker}(\pi)$. Мы знаем, что $H \subset K(L)$ и что $e^L|_{H \times H} \equiv 1$. Иными словами, $H \subset H^\perp$.

Нужный нам результат состоит в следующем:

Лемма 2. $K(M) \cong H^\perp/H$.

Доказательство. Пусть x: $S \to X$ есть S-значная точка многообразия X. Мы должны доказать, что $x \in H^\perp$ в том и только том случае, когда $\pi x \in K(M)$. Достаточно установить это для $S = \operatorname{Spec} R$, где R — локальное кольцо. В этом случае все линейные расслоения на S тривиальны. Пользуясь теоремой о спуске из § 12, находим тогда, что

$\pi x \in K(M)(S) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T^*_{\pi x}(S \times M) \cong S \times M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существует изоморфизм $T^*_x(S \times L) \cong S \times L$, согласованный с действием $\operatorname{Ker}(\pi)$ на этих двух расслоениях.

Пусть теперь α: $H \to \mathcal{G}(L)$ — гомоморфизм, описывающий такое действие H на L, факторпространством относительно которого является M. Тогда предыдущие утверждения эквивалентны цепочке следующих:

существует S-значная точка w группы $\mathcal{G}(L)$, такая, что $p(w) = x$ и w коммутирует с $\alpha(H) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^L(x, h) = 1$ для всех S'-значных точек группы $H \Leftrightarrow x \in H^{\perp}(S)$.

Это же рассуждение показывает, что

$$\mathcal{G}(M) \cong \left\{ \begin{matrix} \text{централизатор } \alpha(H) \\ \text{в } \mathcal{G}(L) \end{matrix} \right\} \Big/ \alpha(H),$$

однако этот факт нам не понадобится.

Применим теперь установленную лемму к доказательству следующего результата.

Теорема 4. *Пусть L — невырожденное линейное расслоение на абелевом многообразии X. Обозначим через $H \subset K(L)$ максимальную подгруппу со свойством $e^L|_{H \times H} \equiv 1$. Тогда $H = H^{\perp}$ и*

$$(\textit{порядок } H)^2 = \textit{порядок } K(L).$$

Доказательство. Положим $Y = X/H$, и пусть π: $X \to Y$ — естественный гомоморфизм. По следствию теоремы 2 на Y существует такое линейное расслоение M, что $\pi^*(M) \cong L$. Максимальность H означает, что если для некоторой изогении π': $Y \to Y'$ имеем $M \cong \pi'^*(M')$, то эта изогения — изоморфизм.

Лемма 3. *Пусть L — невырожденное линейное расслоение на абелевом многообразии X. Если не существует изогении π: $X \to Y$ степени > 1, для которой $L \cong \pi^*(M)$, то $|\chi(L)| = 1$.*

Доказательство. Если $|\chi(L)| > 1$, то группа $K(L)$ нетривиальна. Следовательно, существует подгруппа $E \subset K(L)$ простого порядка. Она имеет вид $E \cong \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p или α_p. Прообраз E в $\mathcal{G}(L)$ является тэта-групповой схемой G над E. Лемма, доказанная в начале этого параграфа, показывает, что группа G коммутативна. Следовательно, $G \cong \mathbf{G}_m \times E$, так что существует гомоморфизм

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G}(L) \arrow[d] \\ E \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & K(L). \end{tikzcd}$$

В силу теоремы 2 L спускается до X/E, а это противоречит предположению. Следовательно, $|\chi(L)| = 1$. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, получаем, что $K(M) = (0)$ и $|\chi(M)| = 1$. Следовательно, по лемме 2 $H = H^{\perp}$.

Результаты § 16 дают:

$$|\chi(L)| = \deg \pi \quad = \text{порядок } H,$$
$$\chi(L)^2 = \deg(\varphi_L) = \text{порядок } K(L).$$

Следовательно, (порядок $H)^2$ = порядок $K(L)$, что доказывает утверждение леммы.

Следствие 1. *Всякое абелево многообразие X изогенно абелеву многообразию Y, на котором есть обильное линейное расслоение L с $\chi(L) = 1$ („главная поляризация").*

Доказательство. Применим теорему к любому обильному расслоению L на X и положим $Y = X/H$, где $H \subset K(L)$ — максимальная подгруппа со свойством $e^L|_{H \times H} \equiv 1$. Тогда $L \cong \pi^*(M)$, пучок M обилен и $\chi(M) = 1$.

Следствие 2. *Если расслоение L на X невырожденно, то $\mathcal{G}(L)$ — невырожденная тэта-группа.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon K(L) \to \widehat{K(L)}$ — гомоморфизм, связанный с e^L, и пусть D — его ядро. Выберем группу $H \subset K(L)$, для которой $H = H^{\perp}$ и (порядок $H)^2$ = порядок $K(L)$. Так как $\gamma(D) = (0)$, то

$$e^L|_{D \times K(L)} \equiv 1 \quad \text{и} \quad e^L|_{K(L) \times D} \equiv 1.$$

Поэтому $D \subset H^{\perp}$, так что $D \subset H$. Следовательно, все характеры $\gamma(x)$ обращаются в нуль на D, $x \in K(L)(S)$. Но группа $H^{\perp}$ по определению является ядром гомоморфизма $K(L) \xrightarrow{\gamma} \widehat{K(L)} \xrightarrow{q} \hat{H}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im}(q \circ \gamma) \subset \widehat{H/D}$, так что существует точная последовательность

$$0 \to H \to K(L) \xrightarrow{q \circ \gamma} \widehat{H/D}.$$

Поэтому

$$\text{порядок } K(L) \leqslant (\text{порядок } H)\ (\text{порядок } \widehat{H/D}) = \\ = (\text{порядок } H)^2/(\text{порядок } D).$$

Это показывает, что

$$\text{порядок } D = 1.$$

Теория тэта-групп далее развивается в следующем направлении.

(1) Устанавливается, что всякое представление невырожденной тэта-группы, ограничение которого на центр $\mathbf{G}_m$ совпадает со стандартным представлением („умножение"), вполне приводимо.

(2) Устанавливается, что существует лишь одно неприводимое представление с этим свойством.

(3) Устанавливается, что если расслоение L невырожденно, $i = i(L)$, то группа $\mathcal{G}(L)$ естественно действует на $H^i(X, L)$, и это представление неприводимо.

По поводу всех этих фактов и их приложений см. статьи Мамфорда [23], [24].

§ 24. Случай $k = \mathbf{C}$

Цель этого параграфа — связать алгебраический подход этой главы с аналитическими методами гл. I. В частности, мы хотим установить связь между аналитической и алгебраической формами Римана линейного расслоения L и показать, что положительная определенность инволюции Розати немедленно вытекает из положительной определенности формы Римана, если расслоение L обильно.

