С. МАНДЕЛЬБРОЙТ

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Лекции, читанные в Институте математики при Ленинградском Университете в апреле 1936 года, по записям и в обработке И. П. Натансона

с предисловием академика С. Н. Бернштейна

ОНТИ НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1937 МОСКВА

Т — 21 — 5-2
ОНТИ — ГТТИ — ГТКК № 98 от 13-V 1937 г.

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга представляет собою изложение лекций, читанных известным французским математиком С. Мандельбройтом [(S. Mandelbrojt), профессор университета в Clermont Ferrand] в Научно-исследовательском институте математики и механики при Ленинградском государственном университете в апреле 1936 года.

В ней излагается созданная за последние два десятилетия теория квазианалитических классов функций.

Книга предназначена для аспирантов и научных работников математиков.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В апреле 1936 года известный французский математик С. Мандельбройт (S. Mandelbrojt), профессор Клермонского (Clermont) университета, прочел в Институте математики при ЛГУ цикл лекций, посвященных теории квазианалитических классов функций. Эта новая, весьма важная область теории функций многим обязана самому проф. С. Мандельбройту, которому удалось дать полное разрешение некоторых ее основных задач. Лекции его, прочитанные с большим искусством и подъемом, вызвали живой интерес среди математиков Ленинграда. Естественно поэтому возникла мысль издать эти лекции в виде особой монографии, которая дала бы возможность всем советским математикам ознакомиться с теорией квазианалитических классов функций. Эту мысль удалось осуществить наилучшим образом благодаря тщательной записи и умелой обработке своих записок одним из слушателей проф. И. П. Натансоном, который по желанию проф. Мандельбройта дополнил их переводом нескольких параграфов из книги автора, недавно появившейся в коллекции Бореля.

Следует также выразить благодарность ЛООНТИ за содействие своевременному изданию предлагаемой монографии.

Акад. *С. Бернштейн*

PRÉFACE DE L'AUTEUR

Qu'il me soit permis tout d'abord de remercier l'Institut Mathématique de l'Université de Léningrad pour le double honneur qu'il m'a fait, en m'invitant à faire un cours dans ses murs et en publiant ce cours. Dois-je avouer que le plaisir que j'ai éprouvé d'y exposer quelques recherches modernes sur les classes quasi-analytiques des fonctions était d'autant plus vif, que parmi ceux qui voulaient bien m'écouter se trouvait un des grands Maîtres de cette branche d'Analyse, l'Académicien S. Bernstein, à qui vont mon admiration et ma reconnaissance.

Le premier qui a posé des problèmes se rattachant à la théorie qui nous intéresse fut Borel, créateur des fonctions monogènes (bien qu'il les appelle, lui-même, fonctions monogènes de Cauchy!). Sa manière de prolonger les fonctions analytiques à travers une coupure fournit les premières fonctions appartenant aux classes possédant la propriété de quasi-analyticité, telle que nous la concevons dans ce livre.

Hadamard a posé, en 1912, la question précise que voici: quelle doitêtre la suite $\{m_n\}$, pour qu'une fonction, vérifiant dans un intervalle les inégalités $|f^{(n)}(x)| < K^n m_n$ et s'annulant, ainsi que ses dérivées, en un point de cet intervalle, soit identiquement nulle? Le problème de la quasi-analyticité (D) fut ainsi posé.

Serge Bernstein, par contre, a été le premier à introduire des classes quasi-analytiques (I), c'est à dire, des classes, telles qu'une fonction de cette classe est identiquement nulle, dès qu'elle s'annule dans un intervalle arbitrairement petit. Les classes de S. Bernstein sont caractérisées par les propriétés portant sur la meilleure approximation.

Denjoy fut le premier à donner une réponse à la question d'Hadamard. La grande idée de Denjoy fut de ramener l'étude des fonctions indéfiniment dérivables à celles des fonctions holomorphes dans un demi-plan, et ceci, par l'intermédiaire de l'intégrale de Laplace.

En améliorant la méthode de Denjoy, Carleman a pu donner une réponse définitive à cette question, donnant ainsi une con-

dition nécessaire et suffisante pour qu'une classe des fonctions soit quasi-analytique (quasi-analytique *D*). Une démonstration élégante du théorème de Carleman fut donnée par Ostrowski.

S. Bernstein et de la Vallée-Poussin ont montré l'importance des séries de Fourier dans l'étude de la quasi-analyticite. S. Bernstein a pu ainsi donner une nouvelle démonstration du théorème de Carleman.

L'auteur de ces lignes a pu, grace à des considérations portant sur la rectification des suites, donner des conditions sur l'équivalence de deux classes quasi-analytiques (lorsque les fonctions sont périodiques) et des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une classe de fonctions ne contienne que des fonctions analytiques. Ainsi furent résolus quelques problèmes (un partiellement, l'autre complétement) posés par Carleman.

D'autre part, en introduisant les séries de Fourier, il a pu exprimer la condition (nécessaire et suffisante) de quasi-analyticité par des inégalités pourtant sur les séries de Fourier, definir de nouvelles classes quasi-analytiques, et donner également des propriétés des fonctions intégrables, au sens de Lebesgue, et dont les séries de Fourier sont lacunaires. Les méthodes de l'auteur, du moins, l'idée de ces méthodes, semblent bien adaptées au sujet, puisqu'elles fournissent des théorèmes qui, à un certain point de vue, ne peuvent pas être améliorés.

Nous venons d'indiquer les grandes lignes de ce que contient ce livre.

Le Professeur Natanson a bien voulu se charger de la rédaction de ce cours. Il s'est acquit de sa charge avec beaucoup d'élégance, et a mis toute sa conscience à faire ressortir les difficultés des démonstrations. Qu'il me soit permis de le remercier bien cordialement.

J'adresse enfin mes remerciements à l'Union des Editions Scientifiques et Techniques qui a bien voulu se charger de l'édition de ce cours.

S. Mandelbrojt

Professeur à l'Université de Clermont.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Прежде всего я позволю себе выразить благодарность Научно-исследовательскому институту математики и механики при Ленинградском государственном университете за двойную оказанную мне честь: приглашение прочесть курс в его стенах и издание этого курса.

Нужно ли говорить, что удовольствие, испытанное мною при изложении некоторых новейших исследований о квазианалитических классах функций, было тем более живым, что среди лиц, слушавших меня, находился один из творцов этой ветви анализа — академик С. Н. Бернштейн, к которому я питаю чувства восхищения и благодарности.

Первым, кто поставил задачу, связанную с интересующей нас теорией, был Борель, открывший моногенные функции (хотя он сам назвал их функциями моногенными в смысле Коши!). Его способ продолжения аналитических функций через купюры приводит к классам функций, обладающим свойством квазианалитичности, как мы понимаем ее в этой книге.

В 1912 году Адамар поставил следующий вопрос: *какова должна быть последовательность* $\{m_n\}$ *для того, чтобы всякая функция, удовлетворяющая в некотором промежутке неравенствам*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n$$

и исчезающая вместе со своими производными в некоторой точке этого промежутка, была тождественно равна нулю?

Проблема квазианалитичности (Δ) была, таким образом, поставлена.

С другой стороны, С. Н. Бернштейн был первым, кто ввел классы квазианалитические (I), т. е. такие классы функций, когда всякая функция подобного класса, исчезающая на произвольно малом промежутке, тождественно равна нулю. Классы С. Н. Бернштейна характеризуются свойствами, связанными с наилучшими приближениями.

Ответ на вопрос Адамара был дан впервые Данжуа. Важная идея Данжуа состояла в сведéнии изучения бесконечно

дифференцируемых функций к изучению функций, голоморфных на полуплоскости. Это было достигнуто с помощью трансформации Лапласа.

Усовершенствовав метод Данжуа, Карлеман смог дать окончательное решение этого вопроса. Им было дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы класс функций был квазианалитическим [квазианалитический (Δ)]. Элегантное доказательство теоремы Карлемана было дано Островским.

С. Н. Бернштейн и де ла Валле-Пуссен выяснили важную роль рядов Фурье в изучении квазианалитичности. С их помощью С. Н. Бернштейн дал новое доказательство теоремы Карлемана.

Автор этих строк, пользуясь понятием „исправленной последовательности", дал условия эквивалентности двух квазианалитических классов (для случая периодических функций) и условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данный класс состоял лишь из аналитических функций. Таким образом были решены две задачи (одна частично, другая полностью), поставленные Карлеманом.

С другой стороны, рассматривая ряды Фурье, автор установил необходимое и достаточное условие квазианалитичности, выразив его с помощью неравенств, относящихся к коэфициентам Фурье, определил новые квазианалитические классы и вместе с тем изучил свойства суммируемых функций с лакунарными рядами Фурье. Методы автора, во всяком случае идеи этих методов, кажутся весьма отвечающими существу вопроса, поскольку они приводят к теоремам, в некотором смысле не могущим быть улучшенными.

Мы указали основные вопросы, рассматриваемые в настоящей книге.

Проф. И. П. Натансон любезно согласился взять на себя редактирование этого курса. Он выполнил эту работу весьма искусно, приложив все усилия к тому, чтобы выявить с полной отчетливостью все детали доказательств. Позволю себе сердечно поблагодарить его.

В заключение я благодарю Ленинградское отделение Объединенного научно-технического издательства, которое взяло на себя труд издания этого курса.

С. Мандельбройт

профессор Клермонского университета.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРОБЛЕМА ВАТСОНА. ТЕОРЕМЫ КАРЛЕМАНА

§ 1. Основные понятия

1. В теории аналитических функций комплексной переменной весьма важными являются следующие две теоремы Мерэ-Вейерштрасса:

I. *Аналитическая функция однозначно определяется теми значениями, которые она и ее производные имеют в произвольной регулярной точке.*

II. *Аналитическая функция однозначно определяется своими значениями в точках последовательности $z_1, z_2, \ldots$, сходящейся к предельной регулярной точке z_0.*

Теорема II может быть установлена как следствие теоремы I. В самом деле, если

$$\lim z_k = z_0$$

и точка z_0 регулярна, то вблизи этой точки будет

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

откуда

$$a_k = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^k}.$$

Так как приближение z к z_0 можно осуществлять, заставляя z пробегать точки $z_1, z_2, \ldots$, то значения $f(z_1), f(z_2), \ldots$ определяют коэфициенты a_k. В силу того, что $a_k = k! f^{(k)}(z_0)$, дело приводится к теореме I.

В частности аналитическая функция полностью определяется своими значениями на сколь угодно малой дуге кривой, лежащей в области существования функции.

Весьма естественный вопрос о том, в какой мере теоремы I и II характерны для класса аналитических функций, рассматривался в диссертации Э. Бореля, где был введен более широкий класс — класс моногенных функций со сходными свойствами. В дальнейшем мы, однако, оставим эти исследования в стороне, ограничиваясь рассмотрением лишь вещественных функций вещественной переменной.

2. Определение. *Вещественная функция $f(x)$, заданная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, называется аналитической, если существует функция комплексной переменной $f(z)$, голоморфная в некоторой области (D), внутри* [1]) *которой расположен отрезок (a, b), и совпадающая с $f(x)$ в точках (a, b).*

Замечание. Можно дать определение аналитической функции и в чисто вещественных терминах. Именно, *функция $f(x)$, — аналитическая на замкнутом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если вокруг каждой точки его x_0 она разлагается в ряд Тэйлора:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Эквивалентность обоих определений легко установить. Действительно, то обстоятельство, что функция, аналитическая в первом смысле, будет такою и во втором, вполне тривиально. Обратно, если имеет место разложимость в ряд Тэйлора около каждой точки отрезка (a, b), то каждую точку его x_0 можно окружить кругом (C_{x_0}), в котором ряд Тэйлора сходится, и функция $f(z)$, определенная как сумма этого ряда, голоморфна. На основании известной теоремы Бореля-Лебега о покрытии можно указать конечное число кругов (C_x), покрывающих отрезок (a, b). В своей совокупности эти круги составляют область (D), в которой функция $f(z)$ голоморфна.

3. Теорема. *Если функция $f(x)$ аналитическая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то существует постоянная K такого рода, что при любом x из $a \leqslant x \leqslant b$ будет*

$$|f^{(n)}(x)| < K^n n! \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Доказательство. Обозначим через (C) произвольный спрямляемый контур, лежащий целиком *внутри* области (D)

---

[1]) Так что расстояния точек (a, b) от границы (D) имеют *положительный* минимум.

и охватывающий отрезок (a, b). В силу интегральной формулы Коши

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{(C)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz.$$

Если длина контура (C) есть l, $\max |f(z)|$ на (C) есть M и минимум расстояний точек отрезка (a, b) от точек контура (C) есть δ, то

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Ml}{2\pi} \cdot \frac{n!}{\delta^{n+1}}.$$

Если через K обозначить любое число, большее чем $\frac{1}{\delta}$ и чем $\frac{Ml}{2\pi\delta^2}$, то будем иметь

$$\frac{Ml}{2\pi\delta^{n+1}} < K^n,$$

откуда следует справедливость теоремы.

Обратная теорема. *Если функция $f(x)$ задана для $a \leqslant x \leqslant b$, имеет в каждой точке этого отрезка все производные и если существует число K такое, что при всех x из $a \leqslant x \leqslant b$ будет*

$$|f^{(n)}(x)| < K^n n!, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то функция $f(x)$ — аналитическая.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка промежутка $a \leqslant x \leqslant b$. Если x — любая другая точка из (a, b), подчиненная условию

$$|x - x_0| < \frac{1}{K},$$

то, на основании формулы Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа, будет

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пользуясь оценкой для производной, найдем

$$\left| \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n \right| < \frac{K^n n!}{n!}|x-x_0|^n = \big(K|x-x_0|\big)^n.$$

В силу выбора точкн x правая часть неравенства бесконечно мала вместе с $\frac{1}{n}$, так что функция $f(x)$ разлагается

в ряд Тэйлора около любой точки x_0 отрезка (a, b). Значит, $f(x)$ — аналитическая функция.

4. Доказанные теоремы, естественно, приводят к следующему определению.

Определение. *Будем называть классом* $C_{\{m_n\}}$, *отвечающим последовательности чисел* $m_1, m_2, \ldots$, *множество всех функций* $f(x)$, *заданных на отрезке* $a \leqslant x \leqslant b$, *имеющих все производные и для каждой из которых существует постоянная* K, *такая, что при всех* x *из* (a, b) *будет*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Соображения n° 3 устанавливают, что класс $C_{\{n!\}}$ совпадает с классом аналитических функций.

5. Проблема Адамара. В 1912 году Ж. Адамаром был поставлен следующий вопрос: *каковы должны быть числа* $\{m_n\}$, *чтобы для всяких двух функций класса* $C_{\{m_n\}}$ $f(x)$ *и* $\varphi(x)$, *для которых в некоторой точке* x_0 *будет*

$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

было также

$$f(x) \equiv \varphi(x)? \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

Согласно сказанному выше, это во всяком случае так, если

$$m_n \leqslant n!$$

Но вопрос состоит в установлении общего критерия для $\{m_n\}$.

Замечание. Классы $C_{\{m_n\}}$ — *аддитивны*. Иначе говоря, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат к $C_{\{m_n\}}$, то и сумма и разность их принадлежат этому классу. В силу этого проблема Адамара может быть сформулирована и в такой форме:

Каковы должны быть числа $\{m_n\}$, *чтобы всякая функция* $f(x)$ *из класса* $C_{\{m_n\}}$, *для которой в некоторой точке* x_0 *будет*

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

тождественно равнялась нулю:

$$f(x) \equiv 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b)? \tag{4}$$

Определение 1. Класс $C_{\{m_n\}}$ называется *квазианалитическим* Δ, если из (1) вытекает (2) для всякой пары функций этого класса.

Это определение относится к классам бесконечно дифференцируемых функций. Сходное определение можно дать и для случая произвольных функций.

Определение 2. Класс функций C, заданных на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, называется *квазианалитическим* I, если всякие две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ этого класса, совпадающие в некоторой части (α, β) промежутка (a, b)

$$f(x) = \varphi(x), \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

необходимо совпадают и во всем промежутке (a, b).

(Классы, квазианалитические I, были введены впервые академиком С. Н. Бернштейном с помощью теории наилучшего приближения.)

Очевидно, всякий класс функций, квазианалитический Δ, будет в то же время и квазианалитическим I. Обратное, однако, не имеет места.

Заметим еще, что интерес представляют именно квазианалитические *классы* функций, а никак не отдельные, входящие в них функции. Это замечание становится особенно ясным, если отметить, что для всякой функции $f(x)$ можно указать содержащий ее квазианалитический класс. Рассмотрим, например, наряду с функций $f(x)$ класс функций вида

$$f(x) + Ke^x,$$

где K — произвольная постоянная. Функция $f(x)$ входит в этот класс при $K = 0$. Если две функции этого класса совпадают хоть в одной точке, то они тождественны.

С помощью понятия квазианалитичности проблема Адамара формулируется так: *каковы должны быть числа* $\{m_n\}$, *чтобы класс* $C_{\{m_n\}}$ *был квазианалитический* Δ?

Проблемой Адамара впервые занимался А. Данжуа.[1]) Он установил квазианалитичность класса $C_{\{m_n\}}$ для случаев:

$$m_n = n!\,(\ln n)^n; \quad m_n = n!\,(\ln n)^n (\ln \ln n)^n; \ldots$$

и доказал вообще, что это так всякий раз, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} = \infty,$$

---

[1]) Denjoy, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, t. 173 (1921) p. 1329.

если только последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Результаты Данжуа были обобщены Т. Карлеманом, [1]) который установил также и точные необходимые и достаточные условия квазианалитичности Δ.

§ 2. Проблема Ватсона. Теорема Карлемана

6. Проблема Адамара тесно связана с проблемой теории аналитических функций, известной под названием проблемы Ватсона.

Проблема Ватсона. *Пусть C есть круг $|z-1|<1$. Какие условия нужно наложить на последовательность чисел m_1, $m_2, \ldots$, чтобы всякая функция $f(z)$, голоморфная внутри круга (C) и подчиненная условию*

$$|f(z)| \leqslant m_n |z|^n \qquad (n=1,\ 2, \ldots), \tag{5}$$

была необходимо тождественно равной нулю:

$$f(z) \equiv 0 \qquad (|z-1|<1)? \tag{6}$$

Всякое условие, наложенное на последовательность $\{m_n\}$, будет *достаточным*, если для *любой* голоморфной функции $f(z)$ из (5) следует (6). Условие *необходимо*, если при невыполнении его существует *хоть одна* функция $f(z)$, подчиненная неравенствам (5) и неравная тождественно нулю.

7. Ответ на проблему Ватсона дается теоремой Карлемана. Для ее формулировки введем следующую функцию $\mathrm{T}(r)$, определенную для $r>0$:

$$\mathrm{T}(r) = \overline{\operatorname{borne}}_{(n \geqslant 1)} \frac{r^n}{m_n}.$$

(возможно, что $\mathrm{T}(r)=\infty$.) С помощью этой функции упомянутая теорема формулируется следующим образом.

Теорема Карлемана. *Для того, чтобы из (5) следовало (6), необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\int_1^\infty \frac{\ln \mathrm{T}(r)}{r^2}\, dr = \infty. \tag{7}$$

---

[1]) Carleman. *Les fonctions quasi-analytiques*, Paris (1926).

(В этой форме теорема Карлемана была высказана А. Островским;[1]) у самого Карлемана вместо $T(r)$ рассматривается функция $A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{m^{2n}}$.)

8. Замечание. В дальнейшем мы ограничимся изучением случая, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n} = \infty. \tag{8}$$

Если условие (8) не выполнено, то теорема тривиальна. В самом деле, в этом случае можно указать частичную последовательность $\{m_{n_k}\}$ и постоянную A такого рода, что

$$\sqrt[n_k]{m_{n_k}} < A.$$

В таком случае

$$m_{n_k} < A^{n_k},$$

и для $r > A$ будет

$$\lim \frac{r^{n_k}}{m_{n_k}} \geqslant \lim \left(\frac{r}{A}\right)^{n_k} = \infty,$$

так что при $r > A$ будет

$$T(r) = \infty,$$

и условие (7) выполнено. С другой стороны, условие (5) дает

$$|f(z)| \leqslant m_{n_k} |z|^{n_k} < |Az|^{n_k},$$

так что для $|z| < \frac{1}{A}$ (и значит для всех z) функция $f(z)$ равна нулю.

Итак, если $\sqrt[n]{m_n}$ не стремится к бесконечности, то и условие (7) выполнено, и из (5) следует (6), так что теорема справедлива.

9. Из замечания n° 8 следует, что при всяком фиксированном r будет:

$$\lim \frac{r^n}{m_n} = 0,$$

---

[1]) Ostrowski, *Acta Mathematica*, t. 53 (1930).

так что в определении $T(r)$ можно заменить знак $\overline{\text{borne}}$ знаком max, ибо этот максимум *достигается* при некотором n. Это значение n мы будем обозначать через $N(r)$, так что

$$T(r) = \frac{r^{N(r)}}{m_{N(r)}}.$$

Если $T(r)$ достигается при нескольких значениях n, то через $N(r)$ мы будем обозначать наибольшее из них.

Функция $T(r)$ монотонно возрастает, непрерывна и стремится к бесконечности вместе с r.

