

АКАДЕМИЯ НАУК
СОВЕТА СССР

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР




АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР



Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
ТРУДОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1948

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР



Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
ТРУДОВ

I

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФЕССОРА
С. М. РЫТОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1948

Комиссия по изданию трудов

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА

академик Н. Д. Папалекси, академик Г. С. Ландсберг,
член-корр. АН СССР И. Е. Тамм



A. Mandevillan

ОТ РЕДАКТОРА

В I том вошли оригинальные научные работы Л. И. Мандельштама, выполненные в период с 1902 по 1931 г.

Перевод опубликованных на немецком языке работ 1—4, 6, 12, 14 и 19 выполнен Б. Н. Горожанкиным, работ 5, 7—11, 13, 15—17, 20, 21, 23, 26—30—М. Е. Жаботинским.

Все редакционные примечания взяты в квадратные скобки

ЛЕОНИД ИСААКОВИЧ МАНДЕЛЬШТАМ

(Краткий очерк жизни и научной деятельности)

Н. Д. Папалекси

Леонид Исаакович Мандельштам родился 22 апреля (ст. ст.) 1879 г. в г. Могилеве на Днестре. Семья Леонида Исааковича отличалась большой одаренностью: из нее вышли выдающиеся ученые, врачи, писатели. Отец Леонида Исааковича, Исаак Григорьевич Мандельштам, очень образованный врач и прекрасный практик, в свое время очень популярный на юге России врач-гинеколог, происходил из интеллигентной еврейской семьи. Окончив казенное раввинское училище в г. Вильно, Исаак Григорьевич поступил в Медико-хирургическую академию в Петербурге (ныне Ленинградская Военно-медицинская академия). В качестве врача он принимал участие в войне 1877—1878 гг. с Турцией. Приблизительно к этому времени относится брак Исаака Григорьевича с матерью Леонида Исааковича, Минной Львовной Кан, приходившейся ему двоюродной племянницей. Дядей Леонида Исааковича со стороны матери, с которым Леонид Исаакович с детства был особенно близок, является известный биолог А. Г. Гурвич. Брат А. Г. Гурвича, химик Л. Г. Гурвич, ныне покойный, был всемирно известным специалистом по нефти. Сама Минна Львовна, женщина редкой доброты и благородства души, прекрасно знала языки и была незаурядной пианисткой. Она оказала чрезвычайно большое влияние на Леонида Исааковича, который питал к ней исключительную привязанность всю свою жизнь.

Вскоре после рождения Леонида Исааковича его семья переехала в Одессу, где протекли его детство и юность. Леонид Исаакович рос в атмосфере гуманности, истинного человеколюбия

и простоты. Он был окружен любовью и заботами, что, несомненно, способствовало развитию его природной мягкости, так всегда привлекавшей всех в нем. Леонид Исаакович очень долго не знал никаких житейских забот и затруднений, и это безусловно определило его непрактичность и неумение вникать в житейские мелочи.

До 12 лет Леонид Исаакович учился дома, причем особое внимание было обращено на изучение иностранных языков. Только в 1891 г. Леонид Исаакович поступил в третий класс Второй одесской гимназии. По словам близких Леонида Исааковича его умственное развитие шло чрезвычайно своеобразно. Он долго сохранял многие детские черты, сравнительно мало читал, интересовался играми, особенно умственными. Однако, несомненно, что в нем рано началась внутренняя работа, направленная на разрешение возникавших у него различных умственных затруднений в связи с вопросами механики, физики, математики. Стремление Леонида Исааковича к углублению и логическому анализу особенно ярко проявилось в последних классах гимназии, когда он заинтересовался различными вопросами математики, в частности геометрии, быть может, даже несколько в ущерб общеобразовательным предметам. Здесь уже начали проявляться математические способности и острота ума Леонида Исааковича. Так, по воспоминаниям его дяди А. Г. Гурвича, уже тогда в спорах с взрослыми людьми, обладавшими несомненно большими фактическими знаниями по данному вопросу, Леонид Исаакович часто оказывался прав именно благодаря логичности мысли и остроте ума.

Своеобразное развитие Леонида Исааковича проявлялось и в том, что он в детстве сравнительно мало интересовался музыкой, несмотря на то, что в его семье знали и любили ее [сам он учился играть на виолончели] и в их доме очень часто можно было слышать хорошую музыку. Мало интереса проявлял он также и к живописи, и любопытно, что интерес к музыке и живописи проснулся у него лишь в студенческие годы, во время его жизни за границей.

В числе гимназических преподавателей Леонида Исааковича особенно выдающихся не было, хотя преподаватель физики Березин, повидимому, сумел заинтересовать Леонида Исааковича, и он охотно помогал Березину в подготовке демонстрационных опытов.

По окончании гимназии в 1897 г. с медалью Леонид Исаакович поступил на математическое отделение физико-математического факультета Новороссийского университета. Однако здесь Леонид Исаакович пробыл недолго: уже в 1899 г. он, в связи со студен-



Л. И. Мандельштам в возрасте четырех лет

ческими беспорядками, был исключен из университета. В этом же году, по совету родителей, Леонид Исаакович поехал продолжать образование за границу, в Страсбург, где поступил на физико-математический (phil. nat.) факультет университета, причем выбор этого города определился тем, что его дядя А. Г. Гурвич был тогда там ассистентом известного антрополога, профессора анатомии Швальбе. Этот выбор оказался чрезвычайно благоприятным для научного формирования Леонида Исааковича.

В то время в Страсбургском университете собрались крупные научные силы, в частности в области физико-математических наук. Лекции по математике читали выдающиеся математики: аналитик Гейнрих Вебер, ученик одного из крупнейших математиков прошлого столетия Риманна и автор классического труда „Дифференциальные уравнения математической физики“, а также геометр Райе — продолжатель Понселе. Экстраординариусом по математике был также хороший математик и блестящий лектор Крацер. Кафедру физики в то время занимал профессор Фердинанд Браун. Он состоял также директором образцового для того времени физического института, основанного знаменитым экспериментатором Кундтом. Ф. Браун, лауреат Нобелевской премии 1909 г. по физике, полученной им за работы в области электрических колебаний и радиотелеграфии, уже тогда был известен своими работами в области термодинамики (принцип — Брауна — Ле Шателье) и электрических явлений и особенно широко в измерительной физике как создатель электрометра Брауна и катодной трубки Брауна — этого незаменимого в настоящее время орудия исследования быстро меняющихся процессов, сыгравшего столь исключительную роль в развитии телевидения и радиолокации. Кафедру теоретической физики занимал видный теоретик и прекрасный лектор Эмиль Кон, автор широко известного курса „Электромагнитное поле“.

Все эти обстоятельства, а также исключительные условия для научных исследований в Страсбургском физическом институте, привлечшие туда в свое время наших выдающихся физиков Б. Б. Голицина, П. Н. Лебедева, А. А. Эйхенвальда, Д. А. Гольдгаммера, В. А. Ульянина и др. (а впоследствии, уже во время пребывания там Леонида Исааковича, с апреля 1900 г., когда я приехал в Страсбург, — П. П. Лазарева, И. С. Щегляева и др.), создали в Страсбурге особо благоприятную атмосферу науки и истинного духа исследования. Как только Леонид Исаакович попал в эту благоприятную обстановку, так резко отличавшуюся от условий

в Новороссийском университете того времени, почти внезапно расцвели редкие качества его ума и таланта. Этому в очень значительной мере способствовало то обстоятельство, что профессор Ф. Браун, который был не только выдающимся физиком, но и прекрасным учителем и человеком, очень скоро обратил внимание на выдающиеся способности Леонида Исааковича и предоставил ему полную возможность для научной работы. Необходимо заметить, что и Леонид Исаакович в свою очередь высоко ценил профессора Брауна и на всю жизнь сохранил к нему глубокое уважение и признательность.

Научные интересы профессора Брауна в то время были направлены на вопросы радиотелеграфии. Поэтому и Леонид Исаакович заинтересовался вопросами электрических колебаний в связи с радиотелеграфией. В январе 1902 г. он, по представлении диссертации под названием „Bestimmung der Schwingungsdauer der Oscillatorischen Kondensatoren-Entladung“¹ и сдаче требуемых испытаний с высшим отличием (*summa cum laude*) получил степень доктора натуральной философии Страсбургского университета.

По окончании университета Леонид Исаакович остался в Страсбурге и первое время в качестве личного ассистента профессора Брауна принимал активное участие в лабораторных исследованиях и заводских испытаниях новых приемно-передающих устройств по сложной схеме Брауна, производившихся в лабораториях Сименс и Гальске в Берлине, а затем и в практических их испытаниях на Балтике, где было достигнуто рекордное для того времени расстояние радиопередачи — свыше 150 км, между местечком Сасниц на острове Рюген и г. Кольберг. В результате этих и последующих исследований в Страсбурге Леонидом Исааковичем было сделано (совместно с Г. Брандесом) первое изобретение в области радио — так называемая „слабая связь“, — ознаменовавшее собой существенный этап в истории развития радиосвязи и сразу сделавшее его имя известным широкому кругу радиоспециалистов.

[Теоретический анализ вопроса о силе приема в зависимости от связи между антенной и промежуточным контуром сложной схемы приемного устройства привел Л. И. Мандельштама к выводу, казавшемуся в то время совершенно парадоксальным. Сила приема возрастает не с увеличением связи, а наоборот, с ее значительным ослаблением, причем одновременно с усилением приема повышается и селективность приемника.]

¹ [Статья 11.]

Насколько в то время было практически важно это изобретение, видно из того, что Леонид Исаакович совместно с Брандесом даже *post factum*, спустя несколько лет, получил от общества *Telefunken* значительную по тому времени денежную премию. Заметим, что к этому времени его пребывания в Берлине относится и его встреча с А. С. Поповым и с рядом пионеров русской радиотелеграфии: Реммертом, Ющинским, Тыкоцинером и др.

В 1903 г. Леонид Исаакович был зачислен в штат Страсбургского физического института вторым ассистентом (первым ассистентом был в то время известный радиоспециалист Ионатан Ценнек), а вскоре затем он стал и первым. Здесь на обязанности Леонида Исааковича лежало руководство научными работами докторантов и ученых различных стран, приезжавших поработать в знаменитом Страсбургском физическом институте. Молодые ученые являлись иногда со своими темами, но чаще всего они получали их от профессора Ф. Брауна, а вскоре и от Леонида Исааковича. (Среди многочисленных учеников Леонида Исааковича были Rohmann, Aeckerlein, Riegger, Dickmann, Glage, Sziwessy, G. Thomson, Jollos, Würst, v. Ubisch, Шиловский, Bädke.)

Время до 1907 г., которое может быть названо первым страсбургским периодом научной деятельности Леонида Исааковича, было для него годами расширения знаний, научного роста и созревания его таланта. В это время окончательно сформировались все основные черты его как ученого. Леонид Исаакович очень много работал, основательно изучил классический трактат Релея „Теория звука“, работы Лоренца по электронной теории, „Кинетическую теорию газов“ Больцмана, читал сочинения Гельмгольца, Герца и других классиков физики. Исключительно одаренный математически, Леонид Исаакович основательно изучал также различные разделы математики — теорию дифференциальных уравнений, теорию вероятностей, к которой он всегда чувствовал особое влечение. Наряду с этим его глубоко интересовали история физики, философия науки, теория познания. Он основательно познакомился с английскими философами.

Особое значение для Леонида Исааковича имел замечательный английский физик Релей. Изумительная разносторонность этого ученого, глубина анализа, несравненное умение выделить существенную сторону вопроса, наглядно и выпукло показать его физическую сущность, дать теорию, пользуясь простейшим, но вполне адекватным аппаратом, — все эти качества творений Релея отвечали



Л. И. Мандельштам с матерью и сестрой (1890 г.)

стремлениям и особенностям ума Леонида Исааковича и вызывали в нем особый резонанс, были ему конгениальны. И действительно, в характере ума Леонида Исааковича было много общего с Релеем, и не случайно, что пути их научного творчества часто шли параллельно и неоднократно перекрещивались. Не подлежит никакому сомнению, что атмосфера электромагнитных колебаний, в которую попал Леонид Исаакович, вступая в научную жизнь, сыграла очень большую роль в формировании основных направлений его научной деятельности и определила тот „колебательный“ подход, который так характерен для творчества Леонида Исааковича.

Наряду с научным ростом и созреванием таланта Леонида Исааковича шло и расширение круга его научных интересов. От электромагнитных колебаний и волн в свободном пространстве, с какими мы имеем дело в радио, внимание Леонида Исааковича перешло на взаимодействие между электромагнитными волнами и веществом, а именно к вопросу о прохождении света через различные среды и в первую очередь к вопросам дисперсии. Его первое исследование в этой области, в котором он подверг тонкому анализу вопрос о прохождении света через оптически однородные и мутные среды, было представлено им в 1907 г. как диссертация для получения права чтения лекций (*venia legendi*) в качестве приват-доцента Страсбургского университета по кафедре физики. Темой его пробной лекции была электромагнитная теория света Максвелла.

Осенью же 1907 г. произошло очень важное событие в личной жизни Леонида Исааковича — его женитьба на Лидии Соломоновне Исакович, первой русской женщине, получившей диплом архитектора в 1906 г. в Париже. Человек редких душевных качеств, Лидия Соломоновна Исакович сыграла исключительную роль в жизни Леонида Исааковича. От этого брака в 1910 г. родился сын, Сергей Леонидович, молодой талантливый физик, известный своими работами в области спектроскопии и физики электрической искры.

С 1907 г. и до начала первой мировой войны относится второй страсбургский период научной деятельности Леонида Исааковича. За это время Леонид Исаакович проявил себя как прекрасный экспериментатор и исключительно талантливый лектор, тщательно готовившийся к лекциям и очень часто иллюстрировавший их им самим придуманными демонстрациями. Сначала Леонид Исаакович читал отдельные курсы по различным вопросам физики: оптические.

свойства прозрачных тел, дисперсия, электро- и магнетооптика (1907—1908), явления резонанса и их роль в физике (1908), физические основы беспроводной телеграфии (1908—1909), кинетическая теория газов (1909); а в 1910 г. ему было поручено чтение курса телефонии и телеграфии для инженеров почтового ведомства специализировавшихся в этих областях. В 1913 г. Леонид Исаакович получил звание *titular*-профессора.

Хотя подготовка к лекциям и занятия со студентами и докторантами отнимали у Леонида Исааковича значительную часть времени, он все же уделял много времени и для собственных работ. В этот период полностью созрел и проявился замечательный талант Леонида Исааковича как физика и выявились все характерные черты его как ученого — глубокого теоретика и тонкого экспериментатора.

К этому времени относятся некоторые исследования Леонида Исааковича, проведенные им совместно со мной, в области электромагнитных колебаний и радиотехники, особенно в области методики измерений,¹ о которых мной был сделан доклад на Втором Менделеевском съезде в Петербурге в 1911 г. по приглашению организационного бюро съезда, а также ряд фундаментальных работ по оптике. К последним следует прежде всего отнести работы по вопросам рассеяния света, занимавшим Леонида Исааковича всю его жизнь, начиная от его профессорской диссертации, озаглавленной „Об оптически однородных и мутных средах“ (1907).²

[В этом важном исследовании был поставлен кардинальный вопрос о физической причине мутности однородной среды. Л. И. Мандельштам показал ошибочность (или, как он предпочитал выражаться, „недостаточность“) общепризнанной теории молекулярного рассеяния света Релея. Согласно представлениям Релея, для объяснения рассеяния света однородной средой достаточно принять во внимание движение частиц, ее составляющих. Л. И. Мандельштам показал, наоборот, что в случае однородной среды излучение составляющих

¹ [Речь идет о новом, очень чувствительном методе измерения частот и декрементов, основанном на использовании не амплитудных, а фазовых резонансных кривых, и об оригинальном приборе — так называемом индукционном динамометре, принцип которого лег в основу ряда приборов Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси; эти приборы позволяли непосредственно читать по шкале значения частоты и декремента затухания электрических колебаний и других электрических величин. См. статьи 11 и 13 в этом томе].

² [Статья 4].

ее частиц обуславливает световое поле одной и той же интенсивности и фазы, независимо от того, будут ли частицы находиться в покое, или в движении. К теоретическому анализу, проведенному в этой работе, Л. И. Мандельштам присоединил простые, но убедительные опыты и таким образом со всей ясностью показал, что оптически однородная среда не может рассеивать свет, независимо от того, движутся ее частицы или нет. Другими словами, для объяснения молекулярного рассеяния света основания, приводимые Релеем, недостаточны, и надлежит искать причину нарушения оптической однородности среды. Последующие работы М. Смолуховского, А. Эйнштейна и самого Л. И. Мандельштама показали, что источником этих неоднородностей являются статистические флуктуации показателя преломления или коэффициента отражения света.

В тесной связи с этой работой стоят заметки Л. И. Мандельштама „К теории дисперсии“,¹ посвященные обсуждению возможности объяснения ослабления света при прохождении через вещество явлением рассеяния. Подобное объяснение предложил М. Планк в своей теории дисперсии. Но Л. И. Мандельштам показал, что модель Планка вообще не в состоянии дать ослабления проходящей волны. Не ограничиваясь общими соображениями, убедительно развитыми в работе о мутной среде, Л. И. Мандельштам провел вычисления, показавшие, что сущность вопроса сводится к различию в затухании изолированных вибраторов и вибраторов, образующих однородную среду. Это различие ускользнуло от Планка и было вскрыто Л. И. Мандельштамом, блестяще владевшим всем кругом вопросов теории колебаний.

Последовавшая вскоре работа Л. И. Мандельштама, в которой он изучил рассеяние света на поверхности жидкости или на границе двух жидкостей, особенно вблизи критической температуры, явилась первым теоретическим и экспериментальным исследованием молекулярного рассеяния света на поверхности жидкости и имела большое значение для выяснения природы рассеяния света вообще.²

Точно так же весьма важными представляются замечательные работы Л. И. Мандельштама по теории микроскопического изображения. В этих фундаментальных работах, имеющих не только принципиальное, но и важное практическое значение, Леонид Исаакович

¹ [Статьи 5, 9 и 10].

² [Статья 19].



Л. И. Мандельштам в 1895 г.

дал впервые правильную теорию изображения самосветящихся объектов и чрезвычайно остроумными наглядными методами показал, что, в противоположность взглядам Аббе, практически нет разницы в разрешающей способности микроскопа для случая освещенных и для случая самосветящихся объектов.¹ Пользуясь интегральными уравнениями, Л. И. Мандельштам дал позднее строгую и вместе с тем элегантную математическую теорию оптических изображений вообще, представляющую и самостоятельный математический интерес.²

Чрезвычайно остроумна и содержательна серия оптических работ, идеи которых коренятся в аналогиях с радиотелеграфией. Сюда относятся [исследование затухания собственных колебаний светящихся паров натрия (1910) и излучение источника, находящегося на расстоянии, сравнимом с длиной волны, от поверхности раздела двух сред (1914).³ В первом из этих исследований в оптику был перенесен разработанный Бьеркнесом для электрических колебаний метод определения затухания контура путем снятия резонансной кривой. Взаимодействующими „контурами“ служили пары натрия, испускающие и абсорбирующие свет, причем для изменения частоты колебаний одного из „контуров“ Л. И. Мандельштам воздействовал на него магнитным полем, т. е. использовал эффект Зеемана. Второе исследование представляло собой] осуществление в оптике аналога радиотелеграфной проблемы Зоммерфельда, т. е. излучения источника, расположенного на поверхности раздела земля — воздух. [Здесь Л. И. Мандельштам использовал явление полного внутреннего отражения, при котором световое поле проникает во вторую среду на глубину, составляющую долю световой волны. Взяв в качестве второй среды раствор флюоресцирующего вещества, Л. И. Мандельштам не только дал яркую иллюстрацию этому интересному явлению, но и использовал свечение тончайшего слоя для изучения законов распространения света в пространстве, непосредственно примыкающем к источнику.]

Все эти исследования, часть коих представляла собой блестящие, весьма содержательные и принципиальные полемики с Планком, Флемингом и Люммером,⁴ в которых Леонид Исаакович доказал

¹ [Статья 15].

² [Статья 17].

³ [Статьи 12 и 20].

⁴ [Статьи 5, 9, 10; 8 и 16].

ошибочность их воззрений, принесли ему признание и известность не только среди радиоспециалистов, для которых он к тому времени уже был признанным авторитетом, но и среди физиков вообще.

В страсбургский период своей жизни Леонид Исаакович завязал многочисленные научные связи и знакомства, которые содействовали развитию его научных идей и воззрений и, в известной мере, и их распространению. Не говоря уже об его учителе, большом ученом, профессоре Ф. Брауне, прекрасном экспериментаторе и человеке, тесное научное общение с которым перешло постепенно в своеобразные дружеские отношения, Леонид Исаакович в последние годы пребывания в Страсбурге сблизился также и со своим прежним профессором математики Г. Вебером, которого он очень уважал. Общение с этими выдающимися учеными и прекрасными людьми с широкими взглядами на вещи и гуманным, благожелательным отношением к людям вообще, и особенно к молодежи, несомненно, способствовало укреплению соответственных черт характера Леонида Исааковича. Может быть, достаточно яркой характеристикой личности профессора Брауна, его простоты, столь отличной от чопорности и важности Geheimrath'ов от науки, отсутствия в нем чванства и боязни умалить свой престиж, а также того, как высоко он ценил Леонида Исааковича, может служить то обстоятельство, что он как обыкновенный слушатель посещал читавшиеся первое время Леонидом Исааковичем курсы по специальным отделам физики, причем аккуратно приходил на лекции, внимательно слушал и усердно делал записи в своей знаменитой памятной книжке. Леонид Исаакович был не только постоянным помощником и консультантом профессора Брауна во многих его исследованиях по электрическим колебаниям и вопросам радиотелеграфии, но в последние годы сделался вообще его неизменным советчиком. Почти каждый день в 12 часов, после своей лекции по экспериментальной физике, профессор Браун делал большую прогулку с Леонидом Исааковичем, во время которой они беседовали на различные научные и другие темы. На этих прогулках их всегда сопровождал большой сен-бернар „Лео“, любимец Брауна.

Несомненно много вынес также Леонид Исаакович от научного общения и дискуссий по принципу относительности с теоретиком, профессором Э. Коном, прекрасные лекции которого, являвшие пример строгого логического построения, в известной степени как бы пронизанного духом юридического формализма, характерного для профессора Э. Кона (который первоначально получил

юридическое образование), безусловно много дали Леониду Исааковичу и как студенту и как будущему лектору.

Следует упомянуть также и об известном радиоспециалисте, профессоре Ионатане Ценнеке, старшем коллеге Леонида Исааковича и предшественнике его в должности первого ассистента Страсбургского физического института. Хотя профессор Ценнеке и был старше Леонида Исааковича лет на десять и обладал большими практическими знаниями, но Леонид Исаакович уже тогда отличался особой остротой ума и глубиной и логичностью мысли, а также ясностью своих теоретических познаний. Поэтому пользы от этого научного общения, несомненно, было больше для Ценнеке. Так, например, просмотрев, по просьбе Ценнеке, рукопись написанного им в 1904—1905 гг. первого большого и в известном смысле классического курса „Electromagnetische Schwingungen und Drahtlose Telegraphie“, Леонид Исаакович обнаружил и исправил ряд ошибок и неточностей принципиального характера.

В Страсбурге же завязалось знакомство Леонида Исааковича, перешедшее в дружбу, с известным специалистом в области механики и прикладной математики профессором Рихардом Мизесом, переехавшим туда в 1909 г. из Брюнна и занявшим в Страсбургском университете кафедру прикладной математики. Леонид Исаакович часто беседовал с Мизесом, прекрасным математиком с острым умом, который также находил удовольствие в строгих построениях и в установлении тонких логических различий. Дискуссия о роли аксиоматики в логическом обосновании механики и точных наук, в частности статистической физики, базирующейся на теории вероятности, большим знатоком которой являлся Мизес, удовлетворяли потребности ума Леонида Исааковича в полной ясности мысли. Все это наряду с мыслями А. Пуанкаре, изложенными в его прекрасной книге „La Science et l'Hypothèse“, немало помогло Леониду Исааковичу полностью разобраться и создать в последние годы, уже в Москве, законченное и внутренне не противоречивое логическое обоснование статистической физики.

Страсбургский физический институт пользовался мировой известностью как передовой научный центр, особенно в области эксперимента, еще со времен Кундта. Эта известность поддерживалась во время пребывания там Леонида Исааковича как работами профессора Брауна и его школы в области электрических колебаний и радиотелеграфии, так и, впоследствии, работами Леонида Исааковича в области оптики и статистической физики. Эта известность



Л. И. Мандельштам (третий справа) с группой товарищей по окончании гимназии (1897 г.)

привлекала в Страсбург не только молодых физиков, стремившихся поработать в знаменитом институте, но и крупные ученые часто приезжали для научных бесед с профессором Брауном, а также и с Леонидом Исааковичем. В летнее время всегда бывало много посетителей, особенно из России: в Страсбурге неоднократно бывали проездом в Швейцарию и Францию П. Н. Лебедев, А. А. Эйхенвальд. Частым гостем бывал П. П. Лазарев, который в 1906—1907 гг. длительное время работал в Страсбургском физическом институте. Весной 1913 г., в связи с первыми работами А. Эйнштейна по общему принципу относительности, специально для беседы с Леонидом Исааковичем приезжал в Страсбург П. С. Эренфест. Приезжал также и знаменитый физик М. Лауе для беседы с Леонидом Исааковичем по поводу его замечательных работ по теории оптического изображения.

Леонид Исаакович был избран в 1908 г. членом Страсбургского общества естествоиспытателей и врачей, а с 1912 г. состоял членом Германского общества физиков и естествоиспытателей. Замечу, что с приходом к власти фашистов Леонид Исаакович сразу же заявил о своем выходе из этого Общества.

Помимо своих научных занятий и преподавательской деятельности, которой Леонид Исаакович со свойственной ему добросовестностью отдавал много времени, он также много читал как по вопросам философии науки и теории познания, так и изящную литературу на разных языках. Любимым его поэтом был Пушкин, стихи которого Леонид Исаакович почти все знал наизусть. Любил Леонид Исаакович и книги о знаменитых путешествиях. В страсбургский период у Леонида Исааковича внезапно проснулся интерес к музыке и искусству. Леонид Исаакович часто посещал концерты серьезной музыки, особенно камерные, ходил в картинные галереи, интересовался историей искусства, в частности древнеегипетского. Леонид Исаакович был большим любителем разных игр, особенно умственных, а также спорта. Он с большим увлечением играл на бильярде, в теннис, ездил на велосипеде, катался на коньках. Однако физически мало выносливый, он не был спортсменом, а скорее „болельщиком“ и очень любил посещать различные спортивные состязания. Очень любил Леонид Исаакович природу вообще, особенно море, любил путешествия и легкие прогулки пешком. Почти все каникулярное время в перерыве между семьями Леонид Исаакович сначала один, а после женитьбы — с семьей проводил в Одессе с родными, а в кратковременные

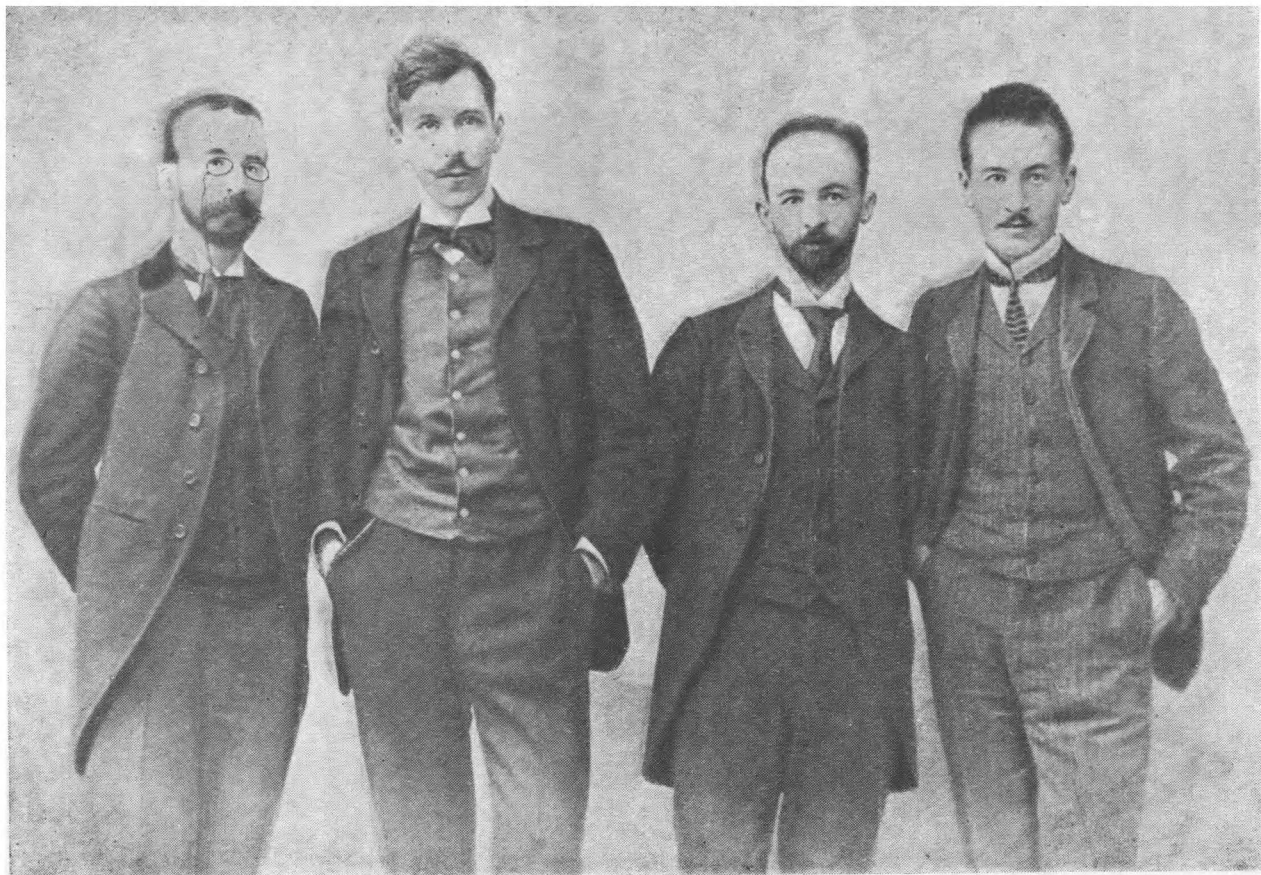
летние и зимние каникулы он обыкновенно ездил по Франции, Швейцарии, Италии и Германии, причем его интересовала не только природа, но и искусство.

С началом первой мировой войны закончился страсбургский период научной деятельности Леонида Исааковича. В конце июля 1914 г., едва закончив лекции, в грозной атмосфере надвигающейся войны Леонид Исаакович вместе с семьей спешно выехал на родину, в Одессу, куда и прибыл в день объявления войны. Лишенный возможности продолжать научную работу в течение первой мировой войны, а затем и гражданской войны, Леонид Исаакович не прерывал, однако, интенсивной научно-технической и педагогической деятельности в родной стране. В 1915 г. он был избран физико-математическим факультетом Новороссийского университета в Одессе приват-доцентом по физике, однако не смог здесь развернуть работу и в конце 1915 г. переехал в Петроград, куда был приглашен в качестве консультанта радиотелеграфного завода Сименс и Гальске (ныне завод им. Козицкого), где и пробыл до осени 1917 г. Здесь, помимо руководства лабораторными исследованиями в области радио — разработок схем и методов измерений, Леонид Исаакович занимался и чисто инженерными вопросами. В этой работе, столь несвойственной Леониду Исааковичу по его склонностям и влечениям, он проявил присущие ему качества прекрасного экспериментатора, с исключительной изобретательностью находившего наиболее простые пути разрешения встречавшихся технических трудностей. По воспоминаниям его ученика и долготелетнего сотрудника, известного радиоинженера, доктора технических наук Е. Я. Щеголева, бывшего в то время студентом-практикантом на этом заводе, все работавшие вместе с Леонидом Исааковичем всегда поражались, „как красиво и подчас гениально просто решались Леонидом Исааковичем иной раз очень и очень непростые технические задачи, так просто, что невольно у каждого из нас возникал вопрос, почему же это раньше не пришло мне в голову?“ Ярким примером этому может служить предложенный Леонидом Исааковичем в 1916 г. абсолютный метод градуировки волномера, описанный в 1918 г. в русской печати его учеником Л. Б. Слепяном и в 1920 г. в журнале „Philosophical Magazine“ профессором Тыкоцинером как абсолютный способ измерения радиочастот, принцип которого с тех пор лег в основу всех абсолютных измерений частот, а также разработку Леонидом Исааковичем технологии оксидирования проволоки для реостатов и налажение ее производства.

Осенью 1917 г., по приглашению Совета Тифлисского политехнического института, Леонид Исаакович с женой переехал в Тифлис, где был избран исполняющим должность ординарного профессора физики. Одновременно Леонид Исаакович состоял также и профессором Женских курсов. Однако в Тифлисе Леонид Исаакович оставался недолго. Осенью 1918 г. он снова в Одессе. Здесь в то время, по инициативе приезжих и местных профессоров, а также студентов столичных и других высших учебных заведений, эвакуированных во время войны, начал создаваться Одесский политехнический институт, в организации которого Леонид Исаакович принимал самое активное участие. В качестве заведующего кафедрой физики нового института Леонид Исаакович привлек туда для преподавания Н. Д. Папалекси, а позднее и М. А. Аганина (ныне покойного, крупного геофизика и магнитолога), И. Е. Тамма, Б. Ф. Цомакиона и др., и совместно с ними, а также с помощью своего помощника К. Б. Романюка и группы студентов создал буквально на пустом месте физическую лабораторию, собрав из разных мест нужные физические приборы и поставив чтение лекций по физике и практические занятия на высоком научном уровне.

Отношение Леонида Исааковича к преподаванию как к высокому долгу, а также исключительная добросовестность особенно проявились в то исключительно тяжелое время гражданской войны, интервенции, отсутствия света, голода, холода и эпидемических болезней. Его одесские товарищи, сотрудники и ученики хорошо помнят, в каких тяжелых условиях приходилось тогда читать лекции и вести занятия. Зимой, в нетопленных аудиториях, Леонид Исаакович не только регулярно читал обязательные лекции, но по собственной инициативе прочел еще для небольшой группы заинтересованных студентов курс колебаний. Со своей стороны, студенты высоко ценили Леонида Исааковича и как ученого, и как учителя, и как человека и всячески старались облегчить ему тяжелые условия жизни.

В Одессе Леонид Исаакович сумел собрать вокруг себя группу талантливых молодых ученых и студентов (И. Е. Тамм, К. Б. Романюк — известный специалист в области электроники, Е. Я. Щеголев, безвременно скончавшиеся братья Горовиц, очень талантливые многообещавшие физики, Б. Ф. Марковский и др.). Он также в свободное от преподавания время продолжал думать над научными вопросами, исследование и выяснение которых было



Л. И. Мандельштам (крайний справа) с А. Г. и Л. Г. Гурвичами и В. Мандельштамом (Берн, 1902 г.)

так жестоко прервано мировой войной. Размышляя над вопросами рассеяния света, Леонид Исаакович уже в 1919—1920 гг. пришел к заключению, что и в совершенно свободном от посторонних примесей однородном теле в силу тепловых флуктуаций не только должно наблюдаться релеевское рассеяние света, но что и спектр падающего света должен претерпевать изменения, правда очень незначительные. Этот так называемый „эффект Мандельштама — Бриллюэна“ и был окончательно установлен и исследован Е. Ф. Гроссом в 1930 г. Однако невозможность развернуть серьезную научную работу, отсутствие научной литературы и оторванность от научных центров как наших, так и зарубежных, вызванные блокадой, очень удручали Леонида Исааковича. Большой радостью для Леонида Исааковича было получение им от научных друзей книги „Spektrallinien und Atombau“ Зоммерфельда. Эти годы тяжелых физических лишений были для Леонида Исааковича связаны также и с тяжелыми личными переживаниями. В 1921 г., после длительной болезни, скончался отец Леонида Исааковича, к которому он был очень привязан.

Летом 1922 г. Леонид Исаакович принял предложение правления Электротехнического треста заводов слабого тока взять на себя руководство в качестве научного консультанта научными и научно-техническими исследованиями в московской Радиолaborатории треста и в конце октября переехал с семьей в Москву (одновременно с ним переехал в Москву и я, получивший аналогичное приглашение). Основным поводом для принятия этого предложения для Леонида Исааковича, которого преподавание и научная работа всегда привлекали больше, чем техника, была невозможность постановки в Одессе серьезных научных исследований из-за отсутствия приборов и литературы.

В марте 1923 г. Леонид Исаакович выехал в двухмесячную научную командировку в Германию, где встретился с рядом ученых, в том числе с А. Эйнштейном. По возвращении в Москву Леонид Исаакович продолжал научно-технические исследования в Радиолaborатории и изучал привезенную им из-за границы новейшую научную литературу.

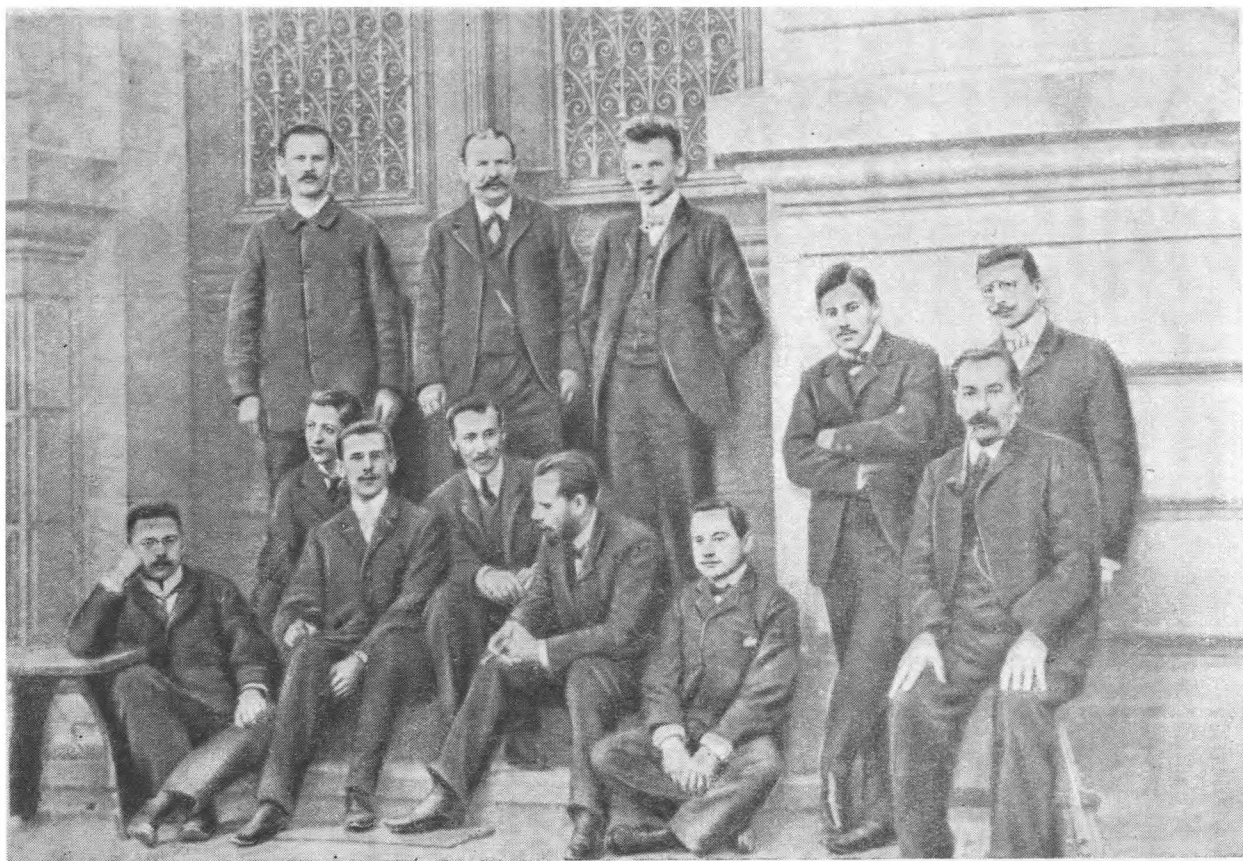
В начале 1924 г., в связи с переводом правления Треста заводов слабого тока и Радиолaborатории в Ленинград и преобразованием ее в Центральную радиолaborаторию [ЦРЛ], Леонид Исаакович переехал в Ленинград. Здесь, в прекрасно оборудованной для того времени Центральной радиолaborатории, получавшей новейшую

литературу не только в области радиотехники, условия были очень благоприятны для проведения исследований в области радиофизики и радиотехники. Из многочисленных исследований, проведенных Леонидом Исааковичем (вместе с Н. Д. Папалекси) в Центральной радиолaborатории до 1925 г., достаточно, может быть, указать, например, на новые способы радиотелеграфной и радиотелефонной модуляции, вопросы стабилизации частоты, высокоселективные приемники.

Однако одна только научно-техническая работа в области радио, как бы глубоко принципиальна и плодотворна она ни была, не давала полного удовлетворения Леониду Исааковичу; его влекло к научным исследованиям в области чистой физики и к преподаванию в высшей школе. Еще в 1923 г., в Москве, Леониду Исааковичу было предложено взять на себя заведывание кафедрой физики в Московском институте путей сообщения, однако условия как для исследовательской, так и для педагогической работы были там весьма неудовлетворительны: студенты-путейцы не только имели слабую физическую подготовку (физика была для них второстепенным предметом), но их общее развитие было тогда весьма слабо. Поэтому Леонид Исаакович от преподавания в МИПС вынужден был отказаться. Когда же в 1925 г. Леонид Исаакович был приглашен в Московский государственный университет в качестве заведующего кафедрой теоретической физики и члена Научно-исследовательского института физики при университете, то он очень охотно принял этого приглашение и переехал в Москву, но продолжал до 1935 г. в качестве консультанта (вместе с Н. Д. Папалекси) вести исследовательские работы в области радио в Центральной радиолaborатории.