Как всегда, пусть $X = V/U$, где V — комплексное пространство, U — решетка. Обозначим через $L = L(H, \alpha)$ некоторое линейное расслоение на X. Здесь H — такая эрмитова форма на V, что $E = \operatorname{Im} H$ целочисленна на U и $\alpha\colon U \to \mathbf{C}_1^*$ — функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\alpha(u_1 + u_2) = \alpha(u_1)\,\alpha(u_2)\,e^{\pi i E(u_1, u_2)}.$$

Рассмотрим группу $\tilde{\mathscr{G}}$ аналитических автоморфизмов $\psi_{\sigma, w}$ произведения $\mathbf{C} \times V$:

$$\psi_{\sigma, w}(\lambda, z) = \left(\lambda\sigma e^{\pi H(z, w)},\ z + w\right),$$
$$\sigma \in \mathbf{C}^*,\ w \in V.$$

Имеем

$$\psi_{\sigma, w} \cdot \psi_{\tau, v} = \psi_{\rho, w+v}, \quad \rho = \sigma\tau e^{\pi H(v, w)},$$

так что $\tilde{\mathscr{G}}$ является расширением того же типа, что и тэта-группы, введенные в § 23:

$$1 \to \mathbf{C}^* \xrightarrow{i} \tilde{\mathscr{G}} \xrightarrow{p} V \to 1,$$
$$\sigma \xrightarrow{i} \psi_{\sigma, 0},$$
$$\psi_{\sigma, w} \xrightarrow{p} w.$$

Функция α определяет подъем i подрешетки U в $\tilde{\mathscr{G}}$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dashed, "i"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \tilde{\mathscr{G}} \arrow[r, "p"'] & V \end{tikzcd}$$

$$i(u) = \psi_{\sigma, u}, \quad \sigma = \alpha(u)\,e^{\frac{\pi}{2} H(u, u)}.$$

По определению $L(H, \alpha)$ совпадает с факторпространством $\mathbf{C} \times V/i(U)$. Коммутатор в $\tilde{\mathscr{G}}$, как и в ситуации § 23, определяет бигомоморфизм $\tilde{e}\colon V \times V \to \mathbf{C}_1^*$:

$$\psi_{\sigma, w} \circ \psi_{\tau, v} \circ \psi_{\sigma, w}^{-1} \circ \psi_{\tau, v}^{-1} = \psi_{\tilde{e}(v, w), 0},$$
$$\tilde{e}(v, w) = e^{2\pi i E(v, w)}.$$

Поэтому, положив, как выше,

$$U^{\perp} = \{u \in V \mid E(u, u') \in \mathbf{Z} \quad \forall u' \in U\},$$

получаем, что группа

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(U) = \{\psi_{\sigma, v} \mid v \in U^{\perp}\}$$

совпадает с централизатором $i(U)$ в $\tilde{\mathcal{G}}$. Следовательно, все автоморфизмы $\psi_{\sigma, v}$, $v \in U^{\perp}$, спускаются до автоморфизмов $\bar{\psi}_{\sigma, w}$ расслоения $L(H, \alpha)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \times V & \xrightarrow{\psi_{\sigma, v}} & \mathbf{C} \times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(H, \alpha) & \overset{\bar{\psi}_{\sigma, v}}{\dashrightarrow} & L(H, \alpha). \end{array}$$

Это определяет естественный гомоморфизм $\tilde{\mathcal{G}}_0 \to \to \mathcal{G}(L(H, \alpha))$. Но в § 9 мы видели, что $K(L(H, \alpha)) \cong \cong U^{\perp}/U$. Поэтому определен изоморфизм расширений

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbf{C}^* & \to & \tilde{\mathcal{G}}_0/i(U) & \to & U^{\perp}/U & \to & 1 \\ & & \| & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 1 & \to & \mathbf{C}^* & \to & \mathcal{G}(L(H, \alpha)) & \to & K(L(H, \alpha)) & \to & 1. \end{array}$$

Он показывает, что коммутаторы в этих группах совпадают, откуда следует

Теорема 1. *Пусть $L = L(H, \alpha)$ — линейное расслоение на $X = V/U$, $E = \operatorname{Im} H$ и π: $V \to X$ — естественное отображение. Тогда для всех $x, y \in U$*

$$e^{-2\pi i E(x, y)} = e^L(\pi x, \pi y).$$

Поскольку полем констант является $\mathbf{C}$, для каждого n определен канонический корень из 1 степени n, $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. Поэтому модуль $M_l = \varprojlim \mu_{l^n}$ имеет каноническую образующую $\zeta = \{\ldots, e^{2\pi i/l^n}, \ldots\}$. Мы можем теперь указать в явном виде связь между римановыми формами

$$E\colon U \times U \to \mathbf{Z}, \text{ где } E = \operatorname{Im} H,$$

и

$$E^L\colon T_l(X) \times T_l(X) \to M_l \qquad \text{(определение в § 20).}$$

Обозначим через π_l естественное отображение из U в $T_l(X)$: $\pi_l(u)$ отвечает последовательности $u_n = \pi(u/l^n) \in$

$\in X_{l^n}$, $lu_{n+1} = u_n$. Тогда для любых u, $v \in U^n$

$$E^L(\pi_l(u), \pi_l(v)) = \text{последовательность } \bar{e}_{l^n}(u_n, \varphi_L v_n) =$$
$$= \text{последовательность } e^{L^{l^n}}(u_n, v_n)$$
$$(\text{§ 23, функторное свойство 5)}) =$$
$$= \text{последовательность } e^{-2\pi i l^n E\left(\frac{u}{l^n}, \frac{v}{l^n}\right)} \text{ (теорема 1)} =$$
$$= \text{последовательность } (\zeta_n)^{-E(u, v)} = -E(u, v)\zeta.$$

Поэтому, с точностью до знака, E^L совпадает с $\mathbf{Z}_l$-линейным продолжением E с U на $T_l(X)$.

Применим этот результат к случаю, когда $X = Y \times \hat{Y}$ и L — расслоение Пуанкаре. Он показывает, что каноническое невырожденное целочисленное спаривание решеток U и $\hat{U}$, соответствующих Y и $\hat{Y}$, которое появляется в аналитической теории (см. § 9, часть (B)), с точностью до знака, совпадает с каноническим невырожденным l-адическим спариванием e_l модулей Тэйта $T_l(Y)$ и $T_l(\hat{Y})$ (см. § 20).

Рассмотрим теперь инволюцию Розати на $\mathrm{End}^\circ(X)$. Аналитическое представление $\mathrm{End}^\circ(X)$ таково:

$$\mathrm{End}^\circ(X) = \left\{\begin{matrix}\text{алгебра таких комплексно-линейных эндо-} \\ \text{морфизмов } T\colon V \to V, \text{ что } T(\mathbf{Q}U) \subset \mathbf{Q}U\end{matrix}\right\}.$$

Естественная инволюция тогда есть сопряжение относительно формы H:

$$H(T^*x, y) = H(x, Ty), \quad x, y \in H.$$

Если $x \in \mathbf{Q}U$, то для всех $y \in \mathbf{Q}U$ имеем $E(T^*x, y) = E(x, Ty) \in \mathbf{Q}$. Поэтому $T^*x \in \mathbf{Q}U$, т. е. $T^* \in \mathrm{End}^\circ(X)$.

Пусть T' — образ T относительно алгебраической инволюции Розати. Тогда при всех x, $y \in U$

$$E((T^* - T')x, y) = \mathrm{Im}\, H(T^*x, y) + E^L(T'\pi_l(x), \pi_l(y)) =$$
$$= \mathrm{Im}\, H(x, Ty) + E^L(\pi_l(x), T\pi_l(y)) =$$
$$= E(x, Ty) - E(x, Ty) = 0.$$

Поэтому $T^* = T'$.