Для доказательства непрерывности $T(r)$ (прочие два свойства очевидны) мы установим сначала, что функция $N(r)$ не убывает. Действительно, пусть $r_1 < r_2$; положим $N(r_1) = n_1$, $N(r_2) = n_2$; тогда

$$\frac{r_1^{n_1}}{m_{n_1}} \geqslant \frac{r_1^{n_2}}{m_{n_2}}; \quad \frac{r_2^{n_2}}{m_{n_2}} \geqslant \frac{r_2^{n_1}}{m_{n_1}},$$

откуда

$$r_1^{n_1} r_2^{n_2} \geqslant r_1^{n_2} r_2^{n_1},$$

и значит,

$$(n_1 - n_2) \ln \frac{r_1}{r_2} \geqslant 0,$$

так что $n_1 \leqslant n_2$. Установив монотонность $N(r)$, уже легко доказать непрерывность $T(r)$. В самом деле, если

$$\lim r_k = r_0,$$

то множество целых чисел $N(r_k)$ ограничено и, стало-быть, хоть одно из них повторяется бесчисленное множество раз. Если это „бесконечно-кратное“ значение есть l, то для бесчисленного множества r_k будет

$$\frac{r_k^l}{m_l} \geqslant \frac{r_k^n}{m_n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

откуда и в пределе при всех n будет

$$\frac{r_0^l}{m_l} \geqslant \frac{r_0^n}{m_n},$$

так что $T(r_0) = \frac{r_0^l}{m_l}$, откуда, в связи с монотонностью $T(r)$, следует ее непрерывность.

10. Напомним некоторые факты, которые понадобятся ниже. Если $f(\theta)$ — суммируемая функция, заданная на промежутке $(0;\ 2\pi)$, то *интеграл Пуассона*

$$F(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi \tag{9}$$

представляет собой гармоническую в круге $|z|<1$ функцию переменных x и y, где положено $z=re^{i\theta}=x+iy$.

При этом в каждой точке θ_0, в которой $f(\theta)$ непрерывна, будет

$$\lim F(r,\ \theta)=f(\theta_0).\quad (r\to 1,\ \theta\to\theta_0)$$

В частности, если $f(r,\ \theta)$ есть функция, гармоническая (относительно переменных x и y) внутри круга $|z|<1$ и непрерывная во всем круге $|z|\leqslant 1$, то (в силу единственности решения задачи Дирихле) она представляется интегралом (9).

Отсюда следует, что, если $F(z)$ голоморфна в круге $|z|\leqslant 1$ (включая контур) и нигде в нем не обращается в нуль, то и $\ln F(z)$ есть голоморфная там же функция, и для его вещественной части будет

$$\ln|F(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|F(e^{i\varphi})|\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi. \tag{10}$$

В частности при $r=0$

$$\ln|F\ (0)|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|F\ (e^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Это равенство справедливо, если $F(z)\neq 0$ нигде в круге $|z|\leqslant 1$. Если же $F(z)$ может обращаться в нуль в этом круге, то последнее равенство заменяется *неравенством Иенсена*

$$\ln|F(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|F(e^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Наконец, заметим, что неравенству Иенсена можно дать вид:

$$\ln|F(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|F(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \tag{11}$$

где r — любое число, равное или меньшее единицы. Неравенство (11) справедливо и в том случае, когда $F(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ (исключая контур), но тогда должно быть $r < 1$.

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к доказательству теоремы Карлемана, ведущемуся по способу А. Островского, несколько видоизмененному С. Мандельбройтом.

11. Достаточность условия Карлемана. Допустим, что существует функция $f(z)$, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая условиям (5) n° 6. Мы покажем, что тогда интеграл (7) имеет конечное значение.

В силу голоморфности $f(z)$ существуют сколь угодно малые вещественные значения α, при которых $f(\alpha) \neq 0$. С другой стороны, $f(z)$ стремится к нулю вместе с z. Поэтому можно указать столь малое α, чтобы было при всех θ

$$f(\alpha) \neq 0; \quad |f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| < 1.$$

Это α мы фиксируем и не будем менять до конца рассуждения.

Неравенства (5) дают:

$$|f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| \leqslant m_n \alpha^n \cdot |1 + e^{i\theta}|^n$$

или, так как $|1 + e^{i\theta}| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$, то

$$|f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| \leqslant m_n \left(2\alpha \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)^n.$$

Так как n — любое, то

$$|f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| \leqslant \min\left[m_n \left(2\alpha \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)^n\right]$$

(этот минимум достигается, так как $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$).

Отсюда

$$|f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{\max\left[\dfrac{1}{m_n \cdot \left(2\alpha \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)^n}\right]}$$

и, в силу определения функции $T(r)$,

$$|f(\alpha + \alpha e^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{T\left(\dfrac{1}{2\alpha \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)},$$

так что окончательно:

$$\ln|f(\alpha+\alpha e^{i\theta})| \leqslant -\ln T\left(\frac{1}{2\alpha\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right). \tag{12}$$

Применим неравенство Иенсена (11) к функции $F(z) = f(\alpha+\alpha z)$, голоморфной в круге $|z|<1$.

Обозначая через R любое число, меньшее единицы, имеем:

$$\ln|f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\alpha+\alpha R e^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{13}$$

В круге $|z-\alpha|<\alpha$ функция $|f(z)|$ меньше единицы, так что подинтегральная функция в неравенстве (13) отрицательна. Поэтому неравенство (13) лишь усилится, если интеграл распространить не на весь промежуток $(0,2\pi)$, а на некоторую его часть. В частности

$$\ln|f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi-\eta_1} \ln|f(\alpha+\alpha R e^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+\eta_2}^{2\pi} \ln|f(\alpha+\alpha R e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{14}$$

Но в области, получающейся из круга $|z-\alpha|<\alpha$ удалением сектора, ограниченного лучами $\theta=\pi-\eta_1$ и $\theta=\pi+\eta_2$, функция $f(z)$ голоморфна. Поэтому в неравенстве (14) можно устремить R к 1 и перейти к пределу [1]), что дает

$$\ln|f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi-\eta_1} \ln|f(\alpha+\alpha e^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+\eta_2}^{2\pi} \ln|f(\alpha+\alpha e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{15}$$

В неравенстве (15) числа η_1 и η_2 можно взять сколь угодно малыми. Так как правая часть (15) убывает вместе с η_1 и η_2, то можно перейти к пределу, устремив эти числа к нулю и получив сходящийся интеграл:

$$\ln|f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\alpha+\alpha e^{i\theta})|\,d\theta.$$

---

[1]) На контуре круга $|z-\alpha|=\alpha$ вне дуги $(\pi-\eta_1,\ \pi+\eta_2)$ может лежать лишь конечное число нулей $f(z)$. Каждый из них представляет логарифмическую особенность $\ln|f(z)|$, так что интегралы неравенства (15) существуют. Для проведения предельного перехода от (14) к (15) нужно предварительно выделить эти нули $f(z)$ с помощью секторов. Так как интегралы, распространенные на достаточно малые дуги, суть сколь угодно малы, то неравенство (15) окажется в силе.

Отсюда и из неравенства (12) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)d\theta \leqslant -\ln|f(\alpha)|, \tag{16}$$

так что существует [1]) интеграл

$$\int_0^{2\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)d\theta, \tag{17}$$

а с ним и интеграл

$$\int_0^{\pi} \ln T\left(\frac{1}{2\alpha\cos\frac{\theta}{2}}\right)d\theta. \tag{18}$$

Но интеграл (7) сходится или расходится одновременно с интегралом (18). Действительно, если в интеграле (18) положить

$$\frac{1}{2\alpha\cos\frac{\theta}{2}} = r,$$

то интеграл примет вид:

$$2\int_{\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{4\alpha^2r^2-1}}\,dr. \tag{19}$$

При r, стремящемся к бесконечности, множитель

$$\frac{r}{\sqrt{4\alpha^2r^2-1}}$$

имеет конечный предел и, стало-быть, не влияет на сходимость интеграла. Но, откидывая этот множитель, мы приходим как раз к интегралу (7) [2]). Таким образом достаточность условия Карлемана доказана.

---

[1]) Неравенство (16) гарантирует, что интеграл (17) неравен $+\infty$. Но и $-\infty$ он равняться не может, хотя бы потому, что

$$\ln T\left(\frac{1}{2\alpha\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) \geqslant \ln T\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

[2]) При рассмотрении *сходимости* интеграла (7) безразлично, каков его нижний предел, лишь бы он был больше нуля.

12. Необходимость условия Карлемана. Как мы видели в n° 11, интеграл (7) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_0^{2\pi} \ln \mathrm{T}\left(\frac{1}{2\alpha\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) d\theta,$$

[равным удвоенному интегралу (18)]. При этом величина α безразлична [ибо влияет лишь на нижний предел интеграла (7)]; в частности можно считать $\alpha = 1$.

Таким образом, допустив конечность интеграла (7), мы можем утверждать, что функция

$$\ln \mathrm{T}\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)$$

суммируема в промежутке $(0, 2\pi)$. Но тогда интеграл Пуассона

$$Q(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \mathrm{T}\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \quad (20)$$

представляет функцию, гармоническую в круге $r < 1$. Положим

$$P(z) = Q(z-1).$$

Это — вещественная гармоническая функция, заданная в круге $|z-1| < 1$. Обозначим ее сопряженную функцию через $P_1(z)$ и положим

$$f(z) = e^{-\{P(z)+iP_1(z)\}}.$$

Это — голоморфная в круге $|z-1| < 1$ функция, нигде не равная нулю. Вместе с тем она удовлетворяет неравенствам (5). Действительно, неравенства (5)

$$|f(z)| \leqslant m_n |z|^n$$

можно представить в форме:

$$\ln|f(z)| \leqslant \ln m_n + n\ln|z|$$

или, заменив z на $1+re^{i\varphi}$:

$$-Q(re^{i\varphi}) \leqslant \ln m_n + n\ln|1+re^{i\varphi}|. \quad (21)$$

Воспользовавшись выражением (20), а также равенствами:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta;$$

$$\ln|1+re^{i\varphi}|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1+e^{i\varphi}|\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta$$

[первое из них тривиально, а второе есть следствие формулы (10) n° 10], мы можем подлежащее доказательству неравенство (21) представить в форме:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\ln T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)+\ln m_n+n\ln|1+e^{i\theta}|\right\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta\geqslant 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\cdot m_n\cdot|1+e^{i\theta}|^n\right\}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta\geqslant 0. \quad (22)$$

Для доказательства этого последнего неравенства заметим, что $2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=|1+e^{i\theta}|$, так что при всех n будет

$$T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\geqslant\frac{1}{m_n|1+e^{i\theta}|^n},$$

откуда и следует (22). Необходимость условия Карлемана доказана.

13. Другая форма проблемы Ватсона. Нам понадобится в дальнейшем другая формулировка проблемы Ватсона и решающей ее теоремы Карлемана. Именно, сделаем преобразование комплексной плоскости, положив

$$z=\frac{1}{\zeta}.$$

В этом случае неравенство

$$|z-1|\leqslant 1$$

принимает вид:

$$|\zeta-1|\leqslant|\zeta|$$

или, если положить $\zeta = \xi + \eta i$, то

$$\xi \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому круг $|z-1| \leqslant 1$ при указанном преобразовании переходит в полуплоскость $\Re(\zeta) \geqslant \frac{1}{2}$. Если положить $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F(\zeta)$, то доказанная выше теорема Карлемана формулируется так: *для того, чтобы всякая функция $F(\zeta)$, голоморфная в полуплоскости $\Re(\zeta) > \frac{1}{2}$ и удовлетворяющая неравенствам*

$$|F(\zeta)| \leqslant \frac{m_n}{|\zeta|^n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

тождественно равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr$$

расходился.

14. Замечание. Рассмотрим одновременно с последовательностью $\{m_n\}$ также последовательность $\{m_n^*\}$, где

$$m_n^* = K^n m_n \qquad (K > 0;\ n = 1, 2, \ldots),$$

и введем соответствующую функцию

$$T^*(r) = \overline{\text{borne}}\, \frac{r^n}{m_n^*}.$$

В таком случае

$$T^*(r) = T\left(\frac{r}{K}\right),$$

и следовательно, интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr; \quad \int_1^\infty \frac{\ln T^*(r)}{r^2}\, dr$$

сходятся или расходятся одновременно, и последовательности $\{m_n\}$ и $\{m_n^*\}$ ведут себя в отношении проблемы Ватсона одинаковым образом.

§ 3. Условие квазианалитичности класса $C_{\{m_n\}}$

15. В дальнейшем нам будет весьма полезна следующая лемма[1]).

Лемма. *Если существует функция $\varphi(x)$, заданная в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, не тождественная нулю, бесконечно дифференцируемая и такая, что*

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$
$$\varphi^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

то существует также функция $\psi(x)$, заданная на том же промежутке и удовлетворяющая следующим пяти условиям:

1) $\psi(x)$ *не равна тождественно нулю;*
2) $\psi(x)$ *не отрицательна;*
3) $\psi(x) \equiv \psi(1-x)$;
4) $\psi^{(n)}(0)=\psi^{(n)}(1)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$;
5) $|\psi^{(n)}(x)| \leqslant (8e)^n m_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Положим

$$\psi_1(x)=\int_0^x dt \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Эта функция, очевидно, обладает свойствами

$$\psi_1^{(n)}(0)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$
$$|\psi_1^{(n)}(x)| \leqslant m_{n-2} \qquad (n=3, 4, \ldots)$$

и, кроме того, она не равна тождественно нулю.

Пусть далее

$$\psi_2(x)=\psi_1(4x-4x^2).$$

Когда x пробегает промежуток $(0, 1)$, то $4x-4x^2$ также пробегает этот промежуток $(0, 1)$, так что $\psi_2(x)$ не равна тождественно нулю. Кроме того, $\psi_2(x)=\psi_2(1-x)$, так что

---

[1]) Эта лемма принадлежит нам (S. Mandelbrojt, *Journal de l'École Polytechnique*, 2-e série C, n° 32, p. 227). В ее доказательство внесены некоторые изменения, предложенные проф. Р. О. Кузьминым. Благодаря этому сократилось доказательство и несущественно изменилась оценка [множитель $(8e)^n$ вместо 16^n].

$\psi_2(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 3). Покажем, что $\psi_2(x)$ удовлетворяет также условию 4). Положим

$$y = 4x(1-x),$$

так что

$$\psi_2(x) = \psi_1(y).$$

Если положить $y_1 = y' = 4 - 8x$; $y_2 = y'' = -8$, то с помощью полной индукции легко проверить справедливость равенства

$$\psi_2^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2^k k!} \psi_1^{(n-k)}(y) y_1^{n-2k} y_2^k, \quad (23)$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ означает целую часть числа $\frac{n}{2}$.

Так как при $x=0$ и при $x=1$ будет $y=0$, то, в силу равенства $\psi_1^{(n)}(0)=0$, функция $\psi_2(x)$ удовлетворяет условию 4) леммы.

Кроме того для этой функции при $n \geqslant 3$ справедлива оценка

$$|\psi_2^{(n)}(x)| \leqslant (4e)^n m_{n-2}. \quad (24)$$

Для доказательства этого предложения, обозначим $\max|\psi_1^{(p)}(x)|$ через M_p и заметим, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ будет $|y_1| \leqslant 4$ и $|y_2| = 8$, так что из (23) следует оценка

$$|\psi_2^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2^k k!} 4^{n-2k} 8^k M_{n-k}$$

или

$$|\psi_2^{(n)}(x)| \leqslant 4^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{4^k k!} M_{n-k}. \quad (25)$$

С другой стороны, из равенства

$$\psi_1^{(n-k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} \psi_1^{(n)}(t)\, dt.$$

и из оценки для $\psi_1^{(n)}(x)$ следует, что

$$M_{n-k} \leqslant \frac{m_{n-2}}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1}\, dt = \frac{m_{n-2}}{k!},$$

так что (25) дает неравенство:

$$|\psi_2^{(n)}(x)| \leqslant 4^n m_{n-2} \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{4^k (k!)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4^n m_{n-2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k}}{4^k (k!)^2}.$$

Так как $(2k)! < (2^k k!)^2 = 4^k (k!)^2$, то отсюда

$$|\psi_2^{(n)}(x)| < 4^n m_{n-2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k}}{(2k)!}.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k}}{(2k)!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n,$$

значит

$$|\psi_2^{(n)}(x)| < (4e)^n m_{n-2}$$

и, таким образом, неравенство (24) доказано.

Функция $\psi_2(x)$ не удовлетворяет, однако, условию 2) леммы. Желая получить неотрицательную функцию, положим

$$A(x) = [\psi_2(x)]^2.$$

Она, очевидно, удовлетворяет первым трем условиям леммы. В силу формулы Лейбница

$$A^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \psi_2^{(k)}(x)\, \psi_2^{(n-k)}(x), \tag{26}$$

так что $A(x)$ удовлетворяет и четвертому условию. Остается провести оценку для $A^{(n)}(x)$.

Для этого разложим $\psi_2(x)$ в ряд Фурье. Если мы положим $\theta(y) = \psi_2\left(\frac{y+\pi}{2\pi}\right)$, то $\theta(y)$ окажется периодической чет-

ной функцией, заданной в промежутке $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$. Стало-быть,

$$\theta(y) = \frac{d_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} d_q \cos qy, \quad \left(d_q = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(y) \cos qy dy\right)$$

откуда, полагая $y = 2\pi x - \pi$,

$$\psi_2(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} d_q \cos(2\pi q x), \tag{27}$$

где

$$d_q = 2 \int_0^1 \psi_2(x) \cos(2\pi q x)\, dx. \tag{28}$$

Диференцируя (27) l раз, найдем[1]):

$$\psi_2^{(l)}(x) = (2\pi)^l \sum_{q=1}^{\infty} \pm d_q q^l \begin{matrix}\cos(2\pi q x)\\ \sin(2\pi q x)\end{matrix},$$

так что

$$|\psi_2^{(l)}(x)| \leqslant (2\pi)^l \sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^l.$$

Отсюда и из формулы (26) следует неравенство:

$$|A^{(n)}(x)| \leqslant (2\pi)^n \left[2\left(\frac{|d_0|}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} |d_q|\right)\left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^n\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^k\right)\left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^{n-k}\right)\right]. \tag{29}$$

Применим теперь к множителю $\sum |d_q| q^k$ известное неравенство Гёльдера

$$\sum u_q v_q \leqslant \left(\sum u_q^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum v_q^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1;\ u_q \geqslant 0,\ v_q \geqslant 0\right),$$

---

[1]) Не зная, что именно должно стоять под знаком суммы — косинус или синус, мы и впредь будем употреблять это обозначение.

положив

$$u_q = |d_q|^{\frac{k}{n}} q^k; \quad v_q = |d_q|^{\frac{n-k}{n}}; \quad \alpha = \frac{n}{k}; \quad \beta = \frac{n}{n-k}.$$

Это дает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^k \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^n\right)^{\frac{k}{n}} \cdot \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q|\right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Аналогичио найдем, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^{n-k} \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^n\right)^{\frac{n-k}{n}} \cdot \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q|\right)^{\frac{k}{n}},$$

и неравенство (29) дает оценку:

$$|A^{(n)}(x)| \leqslant (2\pi)^n \left\{2\left(\frac{|d_0|}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} |d_q|\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_q|\right)\right\} \varepsilon \left(\sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^n\right).$$

Если положить

$$\frac{|d_0|}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} |d_q| = C,$$

то мы приходим к неравенству

$$|A^{(n)}(x)| \leqslant C(4\pi)^n \sum_{q=1}^{\infty} |d_q| q^n. \tag{30}$$

С другой стороны, интегрируя (28) по частям l раз и замечая, что $\psi_2^{(n)}(0) = \psi_2^{(n)}(1) = 0$, мы найдем:

$$(2\pi q)^l d_q = \pm 2 \int_0^1 \psi_2^{(l)}(x) \begin{matrix}\cos(2\pi q x)\\ \sin(2\pi q x)\end{matrix} dx,$$

так что в силу оценки (24) при $l \geqslant 3$ будет:

$$(2\pi q)^l |d_q| \leqslant 2 \cdot (4e)^l m_{l-2}$$

или для $n \geqslant 1$

$$(2\pi q)^{n+2} |d_q| \leqslant 2 \cdot (4e)^{n+2} m_n,$$

так что в силу (30)

$$|A^{(n)}(x)| \leqslant \frac{(4e)^2 C}{2\pi^2}(8e)^n m_n \cdot \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2}\right) = C_1 \cdot (8e)^n m_n.$$

Поэтому функция

$$\psi(x) = \frac{A(x)}{C_1}$$

удовлетворяет всем условиям леммы.

16. Отметим в целях дальнейшего некоторые простые факты, относящиеся к теории *трансформации Лапласа.*

Пусть $f(x)$ непрерывная функция вещественной переменной x, заданная для $x \geqslant 0$. Пусть, далее, существует положительная постоянная c, такая, что

$$|f(x)| \leqslant e^{cx}.$$

В таком случае интеграл

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-xz}\, dx$$

существует для любого z, для которого $\Re(z) > c$, и представляет собою функцию, голоморфную в области $\Re(z) > c$. Функция $\Phi(z)$ есть Лапласова трансформация функции $f(x)$.

Теорема. *Пусть функция $\Phi(z)$ голоморфна в области $\Re(z) \geqslant c > 0$ и удовлетворяет неравенству*

$$|\Phi(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \qquad (\delta > 0). \tag{31}$$

В таком случае интеграл

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(z)\, e^{xz} dz \tag{32}$$

существует при всяком вещественном неотрицательном x, является непрерывной функцией от x, и между функциями $\Phi(z)$ и $f(x)$ существует соотношение

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} f(x)\, dx \qquad (\Re(z) > c). \tag{33}$$

Доказательство. Существование интеграла (32) вытекает из оценки (31) и равенства $|e^{xz}| = e^{cx}$.