С этого времени начался самый насыщенный и плодотворный период научной и педагогической деятельности Леонида Исааковича. В очень короткое время научный авторитет Леонида Исааковича и его исключительное личное обаяние объединили в Научно-исследовательском институте физики при МГУ талантливых молодых ученых (Г. С. Ландсберг, И. Е. Тамм и др.), а его выдающиеся по содержанию и форме лекции и исключительно содержательные семинары, к которым Леонид Исаакович всегда очень тщательно готовился, привлекли к нему много талантливой молодежи — студентов и аспирантов. Под руководством Леонида Исааковича, вдохновленные его научными идеями, молодые ученые начали проводить исследования в различных областях физики — оптике, учении

о колебаниях, молекулярной физике и др., и образовали большую научную школу, из которой вышли многие крупные ученые (академик А. А. Андронов, академик М. А. Леонтович, проф. С. Э. Хайкин, проф. Г. С. Горелик, проф. С. М. Рытов, А. А. Витт, С. П. Шубин, М. А. Дивильковский, М. И. Филиппов, С. П. Стрелков и др.). За период от 1925 до 1935 г., который можно условно назвать первым московским периодом научной деятельности Леонида Исааковича, в благоприятной для научных исследований атмосфере пышно расцвели и дали обильные плоды научные идеи, выношенные им в долгие предшествующие годы вынужденного отрыва от научной работы. Наряду с исследованиями в области электрических колебаний и их технических применений, которые проводились Леонидом Исааковичем совместно с Н. Д. Папалекси в Центральной радиолaborатории в Ленинграде и которые были тесно связаны с исследованиями в этой области, проводившимися под руководством Леонида Исааковича в Научно-исследовательском институте физики в Московском университете, он продолжал также свои исследования вопросов рассеяния света в связи с флюктуационными явлениями. В области электрических колебаний наиболее фундаментальные и научно важные результаты дало создание новой главы теории колебаний — учение о нелинейных колебаниях, повлекшее за собой открытие новых видов резонанса и создание новых способов возбуждения колебаний (автопараметрическое, гетеропараметрическое, асинхронное), что привело, с одной стороны, к существенному расширению и эволюции понятия резонанса, и, с другой стороны, к созданию новых радиоустройств и электрических машин нового типа, так называемых „параметрических“ машин. Кульминационным пунктом работ Леонида Исааковича в области рассеяния света было фундаментальное открытие им в 1928 г. совместно с Г. С. Ландсбергом явления комбинационного рассеяния света. Это открытие, которое одновременно с русскими физиками было сделано индусским ученым Раманом и которое является одним из крупнейших открытий в оптике за последние 25 лет, несомненно поставило имя Леонида Исааковича в ряд с крупнейшими учеными современности. В том, что сообщение Леонида Исааковича поступило в печать позже телеграфного сообщения в „Nature“ Рамана, несмотря на то, что открытие Рамана было фактически сделано позже, чем у нас, сказались исключительная, доходившая до болезненности требовательность Леонида Исааковича к своим публикациям, из-за которой он сообщал в печати



Л. И. Мандельштам (сидит в центре) с сотрудниками Страсбургского физического института (1905 г.)

о новых научных результатах лишь после многократной предварительной проверки их в течение длительного времени. Здесь повторилось то же, что имело место в 1911 г., когда Леонид Исаакович не считал возможным опубликовать обоснованные им теоретически и установленные качественно на опыте совместно с Н. Д. Папалекси, за несколько лет до классических опытов Стюарта и Толмена, инерционные явления электронов в металлах.

Здесь нет возможности останавливаться на рассмотрении других многочисленных, принципиально важных и глубоких исследований как в области нелинейных колебаний, так и рассеяния света, опубликованных Леонидом Исааковичем [частью совместно со своими товарищами и учениками], тем более что эти работы будут более подробно рассмотрены во второй части биографии.¹ Достаточно, может быть, указать, что уже к 1935 г. число научных работ по нелинейным колебаниям у нас в СССР достигало около 100 и что в настоящее время оно значительно больше 200, для того чтобы ясно было значение созданной Леонидом Исааковичем и связанной с его именем нелинейной школы физиков. На первую Международную конференцию по нелинейным колебаниям в Париже в 1933 г. были приглашены, кроме Леонида Исааковича, одного из инициаторов этой конференции, также Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов и А. А. Витт (принимал в ней участие лишь Н. Д. Папалекси), а в 1934 г., по приглашению оргбюро, подробный доклад об исследованиях в области нелинейных колебаний, проведенных у нас, и составленный Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси, А. А. Андроновым, А. А. Виттом и С. Э. Хайкиным, был представлен Конгрессу Радиофизического союза (URSI) в Лондоне.²

Для полной характеристики широты и глубины научного творчества Леонида Исааковича в этот период необходимо еще указать на опубликованную им в 1928 г. совместно с М. А. Леонтовичем замечательную работу по квантовой механике, касающуюся уравнения Шрёдингера, в которой, в сущности говоря, содержатся все основы теории прохождения частиц через потенциальный барьер, послужившей основой для теории альфа-распада радиоактивных частиц.

¹ [Н. Д. Папалекси предполагал написать вторую часть биографии Л. И. Мандельштама, посвященную анализу научного творчества Л. И. Мандельштама].

² [Том III, статья 61].

Наряду с весьма интенсивной научной работой в НИИФ и ЦРЛ, необходимо особо отметить замечательную деятельность Леонида Исааковича как профессора и учителя молодежи, которая у него была неотделима от его научной работы. Эта особенность творчества Леонида Исааковича, которое носило в известной мере коллективный характер, проявлялась в том, что у него не было резкой границы между преподаванием и научно-исследовательской работой. Как уже было отмечено, Леонид Исаакович относился к преподаванию, как к исключительно важному высокому долгу, и отдавал очень много времени подготовке к лекциям и семинарам, а также беседам со студентами и аспирантами. Леонид Исаакович состоял редактором журналов „Прикладная физика“ и „Physikalische Zeitschrift der Sowietunion“, а также членом редколлегии „Журнала теоретической и экспериментальной физики“. В 1928 г. Леонид Исаакович был избран в члены-корреспонденты, а в 1929 г. в действительные члены Академии Наук СССР, причем ярким свидетельством его огромного научного авторитета и исключительно широкой научной известности может служить то обстоятельство, что он был выдвинут в действительные члены Академии Наук почти всеми высшими учебными заведениями и научными учреждениями Союза.

С избранием Леонида Исааковича в академики еще более расширились сфера его научной деятельности и круг его научных интересов. Леонид Исаакович с самого начала принимает участие в работах Отделения физико-математических наук, в его собраниях и работах комиссий, а с переводом Академии в Москву в 1934 г. — в организации физического института Академии Наук, где с 1935 г. под его руководством и при его участии в лабораториях колебаний и оптики проводились исследования в области колебаний, оптики и молекулярной физики.

В этот первый московский период научной деятельности Леонида Исааковича возникла замечательная школа физиков, замечательная не только и не столько своим прекрасным знанием физики, искусным владением аппаратом современной теории и умением его конкретного применения, как умением физически логически мыслить, правильно ставить задачу и отделять в ней существенное от несущественного, продумывать ее глубоко и до конца. Эта школа, как было замечено выше, завоевала международное признание как в области нелинейных колебаний, так и рассеяния света...¹

¹ [Краткая биография Л. И. Мандельштама, задуманная и в значительной степени написанная Н. Д. Папалекси, осталась незаконченной вследствие внезап-

* * *

Последнее двадцатилетие в жизни Л. И. Мандельштама, начинающееся с его окончательного переезда в Москву в 1925 г. в связи с избранием профессором физики Московского государственного университета, было расцветом его научной и педагогической деятельности. С этим периодом связаны наиболее выдающиеся достижения Л. И. Мандельштама в области учения о колебаниях, оптики и молекулярной физики, корни которых были заложены всей его предшествующей деятельностью. Вокруг него собираются особенно многочисленные группы сотрудников и учеников, многие из которых еще при жизни Л. И. Мандельштама заняли выдающееся положение и стали проводниками его идей среди еще более обширного круга молодежи. В течение этого периода Л. И. Мандельштам провел серию важнейших курсов и семинаров по фундаментальным проблемам физики. К этому периоду относятся и многократные проявления общественного признания его исключительных заслуг: избрание в 1928 г. членом-корреспондентом, а в 1929 г. действительным членом Академии Наук СССР, присуждение ему важнейших научных премий по физике — премии им. Ленина (в 1931 г.), премии им. Менделеева (в 1936 г.) и премии им. Сталина (в 1942 г.), и награждение его орденами Союза ССР — орденом Трудового Красного Знамени (в 1940 г.) и орденом Ленина (1944 г.).

С 1925 г. Л. И. Мандельштам становится центральной фигурой физического факультета Московского государственного университета. Руководимый им кабинет теоретической физики быстро превращается в крупную исследовательскую лабораторию, где наряду

ной кончины Н. Д. Папалекси в феврале 1947 г. Близкая дружба и тесное научное сотрудничество, связывавшие обоих ученых на протяжении почти полувека, наложили особый отпечаток внутренней теплоты на биографический очерк, задуманный Н. Д. Папалекси. Естественно, что не представлялось возможным закончить его, не нарушая индивидуального характера написанного. Поэтому Комиссия по изданию трудов Л. И. Мандельштама решила оставить этот очерк в том незавершенном виде, в каком он вышел из-под пера Н. Д. Папалекси, введя в текст лишь краткие дополнения (они заключены в квадратные скобки), дающие более подробную характеристику некоторых работ Л. И. Мандельштама, относящихся к периоду до 1925 г., когда Л. И. Мандельштам окончательно переехал в Москву. Кроме того, Г. С. Ландсбергом при участии Г. С. Горелика, И. Е. Тамма, М. А. Леонтовича и С. М. Рытова составлен краткий очерк деятельности Л. И. Мандельштама за последние годы. Некоторые повторения, касающиеся вопросов, уже затронутых в очерке Н. Д. Папалекси, конечно, оказались при этом неизбежными].

с теоретической работой разворачиваются и экспериментальные исследования, приведшие, несмотря на бедность технических средств, к результатам первостепенного значения. С 1934 г., с момента переезда в Москву Академии Наук, Л. И. Мандельштам принимает активное участие в развертывании физического института Академии Наук, где были созданы две лаборатории, призванные осуществлять идеи и замыслы Л. И. Мандельштама: Лаборатория колебаний (под руководством Н. Д. Папалекси) и Лаборатория оптики (под руководством Г. С. Ландсберга). Такая форма организации, при которой на Л. И. Мандельштаме не лежало никаких организационных забот и которая в силу дружественной близости с руководителями лабораторий, интимного понимания и непререкаемого авторитета давала ему полную возможность широко проявлять свою научную инициативу, была особенно по душе Л. И. Мандельштаму.

Вместе с работой в Физическом институте Л. И. Мандельштам сохранил за собой и руководство кафедрой в Московском государственном университете, где он из года в год осуществлял свои блестящие лекции и семинары и где продолжалась и исследовательская работа, правда, в силу некоторых неблагоприятных обстоятельств, в меньшем масштабе, чем это соответствовало желаниям Л. И. Мандельштама.

Основными направлениями научной работы Л. И. Мандельштама за этот период были исследования в области рассеяния света, которые тесно сплетались с проблемами молекулярной физики и дали впоследствии начало новому направлению работы, которое можно условно назвать исследованиями по ультраакустике. В то же время в высшей степени продуктивно развивались исследования по нелинейным колебаниям с их многочисленными и важными практическими применениями и новая область радиофизики — радиointерферометрия, где исследования по распространению радиоволн над поверхностью земли и моря привели к практически важному методу определения расстояния между двумя пунктами. Параллельно с этими систематическими исследованиями по двум главным руслам научных интересов Л. И. Мандельштама его внимание все больше привлекают теоретические изыскания по отдельным узловым вопросам волновой механики, особенно по проблемам, имеющим важное теоретико-познавательное значение. Интерес к подобного рода проблемам, связанным с аксиоматикой и логическим обоснованием основных методов физики, всегда был живым у Л. И. Мандельштама; в последние годы его деятельности

направление это не только не ослабевало, но, повидимому, имело тенденцию сделаться решающим.

Проблема рассеяния света, как одна из центральных проблем взаимодействия света и вещества, интересовала Л. И. Мандельштама на протяжении всей его научной жизни. Фундаментальные результаты в области теории рассеяния, добытые трудами Л. И. Мандельштама, Смолуховского и Эйнштейна, показали, что причиной молекулярного рассеяния света являются статистические флюктуации показателя преломления, обусловленные в основном флюктуациями плотности вещества. Эйнштейн построил теорию молекулярного рассеяния, в которой последнее интерпретируется как диффракция на пространственных решетках, соответствующих отдельным членам разложения флюктуаций показателя преломления в трехмерный ряд Фурье. Независимо от этого, Дебай создал свою знаменитую теорию теплоемкости твердых тел, в которой тепловое движение рассматривается как совокупность акустических волн.

Л. И. Мандельштам сумел увидеть тождество „формальных“ эйнштейновских решеток и акустических волн Дебая. Далее его мысль естественно пошла по такому пути. Плотность в акустических волнах и с нею показатель преломления периодически меняются не только в пространстве, но и во времени. Следовательно, и интенсивность рассеянного света должна меняться во времени, так что, выражаясь на языке радиофизики, рассеянный свет претерпевает модуляцию. В этом пункте на помощь пришло искусство, с каким Л. И. Мандельштам умел оплодотворять один круг вопросов идеями, почерпнутыми из другой области. Перенеся в оптику идею модуляции, развившуюся на радиотехнических вопросах, он пришел к выводу, что рассеяние монохроматического света должно сопровождаться изменением его длины волны, изменением, которое отображает молекулярный процесс, обуславливающий рассасывание флюктуаций. Эта идея была полностью прослежена Л. И. Мандельштамом еще в 1918 г., хотя соответствующая заметка „О рассеянии света неоднородной средой“¹ появилась в печати значительно позже, в 1926 г., когда часть найденных Л. И. Мандельштамом результатов была уже опубликована Бриллюэном (1922).

Получив с избранием на кафедру Московского университета возможность вернуться к экспериментальной работе по оптике, Л. И. Мандельштам выдвинул проблему изменения длины волны

¹ Статья 22.

при рассеянии как первоочередную, и она-то и стала объектом изучения, предпринятого им совместно с Г. С. Ландсбергом, в цикле работ, посвященных рассеянию света кристаллическим кварцем. Именно поиски этого предусмотренного теорией Л. И. Мандельштама изменения длины волны при рассеянии и привели его совместно с Г. С. Ландсбергом к открытию (1928 г.) явления комбинационного рассеяния света, где было обнаружено изменение длины волны, но значительно большее, чем предусматривала первоначальная теория Л. И. Мандельштама.¹ Размышление над полученными результатами показало, что в обнаруженном явлении также имеет место процесс модуляции рассеянного света. Однако в данном случае причиной модуляции являются вариации показателя преломления, обусловленные собственными инфракрасными колебаниями молекул, а не случайные неоднородности, вызываемые распространением упругих возмущений, как предполагала первоначальная теория Л. И. Мандельштама. Вся проблема была вполне разъяснена в заметке Л. И. Мандельштама и Г. С. Ландсберга (1929), в которой было показано, что оба явления — как первоначально искавшееся, так и обнаруженное на опыте — представляют две стороны одной и той же проблемы, являясь оптическим отображением тех молекулярных процессов, которые учитываются в теории теплоемкости, с одной стороны, дебаевскими акустическими колебаниями, а с другой — борновскими инфракрасными колебаниями молекул многоатомного кристалла.²

Открытие комбинационного рассеяния, т. е. модуляция света инфракрасными колебаниями молекул, не снимало с очереди, а лишь усилило интерес Л. И. Мандельштама к исходному явлению рассеяния света на акустических волнах. Опыты в этом направлении были возобновлены и качественно было обнаружено также то малое изменение длины волны (тонкая структура рассеянного света), которое предусматривалось первоначальными соображениями Л. И. Мандельштама. Одновременно, по желанию Л. И. Мандельштама, подобные опыты были поставлены с лучшими техническими средствами в Гос. Оптическом институте в Ленинграде Е. Ф. Гроссом. Гроссу удалось более детально исследовать тонкую структуру линий рассеяния в кварце и подтвердить теорию Мандельштама с количественной стороны. Более того, Гросс обнаружил

¹ Статья 24.

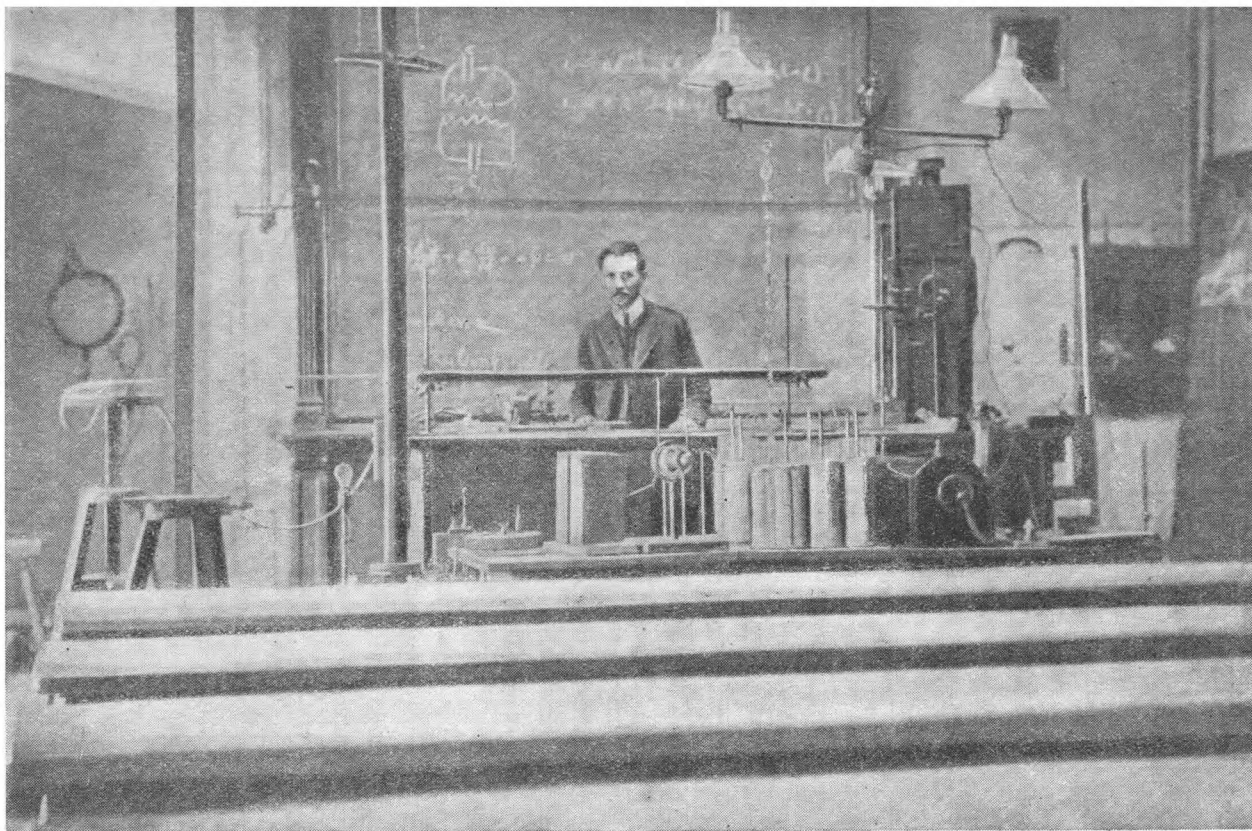
² Статья 27.

существование резкой тонкой структуры также и в случае рассеяния в жидкостях — важный результат, который был подтвержден в ряде дальнейших исследований.

Установление тонкой структуры рассеянного света в жидкостях свидетельствовало, что затухание дебаэвских акустических волн высокой частоты, на которых происходит рассеяние света в жидкостях, не столь значительно, как это можно было бы предполагать из общих соображений. Таким образом, возникла новая проблема молекулярной физики, изучение которой перекидывало мост между оптическими и ультразвуковыми исследованиями. Интерес к этим последним был пробужден у Л. И. Мандельштама публикациями Кнезера. Кнезером было показано, что наблюдающаяся в углекислоте дисперсия скорости ультразвуковых волн свидетельствует о том, что обмен энергией между внешними и внутренними степенями свободы может не успевать устанавливаться при достаточно высокой частоте колебаний.

Это интересное явление, дающее возможность судить о внутримолекулярных процессах в газах, побудило Л. И. Мандельштама поставить ряд экспериментальных работ, разъяснявших некоторые неясные стороны и, в частности, показавших на основании исследования скорости звука в гелии, что явление дисперсии связано с существованием многоатомных молекул. Связь дисперсии с абсорбцией, столь характерная для явлений оптической дисперсии, которой много занимался Л. И. Мандельштам, натолкнула его на постановку исследований абсорбции ультразвуковых волн в веществе, причем для исследований в жидкостях оказалось удобным использование метода дифракции света на ультразвуковых волнах, незадолго до того открытой в работах Люка и Бикара и Дебая и Сирса. Явление это, чрезвычайно близкое к явлению рассеяния света на естественных тепловых флуктуациях, уже давно предчувствовалось Л. И. Мандельштамом. Поэтому он быстро поставил в связь результаты изучения абсорбции ультразвуковых волн частоты 10^5 — 10^7 циклов с явлениями тонкой структуры рассеянного света, наблюдаемыми в жидкостях Гроссом и обусловленными рассеянием света на ультразвуковых (тепловых) волнах, частота которых приближается к 10^{10} .

В работах П. А. Бажулина, поставленных по указаниям Л. И. Мандельштама, был собран обширный экспериментальный материал, показавший, что затухание ультразвуковых волн обуславливается не только обычным коэффициентом вязкости (связанным



Л. И. Мандельштам в одной из аудиторий Страсбургского института (1908 г.)

со сдвигом), но и так называемым вторым коэффициентом вязкости (связанным со всесторонним сжатием) и растет пропорционально квадрату частоты. Экстраполяция данных для коэффициента абсорбции, полученных в доступном для пьезоэлектрической техники диапазоне частот колебаний (примерно до 10^8), на область частот, играющих роль в явлениях рассеяния света ($\sim 10^{10}$), приводит к результату, не совместимому с наблюдаемой Гроссом и другими отчетливо выраженной тонкой структурой рассеянного света, позволяющей оценить верхний предел коэффициента затухания при этих частотах. Л. И. Мандельштаму удалось и здесь найти ключ к пониманию. Им была совместно с М. А. Леонтовичем создана релаксационная теория затухания ультразвуковых волн,¹ позволившая разъяснить наблюдаемое экспериментальное противоречие и дающая возможность оценить время релаксации соответствующего коэффициента вязкости. В этих работах дело касалось коэффициента, характеризующего всестороннее сжатие, играющее основную роль в жидкостях, обычная вязкость которых не очень значительна. В дальнейших работах, экспериментальных и теоретических, выполненных по указаниям Л. И. Мандельштама (П. А. Бажулиным и М. И. Исаковичем), подобное толкование было распространено и на обычный коэффициент вязкости и таким образом было устранено противоречие между ультразвуковыми и оптическими оценками затухания для таких вязких жидкостей, как, например, глицерин.

Ультразвуковые проблемы в понимании Л. И. Мандельштама были, таким образом, непосредственно и тесно связаны с оптическими проблемами, в частности с вопросами рассеяния света.

Чрезвычайный интерес в этой связи представляет заметка Л. И. Мандельштама о рассеянии света неравномерно нагретой средой,² в которой он показал, что в зависимости от затухания тепловых волн интенсивность рассеяния может определиться температурой не того места, где рассеивается свет, а средней температурой некоторой довольно значительной области. Другими словами, понятие „температуры“ сильно зависит от того, какое физическое явление использовано в качестве термометра. Выводы Л. И. Мандельштама вызвали постановку соответствующего экспериментального исследования (Г. С. Ландсберг и А. А. Шубин), показавшего,

¹ Том II, статьи 42 и 43.

² Том II, статья 3^о.

что для кристаллического кварца затухание ультразвуковых волн еще слишком мало, для того чтобы эффект, предсказанный Л. И. Мандельштамом, имел измеримое значение. Таким образом, был оценен нижний предел коэффициента затухания в кварце ультразвуковых волн частоты $\sim 10^{10}$, в то время как соображения Л. И. Мандельштама о тонкой структуре света, рассеянного кварцем, позволили оценить верхний предел того же коэффициента.

Наряду с рассеянием света, тесно связанным с проблемами затухания ультразвуковых (тепловых) волн, Л. И. Мандельштам продолжал интересоваться и другими аспектами задачи о рассеянии. Так, в нескольких работах (совместно с Г. С. Ландсбергом) им было предугадано и экспериментально изучено явление, получившее название „селективного рассеяния света“¹, где вновь было привлечено внимание к той тесной связи между явлениями рассеяния и дисперсии, которую Л. И. Мандельштам подчеркнул еще в 1907 г. Явление это, состоящее в аномальном ходе зависимости интенсивности рассеянного света от длины волны вблизи собственных линий поглощения вещества, было изучено на парах ртути и представляет переход от обычного рассеяния в газах к резонансной флуоресценции.

Точно так же Л. И. Мандельштам неоднократно возвращался к проблеме рассеяния света на поверхности жидкости, статистическую теорию которого он дал в 1913 г. По его указаниям, А. А. Андронов и М. А. Леонтович расширили и дополнили эту теорию, а Ф. С. Барышанская провела экспериментальное исследование зависимости интенсивности рассеянного света от длины волны, подтвердив указанный теорией Мандельштама закон $1/\lambda^2$, в отличие от закона $1/\lambda^4$, характерного, по Релею, для объемного рассеяния.

Наряду с вопросами оптики, одно из главных мест в размышлениях и творчестве Л. И. Мандельштама всегда занимало учение о колебаниях. Бывали периоды, когда вопросы колебаний больше всего владели его вниманием. Можно было бы выразиться сильнее: Л. И. Мандельштам понимал учение о колебаниях очень широко. Он говорил, что, наряду с „национальными“ языками механики, акустики, оптики, электродинамики, существует „интернациональный язык теории колебаний“, охватывающий все эти области и позволяющий, обладая интуицией в одной из них, легко разбираться в остальных. В последние годы жизни Л. И. Мандельштам высказывал

¹ Статья 31; том II, статья 41.

убеждение, что учение о колебаниях сыграло первостепенную роль в развитии всей физики, что главные физические открытия по существу были колебательные.

С этой широкой точки зрения все работы Л. И. Мандельштама относятся к учению о колебаниях. Ниже речь идет о работах по колебаниям, понимаемым в обычном, более узком смысле.

Еще в Страсбурге Л. И. Мандельштам изучил и продумал классическую теорию колебаний и волн. Главным источником его знаний в этой области были работы Релея — его многочисленные мемуары и двухтомный трактат „Theory of Sound“. Л. И. Мандельштам полностью унаследовал ту линейную колебательную культуру, энциклопедия которой содержится в сочинениях Релея, и старался передать ее следующему поколению. Он пристально следил за развитием математических методов, связанных с этой областью, и существенно обогатил линейную теорию колебаний в своих лекциях и семинарах, в исследованиях, которыми он руководил. Среди исследований, относящихся к классической линейной теории колебаний, выполненных по идеям Мандельштама, отметим работу С. П. Шубина, в которой релейевская теория возмущений в линейных колебательных системах распространена на особенно важный случай, когда несколько собственных колебаний исходной системы имеют одинаковые частоты, а также работу А. А. Витта и С. П. Шубина, в которой разъясняется физический смысл парадоксального утверждения, что если закрепить мембрану в произвольной точке, то частоты ее колебаний не меняются; разрешение парадокса состоит в том, что частоты повышаются при закреплении конечной (хотя и сколь угодно малой) области.

В своих лекциях и семинарах, в своем докладе на конференции по колебаниям (1931)¹ Л. И. Мандельштам дал исчерпывающее разъяснение всего круга принципиальных вопросов, связанных со спектральными разложениями, в частности вопросов, связанных с ошибкой известного английского радиоспециалиста Флеминга, отрицавшего реальность боковых полос при модуляции. Л. И. Мандельштам внес в своем преподавании замечательную ясность в теорию колебаний линейных систем со многими степенями свободы; он провел, в частности, различие между „связью“ и „связанностью“ и первый разъяснил то обстоятельство, о котором лишь позднее заговорили в литературе, что род связи (индукционная, емкостная

¹ Том III, статья 59.

связь) может быть различным в зависимости от выбора обобщенных координат. Большое место занимала в его мыслях связь линейной теории колебаний с волновой механикой, например, аналогия и различие между принципом неопределенности и соотношением между продолжительностью радиоимпульса и размытостью его спектра. По его идее возникла работа А. Г. Майера и Е. А. Леонтовича, где дается оценка минимального значения произведения этих величин.

Интерес и вкус к задачам линейной теории колебаний и волн не угасал у Л. И. Мандельштама до конца его жизни. Он вновь ярко вспыхнул в связи с появлением в радиотехнике полых резонаторов и волноводов. Две работы Л. И. Мандельштама,¹ сделанные им в Боровом — „Некоторые вопросы, связанные с возбуждением и распространением электромагнитных волн в трубах“ и „Излучение через отверстие в резонаторе“, — напоминают по изяществу анализа лучшие творения Релея.

Но Л. И. Мандельштам был не только продолжателем Релея в области линейных колебаний. Под его руководством возникло новое направление в теории колебаний, уже получившее самое широкое признание. Это направление связано с изучением нелинейных колебаний. У Релея им посвящены только отрывочные замечания. Серьезный интерес к нелинейным колебаниям появился у физиков тогда, когда радиотехника начала овладевать процессами, происходящими в устройствах, содержащих электронные лампы. Электрический ток в вакууме не подчиняется закону Ома. Поэтому, в отличие от явлений, изучавшихся классической теорией колебаний, эти процессы, в том числе важнейший из них — генерация незатухающих колебаний (автоколебания), могут быть описаны лишь нелинейными дифференциальными уравнениями; отсюда и название — нелинейные колебания. Первые (частично неопубликованные) исследования Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси о самовозбуждении и об автоколебаниях лампового генератора были начаты ими еще в Одессе в 1918—1920 гг. Примерно в те же годы разработка теории автоколебаний была начата в ряде других стран. Ею занимались Мёллер и Баркгаузен (Германия), Эпплтон (Англия) и особенно плодотворно — голландский физик Б. ван дер Поль. В том, как развивались исследования нелинейных колебаний, руководимые Л. И. Мандельштамом, отчетливо обнаружилась

¹ Том II, статьи 50 и 51.

оригинальность его путей, особый, характерный для него подход физика-мыслителя.

Сначала Л. И. Мандельштам был озабочен необходимостью создать хотя бы для простейшей, идеализированной модели строгую теорию, безусловно передающую характерную черту лампового генератора — установление колебаний с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Работая над этой задачей, А. А. Андронов, бывший в то время одним из аспирантов Л. И. Мандельштама, нашел в работах Анри Пуанкаре и А. М. Ляпунова основы математического аппарата теории нелинейных колебаний: открытые Пуанкаре, вне всякой связи с физическими задачами, „предельные циклы“ ждали более 40 лет того, чтобы в них узнали адекватный математический образ автоколебаний. В связи с этим интерес Л. И. Мандельштама к нелинейным колебаниям сильно возрастает. Не меньшую роль сыграли здесь и его совместные с Н. Д. Папалекси исследования, широко развернувшиеся в ЦРЛ (Ленинград) и приведшие, в частности, к открытию резонанса n -го рода (см. ниже).

В 1931 г. Л. И. Мандельштам выступает на конференции по колебаниям с уже упоминавшимся выше обширным и глубоко принципиальным докладом, в котором, наряду с рассмотрением ряда линейных вопросов, дается развернутое изложение нового нелинейного направления. Острее, чем кто-либо до него, Л. И. Мандельштам видит пропасть, отделяющую нелинейные задачи от привычных линейных. Он подчеркивает необходимость не только решения отдельных задач, но и создания, наряду с линейной колебательной культурой, новой, нелинейной колебательной культуры, включающей в себя надежный математический аппарат и физические представления, адекватные новым задачам, выработку нелинейной интуиции, годной там, где оказывается непригодной интуиция, выработанная на линейных задачах.

Новое нелинейное направление развивалось сначала под непосредственным руководством Л. И. Мандельштама. Впоследствии, когда ряд его учеников превратился в самостоятельных ученых и в новой области начали работать многочисленные ученики его учеников, Л. И. Мандельштам продолжал пристально следить за каждым их шагом и помогал им своими советами.

Л. И. Мандельштаму, совместно с Н. Д. Папалекси, принадлежит ряд выдающихся конкретных результатов в области нелинейных колебаний. Здесь следует назвать прежде всего формулировку на языке дифференциальных уравнений плодотворного и широко



Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси с группой сотрудников лаборатории высокочастотной физики ЦРЛ (1929 г.)

известного теперь „условия скачка“, лежащего в основе теории „разрывных“ колебаний и позволившего, в частности, А. А. Андронову и А. А. Витту дать теорию мультивibrатора. Далее идет открытие резонанса n -го рода и создание теории этого явления, которое состоит в следующем. Если на колебательный контур, сам по себе не колеблющийся, но регенерированный при помощи электронной лампы (система существенно нелинейна), действует внешняя э. д. с., частота которой превосходит приблизительно в n раз ($n=2, 3, \dots$) собственную частоту контура и амплитуда которой заключена в известных пределах (между некоторым „порогом“ и некоторым „потолком“), то в контуре возбуждаются колебания, частота которых в точности в n раз ниже частоты внешней э. д. с. Опираясь на методы, разработанные Пуанкаре для задач небесной механики, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси дали теорию стационарных колебаний при резонансе n -го рода.¹ Кроме того, придав новую формулировку методу „медленно меняющихся амплитуд“, впервые примененному в теории нелинейных колебаний ван дер Полем, и обосновав его математически для некоторых интересных для физики постановок задач,² Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси разработали при его помощи теорию нарастания амплитуды при возникновении резонанса n -го рода.³ Они применили далее особенности этого нарастания для создания фильтров, позволяющих ослабить помехи в радиоприеме.

К резонансу n -го рода тесно примыкает другое явление, также впервые обнаруженное Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси и названное ими асинхронным возбуждением: они установили на опыте и объяснили теоретически тот факт, что если на регенерированный контур действует внешняя э. д. с., частота которой не находится в простом целочисленном отношении к собственной частоте контура, то при определенном режиме лампы и в определенном интервале амплитуд в контуре возбуждаются колебания с собственной частотой.⁴ К явлению резонанса n -го рода тесно примыкает также подробно исследованное под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси явление синхронизации лампового генератора под действием внешней э. д. с. на частоте, которая находится

¹ Том II, статьи 32 и 33.

² Том II, статья 38.

³ Том II, статья 37.

⁴ Том II, статья 35.

в простом кратном отношении к частоте э. д. с., например 3:2. Это явление было ими использовано в радиоинтерферометрах, о которых будет идти дальше.

Важно отметить здесь, что Л. И. Мандельштам живо интересовался также и тем, как проявляются в колебательных и, в частности, автоколебательных системах статистические флуктуации, так много занимавшие его в связи с рассеянием света. Он неоднократно подчеркивал (еще тогда, когда это отрицалось некоторыми выдающимися физиками), что в радио, как и в оптике, вследствие флуктуаций принципиально не может быть строго монохроматических колебаний. К этому кругу идей принадлежит одна из постановок вопроса, приведших к работе Л. С. Понтрягина, А. А. Андропова и А. А. Вятга, посвященной статистическому рассмотрению нелинейных систем, и последовавшая за ней работа И. Л. Берштейна, в которой была вычислена „естественная ширина линии“ лампового генератора.

В некотором смысле промежуточное место между классическими линейными колебаниями и нелинейными колебаниями занимают колебания в линейных системах с переменными параметрами. Классическая линейная теория имеет дело с системами, параметры которых (масса, емкость, сопротивление) не меняются со временем. Но наряду с нелинейными системами, в которых, скажем, сопротивление зависит от силы тока, интерес представляют также такие линейные системы, параметры которых меняются со временем, например являются периодическими функциями времени. Л. И. Мандельштам существенно обогатил учение о линейных системах с периодически меняющимися параметрами. Совместно с Н. Д. Папалекси он осуществил ряд таившихся в них технических возможностей, намек на которые имеется еще у Релея.

Возникшая в связи с так называемой старой квантовой механикой работа Л. И. Мандельштама, А. А. Андропова и М. А. Леонтовича „К теории адиабатических инвариантов“ содержит выяснение ряда свойств, имеющих место при очень медленных изменениях параметров.¹ К этой работе примыкает выполненная под руководством Л. И. Мандельштама работа А. А. Андропова и М. А. Леонтовича, где подробно выяснен характер областей неустойчивости, т. е. условий, при которых периодическое изменение параметров вызывает накопление энергии в системе и нарастание ее колебаний.

¹ Статья 25.

В начале 1931 г. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси уже построили первую „параметрическую машину“ — генератор переменного тока, принципиально отличный от ранее известных. Отличие, как подчеркивал Л. И. Мандельштам,¹ заключается в том, что в параметрической машине существенно наличие как индуктивности, так и емкости, а также соблюдение определенного соотношения между периодом изменения этих параметров (или одного из них) и величиной самих параметров.

В первой параметрической машине периодически менялась индуктивность. Немного позднее, в 1932 г., была построена параметрическая машина, в которой периодически изменялась емкость. Впоследствии под руководством главным образом Н. Д. Папалекси были построены образцы технических генераторов небольшой мощности, которые по ряду показателей обладают преимуществами по сравнению с обычными генераторами, давно известными в электротехнике.

К области линейных систем с периодически меняющимися параметрами относятся выполненные на основе идей Л. И. Мандельштама исследования С. М. Рытова о модуляции и работа Г. С. Горелика о резонансных явлениях, наступающих в этих системах, когда на них действует переменная внешняя сила.

В работе Г. С. Горелика, в которой опубликованы и некоторые результаты, сообщенные автору самим Л. И. Мандельштамом (две „степени“ резонанса), получила конкретное воплощение следующая идея Л. И. Мандельштама: физическое значение разложения Фурье в большой мере связано с резонансными свойствами линейных систем с постоянными параметрами; при переходе к линейным системам с переменными параметрами разложение Фурье перестает быть целесообразным и место функций \cos и \sin должны занять другие функции.

Во время войны, в Боровом, Л. И. Мандельштам вновь занялся теорией параметрических машин. Ввиду того что нарастание колебаний в таких машинах ограничено только вследствие нелинейных явлений (например, увеличения с ростом тока сопротивления включенных в качестве нагрузки ламп накаливания), полная теория параметрических машин должна быть нелинейной. Л. И. Мандельштам дал классификацию электрических машин, показывающую место, занимаемое среди них параметрическими машинами, и разработал

¹ Том II, стр. 342.

математическую теорию, пригодную в отличие от ранее существовавших для сколь угодно большой амплитуды изменения параметра, при том, однако, условии, что нелинейность мала. Вместе с тем он указал путь, позволяющий при помощи вариационного принципа вывести уравнения Лагранжа для дискретных электрических систем из уравнений Максвелла. В Боровом Л. И. Мандельштам вернулся также к давно интересовавшей его теории часов как автоколебательной системы и сформулировал проблему, которая до сих пор еще не решена полностью, о сравнении зависимости периода от параметров (главным образом от трения) в до-галилеевых часах (без маятника) и в часах Галилея — Гюйгенса.

Одним из наиболее выдающихся достижений в совместном научном творчестве Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси является созданный ими радиоинтерференционный метод исследования распространения радиоволн. Это относится как к самой идее метода, так и к полученным при его помощи научным и практическим результатам. Радиоинтерференционные исследования Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси начали появляться в печати лишь начиная с 1937 г.,¹ когда разработка метода уже достигла известного совершенства и уже были получены некоторые положительные результаты. Однако первое заявочное свидетельство („Способ для определения расстояний между двумя пунктами при помощи электромагнитных волн“) относится к концу 1930 г., а зарождение идеи — к еще более раннему периоду.

Решение задачи точного измерения расстояний при помощи радиоволн, несомненно, являлось основным моментом, игравшим ведущую роль при возникновении этого нового направления исследований. С вопросами определения положения излучающего передатчика Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси встретились еще в Страсбурге, где они участвовали в опытах по пеленгации посредством рамочной антенны Брауна. Н. Д. Папалекси продолжал заниматься пеленгацией и по возвращении в Россию. Сопоставление принципиального недостатка пеленгации — уменьшения линейной точности с ростом расстояния — с теми возможностями, которые могло бы дать определение не углов, а сторон треугольника, недостаточная точность для этой цели предлагавшихся в то время импульсных методов и, наконец, наличие в оптике чрезвычайно точных интерференционных способов измерения длины, основанных

¹ Том II, статьи 44 и 45.

на непрерывном когерентном излучении, — таков, повидимому, путь, который привел Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси к идее радиоинтерференции.

Однако осуществление любого такого способа измерения расстояний предполагает, что при данных конкретных условиях с требуемой точностью известна скорость распространения радиоволн. Таким образом, почти сразу же возник и вопрос об исследовании распространения радиоволн, о выяснении фазовой структуры электромагнитного поля передатчика. Положение здесь было весьма неудовлетворительным.

Как неоднократно указывали впоследствии Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, теоретическое рассмотрение не может заменить в этом вопросе экспериментального исследования. Процесс распространения чрезвычайно осложнен разнообразием реальных условий и его теоретическое исследование становится возможным только в результате далеко идущей идеализации. Но и с этой оговоркой в то время еще нельзя было опереться ни на какие достоверные теоретические заключения, касающиеся скорости распространения.

В 1907 г. Ценнек развил свою теорию поверхностных волн. Следующий шаг был сделан Зоммерфельдом (1909 г.), который решил задачу об излучении вертикального диполя, расположенного на плоской границе раздела между однородным полубесконечным диэлектриком (воздух) и таким же проводником (земля). Неточность в интерпретации решения привела Зоммерфельда к заключению, что его результат подтверждает теорию Ценнека. Хотя позднейший анализ задачи Зоммерфельда, проведенный В. А. Фоком, а затем Е. Нотер, и вскрыл допущенную Зоммерфельдом неточность, тем не менее вопрос о величине скорости распространения оставался еще долгое время открытым. С одной стороны, его решение требовало весьма углубленного математического анализа формул Зоммерфельда, с другой же стороны, еще не была осознана актуальность самого вопроса. Надо иметь в виду, что практические задачи радио привлекали внимание в первую очередь к амплитудной картине поля излучателя, фазовые же соотношения, непосредственно связанные со скоростью распространения, оставались в тени. Что касается существовавших тогда экспериментальных методов измерения поля, то, будучи приурочены опять-таки к определению амплитуд, они даже при выполнении идеальных условий, полагаемых в основу теории, ничего не могли дать. Первые достаточно

точные сведения о скорости распространения были получены при помощи самого радиоинтерференционного метода в сочетании с соответствующими геодезическими измерениями.

Вряд ли можно сомневаться в том, что живой интерес Л. И. Мандельштама ко всей проблеме в целом поддерживался не только насущными потребностями радиоинтерференционной дальнометрии. Вопрос о распространении электромагнитных волн от излучателя, расположенного близко к границе раздела, привлек его внимание еще в Страсбурге. Не удивительно, что его не могло не задевать наличие в этом, издавна близком ему вопросе „темных мест“, отсутствие в нем полной „прозрачности“. Вместе с тем нетрудно уловить и те нити, которые связывают создание радиоинтерференционной методики с более старыми работами Л. И. Мандельштама. Здесь вновь выступает во всей своей силе идея „колебательной взаимопомощи“ различных областей физики, которую Л. И. Мандельштам углублял и совершенствовал на протяжении всей своей жизни.

В 1914 г. он осуществил оптическую аналогию характерной для радио задачи Зоммерфельда. В 1930 г., наоборот, к решению радиотехнической задачи были привлечены аналогии из всего обширного и хорошо изученного круга интерференционных оптических явлений. То, что из всего арсенала оптики были выделены явления, наиболее чуткие именно к фазовым соотношениям, нельзя не связать с общей мыслью о превосходстве фазовых методов индикации над амплитудными, которая берет свое начало опять-таки еще со Страсбурга, где Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси воплотили ее в своих измерительных высокочастотных приборах.