Пусть теперь $T: V \to V$ — любой комплексно-линейный оператор, а T^* — сопряженный к нему. Оператор T^*T положителен и самосопряжен на эрмитовом векторном пространстве V. Поэтому его собственные значения и след $\mathrm{Tr}(T^*T)$ положительны. Если $T \in \mathrm{End}^\circ(X)$, то T^*T переводит в себя векторное пространство $\mathbf{Q}U$ над $\mathbf{Q}$, и его след на нем совпадает с удвоенным „комплексным" следом на V. Наконец, l-адический след на $T_l(X) \cong U \otimes \mathbf{Z}_l$ совпадает с рациональным. Стало быть,

$$\mathrm{Tr}(T^*T) > 0 \text{ для всех } T \in \mathrm{End}^\circ(X), \quad T \neq 0.$$

Тем самым положительность инволюции Розати очевидна благодаря существованию положительно определенной формы H с $\mathrm{Im}\, H = E$.

Мы показали, что над произвольным основным полем это рассуждение можно до известной степени обратить: именно, пользуясь положительностью инволюции Розати, мы снабдили $NS^\circ(X)$ структурой формально вещественной йордановой алгебры, в которой положительные элементы отвечают обильным расслоениям.

Добавление

ТЕОРЕМА МОРДЕЛЛА — ВЕЙЛЯ

Ю. И. Манин

§ 1. Формулировка и план доказательства

Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, X — абелево многообразие, определенное над K. Мы докажем следующий результат.

Теорема. *Группа $X(K)$ рациональных точек многообразия X имеет конечное число образующих.*

Гипотезу о справедливости этого результата для эллиптических кривых высказал Пуанкаре. Морделл доказал гипотезу Пуанкаре над $\mathbf{Q}$, а А. Вейль обобщил его доказательство на многомерный случай, введя ряд новых идей и технических средств. Как сама теорема, так и метод ее доказательства играют центральную роль в современной „диофантовой геометрии“.

Обобщение теоремы Морделла — Вейля на случай основного поля относительного конечного типа (над своим подполем) можно найти в книге [18]. Существенно новых идей для этого не требуется.

Доказательство теоремы состоит из трех этапов совершенно разного характера. Мы резюмируем их результаты в виде трех утверждений.

Предложение 1. *Пусть $n > 1$ — целое число. Тогда группа $X(K)/nX(K)$ конечна.*

Это так называемая „слабая теорема Морделла — Вейля“; ее доказательству посвящен § 2.

Предложение 2. *На группе $X(K)$ существует билинейное симметрическое скалярное произведение:*

$$X(K) \times X(K) \to \mathbf{R}\colon\ (x, y) \rightsquigarrow \langle x, y\rangle$$

со следующими свойствами:

а) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ *для всех* $x \in X(K)$;

б) *множество* $\{x \in X(K) \mid \langle x, x\rangle < C\}$ *конечно для всех* $C > 0$.

Конструкция этого скалярного произведения основана на теории высоты Вейля — Тэйта. Она содержится в § 3 и 4.

Арифметика поля K и геометрия многообразия X используются лишь на этих двух этапах. Третий — чисто формальный вывод конечной порожденности группы $X(K)$ из этих свойств — мы проведем сейчас.

Предложение 3. *Пусть* Γ — *абелева группа, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\Gamma/n\Gamma$ *конечна для некоторого целого* $n > 1$.

2) *Существует билинейное симметрическое скалярное произведение* $\Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}$: $(x, y) \rightsquigarrow \langle x, y\rangle$ *со свойствами* а) *и* б) *предложения* 2. *Тогда* Γ *имеет конечное число образующих.*

Доказательство. Прежде всего выберем по одному представителю $x_1, \ldots, x_s$ из всех смежных классов $\Gamma/n\Gamma$.

Заметим, далее, что существует константа C со следующим свойством:

(1) $\langle x, x\rangle \geqslant C \Rightarrow \langle x - x_i, x - x_i\rangle < 2\langle x, x\rangle$ для всех $i = 1, \ldots, s$.

Действительно,

$$\langle x - x_i, x - x_i\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, x_i\rangle + \langle x_i, x_i\rangle$$

и

$$\langle x, x_i\rangle \leqslant \langle x_i, x_i\rangle^{1/2} \langle x, x\rangle^{1/2}, \tag{2}$$

так что $\langle x - x_i, x - x_i\rangle$ асимптотически растет как $\langle x, x\rangle$ при $\langle x, x\rangle \to \infty$. (Неравенство Шварца (2) следует из того, что квадратичная форма $\langle mx + nx_i, mx + nx_i\rangle$ имеет своим дискриминантом $\langle x, x_i\rangle^2 - \langle x_i, x_i\rangle\langle x, x\rangle$ и неотрицательна при всех целых m, n.)

Теперь положим

$$M = (x_1, \ldots, x_s) \cup \{x \in \Gamma \mid \langle x, x\rangle < C\},$$

где C — константа, введенная выше, и докажем, что конечное множество M является системой образующих группы Γ.

Действительно, если это не так, существует элемент $x \in \Gamma$, *не принадлежащий* подгруппе Γ_0, порожденной M, с *наименьшим* значением $\langle x, x\rangle$ (эти значения образуют в $\mathbf{R}$ дискретное подмножество в силу условия 2)). Очевидно, $\langle x, x\rangle \geqslant C$. Кроме того, $x - x_i = ny$ для некоторого $x_i \in M$ и $y \in \Gamma$. Пользуясь неравенством (2), находим:

$$\langle y, y\rangle = \frac{1}{n^2}\langle x - x_i, x - x_i\rangle < \frac{2}{n^2}\langle x, x\rangle < \langle x, x\rangle.$$

Поэтому $y \in \Gamma_0$, но тогда $x = ny + x_i \in \Gamma_0$ в противоречие с выбором x. Предложение доказано.

Эта часть доказательства теоремы Морделла—Вейля иногда называется „*методом спуска*“. Действительно, если оформлять доказательство без приведения к противоречию, оно указывает способ представить любую точку $x \in \Gamma$ в виде линейной комбинации элементов множества M, последовательно „спускаясь“ от x к $x' = \frac{x - x_i}{n}$, от x' к $x'' = \frac{x' - x_j}{n}$ и т. д., пока „высота“ $\langle x^{(i)}, x^{(i)}\rangle$ вновь получаемой точки не перестанет уменьшаться.

§ 2. Слабая теорема Морделла — Вейля

Буквы X, K в этом параграфе имеют то же значение, что и в предыдущем. Пусть $\bar{K} \supset K$ — алгебраическое замыкание K. Мы рассматриваем геометрические точки X со значениями в поле $\bar{K}$ и его подполях. Фиксируем целое число $n > 1$, обозначим через X_n группу геометрических точек порядка n на X и через μ_n — группу корней из единицы степени n.

Мы докажем ниже предложение 1, *предполагая дополнительно, что* $X_n \subset X(K)$ *и* $\mu_n \subset K^*$. Этого всегда можно добиться, перейдя от поля K к его конечному расширению, а из справедливости (сильной) теоремы Морделла — Вейля для такого расширения, очевидно, следует справедливость ее и для самого поля K.