Непрерывность функции $f(x)$, следует из того, что интеграл

$$\int_{c-in}^{c+in} \Phi(z)\, e^{xz} dz,$$

являющийся, очевидно, непрерывной функцией от x (ибо подинтегральное выражение непрерывно относительно x и z), стремится при $n \to \infty$ к $f(x)$ *равномерно* относительно x, пока x изменяется в произвольном *конечном* промежутке.

Переходя к установлению формулы (33), возьмем произвольное z, где $\Re(z) > c$. Согласно интегральной формуле Коши будет

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt,$$

где путь интегрирования (K) состоит из полуокружности $|t-c| = R$ $[\Re(t) \geqslant c]$ и отрезка $(c-iR,\ c+iR)$ прямой $\Re(t) = c$.

Нетрудно видеть, что, в силу оценки (31), интеграл по полуокружности стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает. Поэтому

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi(t)}{t-z}\, dt.$$

Пользуясь равенством

$$-\frac{1}{t-z} = \int_0^\infty e^{(t-z)x}\, dx \qquad (\Re(t-z) < 0),$$

представим $\Phi(z)$ в форме:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi(t) \left(\int_0^\infty e^{(t-z)x}\, dx \right) dt.$$

Меняя порядок интегрирований (в рассматриваемом случае это допустимо) и пользуясь равенством (32), мы приходим к формуле (33).

Замечание. *Если в равенстве (32) число c заменить любым большим его числом c', то величина интеграла $f(x)$ не изменится.* Действительно, функция $\Phi(z)$ голоморфна в полосе $c \leqslant \Re(z) \leqslant c'$. Поэтому, если через C_n обозначить

прямоугольник с вершинами в точках $c-in$, $c+in$, $c'-in$, $c'+in$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{(C_n)} \Phi(z)\, e^{xz} dz = 0.$$

Если отрезок прямой, параллельный вещественной оси и соединяющий точки $c+in$ и $c'+in$, обозначить через L_n, то, в силу (31), будет:

$$\left| \int\limits_{(L_n)} \Phi(z)\, e^{xz} dz \right| \leqslant \frac{M e^{xc'}(c'-c)}{(c^2+n^2)^{\frac{1+\delta}{2}}}.$$

Правая часть этого равенства бесконечно мала при $n \to \infty$. Это же верно и относительно левой части неравенства и относительно интеграла, распространенного по стороне C_n, параллельной L_n. Отсюда и следует наше утверждение.

17. Основная теорема Карлемана. *Для того, чтобы класс $C_{\{m_n\}}$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty. \tag{34}$$

Более того, если этот интеграл конечен, то можно построить функцию $\psi(x)$ со следующими свойствами:

1) $\psi(x) \not\equiv 0$;
2) $\psi(x) \geqslant 0$;
3) $\psi(x) = \psi(1-x)$;
4) $\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(1) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;
5) $|\psi^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Достаточность. Докажем достаточность условия Карлемана от противного. Именно, допустим, что условие (34) выполнено, но тем не менее существует функция $f(x)$ не равная тождественно нулю и такая, что

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n; \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$f^{(n)}(0) = 0. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Согласно лемме n° 15 можно утверждать существование функции $\psi(x)$, не тождественной нулю, не отрицательной, симметричной относительно точки $x=\frac{1}{2}$ и такой, что

$$\psi^{(n)}(0)=\psi^{(n)}(1)=0; \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$
$$|\psi^{(n)}(x)|\leqslant(8eK)^n m_n \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Введем теперь функцию

$$\Phi(z)=\int_0^1 \psi(x)\,e^{-xz}dx.$$

Она, очевидно, голоморфна во всей плоскости. С помощью n-кратного интегрирования по частям мы можем $\Phi(z)$ представить в форме:

$$\Phi(z)=\frac{1}{z^n}\int_0^1 \psi^{(n)}(x)\,e^{-xz}dx.$$

Отсюда при $\Re(z)\geqslant\frac{1}{2}$ имеем оценку

$$|\Phi(z)|\leqslant\frac{(8eK)^n m_n}{|z|^n}\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\,dx<\frac{(8eK)^n m_n}{|z|^n}. \tag{35}$$

В силу замечания n° 14 числа $(8eK)^n m_n$ в отношении поведения интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr$$

ведут себя точно так же, как и числа m_n. Поэтому в силу условия (34) и формулировки теоремы Карлемана, данной в n° 13, из соотношений (35) следует, что

$$\Phi(z)\equiv 0.$$

Это, однако, невозможно, ибо, например,

$$\Phi(1)=\int_0^1 \psi(x)\,e^{-x}dx>0.$$

Таким образом достаточность условия Карлемана доказана.

Необходимость. Пусть условие (34) не выполняется. Согласно результатам n° 13 и замечанию n° 14, мы сможем построить нетождественную нулю функцию $\Phi(z)$, голоморфную при $\Re(z) > \frac{1}{2}$ и такую, что

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{m_n}{(8e)^n |z|^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Положим

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{x(z-1)} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz. \tag{37}$$

Эта функция, определенная при всех вещественных x, непрерывна и бесконечно дифференцируема, ибо как сам интеграл (37), так и интегралы, получаемые из него дифференцированием по параметру, в силу оценок (36) сходятся равномерно.

При этом, как уже указано в замечании n° 16, величина интеграла $\theta(x)$ не изменится, если в пределах интеграла число 1 заменить любым числом $a > 1$.

Но отсюда следует, что

$$\theta(x) = 0 \qquad \text{при } x < 0.$$

В самом деле

$$\left| \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{x(z-1)} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz \right| < e^{x(a-1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(a+it)|}{|a+it|^2} dt.$$

Если $\operatorname{Max} |\Phi(z)| = m_0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(a+it)|}{|a+it|^2} dt < m_0 \int\limits_{-\infty}^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi m_0,$$

так что

$$|\theta(x)| < \pi m_0 e^{x(a-1)}.$$

Первый член не зависит от a, а второй бесконечно-мал при $a \to \infty$ (ибо $x < 0$). Значит $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Вместе с тем *тождественно* $\theta(x)$ *не равна нулю*. В самом деле, в силу формулы обращения (33) будет

$$\frac{\Phi(z)}{z^2} = \int\limits_0^\infty e^{x(1-z)} \theta(x) dx,$$

и

$$\Phi(z) \not\equiv 0.$$

Назовем через c точную верхнюю границу таких чисел τ, что $\theta(x) = 0$ при $x < \tau$. В силу непрерывности $\theta(x)$ и ее производных будет

$$\theta^{(n)}(c) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{38}$$

и вместе с тем справа от c и сколь угодно близко к c лежат значения x, при которых $\theta(x) \neq 0$.

Далее из соотношения

$$\theta^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\Phi(z)}{z^2} (z-1)^n e^{x(z-1)} dz$$

и неравенств (36) следует оценка

$$|\theta^{(n)}(x)| \leqslant \frac{m_n}{2\pi (8e)^n} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \left|\frac{z-1}{z}\right|^n \frac{dz}{|z|^2} < \frac{m_n}{(8e)^n}. \tag{39}$$

Если мы положим

$$f(x) = \theta(c + x),$$

то соотношения (38) и (39) примут вид:

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{m_n}{(8e)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и при этом $f(x) \not\equiv 0$. Применяя лемму n° 15, мы избавляемся от делителя $(8e)^n$ и приходим к функции $\psi(x)$ со свойствами, указанными в условии теоремы.

Замечание. Легко видеть, что хотя теорема формулирована и доказана для промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$, но она остается справедливой и для случая любого промежутка. Действительно, совершая линейное преобразование независимой переменной, мы введем при оценке $f^{(n)}(x)$ лишь несущественный множитель вида A^n.

18. Пример. В качестве примера можно рассмотреть класс $C_{\{n^n\}}$, где

$$m_n = n^n.$$

Здесь [1])

$$T(r) \sim e^{\frac{r}{e}}$$

(т. е. $T(r)\, e^{-\frac{r}{e}} \to 1$ при $r \to \infty$).

Поэтому интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr$ ведет себя также, как интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r}$.

Последний же интеграл *расходится*, так что интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr$ также расходится.

Это вполне естественно, ибо класс $C_{\{n^n\}}$, очевидно, тождествен с классом $C_{\{n!\}}$ и состоит, таким образом, из аналитических функций.

---

[1]) В самом деле, для функции $y = \left(\frac{r}{x}\right)^x$ максимум достигается при $x = \frac{r}{e}$ и равен $e^{\frac{r}{e}}$. Но $T(r)$ есть наибольшее из значений, получаемых этой функцией при *целых* значениях x. Поэтому

$$T(r) = \left(\frac{r}{\frac{r}{e} + \theta}\right)^{\frac{r}{e} + \theta},$$

где $|\theta| < 1$ и, как легко подсчитать, $T(r) \sim e^{\frac{r}{e}}$.

Глава II

СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

19. Результаты главы I оказываются весьма тесно связанными с некоторыми понятиями из области теории целых функций. Здесь мы напомним основные факты из этой теории.

Пусть $f(z)$ — *целая* функция переменной z. Это значит, что ее разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

сходится на всей плоскостн. В таком случае по известной теореме Коши-Адамара будет

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}=0,$$

где положено $c_n=|a_n|$.

Отсюда при любом $r>0$ будет:

$$\lim_{n\to\infty}(c_n r^n)=0,$$

и следовательно, среди чисел $\{c_n r^n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ существует *наибольшее*. Это наибольшее значение величины $c_n r^n$ (которое может достигаться при нескольких значениях n) мы обозначим через $m(r)$, так что

$$m(r)=\max_{n\geqslant 0}\{c_n r^n\} \qquad (r>0).$$

Наибольшее из значений n, при которых будет

$$c_n r^n=m(r),$$

мы обозначим через $N(r)$. (Эта функция была введена Валироном).

Так как $m(r)$, очевидно, совпадает с функцией $T(r)$ (рассмотренной в n° 9), построенной для чисел $m_n = \frac{1}{c_n}$, то ясно, что $m(r)$ есть непрерывная, возрастающая функция, стремящаяся к бесконечности вместе с r, и что $N(r)$ также есть монотонно возрастающая функция. Нетрудно видеть кроме того, что $N(r)$ непрерывна справа. [1])

Так как функция $N(r)$ может принимать лишь *целые* значения, то во всяком конечном промежутке она может иметь разве лишь конечное число разрывов. Поэтому точки разрыва функции $N(r)$ можно перенумеровать в порядке возрастания:

$$R_1 < R_2 < R_3 < \ldots,$$

причем $R_1 > 0$. В силу сказанного выше, каждый из промежутков $R_i \leqslant r < R_{i+1}$ есть промежуток постоянства функции $N(r)$.

20. Функции $m(r)$ и $N(r)$ связаны простым соотношением. Именно из равенства

$$m(r) = c_{N(r)} r^{N(r)}$$

имеем:

$$\ln m(r) = \ln c_{N(r)} + N(r) \ln r.$$

Диференцируем это равенство по r, считая r изменяющимся *внутри* промежутка (R_i, R_{i+1}), что дает

$$(\ln m(r)' = \frac{N(r)}{r}.$$

Значит, если

$$R_i < r_1 < r_2 < R_{i+1},$$

то

$$\ln m(r_2) - \ln m(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r)}{r} dr.$$

---

[1]) Действительно, если $r \to r_0 + 0$, то $N(r) \to N(r_0 + 0)$. Но так как $N(r)$ может принимать лишь *целые* значения, то для $r > r_0$ и достаточно близких к r_0 будет

$$N(r) = N(r_0 + 0).$$

откуда по соображеиияи непрерывности следует, что для всех n будет

$$c_n r_0^n \leqslant c_{N(r_0+0)} r_0^{N(r_0+0)},$$

так что $c_{N(r_0+0)} r_0^{N(r_0+0)} = m(r_0)$. Отсюда $N(r_0) = N(r_0 + 0)$.

В силу непрерывности обеих частей этого равенства оно остается справедливым и в том случае, когда $r_1 = R_i$ или $r_2 = R_{i+1}$. Отсюда следует, что *какие бы* положительные числа r_0 и r ни взять, всегда будет

$$\ln m(r) = \ln m(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{N(t)}{t}\, dt. \tag{40}$$

Это и есть искомое соотношение.

21. Допустим, что в равенстве (40) числа r_0 и r выбраны так, что $0 < r_0 < R_1$ и $R_{m-1} \leqslant r < R_m$. Если мы положим

$$n_0 = N(R_1 - 0);$$
$$n_i = N(R_i), \qquad (i \geqslant 1),$$

то равенство (40) примет вид:

$$\ln m(r) = \ln m(r_0) + n_0 \ln \frac{R_1}{r_0} + \sum_{i=1}^{m-2} n_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i} + n_{m-1} \ln \frac{r}{R_{m-1}}.$$

Отсюда получаем

$$m(r) = \frac{m(r_0)}{r_0^{n_0}} \cdot \frac{r^{n_{m-1}}}{R_1^{n_1-n_0} R_2^{n_2-n_1} \ldots R_{m-1}^{n_{m-1}-n_{m-2}}}. \tag{41}$$

22. Лемма. *Пусть $N_1(x)$ есть функция, заданная для $x > 0$, не отрицательная, не убывающая, принимающая лишь целые значения и имеющая разрывы в точках $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$ $R_1 > 0$; $\lim R_i = +\infty$, в которых она непрерывна справа.*

В таком случае можно построить такую целую функцию $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad (d_n \geqslant 0), \tag{42}$$

для которой $N_1(r)$ совпадает с функцией $N(r)$, так что

$$\ln m(r) = \ln m(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{N_1(x)}{x}\, dx.$$

Доказательство. Обозначим через n_i значение функции $N_1(x)$ в промежутке между точками R_i и R_{i+1} [1]). Усло-

[1]) При этом следует еще положить $R_0 = 0$, так что $n_0 = N_1(x)$ при $0 < x < R_1$.

вившись в этом, возьмем произвольное положительное число a и положим

$$\left.\begin{aligned} &d_n = 0 && (n < n_0);\\ &d_{n_0} = a; && \\ &d_n = \frac{a}{R_1^{n_1-n_0} R_2^{n_2-n_1} \dots R_{i+1}^{n-n_i}} && (n_i < n \leqslant n_{i+1}). \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Покажем, что́ функция $\Phi(z)$, построенная по формуле (42) с коэфициентами (43), — требуемая.

Прежде всего это целая функция. Чтобы обнаружить это, достаточно показать, что

$$\lim \sqrt[n]{d_n} = 0. \quad (44)$$

Но, выбрав произвольное m, мы будем иметь для достаточно больших n

$$\sqrt[n]{d_n} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{R_1^{n_1-n_0} \dots R_{m-1}^{n_{m-1}-n_{m-2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{R_m^{n_m-n_{m-1}} \dots R_{i+1}^{n-n_i}}}.$$

Первый из этих множителей с возрастанием n стремится к единице. Так как

$$\sqrt[n]{R_m^{n_m-n_{m-1}} \dots R_{i+1}^{n-n_i}} > \sqrt[n]{R_m^{n-n_{m-1}}} \to R_m,$$

то

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{d_n} \leqslant \frac{1}{R_m},$$

откуда следует (44), так как R_m сколь угодно велико вместе с m.

Теперь покажем, что функция $N(r)$, построенная для $\Phi(z)$, совпадает с $N_1(r)$. Для этой цели возьмем произвольное $r > 0$ и постараемся определить, при каком n выражение $d_n r^n$ достигает максимума.

Если $n_s < n \leqslant n_{s+1}$, то согласно (43) будет:

$$d_n r^n = a \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n_1-n_0} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n_2-n_1} \dots \left(\frac{r}{R_{s+1}}\right)^{n-n_s} \cdot r^{n_0}. \quad (45)$$

Допустим, что выбранное значение r удовлетворяет неравенству $R_i < r < R_{i+1}$. В таком случае

$$d_{n_i} r^{n_i} = a \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n_1-n_0} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n_2-n_1} \dots \left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i-n_{i-1}} \cdot r^{n_0}. \quad (46)$$

Сравним выражения (45) и (46). Если $s \geqslant i$, то в (45) входят все множители (46) и еще кроме того множитель

$$\left(\frac{r}{R_{i+1}}\right)^{n_{i+1}-n_i} \cdots \left(\frac{r}{R_{s+1}}\right)^{n-n_s}.$$

Так как этот последний множитель, очевидно, меньше единицы, то $d_n r^n < d_{n_i} r^{n_i}$.

Если же $s < i$ и $n < n_i$, то, наоборот, в (46) входят множители:

$$\left(\frac{r}{R_{s+1}}\right)^{n_{s+1}-n} \cdots \left(\frac{r}{R_i}\right)^{n_i-n_{i-1}},$$

отсутствующие в (45). Так как эти множители больше единицы, то опять $d_n r^n < d_{n_i} r^{n_i}$.

Поэтому $d_n r^n$ имеет наибольшее значение при $n = n_i = N_1(r)$ и значит $N(r) = N_1(r)$. В силу непрерывности *справа* обеих функций $N_1(r)$ и $N(r)$ это равенство справедливо также и для $r = R_i$. Лемма доказана.

23. Если $F(z)$ есть произвольная целая функция, то ей отвечают функции $N(r)$ и $m(r)$. С помощью построений леммы n° 22 мы находим другую целую функцию $\Phi(z)$ более простой структуры и имеющую те же функции $N(r)$ и $m(r)$.

Переход от функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ имеет очень простой геометрический смысл. Для его выяснения рассмотрим так называемый *многоугольник Валирона*.

Многоугольник Валирона. Пусть в плоскости xOy дана система точек:

$$P_n(n; -\ln c_n),$$

причем

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} = 0. \tag{47}$$

Из условия (47) следует, что, какую бы прямую, не параллельную оси ординат, ни взять, точки P_n при достаточно большом n окажутся расположенными *выше* этой прямой.[1])

Отметив это, выберем среди точек P_n точку с наименьшей абсциссой n и с конечной ординатой ($c_n \neq 0$). Пусть это точка P_{n_0}. Проведем через взятую точку прямую линию так, чтобы *ниже* этой прямой не лежала ни одна из точек P_n, но

---

[1]) Пусть уравнение прямой есть $y = y_0 + kx$. Так как из (47) следует $-\frac{\ln c_n}{n} \to +\infty$, то для достаточно больших n будет:

$$-\ln c_n > y_0 + kn.$$

чтобы на *самой* прямой, кроме P_{n_0}, находились и другие точки P_n.

Последнюю из точек P_n, лежащую на этой прямой (т. е. точку с наибольшей абсциссой), мы назовем через P_{n_1}.

Повторим проведенное построение. Именно, продолжив из точки P_{n_1} прямую $P_{n_0}P_{n_1}$ направо, мы начнем увеличивать ее угловой коэфициент, пока не получим прямой, проходящей через какую-либо точку P_n $(n > n_1)$. Если на этой прямой лежит несколько точек P_n, то ту из них, которая имеет наибольшую абсциссу, обозначим через P_{n_2}.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим выпуклую ломаную с вершинами в точках $P_{n_0}, P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ Точки P_n окажутся лежащими либо на этой ломаной, либо выше ее, но ни одна из них не окажется под ломаной.

Эта ломаная и есть многоугольник Валирона.

Обозначим угловой коэфициент звена $P_{n_{i-1}}P_{n_i}$ через $\ln R_i$. Пусть, далее, $R_i \leqslant r < R_{i+1}$. Прямая с угловым коэфициентом $\ln r$ и проходящая через точку P_{n_i} окажется лежащей ниже всех точек P_n, кроме P_{n_i}. (Впрочем, если $r = R_i$, то на самой этой прямой могут лежать точки P_n, например $P_{n_{i-1}}$, и в этом случае точка P_{n_i} окажется имеющей наибольшую абсциссу среди этих точек). Если уравнение этой прямой имеет вид:

$$y = b + x \ln r,$$

то

$$b = -\ln (c_{n_i} r^{n_i}).$$

Так как, какую бы параллельную прямую с меньшей начальной ординатой ни взять, она окажется лежащей *ниже* всех точек P_n, то ни одно число, меньшее чем b, не представимо в форме $-\ln (c_n r^n)$. Значит,

$$b = \min_n [-\ln (c_n r^n)].$$

Стало-быть

$$c_{n_i} r^{n_i} = \max (c_n r^n)$$

(если же $r = R_i$, то $c_{n_i} r^{n_i}$ есть $\max (c_n r^n)$ с наибольшим номером). Таким образом, если ввести целую функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|a_n| = c_n)$$

с соответствующими функциями $m(r)$ и $N(r)$, то числа R_1, R_2, R_3, ... окажутся точками разрыва $N(r)$, а n_i будет служить значением $N(r)$ в промежутке $R_i \leqslant r < R_{i+1}$.

Стало-быть, если система точек $\{P_n\}$ изображает набор коэфициентов функции $F(z)$, то функция $N(r)$ [и следовательно $m(r)$] зависит лишь от тех P_n, кои являются вершинами полигона Валирона.

Отсюда следует, что если мы рассмотрим вместо системы точек $\{P_n\}$ систему точек $\{Q_n\}$, где Q_n есть точка пересечения прямой $x=n$ и многоугольника Валирона, [1]) то эта система изображает целую функцию $\Phi(z)$ с теми же самыми функциями $N(r)$ и $m(r)$.

Можно без труда показать, что функция $\Phi(z)$, получаемая спуском всех вершин P_n на многоугольник Валирона, есть та самая функция $\Phi(z)$, построение которой было проведено в лемме n° 22.