Наиболее яркое освещение всего круга радиоинтерференционных идей дано Л. И. Мандельштамом в его докладе „Интерференционный метод исследования распространения электромагнитных волн“, сделанном 28 апреля 1938 г. на Общем собрании Академии Наук СССР.¹ Еще раз Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси вернулись к такому широкому освещению вопроса в их совместной статье „Интерференционные методы исследования распространения радиоволн и их применение к измерению расстояний“.²

В этих работах проводится исчерпывающее сопоставление радиоинтерференции с оптической интерференцией. Достаточно пере-

¹ Том III, статья 63.

² Том II, статья 47.

числить затронутые вопросы: отсутствие прямых методов измерения частоты в оптике в противовес наличию и простоте таких методов в радио; кажущееся противоречие между некогерентностью независимых источников в оптике и их когерентностью в радио, несмотря на принципиально тождественную некогерентность в обоих случаях; разрешение этого противоречия на основе огромного различия временных и пространственных масштабов в оптике и радио (частот и длин волн); специфика радиотехнических средств — возможность усиления отраженных колебаний и трансформации их частоты в рациональном отношении; вопрос о расположении источника относительно границы раздела („далеко“ в оптике и „близко“ в радио); квантовые особенности оптических излучателей и вытекающие отсюда принципиальные различия между макроскопическими и микроскопическими возможностями для наблюдения и регистрации различных величин (частот, фаз).

Радиоинтерференционный метод был создан прежде всего для возможно более точного измерения расстояний, но его разработка сразу же выдвинула и гораздо более широкую физическую проблему — измерение скорости распространения радиоволн и выяснение структуры поля радиопередатчика. Хотя вся работа по радиоинтерференции — и теоретическая, и лабораторная, и экспедиционная — проводилась Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси совместно, однако вся практическая сторона в первую очередь, как неоднократно это подчеркивал и сам Л. И. Мандельштам, связана с именем Н. Д. Папалекси. Сюда можно отнести и практическое применение метода, затрагивающее ряд областей народного хозяйства (геодезия, навигация, гидрография), и многочисленные этапы технического усовершенствования методики, и организацию и проведение ежегодных экспедиций для исследований в реальных условиях.

Научный итог этой огромной работы хорошо известен. С непревзойденной ранее точностью (до $3 \cdot 10^{-4}$ над морем и до $6 \cdot 10^{-4}$ над ровной сушей) была измерена скорость распространения радиоволн и определена верхняя граница (не более 0.01%) для возможной средней величины дисперсии. Детальное изучение фазовой структуры поля, ставшее возможным благодаря радиоинтерференции, позволило установить отчетливую картину всего процесса распространения, дать правильную интерпретацию теории Зоммерфельда и вскрыть неадекватность ценнековской концепции поверхностных волн, которая еще в тридцатых годах была почти общепринятой. Уже эти

чисто научные результаты являются крупнейшим вкладом в радиопфизику, но они не исчерпывают значения радиоинтерференции. Как уже было сказано, на основе этого метода выросла новая большая практическая область применения радио — интерференционная радиодальномерия, целиком связанная с именами Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, которые примерно на пятнадцать лет опередили здесь зарубежную радиотехнику.

Как уже отмечалось, принципиальные проблемы квантовой теории, глубокий интерес к которым возник у Л. И. Мандельштама с самого зарождения квантовой механики, все больше и больше привлекали его внимание в последний период его деятельности и в последние годы начали превалировать над другими научными интересами.

Л. И. Мандельштам любил подчеркивать, что для развития науки важна не только работа пионеров, создающих новые концепции, в свете которых становится различным скрывавшееся во мраке неизвестное, но и последующий критический анализ этих новых концепций, очищающий их от случайного и неверного и вносящий в них стройность, ясность и прозрачность, без которых невозможно дальнейшее продвижение. Только критическая эпоха Вейерштрасса, внесшая ясность в содержание и область применимости понятий и операций анализа, бурно развившегося в эпоху Бернулли и Эйлера, создала предпосылки для дальнейшего развития математики. Л. И. Мандельштам был пионером нового этапа развития теории колебаний и ряда отделов оптики; в области же квантовой механики он прежде всего стремился внести максимальную ясность в основные понятия и положения теории.

„Старая“ боровская теория квантов своей непоследовательностью и обилием внутренних противоречий была чужда складу ума Л. И. Мандельштама; но уже через год после первых работ Шрёдингера и Гейзенберга, заключавших в себе основы „новой“ квантовой механики, он совместно с М. А. Леонтовичем публикует очень существенную работу „К теории уравнения Шрёдингера“.¹

В этой работе впервые был поставлен и разрешен вопрос о поведении частицы при наличии в пространстве „потенциального барьера“ и „потенциальной ямы“ (по современной терминологии) и было показано, что хотя в рассмотренном случае энергетический спектр системы и непрерывен, однако исследование характера

¹ Статья 23.

волновых функций позволяет установить, что в некоторых состояниях частица находится в связанном, но „распадающемся“ со временем состоянии внутри потенциальной ямы, тогда как другие волновые функции описывают частицу, налетающую извне на потенциальный барьер.

Эта работа содержит в себе, в сущности, все основы теории прохождения частиц через потенциальный барьер, представляющей собой одно из замечательнейших достижений квантовой механики. И действительно, она послужила непосредственным толчком и базой для последующих работ по теории радиоактивного распада.

После этой работы Л. И. Мандельштам в течение ряда лет не опубликовывал новых работ по квантовой теории, но очень много размышлял над ее основами и часто касался ее в своих лекциях и семинарах. Иногда поводом к этому служили те „парадоксы“, которые не раз выдвигались А. Эйнштейном в качестве опровержения некоторых основных положений квантовой механики. Л. И. Мандельштам неизменно и чрезвычайно быстро находил разрешение этих кажущихся парадоксов, но столь же неизменно воздерживался от опубликования в печати своих соображений, совпадающих по своей сути с тем, что впоследствии было опубликовано Бором и другими физиками. Это, столь характерное для Л. И. Мандельштама нежелание печататься в данном случае частично обуславливалось, повидимому, и тем, что в первой половине 30-х годов не была достигнута та окончательная ясность, „прозрачность“, в физической интерпретации и понимании принципиальных основ квантовой механики, которая удовлетворяла бы необычайно высоким требованиям Л. И. Мандельштама. Его могло удовлетворить только такое понимание теории, когда в ней вообще не остается места для трудностей, неясностей и парадоксов.

Но когда Л. И. Мандельштам достиг этой стадии по отношению к основному кругу проблем нерелятивистской квантовой механики, он прочел в 1939 г. курс лекций о теории косвенных измерений в волновой механике, в которых он дал исключительный по тонкости, глубине и ясности анализ основ квантовой механики. Центральной частью курса была впервые проведенная им весьма важная дизъюнкция между прямыми и косвенными измерениями над квантовыми системами. Последнее звено всякого измерения любой квантовой системы носит макроскопический характер. Прямыми Л. И. Мандельштам называет такие измерения, в которых первый же шаг макроскопичен; весьма существенно, что они



Л. И. Мандельштам в Боровом (1942 г.)

возможны только над свободными или почти свободными частицами. Косвенные измерения состоят в том, что исследуемую квантовую систему заставляют взаимодействовать с другой микросистемой, над которой производятся прямые измерения; по данным этих измерений теоретически вычисляются величины, относящиеся к исследуемой системе.

Теории этих косвенных измерений (прямые измерения в квантовой механике являются исключением) и посвящена основная часть курса, в котором, в частности, выясняется кардинальное различие понятий координаты и импульса частицы в классической и квантовой теориях.

Дальнейшее развитие этих идей привело Л. И. Мандельштама в последние годы его жизни к весьма радикальным выводам, о которых не сохранилось, повидимому, никаких письменных материалов. Поскольку прямые измерения возможны только над свободными или почти свободными частицами, последовательная физическая теория микромира должна сводиться к установлению закономерных связей между результатами измерений координат и импульсов свободных частиц. Современная же квантовая механика дает при помощи волновых функций и уравнения Шрёдингера весьма детальное описание не поддающегося прямому измерению поведения связанных электронов внутри атома и т. п. При этом существенную роль в логической схеме квантовой механики играет допущение о возможности измерения собственных значений любого так называемого самосопряженного оператора, действие которого на волновые функции системы может быть произвольно задано. Таким образом, схема современной квантовой механики, широко оперирующей с ненаблюдаемыми понятиями, принципиально не удовлетворительна и должна быть переработана так, чтобы освободить теорию от этих понятий.

К тем же в сущности выводам, только в менее радикальной и последовательной форме, пришел в 1942 г. и один из основоположников квантовой механики — Гейзенберг. Однако Гейзенберг пришел к этим выводам не путем анализа физических основ квантовой теории, как Л. И. Мандельштам, а в поисках выхода из тех затруднений, к которым приводит релятивистское обобщение квантовой механики и, в частности, квантовая теория взаимодействия элементарных частиц. Корни этих затруднений, как нам представляется, лежат во вскрытой Л. И. Мандельштамом недостаточной последовательности основ исходной нерелятивистской формы теории.

Последняя подготовленная Л. И. Мандельштамом к печати работа (сделанная совместно с И. Е. Таммом и опубликованная после смерти Леонида Исааковича) была посвящена соотношению неопределенности между энергией и временем в нерелятивистской квантовой механике,¹ о смысле и содержании которого до самого последнего времени в литературе высказываются прямо противоположные мнения. В значительной мере это обуславливается тем, что до Л. И. Мандельштама это соотношение обосновывалось только на частных примерах или путем полукачественных соображений. Л. И. Мандельштам впервые дал строгое и общее его доказательство, основывающееся на математическом аппарате квантовой механики. При этом впервые полностью прояснился самый физический смысл и значение тех величин ΔE и Δt , которые этим соотношением связываются. Из данной в этой работе интерпретации соотношения $\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$ могут быть выведены (за одним единственным исключением) все частные случаи его применения.

Даже краткий обзор работ, выполненных Л. И. Мандельштамом и его сотрудниками в московский период его деятельности, разнообразие и глубина новых начатых за это время направлений, значимость достигнутых результатов свидетельствуют, как напряженно и успешно протекала в это время работа Л. И. Мандельштама. Если присоединить к этому его многообразную и в высшей степени успешную преподавательскую деятельность, о которой будет сказано несколько слов ниже, то можно себе составить представление об интенсивности и плодотворности работы, которая кипела в это время около Л. И. Мандельштама, им стимулировалась и направлялась, несмотря на уже сильно пошатнувшееся его здоровье и развивающуюся грудную жабу, которая свела его в могилу.

И эта бурная и напряженная деятельность внезапно оборвалась, когда в июне 1941 г. на нашу страну обрушилось кровавое бедствие войны.

Л. И. Мандельштам, который уже давно с чувством омерзения и с глубокой тревогой следил за развитием гитлеризма, был глубоко потрясен разразившимися событиями. Первые тяжелые недели войны не оставляли никакой психологической возможности продолжения научной работы. К этому скоро присоединилось и внешнее

¹ Том II, статья 49.

обстоятельство: эвакуация научных учреждений Академии Наук из Москвы, которой предшествовала эвакуация, по распоряжению правительства, всех престарелых или слабых здоровьем членов Академии в сибирский курорт „Боровое“.

Л. И. Мандельштам выехал из Москвы 16 июля с женой, невесткой и десятилетней внучкой. Несмотря на то, что в момент отъезда он находился в очень тяжелом физическом и моральном состоянии, он перенес переезд в Боровое сравнительно хорошо. Климат и условия жизни в Боровом благотворно отразились на его здоровье, которое в первое время было значительно лучше, чем до отъезда из Москвы. Хотя из-за своей болезни он попрежнему не мог преодолевать подъемы, тем не менее он много гулял, медленно и по ровному месту, выходя и в холодные зимние дни (до -20°), чего он никогда не делал в Москве. Даже несчастный случай — падение из брочки, повлекшее перелом плечевой кости, и последующее длительное и трудное лечение, — хотя и вызвал резкое ухудшение его здоровья, но не отразился на его работе. В Боровом он чрезвычайно много и интенсивно работал. Впрочем, возможно, что именно это творческое напряжение в значительной степени поддерживало и его физическое состояние.

Л. И. Мандельштам очень тяготился оторванностью от лабораторий и сотрудников, большинство которых находилось вместе с Физическим институтом в Казани, и очень радовался получению письменных сообщений из института. Еще большую радость доставляли ему приезды, правда редкие, кого-либо из сотрудников института. В Боровое к нему три раза приезжал его сын, С. Л. Мандельштам, и по одному разу Н. Д. Папалекси, И. Е. Тамм и С. М. Рытов. Кроме живого рассказа о жизни и работе института, эти приезды были дороги Л. И. Мандельштаму возможностью поделиться своими мыслями и результатами, а также совместной работой с приехавшими. Так, во время пребывания Н. Д. Папалекси в Боровом в сентябре — октябре 1942 г. они работали над монографией, посвященной параметрическому генерированию переменных токов. Они продумали план этой монографии, которая по замыслу должна была подытожить огромную теоретическую и практическую работу в области параметрической генерации, проделанную в течение почти двадцати лет. Л. И. Мандельштам взял на себя написание первых частей монографии, посвященных теории параметрических колебаний и вопросу о месте этого метода генерации среди других способов получения переменного тока. На Н. Д. Папалекси лежи-

лось освещение всех практических результатов, касающихся конструкции и характеристик параметрических машин, результатов их испытаний и путей дальнейшего их усовершенствования. Этому капитальному труду не суждено было завершиться. Лишь отдельные его фрагменты были в основном закончены (вывод лагранжевых уравнений из максвелловских, системы с большой глубиной модуляции, классификация электрических машин) и вошли во II том настоящего Собрания трудов.¹

Другой вопрос, который с увлечением обсуждали Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси в Боровом, касался возможности применения радиолокации в астрономии. Уже тогда, как рассказывал потом Н. Д. Папалекси, они пришли к полной уверенности в том, что современные технические средства позволяют осуществить как радиолокацию Луны, так и оптическую ее локацию. Одновременная локация обоими способами особенно привлекала их внимание, так как сопоставление времен запаздывания светового и радиосигналов должно было, по их мнению, дать более содержательные сведения об ионосфере, чем один только радиосигнал. Как известно, радиолокация Луны была осуществлена в Америке в 1945 г. Таким образом, в отношении научной инициативы Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси опередили американцев на три года.

С приехавшим к нему в Боровое (в октябре 1942 г.) И. Е. Таммом Л. И. Мандельштам делился преимущественно своими мыслями и работами по основным вопросам физической теории и в особенности по основам квантовой механики. В частности, ими подробно обсуждалась начатая еще в Москве работа о принципе неопределенности между энергией и временем, опубликованная (совместно с И. Е. Таммом) уже после смерти Л. И. Мандельштама.²

Приезд С. М. Рытова летом 1943 г. был для Л. И. Мандельштама поводом для значительного уточнения планов своей работы. В течение многих дней он систематически рассказывал о том, что им сделано или что намечено сделать; с участием С. М. Рытова он составил планы следующих монографий, потребность в создании которых он остро чувствовал: О природе белого света, Об отражении волн и направляющем действии проводников, О принципе суперпозиции, О почти-периодических процессах, О размерностях.

¹ Статьи 53, 54 и 55.

² Том II, статья 49.

Наряду с этими планами, которым суждено было реализоваться лишь в малой степени — почти закончена была только статья „К теории размерностей“,¹ — Л. И. Мандельштам продумал и частично написал следующие работы:

- 1) Доклад об оптических работах Ньютона.
- 2) Наброски к биографии Релея.
- 3) Введение в теорию колебаний.
- 4) Материалы к теоретической части монографии о параметрической генерации переменных токов.
- 5) О направляющем действии проводников на радиоволны: отличие одиночного провода от действия плоскости, рассмотренного Зоммерфельдом.
- 6) Соображения о методе частотной модуляции Армстронга.
- 7) О соотношении неопределенностей $\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$.
- 8) Об электрических флуктуациях и понятии температуры.
- 9) О фазовом методе Теплера.
- 10) Вторая часть курса по квантовой механике.

Доклад об оптических работах Ньютона² был прочитан Л. И. Мандельштамом в январе 1943 г. в связи с трехсотлетием со дня рождения Ньютона в собрании академиков, живших в Боровом. По общему отзыву слышавших этот доклад, он был сделан с огромным подъемом и увлечением и произвел большое впечатление на слушателей. Это нетрудно себе представить всем, испытавшим на себе очарование его докладов и лекций. О глубине же и содержательности этого доклада, о его художественной форме можно судить по тексту, напечатанному уже после кончины Л. И. Мандельштама.

Наброски к биографии Релея, представляющие глубокий интерес, ибо никто из современных физиков так не ценил и так глубоко не понимал Релея, как Л. И. Мандельштам, до сих пор не отысканы в его бумагах, и можно опасаться, что они утеряны. Введение в теорию колебаний составило содержание первых лекций того оставшегося незавершенным курса, который Л. И. Мандельштам начал читать по возвращении в Москву и которым заканчивается последний (V) том этого Собрания трудов. Как уже было сказано, монография о параметрической генерации переменных токов, которую Л. И. Мандельштам собирался писать с Н. Д. Папалекси,

¹ Там же, статья 71.

² Том III, статья 65.

осталась незаконченной из-за смерти обоих авторов. Работа по соотношению неопределенностей $\Delta E \Delta t$ была доведена до конца уже после возвращения Л. И. Мандельштама в Москву. Два последних замысла (электрические флюктуации и фазовый метод Теплера) сделались объектом экспериментального исследования в Лаборатории колебаний ФИАН. Исследование электрических флюктуаций продолжается и в настоящее время (М. А. Леонтовичем и Е. Я. Пумпером); что же касается фазового метода Теплера, то идея метода была с положительным результатом экспериментально проверена в работе С. М. Рытова и М. Е. Жаботинского.

Этот перечень показывает темп и размах работы Л. И. Мандельштама в годы пребывания в Боровом, несмотря на обстановку, далекую от привычной. И в этом напряжении, и в направлении работы Л. И. Мандельштама за этот период чувствуется, может быть, неосознанное ощущение приближающегося конца. Л. И. Мандельштам, всегда с большой серьезностью и интересом принимавшийся за разрешение нового вопроса, искавший полной ясности в понимании обдумываемой проблемы и охотно излагавший свои результаты в беседах и даже лекциях, очень не любил писать. Даже небольшая журнальная статья всегда доставляла ему много хлопот. В совместных публикациях обязанность „писать“ всегда возлагалась на соавтора, хотя написанное подвергалось с его стороны самой придирчивой критике и многократно переделывалось.

Этой неохотой писать объясняется и то обстоятельство, что многочисленные лекции его, ценность и интерес которых он при всей своей скромности, несомненно, сознавал, оставались ненаписанными и неизданными при его жизни. Однако на деятельности Л. И. Мандельштама в Боровом лежит отчетливый отпечаток желания привести в порядок не только мысли, но и изложение, сделать его таким, чтобы с ним могли знакомиться люди, лишенные возможности устной беседы с ним. Поэтому наряду с новыми вопросами, встающими перед ним, — вопросами, как всегда, и из теоретической, и из экспериментальной, и из технической физики — Л. И. Мандельштам упорно обращается к мысли о необходимости написать ряд монографий, в которых в отчетливой и связной форме было бы изложено то глубокое понимание разнообразных вопросов, которое он выносил на протяжении всей жизни.

Но возвращение к вопросам, даже продуманным, никогда не было для Л. И. Мандельштама простым воспроизведением,

а приводило всегда к новому пересмотру. Показывая С. М. Рытову черновики монографии о параметрических машинах, он говорил ему: „Вот, казалось бы, все ясно и остается только изложить. А как сядешь писать, так выплывает один вопрос за другим и получается, что все совсем не так уж ясно и многое надо еще доделать“. Поэтому, хотя по некоторым из задуманных им монографий (например, о природе белого света) имеется детально составленный им план, ряд набросков, многократные высказывания в лекциях и беседах, тем не менее если даже и удастся по этим материалам составить соответствующую монографию, она, конечно, будет значительно уступать тому, что получилось бы при его непосредственном участии.

В последние годы Л. И. Мандельштам отчетливо сознавал, что он не сможет без сотрудников довести до конца все задуманные и начатые работы как вполне оригинальные, так и монографические. Он неоднократно поднимал вопрос о квалифицированном научном сотруднике, который мог бы значительную часть своих сил посвящать этой работе. К глубокому сожалению, военная обстановка затрудняла реализацию этих планов, которые отодвигались до более подходящего момента, так и не наступившего.

Несмотря на сравнительно благоприятные условия жизни и работы в Боровом, Л. И. Мандельштам очень тяготился оторванностью от сотрудников и учеников и стремился обратно в Москву. Как только обстановка это позволила, он осуществил свое намерение. Приехав в сентябре 1943 г. на сессию Академии Наук, он настоял на том, чтобы не возвращаться в Боровое, и остался в Москве. К этому же времени была решена и реэвакуация Физического института АН, и в течение зимы 1943—1944 гг. начала разворачиваться работа в лабораториях, конечно испытывавшая на первых порах немало трудностей. Поэтому в эту первую московскую зиму Л. И. Мандельштам еще не мог активно участвовать в жизни лабораторий, и его деятельность сосредоточилась на продолжении начатых в Боровом работ с тем, однако, важным отличием, что он имел возможность широкого общения со своими сотрудниками и учениками. В эту же зиму он возобновил и свою работу в университете, объявив курс, который, как и в прошлые годы, посещало много аспирантов и научных сотрудников, число которых значительно превосходило число студентов. Темой этого курса были вопросы теории колебаний, еще раз продуманные в Боровом. Однако здоровье Л. И. Мандельштама было уже сильно подорвано,



**Л. И. Мандельштам во дворе Московского университета
(сентябрь 1944 г.)**

и в течение весеннего семестра состоялись только четыре лекции.

Осенью 1944 г., после летнего отдыха, проведенного в Узком, Л. И. Мандельштам, невзирая на тяжелую болезнь, взялся за чрезвычайно трудоемкую и утомительную работу — составление и редактирование сборника, посвященного научной предистории радио. Он был инициатором создания этого сборника, выпуск которого Академия Наук СССР приурочивала к предстоящему в 1945 г. пятидесятилетнему юбилею изобретения А. С. Поповым радио. Исключительно интересен замысел книги, содержащей ряд основных оригинальных работ (Фарадея, Максвелла, Герца, Томсона, Феддерсена и др.), дающих возможность живо почувствовать ту научную обстановку, в которой возникло самое изобретение радио. Л. И. Мандельштам работал над этим сборником, не покладая рук; хотя в помощь себе он привлек С. М. Рытова, тем не менее он не только руководил подбором материала, но вникал и во все вопросы, касающиеся структуры книги, переводов статей и т. п. Особенно много времени и сил он уделил написанию замечательного „Введения“ к сборнику.¹ Эта разносторонняя и глубокая статья оказалась последней, вышедшей из-под его пера.

27 ноября, после одного особенно сильного припадка грудной жабы, Леонида Исааковича не стало.

Биография Л. И. Мандельштама была бы очень неполной, если бы в ней не была специально освещена его преподавательская деятельность в московский период, сыгравшая выдающуюся роль в постановке серьезного научного преподавания как на физическом факультете Московского университета, так и далеко за его пределами.

Преподавание было для Л. И. Мандельштама существенной и неотъемлемой частью его творчества. У него не было границы между научным исследованием и преподаванием. Хотя со свойственной ему скромностью он никогда не ставил себе целью излагать в своих лекциях содержание собственных работ, его преподавание было насыщено теми идеями, теми характерными постановками вопросов, которые лежали в основе его исследований. Часть попутных замечаний и отступлений, которых так много в его лекциях московского периода, была реминисценциями его работ. Другая часть этих замечаний и отступлений — это мысли, сложившиеся

¹ Том III, статья 68.

у него во время тех коренных изменений и ломок физического мировоззрения, современником которых он был и которые он так остро, активно и плодотворно переживал (расцвет электронной теории, появление специальной, а затем общей теории относительности, выработка правильного понимания статистических законов, открытие связи между акустическими колебаниями упругой среды и тепловым движением,¹ рождение квантовой механики). Лекции и семинары Л. И. Мандельштама содержали также постановки вопросов, из которых возникали новые исследования; многие высказывания в этих лекциях и семинарах были по существу новыми научными результатами. Мандельштамовская трактовка косвенных измерений в его лекциях по квантовой механике (1939 г.) принадлежит к числу его выдающихся научных достижений. Таким образом, для вдумчивого читателя записи лекций Л. И. Мандельштама и его выступлений на семинарах, которые содержатся в IV и V томах настоящего Собрания трудов, явятся богатой и выразительной научной автобиографией одного из наиболее интересных участников развития физики на протяжении последнего полувека.

Лекции и семинары Л. И. Мандельштама в Московском университете явились выдающимся событием в научной жизни нашей страны. Все значение этого события сможет быть оценено лишь после выхода в свет всех томов „Полного собрания трудов“. По своему содержанию эти лекции и семинары охватывают громадный диапазон, как видно из следующего перечисления:

- 1925/26 г. Семинар по некоторым вопросам теории излучения электромагнитных волн и оптики.
- 1926/27 г. Лекции по теории поля и семинар по теории колебаний.
- 1927/28 г. Семинар по статистической физике.
- 1928/29 г. Семинар по электронной теории и специальной теории относительности.
- 1929/30 г. Семинар по волновой механике.
- 1930/31 г. Первая часть курса теории колебаний и семинар по колебаниям.
- 1931/32 г. Вторая часть курса теории колебаний.

¹ Л. И. Мандельштам подчеркивал в беседах, что он считает установление единой картины акустического спектра, непрерывно простирающегося от медленных слышимых колебаний до весьма быстрых тепловых, столь же важным достижением, как и установление единой картины электромагнитного спектра, охватывающего радиоволны, видимый свет и т. д.

1932/33 г. Лекции по избранным вопросам оптики („парадоксы“).

1933/34 г. Лекции по физическим основам теории относительности.

1935/36 г. Лекции по теории относительности (незаконченные).

1936/37 г. Семинар по дисперсии и абсорбции.

1937/38 г. Семинар по некоторым вопросам теории колебаний.

1938/39 г. Семинар по отдельным физическим вопросам (черенковское излучение, эквивалентность массы и энергии и др.) и лекции по основам квантовой механики (теория косвенных измерений).

1939/40 г. Семинар по некоторым вопросам оптики.

1943/44 г. Четыре лекции по теории колебаний.

Лекции Л. И. Мандельштама привлекали обширную аудиторию, состоявшую не только из студентов, аспирантов, молодых ученых, но также и физиков с крупным научным именем. Секрет успеха лекций Л. И. Мандельштама был прежде всего в том, что он умел, как, быть может, никто другой, учить физически мыслить. Л. И. Мандельштам не просто сообщал факты и не просто разматывал некую цепь определений, постулатов и силлогизмов. Его лекции были полной противоположностью обычному — пусть даже совершенному в своем роде — формальному „гладкому“ изложению. Л. И. Мандельштам никогда не обходил и не затушевывал трудностей. Наоборот, он всегда их подчеркивал — делал их „выпуклыми“ как он любил говорить, — и уже после этого с ними расправлялся, устраняя их без остатка силой своей изощренной и прозрачной мысли.

Лекции Л. И. Мандельштама были яркой и откровенной демонстрацией самого процесса физического мышления. В них видно было, как физик спотыкается о трудности, как на его пути накапливаются парадоксы и противоречия и как ему удается — иногда ценой умственного подвига, отказа от самых укоренившихся в человеческом мышлении привычек — высвободиться из противоречий и подняться на недоступную ранее высоту, откуда открываются новые горизонты. Ни одна деталь в лекциях Л. И. Мандельштама не была пресной, безжизненной, в каждом вопросе он умел находить и доводить до аудитории какую-то особую остроту и прелесть. Он не только принуждал посредством безупречной логики соглашаться со своими утверждениями, но старался — и умел — найти общий язык со слушателями, убедить их „изнутри“, устраняя те трудно формулируемые психологические протесты,

которые так часто в физике мешают пониманию. Все это вместе взятое создавало какую-то необыкновенную эмоциональную насыщенность, благодаря которой все услышанное от Л. И. Мандельштама доходило до самых глубин сознания.

Лекторский талант Л. И. Мандельштама, преобразивший даже традиционное университетское преподавание, с особой силой проявлялся в докладах на отдельные темы. Таких докладов на сессиях Академии Наук было немного, но каждый из них надолго оставался в памяти слушателей. Таков был доклад о радиоинтерферометрии,¹ прочитанный на общем собрании Академии Наук СССР 28 апреля 1938 г., доклад, казалось бы, на специальную тему, но впечатление от которого покойный академик А. Е. Ферсман резюмировал одним словом: „поэма“. Таков был доклад,² прочитанный в заседании Общего собрания Академии Наук СССР и посвященный восьмидесятилетию А. Н. Крылова (26 сентября 1943 г.). Личная симпатия, которую Л. И. Мандельштам питал к А. Н. Крылову, придала особый блеск этому докладу. Таков был и доклад „Об оптических работах Ньютона“, прочитанный в Боровом.

Лекции и семинары Л. И. Мандельштама, а также его советы сотрудникам и ученикам оказали и продолжают оказывать глубокое и благотворное влияние на преподавание физики в нашей стране и на издающуюся у нас учебную литературу по физике. Не только курсы теории колебаний, оптики, теории относительности и т. д. но и курсы общей физики, читающиеся в ряде наших высших учебных заведений, носят на себе легко отличимую печать идей Л. И. Мандельштама. То же самое относится и к ряду недавно вышедших учебников как по теоретической, так и по общей физике.

Л. И. Мандельштам любил молодежь, любил преподавание, оно никогда не было для него тягостной „нагрузкой“. По возвращении из Борового, он, несмотря на мучившую его болезнь, настоял на том, чтобы прочесть студентам университета курс лекций о колебаниях. То были его последние публичные выступления. Они дались ему дорогой ценой. Нередко перед лекцией он чувствовал себя плохо, но выступал перед аудиторией во всем блеске своего дарования. Четыре лекции о колебаниях, прочитанные им весной 1944 г.,

¹ Том III, статья 63.

² Там же, статья 67.

не были перепевом уже известных мотивов. Он вложил в них многое из того, о чем он больше всего думал в последние годы своей жизни, в особенности ряд новых мыслей, касающихся значения, которое имеет теория колебаний для всей физики. Эти лекции, упоминанием о которых естественно закончить краткую биографию Л. И. Мандельштама, принадлежат к самым вдохновенным и прекрасным его творениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО РАЗРЯДА КОНДЕНСАТОРА

(Страсбургская диссертация)

[*Ann. d. Phys.*, 8, 123—148, 1902]

(Поступило 27 февраля 1902 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Очень важным как для техники, так и в чисто научном отношении является умение точно определять число периодов переменного тока, не нарушая при этом условий опыта.

С этой целью были развиты методы, находящие себе применение большей частью в технике, среди которых мы хотели бы упомянуть методы Ламба и Смита,¹ Пионсона,² Хилинга (Healing) и Леталла (Letall). Методы, которые могли бы послужить нашей цели и которые были частично осуществлены, основываются на двух различных принципах. Прежде всего можно наблюдать период колебаний непосредственно, приводя струну в колебания, как это делали, например, Хилинг и Леталл с помощью электромагнита, который питается измеряемым переменным током, и по максимальному действию заключая о совпадении периодов колебаний струны и тока.

Другие относящиеся сюда методы покоятся на различных иных принципах, но большей частью являются также прямыми методами. Для применяемых в технике частот они дают в общем хорошие результаты, но отказываются служить, когда мы обращаемся к

¹ H. Lamb u. W. Smith. *Beibl.* 13, 720, 1884.

² J. Pionchon. *Compt. Rend.* 120, 872, 1895.

исследованию очень быстрых колебаний, с которыми, например, имеет дело при разрядах конденсаторов. Ясно заранее, что инерция колеблющихся частей прибора при миллионах колебаний в секунду воспрепятствует вынужденным колебаниям.

Следует указать еще на один метод, также относящийся к прямым методам, а именно на применение трубки Брауна. Светящееся пятно приводится в колебания с помощью катушки, обтекаемой исследуемым переменным током, и посредством вращающегося зеркала или устройства Ценнека эти колебания развертываются в кривую. Хорошо известно, какие исключительные преимущества представляет этот метод для исследования переменных токов средних частот. Трубка Брауна с успехом использовалась Рихардом (Richard) и Циглером (Ziegler), а также Симоном при исследовании разрядов конденсаторов с не очень большими частотами. Вышеупомянутый недостаток прямого метода здесь отпадает. По крайней мере относительно существования инерции у катодных лучей пока еще ничего точно не известно. Если мы исходим из гипотезы малых заряженных частиц, то мы должны допустить, что при частоте около 10^8 периодов в секунду в обычных условиях опыта (при не слишком протяженном поле) катодные лучи еще должны следовать за электромагнитными колебаниями. Само собой понятно, что если период колебаний настолько велик, что поле на протяжении времени пролета частички можно рассматривать как постоянное, то пятно будет следовать за колебаниями.

Однако, если отвлечься от работы, опубликованной Симоном и Райхом,¹ то опыта применения трубки Брауна для исследования очень быстрых колебаний еще вообще нет.

При исследованиях очень быстрых колебаний наилучшим оказывается метод вращающегося зеркала, примененный Феддерсеном² при исторически первой экспериментальной проверке результатов теоретических исследований В. Томсона.³ Как известно, этот же вопрос рассматривался независимо от Томсона Кирхгофом,⁴ чему уже предшествовали экспериментальные исследования Феддерсена. Последний исследовал колебания до $5 \cdot 10^5$ в секунду. Трубридж и Дьюэн⁵ достигли значительно больших частот (около $5 \cdot 10^6$

¹ H. Th. Simon u. M. Reich. Phys. Zs. 2, 289, 1901.

² W. Feddersen. Pogg. Ann. 113, 116; 437, 1861.

³ W. Thomson. Phil. Mag. (4) 5, 393, 1853.

⁴ G. Kirchhoff. Pogg. Ann. 121, 193; 351, 1864.

⁵ J. Trowbridge u. W. Daune. Phil. Mag. (5) 40, 223, 1895.

периодов в секунду). Этот метод был недавно уточнен Декомом.¹

Недостатком метода является то, что при его применении необходима искра, что может быть осуществлено далеко не при всякой постановке опыта. Другой недостаток упомянутого метода заключается еще в том, что он довольно громоздок и требует в большинстве случаев сложной аппаратуры.

В настоящей работе делается попытка разработать метод, принципиально отличающийся от примененных до сих пор; по существу его следует считать косвенным. Профессор Браун предложил мне разработать его на следующем принципе:² „осциллирующий ток разветвляется на две ветви, одна из которых состоит из некоторой самоиндукции и одной термометрической проволоки дифференциального термометра, а другая — из безиндукционного (электролитического) сопротивления и второй проволоки термометра.

Следует подыскать такое омическое сопротивление, при котором в обеих проволоках выделяется одинаковое тепло; тогда омическое сопротивление равно кажущемуся индуктивному, откуда при заданной самоиндукции определяется частота“. Надо упомянуть, что принцип определения периода колебаний из сравнения омического и индуктивного сопротивлений уже применялся Резерфордом³ и другими.

Применение косвенного метода раскрывает большие возможности, но таит в себе и недостаток, который станет ясным из ниже следующего: численный результат некоторого косвенного измерения вытекает из формул, требующих для своего обоснования ряда упрощающих предположений. Так, например, распределение тока предполагается квазистационарным. Но насколько это допущение оправдывается, т. е. приводит к практически пригодным результатам, может решить только эксперимент.

Заметим еще, что правильность метода может быть подтверждена следующим образом. Как известно, период колебания контура с лейденскими банками вычисляется непосредственно по формуле

$$\tau = 2\pi \sqrt{Lc},$$

где L — коэффициент самоиндукции контура, а c — емкость. Составляя колебательный контур определенных размеров и вычисляя

¹ L. Decombe. Compt. Rend. 132, 1037, 1901.

² F. Braun. Drahtl. Telegr., стр. 66, 1901.

³ E. Rutherford. Phil. Transac., 189, 1—24, 1897.

его период колебаний, а с другой стороны, определяя последний с помощью описанного метода, можно прямо, по той или иной степени совпадения обеих величин, вывести заключение о правильности метода.

РАЗДЕЛ I

Обратимся сначала к теоретическому исследованию тех предельных условий, которые необходимы для практической применимости метода. Именно, следует применить такое устройство прибора, которое дает нам уверенность в том, что первоначальный период колебаний исследуемого разряда не изменился из-за присоединения прибора.

Кроме того, необходимо отметить еще следующее. Мы уже упомянули выше, что период колебаний может быть вычислен из коэффициента самоиндукции первой ветви и той величины омического сопротивления, при которой выделение тепла в обеих ветвях становится одинаковым и которое мы в дальнейшем будем для краткости называть „эквивалентным сопротивлением“.

Каким образом дифференциальный термометр позволяет осуществить нулевой метод, дающий суждение о равенстве тепловых действий, т. е. о наличии соотношения

$$\int (i_1^2 - i_2^2) dt = 0,$$

— об этом будет сказано далее.

Но если принять, что это соотношение имеет место и обозначить через p_1 коэффициент самоиндукции первой ветви, а через w_2 величину эквивалентного сопротивления, то в случае чисто синусоидального тока $i = \sin nt$ из этого соотношения получается для n значение $n = w_2/p_1$.

Эта формула является упрощением более общей и получается в предположении, что омическим сопротивлением катушки самоиндукции можно пренебречь по сравнению с np_1 , что при таких высоких частотах, с какими имеют дело при разряде конденсаторов, всегда допустимо.

Нижеследующий расчет должен показать, что при известных предположениях то же соотношение сохраняет силу и для таких разрядов конденсатора, при которых мы имеем дело уже не с простым синусоидальным током.

Заметим вначале следующее: во всех наших расчетах мы допускаем, что все токи „квазистационарны“, т. е. что значение тока во всех точках его цепи имеет одинаковую фазу. Строго говоря, при переменных токах последнее никогда не справедливо и наше допущение означает только то, что все входящие в рассмотрение длины малы по сравнению с длинами волн. Только при этом допущении справедливы уравнения, которыми мы будем пользоваться. И здесь в конечном счете только эксперимент может решить, какое соотношение следует принять за достаточно малое, для того чтобы удовлетворить условию квазистационарного состояния. Между тем, является все же желательным составить суждение об этом соотношении, что можно сделать простым учетом всех, сведенных к минимуму, встречающихся в приборе длин.

В нашем аппарате, в его модификации, описанной в разделе II (рис. 2), наибольшая встречающаяся длина сводится к 1.5—2 м. Поэтому представляется весьма вероятным, что распределение тока при 8—10 миллионах колебаний в секунду может еще с достаточной точностью рассматриваться как квазистационарное.

Следует, однако, обратить внимание на следующее. Распределение тока должно быть квазистационарным в приборе, но оно может быть произвольным в частях колеблющейся системы. Прибор измеряет тогда период колебания напряжения на его клеммах. Это дает возможность прежде всего во многих случаях выяснить область применимости формулы $\tau = 2\pi\sqrt{LC}$, а кроме того, установить период колебания напряжения на обкладках конденсатора также в тех случаях, когда вследствие отсутствия квазистационарного распределения тока в замыкающем проводе формула $\tau = 2\pi\sqrt{LC}$ теряет силу.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Осуществленная постановка опыта видна из рис. 1 и 2. c_1 и c_2 представляют собой два конденсатора, внешние обкладки которых соединены цепью ABA . Обозначим омическое сопротивление этого контура через W , а его самоиндукцию через L . Эти величины одинаковы для обеих опытных установок. Внешние обкладки конденсаторов соединены еще параллельной цепью ACA , которая в свою очередь разветвляется. На рис. 1 неразветвленная часть этой шунтирующей цепи состоит из омического сопротивления и самоиндукции. Ветвь I содержит самоиндукцию, ветвь II — безин-

дукционное сопротивление. В случае, соответствующем рис. 2, неразветвленная часть содержит безиндукционное сопротивление w . Ветвь I состоит из конденсатора K , а ветвь II — из безиндукционного сопротивления. В конечном счете речь идет о нахождении величин токов в I и II . Однако при точном расчете результаты вследствие

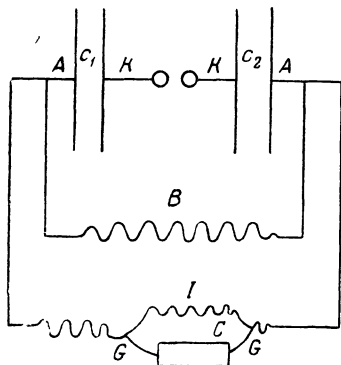


Рис. 1

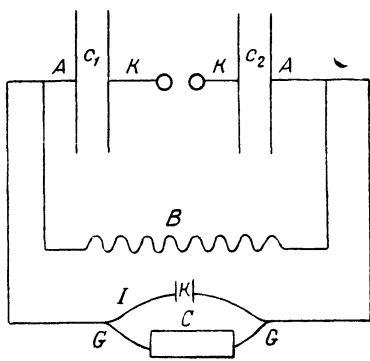


Рис. 2

своей сложности теряют наглядность. Поэтому мы поступим следующим образом. Мы примем, что в обоих случаях шунтирующая цепь не разветвлена и припишем ей в первом случае сопротивление w и коэффициент самоиндукции p .

Это допущение основывается на том, что, как следует из дальнейшего, значения этих самоиндукции и сопротивления, если только они взяты достаточно большими, совсем выпадают из рассмотрения.

Во втором случае мы допускаем, что шунтирующая цепь содержит только безиндукционное сопротивление, что становится справедливым при большом значении безиндукционного сопротивления неразветвленной части этой цепи и при малом значении K .

После того как мы найдем токи в неразветвленной части шунта ACA , мы определим токи в обеих ветвях I и II . Будем исходить из уравнений, справедливых для цепи тока, не содержащей электродвижущих сил,¹

$$\sum i = 0$$

для каждой точки разветвления,

$$\sum \left(w_k i_k + \frac{P_k}{c_k} + p_k \frac{di_k}{dt} \right) = 0, \quad \frac{dP_k}{dt} = i_k \quad (1)$$

¹ E. Сohn. Das elektromagnetische Feld, стр. 353, 1900.

для полного обхода, где w_k и p_k представляют собой соответственно сопротивление и самоиндукцию ветви k , c_k — емкость находящегося в k -ой ветви конденсатора, а P_k — его заряд.

Применим эти уравнения к первому случаю, в котором шунтирующая цепь содержит омическое сопротивление w и самоиндукцию p . Пусть i означает силу тока в неразветвленной части АСА. Обозначим далее через L коэффициент самоиндукции цепи АВА, через w — ее сопротивление, через J — силу тока.