Основная лемма. *Пусть* $L=K(n_X^{-1}X(K))$ — *композит в* $\bar{K}$ *полей вычетов всех точек вида* $n^{-1}x$, $x\in K$. *Тогда* L — *конечное абелево расширение поля* K.

Вывод предложения 1 из основной леммы. Пусть G — группа Галуа расширения L/K. Рассмотрим отображение

$$X(K)\to \mathrm{Hom}(G, X_n)\colon\ x \rightsquigarrow f_x,$$
$$f_x(s)=s(n^{-1}x)-n^{-1}x,\quad x\in X(K),\ s\in G.$$

Очевидно, f_x не зависит от выбора $n^{-1}x$, потому что $X_n\subset X(K)$. Легко проверяется, что f_x — гомоморфизм и что $f_{x_1+x_2}=f_{x_1}+f_{x_2}$. Далее,

$$f_x=0\Leftrightarrow n^{-1}x\in X(K)\Leftrightarrow x\in nX(K).$$

Поэтому отображение $x\rightsquigarrow f_x$ определяет вложение

$$X(K)/nX(K)\hookrightarrow \mathrm{Hom}(G, X_n).$$

Последняя группа конечна в силу основной леммы, что доказывает требуемое.

Доказательство основной леммы мы разобьем на несколько шагов. Все необходимые алгебро-геометрические соображения сосредоточены в доказательстве леммы 1, остальные — чистая арифметика.

Лемма 1. *Пусть* A — *кольцо целых чисел поля* K. *Существует открытое подмножество* $Y=\mathrm{Spec}\,A_S\subset \mathrm{Spec}\,A$, *схема* $\tilde{X}\to Y$, *проективная над* Y, Y-*морфизм* $\tilde{m}\colon \tilde{X}\underset{Y}{\times}\tilde{X}\to\tilde{X}$ *и сечение* $\tilde{e}\colon Y\to\tilde{X}$, *такие, что справедливы следующие утверждения:*

а) *слой* $\tilde{X}$ *над общей точкой схемы* Y (*вместе с ограничениями* m *и* e *морфизмов* $\tilde{m}$ *и* $\tilde{e}$ *на этот слой*) *изоморфен абелеву многообразию* X *над* K;

б) $\tilde{X}$ *является групповой схемой над* Y *и все* (*схемные*) *слои* $\tilde{X}$ *над замкнутыми точками* $y\in Y$ (*вместе с ограничениями морфизмов* $\tilde{m}$ *и* $\tilde{e}$ *на них*) *являются абелевыми многообразиями*;

в) *отождествление в пункте* а) *индуцирует изоморфизм групп* $\tilde{X}(Y)\xrightarrow{\sim}X(K)$.

Набросок доказательства. Пусть вообще задано некоторое алгебраическое многообразие над полем K. Покроем его конечным числом аффинных множеств, в координатном кольце каждого из них выберем конечное число образующих, в идеале соотношений между ними выберем конечное число образующих. Получится финитное задание многообразия конечным числом многочленов и рациональных функций от конечиого числа перемениых. Коэффициенты этих многочленов содержатся в некотором подкольце $A_{S'} \subset K$ конечного типа поля K. Поэтому наше многообразие можно рассматривать как общий слой схемы над $\operatorname{Spec} A_{S'}$, заданной „теми же уравнениями". Аналогично можно построить „модель над кольцом" любой диаграммы, состоящей из конечного числа многообразий и морфизмов над полем K. Применяя это соображение к данным, определяющим абелево многообразие X над K, мы можем удовлетворить требованиям пункта а).

Для того чтобы установить б), может оказаться необходимым еще уменьшить $\operatorname{Spec} A_{S'}$, вырезав из него конечное число точек. Наиболее существенное требование состоит в том, чтобы при $y \in \operatorname{Spec} A_S$ схемный слой $\tilde{X}_y$ был гладким многообразием. Мы опускаем доказательство того, что это справедливо для всех кроме конечного числа точек, если общий слой — гладкое многообразие. Остальные требования б) можно удовлетворить аналогично, если применить этот результат также к графикам интересующих нас морфизмов.

Наконец, условие в) заведомо будет выполнено, если выбрать $\operatorname{Spec} A_S$ настолько малым, чтобы A_S было кольцом главных идеалов (это всегда возможно, ибо группа классов идеалов A конечна). Действительно, тогда единственным обратимым пучком на $\operatorname{Spec} A_S$ будет структурный пучок. Так как $\tilde{X} \to Y$ — проективный морфизм, $\tilde{X}$ является замкнутой подсхемой в $\mathbf{P}_Y^N$, и достаточно проверить, что $\mathbf{P}_Y^N(Y) \cong \cong \mathbf{P}^N(K)$. Это следует, например, из предложеиия 3 лекции 5 в книге Мамфорда [20]. В самом деле, согласно этому предложению,

$$\mathbf{P}^N_Y(Y) = \{(s_0, \ldots, s_n),\ s_i \in A_S,$$
$$s_i \text{ в совокупности взаимно просты}\}/R,$$

где R — отношение эквивалентности $(s_0, \ldots, s_n) \sim \sim (us_0, \ldots, us_n)$, $u \in A_S^*$ (обратимые элементы). Но так как A_S — кольцо главных идеалов, очевидно, что все точки из $\mathbf{R}^N_K(K)$ попадают в описанное множество. Этим завершается доказательство.

Заметим, что сейчас известны гораздо более точные и тонкие факты о моделях абелевых многообразий над кольцами и, в частности, о поведении „вырожденных слоев" (теория Нерона).

Из леммы 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть $x \in \tilde{X}(Y)$. Рассмотрим x как замкнутую подсхему $\tilde{X}$ и обозначим через $n^{-1}(x)$ замкнутую подсхему в $\tilde{X}$, прообраз x относительно морфизма $n_{\tilde{X}}$ умножения на n. Тогда естественная проекция $n^{-1}(x) \to \operatorname{Spec} A_S$ является этальным морфизмом над всеми точками $y \in \operatorname{Spec} A_S$, для которых $\operatorname{char} k(y) \nmid n$.*

Доказательство. Это следует из того, что число разных геометрических точек в слое X_y над точкой y равно порядку $\operatorname{Ker}(X_y \xrightarrow{n} X_y)$, т. е. n^{2g}, $g = \dim X$, если только $\operatorname{char} k(y) \nmid n$. Так как это число совпадает со степенью морфизма проекции, определение этальности дает требуемое.

Переформулировав этот результат в классических терминах, получаем

Следствие 2. *Существует такое конечное множество E простых идеалов кольца A, что для любой точки $x \in X(K)$ и $y \in n^{-1}(x) \in X(\overline{K})$ расширение $K(y) \supset K$ неразветвлено вне E.*

(В E нужно включить $\operatorname{Spec} A \setminus \operatorname{Spec} A_S$ и делители n.)

Вернемся теперь к основной лемме. Поле $K(n^{-1}x)$ нормально над K, потому что сопряженные с точкой $n^{-1}x$ имеют вид $n^{-1}x+y$, $y \in X_n \subset X(K)$ и $K(n^{-1}x)=K(n^{-1}x+y)$. По этой же причине его группа Галуа абелева: действие на $n^{-1}x$ определяет ее изоморфизм с подгруппой в X_n. Поэтому композит $L=K(n^{-1}X(K))$ абелев периода n над K и разветвлен лишь в конечном множестве простых идеалов поля.