Действительно, если ордината точки Q_n есть $-\ln d_n$, то при $n_i < n \leqslant n_{i+1}$, очевидно, будет:

$$-\ln d_n = -\ln d_{n_0} + (n_1 - n_0)\ln R_1 + \ldots + (n - n_i)\ln R_{i+1},$$

откуда

$$d_n = \frac{d_{n_0}}{R_1^{n_1 - n_0} R_2^{n_2 - n_1} \ldots R_{i+1}^{n - n_i}},$$

что вполне согласуется с формулой (43).

Таким образом, операция перехода от функции $F(z)$ к „исправленной" функции $\Phi(z)$ геометрически означает спуск всех точек системы $\{P_n\}$ на многоугольник Валирона.

24. Теперь уже нетрудно установить связь между теорией квазианалитических классов функций и теорией целых функций.

Как мы уже видели, класс $C_{\{m_n\}}$ будет квазианалитическим или не будет, смотря по тому, будет ли бесконечным или конечным интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr.$$

Если мы сопоставим классу $C_{\{m_n\}}$ целую [2]) функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{m_n},$$

---

[1]) Таким образом $Q_{n_i} = P_{n_i}$.

[2]) Мы считаем, что $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$, ибо иначе все тривиально.

то, очевидно, соответствующая функция $m(r)$ будет совпадать с функцией $T(r)$:

$$m(r) = T(r).$$

Переход от функции $F(z)$ к „исправленной" функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\overline{m}_n}$$

приводит к новым числам $\{\overline{m}_n\}$. Так как функции $\Phi(z)$ отвечает та же $m(r)$, что и функции $F(z)$, то характер классов $C_{\{m_n\}}$ и $C_{\{\overline{m}_n\}}$ в отношении их квазианалитичности одинаков (это конечно не должно означать, что классы $C_{\{m_n\}}$ и $C_{\{\overline{m}_n\}}$ состоят из одних и тех же функций; впрочем, это так, если ограничиться рассмотрением функций периодических и предполагать выполненным условие (90) n° 44. Это будет установлено ниже).

Относительно класса $C_{\{m_n\}}$ можно доказать, что он оказывается квазианалитическим тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} = \infty. \tag{48}$$

Мы не будем доказывать этого предложения. Ниже мы используем понятия, введенные в настоящей главе.

Глава III

КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ И РЯДЫ ФУРЬЕ

25. Пусть $p(t)$ — непрерывная положительная функция, заданная для $t \geqslant 0$. Рассмотрим множество всех бесконечно диференцируемых функций $f(x)$, представимых в форме [1])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{49}$$

где коэфициенты a_n и b_n при всех n удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |a_n| &< e^{-p(n)} \\ |b_n| &< e^{-p(n)} \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Множество всех таких функций мы будем называть классом $C\{p(t)\}$.

Это определение позволяет поставить следующую проблему: *какова должна быть функция $p(t)$, чтобы всякая функция $f(x)$, принадлежащая классу $C\{p(t)\}$ и удовлетворяющая условиям*

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{51}$$

необходимо была тождественно равна нулю.

Впервые подобным вопросом занимался С. Н. Бернштейн. Ограничиваясь лишь четными функциями вида

$$f(x) = \sum a_n \cos nx,$$

он установил [2]), что если существует целая функция $F(z)$

---

[1]) и, стало-быть, имеющих период, равный 2π.

[2]) См. S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales*, Paris, Gauthier-Villars (1926), p. 182.

первого рода, четная, с положительными коэфициентами, и такая, что

$$\sum |a_n F(n)| < +\infty,$$

то из условия (51) следует

$$f(x) \equiv 0.$$

Валле-Пуссен[1]), также ограничиваясь рядами косинусов, установил другое достаточное условие.

Именно, им показано, что если существует положительная постоянная α, такая, что

$$tp'(t) > \alpha p(t), \tag{52}$$

и если

$$\int_1^\infty \frac{p(t)}{t^2}\,dt = +\infty, \tag{53}$$

то из (51) следует, что $f(x) \equiv 0$.

Мы даем здесь некоторое условие, *необходимое и достаточное*. При этом мы ограничимся рассмотрением таких функций $p(t)$, которые имеют положительную производную $p'(t)$ такого рода, что

$$tp'(t) \to +\infty, \tag{54}$$

причем функция $tp'(t)$ *возрастает* вместе с t.

Именно относительно таких функций имеет место следующая теорема.

Теорема С. Мандельбройта. *Для того чтобы из условий* (50) *и* (51) *следовало, что* $f(x) \equiv 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^\infty \frac{p(t)}{t^2}\,dt = +\infty. \tag{53}$$

26. Прежде чем давать доказательство высказанной теореме, мы проведем некоторые предварительные построения.

Обозначим через $N(t)$ *целую часть* функции $tp'(t)$:

$$N(t) = \mathrm{E}(tp'(t)).$$

В таком случае

$$tp'(t) = N(t) + \alpha(t) \qquad (0 \leqslant \alpha(t) < 1),$$

---

[1]) De la Vallée-Poussin, *Soc. math de France*. 1924, p. 198.

и следовательно,

$$p(t)-p(1)=\int_1^t \frac{N(t)}{t}\,dt+\int_1^t \frac{\alpha(t)}{t}\,dt.$$

Отсюда вытекает двойная оценка

$$p(1)+\int_1^t \frac{N(t)}{t}\,dt \leqslant p(t) \leqslant p(1)+\int_1^t \frac{N(t)}{t}\,dt+\ln t. \tag{55}$$

Так как $N(t)$ есть возрастающая целочисленная функция, то, согласно лемме n° 22, существует целая функция

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \tag{56}$$

для которой $N(t)$ совпадает с функцией N из n° 19.

С помощью подбора постоянного множителя можно добиться того, чтобы для соответствующей $\Phi(z)$ функции $m(r)$ было

$$m(1)=1,$$

откуда, в связи с формулой (40) n° 20, будет:

$$\ln m(r)=\int_1^r \frac{N(t)}{t}\,dt,$$

и оценка (55) примет вид:

$$p(1)+\ln m(r) \leqslant p(r) \leqslant p(1)+\ln m(r)+\ln r. \tag{57}$$

Из неравенств (57) ясно, что оба интеграла:

$$\int_1^{\infty} \frac{p(t)}{t^2}\,dt \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln m(r)}{r^2}\,dr$$

сходятся или расходятся одновременно.

Теперь мы можем доказать необходимость условия теоремы.

27. Необходимость условия теоремы. Положим,

$$m_n=\frac{e^{-p(1)}}{d_{n-1}}$$

и рассмотрим класс $C_{\{m_n\}}$. Для этого класса будет

$$\mathrm{T}(r) = \max\left(\frac{r^n}{m_n}\right) = e^{p(1)} r \cdot \max(d_{n-1} r^{n-1}),$$

откуда

$$\mathrm{T}(r) = e^{p(1)} r\, m(r).$$

Отсюда следует, что

$$\ln \mathrm{T}(r) = p(1) + \ln r + \ln m(r) \tag{58}$$

или [в силу (57)]

$$\ln \mathrm{T}(r) \leqslant p(r) + \ln r.$$

Допустим теперь, что условие (53) *не выполнено*. В таком случае

$$\int_1^\infty \frac{\ln \mathrm{T}(r)}{r^2}\, dr < +\infty,$$

и класс $C_{\{m_n\}}$ не квазианалитичен. Но тогда (n° 17) существует функция $f(x)$ со следующими свойствами:

$$f(x) \not\equiv 0;$$

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(2\pi) = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$f(x) = f(2\pi - x);$$

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{1}{2} m_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Эта функция разлагается в ряд Фурье по косинусам кратных дуг:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt.$$

Интегрируя выражение a_n p раз по частям, получим:

$$a_n = \pm \frac{1}{\pi n^p} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(t) \begin{matrix}\sin nt \\ \cos nt\end{matrix}\, dt,$$

откуда

$$|a_n| < \frac{m_p}{n^p}.$$

Так как эта оценка справедлива при любом $p \geqslant 1$, то правую часть можно заменить ее минимумом относительно p. Таким образом

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\mathrm{T}(n)}$$

и, так как в силу (57) и (58)

$$\mathrm{T}(n) \geqslant e^{p(n)},$$

то

$$|a_n| \leqslant e^{-p(n)},$$

и $f(x)$ принадлежит к $C_{\{p(t)\}}$. Так как $f(x)$ не тождественна нулю, то необходимость условия (53) доказана.

28. Достаточность условия теоремы. Допустим, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

причем

$$|a_n| \leqslant e^{-p(n)}; \qquad |b_n| \leqslant e^{-p(n)}. \tag{50}$$

Диференцируя разложение $f(x)$ k раз, найдем:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\pm a_n \begin{matrix}\cos nx\\ \sin nx\end{matrix} \pm b_n \begin{matrix}\sin nx\\ \cos nx\end{matrix}\right),$$

откуда

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)\, n^k$$

или

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-p(n)} n^k. \tag{59}$$

С другой стороны, в силу (57)

$$e^{-p(n)} \leqslant \frac{e^{-p(1)}}{m(n)}. \tag{60}$$

Так как при всяком $l \geqslant 1$ будет

$$m(n) \geqslant d_l n^l,$$

то, в частности,

$$\frac{1}{m(n)} \leqslant \frac{1}{d_{k+2} n^{k+2}},$$

откуда, в связи с (59) и (60), получаем:

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \frac{2e^{-p(1)}}{d_{k+2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

или

$$|f^{(k)}(x)| < \frac{L}{d_{k+2}} \qquad (L = \text{const}).$$

Допустим теперь, что при всех n будет

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Если мы положим

$$\varphi(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x)\, dx,$$

то найдем:

$$\varphi^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$
$$|\varphi^{(n)}(x)| < \frac{L}{d_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),\ ^{1)}$$

положим

$$m_n = \frac{1}{d_n}, \tag{61}$$

тогда функция $\varphi(x)$ принадлежит к классу $C_{\{m_n\}}$.

Если условие (53) выполнено, то бесконечен также интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln m(r)}{r^2}\, dr.$$

Но функция $m(r)$ для $\Phi(z)$ в силу (61) совпадает с функцией $T(r)$ для последовательности $\{m_n\}$. Значит, класс $C_{\{m_n\}}$ квазианалитичен, и стало-быть, $\varphi(x) \equiv 0$, откуда и $f(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

---

[1]) Возможно, что для того, чтобы охватить случаи $n = 1$ и $n = 2$, придется увеличить L.

29. Замечание I. Нетрудно показать, что результат Валле-Пуссена, приведенный в n° 25, следует из доказанной теоремы.

Прежде всего, если $p_1(t) < p(t)$, то класс $C_{\{p_1(t)\}}$ содержит в себе класс $C_{\{p(t)\}}$.

Заметив это, допустим, что функция $p(t) > 0$ удовлетворяет условиям (52) и (53) Валле-Пуссена.

Положим

$$p_1(t) = \alpha \int_1^t \frac{p(t)}{t}\, dt.$$

В силу (52) $p_1(t) < p(t)$. Но для функции $p_1(t)$ выполнены все условия нашей теоремы. В самом деле, $tp_1'(t) = \alpha p(t)$ и, *возрастая*, стремится к бесконечности.

Кроме того

$$\int_1^a \frac{p_1(x)}{x^2}\, dx > \alpha \int_e^a \frac{dx}{x^2}\left(\int_{\frac{x}{e}}^x \frac{p(t)}{t}\, dt\right) > \alpha \int_e^a \frac{p\left(\frac{x}{e}\right)}{x^2}\, dx \to \infty,$$

так что для $p_1(t)$ выполнено и условие (53). Значит, всякая функция из $C_{\{p_1(t)\}}$, для которой выполняются условия (51), тождественна нулю. Тем более это справедливо для функций класса $C_{\{p(t)\}}$.

30. Замечание II. Просматривая проведенные выше рассуждения, мы замечаем, что требование диференцируемости функции $p(t)$ не является существенным и может быть заменено требованием представимости $p(t)$ в форме

$$p(t) = p(1) + \int_1^t \frac{\omega(t)}{t}\, dt, \tag{62}$$

где $\omega(t)$ — возрастающая функция, для которой

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = +\infty. \tag{63}$$

Но условия (62) и (63), очевидно, окажутся выполненными, если

$$p(n+1) - p(n) = \alpha_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \tag{64}$$

где

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \text{ и } \alpha_n \to \infty.$$

В самом деле, в этом случае

$$p(n+1) - p(n) = \int_n^{n+1} \frac{\alpha_n dt}{t},$$

и достаточно положить

$$\omega(t) = \alpha_n \qquad (n \leqslant t < n+1), \tag{65}$$

чтобы выполнить требования (62) и (63).

Заметим еще, что для *любой* возрастающей положительной функции $p(t)$ интеграл (53) и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{n^2} \tag{66}$$

сходятся или расходятся одновременно. Действительно,

$$\frac{p(n)}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{p(t)}{t^2} dt \leqslant \frac{p(n+1)}{n^2},$$

и значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{(n+1)^2} \leqslant \int_1^{\infty} \frac{p(t)}{t^2} dt \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p(n)}{(n-1)^2}.$$

Из расходимости ряда (66) следует расходимость ряда $\sum \frac{p(n)}{(n+1)^2}$ и интеграла (53). Обратно, из расходимости (53) следует расходимость $\sum \frac{p(n)}{(n-1)^2}$ и, следовательно, расходимость (66).

Если мы положим $e^{-p(n)} = A_n$, то доказанную теорему сможем формулировать и таким образом.

Пусть

$$\ln A_n - \ln A_{n+1} = \alpha_n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\alpha_{n+1} > \alpha_n > 0; \qquad \alpha_n \to \infty.$$

Для того чтобы всякая функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

подчиненная условиям $|a_n| < A_n$; $|b_n| < A_n$; $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *была тождественна нулю, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln A_n}{n^2} = -\infty.$$

Глава IV

О СОВПАДЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ

§ 1. Постановка задач и предварительные леммы

31. В этой главе мы будем изучать следующие проблемы.

Проблема I. *Каковы должны быть последовательности* $\{m_n\}$ *и* $\{m_n'\}$, *чтобы два класса функций* $C_{\{m_n\}}$ *и* $C_{\{m'_n\}}$ *были тождественны между собой?*

Напомним при этом, что $f(x)$ принадлежит классу $C_{\{m_n\}}$, если существует такая постоянная K, что для всех

$$x \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

будет:

$$|f^{(n)}(x)| < K^n m_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Проблема II. *Каковы должны быть числа* $\{m_n\}$, *чтобы всякая функция* $f(x)$, *удовлетворяющая условиям*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant m_n,$$

была аналитической?

Отметим, что в формулировке этой проблемы отсутствует константа K.

Обе эти проблемы были поставлены Т. Карлеманом. Их решение (полное для проблемы II и применительно к *периодическим* функциям для проблемы I) было дано С. Мандельбройтом.

В связи с проблемой II естественно рассмотреть следующий вопрос:

Проблема III. *Какова должна быть последовательность* $\{m_n\}$, *чтобы всякая функция класса* $C_{\{m_n\}}$ *была аналитической?*

Нетрудно видеть, что всякое условие на числа $\{m_n\}$, решающее в положительном смысле проблему III, и подавно решает проблему II. Ниже мы увидим, что обе проблемы

вполне эквивалентны, так что справедливо и обратное утверждение.

32. В целях дальнейшего полезно ввести в рассмотрение ломаную, являющуюся обобщением рассмотренной выше ломаной Валирона.

Допустим, что нами рассматривается ряд положительных величин m_n; соотнесем этим числам систему точек P_n с координатами

$$P_n(n;\ \ln m_n).$$

Пусть, далее, $\omega(t)$ есть непрерывная, положительная, монотонная функция, стремящаяся к бесконечности вместе с t.

Взяв какое-либо значение t, рассмотрим *замкнутый* прямолинейный отрезок, имеющий взятое значение t своим угловым коэфициентом и проектирующийся на ось абсцисс в отрезок от $x=0$ до $x=\omega(t)$.

С помощью параллельного переноса мы можем добиться того, чтобы на взятом отрезке лежала хоть одна точка системы $\{P_n\}$, но ни одна из точек этой системы не оказалась расположенной ниже отрезка. Назовем отрезок в этом его положении через $L(t)$.

Всякому значению t, при котором $\omega(t)\geqslant 1$, отвечает совершенно определенный отрезок $L(t)$.

Назовем через P_{n_i} те из точек системы $\{P_n\}$, которые лежат хоть на одном из отрезков $L(t)$.

Каждой такой точке может отвечать целый ряд значений t. Обозначим через t_i верхнюю грань тех значений t, при которых отрезок $L(t)$ проходит через точку P_{n_i}.[1])

Назовем, далее, через L_i *замкнутый* отрезок, проходящий через P_{n_i}, имеющий угловой коэфициент t_i и проектирующийся на ось абсцисс в отрезок $0\leqslant x\leqslant\omega(t_i)$. (Заметим, что отрезки L_i и $L(t_i)$, вообще говоря, не совпадают. Они параллельны и имеют общую проекцию на ось Ox, но совпадают лишь в том случае, если на прямой[2]) $x=\omega(t_i)$ нет точек P_n, лежащих ниже отрезка L_i.)

---

[1]) Это множество, очевидно, *ограничено* сверху. Действительно, при очень больших значениях t отрезок, проходящий через P_{n_i} с угловым коэфициентом t и проекцией $\omega(t)$, окажется очень длинным и очень круто подымающимся. Поэтому он обязательно пройдет *выше* некоторых точек P_n и не может быть отрезком $L(t)$.

[2]) Заметим, что *левее* прямой $x=\omega(t_i)$ и *ниже* отрезка L_i не может лежать ни одной точки P_n. Действительно, в противном случае всякая

Установим следующее неравенство:

$$n_{i+1} \leqslant \omega(t_i). \tag{67}$$

Иначе говоря, покажем, что точка $P_{n_{i+1}}$ не может лежать *правее* прямой $x = \omega(t_i)$. Для этой цели предположим сначала, что на отрезке L_i правее P_{n_i} нет ни одной точки P_n. В таком случае на прямой $x = \omega(t_i)$ *ниже* L_i обязательно лежит точка P_n (ибо иначе мы смогли бы провести через P_{n_i} отрезок $L(t_i + \varepsilon)$, что противоречит определению t_i). Нетрудно видеть, что это точка $P_{n_{i+1}}$. В самом деле, отрезок $L(t_i)$ проходит через эту точку, так что она принадлежит к точкам $\{P_{n_k}\}$, причем $k > i$.[1]) Но если бы было $k > i+1$, то точка $P_{n_{i+1}}$ оказалась бы лежащей выше L_i и левее $x = \omega(t_i)$.

Если $L(t^*)$ есть отрезок, проходящий через $P_{n_{i+1}}$, то было бы[2]) $t^* > t_i$, откуда вытекало бы $\omega(t^*) \geqslant \omega(t_i)$, и точка P_{n_k} лежала бы *под* отрезком $L(t^*)$, что невозможно, Итак, если правее P_{n_i} на L_i нет точек P_n, то $P_{n_{i+1}}$ лежит *на прямой* $x = \omega(t_i)$ ниже L_i.

Допустим теперь, что на L_i, правее P_{n_i}, лежат и другие точки P_n. Если бы на прямой $x = \omega(t_i)$, ниже L_i, не находилось точек P_n, то отрезок L_i совпадал бы с $L(t_i)$, лежащие на нем точки принадлежали бы к $\{P_{n_k}\}$ и ближайшая к P_{n_i} точка и была бы $P_{n_{i+1}}$.

Если же на $x = \omega(t_i)$ ниже L_i расположена точка P_n, то она есть точка вида P_{n_k} и опять-таки $n_{i+1} \leqslant n_k = \omega(t_i)$.[3])

Таким образом, во всех случаях $\omega(t_i) \geqslant n_{i+1}$.

Назовем через L_i' открытый справа отрезок, образованный теми точками L_i, для которых $n_i \leqslant x < n_{i+1}$.

Фигура, состоящая из всех отрезков L_i' $(i = 1, 2, \ldots)$, и есть интересующая нас ломаная. Это есть некоторая, вообще говоря разрывная, линия; рассмотренный в n° 23 многоугольник Валирона есть ее частный случай, отвечающий функции

$$\omega(t) \equiv \infty.$$

такая точка оказалась бы лежащей ниже некоторого отрезка $L(t)$ при t, меньшем t_i и достаточно близком к t_i. Это же противоречит определению $L(t)$.

[1]) Собственно уже отсюда следует (67).

[2]) Ибо пересечение отрезка $L(t^*)$ с прямой $x = n_i$ не может лежать *выше* точки P_{n_i}.

[3]) Легко показать, что и здесь $k = i+1$.

Отметим в заключение, что с помощью рассуждений, сходных с приведенными, нетрудно показать, что угловые коэфициенты отрезков L_i не убывают вместе с i, так что $t_{i+1} \geqslant t_i$.

33. Построенная в n° 32 ломаная позволяет перейти от последовательности $\{m_n\}$ к некоторой другой. Именно, обозначив через $\ln \overline{m}_n^{(\omega)}$ ординату точки пересечения ломаной с прямой $x = n$ [1]) (т. е. „спуская" все точки P_n на ломаную), мы получаем наряду с последовательностью $\{m_n\}$ последовательность $\{\overline{m}_n^{(\omega)}\}$, которую будем называть *исправленной последовательностью*. Самые точки $(n;\ \ln \overline{m}_n^{(\omega)})$ обозначим через $P_n^{(\omega)}$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая

$$\omega(t) = e^t.$$

Соответствующую исправленную последовательность мы будем обозначать через

$$m_n^{(\exp)},$$

а точки $(n,\ \ln m_n^{(\exp)})$ через $P_n^{(\exp)}$.