Будем считать сопротивление как подводящих проводников, так и самого искрового промежутка исчезающе малым. Заметим далее, что из уравнений (1) тотчас же следует, что симметричное расположение схемы мы можем представить себе несимметричным, если оба конденсатора c_1 и c_2 заменим одним единственным с емкостью

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Применив теперь уравнения (1) к полному обходу цепи АВА, а затем к обходу АСА, мы получим два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{d^2 J}{dt^2} + W \frac{dJ}{dt} + \frac{J+i}{c} &= 0, \\ p \frac{d^2 i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + \frac{J+i}{c} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Оба уравнения обладают следующим свойством, касающимся их коэффициентов: величины

$$1/\sqrt{pc} \text{ и } 1/\sqrt{Lc}$$

значительно больше, чем соответственно

$$w/p \text{ и } W/L.$$

Чтобы подтвердить сказанное, рассмотрим пример. Числа взяты из наших опытов и округлены.

$$L = 6.5 \cdot 10^3 \text{ см}, \quad W = 10^8 \text{ см сек.}^{-1}, \quad c = \frac{1700}{9 \cdot 10^{20}} \text{ см}^{-1} \text{ сек.}^{-2}, \\ W/L = 1.5 \cdot 10^4 \text{ сек.}^{-1}, \quad 1/\sqrt{Lc} = 10^7 \text{ сек.}^{-1}.$$

Исключая J , получим из уравнений (2) следующее уравнение для i :

$$\frac{d^3 i}{dt^3} + \left(\frac{w}{p} + \frac{W}{L} \right) \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{1}{cp} + \frac{1}{cL} + \frac{wW}{pL} \right) \frac{di}{dt} + \frac{w+W}{pLc} i = 0. \quad (3)$$

Полный интеграл этого уравнения есть

$$i = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} \sin \gamma t + Ce^{-\beta t} \cos \gamma t,$$

где $-\alpha$, $-\beta \pm i\gamma$ являются корнями алгебраического уравнения

$$z^3 + \left(\frac{w}{p} + \frac{W}{L}\right) z^2 + \left(\frac{1}{cp} + \frac{1}{cL} + \frac{wW}{pL}\right) z + \frac{w+W}{pLc} = 0. \quad (3a)$$

Если мы примем во внимание, что, как уже замечалось выше, величины w/p и W/L очень малы по сравнению с $1/\sqrt{pc}$, то непосредственным решением уравнения (3a) с помощью формулы Кардана мы получаем следующие значения для α , β и γ :

$$\alpha = \frac{w+W}{p+L}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{p} + \frac{W}{L} - \frac{w+W}{p+L} \right), \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{c} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{L} \right)}.$$

Но так как период колебаний собственно системы ABA определяется выражением $2\pi\sqrt{cL}$, то отсюда следует, что если мы возьмем w и p очень большими по сравнению с W и L , то присоединение ветви ACA совершенно не изменит периода колебаний системы.

Начальные условия для J и i суть:

$$\text{для времени } t=0, \quad J=0, \quad i=0.$$

Эти начальные условия приводят к следующим уравнениям, получаемым с помощью дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ -\alpha A + \gamma B - \beta C &= \frac{P}{cp}, \\ \alpha^2 A - 2\beta\gamma B + (\beta^2 - \gamma^2) C &= -\frac{wP}{cp^2}, \end{aligned}$$

откуда определяется

$$\frac{C}{B} = -\frac{A}{B} = \frac{\gamma \left(2\beta - \frac{w}{p} \right)}{\gamma^2 - \frac{w}{p} \alpha - \frac{w}{p} \beta}.$$

Так как α и β малы по сравнению с γ , то мы можем положить для силы тока: $i = Be^{-\beta t} \sin \gamma t$.

Переходим к определению величин токов в I и II .

Если i_1 и i_2 силы токов в I и II , то мы получаем из (1) для i_1 уравнение

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{\omega_2}{p_1} i_1 - \frac{\omega_2}{p_1} B e^{-\beta t} \sin \gamma t = 0 \quad (4)$$

(ω_1 следует пренебречь по сравнению с ω_2). Здесь ω_1 , p_1 соответственно — сопротивление и самоиндукция ветви I , а ω_2 безиндукционное сопротивление ветви II ; для i_1 мы получаем

$$i_1 = m e^{-\beta t} \sin \gamma t + n e^{-\beta t} \cos \gamma t - n e^{-rt},$$

где

$$r = \frac{\omega_1}{p_1}, \quad m = \frac{B r^2}{p^2 + \gamma^2}, \quad n = \frac{B \gamma r}{r^2 + \gamma^2};$$

далее имеем

$$i_2 = (B - m) e^{-\beta t} \sin \gamma t - n (e^{-\beta t} \cos \gamma t - e^{-rt}).$$

Подставив найденные выражения для i_1 и i_2 в соотношение

$$\int_0^{\infty} (i_1^2 - i_2^2) dt = 0$$

и приняв во внимание, что значения α и β очень малы по сравнению с γ , мы получаем

$$r = \gamma \text{ или } \gamma = \frac{\omega_2}{p_1}, \quad (5)$$

откуда определяется период колебаний

$$\tau = 2\pi \frac{p_1}{\omega_2}.$$

Для второго случая (рис. 2), в котором шунтирующая цепь содержит безиндукционное сопротивление, вычисления произведены Мицуно.¹ Выясняется, что если сопротивление шунтирующей цепи ω велико по сравнению с W и, кроме того,

$$L/\omega c$$

мало по сравнению с W , то разряд протекает так, как если бы шунтирующая цепь отсутствовала. Но в самой этой цепи сила

¹ T. Mizuno. Ann. d. Phys. 4, 811, 1901.

тока также является затухающей синусоидальной функцией с тем же периодом и затуханием, что и в контуре $АВА$.

Для того чтобы найти токи в I и II в этом случае, мы получаем теперь следующие уравнения:

$$\frac{P_1}{K} = w_2 i_2, \quad i_1 + i_2 = i = Be^{-\beta t} \sin \gamma t, \quad \frac{dP_1}{dt} = i_1, \quad (6)$$

где K — емкость конденсатора, находящегося в ветви I , P_1 — его заряд. Далее, w_2 есть омическое сопротивление ветви II , а i_1 и i_2 — токи соответственно в I и II .

Исключая i_1 и P_1 , мы получаем для i_2 следующее уравнение:

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{Kw_2} - \frac{Be^{-\beta t} \sin \gamma t}{Kw_2} = 0. \quad (4a)$$

Это уравнение идентично уравнению (4), если только вместо w_2/p_1 мы введем величину $1/Kw_2$, или же

$$r = \frac{1}{Kw_2}.$$

Подставляя получаемые из уравнений (6) и (4a) значения для i_1 и i_2 в соотношение

$$\int_0^{\infty} (i_1^2 - i_2^2) dt = 0,$$

найдем снова

$$r = \gamma \text{ или } \gamma = \frac{1}{Kw_2}.$$

Следовательно, период колебания τ определится в этом случае как $\tau = 2\pi w_2 K$.

Мы оперировали в наших вычислениях с константами проводника и с емкостями, не обращая внимания на то, что значения этих констант при изменяющихся и стационарных токах получаются различными.

С целью проверки полученных результатов поступим следующим образом. Разделим все встречающиеся константы на две категории. Пусть первая содержит константы, которые не входят в окончательную формулу, а вторая — все остальные. В отношении первых нам надлежит только показать, что все сделанные прене-

брежения остаются допустимыми. Как известно, изменение сопротивления и коэффициента самоиндукции при очень высоких частотах происходит из-за неравномерного распределения линий тока в поперечном сечении проводника. Формулы, выражающие изменение сопротивления прямолинейного проводника как функцию периода колебаний, были даны Стефаном и лордом Релеем. Приблизительно для прямолинейного провода

$$w' = w\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}},$$

где w' — измененное сопротивление, w — сопротивление постоянному току, a — радиус провода, n — частота колебаний, μ — магнитная проницаемость, σ — удельное сопротивление в абсолютных единицах.

Если взять $n = 2 \cdot 10^6$ сек.⁻¹, $a = 0.05$ см, то, так как для меди $\sigma = 1650$, мы получаем $w' = 5w$. Таким образом, мы видим, что, хотя сопротивления проводов очень значительно возросли, сделанные пренебрежения все еще остаются допустимыми. В окончательную формулу сопротивления проводов не входят.

Что же касается коэффициентов самоиндукции, то из вышеупомянутой работы Стефана видно, что в случае, если катушки сделаны из немагнитного материала, их величины лишь незначительно отличаются от рассчитанных для стационарных токов. Следовательно, мы можем считать вычисленные из формул или определенные известными методами коэффициенты самоиндукции правильными и для быстрых колебаний.

Остается еще показать, что значения остающейся константы, содержащейся в окончательной формуле (омическое сопротивление электролита), следует брать из стационарных измерений.

Что касается электролитического сопротивления, то многими авторами на основании как теоретических, так и экспериментальных работ указывалось, что и на еще более высоких частотах, чем те, с которыми мы здесь имеем дело, оно остается неизменным. Причина лежит в незначительном раздвижении линий тока вследствие большого удельного сопротивления электролита.

По вычислениям Стефана,¹ плотность линий тока на поверхности наполненной электролитом трубки диаметром в 1 см для лучше всего проводящей серной кислоты отличается от плотности на оси

¹ J. Stephan. Wied. Ann. 41, 411, 1890.

трубки лишь на 0.8 процента при 50 миллионах колебаний в секунду. Экспериментальное подтверждение этого содержится в работах Кона,¹ Юдни Жюля,² Дж. Дж. Томсона,³ Нернста⁴ и др.

НУЛЕВОЙ МЕТОД

Выше было сказано, что для нахождения эквивалентного омического сопротивления мы пользовались дифференциальным термометром.

Вполне уместно подробнее остановиться здесь как на его устройстве, так и на его применении для осуществления нулевого метода. Применявшийся нами термометр состоял из двух одинаковых

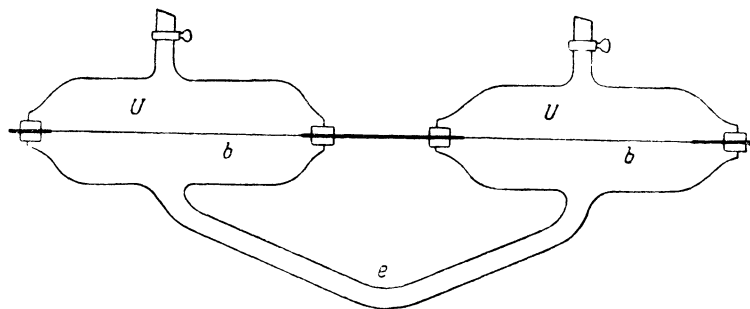


Рис. 3

широких стеклянных труб U , соединенных изогнутой трубкой e ; b представляет собой тонкую платиновую проволоку (диаметр 0.25 мм) напаянную на медные выводы. Длина баллона составляла в нашем приборе 17 см, а его диаметр 4.5 см.

Для уменьшения самоиндукции проволоки должны быть как можно лучше натянуты. Их омическим сопротивлением по сравнению с сопротивлением ветви II можно пренебречь, равно как и их самоиндукцией по сравнению с самоиндукцией ветви I . Далее, сопротивления в обоих баллонах должны быть между собой равны. Абсолютного равенства, как это будет видно из дальнейшего рассмотрения, здесь не требуется. Однако равенство этих сопротивлений значительно облегчает нахождение нулевой точки. В соединительной трубке заключена капля легкой жидкости (спирта).

¹ E. Conh. Wied. Ann. 21, 667, 1884.

² U dny Jule. Wied. Ann. 50, 742, 1893.

³ J. J. Thomson. Proc. Roy. Soc. 45, 269, 1889.

⁴ W. Nernst. Wied. Ann. 60, 601, 1897.

Равенство сопротивлений проверяется последовательным соединением обеих проволок. При этом капля должна оставаться в покое или лишь незначительно удаляться от положения покоя.

Дифференциальный термометр в точке разветвления включается не непосредственно, а через переключатель, при помощи которого можно осуществлять два следующих соединения.

В первом положении переключателя получается соединение (I_1) и (II_2), а во втором — соединение (I_2) и (II_1).

Положение капли наблюдается с помощью горизонтального микроскопа. Как мы уже упоминали, в ветви I находится постоянная самоиндукция. Ветвь II содержит регулируемое омическое сопротивление. Нужно регулировать сопротивление ветви II до тех пор, пока не наступает требуемое соотношение между токами в обеих ветвях

$$\int (i_1^2 - i_2^2) dt = 0.$$

Мы должны, следовательно, выяснить, какое показание дифференциального термометра позволит заключить о существовании такого соотношения.

Пусть цепь замкнута. Капля в соединительной трубке термометра будет выходить при этом из своего симметричного положения и через некоторое время остановится в измененном положении. При переключении капли, вообще говоря, меняет свое положение. При известном значении сопротивления ветви II , которое легко получается его регулированием, капля больше не реагирует на переключение.

Легко видеть, что это возможно только при

$$\int (i_1^2 - i_2^2) dt = 0,$$

где i_1 и i_2 — значения токов соответственно в I и II . Ибо по достижении капель состояния покоя, имеем в баллоне 1

$$p_1 v_1 = R(T + \varphi_1(a)),$$

в баллоне 2

$$p_1 v_2 = R(T + \varphi_2(b)),$$

где

$$a = \int i_1^2 dt, \quad b = \int i_2^2 dt,$$

и φ_1, φ_2 — некоторые, точнее не определяемые функции; отсюда

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T + \varphi_1(a)}{T + \varphi_2(a)}.$$

Это имеет место для соединения (1, I), (2, II).

Так как после переключения, т. е. осуществления соединения (1, II), (2, I), капля не изменяет своего положения, то здесь сохраняется такое же соотношение, только меняются местами a и b .

Таким образом,

$$\frac{T + \varphi_1(a)}{T + \varphi_2(b)} = \frac{T + \varphi_1(b)}{T + \varphi_2(a)}.$$

Но так как φ_1 и φ_2 с ростом аргументов возрастают, то это равенство может иметь место лишь при $a = b$.

Будем теперь считать нулевым то положение капли, к которому приводит коммутация; таким образом, доказано, что нахождение нулевого положения приводит к определению эквивалентного сопротивления. Необходимо еще заметить следующее: переключатель должен обеспечивать очень быструю коммутацию. Только в этом случае удастся найти то значение сопротивления, при котором переключение оставляет каплю в покое. Если же при переключении ток хотя бы на относительно короткое время будет прерван, то капля начнет двигаться в сторону своего симметричного положения, которое вообще отличается от нулевого. Однако при очень быстрых переключениях удастся достичь состояния покоя капли. В описываемых далее опытах применялся шестиполюсный переключатель Поля (Pohl), который при известной сноровке действовал очень хорошо.

Вышеупомянутый нулевой метод прежде всего, как это отмечает Браун,¹ свободен от недостатков других нулевых методов, также оперирующих с квадратом силы тока, но в которых непосредственное приведение к нулю теплового действия исключено. Ибо последнее, будучи пропорциональным $(di)^2$, очень мало, и поэтому эти методы слишком нечувствительны. Здесь же разность тепловых действий пропорциональна idi и благодаря этому может быть

¹ F. Braun. Drahtl. Teleg., стр. 66.

сделана, по крайней мере теоретически, произвольно большой путем увеличения i .

Через II обозначены провода, идущие к трансформатору, в качестве которого применялась спираль Румкорфа, питаемая от сети переменного тока.

Величина искрового промежутка в наших опытах изменялась от 1.5 до 4 мм.

Другие элементы, входящие в представленную здесь схему постановки опыта, описаны выше.

РАЗДЕЛ II

Перейдем теперь к описанию поставленных опытов, результаты которых дают как подтверждение приведенного выше метода, так и некоторое суждение о границах его применимости. Схема постановки опыта показана на рис. 4. Измерения всегда производились с симметричной схемой. В качестве емкостей употреблялись различные комбинации шести линейных банок.

Их емкость определялась методом камертонного прерывателя и составляла от 1400 до 2500 см. В помещенной ниже таблице дано распределение емкостей по обеим сторонам для каждого единичного опыта. Замыкающая

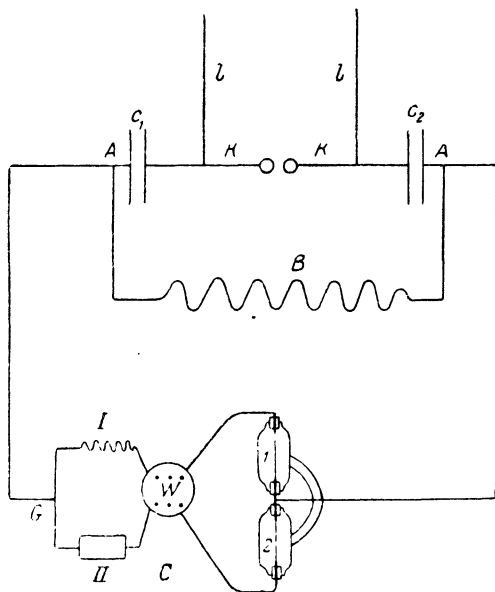


Рис. 4

цепь всегда выбиралась такой, чтобы коэффициент самоиндукции можно было вычислить из ее размеров. В распоряжении имелись:

1. Короткая широкая катушка среднего радиуса 11.75 см с числом витков 25, коэффициент самоиндукции которой мог быть вычислен из ее размеров и составил по формуле Стефана $3 \cdot 10^5$ см.

2. Кольцеобразный соленоид, коэффициент самоиндукции которого был $L = (79)^2$ см. Радиус оси соленоида 8 см. Радиус витков 0.75 см. Общее число витков 180.

3. Наконец, в качестве проводника с малой самоиндукцией был взят квадратный кусок проволоки, коэффициент самоиндукции которого можно было вычислить по формуле Вина.¹ Вычисление дало $L = 1400$ см.

Различные сочетания указанных выше элементов составляли колебательную систему, период колебаний которой, с одной стороны, непосредственно вычислялся из известных размеров по формуле

$$\tau = 2\pi \sqrt{Lc},$$

а с другой, определялся независимо от этого рассмотренным выше методом. Ниже мы приводим числа, из которых видно, что оба результата находятся в согласии.

Здесь следует остановиться несколько подробнее на устройстве измерительного прибора, находящегося в ветви *АСА*. Прибор состоит из неразветвленной части, в которую могут включаться как омическое сопротивление, так и катушки самоиндукции. Целью такого включения является создание достаточно большого сопротивления всей ветви *С*, в соответствии с требованиями, изложенными на стр. 74. В точке *G* основной ток, протекающий через прибор, разветвляется на цепи с самоиндукцией и омическим сопротивлением, которые в свою очередь связаны указанным выше образом с баллоном термометра. В качестве самоиндукции употреблялась короткая широкая катушка, совершенно одинаковая с описанной выше, коэффициент самоиндукции которой, следовательно, составлял $3 \cdot 10^5$ см. Однако эта самоиндукция не была единственной, применявшейся в этом месте во время опытов. Ее можно было удваивать, что осуществлялось включением второй катушки. Величину этой самоиндукции следует выбрать по возможности большей по сравнению с самоиндукцией как подводящих проводников, так и термометрических проволок. Безиндукционное сопротивление ветви представляло из себя трубку диаметром в 1 см, наполненную сильно разведенным водным раствором сернокислого цинка. Электроды были сделаны из листового цинка, причем один из них был укреплен неподвижно, а другой мог плавно перемещаться.

Было создано устройство, позволявшее сразу после опыта включать электролитическое сопротивление в плечо моста Уитстона, так что величина эквивалентного сопротивления каждый раз

¹ M. Wien, Wied. Ann. 53, 330, 1894.

измерялась непосредственно. Ввиду того, что для правильного действия аппарата свойства электролитического сопротивления имеют большое значение, следует несколько подробнее остановиться на свойствах компенсирующего электролита и на возможных источниках ошибок. Выше мы уже указывали на то, что в случае, если трубка не слишком широка, а электролит обладает не слишком большой проводимостью, можно не опасаться изменения сопротивления из-за оттеснения линий тока. С другой стороны, дальнейшее рассмотрение приводит нас к заключению, что слишком малая проводимость для наших целей также является недопустимой. Это вытекает из следующего: если взять жидкость с малой проводимостью, то электроды придется поместить слишком близко один от другого, благодаря чему образуется конденсатор с заметной емкостью. Если еще учесть, что диэлектрическая постоянная плохо проводящей жидкости очень велика, то легко станет понятным, что даже при довольно большом расстоянии между электродами емкость такого конденсатора может получиться значительной. Поэтому расстояние между электродами никогда не должно быть меньше 4—5 см. Влияние этой емкости сводится к следующему. Опираясь на тот факт, что при синусоидальном токе форма закона Ома для проводника, обладающего емкостью, может быть сохранена введением импеданса (*Widerstandsoperator*), мы приходим к выводу, что при переменном токе электролитическая ячейка уже не обладает истинным омическим сопротивлением w ; во внимание следует принимать сопротивление w' , определяемое из формулы

$$\frac{1}{w'} = \sqrt{\frac{1}{w^2} + (c'n)^2}$$

При этом $i = a \sin nt$ и c' — емкость образованного ячейкой конденсатора. Таким образом, мы видим, что при больших n величина w' значительно отклоняется от w .

Если же после опыта определить сопротивление ячейки с помощью моста, то, вследствие меньшей величины n , получится w . Как указывалось, расстояние между электродами в наших опытах никогда не было меньше 5 см. Здесь нужно заметить, что к этому рассмотрению примыкает метод определения диэлектрической постоянной, дальнейшую разработку которого мы оставляем на будущее.

Другое возможное изменение электролитического сопротивления имеет причиной нагревание электролита проходящим через него током. Вследствие большого температурного коэффициента электро-

лита этот источник ошибок также может иметь некоторое значение. Является ли это нагревание достаточно большим, чтобы повлиять на установку нуля, определяется лучше всего во время самой установки. Если именно это имеет место, то прежде всего очень трудно найти положение нуля; будучи найдено, оно не остается постоянным, т. е. при последующих переключениях капля изменяет свое положение.

Путем некоторого увеличения электролитического сопротивления нулевое положение может быть восстановлено. Этой ошибки можно избежать, если работать с более слабыми токами, что достигается увеличением балластного сопротивления; однако это можно рекомендовать далеко не во всех случаях, так как увеличение сопротивления уменьшает чувствительность метода. Можно также взять лучше проводящую жидкость, что, пожалуй, и является самым выгодным, или же взять более широкую трубку.

Что касается, наконец, мешающего действия поляризации, то, как было показано Кольраушем и экспериментально подтверждено Нернстом, его можно совершенно не принимать во внимание при работе с такими высокими частотами, с какими имеют дело при разряде конденсатора.

Помещенная ниже таблица содержит результаты определения периодов колебаний. c_1 и c_2 обозначают емкости соответственно с левой и правой стороны, c — результирующая емкость

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Через L обозначен коэффициент самоиндукции ветви ABA , ω_2 — величина эквивалентного сопротивления, τ_1 — вычисленный период колебаний, τ — полученный вышеописанным методом.

c_1	c_2	$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$	L	ω_2	τ	$\tau_1 = 2\pi\sqrt{Lc}$
5620 см	6380	3000	$3 \cdot 10^5$ см	320Ω	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$
3920	3160	1700	$3 \cdot 10^5$	420	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-6}$
1400	1660	750	$3 \cdot 10^5$	650	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$3.14 \cdot 10^{-6}$
5629	6380	3000	(79) ²	2030	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$8.8 \cdot 10^{-7}$
3920	3160	1700	(79) ²	2760	$7 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$

При определении первых трех чисел, т. е. при относительно больших периодах, в неразветвленной части цепи в качестве балласта находились две катушки по 100 витков, коэффициент самоиндукции которых был примерно в 20 раз больше, чем у катушки

в цепи I. Увеличение этого балласта не вызывало заметного изменения эквивалентного сопротивления. При определении же двух последних чисел условия были совсем иными. Эти числа были получены в отсутствие катушки в неразветвленной части цепи. Включение катушки давало результат, отклоняющийся от вышеуказанного. Именно, для условий опыта, соответствовавших пятой строке таблицы, величина периода получилась равной $8,5 \cdot 10^{-7}$. Включение медного провода длиной в 25 м повлияло на результаты в еще большей степени.

Затем были произведены дальнейшие изменения. Самоиндукция ветви была удвоена включением второй одинаковой по величине катушки. Эквивалентное сопротивление стало вдвое больше, период же колебания остался неизменным. Наконец, вариировалась проводимость электролитического сопротивления, что также не оказало заметного влияния на результат измерения.

Мы только что упомянули, что включение катушек самоиндукции с большой общей длиной провода не влияет на результаты лишь в тех случаях, когда речь идет о медленных колебаниях с периодом порядка $3 \cdot 10^{-6}$. Дело меняется уже при колебаниях, число которых превышает один миллион в секунду. Величины, помещенные в таблице, были определены в отсутствие заметной самоиндукции или каких-либо длинных проводов в неразветвленной части цепи. Включение проводов большой длины приводило, как уже упоминалось, к существенно неправильным результатам.

Объяснение заключается в том, что благодаря введению больших длин распределение тока в приборе становится неквазистационарным, что видно из сравнения длин в 25—30 м с длиной волны, соответствующей частоте $1 \cdot 10^6$ колебаний в секунду, и является само собой понятным. Но если ток не является квазистационарным, то из величины эквивалентного сопротивления нельзя вывести никакого непосредственного заключения о периоде колебаний. Отсюда ясно, что первая граница применимости метода определяется тем, что с увеличением частоты требуемые устройством длины проводов оказывают все более и более мешающее действие. С другой стороны, провода катушек не могут быть слишком сильно укорочены, так как их самоиндукция должна оставаться достаточно большой, чтобы можно было пренебречь самоиндукцией подводящих проводов. Другая трудность заключается в электростатической емкости катушки, которая при тесной намотке имеет зачастую значительную величину. Как уже указывалось выше,

влияние емкости в цепи прибора известным образом равносильно включению параллельной ветви. Сопротивление последней обратно пропорционально частоте, и при больших частотах только оно будет определять общее сопротивление, так как индуктивное сопротивление катушки растет вместе с частотой.

Поставленные опыты, видимо, подтверждают сказанное. Именно, по мере уменьшения самоиндукции в АВА, т. е. увеличения частоты, нужно было вначале увеличивать эквивалентное сопротивление. Употреблявшиеся в этих опытах замыкающие цепи состояли из катушек и более или менее длинных проводов, самоиндукция которых оставалась неизвестной. Так как здесь речь идет только о качественной стороне явления, то значение этих самоиндукций несущественно.

При дальнейшем увеличении частоты приходилось устанавливать меньшее эквивалентное сопротивление. Из двух упомянутых затруднений — больших длин и мешающих емкостей — первое можно преодолеть только одним путем, а именно уменьшением всех встречающихся в приборе длин до возможно малой величины.

Можно предложить некоторую модификацию метода, при которой длины входящих в расчет проводов сводятся до минимума. Эта модификация состоит в следующем: из ветви *I* самоиндукция удаляется и заменяется конденсатором известной емкости. Сравнивается ток проводимости через электролит в ветви *II* с зарядным током в ветви *I*. В остальном этот способ не отличается от описанного выше. Если теперь найти эквивалентное сопротивление, то период колебания определится формулой

$$\tau = 2\pi\omega_2 K,$$

где через *K* обозначена емкость конденсатора.

Ясно, что в этой схеме можно вообще избежать употребления больших длин. Таким образом, трудность применения этого метода для быстрых колебаний частично обходится. Ясно также, что и второй из недостатков, о которых уже шла речь, связанный с применением катушек самоиндукции, здесь автоматически отпадает.

Помещенная ниже таблица содержит полученные таким способом результаты. Емкостью в ветви *I* служил плоский переменный конденсатор Кольрауша; его емкость вычислялась из размеров пластин и расстояния между ними и составляла 70 см. В неразветвленной части прибора в качестве балласта было помещено электролитическое сопротивление. Последнее варьировалось между 1500 и 2000

омами, что не влияло на определение периода колебаний. Емкость конденсатора в ветви I могла удваиваться. Результаты, полученные с помощью такой установки, совпадают с точностью до 2% с величинами, помещенными в таблице.

c_1	c_2	$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$	L	ω_2	τ	$\tau_1 = 2\pi\sqrt{Lc}$
5620 см	6330	3000	(79) ² см	1850 Ω	$9 \cdot 10^{-7}$	$8.3 \cdot 10^{-7}$
3920	3160	1700	(79) ²	1550	$6.8 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$
1400	1660	750	(79) ²	950	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-7}$
900	750	410	(79) ²	730	$3.6 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
1400	1660	750	1400	510	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$

Из таблицы видно, что последнее, полученное данным методом число плохо совпадает с вычисленным, а именно оказывается большим. Это легко понять, если учесть, что лейденские банки сами по себе обладают довольно большой самоиндукцией, которую надо прибавить к входившей в расчет для получения полной самоиндукции цепи, как того требует формула

$$\tau = 2\pi \sqrt{Lc}.$$

Сравнение обеих таблиц показывает, что применение этой последней модификации, в которой в ветви I вместо самоиндукции находится емкость, представляет большие преимущества при определении малых периодов колебаний. А именно, эта модификация позволяет, во-первых, производить с большей надежностью те измерения, которые можно провести и с помощью самоиндукции, правда при соблюдении известных условий в отношении балластного сопротивления, от которых свободен емкостной метод.

Во-вторых, использование емкости открывает более широкую область применения, которую при самоиндукции вследствие указанных выше обстоятельств надо признать совсем недоступной.

Однако необходимо заметить, что метод самоиндукции является единственным, практически применимым при измерении больших периодов колебаний. Как показывает простой подсчет, в этом случае для того, чтобы токи в ветвях I и II не были слишком слабыми, емкость конденсатора в ветви I пришлось бы взять очень большой. Но еще остается большая область, в которой оба метода приводят к точным определениям. Если ток, период колебаний которого подлежит определению, представляет собой простую гармоническую функцию времени, то оба метода должны, как это

следует из приведенных выше вычислений, дать одну и ту же и притом правильную величину.

Дело меняется, если ток не чисто синусоидален. Пусть ток задан как $i=f(t)$, где f — периодическая функция времени. Представляя ее в виде ряда Фурье, мы получим

$$i = \sum i_v \sin(vnt + \varphi_v),$$

где $2\pi/n$ означает период основного колебания. Разложим также в ряд Фурье напряжение $G-G$ (рис. 1 и 2), т. е.

$$E = \sum E_v \sin(vnt + \psi_v).$$

Будем теперь различать два случая:

1 случай. В ветви II находится электролитическое сопротивление, в ветви I самоиндукция. Омическим сопротивлением ветви I, как это всегда делалось, мы пренебрежем.

Соотношение $\int (i_1^2 - i_2^2) dt = 0$, в котором интегрирование следует распространить на целое число периодов, дает в этом случае

$$\left(\frac{1}{p_1 n}\right)^2 \sum \left(\frac{E_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{w_2}\right)^2 \sum E_v^2.$$

Здесь w_2 — эквивалентное сопротивление. Если определять n по нашим формулам, то получим

$$n = \frac{w_2}{p_1}.$$

Однако правильным значением, как это непосредственно видно из предыдущей формулы, будет

$$n = \frac{w_2}{p_1} \sqrt{\frac{\sum \left(\frac{E_v}{v}\right)^2}{\sum (E_v)^2}}, \quad (7)$$

где n — частота основного тока. Мы видим, что получаемые данным методом величины будут всегда больше² истинных, ибо v — целые числа. Конечно, пользоваться этой формулой для определения n нельзя, так как значения E_v , вообще говоря, неизвестны.

¹ F. Bedell. A. Crehore. Theorie der Wechselströme, стр. 147, 1895.

² [в оригинале — меньше].

2 случай. В ветви II находится электролитическое сопротивление, а в ветви I емкость. Соотношение

$$\int (i_1^2 - i_2^2) dt = 0$$

в этом случае дает

$$(Kn)^2 \sum (E_v v)^2 = \frac{1}{\omega_2'} \sum (E_v)^2$$

(ω_2' — эквивалентное сопротивление). И здесь мы видим, что определенное этим методом значение n

$$n = \frac{1}{K\omega_2'}$$

отличается от истинного

$$n = \frac{1}{K\omega_2'} \sqrt{\frac{\sum (E_v)^2}{\sum (E_v v)^2}}, \quad (8)$$

причем последнее получается опять меньшим.

Из этого рассмотрения становится ясным, что если речь идет об определении периода колебаний основного тона периодически изменяющегося тока, который, однако, не может быть представлен простой гармонической функцией, то ни тот, ни другой из описанных методов правильного значения периода не дает. Совпадение будет тем лучше, чем меньше амплитуды обертонов по сравнению с амплитудой основного тона.

Далее, найденные формулы показывают, что в этом случае (несинусоидального тока) величины, полученные обоими методами, не равны также и между собой, а относятся как

$$\sum (E_v)^2 \text{ к } \sqrt{\sum \left(\frac{E_v}{v}\right)^2 \cdot \sum (E_v v)^2}.$$

В этом обстоятельстве, очевидно, кроется возможность обнаружить с помощью обоих методов, имеются ли в измеряемом токе обертоны, или нет.

Для случая наличия в исследуемом токе, помимо основного тона, только первого обертона, можно, при использовании обоих методов, определить соотношение амплитуд. Из уравнений (7) и (8) имеем

$$\left(E_1^2 + \frac{E_2^2}{4}\right) (E_1^2 + 4E_2^2) = h(E_1^2 + E_2^2)^2,$$

где через h обозначено

$$\left(\frac{p_1}{K\omega_2' \omega_2} \right)^2.$$

Если теперь через x обозначить $(E_2/E_1)^2$, то для x мы приходим к следующему уравнению:

$$x^2 + \frac{17-8h}{4(1-h)}x + 1 = 0. \quad (9)$$

В частности, если x мало, то из уравнения (9) мы получаем

$$x = \frac{4(h-1)}{17-8h}.$$

Пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность моему глубокоуважаемому учителю, г-ну проф. Брауну, а также г-ну проф. Кантору (Cantor) за многочисленные указания, сделанные ими при выполнении настоящей работы.

Страсбург,
Физический институт,
январь 1902.

К ТЕОРИИ ПЕРЕДАТЧИКА БРАУНА

[Phys. Zs. 5, 245—248, 1904]

(Поступило 5 февраля 1904 г.)

Теория брауновского передатчика, т. е. теория двух связанных электрических систем, вновь начала привлекать к себе внимание.

Проф. Браун¹ исследовал теоретически случай так называемой автотрансформаторной связи (*direkten Schaltung*) в предположении, что на передающем проводе образуется волна с периодом замкнутого контура. Это оказывается верным в специальном случае очень слабой связи. Зейбт² исследовал автотрансформаторную связь без учета затухания. В обеих названных работах указывалось то обстоятельство, что вторичная система является открытой. Исследование Вина³ относится к случаю индуктивного возбуждения. Вин производит расчет для двух замкнутых контуров или, следовательно, для системы с двумя степенями свободы. Как Зейбт, так и Вин усматривают различие между автотрансформаторной и индуктивной связью. Если же в схеме с автотрансформаторной связью вторичную систему рассматривать как замкнутую, то получаются те же уравнения, что и для индуктивной связи, если только общий участок обоих контуров считать лишенным сопротивления, что практически всегда допустимо.

Д-р Ценнек⁴ указал, что между обоими способами включения нет никакого принципиального различия. Ниже это положение под-

¹ F. Braun. Ann. d. Phys. 8, 208, 1902.

² G. Seibt. E. T. Z. 23, 315, 1902.

³ M. Wien. Ann. d. Phys. 8, 1902.

⁴ J. Zenneck. Phys. Zs. 4, 656, 1903.

Значение i_s (1) удовлетворяет всем уравнениям (I), исключая последнее,¹ если β удовлетворяет уравнению

$$\cos \beta = 1 - \frac{pcn^2}{2}. \quad (2)$$

Для того чтобы удовлетворить также последнему из уравнений (I), необходимо соблюсти соотношение

$$\beta = \frac{2s+1}{2m+1} \pi, \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем для n

$$n = \frac{2}{\sqrt{pc}} \sin \frac{2s+1}{2(2m+1)} \pi. \quad (4)$$

Если s пробегает все натуральные числа от 0 до $m-1$, то мы получаем m колебаний, соответствующих m степеням свободы. Для $s=m$ все токи $i=0$, так что это не дает нового значения частоты; для $s > m$ значения n повторяются.

Вводя вместо c и p общую емкость C и, соответственно, самоиндукцию P системы, определяемые как $C=cm$, $P=pm$, можно написать n в виде

$$n = \frac{2m}{\sqrt{PC}} \sin \frac{2s+1}{2(2m+1)} \pi. \quad (4a)$$

1. Пусть вся емкость C и вся самоиндукция P сосредоточены в одном контуре; тогда в (4a) надо положить $m=1$, и мы получим $n = 1/\sqrt{PC}$.

2. Пусть самоиндукция и емкость распределены непрерывно и равномерно, например вдоль провода, т. е. $m = \infty$.

Тогда из (4a) следует $n = \pi/2\sqrt{PC}$.

Для произвольного m основное колебание определяется из (4a) как

$$n = \frac{\pi}{2\sqrt{PC}} \frac{4m}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4m+2} \right).$$

Стоящая в скобках дробь уже при $m=10$ отличается от 1 на немногие проценты, т. е. система, состоящая из 10 замкнутых контуров, в отношении основного колебания заменяет открытую систему с той же самоиндукцией и емкостью.

¹ См. Lord Rayleigh. Theory of Sound, I, 173.

Согласно (1) и (3),

$$i_z = \sin z \frac{(2s+1)\pi}{2m+1} \cos nt;$$

следовательно, силы токов убывают от точки 0 (точка заземления) по закону синуса. Для $m = \infty$

$$i_x = \sin x \frac{(2s+1)\pi}{2l} \cos nt,$$

где x — расстояние от точки заземления, а l — длина провода. Напряжение V_z на конденсаторе номера z есть

$$V_z = \frac{i}{cn} = \frac{i_s - i_{s-1}}{cn} = 2 \frac{\sin \beta/2 \cos (z+1/2)\beta}{cn};$$

поэтому на открытом конце ($z=1$) для основного колебания будет максимум напряжения.

Из приведенных выше выкладок следует, что изображенная на рис. 1 схема, состоящая из m замкнутых контуров, для достаточно большого m приближается к передающему проводу как в отношении периода колебаний, так и распределения тока и напряжения.

Если же вместо открытой системы взять одну единственную замкнутую с той же общей емкостью и самоиндукцией, то вычислен-

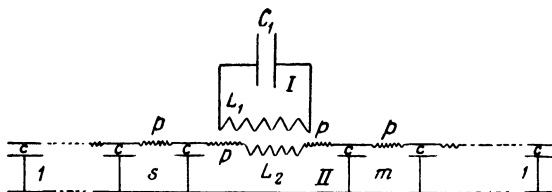


Рис. 2

ная частота колебаний получается примерно на 50 проц. меньше, чем для открытой системы.

Переходим теперь к рассмотрению двух связанных систем, из которых первичная является замкнутой, а вторичная открытой (рис. 2).

Введем обозначения: c, p — соответственно емкость и коэффициент самоиндукции каждого замкнутого контура 1, 2, 3, ...

L_1, C_1 — соответственно самоиндукция и емкость первичного контура.

L_2 — коэффициент самоиндукции катушки вторичного контура.

M — коэффициент взаимной индукции.

$(m+1)p$, $(m+1)c$ — соответственно самоиндукция и емкость правой ветви.

$(s+1)p$, $(s+1)c$ — соответственно самоиндукция и емкость левой ветви.

Для правых контуров с 1-го по $(m-1)$, равно как для $(s-1)$ левых, мы получаем уравнения (I).

Они удовлетворяются, если

$$\left. \begin{array}{l} \text{справа } i_z = P_m \sin z\beta \cos nt \\ \text{слева } i_z = P_s \sin z\beta \cos nt \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \cos \beta = 1 - \frac{pcn^2}{2} \\ P_m, P_s \text{ — произвольные.} \end{array} \right.$$

Для контуров I, II, m , s мы получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} L_1 \frac{d^2 J_1}{dt^2} + M \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \frac{J_1}{c_1} = 0, \\ L_2 \frac{d^2 J_2}{dt^2} + M \frac{d^2 J_1}{dt^2} + \frac{2J_2}{c} - \frac{i_s}{c} - \frac{i_m}{c} = 0, \\ p \frac{d^2 i_m}{dt^2} + \frac{2i_m}{c} - \frac{i_{m-1}}{c} - \frac{J_2}{c} = 0, \\ p \frac{d^2 i_s}{dt^2} + \frac{2i_s}{c} - \frac{i_{s-1}}{c} - \frac{J_2}{c} = 0. \end{array} \right\} \quad (II)$$

Мы будем решать эти уравнения в предположении, что m и s велики по сравнению с единицей.

Тогда прежде всего из (2) следует, что $\beta = n\sqrt{pc}$.

Положим далее $J_1 = A \cos nt$, $J_2 = B \cos nt$. Из (1)

$$i_m = P_m \sin m\beta \cos nt, \quad i_s = P_s \sin s\beta \cos nt.$$

Уравнения (II) служат для определения n и A, B, P_m, P_s . В предположении, что m и s очень велики, из двух последних уравнений (II) получаем

$$P_m = \frac{B}{\sin m\beta}, \quad P_s = \frac{B}{\sin s\beta}$$

и затем

$$\frac{J_2}{c} - \frac{i_m}{c} = \frac{i_m - i_{m-1}}{c} = \frac{B}{\sin m\beta} \cos m\beta \cdot \frac{\beta}{c} \cos nt = \sqrt{\frac{p}{c}} nB \operatorname{ctg} m\beta \cos nt,$$

$$\frac{J_2}{c} - \frac{i_s}{c} = \frac{i_s - i_{s-1}}{c} = \frac{B}{\sin s\beta} \cos s\beta \cdot \frac{\beta}{c} \cos nt = \sqrt{\frac{p}{c}} nB \operatorname{ctg} s\beta \cos nt.$$

Подставив эти значения в оба первых уравнения (II), получим

$$\left. \begin{aligned} A \left(\frac{1}{C_1} - L_1 n^2 \right) - Mn^2 B &= 0, \\ AMn^2 + (L_2 n^2 - f) B &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

где

$$f = n \sqrt{\frac{p}{c}} (\text{ctg } \sqrt{pc} m + \text{ctg } \sqrt{pc} s).$$

Будем стремить m и s в бесконечность и обозначим через L и E соответственно самоиндукцию и емкость на единицу длины, а через l и l_1 длины соответственно правой и левой ветвей. Тогда

$$f = n \sqrt{\frac{L}{E}} (\text{ctg } n \sqrt{LE} l + \text{ctg } n \sqrt{LE} l_1).$$

Из (II) и (III) мы получаем следующее трансцендентное уравнение для n :

$$n^3 (M^2 - L_1 L_2) + L_1 n f - \frac{f}{nC_1} + \frac{L_2 n}{C_1} = 0. \quad (5)$$

Положим

$$M^2 = L_1 L_2.$$

Тогда уравнение (5) принимает следующий вид:

$$-L_1 n + \frac{1}{nC_1} = \frac{L_2 n}{C_1 f},$$

или, наконец, если вместо f подставить его значение,

$$\frac{1}{L_1 n} - C_1 n = \frac{L_1}{L_2} \sqrt{\frac{E}{L}} \frac{\sin n \sqrt{LE} l \cdot \sin n \sqrt{LE} l_1}{\sin n \sqrt{LE} (l + l_1)}. \quad (5a)$$

Обозначим через $F(n)$ и $F_1(n)$ соответственно правую и левую части уравнения (5a)

$$F(0) = +\infty, \quad F\left(\frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}\right) = 0, \quad F(+\infty) = -\infty.$$

$F_1(n)$ для положительных n имеет монотонный ход

$$F_1(0) = 0, \quad F_1\left(\frac{\pi}{\sqrt{LE}(l+l_1)}\right) = +\infty,$$

при дальнейшем же росте $n F_1 = -\infty$ и затем монотонно растет до

$$F_1\left(\frac{\pi}{\sqrt{LE}l}\right) = 0, \quad (l > l_1).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} < \frac{\pi}{\sqrt{LE}l}.$$

Это условие означает, что, например, при симметричном возбуждении собственному колебанию первичного контура соответствует частота, меньшая, нежели удвоенная частота колебаний системы передатчик — симметризирующий провод. Если это условие выполнено, то из уравнения (5а) можно вывести следующие качественные заключения:

1. В интервале

$$\frac{\pi}{\sqrt{LE}l} > n > 0$$

существуют два действительных корня уравнения (5а), соответствующие обоим главным колебаниям.