Следовательно, основная лемма будет доказана, если мы установим следующий факт.

Лемма 2. *Максимальное абелево расширение периода n поля алгебраических чисел K, неразветвленное вне фиксированного конечного множества E простых идеалов поля, конечно.*

Доказательство. Пусть $F \supset K$ — максимальное абелево расширение периода n, H — его группа Галуа. Рассмотрим точную последовательность:

$$1 \to \mu_n \to \bar{K}^* \xrightarrow{n} \bar{K}^* \to 1.$$

Точная последовательность когомологий группы $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ дает тогда

$$K^*/(K^*)^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \mu_n) = \mathrm{Hom}(H,\ \mu_n).$$

(Мы воспользовались тем, что $H^1(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \bar{K}^*)=1$ и $H^1(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \mu_n)=\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,\bar{K}/K,\ \mu_n)$, ибо $\mu_n \in K^*$.) Иначе говоря, определенно невырожденное билинейное спаривание

$$H \times K^*/(K^*)^n \to \mu_n\colon\ (s,\ a(K^*)^n) \rightsquigarrow \frac{s(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}}. \tag{3}$$

(Здесь группа H имеет топологию Крулля, а $K^*/(K^*)^n$ дискретна.) Любому подполю $K \subset L \subset F$ отвечает в силу теории Галуа подгруппа $H_L \subset H$, оставляющая его элементы на месте. Пусть $B \subset K^*$ — прообраз в K^* подгруппы, ортогональной к H_L относительно спаривания (3). Пользуясь его явным видом, нетрудно убедиться, что тогда

$$L = K(\sqrt[m]{B}) = K(\ldots \sqrt[m]{b_i} \ldots),\quad b_i \in B.$$

Тем самым имеется соответствие типа Галуа между абелевыми расширениями периода n поля K и подгруппами группы $K^*/(K^*)^n$.

Это чисто алгебраическая часть так называемой теории Куммера.

Теперь воспользуемся арифметикой поля K. Нужно выяснить, когда расширение $K(\sqrt[n]{a})$ неразветвлено вне E (делители n входят в E). Локальное рассмотрение показывает немедленно, что для этого необходимо и достаточно условие $\nu_y(a) \equiv 0 \bmod n$ для всех $y \notin E$. Группа элементов с таким свойством в K^* распадается в конечное число классов $\mathrm{mod}\,(K^*)^n$. Это легко следует из теорем о конечности числа классов идеалов в K и конечности числа образующих группы E-единиц (Дирихле — Минковский — Хассе).

Тем самым, чтобы получить расширение $K(n^{-1}X(K))$, достаточно извлечь корни n-й степени из конечного числа элементов поля K. Этим завершается доказательство основной леммы и слабой теоремы Морделла — Вейля.

§ 3. Высота точек проективного пространства

Как выше, K означает поле алгебраических чисел конечной степени. Напомним элементарные факты из арифметики таких полей. *Точкой поля* K называются объекты одного из следующих видов: а) простые идеалы кольца целых чисел K (неархимедовы точки); б) вложения $K \to \mathbf{R}$; в) пары комплексно сопряженных вложений $K \to \mathbf{C}$. Пусть v — какая-нибудь точка поля. Она однозначно определяет нормирование $|\ |_v$ поля K, удовлетворяющее следующим условиям. Пусть $x \in K$; тогда

$|x|_v = |x'|$, где x' — образ x при вложении в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, если v — архимедова точка;

$|p|_v = 1/p$, если v неархимедова и ее идеал делит идеал (p), $p \in \mathbf{Z}$ — простое.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими простыми формулами. Для всех $x, y \in K$

$$\log|xy|_v = \log|x|_v + \log|y|_v,$$
$$\log|x+y|_v \leqslant \max(\log|x|_v, \log|y|_v) + c_v,$$
$$(4) \qquad c_v = \begin{cases} \log 2, & \text{если } v \text{ архимедова}, \\ 0, & \text{если } v \text{ неархимедова}. \end{cases}$$

Обозначим через K_v пополнение поля K в топологии, индуцированной нормой $|\ |_v$, и положим $n_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$. Для любого элемента $x \in K$, $x \neq 0$

$$(5) \qquad \sum_v n_v \log|x|_v = 0$$

(сумма имеет смысл, ибо $|x|_v = 1$ для всех, кроме конечного числа, точек v). Дальше нам будет удобно считать, что $\log 0 = -\infty$ меньше любого вещественного числа.

Пусть теперь $(x_0, \ldots, x_n) \in K^n$ — любая система элементов, не все из которых равны нулю.

Определение-лемма 1. *Число*

$$(6) \qquad h(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \max_i (\log|x_i|_v)$$

определено корректно и обладает следующими свойствами:

1) $h(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = h(x_0, \ldots, x_n)$ *для всех* $\lambda \in K^*$. *Поэтому h можно рассматривать как функцию на K-точках $\mathbf{P}^n(K)$ проективного пространства $\mathbf{P}^n$, снабженного выделенной системой координат. Эта функция называется высотой.*

2) $h(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathbf{P}^n(K)$.

3) $h(x)$ *не зависит от выбора поля, к которому принадлежат проективные координаты точки* x.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что

$$\max_i \log|\lambda x_i|_v = \max_i \log|x_i|_v + \log|\lambda|_v$$

и „формулы произведения“ (4), примененной к λ.

Для доказательства второго заметим, что, деля все координаты точки на ненулевую, мы можем считать, что одна из них равна единице; тогда $\max_i \log|x_i|_v \geqslant 0$, так что $h(x) \geqslant 0$.

Третье утверждение достаточно доказать для пары полей $L \supset K$, содержащихся одно в другом. Пусть w пробегает все точки поля L, продолжающие v. Тогда $K_v \underset{K}{\otimes} L = \bigoplus_w L_w$, откуда $[L:K]\, n_v = \sum_w n_w$, так что для всех $x \in K$

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} n_v = \frac{1}{[L:\mathbf{Q}]} \sum_{w|v} n_w.$$

Так как ограничение $|\ \ |_w$ на K совпадает с $|\ \ |_v$, это доказывает требуемое утверждение.

Пример. Пусть $K=\mathbf{Q}$, $x_i \in \mathbf{Z}$, н. о. д. $(x_0, \ldots, x_n)=1$. Тогда

$$h(x_0, \ldots, x_n) = \max_i \log|x_i|.$$

В частности, число точек ограниченной высоты в $\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ конечно.

Более общо:

Предложение 4. *Пусть $C>0$, $d>0$, $d \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{P}^n$ — проективное пространство с фиксированной системой координат. Тогда множество*

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) \mid h(x) \leqslant C,\ \deg k(x) \leqslant d\}$$

конечно.