34. Роль чисел $m_n^{(\exp)}$ выясняется при рассмотрении функции

$$S(r) = \max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left\{ \frac{r^n}{m_n} \right\},$$

сходной с ранее изученной функцией $T(r)$, но отличающейся от нее тем, что здесь n пробегает лишь те целые значения, которые не превосходят r. Именно, оказывается, что $S(r)$ *не изменится, если заменить числа* m_n *числами* $m_n^{(\exp)}$, так что

$$S(r) = \max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left\{ \frac{r^n}{m_n^{(\exp)}} \right\}.$$

Для доказательства этого обстоятельства рассмотрим прямую, проходящую через точку $P_n(n;\ \ln m_n)$ и имеющую угловой коэфициент $\ln r$. Ее уравнение имеет вид:

$$y = y_0 + x \ln r,$$

так что начальная ордината равна

$$y_0 = -\ln\left(\frac{r^n}{m_n}\right).$$

---

[1]) Так что $m_{n_i}^{(\omega)} = m_{n_i}$.

Для отыскания $S(r)$ нужно, таким образом, найти среди P_n такую точку, чтобы начальная ордината y_0 имела *наименьшее* возможное значение. При этом, однако, надлежит рассмотреть лишь те значения n, которые удовлетворяют неравенству $1 \leqslant n \leqslant r$.

Если мы положим $t = \ln r$, то поставленная задача сводится к проведению через точки P_n, где $1 \leqslant n \leqslant e^t$, прямых с угловым коэфициентом t и отысканию той из них, которая имеет наименьшую начальную ординату.

Если точка P_n не принадлежит к числу точек P_{n_i}, то под проходящим через нее отрезком с угловым коэфициентом t и проекцией $(0 \leqslant x \leqslant e^t)$ обязательно лежат другие точки P_n. Поэтому начальная ордината отрезка не будет наименьшей, и рассматриваемое значение n не решает поставленной задачи.

Таким образом для определения $S(r)$ нет надобности рассматривать точки, не лежащие на ломаной, так как они не дают решения задачи. Но в таком случае их можно произвольно подымать и опускать (последнее, однако, не ниже ломаной), и при этом значение $S(r)$ не изменится. В частности, все точки P_n можно опустить на ломаную, а это равносильно переходу от чисел $\{m_n\}$ к числам $\{m_n^{(\exp)}\}$, что и доказывает наше утверждение.

35. Лемма I. *Для всякого целого числа n можно найти такое r, чтобы величины $S(r)$ и $\frac{r^n}{m_n^{(\exp)}}$ оказались как угодно близки.*

Доказательство. Взяв некоторое фиксированное значение n, рассмотрим соответствующую точку $P_n^{(\exp)}$. Пусть эта точка лежит на отрезке L_i с угловым коэфициентом t_i.

Различим два случая: 1) на прямой $x = e^{t_i}$, *ниже* отрезка L_i, нет точек системы $\{P_n\}$; 2) на прямой $x = e^{t_i}$ имеется точка P_n, лежащая ниже L_i (тогда эта точка $P_{n_{i+1}}$).

Пусть имеет место первый случай. Рассмотрим $S(e^{t_i})$. Для нахождения этой величины нужно через каждую из точек

$$P_1^{(\exp)},\ P_2^{(\exp)},\ \ldots,\ P_{[e^{t_i}]}^{(\exp)}$$

провести прямую с угловым коэфициентом t_i и выбрать ту из этих прямых, которая имеет наименьшую начальную ординату. [1]) Но так как ни одна из рассматриваемых точек не лежит ниже L_i, то эту наименьшую ординату и имеет сам отре-

---

[1]) Ибо, как мы видели в n° 34, эта ордината равна $-\ln S(e^{t_i})$.

зок L_i. Начальная ордината L_i равна $-\ln\left(\frac{e^{nt_i}}{m_n^{(\exp)}}\right)$, и значит, при $r=e^{t_i}$ будет

$$S(r)=\frac{r^n}{m_n^{(\exp)}},$$

т. е. найденное значение r осуществляет *точное* равенство обеих величин.

Если же имеет место второй случай, то мы рассмотрим $S(e^t)$, где $t<t_i$, но весьма близко к t_i.

В этом случае мы должны повторить то же рассуждение, но из рассмотренных выше точек исключить точку $P_{n_{i+1}}=$ $=F^{(\exp)}_{[e^{t_i}]}$, а через остальные проводить прямые с угловым коэфициентом t. Очевидно, наименьшей начальной ординатой будет обладать отрезок, проведенный через ту точку, которая лежит на L_i и имеет наименьшую абсциссу. Если это есть точка $P_n^{(\exp)}$, то $S(e^t)$ и $\frac{r^n}{m_n^{(\exp)}}$ (где $r=e^t$) совпадают. Если же это точка $P_k^{(\exp)}$, где $k<n$, то $S(t)=\frac{e^{kt}}{m_k^{(\exp)}}$. Однако при t, достаточно близком к t_i, эта величина сколь угодно мало [1]) отличается от $\frac{e^{nt}}{m_n^{(\exp)}}$. Лемма доказана. Заметим, что, как видно из доказательства, найденное значение r можно считать $\geqslant n$.

36. Лемма II. *Следующие два условия:*

1) $S(r)>e^{\alpha r}$ (*при достаточно больших* r *и* $\alpha>0$)

и

2) $\overline{\lim}\,\frac{\sqrt[n]{m_n^{(\exp)}}}{n}<+\infty$

эквивалентны между собой.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие 2). Тогда существует такое $p>0$, что при всех n

$$\frac{\sqrt[n]{m_n^{\exp}}}{n}<p,$$

---

[1]) Так как обе точки $P_k^{(\exp)}$ и $P_n^{(\exp)}$ лежат на L_i, то

$$\frac{e^{kt_i}}{m_k^{(\exp)}}=\frac{e^{nt_i}}{m_n^{(\exp)}}.$$

причем можно считать $p > 1$. Отсюда

$$\frac{r^n}{m_n^{(\exp)}} > \frac{r^n}{p^n n^n},$$

и стало-быть,

$$S(r) \geqslant \max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left(\frac{r}{pn}\right)^n.$$

Функция $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ имеет максимум, равный $e^{\frac{a}{e}}$ и достигающийся при $x = \frac{a}{e} < a$. Поэтому

$$\max \left(\frac{r}{px}\right)^x = e^{\frac{r}{pe}},$$

и достигается этот максимум при $x = \frac{r}{pe}$. Если ограничиться рассмотрением целых значений n, то

$$\max_{(1 \leqslant n \leqslant \infty)} \left(\frac{r}{pn}\right)^n$$

достигается при n, отличающемся от $\frac{r}{pe}$ меньше чем на единицу т. е. во всяком случае при $n < r$.

Таким образом (см. n° 18) при $r \to \infty$ будет:

$$\max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left(\frac{r}{pn}\right)^n \sim e^{\frac{r}{pe}}.$$

Значит, для достаточно больших r будет:

$$\max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left(\frac{r}{pn}\right)^n > (1 - \varepsilon)\, e^{\frac{r}{pe}}, \qquad (0 < \varepsilon < 1;\ r > r_1),$$

а потому и подавно

$$S(r) > e^{\alpha r},$$

если $r > r_0$ и $0 < \alpha < \frac{1}{pe}$. Таким образом, условие 1) вытекает из 2).

Обратно, пусть дано 1). Фиксировав какое-либо $\varepsilon > 0$, мы согласно лемме I n° 35, можем указать r_n такое, что

$$0 \leqslant S(r_n) - \frac{r_n^n}{m_n^{(\exp)}} < \varepsilon.$$

Значит, для достаточно больших r_n, будет

$$\frac{r_n^n}{m_n^{(\exp)}} > e^{\alpha r_n} - \varepsilon,$$

так что для достаточно больших n (и следовательно, $r_n \geqslant n$) будет:

$$\frac{r_n^n}{m_n^{(\exp)}} > e^{\beta r_n},$$

где $0 < \beta < \alpha$. Но так как

$$\max\left(\frac{ae}{x}\right)^x = e^a,$$

то

$$\frac{r_n^n}{m_n^{(\exp)}} > \left(\frac{e^\beta r_n}{n}\right)^n,$$

откуда

$$\frac{\sqrt[n]{m_n^{(\exp)}}}{n} < \frac{1}{\beta e},$$

и значит, выполнено 2). Лемма доказана.

§ 2. Решение проблем II и III

37. Теперь мы можем рассмотреть решение проблем II и III; именно имеет место следующая теорема:

Теорема С. Мандельбройта. *Пусть $a \leqslant x \leqslant b$ — некоторый промежуток. Для того чтобы всякая бесконечно дифференцируемая функция, заданная на этом промежутке и удовлетворяющая неравенствам*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{68}$$

была аналитической, необходимо, чтобы выполнялось условие 1) [или, что то же самое, условие 2)] леммы n° *36. Это тем более необходимо для того, чтобы всякая функция класса $C_{\{m_n\}}$, заданная на (a, b), была аналитической.*

Обратно, если выполнено условие 1) или 2) указанной леммы, то всякая функция класса $C_{\{m_n\}}$ [и тем более всякая функция, подчиненная неравенствам (68)] оказывается аналитической (независимо от промежутка задания функции).

38. Необходимость условий теоремы для промежутка $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Докажем необходимость условий теоремы сначала для случая совершенно определенного промежутка $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Допустим, что всякая функция, заданная на этом промежутке и подчиненная условиям (68), — аналитическая.

Обозначим через $T_n(z)$ полином Чебышева для промежутка $-1 \leqslant z \leqslant 1$, т. е. положим

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \frac{1}{2}\left[(z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n\right].$$

Если C_R есть эллипс с фокусами в точках $x = \pm 1$ и полусуммой осей

$$a + b = R,$$

то, как известно[1]), в этом эллипсе справедлива оценка

$$|T_n(z)| \leqslant R^n. \tag{69}$$

Кроме этого отметим, что если $a < 2$, то расстояние между точкой x отрезка $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ и точкой z контура эллипса C_R удовлетворяет неравенству

$$|z - x| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R-1}{R}; \tag{70}$$

это может быть проверено элементарным вычислением, которое мы опускаем.

С помощью интегральной формулы Коши имеем для точек отрезка $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$:

$$T_n^{(q)}(x) = \frac{q!}{2\pi i} \int\limits_{(C_R)} \frac{T_n(z)}{(z-x)^{q+1}}\, dz,$$

---

[1]) См., например, В. Л. Гончаров, *Теория приближения и интерполирования функций* (ОНТИ, 1934), стр. 31, ф-ла (49).

откуда[1]), на основании оценок (69) и (70),

$$|T_n^{(q)}(x)| \leqslant \frac{q!}{2\pi} R^n \left(\frac{R}{R-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{q+1} \cdot 2\pi R.$$

Заметим, что здесь $q \leqslant n$ (ибо иначе $T_n^{(q)}(x) \equiv 0$), и R может быть взято произвольно [лишь бы было $a < 2$, что нужно для оценки (70)]. В частности, полагая

$$R = 1 + \frac{q}{n},$$

будем иметь:

$$R^n = \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n < e^q,$$

откуда, пользуясь тем, что $R < 2$, находим:

$$|T_n^{(q)}(x)| \leqslant 2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{q+1} \cdot e^q \frac{q!}{q^{q+1}} \cdot n^{q+1}$$

и окончательно:

$$|T_n^{(q)}(x)| \leqslant h \cdot k^q \cdot n^{q+1}, \tag{71}$$

где h и k — абсолютные постоянные, причем k можно считать большим единицы.

Введем, далее, числа:

$$C = \frac{1}{3h \sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}};$$

$$d_n = \frac{C}{n^3 S(3kn)}$$

и построим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n T_{3n}(x). \tag{72}$$

Покажем, что $\varphi(x)$ бесконечно диференцируема в промежутке $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, и попутно установим оценки для ее

---

[1]) Длина эллипса C_R равна $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$ и не превосходит числа $2\pi\sqrt{a^2+b^2} < 2\pi R$.

производных. Диференцируя формально ряд (72) p раз, имеем предположительно:

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{n \geqslant \frac{1}{3}p} d_n T_{3n}^{(p)}(x), \tag{73}$$

и нам надлежит проверить равномерную сходимость ряда (73). Опираясь на оценку (71), мы получаем для (73) мажорантный ряд:

$$\sum_{n \geqslant \frac{1}{3}p} d_n h k^p (3n)^{p+1},$$

который на основании выражения d_n можно представить в форме:

$$3^{p+1} Chk^p \cdot \sum_{n \geqslant \frac{1}{3}p} \frac{n^{p+1}}{n^3 S(3kn)} \equiv 3Ch \cdot \sum_{n \geqslant \frac{1}{3}p} \frac{(3kn)^p}{n^2 S(3kn)}. \tag{74}$$

Но по определению функции $S(r)$ будет:

$$S(r) \geqslant \frac{r^p}{m_p},$$

если $1 \leqslant p \leqslant r$. Значит, для $n \geqslant \frac{1}{3}p$ будет $1 \leqslant p \leqslant 3n < 3kn$, и стало быть,

$$\frac{(3kn)^p}{S(3kn)} \leqslant m_p.$$

Отсюда следует сходимость ряда (74), равенство (73) и оценка

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqslant m_p \qquad (p = 1, 2 \ldots).$$

В силу допущения, сделанного в начале доказательства, отсюда следует, что $\varphi(x)$ — аналитическая функция.

Но тогда и сложная функция

$$\varphi(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n T_{3n}(\cos\theta)$$

есть функция аналитическая в промежутке

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{3}.$$

Так как

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

то

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,$$

и стало быть,

$$\varphi(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(3n\theta).$$

Положим

$$3\theta = \psi$$

и

$$\Phi(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\psi.$$

Это функция аналитическая на промежутке $\pi \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, и так как она периодическая и четная, то на всей оси.

Покажем теперь, что для коэфициентов d_n при больших значениях n имеет место неравенство

$$|d_n| < e^{-\alpha n}, \tag{75}$$

где $\alpha > 0$. Действительно,

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\psi) \cos n\psi \, d\psi.$$

Интегрируя по частям p раз и замечая, что внеинтегральные члены исчезают в силу периодичности $\Phi(\psi)$, найдем:

$$d_n = \pm \frac{1}{\pi n^p} \int_0^{2\pi} \Phi^{(p)}(\psi) \begin{matrix} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{matrix} d\psi.$$

Но для аналитической функции, как мы видели в n° 3, справедлива оценка

$$2|\Phi^{(p)}(\psi)| < M^p p^p,$$

откуда

$$|d_n| \leqslant \left(\frac{Mp}{n}\right)^p.$$

Это неравенство верно *при всех* p. Значит, можно заменить правую часть ее минимумом:

$$|d_n| \leqslant \min_p \left(\frac{Mp}{n}\right)^p.$$

Но так как

$$\min\left(\frac{x}{a}\right)^x = e^{-\frac{a}{e}},$$

причем этот минимум достигается при $x = \frac{a}{e}$, то

$$\min_x\left(\frac{Mx}{n}\right)^x = e^{-\frac{n}{Me}}.$$

Нас интересует, однако, минимум не относительно всех x, а лишь относительно *целых значений* x.

Этот последний минимум, хотя и не равен $e^{-\frac{n}{Me}}$, но легко показать, что асимптотически при $n \to \infty$:

$$\min_p\left(\frac{Mp}{n}\right)^p \sim e^{-\frac{n}{Me}}.$$

Значит, для достаточно больших значений n

$$|d_n| < (1+\varepsilon)e^{-\frac{n}{Me}} < e^{-\alpha n},$$

где $\alpha < \frac{1}{Me}$. Таким образом неравенство (75) установлено. Пользуясь выражением для d_n, отсюда находим (для достаточно больших n):

$$S(3kn) > \frac{C}{n^3}e^{\alpha n} > e^{\beta n},$$

где $\beta < \alpha$.

Если

$$3kn \leqslant r < 3k(n+1),$$

то, очевидно,

$$S(r) \geqslant S(3kn),$$

и следовательно,

$$S(r) > e^{\beta n} > e^{\beta\left(\frac{r}{3k}-1\right)}.$$

Значит, если $\gamma < \frac{\beta}{3k}$, то для достаточно больших r будет:

$$S(r) > e^{\gamma r},$$

эт о и представляет собой условие 1) леммы n° 36.

Таким образом необходимость условия установлена для промежутка $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Распространение этого результата

на случай произвольного промежутка изложено ниже в n° 41, после доказательства достаточности условия.

39. Достаточность условий теоремы для промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Докажем теперь достаточность условий теоремы, ограничиваясь сначала опять совершенно определенным промежутком $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Итак, предположим, что для достаточно больших r будет:

$$S(r) > e^{\alpha r} \qquad (\alpha > 0), \tag{76}$$

и пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и подчиненная условию

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{77}$$

В таком случае все функции

$$\varphi(\theta) = f(\cos\theta);$$
$$\varphi_p(\theta) = f^{(p)}(\cos\theta),$$

где $f^{(p)}(x) = \frac{d^p f}{dx^p}$ — бесконечно диференцируемы и, будучи четными, представляются рядами Фурье вида:

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta;$$

$$\varphi_p(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} \cos n\theta.$$

Найдем зависимость между коэфициентами $a_n^{(p)}$ и $a_n^{(p+1)}$. Именно

$$\varphi_{p+1}(\theta) = f^{(p+1)}(x)\Big|_{x=\cos\theta} = \frac{d}{dx} f^{(p)}(x)\Big|_{\cos\theta} = \frac{d\varphi_p(\theta)}{dx}.$$

Но

$$\frac{d\varphi_p(\theta)}{dx} = \frac{d\varphi_p(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta} \cdot \varphi_p'(\theta).$$

Поэтому

$$-\sin\theta \cdot \varphi_{p+1}(\theta) = \varphi_p'(\theta). \tag{78}$$

Диференцируя почленно разложение $\varphi_p(\theta)$ и подставляя в (78), найдем:

$$\sin\theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p+1)} \cos n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(p)} n \sin n\theta. \tag{79}$$

Но

$$\sin\theta\cdot\cos n\theta=\frac{1}{2}\left[\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\right],$$

так что левая часть (79) примет вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(p+1)}\left[\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\right]=$$

$$=\frac{1}{2}a_0^{(p+1)}\sin\theta+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n-1}^{(p+1)}-a_{n+1}^{(p+1)}\right)\sin n\theta.$$

Подставляя это в (79) и сравнивая коэфициенты при $\sin n\theta$, находим для $n\geqslant 2$:

$$a_n^{(p)}=\frac{a_{n-1}^{(p+1)}-a_{n+1}^{(p+1)}}{2n}. \tag{80}$$

Установим еще для $a_n^{(q)}$ оценку:

$$|a_n^{(q)}|\leqslant\frac{2k^{q+1}m_{q+1}}{n}. \tag{81}$$

Для этого заметим, что

$$a_n^{(q)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_q(\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$a_n^{(q)}=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_q'(\theta)\sin n\theta\,d\theta.$$

Но

$$\varphi_q'(\theta)=-f^{(q+1)}(\cos\theta)\cdot\sin\theta,$$

и, в силу оценки (77),

$$|\varphi_q'(\theta)|\leqslant k^{q+1}m_{q+1},$$

откуда и следует (81).

С помощью соотношений (80) и (81) можно получить оценку для a_n. Именно, взяв какое-либо a_n, где $n>2$, будем иметь для $1\leqslant p\leqslant n-1$:

$$\left|a_{n-p+1}^{(p-1)}\right|\leqslant\frac{\left|a_{n-p}^{(p)}\right|+\left|a_{n-p+2}^{(p)}\right|}{2(n-p+1)},$$

и, следовательно, в силу (81),

$$\left| a_{n-p+1}^{(p-1)} \right| \leqslant \frac{k^{p+1} m_{p+1}}{n-p+1} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{n-p+2} \right),$$

откуда

$$\left| a_{n-p+1}^{(p-1)} \right| < \frac{2k^{p+1} m_{p+1}}{(n-p)(n-p+1)}. \tag{81*}$$

Таким же образом, как, исходя из оценок для коэфициентов $a^{(p)}$, мы оценили коэфициенты $a^{(p-1)}$, мы перейдем теперь к рассмотрению коэфициентов $a^{(p-2)}$. Именно, согласно (80):

$$\left| a_{n-p+2}^{(p-2)} \right| \leqslant \frac{\left| a_{n-p+1}^{(p-1)} \right| + \left| a_{n-p+3}^{(p-1)} \right|}{2(n-p+2)},$$

откуда, в силу (81*),

$$\left| a_{n-p+2}^{(p-2)} \right| \leqslant \frac{k^{p+1} m_{p+1}}{n-p+2} \left(\frac{1}{(n-p)(n-p+1)} + \frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)} \right),$$

и следовательно,

$$\left| a_{n-p+2}^{(p-2)} \right| < \frac{2k^{p+1} m_{p+1}}{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)}.$$

Продолжая этот процесс, мы после p шагов придем к оценке

$$|a_n| < \frac{2k^{p+1} m_{p+1}}{(n-p)(n-p+1)\ldots n}.$$

Это неравенство нетрудно преобразовать.