2. Одно из главных колебаний ниже, а другое выше, чем самое низкое и, соответственно, самое высокое собственное колебание обеих систем.

3. Если функцию $F_1(n)$ заменить другой $F_2(n)$, обладающей свойством

$$|F_2(n)| \geq |F_1(n)|$$

для любого n , вообще же имеющей аналогичный монотонный ход, то разность частот обоих главных колебаний будет, соответственно, больше или меньше.

Из последнего замечания вытекает, что можно прийти к тому же качественному результату в отношении изменения связи, если *ceteris paribus* возбуждать передающий провод в различных местах. При этом самой сильной связи соответствует случай симметричного возбуждения, потому что функция $F_1(n)$ имеет при $l = l_1$ наибольшее значение для любого n , а именно:

$$F_1(n) = \frac{L_2}{2L_1} \sqrt{\frac{E}{L}} \operatorname{tg} n \sqrt{LE}l,$$

причем $l + l_1$ сохраняется постоянным.

Для этого специального случая уравнение (5а) принимает вид

$$\frac{1}{L_1 n} - C_1 n = \frac{L_2}{2L_1} \sqrt{\frac{E}{L}} \operatorname{tg} n \sqrt{LE} l.$$

Если передающий провод заземлен, то из уравнений (II) для определения n получаем

$$\frac{1}{L_1 n} - C_1 n = \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{E}{L}} \operatorname{tg} n \sqrt{LE} l.^1$$

Таким образом, в передатчике Брауна заземление не равносильно включению симметризирующего провода, а скорее соответствует более сильной связи.

Распределение тока вдоль обоих проводов получается из (1), слева

$$i_x = \frac{B \sin n \sqrt{LE} x}{\sin n \sqrt{LE} l_1} \cos nt$$

и справа

$$i_x = \frac{B \sin n \sqrt{LE} x}{\sin n \sqrt{LE} l} \cos nt,$$

причем в обоих случаях расстояние отсчитывается от открытого конца.

Автотрансформаторная связь

Если написать дифференциальные уравнения для автотрансформаторной связи, то становится ясным следующее. (На рис. 3 схематически изображен самый общий случай). Уравнения, относящиеся к ветвям, остаются прежними. Уравнения (II) сохраняют свою форму, если под L_1 понимать самоиндукцию $\alpha\beta\gamma$, под L_2 — самоиндукцию $\delta\beta\varepsilon$, а под M — самоиндукцию общей части L_1 и L_2 . Тем самым схема с автотрансформаторной связью сводится к схеме с индуктивной связью. Это является строго справедливым только при пренебрежении сопротивлениями, что, как указывалось выше, допустимо для вычисления частот и амплитуд в первом приближении.

¹ См. G. Seibt. l. c.

Схему с автотрансформаторной связью можно рассматривать как специальный случай схемы с индуктивной связью постольку, поскольку для первой $M \leq L_1$.

Автотрансформаторная связь обладает тем преимуществом, что для достижения той же величины связи в воздушный провод приходится включать меньшее число витков, чем при индуктивной связи, так как при этой последней условие $L_1 L_2 = M^2$, строго говоря, практически не может быть удовлетворено.

Заметим еще следующее.

При выводе уравнений (II) предполагалось, что токи в L_1 и L_2 квазистационарны. Если учесть, что катушки имеют малые емкости

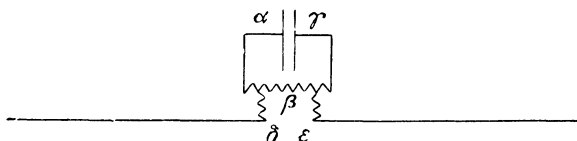


Рис. 3

и что катушка L_2 в практических случаях находится вблизи от пучности тока, то это предположение является вполне правдоподобным.

Уравнение (5а) имеет бесконечное число вещественных корней, соответствующих обертонам. Практически имеют значение лишь два самых низких, которые мы назвали главными колебаниями.

Если из уравнения (5а) частоты найдены, то из (III) можно вычислить соотношение амплитуд, а затем, в первом приближении, и соответствующие значения z

$$(i = e^{zt} \sin \dots)$$

по формуле, которая в общем случае гласит

$$z = - \frac{1}{2} \frac{w_{11} A_1^2 + 2w_{12} A_1 B_1 + \dots}{p_{11} A_1^2 + 2p_{12} A_1 B_1 + \dots} .^1$$

Переходя к практическому случаю заземленного передающего провода, обозначая через w_1 сопротивление первичного контура, через w_2 — сопротивление провода на единицу длины и пренебрегая

¹ Routh. Dynamik 2, 242.

сопротивлением участка цепи $\varepsilon\beta\delta$ (рис. 3), а также катушки L_2 , придем к формуле

$$z = \frac{\omega_1 A^2 + \frac{\omega_2}{l} \left(\int_0^l \sin \sqrt{LE} nx \cdot dx \right)^2 \cdot B^2}{-\frac{1}{2} L_1 A^2 + 2MAB + L_2 B^2 + \frac{L}{l} \left(\int_0^l \sin \sqrt{LE} nx \cdot dx \right)^2 \cdot B^2},$$

причем ω_2 следует понимать¹ как „действующее сопротивление“. Значения A/B можно получить из (III).

Страсбург, 4 февраля 1904 г.
Физический институт Университета.

¹ M. Wien. l. c., 698.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ СДВИНУТЫХ ПО ФАЗЕ БЫСТРЫХ КОЛЕБАНИЙ

[*Phys. Zs.*, 7, 303—306, 1906. Совм. с Н. Д. Папалекси]

(Поступило 7 марта 1906 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Сила тока i при обычном разряде конденсатора может быть, вообще говоря, с достаточной точностью записана в виде

$$i = ae^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha). \quad (1)$$

Если между собой связаны несколько контуров с конденсаторами, то в каждом из них возникают токи, которые в общем случае могут быть представлены в виде сумм таких затухающих синусоидальных функций.

Методы получения быстрых, сдвинутых по фазе колебаний были указаны проф. Брауном.¹ В этих методах используются связанные контуры с конденсаторами. Однако применяемая при этом, как правило, сильная связь обуславливает возникновение многих парциальных колебаний.

Поэтому, по предложению проф. Брауна, мы занялись отысканием метода, который позволил бы создать в двух контурах такие фазовые сдвиги, чтобы в каждом из контуров ток имел простую форму (1). Мы выражаем здесь господину проф. Брауну нашу сердечную благодарность за тот живой интерес, который он проявил к нашей работе в процессе ее выполнения.

¹ F. Braun. *Phys. Zs.* 5, 196. 1904; *Electrician* 56, 546, 1906.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Будем повсюду обозначать через p и P коэффициенты самоиндукции, через c емкости, через ν или n циклические частоты, через δ или ϵ показатели затухания. К каким частям устройства относятся индексы, можно непосредственно усмотреть из рисунков. Схема постановки опыта показана на рис. 1. Под контуром I подразумевается контур $f_1 c_1' p_1 c_1''$, II — контур $f_2 c_2' p_2 c_2''$, III — контур $f_1 c_3' p_3' c_2' p_2 c_2'' p_3'' c_3''$. Контур I и II сделаны по возможности идентичными. Колебания в контурах I и II должны происходить с заданной разностью фаз.

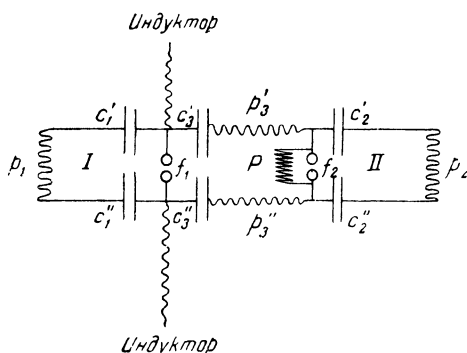


Рис. 1

Обозначим через q_1, q_2 и i_1, i_2 количества электричества и токи соответственно в первом и втором контурах (рис. 1). Благодаря тому, что контуры I и II связаны со средним контуром $f_1 c_3' p_3' f_2 p_3'' c_3''$ только через искровые промежутки, т. е. практически совсем не связаны, для каждого контура справедливы томсоновские уравнения.

По существу процесс заключается в следующем. Индуктор заряжает емкости

$$c_1 = \frac{c_1' c_1''}{c_1' + c_1''}$$

и

$$c_3 = \frac{c_3' c_3''}{c_3' + c_3''}$$

до пробивного напряжения ψ_{10} промежутка f_1 . P представляет собой очень большое индуктивное или омическое сопротивление (в нашем случае коэффициент самоиндукции катушки составлял около 0.25 генри), действие которого заключается в том, что емкость

$$c_2 = \frac{c_2' c_2''}{c_2' + c_2''}$$

не заряжается одновременно. Ввиду большой величины этого сопротивления, его при разряде можно не принимать во внимание. При пробое искрового промежутка f_1 одновременно вступают в действие контуры *II* и *III*. Если мы положим, что в этот момент $t=0$, то

$$i_1 = -\frac{\psi_{10}}{p_1 v} e^{-\delta t} \sin vt. \quad (2)$$

По прошествии некоторого времени t_1 , определяемого, как это будет показано ниже, константами контура *III*, пробивается f_2 и вступает в действие контур *II*. Начиная с $t=t_1$, для i_2 справедлива формула

$$i_2 = a_2 e^{-\delta(t-t_1)} \sin [v(t-t_1) + \alpha_2]. \quad (3)$$

С этого момента контуры *I* и *II* колеблются с разностью фаз

$$\gamma = vt_1 - \alpha_2. \quad (3a)$$

Теперь нужно из констант контура *III* определить величины t_1 , a_2 и α_2 . Мы ограничимся случаем, когда искровой промежуток f_2 установлен на максимально достижимое напряжение. С момента времени $t=0$ для силы тока i_3 контура *III* имеет силу томсоновское дифференциальное уравнение (при этом от P мы отвлекаемся). Запасенная в контуре *III* энергия равна $c_3 \psi_{10}^2/2$. Если представить себе, что искровой промежуток f_1 пробит, f_2 настолько раздвинут, что в нем искра не проскакивает, а P отсутствует, то емкости c_2 и c_3 по окончании колебаний должны остаться заряженными,¹ так как количество электричества $c_3 \psi_{10}$ распределяется на $c_2 + c_3$. Тогда ($t=\infty$) энергия в контуре *III* равна $\frac{c_2 \psi_{10}^2}{2(c_2 + c_3)}$, а энергия, рассеянная во время колебательного процесса, равна

$$\frac{c_2 c_3}{2(c_2 + c_3)} \psi_{10}^2.$$

Силу тока i_3 можно вычислять так, как будто емкости c_2 и c_3 заряжаются последовательно, потому что как в этом случае, так и в имеющем место в действительности дифференциальное уравнение для определения i_3 одно и то же. Идентичны также оба условия

¹ В действительности $c_2 + c_3$, конечно, разряжаются впоследствии через P . Но благодаря большой величине P этот процесс для приводимых здесь рассуждений не играет роли.

$i_3 = 0$ для $t = 0$ и значение интеграла $\int_0^{\infty} i_3^2 dt$, из которых могут быть найдены постоянные интегрирования.

Таким образом,

$$i_3 = -\frac{A}{n} (n^2 + \varepsilon^2) e^{-\varepsilon t} \sin nt, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3} \psi_{10}.$$

Напряжение ψ_2 на f_2 (без учета затухания) есть

$$\psi_2 = p_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{q_2}{c_2} = -A p_2 [(n^2 - \nu^2) \cos nt + \nu^2], \quad (5)$$

где q_2 определяется из $\frac{dq_2}{dt} = i_3$ и $(q_2)_{t=0} = 0$ как

$$q_2 = A (\cos nt - 1). \quad (5a)$$

ψ_2 достигает максимума¹ при

$$t = x \frac{\pi}{n}, \quad (6)$$

где x целое число, четное или нечетное, в зависимости от $\nu \lesseqgtr n$. Для четного x значение максимума ψ_2 равно $-A p_2 n^2$, а для нечетного x оно равно $-A p_2 (2\nu^2 - n^2)$. Вид максимумов для четных и нечетных x существенно различен:

а) первые появляются, если q_2 имеет минимальное значение, т. е. контур II, которого только это и касается, имеет малую энергию;

б) вторые появляются, если q_2 имеет максимальное значение.

Величины последних больше, чем первых, если $\nu > n$. Это условие должно быть, следовательно, выполнено для того, чтобы промежуток f_2 пробился только тогда, когда емкости c_2' , c_2'' уже заряжены.

Понятно, что уравнения (4) и (5) допускают появление первого нечетного максимума только в интервале от

$$t = 0 \text{ до } t = t_1 = \frac{\pi}{n}.$$

¹ Кажущееся противоречие, что ψ_2 имеет максимум для $t = 0$, заложено в допущении, что томсоновское уравнение имеет силу от $t = 0$. В действительности, уравнение приобретает силу только по истечении определенного, разумеется, очень короткого времени после пробоя f_1 .



Рис. 2



Рис. 3

Как только ψ_2 достигает такого значения, f_2 пробивается и с этого момента имеют силу уравнения (2) и (3). Из (2), (3), (5) и (6) мы получаем

$$i_1 = -\frac{\psi_{10}}{p_1 v} e^{-\delta t} \sin vt,$$

$$i_2 = -\frac{\psi_{10}}{p_2 v} \frac{2c_3}{c_2 + c_3} e^{-\delta \left(t - \frac{\pi}{n}\right)} \sin \left[v \left(t - \frac{\pi}{n} \right) + \pi \right], \quad (7)$$

потому что

$$t_1 = \frac{\pi}{n}, \quad (i_2)_{t=t_1} = (i_3)_{t=t_1} = 0$$

и из (5а) $(q_2)_{t=t_1} = -2A$. Отсюда следует

$$\alpha_2 = \pi, \quad a_2 = \frac{\psi_{10}}{p_2 v} \frac{2c_3}{c_2 + c_3}.$$

Искомая разность фаз между колебаниями в обоих контурах равна, таким образом,

$$\gamma = \frac{\pi}{n} (v - n). \quad (8)$$

Необходимо заметить еще следующее. Так как рассеяние энергии происходит только в контурах I и II, то коэффициентом полезного действия устройства мы можем назвать отношение

$$\eta = \frac{(q_2^2)_{t=t_1}}{2c_2} : \frac{c_3 \psi_{10}^2}{2} = \frac{4c_2 c_3}{(c_2 + c_3)^2}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что $\eta_{\max} = 1$ при $c_2 = c_3$. Очевидно, благодаря затуханию этот максимум будет несколько уменьшен.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. С целью экспериментального подтверждения лежащих в основе этого расчета представлений в числе прочих был поставлен следующий опыт. Контур I (рис. 1) отключен,

$$c_2 = c_3 \approx 3500 \text{ см}, \quad n \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ сек.}^{-1}$$

Как было сказано выше, после пробоя f_1 начинает действовать контур III. Через полколебания пробивается f_2 , и вся энергия сосредоточивается в контуре II, в контуре же $p_3' c_3' f_1 c_3'' p_3''$ в дальнейшем не должно быть тока. Искра фотографировалась с помощью вращающегося зеркала, и в ней действительно оказалась только одна яркая полоса, соответствующая первому полукослебанию (рис. 2). Для контроля микрометр искрового промежутка f_2 раздвигался настолько, что искры уже не проскакивали, и f_1 фотографировался еще раз. Фотография дает картину обыкновенного конденсаторного разряда (рис. 3).

В этом опыте уже простым глазом видно различие в яркости f_1 в зависимости от того, участвует ли f_2 , или нет. Это может служить для контроля, достаточно ли велико R .

2. Сдвиги фаз между I и II измерялись по методу, предложенному проф. Брауном.¹ Этот метод состоит в том, что каждый из контуров I и II связывается с помощью двух отдельных катушек p' и p'' с резонансным контуром, причем связь берется как можно более слабой. Если предварительно сделать обе составляющие по возможности равными и если находящийся в резонансном контуре измерительный прибор, показания которого пропорциональны $\int_0^{\infty} i^2 dt$, дает при „встречном включении“ отклонение J_1 , а при „последовательном включении“ отклонение J_2 , то разность фаз γ определяется из

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (10)$$

Конечно, это соотношение является вполне точным только для чисто синусоидальных колебаний, начинающих действовать на резонансный контур одновременно. В наших опытах оба эти условия не были выполнены. Однако поправки к формуле (10), которые вследствие этого необходимо сделать, имеют благодаря сравнительно малому логарифмическому декременту тот же порядок, что и ошибка наблюдения, и поэтому могут не учитываться.

На рис. 4 изображена схема постановки опыта. u_1 и u_2 — переключатели, позволяющие соединять вторичные катушки p', p'' между собой и с остальными частями резонансного контура четырьмя

¹ Phys. Zs. 5, 199, 1904.

различными способами. Две позиции переключателей соответствуют „встречному“, а две другие — „последовательному“ включению.

Измерительным прибором служил болометр в предложенной Тиссо¹ мостиковой схеме. Болометр состоял из тонкой (0.04 мм) платиновой проволоки с сопротивлением около 1.2 Ω. Чувствительность гальванометра (системы Deprez d'Arsonval) составляла $8 \cdot 10^{-9}$ при расстоянии до шкалы 50 см. Общее сопротивление ветви с гальванометром было 1050 Ω. Болометрический провод (*B*) включался непосредственно в резонансный контур и находился между двумя одинаковыми переменными конденсаторами, что существенно в случае наличия не строго квазистационарного режима.²

Для получения этим методом с помощью (10) количественных результатов очень важно, чтобы *I* и *II* оказывали индуктивное воздействие только на p' и p'' , но не на другие участки цепи резонансного контура.³ Поэтому катушки p' , p'' подносились как можно ближе к *I* и *II*, подводящие провода к ним делались из перевитых проводников, а остальная самоиндукция резонансного контура выполнялась в виде тороидальных катушек.

В качестве контроля, что нежелательные индукционные воздействия исключены, служит следующий опыт. Одна из катушек p' или p'' отдалается от соответствующего контура *I* или *II*, оставаясь включенной в резонансный контур, и при настройке в резонанс берется отсчет. Последний должен быть неизменным во всех четырех положениях переключателей u_1 , u_2 .

Выше неявно предполагалось, что каждой длине искрового промежутка соответствует определенное пробивное напряжение. Легче всего этого можно достичь путем облучения искрового промежутка мощным ионизатором. В наших опытах мы пользовались следующим устройством. На искровом промежутке f_1 посредством кварцевой

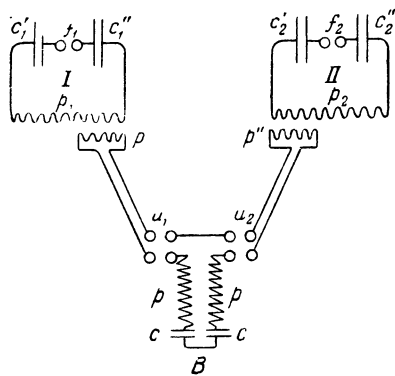


Рис. 4

¹ Tissot. Journ. de Phys. (4) 3, 524 и 751, 1904.

² Braun. l. c.

³ Braun. l. c.

линзы концентрировался свет от дуговой лампы. Искровой промежуток f_2 располагался как можно ближе (от 4 до 5 см) к пробивающемуся до него промежутку f_1 и, таким образом, освещался достаточно сильно. Такое освещение оказалось очень существенным для однородности получаемых результатов.

Результаты проделанных опытов содержатся в нижеследующей таблице:

$\frac{\nu}{n}$	2.23	2.49	2.67	2.78	2.93
$\gamma = \pi \frac{\nu - n}{n}$	231°	269°	300°	321°	348°
$\gamma_1 + \pi$	250°	270°	298°	313°	341°

При этом

$$c_1 = c_2 = c_3 = 800 \text{ см,}$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{p_1 c_1}} = \frac{1}{\sqrt{p_2 c_2}} \approx 1.2 \cdot 10^7 \text{ сек.}^{-1},$$

а p_3 и тем самым

$$n = \sqrt{\frac{2}{c_3 (p_3 + p_2)}}$$

вариировалось, как видно из таблицы. Как и выше, здесь γ_1 обозначает наблюдаемую, а γ — вычисленную по формуле (8) разность фаз в градусах.

Эти значения γ получаются вследствие того, что мы определили разность фаз γ из (3а). Отклонения же наблюдаемых величин от вычисленных, вызывающиеся, например, непостоянством пробивного напряжения, должны оцениваться по отношению к величине

$$t_1 = \frac{\gamma + \pi}{\nu} = \frac{\pi}{n}.$$

Встречающиеся обычно на практике разности фаз γ' получаются из γ вычитанием целого числа периодов. Отсюда видно, что, хотя процентные расхождения между вычисленными и наблюдаемыми значениями разности фаз, как показывает таблица, малы, формула (8) допускает все же лишь приближенное вычисление тех разностей фаз, с которыми приходится иметь дело.

Страсбург,

Физический институт Университета,
март 1905.

ОБ ОПТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ И МУТНЫХ СРЕДАХ

[*Ann. d. Phys.* **23**, 626—642, 1907]

(Поступило 1 мая 1907 г.)

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

В основе различных теорий дисперсии (Друде,¹ Фохт,² Лорентц,³ Планк⁴) и теории мутных сред лорда Релея⁵ лежит следующее физическое положение.

В вакууме, который характеризуется скоростью света b , находятся частицы, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны. Расстояния между двумя соседними частицами принимаются большими по сравнению с их линейными размерами. Если в такой среде имеется внешнее электромагнитное поле с электрической напряженностью \mathbf{E}_0 и магнитной \mathbf{H}_0 , то присутствие частиц проявляется в том, что каждая из них излучает в соответствии со своими колебаниями волну в окружающий ее вакуум.⁶

Можно показать, что напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} , \mathbf{H} даются тогда выражениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \sum \left(\text{grad div } \mathbf{Z} - \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \right), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \sum \text{rot } \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹ P. Drude. *Wied. Ann.* **48**, 536, 1893.

² W. Voigt. *Wied. Ann.* **67**, 345, 1890.

³ H. A. Lorentz. *La théorie électromagnétique...* Leiden, 1892.

⁴ M. Planck. *Sitzungsber. d. preuss. Akad.* **24**, 470, 1902; **24**, 480, 1904.

⁵ Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* **47**, 377, 1899.

⁶ M. Planck. *l. c.*, стр. 476.

Здесь $Z = \frac{p(l-r)}{r}$ есть „функция Герца“, в которой p обозначает электрический момент частицы, а l написано вместо bt .¹

Уравнения (1) являются решением уравнений Лорентца для рассматриваемого случая. Если $p = A \cos nt$, то последние члены в правых частях уравнений (1), находящиеся под знаком суммы, соответствуют напряженностям поля, найденным Герцем для колеблющегося диполя.

Прежде всего заметим следующее. Если речь идет об определении показателя преломления, то мы можем поступить двояко:

1. Мы рассматриваем слой данной среды, ограниченный двумя параллельными плоскостями, находящимися друг от друга на малом расстоянии. В некоторой точке вне этого слоя (на достаточно большом расстоянии от него) мы определяем из уравнений (1) напряженность поля E . Показатель преломления может быть вычислен из сдвига фаз между этой напряженностью и напряженностью первичной волны и из толщины слоя. Этот путь избрал лорд Релей при рассмотрении мутных сред.²

2. Составляем дифференциальные уравнения для напряженностей поля внутри среды и затем определяем показатель преломления обычным образом. В обоих случаях мы должны иметь уравнение, связывающее напряженность электрического поля с моментом частицы.

Все упомянутые выше теории дисперсии исходят из дифференциальных уравнений. Теории Друде и Фохта, с одной стороны, и Планка и Лорентца, с другой, различаются только формой уравнения связи. Если же мы будем рассматривать среду, возмущаемую присутствием частиц лишь в малой степени, то различия не будет совсем. „Возбуждающая электрическая сила“ и напряженность электрического поля тогда совпадают.

Результаты отдельных теорий различаются в этом случае предположениями о причине поглощения. Друде и Лорентц допускают превращение электромагнитной энергии в неэлектромагнитную и пренебрегают затуханием частиц, обусловленным излучением. В противоположность этому Планк объясняет поглощение именно затуханием за счет излучения.

Наконец, эти результаты различаются еще параметрами, характеризующими частицы. Планк, Друде и Лорентц приписывают

¹ M. Abraham. Theorie d. Elektrizität, 2, стр. 56 и 62, 1905.

² Lord Rayleigh. l. c., стр. 377.

частицам собственный период и затухание. Лорд Релей характеризует частицы их формой и диэлектрической постоянной. При первом способе рассмотрения надо иметь в виду следующее. Вообще говоря, нельзя определить действующую на частицу силу не учитывая присутствия других частиц. Здесь получается аналогия с тем, что имеет место при введении свободных зарядов в электростатике.

Действительно, если представить себе среду, в которой имеется электростатическое поле и в которую внесены тела с отличной от среды диэлектрической постоянной, то возмущенное поле можно вычислить с помощью закона Кулона, если известно распределение свободного электричества. Однако это распределение само зависит от добавочного поля.

Но для рассматриваемого случая можно утверждать следующее. Если свойства вакуума под влиянием частиц изменяются очень мало, то возбуждающая сила равна напряженности поля первичной волны. Другими словами, мы пренебрегаем тем действием, которое оказывают на частицу находящиеся в ее окрестности другие частицы. Следовательно, мы ограничиваемся случаем, когда показатель преломления среды мало отличается от 1. Кроме того, поглощение, обусловленное присутствием частиц, должно быть мало.

В уравнении, связывающем возбуждающую силу, которая равна теперь E_0 , и электрический момент p частицы

$$p = \alpha E, \quad (2)$$

мы можем тогда, коль скоро речь идет о вычислении показателя преломления, положить мнимую часть α равной нулю. (При этом предполагается, что мы не находимся вблизи собственной частоты.) Я буду придерживаться только что указанного способа рассмотрения, т. е. непосредственного применения уравнений (1) и (2) при упомянутых ограничениях, из следующих соображений: 1) он может, как мне кажется, сделать более наглядными некоторые физические стороны теории дисперсии в оптически однородных телах и 2) рассмотрение с помощью дифференциальных уравнений с самого начала предполагает, что среда оптически однородна, т. е. частицы этой среды, линейные размеры которых очень малы по сравнению с длиной волны, не различаются между собой. Мне представляется, что мутные среды обладают тем принципиальным отличием, что они оптически не однородны. Для того чтобы это показать, удобно воспользоваться указанным способом рассмотрения, не

связанным условием оптической однородности. Исходя из только что упомянутого представления, Саньяк провел качественную дискуссию возникновения явлений отражения и преломления.¹ Впрочем для класса тел, рассматриваемых Саньяком (стекло, жидкости), количественное исследование с помощью дифференциальных уравнений оказывается, как уже было отмечено, более пригодным. Для этих тел показатель преломления как раз сильно отличается от единицы.

Прежде всего определим показатель преломления среды. Как уже упоминалось вначале, это было сделано Релеем для среды, в которой частицы имеют диэлектрическую постоянную, отличную от окружающей среды, в которой они находятся. Нам предстоит только обобщить его результаты. Если в месте нахождения частицы действует первичная напряженность поля $E_0 = A \cos nt$, то, согласно Релею,² напряженность поля в некоторой точке P , обусловленная излучением частицы, будет

$$A \frac{D' - D}{D} \frac{\pi T}{r \lambda^2} \sin \theta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r). \quad (3)$$

Здесь через D' и D обозначены диэлектрические постоянные соответственно частицы и первоначальной среды, r — расстояние от рассматриваемой частицы до точки P , θ — угол между E_0 и r , T — объем частицы.

С другой стороны, в соответствии с нашим уравнением (2)

$$p = \alpha A \cos nt.$$

По Герцу напряженность поля в некоторой точке, вызываемая периодическим моментом $\alpha A \cos nt$, равна

$$A \alpha \frac{4\pi^2}{r \lambda^2} \sin \theta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r), \quad \left(n = \frac{2\pi b}{\lambda} \right).$$

Таким образом, выведенные Релеем формулы можно обобщить, положив

$$\frac{(D' - D)}{D} T = 4\pi\alpha.$$

Рассмотрим теперь слой частиц, заключенный между двумя плоскостями, расположенными перпендикулярно к направлению распространения плоской волны и отстоящими друг от друга на dx .

¹ G. Sagnac. H. A. Lorentz — Jubelband, стр. 377, 1900.

² Lord Rayleigh. l. c.

Можно показать тогда, что этот слой излучает плоскую волну как в направлении первичной волны, так и в противоположном направлении. Напряженность поля E' на некотором расстоянии x от этого слоя будет¹

$$E' = ANdx \frac{4\pi^2 \alpha}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x), \quad (4)$$

причем она накладывается на первичное поле

$$A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x).$$

N представляет собой число частиц в единице объема. Если показатель преломления первоначальной среды принять за единицу, то показатель преломления μ среды, свойства которой изменены частицами, будет

$$\mu - 1 = 2\pi N\alpha. \quad (5)$$

Чтобы сравнить этот результат с полученным Друде, надо определить α из его уравнения (13) („Lehrbuch der Optik“, стр. 355) и подставить в наше уравнение (5). Тогда, действительно, для μ получается значение, совпадающее с полученным Друде из уравнений поля [см. уравнение (8), стр. 357]. Для того чтобы иметь суждение о поглощении, необходимо учесть мнимую часть α . Если вместо

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r) \quad \text{ввести} \quad e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (bt - r)},$$

то мы придем снова к формуле (5), в которой α комплексно. Теперь μ обозначает комплексный показатель преломления $\mu = \nu(1 - i\kappa)$, причем через ν обозначен показатель преломления, а через κ — коэффициент поглощения. Таким образом,

$$\nu(1 - i\kappa) = 1 + 2\pi N\alpha.$$

Это соотношение также совпадает с имеющимися у Друде. В рассматриваемом случае формулы Планка и Лорентца здесь те же, что и у Друде, если отвлечься от физического истолкования констант.

¹ Lord Rayleigh. l. c.

Вывод формулы (5) основывается на уравнении (4). В основе последнего лежат те же рассуждения, что и при рассмотрении зон Френеля. Мы приходим, таким образом, к выводу, что слой частиц с принятыми выше свойствами излучает свет только в направлении первичного излучения и в противоположном направлении, но не в стороны. Предположение, в силу которого френелевский метод применим к нашему случаю, состоит в том, что частицы расположены настолько густо, что среда может рассматриваться как оптически однородная. Только при таком предположении можно произвести интегрирование по зоне порядка длины волны, что лежит в основе френелевской трактовки принципа Гюйгенса. Таким образом, выходит, что среда с находящимися в ней частицами, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны, удовлетворяющая при наличии частиц условию оптической однородности, не может быть мутной.

Эти соображения относятся в первую очередь к случаю покоящихся частиц.

Теперь я буду считать, что частицы беспорядочно движутся с различными скоростями, наподобие молекул газа. Рассматриваемые здесь скорости должны быть очень малы по сравнению со скоростью света. Если среда оптически однородна, то мы всегда можем выделить такие фиксированные пространственные области, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны, но которые, несмотря на это, содержат постоянное число частиц. Если рассматривать излучение частиц, заключенных в подобной области, то напряженность поля в некоторой точке P , обусловленная этими частицами, будет иметь ту же фазу, что и в случае покоя. Амплитуда же изменяется и по следующим причинам:

1. Уравнение связи уже не будет (2), так как к электрической силе теперь прибавляется еще сила, действующая на электрон, поступательно движущийся в магнитном поле первичной волны. Вместо уравнения (2), теперь следует воспользоваться уравнением

$$\alpha \left\{ \mathbf{E}_0 + \frac{1}{b} [\mathbf{u}, \mathbf{H}_0] \right\} = \mathbf{p}, \quad (6)$$

где \mathbf{u} — скорость частицы.

2. Каждая частица будет возбуждаться уже не с частотой, соответствующей длине первичной волны λ , а с частотой, соответствующей

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 - \frac{u}{b} \cos \varphi}, \quad (6a)$$

где φ — угол между \mathbf{u} и направлением луча. Кроме того, здесь следует учесть законы излучения движущегося источника света. Вытекающие отсюда изменения амплитуды имеют порядок величины u/b .

Пусть теперь слой с принятыми выше свойствами движется в направлении распространения первичной волны с постоянной скоростью u . Тогда из (6) и (6а)

$$\mathbf{p} = d\mathbf{E}_0(1 - \beta), \quad \lambda' = \frac{\lambda}{1 - \beta}, \quad \left(\beta = \frac{u}{b}\right).$$

Для того чтобы найти изменение показателя преломления, вызываемое этим движением, представим себе, что мы движемся вместе со слоем. Применяя в (4) известное преобразование Лорентца к местному времени и переходя к покоящейся системе, получим

$$\mu' - 1 = 2\pi N\alpha(1 - \beta),^1$$

где через μ' обозначен искомый показатель преломления. В случае покоящихся частиц мы имели

$$\mu - 1 = 2\pi N\alpha,$$

следовательно

$$\mu' - 1 = (\mu - 1)(- \beta).^2$$

Возвращаемся к случаю беспорядочного распределения скоростей.

Изменение амплитуды, пропорциональное u/b , изменяет свой знак вместе с u . При хаотическом распределении скоростей взаимно противоположные скорости равновероятны. В этом случае движение не оказывает влияния на амплитуду поля, испускаемого рассматриваемым элементом пространства. Последнее предположение (в каждом объеме, малом по сравнению с λ^3 , всякая скорость равновероятна с противоположной ей) едва ли можно сделать в случае газов. Но поскольку изменения амплитуды имеют порядок величины u/b , здесь возможно появление лишь небольших нерегулярностей. Для тех составляющих амплитуды, которые соответствуют состоянию покоя, можно провести прежние рассуждения. Но все же остаются малые амплитуды, относительно которых никаких высказываний, вообще говоря, сделать нельзя.

¹ При этом дисперсия во внимание не принимается.

² См. Robert W. Wood. Physical Optics, 1905, стр. 517.

Предположение о беспорядочном движении частиц сделал Релей в своей теории мутных сред. Его рассуждение примерно таково:¹ если плоская волна падает на неподвижные частицы, то последние начинают колебаться с постоянным фазовым сдвигом. В некоторой точке P , в зависимости от расстояния и направления, возникает определенная интерференционная картина. Следовательно, мы должны суммировать не интенсивности (пропорциональные квадратам амплитуд напряженностей поля), создаваемые в P каждой отдельной частицей, а сами эти напряженности. Если же частицы находятся в движении, то они уже не будут иметь постоянного сдвига фаз. Не будут обладать постоянным сдвигом фаз и напряженности поля в точке P (за исключением случая, когда направление на P и прямая, соединяющая частицы, совпадают с направлением распространения волны). Ввиду малости длины волны сдвиг фаз будет даже в течение короткого времени наблюдения пробегать всевозможные значения. В этом случае можно суммировать интенсивности.

Сказанное справедливо в той или иной мере для двух частиц. Если же их много, то, как мне кажется, а также согласно изложенному выше, совершенно безразлично, создают ли определенную интерференционную картину в некоторой точке P две определенные частицы, или же такие фиксированные пространственные области, размеры которых малы сравнительно с длиной волны и которые остаются равными друг другу по количеству содержащихся в них частиц. Но оптически однородную среду всегда можно подразделить на такие пространственные области, так как это и есть определение оптической однородности. Таким образом, мы приходим к выводу, что оптически однородная среда не может являться мутной, независимо от того, движутся частицы или нет.² Мне кажется недопустимым приложение релеевской теории мутных сред к атмосфере. Воздух следует рассматривать как оптически однородную среду, ибо в кубе с ребром, равным длине волны натриевого света, содержится около $5 \cdot 10^6$ молекул, которые Релей и рассматривает как рассеивающие частицы.

Согласно сказанному выше, вычисление рассеиваемой в стороны энергии как суммы энергий, излучаемых каждой отдельной молекулой, представляется мне недопустимым.

¹ Lord Rayleigh (J. W. Strutt). Phil. Mag. 14, 112, 1871.

² Условие оптической однородности может выполняться и в том случае, когда занимаемый частицами объем мал по сравнению со всем объемом (см. Lord Rayleigh. Phil. Mag. 47, 383, 1899).

Я обращаюсь к рассмотрению света, излучаемого частицами в оптически однородной среде в направлении, обратном направлению распространения волны.

Пусть плоскость AB (рис. 1), расположенная перпендикулярно к направлению распространения волны, разграничивает первоначальную среду от среды, возмущенной присутствием частиц. Ищется напряженность поля E в точке P . В плоскости AB напряженность поля первичной плоской волны равна

$$E_1 = A \cos \frac{2\pi bt}{\lambda}.$$

В слое ds напряженность поля есть

$$E_s = e^{-\kappa s} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - \mu s),$$

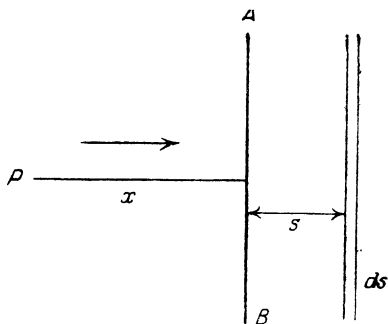


Рис. 1

причем, по предположению, κ мало по сравнению с $1/\lambda$. Разделим среду II на слои толщиной $\lambda/4\mu$. В каждом слое я считаю κs постоянным, что допустимо вследствие малости λ . Первый слой возбуждает в точке P напряженность поля [уравнение (4)]

$$\begin{aligned} E' &= AN \frac{4\pi^2\alpha}{\lambda} \int_0^{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} [bt - (2\mu s + x)] ds = \\ &= -\frac{AN4\pi\alpha}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x), \end{aligned}$$

второй

$$E'' = \frac{A\kappa_2 4\pi\alpha N}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x),$$

где $\kappa_2 = e^{-\kappa\lambda/4\mu}$ и т. д.

Напряженность поля в точке P будет

$$E = E' + E'' + E''' + \dots$$

Пользуясь теперь рассуждением, совершенно аналогичным френелевскому, мы придем к выводу, что эта сумма сводится к

$$\frac{E' - E^\infty}{2},$$

или, поскольку $e^{-\infty} = 0$, к $E'/2$. Поэтому

$$E = -\frac{A2\pi x N}{2\mu} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x),$$

или, согласно (5),

$$E = -\frac{\mu - 1}{2\mu} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x).$$

Эта формула означает, что на плоскости раздела AB свет отражается по закону Френеля ($\mu - 1$ мало). Действие, производимое средними слоями в обратном направлении, компенсируется.

По Релею, среда с принятыми здесь свойствами должна была бы излучать свет в обратном направлении из всей своей толщи. Суммируя сказанное, можно сделать следующее заключение.

Присутствие одинакового рода частиц изменяет показатель преломления в соответствии с уравнением (5) и может также вызвать поглощение света, если с самого начала допустить какое-либо превращение энергии в этих частицах.

Колебания частиц под воздействием первичной волны вызывают излучение, направленное так же, как и первичная волна. Следовательно, это излучение не может обусловить собой поглощения.

Мне кажется поэтому, что сводить, как это делает Планк, поглощение в оптически однородном теле к рассеянию частицами является заблуждением. Если расстояния между соседними частицами велики по сравнению с их линейными размерами, то весьма правдоподобным является предположение, что период собственных колебаний каждой отдельной частицы не изменен вследствие наличия других частиц. Но если при этом расстояния малы по сравнению с длиной волны, то при упорядоченном процессе заключение, что каждая частица отдает через излучение такую же энергию, какую она отдавала бы, если бы находилась в поле одна, является уже неверным.

Если среда оптически неоднородна, то, вообще говоря, падающий свет будет рассеиваться и в стороны. В этом случае среда является мутной. Рассмотрим сначала случай, когда расстояние между двумя соседними частицами очень велико по сравнению с длиной волны. Тогда интенсивности излучений в стороны как для движущихся частиц, так и для покоящихся будут просто складываться. В последнем случае мы и наблюдаем пространствен-

ные средние значения. Вообще же боковой свет будет очень слабым.

Для мутных сред, приготовляемых для наблюдений [коллоидальные растворы, взвеси частиц (Mastixtrübungen) и т. д.], указанное расстояние, повидимому, невелико сравнительно с длиной волны. Так, например, для рубиновых стекол, которые были исследованы Зидентопфом (Sidentopf) и Жигмонди (Zsigmondy) с помощью ультрамикроскопа, это расстояние во многих случаях имеет порядок длины волны.

Я принимаю теперь, что распределение частиц таково, что расстояние между двумя соседними частицами ни велико и ни мало по сравнению с длиной волны.

Если выделить две частицы, то они должны создавать определенную интерференционную картину. Такой опыт, пожалуй, осуществим с помощью ультрамикроскопа.

Вообще же наблюдению доступен лишь свет, излучаемый весьма многими частицами. Спрашивается, какую результирующую амплитуду мы можем ожидать в некоторой произвольной точке в этом случае, иными словами — какая амплитуда является наиболее вероятной. Так как среднее расстояние между двумя соседними частицами, по предположению, имеет порядок длины волны, то нельзя приписать каждой частице определенную фазу; фазы распределены по частицам полностью произвольно. При этом предполагается, что частицы разбросаны совершенно беспорядочно. Если амплитуду напряженности поля, возбуждаемого излучением одной частицы, положить равной единице, то вероятность W того, что результирующая амплитуда лежит между r и $r + dr$, будет

$$W = \frac{2}{n} e^{-\frac{r^2}{n}} r dr. \quad 1$$

Максимум этого выражения дает наиболее вероятную амплитуду. При этом по закону Вебера, согласно которому „для заметного изменения восприятия требуется, чтобы изменение возбуждающих сил было пропорционально им самим“, надо поддерживать dr/r постоянным. Тогда наиболее вероятной амплитудой будет $r_w = \sqrt{n}$, т. е. наиболее вероятной интенсивностью будет та, которая получается при сложении отдельных интенсивностей.