Доказательство. Мы сведем это утверждение к случаю $K=\mathbf{Q}$ с помощью следующего отображения. Рассмотрим точку $x=(x_0, \ldots, x_n)$ степени $\leqslant d$ и поставим ей в соответствие точку $(X_0, \ldots, X_m)$ проективного пространства форм над $\mathbf{Q}$ степени $\deg k(x)$ от $n+1$ переменной. Координатами этой точки будут коэффициенты норменной формы $\mathrm{Nm}\left(\sum x_i T_i\right)$; норма берется над $\mathbf{Q}$. Отображение $(x_0, \ldots, x_n) \rightsquigarrow (X_0, \ldots, X_m)$, определенное на множестве точек фиксированной степени, имеет конечные слои, ибо один и тот же образ может быть лишь у сопряженных точек (норменная форма разлагается на линейные множители однозначно с точностью до порядка). Поэтому достаточно доказать, что точки ограниченной высоты переходят в точки ограниченной высоты. Это почти очевидно: пользуясь неравенствами (4), находим, что для некоторых констант d_v

$$\max_i \log |X_i|_v \leqslant d \max_i \log |x_i|_v + d_v,$$

причем d_v можно считать нулями для всех неархимедовых точек поля K. Отсюда

$$h(X_0, \ldots, X_m) \leqslant dh(x_0, \ldots, x_n) + d',$$

где d' оценивается через n и d. Предложение доказано.

Исследуем теперь зависимость высоты от системы координат. Пусть f_1, f_2 — две вещественнозначные функции на некотором множестве. Назовем их *эквивалентными* ($f_1 \sim f_2$), если $|f_1 - f_2|$ ограниченна.

Предложение 5. *Пусть h_1, h_2 — высоты на $\mathbf{P}^n(\overline{K})$, определенные в двух разных системах координат. Тогда $h_1 \sim h_2$.*

Доказательство. Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица, описывающая переход от одной системы координат к другой:

$$(x_0'', \ldots, x_n'') = (x_0', \ldots, x_n') A.$$

Пользуясь формулой (6), находим, что

$$\max_i |x_i''|_v \leqslant \max_i \log |x_i'|_v + \max_{ij} \log |a_{ij}|_v + \log(n+1),$$

если v архимедова, и

$$\max_i |x_i''|_v \leqslant \max_i \log |x_i'|_v + \max_{ij} \log |a_{ij}|_v,$$

если v неархимедова. Отсюда

$$h_2(x) \leqslant h_1(x) + h(\ldots a_{ij} \ldots) + \log(n+1)$$

для всех $x \in \mathbf{P}^n(\overline{K})$. Пользуясь обратимостью A, аналогично находим оценку вида $h_1 \leqslant h_2 + C$. Это доказывает предложение.

Учитывая этот результат, мы *дальше будем рассматривать высоты лишь с точностью до эквивалентности* и вычислять их в любой, удобной по каким-либо причинам, системе координат.

§ 4. Высота, связанная с обратимым пучком

Пусть теперь X — любое многообразие, определенное над полем K, $\varphi\colon X\to \mathbf{P}^n$ — его морфизм в проективное пространство над K. На множестве геометрических точек $X(\bar{K})$ определим высоту h_φ формулой

$$h_\varphi(x)=h(\varphi(x)),$$

где h — введенная выше высота на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$.

Предложение 6. *Пусть X — собственное многообразие над K, $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^k$, $\psi\colon X\to\mathbf{P}^l$ — два K-морфизма. Если $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^l}(1))\cong\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1))$ на X, то $h_\varphi\sim h_\psi$ на $X(\bar{K})$.*

Доказательство. Пусть $L=\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1))=$ $=\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^l}(1))$. Тогда определен морфизм $\chi\colon X\to$ $\to\operatorname{Proj}(S_k(\Gamma(X, L)))$, такой, что $\chi^*(\mathcal{O}(1))=L$. Достаточно проверить, что $h_\chi\sim h_\varphi$; тогда по симметрии также $h_\chi\sim h_\psi$.

Выберем базис $(T_0, \ldots, T_k)\subset\varphi^*(\Gamma(\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1)))\subset$ $\subset\Gamma(X, L)$ и продолжим его до базиса $(T_0, \ldots, T_n)$ всего пространства $\Gamma(X, L)$. Высоту h_χ можно вычислять тогда в системе $(T_0, \ldots, T_n)$, а h_φ — в системе $(T_0, \ldots, T_k)$. Пусть $x\in X(\bar{K})$, $x_0, \ldots, x_n$ — координаты точки $\chi(x)$, $(x_0, \ldots, x_k)$ — координаты $\varphi(x)$.

Прежде всего

$$\max_{i\leqslant k}\log|x_i|_v\leqslant\max_{i\leqslant n}|x_i|_v\Rightarrow h_\varphi\leqslant h_\chi.$$

Оценка в другую сторону несколько менее тривиальна.

Так как X — собственное многообразие, образ $\chi(X)\subset\mathbf{P}^n$ замкнут. Пусть $I\subset K[T_0, \ldots, T_n]$ — его определяющий идеал в однородном координатном кольце,

$R=K[T_0, \ldots, T_n]/I$. Так как сечения $T_0, \ldots, T_k$, определяющие морфизм φ, не имеют общих нулей на X, их образы в R порождают идеал, радикалом которого является „несущественный“ идеал R_+, порожденный формами степени $\geqslant 1$. В частности, существует такое целое число $q>0$ и формы $F_{ij} \in K[T_0, \ldots, T_n]$ степени $q-1$, что

$$T_{k+i}^q - \sum_{j=0}^{k} F_{ij}(T_0, \ldots, T_n) T_j \in I, \quad i=1, \ldots, n-k.$$

Следовательно, для любой точки $(x_0, \ldots, x_n)=\chi(x)$

$$(7) \qquad x_{k+i}^q = \sum_{j=0}^{k} F_{ij}(x_0, \ldots, x_n) x_j, \qquad i=1, \ldots, n-k.$$

Применяя оценки (6) к правой части (7), получаем, что

$$q \log |x_{k+i}|_v \leqslant (q-1) \max_{i \leqslant n} \log |x_i|_v + \max_{j \leqslant k} \log |x_j|_v + c_v,$$

где c_v — набор констант, зависящий от F_{ij} и такой, что $c_v \neq 0$ лишь для конечного числа v. Отсюда

$$\max_{i \leqslant n} \log |x_i|_v \leqslant \max_{j \leqslant k} \log |x_j|_v + c_v,$$

так что $h_\chi \leqslant h_\varphi + c$. Это доказывает утверждение.

Теперь мы в состоянии доказать основную общую теорему о высоте, принадлежащую А. Вейлю.

Теорема. *Пусть X — проективное многообразие над полем K. Каждому элементу $L \in \operatorname{Pic} X$ можно поставить в соответствие однозначно определенную (с точностью до эквивалентности) функцию высоты h_L на $X(\bar{K})$ так, что это сопоставление будет обладать следующими свойствами:*

(а) $h_{L_1 \otimes L_2} \sim h_{L_1} + h_{L_2}$;

(б) *если* $X=\mathbf{P}^n$, *то* $h_{\mathcal{O}(1)}$ — *высота, определенная в* § 3;

(в) *для любого K-морфизма $\varphi: X \to Y$ и $L \in \operatorname{Pic} Y$ имеем* $h_{\varphi^*(L)} \sim h_L \circ \varphi$.

Доказательство. Прежде всего единственность высоты следует из того, что $\operatorname{Pic} X$ порожден очень обильными расслоениями, на классах которых высота с точностью до эквивалентности определяется свойствами (б) и (в) в силу предложения 6.