Именно разности, стоящие в знаменателе, имеют вид

$$n-k \qquad (k=0, 1, \ldots, p).$$

Так как при этом $n \geqslant p+1$, то

$$n-k \geqslant \frac{p+1-k}{p+1} n,$$

и стало быть,

$$|a_n| < \frac{2k^{p+1} (p+1)^{p+1} m_{p+1}}{(p+1)!\, n^{p+1}}.$$

В силу формулы Стирлинга:

$$(p+1)! = \sqrt{2\pi(p+1)}\,(p+1)^{p+1} e^{-(p+1)} (1+\omega)$$

будем иметь:

$$\frac{(p+1)^{p+1}}{(p+1)!} < Be^{p+1},$$

где B — постоянная. Значит,

$$|a_n| < \frac{2k^{p+1}Be^{p+1}}{n^{p+1}} m_{p+1},$$

и окончательно:

$$|a_n| < \frac{A^{p+1}m_{p+1}}{n^{p+1}}. \tag{82}$$

Это неравенство доказано для $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Но, увеличивая в случае надобности A, мы можем добиться того, чтобы оно оказалось верным и для $p=0$.[1]) Таким образом (82) доказано для $1 \leqslant p+1 \leqslant n$. Меняя здесь $p+1$ на p, имеем:

$$|a_n| < \frac{A^p m_p}{n^p} \qquad (1 \leqslant p \leqslant n),$$

и стало быть,

$$|a_n| \leqslant \min_{(1 \leqslant p \leqslant n)} \left(\frac{A^p m_p}{n^p}\right).$$

Но

$$\min_{(1 \leqslant p \leqslant n)} \left(\frac{A^p m_p}{n^p}\right) = \frac{1}{\max\limits_{(1 \leqslant p \leqslant n)} \left\{\frac{\left(\frac{n}{A}\right)^p}{m_p}\right\}}.$$

Так как $A > 1$, то границы неравенства $1 \leqslant p \leqslant n$ шире, чем границы неравенства $1 \leqslant p \leqslant \frac{n}{A}$. Стало быть,

$$\max_{(1 \leqslant p \leqslant n)} \left\{\frac{\left(\frac{n}{A}\right)^p}{m_p}\right\} \geqslant S\left(\frac{n}{A}\right),$$

а потому

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{S\left(\frac{n}{A}\right)}.$$

Отсюда, в силу (76), для больших n будет

$$|a_n| < e^{-\alpha \frac{n}{A}} = e^{-\beta n} \qquad (\beta > 0).$$

---

[1]) Ибо a_n как коэфициенты Фурье периодической бесконечно дифференцируемой функции удовлетворяют условию

$$na_n \to 0.$$

Возвращаясь к функции $f(x)$, мы имеем для всех x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{T}_n(x), \tag{83}$$

где $\mathrm{T}_n(x)$ — полиномы Чебышева. Если C_R есть эллипс с фокусами в точках $+1$ и -1 и полусуммой осей $a+b=R$, то, как уже отмечалось выше, в точках этого эллипса

$$|\mathrm{T}_n(x)| < R^n,$$

так что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} R^n \tag{84}$$

оказывается мажорантным для (83). Но если $R < e^{\beta}$, то (84) сходится. Значит, $f(x)$ — *аналитическая* в эллипсе C_R при $R < e^{\beta}$. Теорема доказана.

40. Достаточность условий для любого промежутка. Покажем теперь, что условия теоремы остаются достаточными для любого промежутка $a \leqslant x \leqslant b$.

Итак, пусть $f(x)$ — бесконечно диференцируемая функция, заданная на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющая неравенствам

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

причем числа m_n подчинены условию (76).

Положим

$$y = 2\frac{x-a}{b-a} - 1,$$

так что y изменяется в пределах $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Если

$$\varphi(y) = f(x),$$

то

$$\varphi^{(n)}(y) = f^{(n)}(x) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^n.$$

Значит,

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqslant \left(K \cdot \frac{b-a}{2}\right)^n m_n,$$

и по доказанному $\varphi(y)$ является аналитической фукцией от y. Возвращаясь к переменной x, мы убеждаемся, что и $f(x)$ —

аналитическая функция. Таким образом, достаточность условия теоремы установлена для всякого промежутка $a \leqslant x \leqslant b$.

41. Необходимость условий для произвольного промежутка. Покажем теперь, что условия теоремы оказываются необходимыми для того, чтобы всякая функция $f(x)$, заданная на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ и подчиненная условиям

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{85}$$

была аналитической.

Допустим, следовательно, что из условий (85) вытекает аналитичность $f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Предположим теперь, что $\varphi(y)$ есть бесконечно диференцируемая функция, заданная на промежутке $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ и подчиненная условию

$$|\varphi^{(n)}_{(y)}| \leqslant (b-a)^n m_n. \tag{86}$$

Положим

$$y = \frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{2}$$

и

$$f(x) = \varphi(y) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда

$$f^{(n)}_{(x)} = \varphi^{(n)}_{(y)} \cdot \frac{1}{(b-a)^n},$$

и, в силу (86),

$$|f^{(n)}_{(x)}| \leqslant m_n.$$

По предположению отсюда следует, что $f(x)$ — аналитическая функция, а тогда и $\varphi(y)$ — аналитическая.

Таким образом всякая функция $\varphi(y)$, подчиненная неравенствам (86), оказывается аналитической. Но тогда, в силу доказанного о необходимости условия теоремы для промежутка $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$, можно утверждать, что при больших r будет:

$$S^*(r) > e^{\alpha r}, \qquad (\alpha > 0) \tag{87}$$

где положено

$$S^*(r) = \max_{(1 \leqslant n \leqslant r)} \left\{ \frac{r^n}{(b-a)^n m_n} \right\}.$$

В силу доказанной уже для *любого* интервала *достаточности* условия теоремы из (87) следует, что класс $C_{\{(b-a)^n m_n\}}$ состоит из *аналитических* функций, каков бы ни был проме-

жуток их задания. Но (и это здесь самое важное) *классы* $C_{\{m_n\}}$ *и* $C_{\{A^n m_n\}}$ *состоят из одних и тех же функций.*

Значит, класс $C_{\{m_n\}}$ состоит лишь из аналитических функций, каков бы ни был их промежуток задания. Но если это есть промежуток $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, то отсюда следует выполнение условия (76).

Теорема доказана полностью.

§ 3. Решение проблемы I для периодических функций

В этом параграфе мы займемся решением проблемы I n° 31 для периодических функций. Начнем мы с ряда предварительных утверждений.

42. Лемма I. *Пусть дана последовательность чисел* $\{m_n\}$ *и построена соответствующая функция* [1]) $T(r)$:

$$T(r) = \max\left(\frac{r^n}{m_n}\right).$$

В таком случае для каждого $n \geqslant 1$ *найдется такое* r_n, *что*

$$T(r_n) = \frac{r_n{}^n}{\overline{m}_n}$$

[причем под $\overline{m}_n$ понимаются члены *исправленной* последовательности, соответствующей многоугольнику Валирона (n° 23 и 24)].

Доказательство. Пусть точка $(n;\ \ln \overline{m}_n)$ лежит на стороне $P_{n_i}P_{n_{i+1}}$ ломаной Валирона. Если угловой коэфициент этой стороны есть $\ln r$, то начальная ордината ее равна $-\ln\left(\frac{r^n}{\overline{m}_n}\right)$. С другой стороны, всякая параллельная прямая с меньшей начальной ординатой пройдет ниже всей ломаной Валирона. Значит, начальная ордината стороны $P_{n_i}P_{n_{i+1}}$ есть наименьшее число вида $-\ln\left(\frac{r^n}{\overline{m}_n}\right)$, т. е. совпадает [2]) с $-\ln T(r)$. Итак, угловой коэфициент этой стороны решает поставленную задачу.

---

[1]) Мы считаем, что $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$.

[2]) Напомним, что у последовательностей $\{m_n\}$ и $\{\overline{m}_n\}$ одна и та же функция $T(r)$.

43. Пусть даны две последовательности: $\{m_n\}$ и $\{m_n'\}$ с соответствующими функциями $T(r)$ и $T_1(r)$:

$$T(r) = \max\left(\frac{r^n}{m_n}\right); \quad T_1(r) = \max\left(\frac{r^n}{m_n'}\right).$$

Составим для каждой из последовательностей „исправленные" последовательности $\{\overline{m}_n\}$ и $\{\overline{m}_n'\}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма II. *Условия:*

1) *существует* $\alpha > 0$ *такого рода, что при достаточно больших* r *будет:*

$$T(r) > T_1(\alpha r); \tag{88}$$

2)

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{\overline{m}_n}{\overline{m}_n'}} < +\infty$$

совершенно эквивалентны.

Доказательство. Если выполнено условие 2), то существует постоянная A такого ряда, что при всех n будет

$$\overline{m}_n < A^n \overline{m}_n'.$$

Значит, при всех n будет

$$\frac{r^n}{\overline{m}_n} > \frac{r^n}{A^n \overline{m}_n'},$$

а потому

$$T(r) > T_1\left(\frac{r}{A}\right),$$

и выполнено условие 1).

Обратно, пусть выполнено условие 1). Взяв произвольное n, найдем r_n, удовлетворяющее лемме I n⁰ 42:

$$T(r_n) = \frac{r_n^n}{\overline{m}_n}.$$

В силу условия 1) будет:

$$\frac{r_n^n}{\overline{m}_n} > T_1(\alpha r_n) \geqslant \frac{\alpha^n r_n^n}{\overline{m}_n'},$$

откуда

$$\sqrt[n]{\frac{\overline{m}_n}{\overline{m}_n'}} < \frac{1}{\alpha},$$

и выполнено условие 2). Лемма доказана.

44. В целях дальнейшего остановимся еще на таком вопросе: *при каких условиях классу $C_{\{m_n\}}$ принадлежат также и производные всех входящих в него функций?* В этом направлении легко установить следующий факт.

Если при всех n будет

$$\sqrt[n]{\frac{m_{n+1}}{m_n}} < \omega, \tag{89}$$

то как только $f(x)$ принадлежит $C_{\{m_n\}}$, то сейчас же и производная ее $f'(x)$ входит в этот класс.

Действительно, это следует из неравенств

$$|[f'(x)]^{(n)}| = |f^{(n+1)}(x)| < K^{n+1}m_{n+1} < K^{n+1}\omega^n m_n < K_1{}^n m_n.$$

Однако условие (89), будучи достаточным для того, чтобы $f'(x)$ входила в $C_{\{m_n\}}$, вовсе не является необходимым для этого. Ограничиваясь *периодическими* функциями, можно доказать более точное утверждение.

Теорема. *Для того, чтобы производная всякой периодической функции класса $C_{\{m_n\}}$ также принадлежала этому классу, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\sqrt[n]{\frac{\overline{m}_{n+1}}{\overline{m}_n}} < \omega. \tag{90}$$

Достаточность. Пусть условие (90) выполнено. Если функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

входит в $C_{\{m_n\}}$, то легко оценить коэфициенты a_n и b_n. В самом деле,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Интегрируя p раз по частям, найдем:

$$a_n = \pm \frac{1}{\pi n^p} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) \begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix} dx,$$

откуда

$$|a_n| < 2k^p \frac{m_p}{n^p}. \tag{91}$$

Это неравенство верно при всех p; поэтому можно заменить $\frac{k^p m_p}{n^p}$ ее минимумом, т. е. $\frac{1}{T\left(\frac{n}{k}\right)}$, так что

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{T\left(\frac{n}{k}\right)},$$

а отсюда [1])

$$|a_n| \leqslant 2k^p \frac{\overline{m}_p}{n^p}. \tag{92}$$

Меняя p на $p+3$ и замечая, что, в силу (90), будет

$$\overline{m}_{p+3} < \omega^{3p+3} \overline{m}_p,$$

найдем, что

$$|a_n| < 2 \cdot \frac{k^{p+3} \omega^{3p+3} \overline{m}_p}{n^{p+3}}.$$

Аналогичная оценка верна для b_n. Но тогда для производной p-ого порядка от $f'(x)$ будет:

$$f^{(p+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\pm a_n \begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix} \pm b_n \begin{matrix}\sin nx \\ \cos nx\end{matrix}\right) n^{p+1},$$

так что

$$|f^{(p+1)}(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) n^{p+1},$$

---

[1]) Здесь мы сталкиваемся со следующим интересным обстоятельством: если при всех $p = 1, 2, \ldots$ будет

$$|\gamma| \leqslant \frac{m_p}{a^p} \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

то при всех p будет справедливым и более *сильное* неравенство

$$|\gamma| \leqslant \frac{\overline{m}_p}{a^p}.$$

Это доказывается так же, как проделанный в тексте переход от (91) к (92).

и следовательно,

$$|f^{(p+1)}(x)| < 4k^{p+3}\omega^{3p+3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\overline{m}_p,$$

откуда и следует,[1]) что $f'(x)$ входит в $C_{\{m_n\}}$.

Необходимость. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — произвольная последовательность целых чисел. В таком случае из нее можно выделить такую частичную последовательность $\{k_j\}$, чтобы ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right)}{\mathrm{T}(k_j)} \tag{93}$$

сходился. Действительно, вспоминая, что $\mathrm{T}(r)$ служит функцией $m(r)$ для целой функции $\sum\frac{z^n}{m_n}$, мы можем на основании формулы (40) n° 20 написать:

$$\frac{\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right)}{\mathrm{T}(k_j)} = e^{\int\limits_{k_j}^{\frac{k_j}{e}}\frac{N(t)}{t}dt},$$

и так как $N(t)$ *возрастает*, то

$$\int\limits_{\frac{k_j}{e}}^{k_j}\frac{N(t)}{t}dt \geqslant N\left(\frac{k_j}{e}\right)\int\limits_{\frac{k_j}{e}}^{k_j}\frac{dt}{t} = N\left(\frac{k_j}{e}\right),$$

и следовательно

$$\frac{\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right)}{\mathrm{T}(k_j)} \leqslant e^{-N\left(\frac{k_j}{e}\right)}.$$

Так как $N(t)$ стремится к бесконечности вместе с , то наше предложение доказано.

Выбрав указанную последовательность $\{k_j\}$, построим функцию

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos k_j x}{\mathrm{T}(k_j)}. \tag{94}$$

---

[1]) Напомним, что $\overline{m}_n \leqslant m_n$.

Эта функция входит в $C_{\{m_n\}}$. В самом деле, очевидно

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j^p}{\mathrm{T}(k_j)}$$

или

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j^p}{\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right)} \cdot \frac{\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right)}{\mathrm{T}(k_j)}.$$

Но по определению $\mathrm{T}(r)$ будет

$$\mathrm{T}\left(\frac{k_j}{e}\right) \geqslant \frac{k_j^p}{e^p m_p},$$

откуда следует, что

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqslant C e^p m_p,$$

где через C обозначена сумма ряда (93). Это же и значит, что функция (94) входит в класс $C_{\{m_n\}}$.

В таком случае и производная ее

$$f_1'(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{\mathrm{T}(k_j)} \sin k_j x$$

также входит в этот класс. [1]) Отсюда [так же как мы установили неравенство (91) при доказательстве достаточности условия теоремы] мы установим, что

$$\frac{k_j}{\mathrm{T}(k_j)} < 2A^p \frac{m_p}{k_j^p} < \frac{m_p}{\left(\frac{k_j}{2A}\right)^p},$$

и так как здесь p — любое, то

$$\frac{k_j}{\mathrm{T}(k_j)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{T}(\alpha k_j)}, \tag{95}$$

где $\alpha = \frac{1}{2A}$.

Отсюда следует существование такой постоянной β, что при всех n, начиная с некоторого, будет:

$$\frac{n}{\mathrm{T}(n)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{T}(\beta n)}. \tag{96}$$

---

[1]) Ведь мы доказываем необходимость условия теоремы.

(Напомним, что константа α зависит от выбранной в начале последовательности $\{n_i\}$). Действительно, если бы такого β не существовало, то, взяв последовательность $\beta_i \to 0$, мы нашли бы такую последовательность n_i, что было бы

$$T(n_i) < n_i T(\beta_i n_i) \qquad (n_i \to \infty;\ \beta_i \to 0).$$

Выбрав из нее надлежащую частичную последовательность $\{k_j\}$, мы имели бы для последней

$$T(k_j) < k_j T(\delta_j k_j) \qquad (\delta_j \to 0).$$

Но, согласно (95),

$$T(k_j) \geqslant k_j T(\alpha k_j),$$

и следовательно,

$$T(\alpha k_j) < T(\delta_j k_j),$$

что становится невозможным при $\delta_j \leqslant \alpha$. Итак, $\beta > 0$, удовлетворяющее условию (96), существует.

Если теперь r — произвольное число, причем $n \leqslant r < n+1$, то

$$T(r) \geqslant T(n) \geqslant nT(\beta n) \geqslant \frac{r}{2} T\left(\beta \frac{r}{2}\right). \tag{97}$$

Взяв произвольное n, найдем такое r_n, что $T(r_n) = \frac{r_n^n}{\overline{m}_n}$. Для этого r_n неравенство (97) дает

$$\frac{r_n^n}{\overline{m}_n} \geqslant \frac{r_n}{2} \cdot \frac{r_n^{n-1}\beta^{n-1}}{2^{n-1}\overline{m}_{n-1}}$$

или

$$\overline{m}_n \leqslant \frac{2^n}{\beta^{n-1}} \overline{m}_{n-1},$$

а это равносильно условию (90) теоремы. Теорема доказана.

45. Перейдем к решению проблемы I.

Теорема. *Если всякая периодическая функция, входящая в класс $C_{\{m_n\}}$ входит также в класс $C_{\{m'_n\}}$, то выполняются оба (эквивалентные между собой) условия:*

1) $T(r) > T_1(\alpha r) \qquad (\alpha > 0;\ r > r_0)$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{\overline{m}_n}{\overline{m}'_n}} < A$.

Обратно, если выполняется одно из этих условий и если кроме того будет

$$\sqrt[n]{\frac{\overline{m}'_{n+1}}{\overline{m}'_n}} < \omega, \tag{98}$$

то всякая периодическая функция класса $C_{\{m_n\}}$ *входит в* $C_{\{m'_n\}}$.

Необходимость условий. Для доказательства необходимости условий рассмотрим снова функцию (94). Как мы уже видели, она входит в $C_{\{m_n\}}$ и, значит, и в $C_{\{m'_n\}}$. Отсюда [совершенно так же, как мы в n° 44 установили (91)] мы теперь докажем, что

$$\frac{1}{T(k_j)} < \frac{A^p m_p'}{k_j^p},$$

а отсюда, опираясь на произвольность p, выведем, что

$$\frac{1}{T(k_j)} \leqslant \frac{1}{T_1(\alpha k_j)}.$$

Повторяя рассуждения, которые позволили нам перейти от (95) к (96), мы убедимся, что существует $\beta > 0$, такое, что

$$T(n) \geqslant T_1(\beta n) \qquad (\beta > 0;\ n > n_0).$$

Если, наконец, $n \leqslant r < n+1$, то

$$T(r) \geqslant T(n) \geqslant T_1(\beta n) > T_1\left(\beta \frac{r}{2}\right),$$

и следовательно, выполнено условие 1).

Достаточность условий. Предположим теперь, что выполнены условия теоремы. Если периодическая функция

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

входит в класс $C_{\{m_n\}}$, то справедлива оценка (92), которую мы представим в форме:

$$|a_n| < k^{p+2} \frac{\overline{m}_{p+2}}{n^{p+2}}.$$

Если применить условие 2) доказываемой теоремы, то окажется

$$|a_n| < \frac{(Ak)^{p+2}}{n^{p+2}} \overline{m}'_{p+2},$$

и следовательно, в силу неравенства (98),

$$|a_n| < \frac{(Ak)^{p+2} \omega^{2p+1}}{n^{p+2}} \overline{m}_p'$$

или

$$|a_n| < \frac{M^p \overline{m}'_p}{n^{p+2}}.$$

Такая же оценка верна для b_n. Значит,

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^p (|a_n| + |b_n|) < 2M^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \overline{m}_p'$$

и окончательно (так как $\overline{m}_p' \leqslant m_p'$):

$$|f^{(p)}(x)| < L^p m_p',$$

так что $f(x)$ входит в $C_{\{m_n'\}}$. Теорема доказана [1]).

Следствие. *Если все периодические функции одного из классов $C_{\{m_n\}}$ и $C_{\{m_n'\}}$ входят в другой и обратно, то выполняются оба условия:*

1) $T_1(\alpha r) < T(r) < T_1(\beta r) \qquad (\beta > \alpha > 0;\ r > r_0);$

2) $A \leqslant \sqrt[n]{\dfrac{\overline{m}_n}{\overline{m}_n'}} \leqslant B \qquad (0 < A < B < \infty).$

Обратно, если выполнено одно из этих условий и кроме того неравенство (98), то все периодические функции каждого из классов входят и в другой класс.

Это следствие сделается вполне ясным, если мы заметим, что условие 2) и неравенство (98) влекут за собой выполнение условия:

$$\sqrt[n]{\frac{\overline{m}_{n+1}}{\overline{m}_n}} < \omega_1, \tag{99}$$

нужного при доказательстве достаточности. Действительно, из 2) имеем:

$$\overline{m}_{n+1} \leqslant B^{n+1} \overline{m}'_{n+1}; \quad \overline{m}_n \geqslant A^n \overline{m}_n'.$$

---

[1]) Отметим попутно, что *всякая* функция класса $C_{\{m_n\}}$ входит в $C_{\{m_n'\}}$, если выполнено условие

$$\sqrt[n]{\frac{m_n}{m_n'}} < A_1,$$

в котором речь идет не об исправленных, а об исходных последовательностях.