¹ См. Lord Rayleigh. Theory of Sound, 1, стр. 140.

Само собой разумеется, что для покоящихся частиц интенсивность не должна иметь непременно это значение; однако вероятность того, что результирующая интенсивность будет намного меньше или больше, чрезвычайно мала.

Если частицы движутся беспорядочно, то будут появляться самые различные комбинации. Но при достаточно продолжительном времени наблюдения является существенным среднее значение J интенсивности, т. е.

$$J = \frac{2}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{n}} r^3 dr = n.$$

Таким образом, в только что рассмотренных случаях можно суммировать энергии, излучаемые отдельными частицами, и законы, установленные Релеем для цвета и состояния поляризации рассеянного в стороны света, здесь сохраняют свою силу.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Высказанные мной в предыдущей части соображения привели к следующему заключению: если среда модифицирована включением в нее малых частиц, но так, что вся в целом она остается оптически однородной, то при прохождении через эту среду, скажем, плоской волны боковое рассеяние света не имеет места.

Напротив, как теория Релея, так и теория Планка дают боковое рассеяние, а именно: в течение времени dt каждая частица излучает внутри элементарного конуса, направление и телесный угол которого определяются полярными координатами ϑ , φ и $d\vartheta$, $d\varphi$, энергию ¹

$$\frac{dt}{4\mu b^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

То, что это излучение, с точки зрения наблюдателя, должно иметь длину волны, одинаковую с проходящей волной, следует, как мне кажется, непосредственно из рассмотрения Планка, так как, если не привлекать специальных гипотез, чего не делает и сам Планк, никакая трансформация энергии в отношении длины волны невозможна. Что же касается газов, то боковой свет здесь

¹ M. Planck. l. c., 746, 1903.

вообще настолько слаб, что недоступен для наблюдения. Следовательно, на этом пути сделать выбор между различными воззрениями безусловно нельзя.

Я хотел бы несколько подробнее коснуться одного явления. В спектре флюоресценции паров натрия при освещении их солнечным светом наблюдается появление линий D. Пуччианти¹ и Вуд² показали, что эти линии D в спектре флюоресценции вызываются линиями D возбуждающего света. Вуд рассматривает это излучение линий D как резонансное излучение. Это равносильно тому, что мы понимаем под боковым рассеянным светом. Если допустить, что здесь действительно имеет место резонансное излучение, то указанное явление тем не менее не будет в противоречии с развитыми представлениями по следующей причине. Весьма правдоподобно предположение Штарка,³ что газ должен быть ионизован для того, чтобы он мог поглощать или испускать свой линейчатый спектр. Упомяну здесь, что я мог убедиться на опыте, что если пар Na (не светящийся) при атмосферном давлении поглощает линии D, то он одновременно действительно является проводящим. Эти опыты пока еще не доведены до конца.

В поглощении и излучении участвуют только электрически диссоциированные атомы. Но в отношении этих диссоциированных атомов пар Na отнюдь не является оптически однородным.

Мне казалось желательным произвести опыт, который должен был служить проверкой, хотя и косвенной, объяснения свечения неба рассеянием солнечных лучей самими молекулами воздуха.

Лорд Релей рассматривает воздух как мутную среду и полагает энергию, рассеиваемую в стороны, равной сумме энергий, рассеиваемых отдельными молекулами. При таком допущении из показателя преломления и коэффициента поглощения воздуха можно вычислить число Лашмида. Вычисленное таким способом значение находится в удовлетворительном согласии со значениями, полученными для этого числа другими способами.

В соответствии с приведенными выше рассуждениями, в случае правильности точки зрения лорда Релея, на границе воздух — вакуум не должно было бы происходить отражения.

Я не вижу пока возможности поставить для решения этого вопроса опыт на газах. Однако мне представляется, что принци-

¹ L. Puccianti. Atti Accad. Lincei 13, 430, 1904.

² R. Wood. Phys. Zs. 6, 908, 1905.

³ J. Stark. Ann. d. Phys. 21, 422, 1906.

пимально все сведется к тому же, если вместо газа взять очень разведенный раствор. Я провел опыт по следующей схеме.

Плоскость является границей между двумя средами, например, стеклом и жидкостью, обладающими для некоторого определенного цвета одинаковыми показателями преломления. На плоскости раздела этот цвет не отражается. Затем в жидкости растворяется какое-либо вещество, и притом в такой концентрации, что расстояние между двумя молекулами этого вещества в растворе очень велико по сравнению с их линейными размерами.

Тогда вопрос, на который должен ответить эксперимент, будет заключаться в том, — происходит ли теперь регулярное отражение от плоскости раздела между стеклом и указанным образом модифицированной жидкостью или нет.¹

Согласно развитому здесь представлению, должно было бы появиться регулярное отражение, а по Релею, насколько я могу судить, свет должна излучать вся толща раствора.

Предварительные опыты я проводил с помощью следующей установки (рис. 2).

В стеклянный сосуд с плоскопараллельными стенками погружалась пластинка из зеркального стекла, толщиной 3 мм. Свет лампы Нернста падал на стенку AB и отражался плоскостями ab и cd . В направлении, перпендикулярном к CB , наблюдались оба изображения нити. Я ожидал, что при наполнении сосуда смесью из бензола и сероуглерода, имеющей для некоторого цвета показатель преломления одинаковый со стеклом, оба изображения окажутся малоинтенсивными и окрашенными. Сначала это не получалось. Изображения были почти неокрашенными и, когда я менял показатель преломления смеси добавлением бензола или сероуглерода, изменяли свой цвет и интенсивность едва заметно.

Установить, для какого цвета показатель преломления смеси совпадал с показателем стекла, можно было следующим образом. Если расположить глаз так, что свет, отражаемый плоскостью cd , попадает в него через bc , то нить лампы Нернста представляется

¹ Если допустить возможность того, что незначительное изменение показателя преломления (скорости распространения) не вызывает соответствующего изменения отражения, то результат этого опыта не будет казаться самоочевидным. Замечу, что по другому поводу Релей (Beibl. 13, 161, 1882) поставил и попытался решить экспериментальным путем вопрос о том, действительно ли на плоскости раздела двух различных тел с относительным показателем преломления l отражение не может иметь места.

растянутой в спектр. Если направить глаз прямо на ребро b , то одновременно видны и этот спектр и отраженное от cd резкое изображение нити. Положение этого изображения в спектре и определяет тот цвет, для которого оба показателя преломления совпадают.

Изображения оставались интенсивными и почти бесцветными также после очищения пластинки спиртом и концентрированной серной кислотой. Напротив, изображения стали слабыми и окрашенными после того, как я стеклянную пластинку отполировал цинашем [оловянная зола].¹ Обработка разведенной плавиковой кислотой действует еще лучше, чем полировка. Очищенная таким образом пластинка через некоторое время становилась непригодной к употреблению и должна была снова подвергаться очистке. Очевидно, дело заключается здесь в поверхностных пленках. Уже самые тонкие (по сравнению с длиной волны) пленки достаточны для объяснения этого „аномального“ отражения.

Установка в ее окончательном виде изображена на рис. 3.

В качестве пластинки служила стенка внутреннего сосуда. Внешний сосуд имел размеры $6.5 \times 6.5 \times 6.5$ см³. Ширина внутреннего сосуда составляла 4 см, длина также 4 см и высота 3 см. Толщина стенок составляла 2.5 мм. Если наполнить оба сосуда подходящей смесью, то в P наблюдаются два изображения нити, представляющиеся одинаково окрашенными. Небольшое изменение в составе смеси меняет окраску изображений. Растворим теперь в маленьком сосуде нафталин. Изображение, возникающее благодаря отражению с внутренней стороны, приобретает голубоватую окраску. Так как в этой установке отраженный свет является поляризованным, то можно применить кварцевую пластинку с вращающимся никоелем, которые позволяют, как в сахариметре Солейля, производить установку на чувствительный контраст („Teint sensible“) и таким путем облегчить различение цветов.

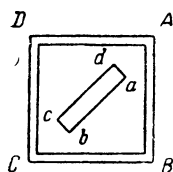


Рис. 2

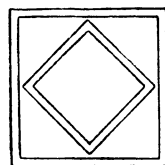


Рис. 3

¹ См. Lord Rayleigh. Beibl. 13, 161, 1882.

В нашем понимании опыт можно интерпретировать так: факт появления регулярного отражения доказывает, что излучаемые отдельными молекулами нафталина световые волны могут интерферировать и притом в направлениях, не совпадающих с направлением первичного луча. Диффузное рассеяние наблюдать не удалось.

Для того чтобы вызвать вполне отчетливое изменение окраски, достаточно растворить 0.3 г в 25 см³. Это соответствует давлению газа в 2.1 атм.

Страсбург,

Физический институт.

К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ

[*Phys. Zs.*, 8, 608—611, 1907]

(Поступило 18 июля 1907 г.)

Как известно, в основе всех электромагнитных теорий дисперсии в однородных непроводниках лежит следующее физическое представление: прозрачное тело характеризуется тем, что его молекулы являются электромагнитными резонаторами или же содержат таковые. Среде, окружающей эти резонаторы, приписываются свойства вакуума.

Планковская теория отличается от всех остальных тем, что Планк видит причину затухания в рассеянии энергии резонаторами.¹ В этом пункте его теория соприкасается с теорией мутных сред лорда Релея.²

В статье, которая в ближайшее время появится в *Ann. d. Phys.*,³ я попробовал показать, что если рассматривать всю среду, включая и резонаторы, как оптически однородную (а это, как замечает Планк, должна явно или неявно сделать всякая теория дисперсии⁴), то в этом случае не следует ожидать никакого затухания вследствие рассеяния. Я придерживался при этом релеевского метода рассмотрения. Воспользуюсь случаем, чтобы еще раз коротко возвратиться

¹ M. Planck. *Sitzungsber. d. Königl. Preuss. Akademie*, 24, 474, 1902.

² Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* (5) 47, 375, 1899; M. Planck, *l. c.*, стр. 744, 1904.

³ [Статья 4, стр. 109].

⁴ M. Planck. *l. c.*, стр. 479.

здесь к этому вопросу, хотя и с другой точки зрения. Я буду в нижеследующем придерживаться планковских уравнений.

Прежде всего, коротко разберем, как получаются эти уравнения. Я хочу при этом опираться на рассуждения, которые хотя и отличаются от планковских, но в основном сводятся на то же самое.¹

Пусть справедливы все сделанные Планком предположения.²

Если под **E** и **H** мы понимаем средние пространственные значения напряженности электрического и соответственно магнитного поля, то основные уравнения гласят

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi N \mathbf{p}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1)^3$$

N есть число резонаторов в единице объема, \mathbf{p} — среднее значение момента в соответствующем месте; речь идет именно о физически бесконечно малом элементе объема. Каждому резонатору приписывается момент $\mathbf{p}(t)$, который получается путем усреднения несколько различающихся между собой моментов, которыми фактически обладают отдельные резонаторы.

Требуется найти теперь уравнение, которое выразит связь между \mathbf{p} и **E** и позволит исключить \mathbf{p} из (1). Закон колебания резонатора выражается следующим уравнением:

$$K\mathbf{p} + L \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \frac{2}{3c^3} \frac{\partial^3 \mathbf{p}}{\partial t^3} = \mathbf{E}'. \quad (2)^4$$

\mathbf{E}' есть напряженность поля, которое существовало бы в месте нахождения резонатора, если бы мы удалили соответствующий резонатор вместе с его полем. Планк называет \mathbf{E}' „возбуждающей электрической силой“.

Мы должны понимать под \mathbf{E}' среднее значение возбуждающих сил. Это среднее значение в общем случае отличается от **E** в уравнении (1), потому что:⁵

¹ Ср. М. Абрахам. Theorie der Elektrizität, 2, 270.

² М. Планк. I. с., стр. 476 сл.

³ М. Планк. I. с., стр. 484.

⁴ М. Планк. I. с., стр. 745, 1904.

⁵ М. Абрахам. I. с., стр. 270.

1. Среднее значение \mathbf{E} относилось к физически бесконечно малому элементу объема, в то время как среднее значение \mathbf{E}' надо брать только для тех точек, где находятся колеблющиеся резонаторы.

2. При образовании \mathbf{E}' мы должны представить себе соответствующий резонатор удаленным вместе с его полем.

Для того чтобы вычислить теперь $\mathbf{E} - \mathbf{E}'$, представим себе резонатор окруженным физически бесконечно малой сферой радиуса r_0 . Как \mathbf{E} , так и \mathbf{E}' могут быть разложены на три слагаемых.

Величина, которую вносит первое слагаемое, определяется внешним полем. Действие резонаторов, которые лежат вне сферы, дает второе слагаемое и, наконец, резонаторы, лежащие внутри сферы — третье. Первые два слагаемые идентичны для \mathbf{E} и \mathbf{E}' . Обозначим третьи слагаемые через \mathbf{B} и соответственно \mathbf{B}' . Тогда

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}' = \mathbf{B} - \mathbf{B}'.$$

Вычисление \mathbf{B} проводится в предположении, что сфера однородно статически поляризована.¹ Тогда

$$\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{3} N\mathbf{p}.$$

Планк полагает $\mathbf{B}' = 0$, исходя при этом опять-таки из соображений, справедливых для стационарного случая.² Таким образом, при этом предположении

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} N\mathbf{p}.$$

Будучи подставлено в (2), это дает

$$\left(K - \frac{4\pi}{3} N\right) \mathbf{p} + L \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \frac{2}{3c^3} \frac{\partial^3 \mathbf{p}}{\partial t^3} = \mathbf{E}. \quad (2')$$

Уравнения (1) и (2') позволяют исключить \mathbf{p} . Затем из результирующих уравнений для \mathbf{E} и \mathbf{H} известным способом вычисляется показатель преломления. Он получается комплексным. Таким образом, имеет место поглощение, причем это поглощение обусловлено.

¹ M. Abraham. l. c., стр. 271.

² M. Planck. l. c., стр. 481.

сдвигом фаз между **E** и **D**, или, другими словами, оно обусловлено членом $-\frac{2}{3c^3} \frac{\partial^3 \mathbf{p}}{\partial t^3}$ уравнения (2').

Энергия, которая отбирается от регулярного процесса, должна, если не вводить никаких новых гипотез, рассматриваться как рассеянный свет той же длины волны, что и падающий. Во всяком случае величина ее, согласно этому расчету, равна сумме энергий, испускаемых отдельными резонаторами.¹

В последующем я хочу попытаться доказать, что неправильно вычислять **B** и **B'** на основании формул соответствующих статическому состоянию. А именно, при этом пренебрегают членами того же порядка и вида (в отношении частных производных), что и член $-\frac{2}{3c^3} \frac{\partial^3 \mathbf{p}}{\partial t^3}$. В отношении затухания вследствие рассеяния учет этих членов приводит к количественно отличному результату. Представим себе координатную систему, начало которой помещено в центре шара. Пусть ось *z* имеет направление результирующего момента **p** всех резонаторов, находящихся в шаре.

Напряженность поля **E**₁, создаваемого резонатором, находящимся на расстоянии *r* (*x*, *y*, *z*) от центра, есть²

$$\left. \begin{aligned} E_{1x} &= [p] \frac{3xz}{r^5} + [\dot{p}] \frac{3xz}{r^4} + [\ddot{p}] \frac{xz}{r^3}, \\ E_{1y} &= [p] \frac{3yz}{r^5} + [\dot{p}] \frac{3yz}{r^4} + [\ddot{p}] \frac{yz}{r^3}, \\ E_{1z} &= [p] \frac{3z^2 - r^2}{r^5} + [\dot{p}] \frac{3z^2 - r^2}{r^4} + [\ddot{p}] \frac{z^2 - r^2}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом скобки [] означают, что в качестве аргумента *p*, \dot{p} , \ddot{p} нужно брать (*ct* - *r*). Точки означают, как обычно, дифференцирование по аргументу. В нашем случае $[p] = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - r)$. Так как шар физически бесконечно мал, то мы можем разложить [p] и т. д. по степеням *r*/λ. Мы ограничимся членами порядка \ddot{p} , так как члены высших порядков в уравнение (2) не входят. Мы получим тогда

¹ М. Планк *к. л. с.*, стр. 487.

² М. Абрахам *к. л. с.*, стр. 63.

$$\left. \begin{aligned} E_{1x} &= p \frac{3xz}{r^5} - \frac{1}{2} \ddot{p} \frac{xz}{r^3}, \\ E_{1y} &= p \frac{3yz}{r^5} - \frac{1}{2} \ddot{p} \frac{yz}{r^3}, \\ E_{1z} &= p \frac{3z^2 - r^2}{r^5} - \frac{1}{2} \ddot{p} \frac{z^2 + r^2}{r^3} + \frac{2}{3} \ddot{p}; \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

здесь p поставлено вместо $p(ct)$ и т. д.

Первые члены справа соответствуют статическому, или, вернее, квазистатическому, состоянию.

Действие резонаторов (лежащих внутри сферы) для статического случая уже было вычислено Планком и другими. Для этого случая оно, как указано выше, есть $B = -\frac{4\pi}{3} Np$, $B' = 0$.

Вторые члены мы можем отбросить, потому что резонатор (x, y, z) так же вероятен, как и $(-x, y, z)$ или $(x, -y, z)$, так что в среднем компоненты x и y взаимно уничтожаются, совершенно так же как при статическом состоянии. Второй член в $E_{1z} = p \frac{3z^2 - r^2}{r^5} + \dots$ и т. д. [уравнение (3')] имеет более высокий порядок, чем первый. Так как он содержит фактор \ddot{p} , то учет этого члена может дать, очевидно, лишь несущественную поправку. В вопросе о затухании он вообще не имеет значения.

Таким образом, отличие от квазистатического случая состоит в том, что в выражении для E_{1z} добавляется еще член $\frac{2}{3} \ddot{p}$. Заметим, что этот член не зависит от расстояния и ориентировки соответствующего резонатора по отношению к центру сферы.

Другими словами, эта часть напряженности поля одинаково велика во всех точках пространства, которые находятся на малом по сравнению с длиной волны расстоянии от резонатора. Из этого следует, что если внутри сферы находится N_1 резонаторов, то для B и B' мы получим теперь следующие значения:

$$B = -\frac{4\pi}{3} Np + \frac{2}{3} N_1 \ddot{p},$$

$$B' = \frac{2}{3} (N_1 - 1) \ddot{p}.$$

Отсюда следует далее, что

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} Np - \frac{2}{3} \ddot{p},$$

а это, будучи поставлено в (2), дает

$$\left(K - \frac{4\pi}{3} N\right) \mathbf{p} + L \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} = \mathbf{E}. \quad (2'')$$

Но из (1) и (2'') показатель преломления получается в действительной форме. Мы приходим таким образом к результату, что оптически однородная среда с принятыми здесь свойствами не рассеивает проходящий свет.

Я хотел бы заметить еще следующее. Газы в обычных условиях (атмосферное давление) должны рассматриваться как оптически однородные тела. Это подтверждается и тем обстоятельством, что выведенные при этом предположении формулы для зависимости между показателем преломления и плотностью, правильность которых вышеизложенными объяснениями не затрагивается, хорошо согласуются с опытом. Но тогда изложенные соображения приводят к заключению, что нельзя ожидать никакого молекулярного рассеяния света в газах. Тем самым оказывается недопустимым сводить голубой цвет неба к рассеянию солнечного света самими молекулами воздуха.¹ Однако исходя из последнего предположения, лорд Релей рассчитал из показателя преломления и коэффициента поглощения воздуха нижнюю границу для числа Лашмидта.² Полученное этим способом значение относительно хорошо согласуется со значениями, полученными другими путями. Если вышеприведенные рассуждения правильны, то это совпадение должно рассматриваться как случайное. Оно указывает скорее на то, что в атмосфере взвешены посторонние частички и эти частички делают ее оптически неоднородной средой.

Страсбург,

Физический институт.

¹ Этим вопросом я подробнее занимаюсь в вышеупомянутой работе.

² Lord Rayleigh. l. c., стр. 375 сл.

О НАПРАВЛЕННОЙ БЕСПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИИ

[Jahrb. der drahtl. Telegr. u. Teleph. 1, 291—306, 1907]

(Поступило 20 ноября 1907 г.)

В настоящей работе проводится дискуссия отдельных методов направленной беспроволочной телеграфии как с теоретической, так и с экспериментальной стороны. Более подробное рассмотрение основ, на которых покоятся различные устройства, представляется не лишним по следующей причине. Насколько известно из литературы, еще ни одна станция для направленной телеграфии не проходила длительного практического испытания и, следовательно, при рассмотрении отдельных устройств приходится опираться на экспериментальный материал, полученный зачастую в условиях, не соответствующих практическим требованиям. Правильному суждению об этом материале может немало способствовать поэтому дискуссия тех теоретических представлений, которые легли в основу указанных устройств.

Строгой теории происходящих здесь явлений не существует. Вообще сомнительно, чтобы такая теория могла скоро появиться, если учесть трудности, возникающие при постановке задачи, соответствующей действительным условиям. Приходится довольствоваться сравнительно грубыми приближениями, в соответствии с чем можно ожидать лишь качественного согласия между расчетом и опытом. Однако каждый из предложенных методов опирается все же на некоторые теоретические представления и получаемые опытные данные стараются, хотя бы приближенно, согласовать с вычислениями.

Последующее рассмотрение отнюдь не претендует на полноту. Напротив того, я хочу остановиться только на наиболее разработанных методах, или же основанных на каком-либо новом принципе, отвлекаясь при этом от истории как отдельных устройств, так и проблемы направленной телеграфии в целом. По указанной причине останется незатронутой и практическая сторона различных устройств.

К проблеме направленной телеграфии можно естественным образом подойти с двух сторон. Во-первых, можно потребовать, чтобы передатчик излучал несимметрично, т. е. чтобы кривая равной интенсивности не была окружностью с передатчиком в ее центре. Ясно, что вообще эта кривая не является окружностью и в случае обыкновенной вертикальной антенны. Для нарушения симметрии достаточно различия свойств почвы по разным направлениям. Но при направленной телеграфии речь идет, очевидно, о „преднамеренной“ асимметрии. В соответствии с этим и теоретические предпосылки не учитывают ту или иную „естественную“ асимметрию. Правда, во время опытов часто бывает трудно исключить такого рода асимметрию и приходится поступать, например, так, что телеграфируют все время в одном и том же направлении, а асимметричный передатчик ориентируют по различным направлениям. Но, вообще говоря, и здесь, особенно на земле, не легко „вращать“ передатчик, не изменяя его свойств. Для того чтобы показать, насколько могут сказываться неучитываемые влияния местности, я приведу пример, взятый из работы проф. Брауна. В его опытах применялись три передатчика, построенные по возможности идентично. Они были расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами в 30 м (высота мачты 20 м, длина волны около 120 м). Приемная станция находилась на расстоянии 1.2 км. Когда заставляли при возможно идентичных условиях последовательно колебаться каждый из передатчиков в отдельности, то отсчеты, получавшиеся по гальванометру болометрического устройства, включенного в приемный провод, относились один к другому, как 16.7:7.2:12.5. При этом оба других передатчика оставались незаземленными, так что вносимые их присутствием искажения во всяком случае можно считать очень малыми. Различием в расстояниях до приемной станции по сравнению со всем расстоянием можно пренебрегать. Весьма большое различие в излучениях отдельных передатчиков следует приписать, как это делает и проф. Браун, неучитываемой асимметрии окружающей местности.

Таким образом, при подобных опытах необходимо всякий раз убеждаться в том, что передатчик действительно был только „повернут“. В отдельных случаях может оказаться, что преимущественное направление в излучении, приписываемое специальной конструкции передатчика, на самом деле вызывалось подобного рода влияниями.

Другой вид направленной телеграфии можно осуществить и при симметричном передатчике применением соответствующей конструкции приемника. От последнего требуется в этом случае, чтобы он сильнее всего реагировал на излучение, приходящее по определенному направлению. Можно, наконец, сочетать направленную передачу с направленным приемом.

Первый метод обладает по сравнению со вторым известным принципиальным преимуществом. Именно, в наивыгоднейшем случае направленный приемник может принимать из определенного направления лучше, чем симметричный приемник из любого направления. Но если ставится задача — установить между двумя станциями такую беспроводную связь, чтобы некоторая третья станция, расположенная не в том же направлении, не улавливала сигналов, то один лишь направленный прием, очевидно, здесь не поможет. Точно так же, как путем поисков находят правильную длину волны и настраивают на нее приемник, можно методом проб сообщить приемнику правильную ориентировку. Напротив, асимметрично излучающий передатчик позволяет *ceteris paribus* ограничить прием в одних направлениях меньшими расстояниями, чем в других.

В дальнейшем я буду касаться главным образом трех различных методов, а именно систем проф. Брауна, Маркони и Артома.

Проф. Браун предложил устройство, дающее асимметричное излучение,¹ и кроме того много ранее им был описан метод направленного приема.²

Маркони³ опубликовал результаты количественных и качественных опытов по направленному приему, основанному на том же принципе, что и у Брауна. Кроме того, Маркони описал опыты с направленным передатчиком, теоретическое рассмотрение которого было затем произведено Флемингом.⁴ Наконец,

¹ F. Braun. *Electrician* 57, 222 and 244, 1906; *Jahrbuch d. dr. T. u. T.* 1, 1, 1907.

² F. Braun. *Phys. Zs.* 4, 363, 1903.

³ G. Marconi. *Proc. Roy. Soc., London* 22, Marz 1906; *Electrician* 57, 100, 1906.

⁴ J. A. Fleming. *Proc. Roy. Soc., London* 21, Juli 1906; *Phil. Mag.* (6) 12, 588, 1906.

Артом¹ разработал передатчик и приемник для направленной телеграфии, основанные на совсем других принципах. Как проф. Браун, так и Артэм приводят теоретические положения, на которых основываются их методы.

Для того чтобы получить представление о действии асимметричного передатчика, следует исходить из законов излучения для токов высокой частоты. Вышеназванные авторы исходят из самых простых предположений, касающихся влияния земли и т. п., и пользуются выражениями, которые были получены Г. Герцем и применялись Абрагамом при вычислении излучения вертикального передающего провода. Герц вычислил поле элемента тока в предположении, что ток синусоидален, а длина прямолинейного элемента мала по сравнению с длиной волны, соответствующей периоду этого тока.

Если направление элемента тока выбрать вдоль оси z и обозначить через E и M соответственно электрическую и магнитную напряженность поля в произвольной точке (x, y, z) , так называемой точке наблюдения (Aufpunkt), то

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \varphi \frac{3xz}{r^5} + \dot{\varphi} \frac{3xz}{r^4} + \ddot{\varphi} \frac{xz}{r^3}, & M_x &= -\dot{\varphi} \frac{y}{r^3} - \ddot{\varphi} \frac{x}{r^2}, \\ E_y &= \varphi \frac{3yz}{r^5} + \dot{\varphi} \frac{3yz}{r^4} + \ddot{\varphi} \frac{yz}{r^2}, & M_y &= -\dot{\varphi} \frac{x}{r^3} - \ddot{\varphi} \frac{x}{r^2}, \\ E_z &= \varphi \frac{3z^2 - r^2}{r^5} + \dot{\varphi} \frac{3z^2 - r^2}{r^4} + \ddot{\varphi} \frac{z^2 - r^2}{r^3}, & M_z &= 0. \end{aligned} \right\} (1)^2$$

При этом φ означает электрический момент осциллятора, например $\varphi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - r)$; r — расстояние от средней точки осциллятора до точки наблюдения; $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ следует брать для значений аргумента $(l - r)$; $l = vt$, v — скорость света.

Эти выражения для E и M справедливы на расстояниях, не являющихся малыми по сравнению с длиной элемента тока. На расстояниях, больших по сравнению с длиной волны, выражения существенно упрощаются, как это легко можно усмотреть из формул. В каждой строчке остаются только последние члены, так как в выражениях для E амплитуды трех членов относятся как $1: \frac{2\pi r}{\lambda}: \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2$.

¹ Artom. Rendic. R. Acc. dei Lincei, Ser. (5) 12, 197, 1903; 14, 143, 1905; 15, 692, 1906.

² M. Abraham. Theorie der Elektrizität. II, стр. 63, 1905.

На больших расстояниях напряженность электрического поля E (то же относится и к магнитному вектору M) убывает обратно пропорционально расстоянию от осциллятора. Область, в которой это имеет место, называют „волновой зоной“. Для волновой зоны справедливо, далее, следующее: волна является поперечной, т. е. электрический и магнитный векторы перпендикулярны к направлению распространения и, кроме того, перпендикулярны друг к другу. Наблюдателя будет интересовать лишь проекция колебания на плоскость, перпендикулярную к направлению распространения. Отсюда следует, что самое сильное излучение происходит в экваториальной плоскости элемента тока и что излучение в направлении самого элемента равно нулю.

При применении этих результатов к беспроводной телеграфии можно считать, что мы находимся в волновой зоне, ибо во всех практических случаях расстояния, о которых идет речь, велики по сравнению с применяемой длиной волны.

Вблизи элемента тока может оказаться, что члены, которыми в волновой зоне следует пренебречь, играют значительную роль и даже могут определять само явление. Я делаю это замечание, чтобы обратить внимание на то, что измерения полей должны производиться на соответствующих расстояниях, если имеется в виду использовать полученные результаты в практических условиях.

Приведенные выше выражения Герца были применены Абрагамом при рассмотрении излучателя следующим образом.¹

Земля считается проводящей плоскостью. Тогда заземленный вертикальный излучатель может быть заменен другим, который получается, если продолжить заземленный излучатель его зеркальным изображением, а землю считать устраненной. Таким образом, новый излучатель рассматривается как находящийся в свободном пространстве. Такой же метод зеркальных изображений можно применить и в случае не вертикального излучателя. Будем исходить теперь из некоторого определенного временного и пространственного распределения тока в излучателе. Вычисляя поля от каждого элемента излучателя по формуле (1) и затем интегрируя по всему излучателю, найдем напряженность поля в любой точке волновой зоны. Таким путем Абрагам вычислил логарифмический декремент затухания вертикальной антенны. Этот прием, как замечает

¹ M. Abraham. Phys. Zs., 2, 329, 1901.

и сам Абрагам, не является строгим, но так как полученные результаты согласуются очень хорошо со строгой теорией и удовлетворительно с экспериментом, то мы будем вместе с Абрагамом считать, что данный способ можно с пользой применить там, где строгая теория бессильна.

В направленной телеграфии, где на первых порах вопрос ставится с качественной стороны, достаточным является упрощенное рассмотрение, в котором отвлекаются от неравномерного распределения тока вдоль излучающего провода и подразделяют последний на возможно меньшее число элементов.

Замечу здесь, что для возможности безоговорочного применения выражений Герца мы должны предположить, что земля является проводящей плоскостью. Очень вероятно, что благодаря этому мы отвлекаемся от многого, что могло бы быть весьма существенным для объяснения опытных данных.

Однако разработанной теории, учитывающей влияние земли, не существует. Как проф. Браун, так и Флеминг ведут расчеты, исходя из этого упрощающего предположения, пользуясь формулами Герца. Я хочу сначала именно с этой точки зрения рассмотреть обе системы и их теорию. Следует впрочем отметить, что и с указанным выше упрощающим предположением во многих случаях можно получать о рассматриваемых явлениях правильное представление.

Мне хотелось бы сделать здесь еще одно замечание. Формулы Герца получены в предположении, что колебания незатухающие. Но на практике почти всегда имеют дело с затухающими колебаниями. Если пользоваться такими колебаниями, то надо иметь в виду следующее.

Если логарифмический декремент затухания мал или, шире говоря, если имеется колебание вида $A \sin nt$, причем A хотя и меняется со временем, но очень медленно по сравнению с $\sin nt$, то пренебрежение изменением A приведет лишь к небольшой ошибке. Для этого необходимо также, чтобы отдельные колебания имели одинаковую форму, т. е. чтобы их амплитуда была одной и той же функцией времени. Если это не имеет места, то пренебрежение изменением A во времени может привести даже к качественным ошибкам.

Перехожу теперь к обсуждению отдельных методов.

Проф. Браун описал устройство своего направленного передатчика в „Electrician“, а также в первом выпуске этого журнала.¹

¹ F. Braun. Jahrb. d. dr. T. u. T. 1, 6, 1907, а также L. Mandelstam und W. Paralex, Phys. Zs. 7, 303, 1906 [статья 3, стр. 101].

Принцип метода следующий. Применяется две или большее число антенн, расположенных на известных расстояниях друг от друга. К этим антеннам подводятся колебания, имеющие одинаковую частоту, но сдвинутые по фазе. В произвольной точке будет иметь место геометрическая сумма отдельных полей, создаваемых независимо каждым излучателем. Ясно, что здесь получится несимметричное излучение, причем эта асимметрия 1) обуславливается сдвигами фаз и 2) разностями хода, которые определяются расположением излучающихся проводов (расстояния, ориентация). Действие устройства в принципе совершенно аналогично оптической интерференции. Поэтому я не вижу необходимости глубже входить здесь в теорию, особенно благодаря тому, что проф. Браун в своей статье произвел полное вычисление для одного случая. Я хочу только заметить, что рассуждения, относящиеся к асимметрии излучения, включая сюда и область оптики, справедливы для волновой зоны. Для расстояний, встречающихся на практике, их можно, таким образом, применять безоговорочно.

Легко видеть, что большое число соответствующим образом расположенных излучающих проводов создаст направленное действие и в том случае, когда все текущие в них токи синфазны. Однако введением фазовых сдвигов требуемый результат может быть достигнут при меньших расстояниях между отдельными проводами, и притом более совершенным образом. Эти расстояния не должны быть малыми по сравнению с длиной волны и в системе Брауна. В противном случае действие многих излучателей можно было бы мыслить замененным действием одного, в котором течет ток, равный геометрической сумме отдельных токов, и тогда мы имели бы дело с симметричным излучателем.

Проф. Браун уже сам подчеркнул, что в действительности обстоятельства сложнее тех, которые принимаются во внимание при вычислениях: „1. Колебания не независимы друг от друга. 2. Простые колебания одной частоты получаются лишь в случае самой слабой связи. 3. Речь идет о том, чтобы создать такие условия, при которых в точке наблюдения не было бы поля в начале колебаний, если там не должно быть никакого поля и в течение прохождения этих колебаний. Это обстоятельство легко поддается расчету. 4. Наконец, колебания являются затухающими“.

В отношении последнего пункта необходимо заметить следующее.

Пренебрежение затуханием в устройстве Брауна едва ли может иметь большое значение, так как колебания, излучаемые отдель-

ными антеннами, имеют одинаковую форму. Это получается из-за устройства, создающего сдвига фаз. Отдельные антенны получают между собой фазовый сдвиг благодаря тому, что колебательные контуры возбуждаются с временным сдвигом. Так как колебания в контурах независимы, то легко достигается идентичность формы кривых. Неприятным является обстоятельство, упомянутое в пункте 3. Однако можно считать, что на первый импульс приемник реагирует очень мало, поскольку все обычные приемники основаны на принципе резонанса и колебания начинаются с малых значений. Это предположение подтверждается соответствующими опытами.

Опыты делались на расстояниях, настолько больших по сравнению с длиной волны, что здесь уже имела место волновая зона. Эти опыты в основном подтвердили теоретические представления и выкладки. Как уже упоминалось, можно предполагать, что устройство будет функционировать столь же эффективно и на еще больших расстояниях.

Для того чтобы излучение сделать несимметричным, Маркони пользуется следующим устройством. Антенна поднимается не прямо вверх, а изгибается. Некоторая ее часть вертикальна, но большая часть горизонтальна. Такая антенна с изломом должна обладать свойством излучать несимметрично и притом сильнее в направлении, противоположном направлению ее свободного конца.

К несколько более подробной дискуссии опытов Маркони и аналогичных опытов Флеминга я вернусь ниже. Перейдем теперь к теории, которую дал Флеминг для излучения изогнутой антенны.

Флеминг заменяет этот изогнутый излучатель двумя взаимно перпендикулярными элементами тока одинаковой силы. Действие земли, рассматриваемой как идеальное зеркало, может быть заменено зеркальным изображением обоих элементов тока. Таким образом, сформулированная Флемингом задача сводится к следующему: требуется найти поле от осциллятора, изображенного на рис. 1, причем надо представлять себе, что в сторонах ab , bc , cd текут одинаковые токи. Весь осциллятор находится в свободном пространстве, и мы можем без дальнейшего применить формулы, введенные Герцем для излучения элемента тока. Флеминг рассматривает поле в экваториальной плоскости, соответствующее полю на земной поверхности.

Согласно Герцу, ясно прежде всего, что поле, создаваемое осциллятором, изображенным на рис. 1, на больших расстояниях или в „волновой зоне“, совсем не зависит от направления, а во

всей экваториальной плоскости является функцией только расстояния. Для элемента тока bc это следует из соображений симметрии. Горизонтальные компоненты от элементов ab и cd взаимно уничтожаются также на основании симметрии, а вертикальные, будучи порядка dz/r , на больших расстояниях совсем не играют роли. Если Флеминг получает иные результаты, то это происходит из-за ошибок в рассуждениях и вычислениях, как это и будет показано далее.

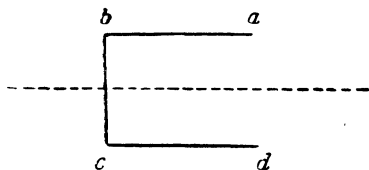


Рис. 1

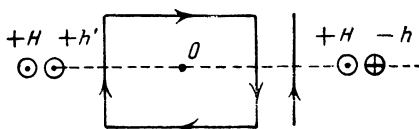


Рис. 2

Количественное рассуждение Флеминга состоит в следующем. Надо определить магнитное поле в окрестности проводника, изображенного на рис. 1. Флеминг представляет себе сперва прямоугольный контур, показанный на рис. 2, и рассуждает так: „примем, что ток течет вокруг этого контура по часовой стрелке. Этот ток возбуждает тогда магнитное поле, направление которого на поверхности земли перпендикулярно к плоскости контура и которое на равных расстояниях от средней точки, по обе стороны прямоугольника, направлено к наблюдателю. Представим теперь себе провод той же длины, что и вертикальная сторона прямоугольника, помещенный вблизи от нее, и предположим, что в нем течет ток, противоположный по направлению току в соседней с ним стороне прямоугольника (пусть это будет правая сторона). Тогда магнитное поле, создаваемое этим прямолинейным током, направлено с правой стороны от наблюдателя, а с левой стороны — к наблюдателю. Вследствие этого общее поле, вызываемое токами в замкнутом и в открытом проводах, с правой стороны слабее, чем с левой, так как на одной стороне поля складываются, а на другой действуют друг против друга. Теперь мы можем оба направленных в противоположные стороны тока в соседних проводах сблизить настолько, что они будут взаимно уничтожать друг друга; затем мы можем мысленно отбросить провода, лежащие под поверхностью земли, без того, чтобы поле над землей от этого как-нибудь изменилось. Следовательно, мы приходим к заключению, что антенна, состоящая

из вертикальной и горизонтальной частей, излучает сильнее всего в направлении, противоположном тому, куда показывает ее свободный конец.“

Это, цитируемое буквально, рассуждение Флеминга не свободно от возражений, поскольку оно и качественно не приводит к правильному результату.

На рис. 2 поле h не равно полю h' . В зависимости от значений, которые имеют величины h , h' , H , поле $H+h'$ может быть как больше, так и меньше, чем $H-h$. В действительности имеет место именно этот последний случай, как это будет показано ниже.

Математическое рассмотрение проблемы изложено Флемингом в основном в двух различных работах. Каждую из этих статей я буду дискутировать отдельно, тем более что сам Флеминг, хотя он и рассматривает в обеих работах один и тот же случай, приходит к существенно различным (и в обоих случаях ошибочным) результатам.

Выведенная Флемингом в „Proc. of the Roy. Society“ вертикальная компонента электрического поля e равна

$$e = \left\{ \varphi (m^2 r^2 - 1) + \frac{M \cdot 3}{2v m r} \cos \theta \right\} \frac{\sin X}{r^3} + \\ + \left\{ \varphi m r - \frac{M}{2v} (m^2 r^2 + 3) \cos \theta \right\} \frac{\cos X}{r^3}. \quad (2)$$

Эта формула будет правильна, если $\cos \theta$ заменить на $-\cos \theta$. На это обстоятельство обратил внимание Уллер.² Он указал также, что при правильном знаке получается поведение поля, как раз противоположное тому, какое получил Флеминг и какое соответствует его опытам и опытам Маркони. Уллер показал также, где вкралась эта ошибка.

При дискуссии этой формулы и соответствующей ей для магнитного поля, Флеминг допускает дальнейшую ошибку.

Формула (2), или правильная формула

$$e = \left\{ \varphi (m^2 r^2 - 1) - \frac{M \cdot 3}{2v m r} \cos \theta \right\} \frac{\sin X}{r^3} + \\ + \left\{ \varphi m r + \frac{M}{2v} (m^2 r^2 + 3) \cos \theta \right\} \frac{\cos X}{r^3}, \quad (2a)$$

может быть получена следующим образом.

¹ Здесь φ — электрический момент осциллятора bc , $\frac{M}{n} = \varphi dy$, $X = mr - nt$, v — скорость света, r — расстояния от 0 до точки наблюдения, $2\pi/m$ — длина волны, $2\pi/n$ — период, θ — угол между r и y в экваториальной плоскости.

² Uller. Phys. Zs. 8, 193, 1907.

В произвольной точке экваториальной плоскости поле от отдельных элементов вычисляется по формулам Герца. Тогда в соответствующие выражения для поля входят координаты средних точек отдельных элементов ab , bc , ad . Эти выражения разворачиваются в ряды до членов первого порядка относительно dz/λ и соответственно dy/λ . В формулах остается при этом только расстояние от точки наблюдения до средней точки 0 на рис. 2. Доли от ab , bc , cd теперь суммируются и получается формула (2а).

Флеминг также удовлетворяется этим приближением. Если из (2а) определять амплитуду поля, то, очевидно, не следует сохранять величины второго порядка и принимать их во внимание при дискуссии формулы.

Амплитуда магнитного поля H будет, например,

$$H = \frac{1}{r^3} \left[(\varphi m^2 r^2 v)^2 + \left(\varphi v m r + \frac{M}{r} m^2 r^2 \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

При этом $\frac{M}{v} = \frac{2\pi dy}{\lambda} \varphi$, т. е. по сравнению с $\varphi \frac{M}{v}$ имеет порядок dy/λ . Удерживая только члены первого порядка, что соответствует поставленному условию, получим

$$H = \frac{1}{r^3} \left[(\varphi m^2 r^2 v)^2 + (\varphi v m r)^2 + 2\varphi v m^3 r^3 \frac{M}{v} \cos \theta \right]^{1/2}. \quad (3a)$$

Отсюда следует, что H имеет минимум при $\cos \theta = -1$, т. е. в направлении, обратном свободному концу антенны, что находится в противоречии с опытом. Но Флеминг пользуется формулой (3) (удерживая при этом члены второго порядка малости, что явно недопустимо, и делая упомянутую выше ошибку в знаке) и находит минимум в направлении, почти перпендикулярном к плоскости осциллятора. Хотя этот результат и совпадает с опытом, но он получается только за счет ошибочного удержания членов второго порядка.