Для доказательства существования проверим прежде всего свойства (а) для расслоений $L_1 = \varphi^*(\mathcal{O}(1))$, $L_2 = \psi^*(\mathcal{O}(1))$, где $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^k$, $\psi\colon X \to \mathbf{P}^l$. Обозначим через $\sigma\colon \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l \to \mathbf{P}^N$ морфизм Сегре, который в однородных координатах записывается в виде

$$\sigma((x_0, \ldots, x_k), (y_0, \ldots, y_l)) = (\ldots x_i y_j \ldots) \in \mathbf{P}^{(k+1)(l+1)-1}.$$

Тогда, в очевидных обозначениях, $\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)) = p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^l}(1))$, так что $L_1 \otimes L_2 = \chi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))$, где

$$\chi\colon X \xrightarrow{(\varphi,\, \psi)} \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l \xrightarrow{\sigma} \mathbf{P}^N$$

— сквозной морфизм. Следовательно, $h_{L_1 \otimes L_2} \sim h_\chi$; но из формул

$$\max_{i,\, j} \log |x_i y_j|_v = \max_i \log |x_i|_v + \max_j \log |y_j|_v$$

немедленно следует, что $h_\chi \sim h_\varphi + h_\psi \sim h_{L_1} + h_{L_2}$.

Пусть теперь L — любое расслоение; полагая $L = L_1 \otimes L_2^{-1}$, где L_1 и L_2 очень обильны, определим

$$h_L = h_{L_1} - h_{L_2}.$$

Из только что доказанного утверждения сразу же следует, что с точностью до эквивалентности h_L не зависит от выбора L_1 и L_2 и что высота h_L, как функция $\operatorname{Pic} X$, обладает свойствами (а) и (б).

Функторное свойство (в) достаточно проверять лишь на расслоениях вида $L = \psi^*(\mathcal{O}(1))$, ибо они порождают $\operatorname{Pic} Y$. Для таких расслоений $h_L \sim h_{\mathcal{O}(1)} \circ \psi$ по определению и $h_{\varphi^*(L)} \sim h_{\mathcal{O}(1)} \circ \psi \circ \varphi$ по определению, откуда $h_{\varphi^*(L)} \sim h_L \circ \varphi$.

Теорема доказана.

§ 5. Высота Тэйта на абелевых многообразиях

Пусть теперь X — абелево многообразие над K, $L \in \operatorname{Pic} X$. Дж. Тэйту принадлежит простое и красивое замечание, показывающее, что, во-первых, h_L

является „приближенно квадратичной“ функцией на группе $X(\overline{K})$ и, во-вторых, h_L эквивалентна единственной функции $\hat{h}_L$, которая строго квадратична.

Начнем с леммы, относящейся к произвольной абелевой группе.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *некоторая абелева группа,* $h\colon \Gamma \to \mathbf{R}$ — *функция на ней, удовлетворяющая условию*

$$(8)\qquad h\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} h(x_i+x_j) + \sum_{k=1}^{3} h(x_k) \sim 0$$

(*левая часть рассматривается как функция на* $\Gamma\times\Gamma\times\Gamma$). *Тогда существуют такое билинейное симметрическое спаривание* $b\colon \Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$ *и такой гомоморфизм* $l\colon \Gamma\to\mathbf{R}$, *что*

$$h(x) \sim \hat{h}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2} b(x, x) + l(x).$$

Этими условиями b *и* l *определяются однозначно.*

Доказательство. Положим прежде всего

$$\beta(x_1, x_2) = h(x_1+x_2) - h(x_1) - h(x_2).$$

Тогда β симметрична и „приближенно билинейна“:

$$(9)\qquad \beta(x_1+x_2, x_3) - \beta(x_1, x_3) - \beta(x_2, x_3) \sim 0$$

и аналогично по второму аргументу. Для доказательства следует лишь явно расписать (9) в терминах h, чтобы убедиться в эквивалентности этого соотношения уравнению (8).

Положим теперь

$$b(x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} 4^{-n}\beta(2^n x_1, 2^n x_2).$$

Существование предела и эквивалентность $b\sim\beta$ получается одновременно, если заметить, что

$$4^{-(n+1)}\beta(2^{n+1}x_1, 2^{n+1}x_2) = 4^{-n}\beta(2^n x_1, 2^n x_2) + 4^{-(n+1)}\theta_n,$$

где $\theta_n = \theta_n(x_1, x_2) \sim 0$, так что

$$4^{-N}\beta(2^N x_1, 2^N x_2) = \beta(x_1, x_2) + \sum_{n=0}^{N} 4^{-(n+1)}\theta_n.$$

Из формулы (9) тогда немедленно следует билинейность b.

Теперь положим

$$\lambda(x) = h(x) - \frac{1}{2} b(x, x).$$

Тогда

$$\lambda(x_1 + x_2) - \lambda(x_1) - \lambda(x_2) = \beta(x_1, x_2) - b(x_1, x_2) \sim 0.$$

Поэтому, применяя тот же процесс усреднения к λ, получим гомоморфизм $l: \Gamma \to \mathbf{R}$, $l \sim \lambda$:

$$l(x) = \lim 2^{-n} \lambda(2^n x).$$

В итоге

$$h = \frac{1}{2} b + \lambda \sim \frac{1}{2} b + l.$$

Единственность b и l очевидна.

Определение-лемма 2. *Пусть X — абелево многообразие над числовым полем K, $L \in \operatorname{Pic} X$. Тогда высота h_L на $X(\overline{K})$ удовлетворяет условию леммы 3. Следовательно, однозначно определены функции b_L, l_L и $\hat{h}_L$, последняя из которых называется высотой Тэйта точек на X (связанной с расслоением L).*

Доказательство. Применим теорему о кубе (точнее, следствие 2 из нее) к проекциям p_i: $X \times X \times X \to X$. Тогда получим, что

$$\left(\sum_{i=1}^{3} p_i\right)^* L \otimes (p_1 + p_2)^* L^{-1} (p_1 + p_3)^* L^{-1} \otimes$$
$$\otimes (p_2 + p_3)^* L^{-1} \bigotimes_{i=1}^{3} p_i^* L \cong 1.$$

Вычисляя высоту точки $(x_1, x_2, x_3) \in X \times X \times X$ относительно расслоения в левой части с помощью теоремы о свойствах h_L, находим, что

$$h_L\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} h_L(x_i + x_j) + \sum_{i=1}^{3} h_L(x_i) \sim 0.$$

Это завершает доказательство.

Замечание. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм абелевых многообразий, L — некоторое расслоение на Y. Тогда $h_{\varphi^*(L)} \sim h_L \circ \varphi$, откуда $\hat{h}_{\varphi^*(L)} = \hat{h}_L \circ \varphi$ и, в частности, $b_{\varphi^*(L)} = b_L \circ \varphi$, $l_{\varphi^*(L)} = l_L \circ \varphi$. Применяя последние равенства к отображению $\varphi(x) = -x$ и полагая $\varphi^*(L) = L^-$, получаем

$$b_{L^-} = b_L, \quad l_{L^-} = -l_L.$$

Пусть теперь L — симметричное расслоение, т. е. такое, что $L^- = L$. Тогда $l_L = 0$ и $\hat{h}_L(x) = \frac{1}{2} b_L(x, x)$.