Действительно, из неравенства $|f^{(n)}(x)| < K^n m_n$ непосредственно вытекает, что

$$|f^{(n)}(x)| < K^n A_1^n m'_n = C^n m'_n.$$

Значит,

$$\frac{\overline{m}_{n+1}}{\overline{m}_n} \leqslant \frac{B^{n+1}}{A^n} \cdot \frac{\overline{m}'_{n+1}}{\overline{m}'_n},$$

откуда [в связи с (98)] и следует (99).

Замечание. Класс аналитических функций характеризуется числами $m_n' = n!$ или, что то же самое [1]), $m_n' = n^n$. Стало-быть, для класса аналитических функций $T_1(r) \sim e^{\frac{r}{e}}$. Поэтому для того, чтобы всякая *периодическая* функция класса $C_{\{m_n\}}$ была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$T(r) > e^{\alpha r} \qquad (\alpha > 0;\ r > r_0). \tag{100}$$

Условие (100) сходно с условием 1) леммы n° 36 и теоремы n° 37. Однако, в отличие от упомянутого условия, условие (100) относится лишь к периодическим функциям. Можно построить пример класса $C_{\{m_n\}}$, удовлетворяющего условию (100), но содержащего неаналитические (разумеется не периодические) функции.

---

[1]) Ибо по формуле Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, а наличие множителя вида A^n несущественно.

Глава V

ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка вопроса и предварительные замечания

46. В этой главе мы установим, что полученные ранее результаты могут быть применены к вопросам совсем другого рода, где рассматриваются свойства суммируемых функций и их рядов Фурье.

Определение. *Условимся говорить, что точка x_0 есть средний справа нуль показательного порядка ρ для суммируемой функции $f(x)$, если*

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \frac{\ln\left(-\ln \int\limits_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt\right)}{-\ln \alpha} = \rho.$$

Аналогично вводится понятие нуля слева.

Если функция $f(x)$ непрерывна и в точке x_0 отлична от нуля, то $\rho = 0$. Действительно, в этом случае

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt = \alpha\theta(\alpha),$$

где $\theta(\alpha) \to |f(x_0)|$ при $\alpha \to 0$.

Отсюда

$$\frac{\ln\left(-\ln \int\limits_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt\right)}{-\ln \alpha} = \frac{\ln[-\ln \alpha - \ln \theta(\alpha)]}{-\ln \alpha}$$

и правая часть бесконечно-мала вместе с α.

Более того, даже если функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \varphi(x)(x - x_0)^k,$$

причем $\varphi(x)$ непрерывна и отлична от нуля в точке x_0, то $\rho = 0$. Действительно, здесь

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt = \theta(\alpha)\,\alpha^{k+1},$$

где $\theta(\alpha) \to \frac{\varphi(x_0)}{k+1}$, при $\alpha \to 0$, и можно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем случае.

Однако, если $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \varphi(x) \cdot e^{\frac{-1}{(x-x_0)^k}},$$

то здесь $\rho = k$. В самом деле, в этом случае, с одной стороны,

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt < C\alpha\, e^{-\frac{1}{\alpha^k}},$$

так что

$$\ln\left(-\ln \int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt\right) > \ln\left[\frac{1}{\alpha^k} - \ln(C\alpha)\right] = -k\ln\alpha + \theta(\alpha),$$

где $\theta(\alpha)$ — положительна при малых α. Отсюда

$$\rho \geqslant k.$$

С другой стороны, при любом $\varepsilon > 0$ будет при малых α

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(t)|\,dt > C_1 e^{-\frac{1}{\alpha^{k+\varepsilon}}},$$

откуда следует, что $\rho \leqslant k + \varepsilon$, и следовательно, $\rho = k$.

Таким образом наличие у функции в точке x_0 нуля показательного порядка $\rho > 0$ означает чрезвычайно быстрое исчезание (в среднем) этой функции вблизи x_0.

47. Определение. *Показателем сходимости последовательности целых чисел $\{n_i\}$ называется точная нижняя граница γ чисел k, при которых сходится ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^k}.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ будет:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{\gamma+\varepsilon}} < +\infty;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^{\gamma-\varepsilon}} = +\infty.$$

Если последовательность $\{n_i\}$ состоит из *всех* целых чисел, то $\gamma = 1$; поэтому для всякого ряда $\gamma \leqslant 1$. Отрицательным быть γ, очевидно, не может, но для рядов $n_i = m^i$, где m — определенное целое число, большее единицы, будет $\gamma = 0$. Поэтому всегда

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

48. Основной вопрос, исследуемый в настоящей главе, заключается в установлении условий, которые нужно наложить на коэфициенты Фурье суммируемой функции, чтобы наличие у этой функции нуля показательного порядка гарантировало тождественное [1]) обращение функции в нуль.

При изучении этой проблемы нам как раз и понадобится только что введенное понятие показателя сходимости. Именно, как мы увидим ниже, имеет место следующая теорема:

Теорема С. Мандельбройта. *Пусть суммируемая в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ средний нуль показательного порядка $\rho > 0$. Предположим, что ее разложение Фурье имеет ряд пустот:*

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x),$$

причем показатель сходимости σ последовательности номеров $\{n_i\}$ есть число, меньшее единицы,

$$\sigma < 1,$$

Если имеет место неравенство

$$\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}, \tag{101}$$

то функция $f(x)$ почти везде равна нулю.

---

[1]) При этом функции, различающиеся на совокупности меры нуль значений аргумента, не считаются различными.

Как мы покажем ниже, эта теорема в некотором смысле является окончательной и не может быть улучшена.

Та же теорема может быть высказана и в такой форме:

„*Рассмотрим класс функций $f(x)$, имеющих в точке $x=0$ средний нуль показательного порядка $\rho>0$.*

Если для некоторой функции этого класса известно, что все ее коэфициенты Фурье, кроме разве лишь имеющих номера из заданной последовательности $\{n_i\}$, суть нули

$$a_n = b_n = 0 \qquad (n \neq n_i;\ i = 1, 2, \ldots),$$

и если выполнено условие (101), то и остальные коэфициенты a_{n_i}, b_{n_i} суть нули".

Коротко говоря, теорема позволяет из исчезания *некоторых* коэфициентов Фурье заключать об исчезании *всех* этих коэфициентов.

49. Для того чтобы выяснить идеи, лежащие в основе доказательства теоремы, мы остановимся сначала на более частной и простой проблеме.

Рассмотрим класс функций $f(x)$, таких, что

1) $f(x)$ представима в форме:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \tag{102}$$

где ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{103}$$

сходится;

2) для $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ функция $f(x)$ равна нулю.[1])

Спрашивается, какие пустоты нужно предположить в ряду (102), чтобы быть уверенным в том, что все его коэфициенты суть нули.

Прежде чем давать ответ на этот вопрос, проведем некоторые построения. Именно, возьмем некоторую последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ со сходящимся рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|,$$

---

[1]) Это условие проще, чем требование наличия среднего нуля, но имеет в некотором смысле тот же характер.

и выберем в промежутке $(0, \alpha)$ ряд значений $\{x_k\}$

$$0 < x_k < \alpha.$$

Для любой функции рассматриваемого класса будет

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Умножив это равенство на γ_k, суммируя по k и меняя порядок суммирования, что, очевидно, допустимо, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin nx_k\right) = 0$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n) = 0, \tag{104}$$

где положено

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin(tx_k). \tag{105}$$

Таким образом, *функция $\varphi(t)$ определяется числами γ_k и x_k, не зависящими от выбора функции $f(x)$ рассматриваемого класса.*

Пусть теперь $f(x)$ принадлежит к указанному классу и имеет разложение Фурье с пустотами:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \sin n_i x.$$

Если число n_{i_0} обладает следующим свойством: какова бы ни была последовательность $\{\varepsilon_i\}$, где $\varepsilon_i = +1$ или $\varepsilon_i = -1$, всегда возможно построить функцию $\varphi(t)$ вида (105), такого рода, чтобы было

$$\varphi(n_i)\,\varepsilon_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi(n_{i_0}) \neq 0,$$

то

$$a_{n_{i_0}} = 0. \tag{106}$$

Действительно, равенство (104) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \varphi(n_i) = 0.$$

Если функция $\varphi(t)$ построена так, что $\varphi(n_i) a_{n_i} \geqslant 0$ и $\varphi(n_{i_0}) \neq 0$, то, очевидно, должно быть выполнено (106).

Таким образом, рассмотренное условие позволяет иногда решить поставленную задачу.

50. Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(m^i x),$$

где m — целое число, большее единицы, и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty.$$

Эта функция имеет характер известной Вейерштрассовой функции.

Допустим, что $f(x) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, где $\alpha > \frac{\pi}{m}$. В таком случае, опираясь на предложение n° 49, можно показать, что $f(x) \equiv 0$.

В самом деле, здесь $n_i = m^i$. Пусть $\{\varepsilon_i\}$ — произвольная последовательность, составленная из чисел $+1$ и -1.

Положим

$$\gamma_k = \frac{\varepsilon_k}{2^k};$$

$$x_k = \frac{\pi}{m^{k+1}}.$$

В таком случае

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \cdot \sin \frac{\pi t}{m^{k+1}}.$$

Значит,

$$\varphi(n_i) = \varphi(m^i) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \cdot \sin \frac{\pi m^i}{m^{k+1}}.$$

Очевидно, знак правой части определяется знаком первого слагаемого. Поэтому

$$\varphi(n_i)\,\varepsilon_i > 0.$$

Отсюда следует, что все коэфициенты $c_i = a_{n_i}$ суть нули, и наше предложение доказано.

51. Построения n° 49 можно несколько изменить. Именно, взяв произвольную функцию $\gamma(t)$ суммируемую в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, мы можем для любой функции $f(x)$ класса, указанного в n° 49, написать:

$$\gamma(t)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \alpha),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\alpha} \gamma(t)\sin nt\,dt = 0, \tag{107}$$

ибо сходимость ряда (103) обеспечивает возможность почленного интегрирования.

Если ввести функцию $\Gamma(t)$, положив

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ 0 & \alpha < t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

и обозначить ее коэфициенты Фурье, соответствующие синусам кратных дуг, через p_n:

$$p_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(t)\sin nt\,dt,$$

то равенство (107) примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n = 0. \tag{108}$$

Пусть разложение Фурье $f(x)$ (из рассматриваемого класса) имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \sin n_i x.$$

Если n_{i_0} обладает тем свойством, что, какова бы ни была последовательность $\{\varepsilon_i\}$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$, всегда можно построить функцию $\Gamma(t)$ так, чтобы было

$$p_{n_i}\varepsilon_i \geqslant 0,$$

$$p_{n_{i_0}} \neq 0,$$

то

$$a_{n_{i_0}} = 0.$$

Это доказывается на основании (108) так же, как аналогичное предложение n° 49.

В частности $a_{n_{i_0}} = 0$, если возможно построить $\Gamma(t)$ так, чтобы было

$$p_{n_{i_0}} \neq 0;$$

$$p_{n_i} = 0 \qquad (i \neq i_0).$$

52. Наконец, в этом же направлении можно установить еще одно предложение. На этот раз мы откажемся от предположения, что $f(x)$ исчезает в некотором промежутке $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, и ограничимся условием:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \sin n_i x, \tag{109}$$

причем ряд $\sum |a_{n_i}|$ опять предполагаем сходящимся.

Если n_{i_0} таково, что всякому $\alpha > 0$ можно соотнести функцию $\gamma_\alpha(t)$, заданную и ограниченную в промежутке $(0, \alpha)$ и такую, что

1) $\displaystyle\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \sin(n_i t)\, dt = 0 \qquad (i \neq i_0);$

2) $\displaystyle\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \sin(n_{i_0} t)\, dt \neq 0;$

3) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\max|\gamma_\alpha(t)| \cdot \int_0^\alpha |f(t)|\, dt}{\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \sin(n_{i_0} t)\, dt} = 0,$$

то

$$a_{n_{i_0}} = 0.$$

Действительно, умножая (109) на $\gamma_\alpha(t)$ и почленно интегрируя, что, очевидно, допустимо, мы найдем:

$$\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \sin(n_i t)\, dt,$$

откуда

$$\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) f(t)\, dt = a_{n_{i_0}} \int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \cdot \sin(n_{i_0} t)\, dt,$$

и стало-быть,

$$a_{n_{i_0}} = \frac{\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) f(t)\, dt}{\int_0^\alpha \gamma_\alpha(t) \sin(n_{i_0} t)\, dt}.$$

В силу определения $\gamma_\alpha(t)$ правая часть бесконечно мала вместе с α, и следовательно, $a_{n_{i_0}} = 0$.

Заметим, что, ограничившись рассмотрением класса функций $f(x)$ с наперед указанной скоростью убывания интеграла

$$\int_0^\alpha |f(x)|\, dx,$$

мы можем определение $\gamma_\alpha(t)$ освободить от влияния выбора индивидуальной функции класса.

§ 2. Доказательство основной теоремы

53. Лемма. *Пусть дана последовательность целых чисел $\{n_i\}$ с показателем сходимости $\sigma < 1$ и целое число m, не входящее в эту последовательность.*

Если a и b — вещественные числа, неравные одновременно нулю, и ρ число, подчиненное условию,

$$\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}, \tag{110}$$

то для всякого достаточно малого α возможно построить функцию $\gamma_\alpha(x)$ со следующими свойствами:

1) *$\gamma_\alpha(x)$ задана в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \alpha$;*
2) *$\gamma_\alpha(x)$ бесконечно-диференцируема;*
3) $\gamma_\alpha^{(n)}(0) = \gamma_\alpha^{(n)}(\alpha) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;
4) *если положить*

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \gamma_\alpha(x)\cos nx dx; \quad b_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \gamma_\alpha(x)\sin nx dx,$$

то будет

$$a_{n_i}^{(\alpha)} = b_{n_i}^{(\alpha)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

5) *существует постоянная $\omega > 0$, не зависящая от α, такая, что*

$$|a \cdot a_m^{(\alpha)} + b \cdot b_m^{(\alpha)}| > \omega\alpha^2;$$

6) $$|\gamma_\alpha(x)| < e^{\alpha^{-\rho}}.$$

Доказательство. Введем три положительные константы: η_1, η_2, η_3, подчиненные условию

$$\gamma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 < \frac{1-\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\rho}. \tag{111}$$

Положим, далее,

$$m_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{n(1+\eta_1)}.$$

Если

$$\mathrm{T}(r) = \max_{(n \geqslant 1)}\left(\frac{r^n}{m_n}\right),$$

то, как нетрудно видеть, [1])

$$\mathrm{T}(r) \leqslant A^{r^{\frac{1}{1+\eta_1}}},$$

---

[1]) Ибо функция $y = \frac{(2^a r)^x}{x^{ax}}$ имеет максимум, достигающийся при $x = \frac{2}{e} r^{\frac{1}{a}}$ и равный

$$e^{\frac{2a}{e} r^{\frac{1}{a}}} = A^{r^{\frac{1}{a}}}.$$

так что

$$\ln T(r) \leqslant r^{\frac{1}{1+\eta_1}} \ln A.$$

Поэтому интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr$$

сходится. Отсюда, в силу теоремы n° 17, вытекает существование функции $\varphi(x)$, определенной и бесконечно диференцируемой в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеющей свойства:

1) $\varphi(x) \not\equiv 0$;
2) $\varphi(x) \geqslant 0$;
3) $\varphi(x) = \varphi(1-x)$;
4) $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;
5) $|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant m_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Функция $\varphi_\alpha(x)$ имеет характер, сходный с $\varphi(x)$, но задана в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ и

$$|\varphi_\alpha^{(n)}(x)| \leqslant \frac{m_n}{\alpha^n} = \left(\frac{n^{1+\eta_1}}{\alpha \cdot 2^{1+\eta_1}}\right)^n. \tag{112}$$

Рассмотрим теперь целую функцию $F(z)$:

$$F(z) = z^2 \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n_i^2}\right).$$

Представляя $F(z)$ степенным рядом:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n},$$

мы можем утверждать, что

$$|c_{2n}| < \frac{A_1}{n^{2n\left(\frac{1}{\sigma} - \eta_2\right)}}, \tag{113}$$

где A_1 — некоторая постоянная.

$n^{2n\left(\frac{1}{\sigma} - \eta_2\right)}$

Для доказательства оценки (113) отметим, что так как показатель сходимости $\{n_i\}$ есть σ, то [1])

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \sigma,$$

причём положено

$$M(r) = \max|F(re^{i\theta})| \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Отсюда следует, что при любом $\varepsilon > 0$ будет

$$M(r) < Ae^{r^{\sigma+\varepsilon}},$$

и следовательно, из формулы

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{2n+1}}\, dz$$

вытекает, что

$$|c_{2n}| < A\frac{e^{r^{\sigma+\varepsilon}}}{r^{2n}}.$$

Это соотношение справедливо при всех r, поэтому правую часть его можно заменить ее *минимумом*, что дает оценку:

$$|c_{2n}| \leqslant A\left[\frac{(\sigma+\varepsilon)e}{2n}\right]^{\frac{2n}{\sigma+\varepsilon}}.$$

Из этой оценки следует, что

$$\underline{\lim} \frac{-\ln|c_{2n}|}{2n\ln n} \geqslant \frac{1}{\sigma+\varepsilon},$$

откуда, в силу произвольности ε,

$$\underline{\lim} \frac{-\ln|c_{2n}|}{2n\ln n} \geqslant \frac{1}{\sigma}.$$

Это неравенство показывает, что при больших значениях n будет: [2])

$$\ln|c_{2n}| < -\left(\frac{1}{\sigma} - \eta_2\right) 2n\ln n,$$

и стало-быть, верна оценка (113) (благодаря наличию A_1 уже при *всех* n).

---

[1]) См., например, Valiron, *Lectures on the general theory of Integral Funktions* (Toulouse, 1923).

[2]) В силу (111) будет $\frac{1}{\sigma} > \eta_2$.

Установив это, рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \varphi_\alpha^{(2n)}(x) \tag{114}$$

и докажем, что при достаточно малых α имеет место неравенство

$$|\psi_\alpha(x)| < A_2 e^{\alpha^{-\rho}}, \tag{115}$$

где A_2 — надлежащая константа.

В самом деле, из (114), (112) и (113) имеем, что

$$|\psi_\alpha(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1}{n^{2n\left(\frac{1}{\sigma} - \eta_2\right)}} \cdot \left[\frac{(2n)^{1+\eta_1}}{\alpha \cdot 2^{1+\eta_1}}\right]^{2n}$$

или, в силу (111),

$$|\psi_\alpha(x)| \leqslant A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}+\gamma}}{\alpha}\right)^{2n} n^{-2n\eta_3}. \tag{116}$$

Оценим выражение

$$\left(\frac{n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}+\gamma}}{\alpha}\right)^{2n}. \tag{117}$$

Благодаря неравенству (111) показатель $\frac{\sigma-1}{\sigma}+\gamma$ есть отрицательное число $-\beta$, где $\beta > \frac{1}{\rho}$.

Но функция

$$y = (\alpha x^\beta)^{2x}$$

имеет минимум, равный

$$e^{-\frac{2\beta}{e\alpha^{\frac{1}{\beta}}}}.$$

Поэтому выражение (117) не превосходит числа

$$e^{\frac{2\beta}{e\alpha^{\frac{1}{\beta}}}} = e^{A_3\alpha^{-\frac{1}{\beta}}},$$

и стало-быть,

$$|\psi_\alpha(x)| < A_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2n\eta_3}\right) e^{A_3\alpha^{-\frac{1}{\beta}}} = A_2 e^{A_3\alpha^{-\frac{1}{\beta}}}.$$

Так как $\beta > \frac{1}{\rho}$, то при достаточно малых α будет $\alpha^{\frac{1}{\beta}-\rho} > A_3$ и имеет место оценка (115).

Положим теперь

$$\gamma_\alpha(x) = \frac{\psi_\alpha(x)}{A_2}$$

и покажем, что функция $\gamma_\alpha(x)$ удовлетворяет условиям 1)—6) доказываемой леммы.

В силу соотношения (115) очевидно выполнение условия 6). Точно так же очевидно, что выполнено условие 1).

Для проверки выполнения остальных условий леммы нам понадобится разложение Фурье функции $\gamma_\alpha(x)$.

Сначала найдем оценки для коэфициентов Фурье функции $\bar{\varphi}_\alpha(x)$, представляющей „распространение" функции $\varphi_\alpha(x)$ на промежуток $(0,2\pi)$:

$$\bar{\varphi}_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x) & 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 & \alpha \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Эта функция бесконечно диференцируема и разложима в ряд Фурье:

$$\bar{\varphi}_\alpha(x) = \frac{l_0^{(\alpha)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (l_n^{(\alpha)} \cos nx + p_n^{(\alpha)} \sin nx).$$

Интегрируя $2p$ раз по частям выражение коэфициента $l_n^{(\alpha)}$

$$l_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \varphi_\alpha(x) \cos nx dx$$

и замечая, что все внеинтегральные члены исчезают, имеем:

$$l_n^{(\alpha)} = \pm \frac{1}{\pi n^{2p}} \int_0^\alpha \varphi_\alpha^{(2p)}(x) \cos nx dx,$$

и значит, в силу (112),

$$|l_n^{(\alpha)}| \leqslant \left(\frac{p^{1+\eta_1}}{n\alpha}\right)^{2p}.$$

Это неравенство справедливо при всяком p, и мы можем заменить правую часть ее минимумом по p, что дает оценку

$$|l_n^{(\alpha)}| \leqslant A_4 e^{-A_5 (\alpha n)^{\frac{1}{1+\eta_1}}}. \tag{118}$$

Такая же оценка верна для $p_n^{(\alpha)}$.