Если рассматривать правильные формулы, то мы приходим к следующему заключению. На небольших расстояниях имеется значительная асимметрия. При увеличении расстояния она постепенно исчезает. На расстоянии порядка 10 длин волн асимметрия составляет несколько процентов, а на расстоянии порядка 100 длин волн практически отсутствует. Эта асимметрия определяется совсем не формой антенны, а выбором точки отсчета. Для того чтобы не быть неправильно понятым, я остановлюсь на этом несколько подробнее.

Если рассматривать только один вертикальный элемент, то поле симметрично относительно его средней точки. Однако для изогнутой антенны такую точку вполне строго определить нельзя. Но асимметрия здесь настолько мала и такого характера, что если при простом вертикальном осцилляторе *bc* относить расстояния к точке *O*, то асимметрия в этих условиях будет больше, чем в случае изогнутой антенны. Другими словами, горизонтальные элементы делают поле более симметричным.

Выше уже указывалось, что степень асимметрии зависит от расстояния. Это же подчеркивает в упомянутой работе и сам Флеминг, но он не делает нужных выводов. К этому вопросу я еще вернусь ниже.

В своей второй работе¹ Флеминг вычисляет асимметрию, которая должна оставаться и на больших расстояниях. Этот удивительный результат, противоречащий его собственным, приведенным выше формулам, получается так.

Он придерживается своего качественного хода мыслей, изложенного на стр. 164, и сначала вычисляет излучение прямоугольного провода. На больших расстояниях горизонтальные элементы не будут иметь значения и остаются, следовательно, оба вертикальных.

Поля, создаваемые каждым элементом в отдельности, в какой-либо точке экваториальной плоскости, надлежит складывать геометрически, что делает также и Флеминг. Вблизи от одной из вертикальных сторон прямоугольника помещается теперь проводник, обтекаемый током противоположного направления. Его поле надо сложить с полем прямоугольника также геометрически; после всех этих вычислительных операций следует возвратиться снова к исходному пункту, а именно к полю одного вертикального элемента.

Но здесь Флеминг производит алгебраическое сложение, т. е. он не учитывает различия в расстояниях до элементов, расположенных симметрично по отношению к средней точке прямоугольника. Поэтому разность ходов остается вне рассмотрения. Так как поле прямоугольника слева, скажем, положительно, а справа отрицательно, а поле прямоугольного элемента по обе стороны одинакового знака и на больших расстояниях — одинаковой величины, то Флеминг получает асимметричное излучение.

¹ Phil. Mag. 12, 588, 1906.

Таким образом, то, что делает Флеминг, заключается, очевидно, в следующем. К полю вертикального осциллятора, которое само по себе симметрично, он прибавляет и из него вычитает одну и ту же величину. Совершенно очевидно, что благодаря этому полю (при правильных вычислениях) не может сделаться асимметричным.

Резюмируем все вышесказанное: вычисления Флеминга неправильны, и поэтому совпадение с опытом является только кажущимся.

Измерения Маркони, Флеминга и других производились на расстояниях, которые не были большими по сравнению с длиной волны. При этом длина антенны также была порядка длины волны. Выражения Герца справедливы только для расстояний, больших по сравнению с длиной осциллятора. Поэтому применение выражений Герца при дискуссии подобных опытов представляется весьма сомнительным. Кроме того, в соответствии с вышесказанным нельзя результаты опытов, произведенных на малых расстояниях, безоговорочно переносить на волновую зону, с которой практически только и приходится иметь дело.

Следует еще раз подчеркнуть, что я вовсе не хочу сказать, что изогнутая антенна не может быть использована для целей направленной телеграфии, но допущение Флеминга не может дать правдоподобного объяснения действию таких антенн, а производившиеся измерения еще ничего не говорят о пригодности этого устройства для практики.

Я хочу коротко заметить еще следующее. При рассмотрении наклонной антенны, имеющей размеры, сравнимые с длиной волны, вычисления приводят к асимметричному излучению. Если представить себе наклонную антенну, составленную в виде лестницы, то все вертикальные элементы синфазны. Если же принять во внимание различие в их расстояниях до точки наблюдения, то можно ожидать появления асимметрии. Не будем сейчас обсуждать, насколько результат вычислений соответствовал бы действительным условиям.

Опыты по направленному приему производились проф. Брауном следующим образом. В качестве приемной антенны применялся косо натянутый провод. Прием оказался самым сильным, когда провод находился в вертикальной плоскости, проходящей через передатчик. Опыты делались на расстоянии около 16 км. Позже аналогичные опыты с изогнутой приемной антенной поставил Маркони.

что привело к тождественным результатам.¹ Его опыты, носившие качественный характер, проводились и на больших расстояниях. Опыты Маркони с изогнутым излучателем дали, повидимому, положительные результаты и для больших расстояний.

Таким образом, следует предполагать, во всяком случае при соблюдении известных условий, что на основе использования неvertикальных антенн может быть создано устройство, пригодное для целей направленной телеграфии.

Как было показано выше, теория Флеминга показала свою несостоятельность в объяснении действия данного устройства; поэтому приходится привлекать другие объяснения, которые были бы путеводной нитью для дальнейшего развития в этой области. Весьма вероятно, что в имеющихся здесь место явлениях большую роль играет специфическое влияние земли. В отношении приемников эта точка зрения недавно выдвигалась и обосновывалась

¹ Господин Флеминг в письме на имя редакции *Electrician* (*Electrician* 59, 729, 1907) пишет следующее: He (Marconi) did not content himself with isolated observations, but laid down in the form of polar curves a large number of metrical results furnishing the basis for an exact text of theory. He thus brought the invention to a stage at which it became practically useful on a large scale. Shortly afterwards, I myself gave the mathematical theory of the effect and showed that the results were in accordance with known facts of electric radiation. As far as I am aware Prof. Braun did not anticipate the above practical or theoretical researches.

[Он (Маркони) не ограничился отдельными наблюдениями, а привел в виде полярных кривых большое количество результатов измерений, дающих основу для точной проверки теории. Таким образом он довел изобретение до стадии, когда оно становится практически годным для использования в широком масштабе. Вскоре сам я дал математическую теорию явления и показал, что результаты согласуются с известными фактами, касающимися электрического излучения. Насколько я знаю, проф. Браун не предвосхитил указанных практических или теоретических исследований.]

После вышесказанного едва ли можно будет согласиться с точкой зрения господина Флеминга. Его теория неправильна, измерения Маркони и Флеминга не создают основы для разрешения практических вопросов, так как они проводились, как уже было сказано, на слишком малых расстояниях. Флеминг сам приводит ряд опытов, в которых степень асимметрии зависела от расстояния. Хотя он и получает более резко выраженную асимметрию на увеличенных расстояниях, однако в обоих случаях он пребывает вне волновой зоны (длина волны около 100 футов, расстояния 78 и 138 футов). Для больших расстояний остаются, таким образом, лишь качественные опыты. Что же прибавилось нового в отношении приемников, по сравнению с опытами проф. Брауна (*Phys. Zs., Mai 1903*)?

Ценнеком¹. Я не буду подробнее касаться этого вопроса, так как проф. Ценнек имеет в виду провести дальнейшую дискуссию. Материал, относящийся к влиянию земли на работу передатчиков, пожалуй, недостаточно полон, чтобы можно было провести дискуссию в одной статье.

Наконец, необходимо еще рассмотреть метод Артома. Устройство его излучателя в основном заключается в следующем. Две наклонные антенны расположены в вертикальной плоскости, перпендикулярно друг к другу и наклонены под углом в 45° к земной поверхности. К этим антеннам подводятся колебания со сдвигом фаз в 90° . Артом рассуждает далее так. Оба прямолинейных сдвинутых по фазе колебания складываются в колебание, поляризованное по кругу, и в направлении, перпендикулярном к плоскости антенн, излучают циркулярно поляризованную волну. В направлении, лежащем в самой плоскости, будет играть роль только одна компонента, а именно вертикальная. Антенны приемника устроены

точно так же, как у передатчика. Каждая из антенн соединяется с отдельной катушкой, и обе катушки одновременно действуют индуктивно на третью, в которой возникает явление интерференции. Катушки располагаются так, что если амплитуды и фазы колебаний, возникающих в антеннах, одинаковы, то результирующее действие на третью катушку исчезает. Но если из перпендикулярного направления приходит циркулярно поляризованная волна, то в антеннах получатся колебания, сдвинутые по фазе и оказывающие на третью катушку индукционное воздействие. Эта катушка обычным образом соединяется затем с детектором.

В действительности, действие этого устройства едва ли таково, как предполагает Артом. Представим себе опять обе антенны замененными двумя элементами тока. За неимением лучшего допущения, пусть вместо земли снова будет взята проводящая плоскость и ее действие заменено зеркальным изображением элементов тока. Тогда мы можем проводить наши рассуждения применительно к схеме, изображенной на рис. 3. Там указаны форма токов и их направления. Мы можем теперь каждый из токов разложить

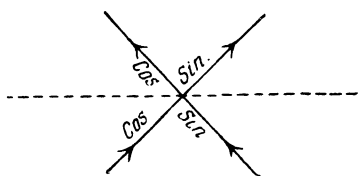


Рис. 3

¹ J. Zenneck. Ann. d. Phys. 23, 946, 1907.

на две компоненты — вертикальную и горизонтальную. Тогда сразу видно, что горизонтальные компоненты взаимно уничтожаются.

Следовательно, действие наклонных элементов может быть заменено симметричным вертикальным элементом. Это рассуждение приводит нас к выводу, что устройство Артома излучает линейно поляризованную волну и притом симметрично во все стороны. Артом не привел рассуждения, которое исходило бы из какой-либо другой предпосылки, более близкой к действительным условиям, чтобы сделать убедительной свою точку зрения.

Возможно впрочем, что направленное действие передатчика Артома следует относить к наклонному расположению антенн, и тогда следовало бы иметь в виду сказанное в этом отношении на стр. 143.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБЪЕКТИВНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЫХ И СВЯЗАННЫХ КОНДЕНСАТОРНЫХ КОНТУРАХ

[*Jahrb. der drahtl. Telegr. und Teleph.* 1, 124—129 1907]

(Поступило 5 сентября 1907 г.)

Ниже описывается метод, который позволяет простым путем получать с помощью трубки Брауна объективное изображение кривых тока при разряде конденсаторов. Кроме того, сообщается о нескольких опытах, которые представляются мне очень удобными для демонстрации процессов в связанных конденсаторных контурах.

Как известно, существует несколько методов „развертки“ движения, которое осуществляется люминесцирующим пятном под воздействием переменного поля, и получения таким способом на экране брауновской трубки неподвижной кривой. Я укажу на работы Ценнека¹ и Симона и Райха.²

На рис. 1 схематически изображена установка, которая осуществляет „развертку“ в примененном мною методе. Я хотел бы сразу же заметить, что этот метод должен служить в качестве демонстрационного. Сможет ли он быть успешно применен и для точных количественных измерений, пока не выяснено. Я хочу пояснить действие установки на основе одного опыта. На рис. 1 c_1, s_1, s_1', uc , представляет собой конденсаторный контур, кривая тока которого

¹ J. Zenneck. Wied. Ann. 69. 839, 1899.

² H. Th. Simon und M. Reich. Phys. Zeitschr. 2, 284, 1901.

должна быть изображена на экране B . Отклоняющие катушки s_1 и s_1' образуют, как обычно, часть этого контура. Под влиянием протекающего по ним тока пятно отклоняется вертикально от положения покоя.

Конденсатор c_1 при разорванном контакте прерывателя заряжается аккумуляторной батареей E (в моих опытах 120 вольт). В качестве прерывателя я применял либо хорошо отрегулированный турбопрерыватель, либо обычный ртутный прерыватель с погружающимся металлическим контактом, который приводится в движение

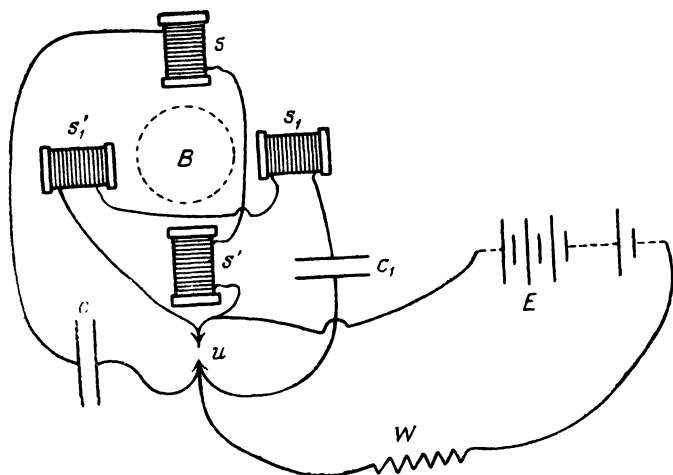


Рис. 1

маленьким мотором. При замыкании прерывателя конденсатор c_1 разряжается через катушки s_1 и s_1' . W представляет собой большое сопротивление (1000 Ω), которое служит для предотвращения больших токов в $EwuE$ при замыкании прерывателя. К полюсам того же прерывателя u присоединен второй конденсаторный контур, который составляет существенную часть установки. Функцией разрядного тока этого контура как раз и является отклонение пятна в горизонтальном направлении пропорционально времени и образование таким образом кривой тока. Емкость c заряжается от той же батареи, что и c_1 , и разряд обоих контуров начинается одновременно.

Для того чтобы получить желаемую пропорциональность между разрядным током в контуре $css'uc^1$ и временем, я поступал следующим

¹ Во многих опытах включалась только одна из катушек s и s' ; вторая при этом замыкалась накоротко.

щим образом. Контур делался аperiodическим. Отклонение пятна, которое соответствует максимальной силе тока в этом контуре, гораздо больше горизонтальных размеров экрана трубки, так что для „развертки“ используется только начало разряда. Но в этой области ток, по крайней мере приближенно, является линейной функцией времени. Остальная часть тока отбрасывает пятно за край экрана и не наблюдается. В моих опытах максимальная сила тока была примерно в пять раз больше, чем та, которая отклоняла пятно до края экрана. При этом параметры контура $css'uc$ были следующими: $c=5.4$ микрофарады, катушки s и s' имели каждая приблизительно по 16500 витков. Их сопротивление составляло приблизительно 1045 Ω , длина 10 см, внешний диаметр 5 см, внутренний диаметр 1.5 см. Внутри катушек находился пучок тонкой железной проволоки.

При уменьшении тока пятно, максимальное отклонение которого, как упоминалось выше, намного превышает размеры экрана, возвращается обратно. Но к этому времени ток в $c_1 s_1 s'_1 uc_1$ падает до столь малой величины, что пятно рисует теперь горизонтальную прямую, т. е. ось абсцисс. Для того чтобы использовать весь экран, выгодно с самого начала с помощью регулируемого магнита отклонить люминесцирующее пятно к левому краю экрана, если отклонение с помощью контура $css'uc$ осуществляется направо.

Далее видно, что зарядный ток в этой установке не может мешать, ибо если, как предположено, пятно отклоняется при разряде направо, то зарядный ток сдвигает его налево. Синхронное включение обоих контуров $c_1 s_1 s'_1 uc_1$ и $css'uc$, существенное для того, чтобы постоянно получать кривую на одном и том же месте, в описанной схеме получается, как легко видеть, непосредственно. Я хочу привести еще параметры одного из контуров, который был применен для изображения обычной разрядной кривой: $c_1—0.5$ микрофарады, s_1 и s'_1 — катушки примерно по 1750 витков с сопротивлением около 6 Ω , длиной 10 см, диаметром наружных витков 5 см, внутренних 1.5 см.

Коэффициент самоиндукции каждой катушки составлял около 0.023 генри, так что частота колебаний при параллельном включении обеих катушек равнялась приблизительно 3700 периодов в секунду. Само собой разумеется, здесь легко может быть продемонстрирована зависимость частоты от величины емкости или самоиндукции; например, в случае самоиндукции — посредством введения железного сердечника в катушку s_1 или какую-либо другую

катушку, включенную в контур. Если стержень массивный, то видно как, кроме периода колебаний, сильно возрастает и затухание. Постепенным введением омического сопротивления контур может быть непрерывно доведен до аperiodичности. При названных выше параметрах, в отсутствие железного сердечника, на экране брауновской трубки помещалось приблизительно 11 полных колебаний.

Чтобы наглядно показать процессы в двух связанных контурах, можно поступить следующим образом. Контур, который осуществляет „развертку“, остается неизменным; на рис. 2 изображены только отклоняющие катушки этого контура. С контуром $c_1 s_1 s_3$ и c_1 ,

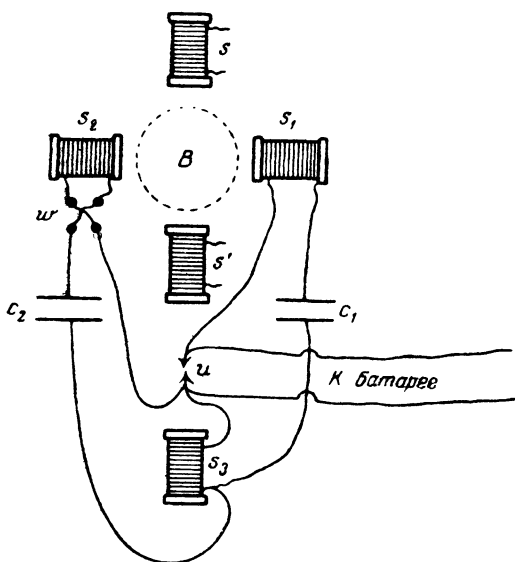


Рис. 2

который далее обозначается через I , связывается второй контур, обозначаемый в дальнейшем через II . Я избрал при опытах, как изображено на рис. 2, гальваническую связь, как более удобную. Схема соединений ясна непосредственно из рисунка. Оба контура делаются совершенно идентичными. $c_1 = c_2 = 1$ микрофараде, $s_1 = s_2$ — упомянутые выше катушки по 1750 витков. Общая самоиндукция s_3 состояла из двух соединенных последовательно катушек по 265 витков каждая (0.24Ω , остальные параметры как у s) с под-

разделенным сердечником. Как известно, в связанных контурах I и II при разряде получаются два затухающих синусоидальных колебания. Если обозначить токи в первичном и вторичном контурах через i_1 и i_2 , то

$$\begin{aligned} i_1 &= A_1 e^{-\delta t} \sin \pi n_1 t + B_1 e^{-\gamma t} \sin \pi n_2 t, \\ i_2 &= A_2 e^{-\delta t} \sin \pi n_1 t + B_2 e^{-\gamma t} \sin \pi n_2 t. \end{aligned} \quad (1)$$

Существенно, что колебания в обоих контурах имеют одинаковую частоту и почти синфазны.

Кроме того, очень приближенно справедливо соотношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (2)$$

1. Для того чтобы получить кривую i_1 , катушка s_2 удаляется от трубки настолько, что ее магнитное поле уже не оказывает влияния на пучок катодных лучей. Соответственно уравнениям (1) должны получиться колебания, которые обусловлены наложением двух синусоидальных колебаний. Рис. 3 показывает полученную кривую. Она нарисована по фотографическому снимку, равно как и кривая на рис. 4.

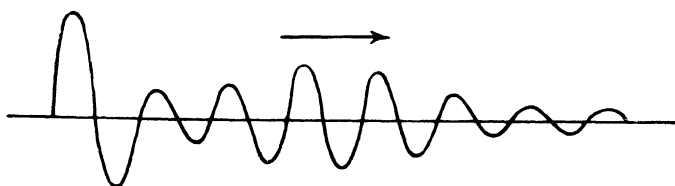


Рис. 3

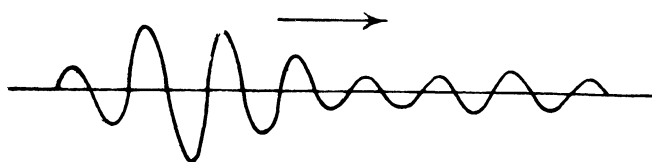


Рис. 4

2. Если удалить s_1 и заставить действовать только s_2 , то получается ход индуцированного тока рис. 4. Обе кривые, пожалуй, не нуждаются в дальнейшей дискуссии. Если изменять период колебаний первичного контура, например вдвигая в катушку железный сердечник, то сила тока во вторичном контуре падает, пока, наконец, на экране не остается горизонтальная прямая. Таким способом можно демонстрировать явление резонанса.

3. Если, напротив, как в случае 1, заставить действовать на трубку лишь катушку s_1 и расстраивать оба контура, то кривая i_1 постепенно принимает форму обычной незатухающей синусоиды.

4. Вытягивая железный сердечник из катушки s , можно изменить общую самоиндукцию, причем в нашем случае (идентичные контуры) — не нарушая этим настройку. Связь становится при этом более слабой, и в соответствии с теорией, биения делаются более медленными.

5. Для того чтобы раздельно получить на экране оба колебания, совершающиеся в связанных контурах, можно поступить следующим образом. Заставим действовать на пучок катодных лучей одновременно обе катушки s_1 и s_2 . Тогда вертикальные отклонения люминесцентного пятна будут пропорциональны $a_1 i_1 + a_2 i_2$, где a_1 и a_2 — коэффициенты пропорциональности, или — если подставить вместо i_1 и i_2 их значения из (1), — пропорциональны

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2) e^{-\delta t} \sin \pi n_1 t + (a_1 B_1 + a_2 B_2) e^{-\gamma t} \sin \pi n_2 t. \quad (3)$$

Значения a_1 и a_2 определяются *ceteris paribus* положением катушек. Перемещением одной из них можно добиться того, чтобы в выражении (3) сохранилось только одно из обоих колебаний.

Если, например, отрегулировать положение катушек так, что исчезает $a_1 A_1 + a_2 A_2$, то пятно будет, очевидно, рисовать кривую, пропорциональную $e^{-\gamma t} \sin \pi n_2 t$. Вследствие соотношения (2) для получения на экране второго колебания следует лишь обернуть направление тока в s_2 .

Если, как в моих опытах, оба контура совершенно идентичны, то и обе катушки s_1 и s_2 должны стоять симметрично относительно трубки.

Я укажу здесь на работу Фишера, который, по предложению проф. Ценнека, применил этот принцип разделения обоих колебаний, заставляя оба контура одновременно действовать на третий резонансный контур.¹ Если включить во вторичный контур переключатель w , то можно быстро одну за другой получать все три кривые. Если переключатель разомкнут, то получают собственные колебания первичного контура. При определенном положении переключателя получается более быстрое, а при другом положении — более медленное из обоих нормальных колебаний.² Все три кривые представляют собой затухающие синусоидальные функции. В моих опытах частота собственных колебаний, общая обоим контурам, относится к частоте обоих нормальных колебаний, приблизительно как 7 к 8 и 6.

¹ С. Fischer. Ann. d. Phys. (4), 19, 182, 1906.

² [В соответствии с принятой в настоящее время терминологией, термин *Partialschwingungen*, относящийся к связанным контурам, переведен как нормальные колебания].

Можно выделить одно из нормальных колебаний и другим способом. Величины δ , γ , n_1 , n_2 , A_1/A_2 , B_1/B_2 , в выражении (1) определяются константами устройства. Но величина A_1/B_1 зависит лишь от начальных условий.

Подходящим выбором начальных условий можно достичь того, что либо A_1 , либо B_1 исчезает. В нашем случае достаточно зарядить вторичный контур до того же напряжения, что и первичный, чтобы при разряде получить в обоих контурах только одно из нормальных колебаний, а именно более низкое по частоте.

К ТЕОРИИ ИЗОГНУТОЙ АНТЕННЫ

[*Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph.* 1, 333—340, 1908]

(Поступило 10 марта 1908 г.)

Г-н Флеминг опубликовал две работы о теории изогнутой антенны.¹

Помимо того, что результаты обоих исследований противоречат друг другу, он приходит к следствиям, которые не согласуются с простыми соображениями о порядке величины ожидаемой асимметрии.²

Это обстоятельство побудило меня взяться за эту задачу независимо от рассмотрения г. Флеминга и затем, когда я пришел к иным результатам, посмотреть, где следует искать различие между нашими расчетами. Я хотел бы это заметить, так как г-н Флеминг думает, повидимому, что я поставил своей задачей проверить наличие возможных ошибок во всех его расчетах.

Первое различие касается ошибки в знаке при $\cos \theta$, на что до меня обратил внимание уже Уллер (Uller). Я уже указывал на то, что в отношении главного вопроса я придаю этому подчиненное значение. Правильный знак дает асимметрию (для не слишком больших удалений), которая отличается как раз на 180° от рас-

¹ Proc. Roy. Soc. 78, 1 (1907) и вторая — Phil. Mag. (6), 12, 558 (1906). Часть второй работы описывает опыты.

² Само собой разумеется, здесь идет речь о теории устройства рассмотренного г-ном Флемингом, а не об опытах с изогнутыми антеннами. В моей работе я рассматривал оба эти вопроса отдельно, что впрочем я ясно там подчеркнул.

считанной г-ном Флемингом и наблюдаемой вблизи изогнутой антенны. Эта ошибка не влияет, однако, на асимметрию как таковую.

Так как г-н Флеминг просит меня с целью выяснения вопроса точно указать, в чем заключается ошибка, то я хочу в последующем удовлетворить его желание.

Вообще говоря, г-н Флеминг берет осциллирующий вертикальный диполь и исследует его поле. Он смещает диполь параллельно самому себе, скажем налево, и спрашивает, каково изменение, которое претерпевает благодаря этому поле в какой-либо точке. Однако он ведет расчет так, как будто вместо диполя сдвинулась точка наблюдения (он дифференцирует по ее координатам). Это, конечно, допустимо, но только г-н Флеминг должен при этом смещать точку наблюдения вправо. Он однако смещает ее влево, и так появляется ошибка в знаке.

Я хочу теперь исследовать весь вопрос подробно; так как при этом я должен сослаться на некоторые формулы г-на Флеминга, которые не содержатся в его возражении, то я придерживаюсь определений и обозначений, которые употреблял г-н Флеминг в своей работе в „Proceedings“.

Так как прежде всего дело касается вопроса о знаке, то я считаю не лишним заранее точно сформулировать все определения, встречающиеся и в этом вопросе, несмотря на то, что уточнение некоторых определений является при этом несущественным для вопроса об асимметрии амплитуды и представляется несколько далеко идущим.

Г-н Флеминг пишет для скалярного потенциала диполя, колеблющегося в направлении оси z (полагая диэлектрическую постоянную $k=1$)

$$V = -\varphi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin(mr - nt)}{r} \right), \quad (1)$$

а для компонент вектора-потенциала

$$F = G = 0, \quad H = -\varphi n \frac{\cos(mr - nt)}{r}, \quad (2)$$

или, полагая $\frac{\sin(mr - nt)}{r} = \Pi$:

$$V = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad H = \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Здесь $2\pi/n$ означает период, $2\pi/m$ — длину волны, r — расстояние от точки (x, y, z) , в которой ищется поле (так называемой точки наблюдения), до середины диполя. φ определено следующим образом: момент вертикального диполя (рис. 1 работы в „Proceedings“ или возражения) содержит только z -компоненту; мы обозначим ее через p_z , т. е. p_z следует считать положительным для положительных направлений оси z ; p_z является периодической величиной. Тогда φ должно быть определено равенством $p_z = -\varphi \sin nt$. При этом определении φ формулы для потенциалов (1) и (2) правильны и в отношении знаков, если $\frac{\partial}{\partial z}$, как у г-на Флеминга, означает дифференцирование по z — координате точки наблюдения. То, что г-н Флеминг действительно хочет определить φ таким образом, следует, как мне кажется, из рис. 1 его возражения (ср. положение знаков $+$ и $-$ на концах диполя и направление положительных z).¹

Это обстоятельство не играет никакой роли для величины амплитуды, оно влияет только на знак полного поля в определенной точке и в определенный момент времени. Поэтому я в своей работе совсем не упоминал об этом вопросе.

Напряженности поля получаются из потенциалов путем дифференцирования по времени и по координатам x, y, z точки наблюдения, как это делает и г-н Флеминг.

Вычисление поля трех диполей (рис. 2 г-на Флеминга) г-н Флеминг производит следующим образом: он смещает вертикальный диполь на отрезок $-\delta y/2$ и помещает два горизонтальных диполя с противоположно направленными токами на расстояниях $\pm \delta z/2$, где δy обозначает длину горизонтального, а δz — длину вертикального диполя.

Если средняя точка его рис. 2 имеет координаты x', y', z' (я обозначу ее через O), то в уравнениях (1) и (2), относящихся к вертикальному диполю со средней точкой в O , r определяется из

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \quad (3)$$

Мы получим потенциал диполя, сдвинутого на расстояние $-\delta y/2$, подставляя в r вместо (x', y', z') : $x', y' - \frac{\delta y}{2}, z'$, так что, например,

$$V = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) \delta y. \quad (4)$$

¹ В его работе в „Proceedings“ можно было из рис. 1 и текста прятти к выводу, что он определяет φ из уравнения $p_z = \varphi \sin nt$. Тогда знаки в (1) и (2) должны были бы быть противоположны. То же справедливо для φ' (см. далее).

Само собой разумеется, при этом мы ограничиваемся членами первого порядка относительно $\delta y/\lambda$, ибо (4) представляет собой ведь не что иное, как разложение в ряд, оборванный на членах первого порядка.

Г-н Флеминг пишет, однако,

$$V = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) \delta y$$

и таким образом вместо того, чтобы смещать на $-\delta y/2$ среднюю точку диполя, он смещает на $-\delta y/2$ точку наблюдения. Однако две эти операции, как уже замечено во введении, не эквивалентны. Смещению средней точки диполя на $-\delta y/2$ соответствует смещение точки наблюдения на $+\delta y/2$. Из (3) и (1) и (2) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y'}$$

Следовательно, если вместе с г-ном Флемингом мы захотим сохранить только дифференцирование по (x, y, z) , то формула (4) примет вид

$$V = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) \delta y,$$

вместо имеющейся у Флеминга

$$V = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) \delta y.$$

Точно так же скалярный потенциал горизонтального диполя получается в виде

$$V = -\varphi' \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z' \partial y} \delta z, \quad \text{или} \quad +\varphi' \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y} \delta z$$

(где φ' определено из следующих уравнений. Горизонтальный диполь с координатой $+\delta z/2$ имеет только y -компоненту момента p_y . Тогда φ' определяется из $p_y = -\varphi' \sin nt$). Та же ошибка в знаке, что и в (4), должна быть исправлена и в выражениях для вектора-потенциала. Если положить вместе с г-ном Флемингом $\varphi \delta y = \varphi' \delta z = \frac{M}{n}$,

то для скалярного потенциала и компонент вектора-потенциала всех трех диполей получится

$$\varphi = -\varphi \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{M}{2n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z},$$

$$G = -\frac{M}{n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial t}, \quad H = \varphi \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{M}{2n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}.$$

Если сравнить эти формулы с соответствующими формулами (12) г-на Флеминга („Proceedings“), то видно, что последние становятся верными, если заменить в них M через $-M$. Эта ошибка, разумеется, проходит через все дальнейшие расчеты. Конечный результат становится, таким образом, правильным, если M заменить в нем через $-M$, или, так как там встречается только произведение $M \cos \theta$, если $\cos \theta$ заменить на $-\cos \theta$, как это утверждали Уллер и я.

Более существенным, чем вопрос о знаке, кажется мне, однако, тот факт, что расчет рассматриваемого г-ном Флемингом устройства дает на всех практически важных удалениях лишь совершенно пренебрежимую асимметрию.

Впрочем при обсуждении этой асимметрии г-н Флеминг вновь повторяет в своем возражении ошибку, на которую я также обратил внимание в моей статье. Представляется уместным коснуться еще раз и этого вопроса. Кроме того, я хочу показать порядок получающейся асимметрии, и тогда будет видно, что уже на малых расстояниях она практически совершенно несущественна. Как уже упомянуто, для этого последнего вопроса дискутированный выше знак не имеет значения.

Я провожу рассмотрение для амплитуды магнитного поля, но только на том основании, что все выражения становятся при этом проще. Существенно тот же результат справедлив и для напряженности электрического поля.

Амплитуда H магнитного поля есть

$$H = \frac{1}{r^3} \sqrt{(\varphi m^2 r^2 v)^2 + \left(\varphi v m r + \frac{M}{2} m^2 r^2 \cos \theta \right)^2}^1. \quad (5)$$

¹ В моей статье в этом месте имеется опечатка. Вместо $\frac{M}{r} m^2 r^2 \cos \theta$ должно быть $\frac{M}{2} m^2 r^2 \cos \theta$. То же самое относится к (2а).

Эта формула должна рассматриваться только как приближенная, и поэтому из нее нельзя заключать, как это делает г-н Флеминг, что H имеет минимум при $\varphi \sin \tau + \frac{M}{2} m^2 r^2 \cos \theta = 0$, так как при этом, очевидно, принимаются во внимание члены, имеющие по отношению к главному порядок $(\delta y/\lambda)^2$, поскольку $\frac{M}{v} = \frac{2\pi \delta y}{\lambda} \varphi$. Формула же (5) выведена при условии, что членами этого порядка можно пренебречь. Иными словами, она ничего не говорит о членах порядка $(\delta y/\lambda)^2$. Если r так велико, что уравнение

$$\varphi \sin \tau + \frac{M}{2} m^2 r^2 \cos \theta = 0$$

вообще может быть удовлетворено, то это означает, что весь второй член под корнем выражения (5) имеет порядок малости $(\delta y/\lambda)^2$ по отношению к главному члену. Тогда интерпретация этой формулы такова: в пределах той точности, при которой справедлива формула (5), никакая асимметрия в этом случае не имеет места.

Я хочу пояснить на простом примере, что при несоблюдении этого правила можно прийти к совершенно неверным результатам. Положим, что имеется осциллирующая величина $f = \sin(nt + \alpha \cos \theta) + \beta \cos nt$, где α — небольшое положительное число, β и n — данные величины, β положительно. Спрашивается, при каком значении θ амплитуда F величины f становится наименьшей. Строгий расчет дает

$$F = \sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \sin(\alpha \cos \theta)},$$

т. е. F_{\min} получается при $\cos \theta = -1$.

Пусть теперь расчет с самого начала проводится в первом приближении по отношению к α ; тогда

$$f = \sin nt + (\alpha \cos \theta + \beta) \cos nt,$$

$$F = \sqrt{1 + (\alpha \cos \theta + \beta)^2}.$$

Если сделать отсюда заключение, что F имеет минимум при $\alpha \cos \theta + \beta = 0$, то это, конечно, будет неверно, в чем легко убедиться сравнением со строгим решением. Получается $\cos \theta = -\beta/\alpha$, и если β очень мало по сравнению с α , то мы имели бы F_{\min} .

при $\cos \theta = 0$. Формула $F = \sqrt{1 + (\alpha \cos \theta + \beta)^2}$ справедлива только до членов первого порядка.

Для произвольного β было бы

$$F = \sqrt{1 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \theta},$$

и это, в согласии со строгим расчетом, дает

$$F_{\min} \text{ для } \cos \theta = -1.$$

Само собой разумеется, в этом последнем случае правильность F гарантирована только до членов порядка α^2 .

Мы получаем, таким образом, зачеркивая члены с M^2 ,

$$H = \frac{1}{r^3} \sqrt{(\varphi m^2 r^2 v)^2 + (\varphi v m r)^2 + \varphi v m^3 r^3 M \cos \theta}.$$

Для не слишком больших удалений H_{\min} получается при $\cos \theta = -1$, в противоположность результату г-на Флеминга и наблюдениям.

Вычислим теперь величину асимметрии, или, иными словами, выражение

$$\frac{H_{\max} - H_{\min}}{(H_{\max} + H_{\min})/2}.$$

Так как $\frac{M}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta y \cdot \varphi$, то

$$H = \frac{\varphi m^2 r^2 v}{r^3} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 r^2} + \frac{\delta y}{r} \cos \theta}$$

и

$$\frac{H_{\max} - H_{\min}}{(H_{\max} + H_{\min})/2} \approx \frac{\delta y}{r}.$$

Отношение разности экстремальных значений амплитуды к среднему значению обеих величин приблизительно равно, таким образом, отношению

длина горизонтальной части антенны
расстояние

Если, например, $\delta y = 100m$, что, наверное, является не слишком малым, то асимметрия на расстоянии 5 км составляет всего лишь около 2%.

Ясно, что такая асимметрия не имеет практического значения. При этом, конечно, нельзя сказать, что расстояние, которое в 50 раз больше, чем длина горизонтальной части антенны, может быть названа „extremely large“.¹

Положение вещей станет, может быть, еще яснее, если интерпретировать последний результат следующим образом. В определенном направлении A , на известном удалении от середины устройства, напряженность поля меньше, чем на том же удалении в противоположном направлении B . Пусть направления A и B соответствуют экстремальным значениям. Если мы удалимся в направлении B на отрезок, приблизительно равный горизонтальной части антенны, то на этом удалении в направлении B поле станет уже меньше, чем для первоначального удаления в направлении A .

Если коротко суммировать, получается следующее: в своей первой работе („Proceedings of Royal Society“) г-н Флеминг допускает продискутированную выше ошибку в знаке и, кроме того, вследствие неверной интерпретации своих формул, приходит к ошибочным выводам относительно характера асимметрии.

При правильной интерпретации его формулы, независимо от упомянутой ошибки в знаке, дают лишь практически пренебрежимую асимметрию излучения.

Во второй работе („Philosoph. Magazine“) г-н Флеминг также получает неверные результаты, которые противоречат его собственным результатам в первой работе. Этой последней работы я подробнее коснулся в моей статье. Так как г-н Флеминг в своем возращении вообще не касается этой части моей статьи, то я полагаю что он сам не считает правильным результат теоретической части своей второй работы.

¹ [чрезвычайно большим].

К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ

[*Phys. Zs.* 9, 308—311, 1908]

(Поступило 13 марта 1903 г.)

В двух недавно вышедших статьях¹ я попытался ответить на следующий вопрос, который, как мне кажется, имеет принципиальный интерес: получается ли из той модели, которая является в настоящее время общепринятой в качестве основы электромагнитных теорий дисперсии, поглощение при регулярном процессе, например, при прохождении плоской волны, в результате того, что часть энергии рассеивается резонаторами посредством излучения? Г-н Планк в своей теории дисперсии ответил на этот вопрос положительно. Напротив, двумя различными путями я пришел к тому результату, что в оптически однородной среде такое рассеяние не может иметь места.

Другими словами, я пришел к заключению, что планковская модель вообще не может дать никакого представления об ослаблении проходящей волны.

В частности, в моей второй статье² показано, как я полагаю, что противоположный результат г-на Планка должен быть объяснен безупречным расчетом.

Г-н Планк³ считает мой расчет неверным. Из его мотивировки я заключаю, что был неправильно понят. Г-н Планк говорит между

¹ L. Mandelstam. *Phys. Zs.*, 8, 603, 1907; *Ann. d. Phys.* (4), 23, 626, 1907; Статья 5 (стр. 125) и 4 (стр. 109)].

² I. c., в этом журнале.

³ M. Planck. *Phys. Zs.*, 8, 906, 1907.

прочим: „Если, как это делает г-н Мандельштам в противоположность обычному и примененному также и мною упрощенному представлению, использовать при рассмотрении содержащихся в малой сфере резонаторов, вместо среднего по времени значения их моментов, отдельные значения, то при этом точность во всяком случае повышается на один порядок“.

Я вовсе не хотел вести расчет точнее, чем это делает г-н Планк. Предел точности, которого хочу придерживаться и я, установлен им самим благодаря тому, что в уравнении движения резонатора¹ он сохраняет член с $\ddot{\mathbf{r}}$. Я указывал, однако, на то, что при расчете разности между средним значением напряженности поля и возбуждающей силой г-н Планк не придерживается этой точности, поскольку он пренебрегает членами порядка $\ddot{\mathbf{r}}$, и что учет всех членов этого порядка дает при $\ddot{\mathbf{r}}$ коэффициент, равный нулю. Как показано вначале, принципиальный вопрос о поглощении решается этим противоположно тому, как у г-на Планка. Ввиду того, что я остаюсь при убеждении в полной справедливости моего результата, я хочу еще раз коснуться этого вопроса подробнее.

Я изберу несколько отличное представление, которое кажется мне физически более естественным и которое одновременно опровергает возражение г-на Планка, будто бы мой результат явился следствием невнимания к тому обстоятельству, что отдельные резонаторы обладают различными моментами.²

Я вновь исхожу из следующих основных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}, & \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{E}} + 4\pi N \bar{\mathbf{p}}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}. \end{aligned} \right\}^3 \quad (1)$$

Здесь N обозначает число резонаторов в единице объема, c — скорость света в вакууме; $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{H}}$, $\bar{\mathbf{p}}$ — средние значения соответственно напряженностей электрического и магнитного поля и электрического момента резонаторов. Мы должны представлять себе эти средние значения построенными следующим образом. Выделим

¹ M. P l a n c k. Sitzungsber. d. Königl. Preus. Akademie 24, 486, 1902, ур-ние (19).

² Насколько я вижу, расчет, намеченный г-ном Планком (l. c.), также не приводит к изменению моих результатов.

³ Эти уравнения приводятся в рассматриваемом случае к простому виду [см. ниже уравнение (1a)]

в пространстве объем R , линейные размеры которого малы по сравнению с длиной волны, но который содержит еще очень много резонаторов. Если обозначить через \mathbf{E}_p истинную напряженность поля в произвольной точке P объема R , то

$$R\bar{\mathbf{E}} = \int_R \mathbf{E}_p d\tau.$$

Если, далее, p означает момент произвольного резонатора, содержащегося в R , то

$$N_1 \bar{p} = \sum p,$$

где N_1 обозначает число резонаторов в R .

Я рассматриваю линейно поляризованное колебание, скажем линейно поляризованную плоскую волну, так что я могу ограничиться рассмотрением одной компоненты, например z -компоненты напряженности электрического поля и момента. Таким образом, при дальнейших рассуждениях я всегда буду понимать под напряженностью электрического поля и моментом z -компоненты этих величин. Исключением \bar{H} уравнения (1) приводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + 4\pi N \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial z^2}. \quad (1a)$$

Необходимо составить теперь уравнение, связывающее $\bar{\mathbf{E}}$ и \bar{p} .

Я представляю объем R разделенным на ячейки таким образом, что каждая ячейка содержит только один резонатор. Так как расстояние между двумя резонаторами всегда очень велико по сравнению с линейными размерами самих резонаторов, то это же самое справедливо и по отношению к линейным размерам ячеек.