§ 6. Доказательство предложения 3

Выберем симметричное очень обильное расслоение L на X и в качестве формы $\langle x, y\rangle$ возьмем

$$\langle x, y\rangle = b_L(x, y).$$

Так как L очень обильно, то $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in X(K)$. Действительно, иначе $\hat{h}_L(nx) = \frac{1}{2} n^2 \langle x, x\rangle \to -\infty$ при $n \to \infty$, а это противоречит тому, что $\hat{h}_L(y) \sim h_L(y)$ и в классе функций, эквивалентных $h_L(y)$, есть неотрицательные (второе свойство высоты: см. определение-лемму 1).

Далее, из предложения 4 следует, что множества $\{x \in X(K) \mid h_L(x) \leqslant c\}$ конечны, поэтому то же самое верно для множеств $\{x \in X(K) \mid \langle x, x\rangle \leqslant C\}$.

Этим завершается доказательство предложения 3 и теоремы Морделла — Вейля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреотти А., Грауэрт Г. (Andreotti A., Grauert H.), Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. de France*, **90** (1962), 193—259.
2. Барзотти Я. (Barsotti I.), Moduli canonici e gruppi analitici commutativi, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **13** (1959), 303—372.
3. Барзотти Я. (Barsotti I.), Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **18** (1964), 1—25; **19** (1965), 277—330.
4. Бейли У. (Baily W. L.), On the theory of θ-functions, the moduli of abelian varieties and the moduli of curves, *Ann. of Math.*, **75**, (1962), 342—381.
5. Брауи Х., Кехер М. (Braun H., Koecher M.), Iordan-Algebren, Berlin, Springer, 1966.
6. Вейль А., Введение в теорию келеровых миогообразий, ИЛ, М., 1961.
7. Вейль А. (Weil A.), Variétès abéliennes et courbes algébriques, Hermann, Paris, 1948.
8. Ганнинг Р., Лекции о модулярных формах, сб. «*Математика*», **8** : 6 (1964), 4—67.
9. Ганниг Р., Росси Х., Аналитические фуикции миогих комплексиых переменных, «Мир», М., 1969.
10. Годемаи Р., Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, М., 1961.
11. Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961.
12. Джекобсон Н., Алгебры Ли, «Мир», М., 1964.
13. Дойриг М. (Deuring M.), Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, **14** (1941), 197—272.
14. Касселс Дж., Диофантовы уравнения со специальным рассмотрением эллиптических кривых, сб. «*Математика*», **12** : 1 (1968), 113—160 и **12** : 2 (1968), 1—48.
15. Кодаира К., О компактных аналитических поверхностях, сб. «*Математика*», **6** : 6 (1962), 3—17.
16. Конфорто Ф. (Conforto F.), Funzioni abeliane e matrici di Riemann, Roma, Libreria Università, 1942.
17. Леиг С. (Lang S.), Abelian Varieties, Interscience, N. Y., 1959.
18. Ленг С. (Lang S.), Diophantine Geometry, Interscience, N. Y., 1962.

19. Маасс Г. (Maass H.), Lectures on modular functions of one complex Variable, Tata Institute of Fund. Res., Bombay, 1964.
20. Мамфорд Д., Лекции о кривых иа алгебраической поверхиости, «Мир», М., 1968.
21. Мамфорд Д. (Mumford D.), Geometric Invariant Theory, Springer, Berlin — Heidelberg, 1965.
22. Мамфорд Д. (Mumford D.), Introduction to Algebraic Geometry (препрнит).
23. Мамфорд Д. (Mumford D.), On the Equations Defining Abelian Varieties, Inventiones mathematicals, I., vol. 1, f. 4 (1966), 287—354; II, vol. 3, f. 2 (1967), 75—135; III, vol. 3, f. 3 (1967), 215—245.
24. Мамфорд Д. (Mumford D.), Abstract theta functions, Bowdoin College Seminar, 1967 (препрнит).
25. Маиии Ю. И., Теория коммутативиых формальных групп иад полями конечиой характеристики, *УМН*, **XVIII**, вып. 6(114), 1963, 3—90.
26. Нероп А. (Néron A.), Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. math. IHES, 1964, N 21, 5—128.
27. Оорт Ф. (Oort F.), Commutative group schemes, Lecture Notes in Mathematics, 15, Springer, Berlin, 1966.
28. Séminaire Géometrie Algébrique, 1960—61 (препрнит).
29. Séminaire Géometrie Algébrique, 1963—64 (препринт).
30. Séminaire Géometrie Algébrique, 1967—68 (препринт).
31. Séminaire Heidelberg — Strasbourg, 1965/66 (препрнит).
32. Тэйт Дж., Эндоморфизмы абелевых миогообразий над коиечными полями, сб. *«Математика»*, 12 : 6 (1968), 31—40.
33. Тэйт Дж., О гипотезах Берча и Свиннертоиа — Дайера и их геометрическом аналоге, сб. *«Математика»*, 12 : 6 (1968), 41—55.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5

Предисловие 6

Глава I. **Аналитическая теория** 9

§ 1. Комплексные торы 9
§ 2. Линейные расслоения на комплексном торе 23
Приложение к § 2 33
§ 3. Алгебраические торы 36

Глава II. **Алгебраическая теория: язык многообразий** . . . 52

§ 4. Определение абелевых многообразий 52
Приложение к § 4 59
§ 5. Когомологии и замена базы 60
§ 6. Теорема о кубе, I 71
§ 7. Факторизация многообразий под действием конечных групп автоморфизмов 83
§ 8. Двойственное абелево многообразие: случай характеристики 0 93
§ 9. Случай $k = \mathbf{C}$ 102

Глава III. **Алгебраическая теория: язык схем** 109

§ 10. Теорема о кубе, II 109
§ 11. Элементы теории групповых схем 114
§ 12. Факторизация относительно конечной групповой схемы 131
§ 13. Двойственное абелево многообразие над полем любой характеристики 147
§ 14. Теория двойственности конечных коммутативных групповых схем 159

§ 15. Приложения к абелевым многообразиям 171
§ 16. Когомологии обратимых пучков 178
§ 17. Очень обильные линейные расслоения 193

Глава IV. **Hom (X, X) и l-адические представления** . . . 197

§ 18. Этальные накрытия 197
§ 19. Строение Hom (X, X) 202
§ 20. Формы Римана 215
§ 21. Положительность инволюции Розати 225
§ 22. Примеры 245
§ 23. Группа $\mathcal{G}(L)$ 258
§ 24. Случай $k = \mathbf{C}$ 274

Добавление. **Теорема Морделла — Вейля** (*Ю. И. Манин*) . . 279

§ 1. Формулировка и план доказательства 279
§ 2. Слабая теорема Морделла — Вейля 281
§ 3. Высота точек проективного пространства 286
§ 4. Высота, связанная с обратимым пучком 290
§ 5. Высота Тэйта на абелевых многообразиях 292
§ 6. Доказательство предложения 3 295

Литература 296

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Д. Мамфорд

АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *Н. А. Фильчагина*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. Д. Кузнецова*

Сдано в набор 19/X 1970 г.
Подписано к печати 30/VI 1971 г.
Бумага № 2 $84 \times 108^1/_{32}$=4,69 бум. л., 15,75 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 12,64. Изд. № 1/5765
Цена 1 р. 01 к. Зак. 842

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29