С другой стороны, как мы уже видели,

$$M(r) < A_6 e^{r^{\sigma+\varepsilon}},$$

и так как

$$|F(in)| \leqslant M(n),$$

то

$$|F(in)| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{2k}|\, n^{2k} < A_6 e^{n^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Отсюда и из (118) следует, по умножении на $|l_n^{(\alpha)}| + |p_n^{(\alpha)}|$ и суммировании по n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{2k}| \cdot n^{2k} \cdot (|l_n^{(\alpha)}| + |p_n^{(\alpha)}|) < A_7 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^{\sigma+\varepsilon} - A_5 (\alpha n)^{\frac{1}{1+\eta_1}}}.$$

Число ε находится в нашем распоряжении. Так как $\eta_1 < \frac{1}{\sigma} - 1$, то можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы оказалось $\sigma + \varepsilon < \frac{1}{1+\eta_1}$, а тогда будет

$$n^{\sigma+\varepsilon} - A_5 (\alpha n)^{\frac{1}{1+\eta_1}} < -A^{(\alpha)} n^{\frac{1}{1+\eta_1}},$$

где $A^{(\alpha)}$ — положительная постоянная, зависящая от α.

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |c_{2k}| \cdot n^{2k} \cdot (|l_n^{(\alpha)}| + |p_n^{(\alpha)}|) < A_7 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A^{(\alpha)} n^{\frac{1}{1+\eta_1}}}. \quad (119)$$

Если в равенство

$$\overline{\psi}_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \overline{\varphi}_\alpha^{(2k)}(x)$$

подставить разложение

$$\overline{\varphi}_\alpha^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (l_n^{(\alpha)} \cos nx + p_n^{(\alpha)} \sin nx)\, n^{2k},$$

то мы получим представление $\overline{\psi}_\alpha(x)$:

$$\overline{\psi}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} n^{2k}\Big)(l_n^{(\alpha)} \cos nx + p_n^{(\alpha)} \sin nx),$$

ибо в силу (119) допустима перестановка порядка суммирований. Полученному равенству можно придать вид:

$$\overline{\psi}_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left(l_n^{(\alpha)}\cos nx + p_n^{(\alpha)}\sin nx\right). \tag{120}$$

откуда, положив

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{F(n)}{A_2} l_n^{(\alpha)}, \quad b_n^{(\alpha)} = \frac{F(n)}{A_2} p_n^{(\alpha)}, \tag{121}$$

мы и получаем искомое разложение $\gamma_\alpha(x)$:

$$\gamma_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(\alpha)}\cos nx + b_n^{(\alpha)}\sin nx\right).$$

Так как при $n = n_i$ будет

$$F(n_i) = 0,$$

то

$$a_{n_i}^{(\alpha)} = b_{n_i}^{(\alpha)} = 0,$$

и следовательно, выполнено условие 4) леммы.

Далее, из оценки (118) и неравенства

$$|F(n)| < A_6 e^{n^{\sigma+\varepsilon}}$$

следует, что ряды, получаемые почленным диференцированием ряда (120), все равномерно сходящиеся, так что функция $\psi_\alpha(x)$, а с нею и $\gamma_\alpha(x)$, бесконечно диференцируема, а значит, и условие 2) также выполнено.

Для проверки выполнения свойства 3) диференцируем почленно разложение (114), что дает

$$\psi_\alpha^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \varphi_\alpha^{(2n+k)}(x). \tag{122}$$

Равенство (122) справедливо, если ряд, стоящий в правой его части, сходится равномерно. Это, однако, именно так. Действительно, на основании неравенств (112) и (113) ряд (122) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2n\left(\frac{1}{\sigma} - \eta_2\right)} \left[\frac{(2n+k)^{1+\eta_1}}{\alpha \cdot 2^{1+\eta_1}}\right]^{2n+k}.$$

Этот последний ряд, очевидно, сходится. Значит, (122) справедливо. В частности

$$\psi_\alpha^{(k)}(0) = \psi_\alpha^{(k)}(\alpha) = 0,$$

и следовательно, выполнено условие 3).

Наконец остается проверить выполнение условия 5).

Для этой цели заметим, что из свойств $\varphi(x)$ следует существование такого промежутка (β, β_1), что при $\beta \leqslant x \leqslant \beta_1$ будет

$$\varphi(x) \geqslant d > 0,$$

откуда

$$\varphi_\alpha(x) \geqslant d \qquad (\alpha\beta \leqslant x \leqslant \alpha\beta_1).$$

С другой стороны, из выражений (121) коэфициентов $a_n^{(\alpha)}$ и $b_n^{(\alpha)}$ следует, что

$$a \cdot a_m^{(\alpha)} + b \cdot b_m^{(\alpha)} = \frac{F(m)}{\pi A_2} \int_0^\alpha \varphi_\alpha(x)\,(a \cos mx + b \sin mx)\,dx.$$

Так как a и b не нули одновременно, то для достаточно малых x будет

$$|a \cos mx + b \sin mx| > rx \qquad (r > 0;\ 0 \leqslant x \leqslant \delta)$$

и кроме того выражение $a \cos mx + b \sin mx$ будет сохранять знак в промежутке $(0, \delta)$.

Так как кроме этого еще известно, что $F(m) \neq 0$, то при $\alpha < \delta$ будет

$$|aa_m^{(\alpha)} + bb_m^{(\alpha)}| \geqslant \frac{F(m)}{\pi A_2} d \int_{\alpha\beta}^{\alpha\beta_1} rx\,dx = \omega\alpha^2,$$

и лемма доказана полностью.

54. Доказательство теоремы n° 48. Докажем теперь теорему, формулированную в n° 48. Желая доказать ее от противного, предположим, что все условия ее выполнены, но тем не менее существует номер p такого рода, что

$$a_{n_p}^2 + b_{n_p}^2 \neq 0.$$

Положим

$$m = n_p; \quad a = a_{n_p}; \quad b = b_{n_p}$$

и рассмотрим последовательность

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{p-1},\ n_{p+1},\ \ldots,$$

показатель сходимости которой есть σ. Применим теперь к этой последовательности лемму n° 53, введя вместо ρ число ρ', подчиненное условию

$$\rho > \rho' > \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Если функцию $\gamma_\alpha(x)$, отвечающую лемме, распространить на весь промежуток $(0, 2\pi)$, положив

$$\Gamma_\alpha(x) = \begin{cases} \gamma_\alpha(x) & 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 & \alpha \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases},$$

то $\Gamma_\alpha(x)$ будет представима рядом Фурье:

$$\Gamma_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\alpha)} \cos nx + b_n^{(\alpha)} \sin nx),$$

причем

$$a_{n_i}^{(\alpha)} = b_{n_i}^{(\alpha)} = 0 \qquad (i \neq p),$$

$$|a_{n_p} a_{n_p}^{(\alpha)} + b_{n_p} b_{n_p}^{(\alpha)}| > \omega\alpha^2,$$

$$|\Gamma_\alpha(x)| < e^{\alpha^{-\rho'}}.$$

Согласно формуле Парсеваля,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Gamma_\alpha(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n^{(\alpha)} + b_n b_n^{(\alpha)}).$$

Но если $n \neq n_i$, то

$$a_n = b_n = 0.$$

Если же $n = n_i$, ио $i \neq p$, то

$$a_{n_i}^{(\alpha)} = b_{n_i}^{(\alpha)} = 0.$$

Поэтому в правой части этого равенства остается лишь одно слагаемое, отвечающее $n = n_p$. Таким образом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Gamma_\alpha(x)\,dx = a_{n_p} a_{n_p}^{(\alpha)} + b_{n_p} b_{n_p}^{(\alpha)}.$$

Отсюда

$$\pi\omega\alpha^2 < e^{\alpha^{-\rho'}} \int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx,$$

и стало-быть, при достаточно малых α

$$\int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx \geqslant k\alpha^2 e^{-\alpha^{-\rho'}}. \tag{123}$$

Это же противоречит условию, что точка $x=0$ служит для $f(x)$ средним нулем показательного порядка $\rho > \rho'$.

Действительно, из (123) следует, что

$$\ln\left(-\ln\int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx\right) \leqslant \ln(\alpha^{-\rho'} - 2\ln\alpha - \ln k) = -\rho'\ln\alpha + \theta(\alpha),$$

где $\frac{\theta(\alpha)}{\ln\alpha}$ — бесконечно-мала вместе с α.

Поэтому

$$\frac{\ln\left(-\ln\int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx\right)}{-\ln\alpha} \leqslant \rho' - \frac{\theta(\alpha)}{\ln\alpha}$$

и окончательно

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}} \frac{\ln\left(-\ln\int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx\right)}{-\ln\alpha} \leqslant \rho'.$$

Таким образом теорема доказана.

55. Замечание. В совместной работе С. Мандельбройта и Н. Винера[1]) установлен следующий результат: *каково бы ни было число $\sigma < 1$, всегда возможно построить функцию*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \cos n_i x,$$

не тождественную нулю, имеющую в точке $x=0$ средний нуль показательного порядка ρ, где

$$\rho = \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

и притом такую, что показателем сходимости последовательности $\{n_i\}$ служит как раз число σ.

Это предложение показывает, что теорему n° 48 нельзя улучшить.

---

[1]) *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences, t.* 203 (1936), p. 233.

Глава VI

НОВЫЕ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

§ 1. Классы, квазианалитические E_ρ

56. Результаты предыдущей главы позволяют ввести понятие квазианалитичности в некотором новом смысле и установить условия, при которых определенные классы функций будут квазианалитическими именно в этом смысле. Этому посвящен настоящий параграф. В следующем параграфе этой главы мы покажем, что теорема n° 48 приводит также к новым классам квазианалитическим Δ.

Введем некоторые определения. Пусть E есть измеримая совокупность точек, лежащая на отрезке (a, b). Пусть x_0 — точка этого отрезка и α — таково, что $x_0+\alpha$ также лежит на (a, b), причем α может быть как положительным, так и отрицательным. В таком случае символом

$$m(E, x_0, \alpha)$$

мы условимся обозначать *меру* той части совокупности E, которая расположена между точками x_0 и $x_0+\alpha$.

Пусть, далее, $\tau(r)$ есть положительная функция, определенная для достаточно больших положительных значений r.

Рассмотрим измеримую совокупность A, расположенную на отрезке (a, b), и обозначим через B совокупность точек этого отрезка, не входящих в A.

Определение. *Точка x отрезка (a, b) называется точкой плотности относительно функции $\tau(r)$ совокупности A, если*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{m(B, x, \alpha)}{|\alpha|}\tau\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)=0.$$

Грубо говоря, чем быстрее возрастает $\tau(r)$, тем больше точек совокупности A лежит вблизи точки x.

Теорема. *Пусть $f(x)$ измерима и ограничена на отрезке (a, b). Если $f(x)$ обращается в нуль во всех точках совокупности A, для которой точка x_0 есть точка плотности относительно функции e^{r^ρ} $(\rho>0)$, то точка x_0 есть для $f(x)$ средний нуль показательного порядка, не меньшего ρ.*

Доказательство. Согласно определению можно выбрать такую последовательность значений α, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{m(\mathrm{B}, x_0, \alpha)}{\alpha} e^{|\alpha|^{-\rho}} = 0. \tag{124}$$

Пусть

$$|f(x)| \leqslant M.$$

В таком случае, если считать в соотношении (124) $\alpha > 0$, то для достаточно малых значений α, принадлежащих указанной последовательности, будет

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|\, dx < M \cdot m(\mathrm{B}, x_0, \alpha) < \alpha e^{-\alpha^{-\rho}},$$

откуда

$$\ln\left(-\ln \int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|\, dx\right) > \ln(\alpha^{-\rho} - \ln \alpha) = -\rho \ln \alpha + \theta(\alpha),$$

где $\frac{\theta(\alpha)}{\ln \alpha}$ — бесконечно-мала вместе с α. Отсюда

$$\frac{\ln\left(-\ln \int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|\, dx\right)}{-\ln \alpha} > \rho - \frac{\theta(\alpha)}{\alpha},$$

и следовательно,

$$\overline{\lim_{\alpha \to 0}} \frac{\ln\left(-\ln \int_{x_0}^{x_0+\alpha} |f(x)|\, dx\right)}{-\ln \alpha} \geqslant \rho,$$

и x_0 есть средний *справа* нуль показательного порядка $\geqslant \rho$. Если бы в соотношении (124) было $\alpha < 0$, то x_0 был бы нулем *слева*.

57. Теорема. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, заданная в промежутке $(0, 2\pi)$. Допустим, что ее разложение Фурье*

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x)$$

имеет ряд пустот и показатель сходимости σ последовательности $\{n_i\}$ есть число, меньшее единицы.

Предположим, что функция $f(x)$ ограничена вблизи некоторой точки x_0 $(0 \leqslant x_0 \leqslant 2\pi)$ и исчезает на совокупности

точек, для которой x_0 есть точка плотности относительно функции $e^{r\rho}$.

Если $\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}$, то $f(x)$ равна нулю почти везде в $(0, 2\pi)$.

Эта теорема непосредственно следует из теорем n° 48 и 56.

58. Определение 1. *Некоторый класс измеримых функций, заданных на отрезке (a, b), называется квазианалитическим E_ρ, если любые две функции этого класса, совпадающие на совокупности, имеющей точку плотности относительно функции $e^{r\rho}$ совпадают почти везде в (a, b).*

Определение 2. *Будем называть классом C^σ класс всех измеримых ограниченных функций, заданных в промежутке $(0, 2\pi)$ и имеющих ряд Фурье*

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x),$$

такой, что последовательность $\{n_i\}$ обладает показателем сходимости σ.

Теорема. *Всякий класс C^σ оказывается квазианалитическим E_ρ, если $\rho > \frac{\sigma}{1-\sigma}$.*

Это просто другая формулировка теоремы n° 57.

Замечание. Так как класс квазианалитический E_ρ, и подавно будет квазианалитическим I, *то всякий класс C^σ (где $\sigma < 1$) квазианалитичен I.*

§ 2. Новые классы функций, квазианалитические Δ.

59. Рассмотрим теперь некоторые новые классы функций $C^\sigma_{\{m_n\}}$, являющиеся пересечениями ранее определенных классов $C_{\{m_n\}}$ и C^σ. Иначе говоря, под классом $C^\sigma_{\{m_n\}}$ мы понимаем множество всех функций $f(x)$, имеющих период 2π, бесконечно диференцируемых и таких, что, *во-первых*,

$$|f^{(n)}(x)| < K^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{125}$$

и *во-вторых* разложение Фурье $f(x)$ имеет ряд пустот:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x), \tag{126}$$

причем показатель сходимости последовательности $\{n_i\}$ есть σ.

В этом параграфе мы установим, что при некоторых соотношениях между $\{m_n\}$ и показателем сходимости σ можно утверждать квазианалитичность Δ класса $C^{\sigma}_{\{m_n\}}$.

60. Теорема. *Пусть $\{m_n\}$ есть множество положительных чисел, причем*

$$1 < \varliminf \frac{\ln m_n}{n \ln n} < +\infty. \tag{127}$$

Если функция $f(x)$ заданная в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяет условиям

$$f^{(n)}(a) = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{128}$$

$$|f^{(n)}(x)| < K^n m_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots;\ a \leqslant x \leqslant b), \tag{129}$$

то точка $x = a$ служит для $f(x)$ средним нулем показательного порядка, не меньшего чем ρ, где

$$\rho = \frac{1}{\varliminf \frac{\ln m_n}{n \ln n} - 1}. \tag{130}$$

Доказательство. Если $a < x \leqslant b$, то на основании формулы Тэйлора и условия (128) будет

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Отсюда, обозначив через α любое число, лежащее между $x-a$ и $b-a$, находим, в силу (129),

$$|f(x)| < \frac{(K\alpha)^n}{n!} m_n \qquad (a \leqslant x \leqslant a+\alpha;\ n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{131}$$

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{m_n} z^n.$$

Это целая функция; для обнаружения этого обстоятельства достаточно доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} = \infty. \tag{132}$$

Но условие (127) дает, что при больших n будет

$$m_n > n^{n(1+\varepsilon)},$$

где ε — некоторая положительная постоянная. С другой стороны, в силу формулы Стирлинга будет

$$\sqrt[n]{n!} = ne^{-1}(1+\omega_n), \qquad (\omega_n \to 0)$$

и следовательно,

$$\sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} > \frac{en^2}{1+\omega_n},$$

откуда и следует (132).

Если мы введем соответствующую $F(z)$ функцию

$$m(r) = \max_{n \geqslant 1}\left(\frac{n!}{m_n} r^n\right),$$

то неравенство (131), будучи справедливым при всех n, дает

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{m\left(\frac{1}{K\alpha}\right)}.$$

Значит при $\alpha < 1$ будет

$$\int_a^{a+\alpha} |f(x)|\, dx < \frac{1}{m\left(\frac{1}{K\alpha}\right)},$$

и стало-быть,

$$\frac{\ln\left(-\ln \int_a^{a+\alpha} |f(x)|\, dx\right)}{-\ln \alpha} > \frac{\ln \ln m\left(\frac{1}{K\alpha}\right)}{-\ln \alpha},$$

откуда

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \frac{\ln\left(-\ln \int_a^{a+\alpha} |f(x)|\, dx\right)}{-\ln \alpha} \geqslant \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln m(r)}{\ln r},$$

Но из равенства (130) следует, [1]) что

$$\overline{\lim} \frac{\ln \ln m(r)}{\ln r} = \rho.$$

Таким образом

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \frac{\ln\left(-\ln \int_a^{a+\alpha} |f(x)|\, dx\right)}{-\ln \alpha} \geqslant \rho,$$

что и доказывает теорему.

61. Из сопоставления теорем n° 48 и 60 с очевидностью вытекает справедливость следующего результата:

---

[1]) Этот факт есть следствие общей теоремы: *если для целой функции* $F(z) = \sum c_n z^n$ *будет*

$$\underline{\lim} \frac{-\ln |c_n|}{n \ln n} = \omega > 0, \qquad (*)$$

Теорема. *Пусть периодическая бесконечно диференцируемая функция $f(x)$, заданная на промежутке $(0, 2\pi)$, удовлетворяет условиям:*

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots);$$

$$|f^{(n)}(x)| < k^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

причем

$$1 < \varliminf \frac{\ln m_n}{n \ln n} < +\infty.$$

Если

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i} \cos n_i x + b_{n_i} \sin n_i x),$$

где последовательность (n_i) имеет показатель сходимости σ, удовлетворяющий условию:

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} < \rho = \varliminf \frac{\ln m_n}{n \ln n} - 1,$$

то функция $f(x)$ тождественно равна нулю.

Иначе говоря, неравенство $\frac{\sigma}{1-\sigma} < \rho$ позволяет утверждать, что класс $C^{\sigma}_{\{m_n\}}$ квазианалитичен Δ. [1])

Замечание. Эта теорема носит в некотором смысле окончательный характер. Именно, как показано в уже цити-

---

то для соответствующей $m(r)$ окажется

$$\varlimsup \frac{\ln \ln m(r)}{\ln r} = \frac{1}{\omega}.$$

В нашем случае условие (*) имеет вид:

$$\varliminf \frac{-\ln \frac{n!}{m_n}}{n \ln n} = \frac{1}{\rho} > 0$$

и выполняется в силу (130).

[1]) Небезинтересно отметить, что класс $C_{\{m_n\}}$, будучи более обширным, чем класс $C^{\sigma}_{\{m_n\}}$, *заведомо* не является квазианалитическим Δ, если только

$$\varliminf \frac{\ln m_n}{n \ln n} > 1.$$

рованной (см. n° 55) совместной работе С. Мандельбройта и Н. Винера, имеет место следующее обстоятельство:

Для всякого $\sigma < 1$ *можно указать последовательность* $\{m_n\}$ *такую, что* [1])

$$\lim \frac{\ln m_n}{n \ln n} = \frac{1}{\sigma},$$

и построить не тождественную нулю периодическую бесконечно диференцируемую функцию $f(x)$ *со свойствами:*

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$|f^{(n)}(x)| < m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos n_i x,$$

причем последовательность $\{n_i\}$ *имеет показатель сходимости* σ.

В самом деле, из этого неравенства следует, что для больших значений n будет:

$$m_n > n^{n(1+\varepsilon)} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Поэтому $T(r) = \max\left(\frac{r^n}{m_n}\right) \leqslant \max \frac{r^n}{n^{n(1+\varepsilon)}} \sim e^{\frac{r^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}{e}(1+\varepsilon)}$. Отсюда следует, что при больших значениях r будет

$$\ln T(r) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{e} r^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

и интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr$$

сходится.

[1]) Иначе говоря:

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} = \rho = \frac{1}{\lim \frac{\ln m_n}{n \ln n} - 1}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отв. редактор: И. П. Натансон. Технич. редактор Р. С. Волховер.
Корректор А. В. Альтшулер

Сдано в набор 8/IV 1937 г. Подписано к печати 13/V 1937 г.
Формат бумаги 82×110 1/32. Тираж 2 000 экз. Бум. листов 3,
Уч.-авт. листов 5,30. Изд. № 114. Ленгорлит № 232
Тип. зн. в 1 бум. л. 159616. Заказ № 1855

2-я типогр. ОНТИ имени Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

Опечатка

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
92	2 снизу	$n^{2n\left(\frac{1}{\sigma}-\eta_{12}\right)}$	$n^{2n\left(\frac{1}{\sigma}-\eta_{12}\right)}$

Зак. 1855. С. Мандельбройт

Цена 2 р. 50 к.

Т-21-5-2

С. МАНДЕЛЬБРОЙТ

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

ОНТИ
1937