Объемы ячеек мы можем представлять себе одинаковыми так, что объем C каждой из них имеет величину

$$C = \frac{1}{N}.$$

Если теперь мы обозначим через E_c значение напряженности поля, усредненное по одной ячейке, то

$$N_1 \bar{\mathbf{E}} = \sum^{N_1} E_c. \quad (2)$$

Рассмотрим произвольный резонатор \mathfrak{N} . Я представляю себе, что резонаторы образованы подвижными электронами с полным зарядом e и постоянной плотностью ρ , которые удерживаются в положении равновесия квазиупругой силой. Никаких специальных предположений о природе этой силы не делается; она принадлежит к внутренним силам резонатора. Пусть все резонаторы построены одинаково. Чтобы получить уравнение движения электрона, надо приравнять нулю сумму F всех сил, действующих на электрон, т. е.

$$F = 0.$$

F состоит из электрической и электромагнитной частей. В согласии с h -ном Планком и другими авторами, мы ограничимся рассмотрением членов, линейных по отношению к напряженности поля, скорости и их производным по времени. Поэтому электромагнитную часть силы мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Разложим E_c на два слагаемых

$$E_c = E_{1c} + E_{2c}, \quad (3)$$

где E_{1c} означает среднее значение напряженности того поля, которое создано извне, а E_{2c} — среднее значение части, которая вызывается электроном резонатора, находящегося в ячейке. Разложим соответственно F .

$$F = F_1 + F_2 = 0. \quad (4)$$

F_1 означает часть силы, которая действует на электрон извне; F_2 — внутренние силы резонатора. Из (3) и (4) мы получаем

$$E_c = \left(E_{1c} - \frac{F_1}{e} \right) + \left(E_{2c} - \frac{F_2}{e} \right). \quad (5)$$

Величина, стоящая в первой скобке, не зависит от момента резонатора \mathfrak{N} . Она равна разности между средним, по ячейке, значением внешней напряженности поля и значением этой внешней напряженности в точке, в которой находится резонатор. С одинаковой вероятностью эта разность может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому вероятное значение суммы

$$\sum \left(E_{1c} - \frac{F_1}{e} \right)$$

по большому числу ячеек равно нулю.

Необходимо вычислить теперь

$$E_{2c} - \frac{F_2}{e}.$$

Имеем

$$\frac{F_2}{e} = - \frac{\rho}{2e\tau c^2} \int_{\tau} d\tau' \int_{\tau} \frac{r^2 + (z' - z)^2}{r^3} d\tau \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3} - \alpha p. \quad (6)$$

τ означает объем электрона, $-\alpha p$ — квазиупругая сила.

Коэффициент при $-d^2 p/dt^2$ представляет собой не что иное, как m/e^2 , где m — масса электрона.

Далее,

$$E_{2c} = - \frac{\rho}{2e C c^2} \int_C d\tau' \int_{\tau} \frac{r^2 + (z' - z)^2}{r^3} d\tau \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3} - \frac{1}{C} \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial z'} d\tau, \quad (7)$$

так как для каждой точки P ячейки

$$E_{2p} = - \frac{\rho}{2e c^2} \int_{\tau} \frac{r^2 + (z' - z)^2}{r^3} d\tau \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3} - \frac{\partial \varphi}{\partial z'}. \quad (8)$$

Здесь r означает расстояние между точкой $P(x', y', z')$ ячейки и точкой (x, y, z) электрона в определенный момент; φ — электростатический потенциал, также в определенный момент, т. е. электростатический потенциал электрона, сдвинутого из положения покоя на расстояние p/e .

Мы хотим и можем отбросить в первой части уравнения (7) среднее значение электростатического поля, которое электрон создает, находясь в своем положении равновесия. Мы можем это сделать потому, что это поле обладает не зависящим от времени потенциалом и поэтому выпадает из уравнения (1). Мы хотим это сделать для того, чтобы преобразовать выражение E_{2c} к удобному виду.³

¹ Ср. Н. А. Lorentz. Encyklopädie der Math. Wissenschaft, V, 2, 190, 1904.

² Ср. Н. А. Lorentz. l. c., стр. 189 сл.

³ Физически это имеет, очевидно, следующий смысл: молекула в состоянии покоя нейтральна. Таким образом, имеется заряд, который во всяком случае на больших расстояниях дает потенциал, равный по величине и противоположный по знаку потенциалу от подвижного электрона в его положении покоя.

Обозначим потенциал покоящегося электрона через φ_1 и вычислим выражение

$$B = - \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'} \right) d\tau.$$

Имеем

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'} \right) d\tau = \int (\varphi - \varphi_1) \cos(\nu z) d\sigma,$$

где интегрирование распространяется по поверхности σ ячейки (ν — внешняя нормаль); φ получается из φ_1 в результате того, что электрон сдвинут в направлении оси z на небольшой отрезок p/e . Так как этот отрезок очень мал по сравнению с размерами ячейки, то мы можем написать

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{p}{e} = p \frac{\cos(rz)}{r^2}$$

и, таким образом,

$$B = - p \int \frac{\cos(rz) \cos(\nu z)}{r^2} d\sigma.$$

B , вообще говоря, не имеет определенного значения, пока не сделано какого-либо предположения о форме ячейки. Однако можно приписать B определенное значение, исходя из следующих соображений.

Разбиение на ячейки, а значит и форма каждой ячейки, совершенно не зависима от выбора поляризации. Мы можем, например, сохранить точно такое же подразделение на ячейки, но принять за направление поля ось y .

При этом B имело бы значение B' :

$$B' = - p \int \frac{\cos(ry) \cos(\nu y)}{r^2} d\sigma,$$

или, соответственно,

$$B'' = - p \int \frac{\cos(rx) \cos(\nu x)}{r^2} d\sigma.$$

В качестве вероятного значения B мы можем, таким образом, рассматривать среднее значение из этих трех различных величин.

Но тогда получается

$$\begin{aligned} B &= - \frac{p}{3C} \int \frac{\cos(\nu z) \cos(rz) + \cos(\nu y) \cos(ry) + \cos(\nu x) \cos(rx)}{r^2} d\sigma = \\ &= - \frac{4\pi}{3C} p = - \frac{4\pi N}{3} p \end{aligned}$$

и уравнение (7) при этом гласит

$$E_{2c} = -\frac{\rho}{2e C c^2} \int_0^r d\tau' \int_{\tau} \frac{r^2 + (z' - z)^2}{r^2} d\tau \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3} - \frac{4\pi N}{3} p. \quad (7a)$$

Обозначим коэффициент при $d^3 p/dt^3$ в уравнении (7a) через A . При использовании (6) и (7a) уравнение (5) принимает тогда вид

$$E_c = \left(E_{1c} - \frac{F_1}{e}\right) + \left(\frac{m}{e^2} - A\right) \frac{d^2 p}{dt^2} + \left(\alpha - \frac{4\pi N}{3}\right) p. \quad (9)$$

A очень мало по сравнению с m/e^2 , так как A и m/e^2 являются, как показывают уравнения (6) и (7), средними значениями одного и того же выражения, а именно первого интеграла в уравнении (8), но m/e^2 есть среднее значение по объему электрона, в то время как A — среднее по очень большому сравнительно с электроном объему ячейки. Само же выражение, от которого берется среднее значение, вне электрона с возрастанием r убывает.

Уравнение (9) справедливо для каждого резонатора. Образум

$$\frac{1}{N_1} \sum^{N_1} E_c.$$

Учитывая сказанное относительно $\left(E_{1c} - \frac{F_1}{e}\right)$, мы получим

$$\bar{E} = \frac{m}{e^2} \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} + \left(\alpha - \frac{4\pi N}{3}\right) \bar{p}.$$

Это уравнение совместно с уравнением (1a) позволяет определить коэффициент преломления. Последний оказывается действительным. Таким образом, никакого затухания вследствие рассеяния нет.

Основной результат всего рассмотрения содержится уже в форме уравнения (9). Из нее следует, что из уравнения, связывающего \bar{p} и \bar{E} , член $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 \bar{p}}{dt^3}$, который согласно г-ну Планку обуславливает поглощение, выпадает, причем независимо от того, имеют ли остальные резонаторы тот же самый момент, или нет.

Этот результат не зависит от перехода, посредством которого из E_c получается \bar{E} ; столь же мало он зависит от значений тех членов, которые следует добавить к коэффициентам m/e^2 и α .

Это происходит, как показывают уравнения (6) и (7), по следующей причине.

Колеблющийся электрон воздействует той частью силы, которая обуславливает его собственное затухание, не только на самого себя, но и на каждый заряд e , который находится от него на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны.¹ То, что это должно быть именно так, физически очевидно. Положим, что имеются два резонатора, находящиеся друг от друга на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны. Сообщим им одинаковые, но противоположно направленные моменты и предоставим им совершать колебания без нового подвода энергии. Затухание вследствие излучения в этом случае должно быть очень мало по сравнению с затуханием вследствие излучения при колебаниях одиночного резонатора. Но это означает, что диссипативная часть силы, с которой электрон воздействует на самого себя, компенсируется соответствующей частью силы, которая действует на него со стороны другого электрона.

Страсбург,
Физический институт.

¹ Другими словами, напряженность поля колеблющегося электрона содержит на всех расстояниях, малых по сравнению с длиной волны, постоянный член $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3}$. Поэтому этот член выпадает из уравнения, связывающего напряженность поля в окрестности колеблющегося электрона с его моментом.

К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ*[Phys. Zs. 9, 641—642, 1908]*

(Поступило 8 августа 1908 г.)

Я подверг сомнению один результат дисперсионной теории г-на Планка, и по этому поводу на страницах этого журнала имела место дискуссия между г-ном Планком и мной.¹ Подчеркну еще раз, что речь идет при этом не о расчетной поправке в несущественном пункте, а о принципиальном вопросе — может ли, при сделанных предположениях относительно свойств среды, возникать рассеяние излучения, проявляющееся в виде затухания. Ввиду этого я позволяю себе еще раз взять слово. Основной результат теории г-на Планка может быть выражен следующим образом.² Если через оптически однородную среду проходит световая волна, то часть энергии рассеивается элементарными резонаторами. Рассеянная энергия равна сумме энергий, которые соответственно колебаниям каждого резонатора эмитировались бы им путем излучения в том случае, если бы в поле находился только он один. Благодаря этому получается затухание, которое может быть истолковано как поглощение.

Господин Планк заранее предполагает оптическую однородность.³ Одновременно предполагается, что размеры резонаторов

¹ L. Mandelstam. Phys. Zs. 8, 608, 1907; 9, 308, 1908 [статьи 5 (стр. 125) и 9 (стр. 162)]; M. Planck. Там же 8, 906, 1907; 9, 354, 1908.

² M. Planck. Sitzungsber. der Königl. Preus. Akademie der Wissenschaft, 22, 746, 1904.

³ M. Planck. Sitzungsber. der Königl. Preus. Akademie der Wissenschaft, 22, 479, 1902.

исчезающе малы по сравнению с их взаимными расстояниями.¹

Математически это затухание обусловлено появлением в уравнении колебания электромагнитного резонатора, находящегося под воздействием внешнего поля, члена $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3}$.

Таким образом, дискуссия касается вопроса о том, законно ли присутствие этого члена в уравнении, или нет.

Я показал,² что член $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3}$ входит только благодаря ошибке г-на Планка и при правильном расчете выпадает. Необходимо еще раз отчетливо подчеркнуть, что вычисления г-на Планка и мои обладают одинаковой степенью точности, а именно вплоть до порядка величины членов с \ddot{p} . Это значит, следовательно, что при выбранной г-ном Планком и мной точности результат г-на Планка неверен. Его теория не дает рассеяния того порядка величины, какой он указывает.

Г-н Планк возразил, однако, что его уравнения справедливы, несмотря на мои возражения, и необходимо только учесть, что различные резонаторы обладают и различными — сдвинутыми по фазе — моментами. Это означает, следовательно, что исчезнувший член $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3}$ при этом вновь должен появиться в уравнениях. Г-н Планк только наметил свой способ расчета.³ Я провел этот расчет так, как я понял указание г-на Планка, но пришел, однако, опять к своему результату, а не к результату г-на Планка, как я уже сообщил об этом в примечании к моей второй работе.⁴

Независимо от этого метода расчета, возражение г-на Планка опровергается тем, что, как я показал в моем втором сообщении, уравнения колебаний резонатора, не содержащие сомнительного члена, можно получить в такой форме, из которой следует, что моменты остальных резонаторов вообще не играют роли.

Мне непонятна направленная против этого критика г-на Планка: „К сожалению, г-н Мандельштам уклонился от обсуждения этого возражения“ и далее: „вместо разбора содержания моего возражения, г-н Мандельштам избирает другое представление, которое он считает физически более естественным“ и т. д. Во всяком

¹ M. Planck. Там же, стр. 482.

² L. Mandelstam. I. с. 8, 603; 9, 308.

³ M. Planck. I. с. 8, 906.

⁴ L. Mandelstam. I. с. 9, 309, сноска [стр. 163].

случае я рассмотрел содержание возражения г-на Планка, только я, как уже замечено выше, не следовал намеченному им способу расчета, а избрал другое представление, о котором я сказал,¹ что оно „одновременно опровергает возражение г-на Планка, будто бы мой результат явился следствием невнимания к тому обстоятельству, что отдельные резонаторы обладают различными моментами“.

Выяснению дела существенно способствовало бы, если бы г-н Планк захотел обнаружить ошибку в моих вычислениях, аналогично тому, как я сделал это по отношению к его расчету.

Если, далее, г-н Планк говорит: „Ибо момент p является функцией аргумента $t - \frac{x}{q}$, где x — волновая нормаль, а q — фазовая скорость, в то время как г-н Мандельштам в своем расчете рассматривает момент p так, как если бы он зависел только от t “, то вторая часть этого утверждения опровергается как раз доказательством — поскольку его ошибочность не доказана, — которое содержится в моей статье. Я это отчетливо подчеркнул, сказав: „Основной результат всего рассмотрения содержится уже в форме уравнения (9). Из нее следует, что из уравнения, связывающего p и E , член $\frac{2}{3c^3} \frac{d^3 p}{dt^3}$, который, согласно г-ну Планку, обуславливает поглощение, выпадает, причем независимо от того, имеют ли другие резонаторы тот же самый момент или нет“.

Если, с другой стороны, г-н Планк указывает, что он и теперь получает опять свои уравнения, то мне остается лишь предположить, что его расчеты опираются теперь на измененную основу. Справедливо ли это предположение, естественно, можно установить только тогда, когда г-н Планк сообщит свои результаты.

Страсбург,

Физический институт.

¹ I. с. стр. 305 [стр. 163].

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДЕКРЕМЕНТА И ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

[Ann. d. Phys. 33, 490—516, 1910. Совм. с Н. Д. Папалекси]

(Поступило 7 июня 1910 г.)

Метод преследует следующую задачу: имеется электромагнитная колебательная система, нужно определить форму колебательного процесса.

Принципиальные преимущества, которые этот метод представляет, как нам кажется, по сравнению с применявшимися до настоящего времени, следует упомянуть здесь же.

1. Равенство частот двух колебательных контуров указывается обращением некоторого эффекта $\left(\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt \text{-эффекта} \right)$ в нуль,

так что частота неизвестного контура может быть определена исключительно точно.

2. Логарифмический декремент определяется из положения экстремального значения того же эффекта. Определение же положения осуществляется, вообще говоря, точнее и удобнее, чем количественное измерение ряда отклонений.

3. Отклонения прибора, используемого для показания значений $\int i_1 i_2 dt$, могут быть сделаны практически не зависимыми от неравномерного хода прерывателя или источника переменного тока, что равным образом обуславливает повышение точности измерения.

Если дифференциальное уравнение исследуемого процесса известно (а в большинстве случаев принимается, что колебательная система удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами), то можно — и в очень частных случаях это будет сделано — определить параметры формы из коэффициентов уравнений. Однако в большинстве случаев этот путь закрыт. Если, например, речь идет о форме колебаний конденсаторного контура с искровым промежутком, то определить наперед величину „сопротивления“ искрового промежутка совершенно невозможно. В этих случаях приходится обращаться к косвенному методу. Таким методом является, например, резонансный метод Бьеркнеса. Исследуемый контур заставляют действовать на конденсаторный контур — резонансный контур — и снимают так называемую резонансную кривую какого-нибудь из результатов воздействия (например, тока или напряжения). При этом полагается, что форма колебательного процесса в исследуемой системе, а следовательно и электродвижущая сила E , действующая на резонансный контур, выражается функцией $ae^{-\delta t} \sin(\nu t + \varphi)$. Далее предполагается, что процесс в резонансном контуре описывается дифференциальным уравнением

$$p \frac{di}{dt} + wi + \frac{q}{c} = E.$$

Из резонансной кривой определяются логарифмический декремент $\epsilon = 2\pi\delta/\nu$ и циклическая частота $n = 2\pi\nu$.

В этом методе сделаны два следующих существенных предположения.

Во-первых, предположено, что искре можно приписать постоянное, хотя заранее и не известное сопротивление, и что при этом исследуемый конденсаторный контур удовлетворяет томсоновскому дифференциальному уравнению, и

во-вторых, что связь p между исследуемым конденсаторным контуром и резонансным контуром крайне слаба.

В предположении постоянства сопротивления искры М. Вин¹ точно сформулировал условие весьма слабой связи: ϵ^2 должно быть очень мало по сравнению с $\epsilon_1 \epsilon_2 / \pi^2$. Первое предположение о постоянстве сопротивления, естественно, не является пригодным. На это уже многократно указывалось, и были сделаны предложения учесть специфическое поведение искрового промежутка посредством извест-

¹ M. Wien. Jahrb. für draht. Telegr. 1, 461, 1907; Phys. Zs. 8, 764, 1907.

ных специальных предположений.¹ Несмотря на то, что эти вопросы были ясны, Бьеркнесовский метод применялся и применяется и к конденсаторным контурам с искровым промежутком, и из экспериментальной резонансной кривой, которая во всяком случае отличается от теоретической, следуя предписаниям теории Бьеркнеса, определяют так называемое среднее затухание. Это считается справедливым потому, что полученное таким способом затухание является определяющим для остроты резонанса и связанных с этим явлений.

Излагаемый ниже метод также исходит из предположения о постоянстве сопротивления колебательного контура. Но, в противоположность методу Бьеркнеса, который определяет параметры формы колебаний из хода кривых

$\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ или $\int_0^{\infty} v_2^2 dt$, данный метод использует для этой цели кривую $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$.

Вначале изложена теория кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$,² затем описан прибор для измерения этого интеграла и развита его теория и в заключение коротко описаны произведенные опыты.

И. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Обозначения

p_1, p_2, p_3 — коэффициенты самоиндукции,
 c_1, c_2 — емкости,

$p_{1,2}, p_{2,1}, p_{1,3}, p_{2,3}$ — коэффициенты взаимоиנדукции,
 $\rho_1 = \frac{p_{1,2}}{p_1}, \quad \rho_2 = \frac{p_{2,1}}{p_2}$ — коэффициенты связи,
 $\rho^2 = \rho_1 \rho_2$ — параметр связи,

¹ См. например: T. Zenneck. Ann. d. Phys. 13, 822, 1904; J. Koch. Ann. d. Phys. 15, 865, 1904; A. Heydweiller. Ann. d. Phys. 19, 649, 1906; 25, 43, 1908; H. Barkhausen. Phys. Zs., 8, 624, 1907.

² Механические силы воздействия электромагнитных волн на резонаторы были исследованы П. Лебедевым (Wied. Ann. 52, 621, 1894). Некоторые особенности интеграла $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ были использованы М. Дикманом (M. Dieckmann. Ann. d. Phys. 24, 771, 1907; Diss. Strassburg, 1907).

w_1, w_2, w_3 — сопротивления,

$$2\delta_1 = \frac{w_1}{p_1}, \quad 2\delta_2 = \frac{w_2}{p_2}, \quad 2\delta_3 = \frac{w_3}{p_3} \text{ — константы затухания,}$$

$$\kappa_1^2 = \frac{1}{p_1 c_1}, \quad \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_2},$$

$$\nu_1 = \sqrt{\kappa_1^2 - \delta_1^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{\kappa_2^2 - \delta_2^2} \text{ — циклические частоты,}$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\nu_2} \text{ — периоды,}$$

$$n_1 = \frac{\nu_1}{2\pi}, \quad n_2 = \frac{\nu_2}{2\pi} \text{ — частоты,}$$

$$\varepsilon_1 = \delta_1 \tau_1, \quad \varepsilon_2 = \delta_2 \tau_2 \text{ — логарифмические декременты,}^1$$

i_1, i_2, i_3 — силы токов,

q_1, q_2 — заряды

$$J_1 = \int_0^{\infty} i_1^2 dt, \quad J_2 = \int_0^{\infty} i_2^2 dt, \quad J_{1,2} = \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt.$$

1. Теория метода

Как известно, дифференциальные уравнения двух индуктивно связанных конденсаторных контуров имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} + 2\delta_1 i_1 + \kappa_1^2 q_1 + \rho_1 \frac{di_2}{dt} &= 0, \\ \frac{di_2}{dt} + 2\delta_2 i_2 + \kappa_2^2 q_2 + \rho_2 \frac{di_1}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пусть начальные условия² будут следующими:
При $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{10}, & i_2 &= 0, \\ q_1 &= q_{10}, & q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть, кроме того, при $t = \infty$ все i и q исчезают.

Посредством исключения из (1) получаются характеристические уравнения для i_1 и i_2

¹ Пока можно пренебречь величинами δ_1^2 и δ_2^2 по сравнению с κ_1^2 , вводимые ниже величины $\eta_1 = 2\pi \frac{\delta_1}{\kappa_1}$, $\eta_2 = 2\pi \frac{\delta_2}{\kappa_2}$ практически равны ε_1 и ε_2 , т. е. логарифмическим декрементам при резонансе.

² Мы вводим несколько более общие начальные условия, чем это обычно делают в данном случае.

$$(1 - \rho^2) \frac{d^3 i_1}{dt^3} + 2(\delta_1 + \delta_2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \frac{di_1}{dt} + 2(\delta_1 \alpha_2^2 + \delta_2 \alpha_1^2) i_1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 q_1 = 0, \quad (3)$$

$$(1 - \rho^2) \frac{d^3 i_2}{dt^3} + \dots + \alpha_1^2 \alpha_2^2 q_2 = 0. \quad (4)$$

Если теперь последовательно умножить уравнение (4) на $\frac{d^2 i_2}{dt^2}$, $\frac{di_2}{dt}$ и i_2 и проинтегрировать полученные уравнения от 0 до ∞ , то путем интегрирования по частям при учете начальных условий (2) и уравнения (1) получим для трех неизвестных

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)^2 dt, \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{di_2}{dt} \right)^2 dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} i_2^2 dt$$

следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2(\delta_1 + \delta_2) \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)^2 dt - 2(\delta_1 \alpha_2^2 + \delta_2 \alpha_1^2) \int_0^{\infty} \left(\frac{di_2}{dt} \right)^2 dt &= A_1, \\ - (1 - \rho^2) \int_0^{\infty} \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)^2 dt + \\ + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \int_0^{\infty} \left(\frac{di_2}{dt} \right)^2 dt - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \int_0^{\infty} i_2^2 dt &= A_2, \\ - 2(\delta_1 + \delta_2) \int_0^{\infty} \left(\frac{di_2}{dt} \right)^2 dt + 2(\delta_1 \alpha_2^2 + \delta_2 \alpha_1^2) \int_0^{\infty} i_2^2 dt &= A_3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)_0^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\delta_1 \delta_2) \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0^2, \\ A_2 &= (1 - \rho^2) \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0 \left(\frac{d^2 i_2}{dt^2} \right)_0 + (\delta_1 + \delta_2) \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0^2, \\ A_3 &= -\frac{1}{2} (1 - \rho^2) \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (5) получаем далее

$$\int_0^{\infty} i_2^2 dt = J_2 = \frac{1}{2\Delta} \{ (1 - \rho^2) (\delta_1 + \delta_2) A_1 + 2 (\delta_1 + \delta_2)^2 A_2 + \\ + [\rho^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) + 4\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 \kappa_1^2 + \delta_2 \kappa_2^2)] A_3 \},$$

где

$$\Delta = (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) [\rho^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) + \\ + 4\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)] + \delta_1 \delta_2 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2.$$

После подстановки значений A_1, A_2, A_3 из (6) и учета начальных условий получаем окончательно

$$\Delta \cdot J = \frac{\rho^2}{4} (\kappa_1^2 q_{10} + 2\delta_1 i_{10})^2 (\delta_1 \kappa_2^2 + \delta_2 \kappa_1^2) + \frac{\rho^2}{4} \kappa_1^4 (\delta_1 + \delta_2) i_{10}^2. \quad (7)$$

Аналогичным путем получаем

$$J_{1,2} = \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt.^1$$

Для этого уравнение (3) умножаем соответственно на

$$q_2, \quad i_2, \quad \frac{di_2}{dt}, \quad \frac{d^2 i_2}{dt^2},$$

а уравнение (4) — соответственно на

$$q_1, \quad i_1, \quad \frac{di_1}{dt}, \quad \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

и интегрируем восемь полученных таким образом уравнений по t в пределах от 0 до ∞ . Интегрируя по частям и учитывая начальные условия (2), получаем восемь линейных уравнений с восемью неизвестными

$$\int_0^{\infty} q_1 q_2 dt, \quad \int_0^{\infty} q_2 i_1 dt, \quad \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt, \quad \int_0^{\infty} i_1 \frac{di_2}{dt} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{di_1}{dt} \frac{di_2}{dt} dt, \\ \int_0^{\infty} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{di_2}{dt} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{d^2 i_1}{dt^2} \frac{d^2 i_2}{dt^2} dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{d^3 i_1}{dt^3} \frac{d^2 i_2}{dt^2} dt.$$

¹ Впрочем $J_{1,2}$ получается и непосредственно из J_2 ; см. М. Диектапп, л. с.

После выполнения всех выкладок получаем

$$J_{1,2} = \frac{\rho_2}{4\Delta} \{ (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) [(\delta_2 + \rho^2 \delta_1) \alpha_1^2 + 4\delta_1^2 \delta_2] i_{10} + \delta_2 \alpha_1^4 q_{10}^2 + \\ + 4\delta_1 \delta_2 \alpha_1^2 q_{10} i_{10} \} + (\delta_1 + \delta_2) (\rho^2 \alpha_1^2 + 4\delta_1 \delta_2) \alpha_1^2 i_{10}^2. \quad (8)$$

Таким образом, формулы (7) и (8) дают нам интегралы J_2 и $J_{1,2}$ в замкнутой алгебраической форме для двух связанных конденсаторных контуров при произвольных постоянных константах затухания и коэффициентах связи. Примененный нами при этом метод может быть без дальнейшего перенесен на случай любого числа произвольно связанных конденсаторных контуров. Способ всюду одинаков: определяется характеристическое уравнение, и, смотря по тому, хотят ли получить эффективные значения квадратов или произведений, уравнения для i_x умножают либо на i_x , $\frac{di_x}{dt}$, ..., либо на i_m , $\frac{di_m}{dt}$, ..., где $m \leq x$. Интегрированием по частям при учете начальных условий получают затем столько линейных уравнений, сколько имеется интегралов.¹ Мы переходим теперь к рассмотрению частных случаев.

Обычное искровое возбуждение

В этом случае начальные условия при $t=0$ имеют вид

$$q_1 = q_{10}, \quad i_{10} = 0, \quad q_{20} = 0, \quad i_{20} = 0.$$

Мы полагаем $x = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) / \alpha_1^2$ и вводим η_1 и η_2 (ср. примеч. 1 на стр. 176). Тогда

$$J_{1,2} = m \cdot \frac{x}{\Delta}, \quad (8_1)$$

где

$$m = \frac{\pi}{2} \rho_2 \eta_2 \alpha_1^2 q_{10}^2,$$

$$\Delta = \eta_1 (\eta_2 + \rho^2 \eta_1) x^2 + 2\eta_1 (\eta_1 + \eta_2) \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi^2} + \rho^2 \right) x + (\eta_1 + \eta_2)^2 \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\pi^2} + \rho^2 \right).$$

¹ Эту теорию мы разработали уже к Рождеству 1907 г. Между тем, в своей работе в Phys. Zs. 9, 437, 1908, В. Маскû дал тот же способ непосредственного получения интегральных значений из дифференциальных уравнений. В позднейшей работе (Jahrb. f. draht. Telegr. 2, 251, 1909) В. Маскû исчерпывающим образом рассмотрел важные для измерений интегралы для двух связанных колебательных контуров.

Свойства $J_{1,2}$ как функции x следующие:

$$1. \quad J_{1,2} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (9)$$

Далее, из

$$\frac{dJ_{1,2}}{dx} = m \frac{-\eta_1(\eta_2 + \rho^2 \eta_1)x^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\pi^2} + \rho^2 \right)}{\Delta^2}$$

следует, что

$$2. \quad \frac{dJ_{1,2}}{dx} = 0, \quad \text{при } \pi x = \pm (\eta_1 + \eta_2) \sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2 \rho^2}{\eta_1 \eta_2}}{1 + \rho^2 \frac{\eta_1}{\eta_2}}} = \pm \pi x_0. \quad (10)$$

Эти экстремальные значения $J_{1,2}$ имеют величину

$$\left. \begin{aligned} J_{1,2}^+ &= h \frac{1}{x_0 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2 + \rho^2 \eta_1} \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi^2} + \rho^2 \right)} && \text{при } x_2^2 > x_1^2 (c_2 < c_{20}), \\ J_{1,2}^- &= h \frac{-1}{x_0 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_2 + \rho^2 \eta_1} \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi^2} + \rho^2 \right)} && \text{при } x_2^2 < x_1^2 (c_2 > c_{20}), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(h не зависит от x)

т. е.

$$3. \quad \left| J_{1,2}^+ \right| < \left| J_{1,2}^- \right|, \quad (12)$$

и далее

$$2\pi \frac{\left| \bar{J}_{1,2}^- \right| - \left| \bar{J}_{1,2}^+ \right|}{\left| \bar{J}_{1,2}^- \right| + \left| \bar{J}_{1,2}^+ \right|} = \eta_1 \frac{1 + \frac{2\pi^2 \rho^2}{\eta_1 \eta_2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2 \rho^2}{\eta_1 \eta_2} \right) \left(1 + \rho^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)}}. \quad (13)$$

Кроме того

$$4. \quad J_{1,2} = -\frac{\pi}{2} \rho^2 x_1 q_{10}^2 \frac{1}{(\eta_1 + \rho^2 \eta_2) + \frac{\eta_1 \eta_2}{\pi^2} (\eta_1 + \eta_2)} \left. \begin{aligned} & \text{при } x = -1, \quad \text{т. е. } x_2^2 = 0 \quad (c_2 = \infty) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и

$$5. J_{1,2} = 0 \quad \text{при } x = \infty \quad (c_2 = 0). \quad (15)$$

Из (8) далее следует

$$6. \quad \tau_1 + \tau_2 = \pi \sqrt{x_1 x_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2 \rho^2}{\eta_1 \eta_2}}{1 + \rho^2 \frac{\eta_1}{\eta_2}}}, \quad (16)$$

где x_1 и x_2 — два значения x , при которых $J_{1,2}$ имеет одинаковую величину, т. е. $J_{1,2}(x_1) = J_{1,2}(x_2)$.

На рис. 1 и 2 показан ход кривых $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$, рассчитанных для разных τ_1, τ_2 и ρ .

Из хода кривых $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ или из формул (2) — (16) могут быть сделаны следующие заключения.

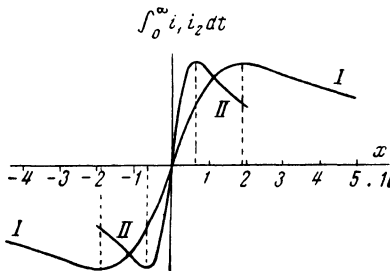


Рис. 1. Влияние затухания

Весьма слабая связь $\rho^2 = 0$.

Кривая I: $\eta_1 = 0.05, \eta_2 = 0.01$.

Кривая II: $\eta_1 = 0.01, \eta_2 = 0.01$.

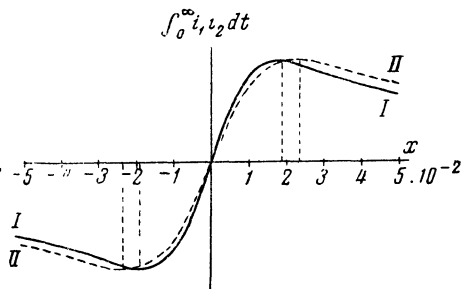


Рис. 2. Влияние связи

Кривая I: $\rho^2 = 0$. Кривая II: $\rho^2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{2\pi^2}$,

$\eta_1 = 0.05, \eta_2 = 0.01$.

Если изменять x от -1 до $+\infty$ так, что все остальные параметры остаются постоянными, например меняя во вторичном контуре емкость c_2 (от $c_2 = \infty$ до $c_2 = 0$), как это делают при снимании обычных Бьеркнесовских резонансных кривых, то $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ вначале убывает от значения, даваемого уравнением (14), до минимального значения $J_{1,2}$, которого он достигает при $x = -x_0$ ($c_2 = \bar{c}_2$); затем

возрастает, проходя при $x=0$ ($c_2=c_{20}$) через нуль до максимального значения $J_{1,2}^+$, которого он достигает при $x=x_0$ ($c_2=c^+$), и при дальнейшем уменьшении c_2 — убывает до нуля.

Значение x , при котором $J_{1,2}$ обращается в нуль, равно нулю, т. е. не зависит от ρ^2 ; напротив, положение экстремальных значений и общий ход кривой $J_{1,2}$ [см. уравнение (16)] зависят от ρ^2 . Однако эти величины становятся независимыми от ρ^2 , если можно пренебречь ρ^2 по сравнению с $\eta_1\eta_2/2\pi^2$.¹ В дальнейшем мы будем считать это условие, которое идентично при бьеркнесовском методе виновскому условию весьма слабой связи, выполненным. В этом предположении мы получаем

$$J_{1,2} = \frac{\pi^3}{2} \frac{\rho^2 x_1 q_{10}^2}{\eta_1} \frac{x}{\pi^2 x^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + \eta_1(\eta_1 + \eta_2)x}, \quad (8_2)$$

$$J_{1,2} = 0 \quad \text{при } x = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2} = \frac{c_{20} - c_2}{c_2} = 0, \quad (9_1)$$

$$\frac{dJ_{1,2}}{dt} = 0 \quad \text{при } \pi x = \pm (\eta_1 + \eta_2), \quad (10_1)$$

$$\eta_1 = 2\pi \frac{\left| \bar{J}_{1,2} \right| - \left| J_{1,2}^+ \right|}{\left| \bar{J}_{1,2} \right| + \left| J_{1,2}^+ \right|}, \quad (13_1)$$

$$\pi^2 x_1 x_2 = (\eta_1 + \eta_2)^2. \quad (16_1)$$

Из этих формул следует, что при весьма слабой связи кривая $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$ позволяет определить параметры контура I , а именно; период колебаний получается из уравнения (9₁), а логарифмический декремент из уравнения (10₁), из положения экстремальных значений $\int_0^\infty i_1 i_2 dt$. Это теоретическое рассмотрение приводит таким образом к следующему способу определения постоянных конденсаторного контура $x_1^2 = v_1^2 + \delta_1^2$ и $\eta_1 = 2\pi \frac{\delta_1}{x_1}$.

¹ Так как практически $\eta_1\eta_2/2\pi^2$ почти всегда меньше, чем η_2/η_1 .

Подлежащий исследованию конденсаторный контур весьма слабо связывается со вторым „резонансным контуром“, содержащим переменную емкость c_2 , постоянные которого

$$\gamma_{12}(\varepsilon_2) \text{ и } \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_2}$$

известны, и определяется кривая $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ как функция c_2 . Для значе-

ния $c_2 = c_{20}$, при котором $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt = 0$, имеет место

$$\underline{\kappa_1^2 = \kappa_2^2 = \frac{1}{p_2 c_{20}}}$$

Для значений

$$c_2 = \begin{cases} + \\ - \end{cases} \begin{matrix} c_2 \\ c_2 \end{matrix},$$

при которых $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ становится $\left. \begin{matrix} \text{максимальным} \\ \text{минимальным,} \end{matrix} \right\}$ имеет место

$$\underline{\gamma_1 + \gamma_2 = \pi |x| = \pi \left| \frac{c_{20} - c_2}{c_1} \right|, \text{ или, соответственно, } \pi \left| \frac{c_{20} - c_2}{c_2} \right|}$$

Вследствие ненадежности определения точного положения экстремальных значений при сравнительно пологом ходе кривой вблизи этих значений следует предпочесть при более точных измерениях способ, основанный на формуле (16₁). При этом способе определяются значения c_2' , c_2'' , для которых $J_{1,2}$ имеет одинаковые значения (включая и знак), и находится

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi \sqrt{\frac{c_{20} - c_2'}{c_2'} \cdot \frac{c_{20} - c_2''}{c_2''}} \quad (16_2)$$

Ударное возбуждение

При ударном возбуждении нельзя безоговорочно принимать, что в момент $t=0$, т. е. в момент автоматического включения ударного контура, которое вызвано прекращением искры, ток, возбужденный

в первичном контуре ударным контуром, равен нулю, т. е. $i_{10} = 0$.

Однако из общей формулы (8), которая справедлива для произвольных i_{10} , легко убедиться, что в случае весьма слабой связи члены, зависящие от i_{10} , практически не оказывают влияния на форму кривых $J_{1,2}$ и J_2 . Таким образом, при этом условии мы вправе применять формулы, полученные для возбуждения искрой, к случаю ударного возбуждения.

2. Теория прибора

Для измерения $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt^1$ было бы проще всего применить динамометр, через одну катушку которого может быть пропущен ток i_1 , а через другую ток i_2 . При малости измеряемых сил и практически всегда выполненном условии малого сопротивления конструкция динамометра с подводкой тока к подвижным катушкам представляет известные трудности. Поэтому в качестве измерителя $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ был сконструирован следующий динамометр („динамометр с короткозамкнутым кольцом“), который мы хотим описать подробнее и несколько полнее коснуться его теории, так как при наших измерениях он оказался очень надежным, в том числе и в отношении механических свойств (постоянство нуля, малость периода колебаний, хорошее демпфирование).

В средней плоскости плоской катушки S_2 (рис. 3), состоящей из нескольких витков, на бифилярном подвесе, концентрически с S_2 , висит кольцо из тонкого листового алюминия. Концентрически с кольцом и катушкой S_2 , в плоскости, перпендикулярной к кольцу и проходящей через ось вращения, находится вторая плоская катушка S_1 . Как S_1 , так и S_2 можно с помощью винтов немного поворачивать относительно оси вращения кольца. Посредством шкалы и трубы измеряются углы поворота кольца. Размеры частей прибора были следующие.

Катушки S_1 и S_2 состояли соответственно из двух и четырех витков двухмиллиметровой изолированной проволоки и имели квад-

¹ Один из методов измерения $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ разработал М. Dieckmann (l. c.).

ратное сечение. Величина стороны квадрата составляла для катушки S_1 9.5 см, а для катушки S_2 6.5 см. Стрелка имела форму кольца с внешним диаметром 4 см, шириной 3 мм и толщиной 0.1 мм. Кольцо было оклеено папиросной бумагой, имело в середине маленькое стеклянное зеркало и находилось между стеклянной пластинкой, которая покрывала переднюю сторону катушки S_2 , и листом черной бумаги, который был закреплен на задней стороне S_2 . Этим обеспечивалось прекрасное демпфирование.

Действие прибора заключается в следующем. Ток i_2 пропускается через S_2 ; при этом в кольце индуцируется ток i_3 , который, в случае если индуктивное сопротивление кольца достаточно велико по сравнению с омическим сопротивлением, пропорционален i_2 .¹ Вследствие симметричного положения кольца по отношению к S_2 на кольцо не действует никакой вращающий момент. Если же через S_1 пропустить i_1 , то i_1 не индуцирует тока в кольце, но, коль скоро в кольце уже течет ток i_3 , развивает вращающий момент, пропорциональный $i_1 i_3$. Таким образом, если одновременно пропустить через S_1 ток i_1 и через S_2 ток i_2 , то на кольцо действует вращающий момент, пропорциональный $i_1 i_2$. Следовательно, если прибор используется так, что стрелка поворотом головки крутильного подвеса возвращается в нулевое положение, то угол

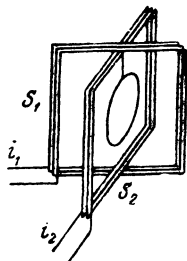


Рис. 3. Схема устройства катушек динамометра

поворота пропорционален $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$. Однако при этом

- 1) трудно добиться полной компенсации и
- 2) гораздо проще — и мы постоянно использовали прибор таким образом — прямо измерять отклонения.

Так как в этом случае кольцо поворачивается на малый угол ϑ по отношению к нулевому положению, то предположения развитой простой теории уже непригодны и, чтобы по отклонениям судить о значениях $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$, следует коснуться теории прибора подробнее.

Более точная теория динамометра строится следующим образом.

¹ См. ниже, примечание на стр. 186.

Обозначим через p_3 коэффициент самоиндукции кольца, через $p_{1,3}$ и $p_{2,3}$ — коэффициенты взаимной индукции между i_1 и, соответственно, i_2 и кольцом, через W — магнитную энергию системы, т. е.

$$W = p_{1,3} i_1 i_3 + p_{2,3} i_2 i_3 + p_{1,2} i_1 i_2 + \frac{1}{2} p_1 i_1^2 + \frac{1}{2} p_2 i_2^2 + \frac{1}{2} p_3 i_3^2,$$

через N — число разрядов в секунду и через α^2 — упругую силу подвеса, так что угол поворота ϑ определяется уравнением

$$\alpha^2 \vartheta = N \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)_i dt, \quad (17)$$

где при дифференцировании по ϑ токи i должны рассматриваться как не зависящие от ϑ . Тогда

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)_i = \left(\frac{\partial p_{1,3}}{\partial \vartheta} i_1 + \frac{\partial p_{2,3}}{\partial \vartheta} i_2 \right) i_3$$

и так как по предположению¹

$$p_3 i_3 = -p_{1,3} i_1 - p_{2,3} i_2, \quad (18)$$

¹ Условия, при которых в затухающем переменном поле можно пренебрегать влиянием сопротивления индуктивного контура, были выведены Н. Папалекси (Ann. d. Phys. 14, 756, 1904); эти условия не могут быть непосредственно перенесены на рассматриваемый здесь случай. Действительно, более подробный расчет, который мы провели для случая весьма слабой связи, показывает, что прибор в первом приближении измеряет не $J_{1,2}$, а

$$J_1 + \frac{\eta_2 \eta_3}{\pi^2 \rho_2} J_2.$$

Здесь $\eta_3 = \frac{2\pi\delta_3}{x_1}$, где $2\delta_3 = \frac{W_3}{p_3}$ означает коэффициент затухания подвижной катушки (кольца). Отсюда следует далее, что отклонение исчезает не при $x=0$, а при

$$x = -\frac{\eta_3(\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2},$$

и что отклонение становится максимальным при

$$\pi^2 x + \eta_3(\eta_1 + \eta_2) = \pm \pi(\eta_1 + \eta_2).$$

Иными словами, для нахождения точки резонанса нужно к значению x , при котором отклонение равно нулю, прибавить поправку

$$+ \frac{\eta_3(\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2}.$$

Напротив, сумма $\eta_1 + \eta_2$ определяется из положения максимума правильно. Мы получаем таким образом в качестве условия допустимости пренебрежения сопротивлением подвижной катушки, что $\frac{\eta_3(\eta_1 + \eta_2)}{\pi^2}$ должно быть меньше, чем предел погрешности, с которой может быть определена точка резонанса.

то

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)_i = -\frac{1}{2p_3} \left\{ \frac{\partial (p_{1,3}^2)}{\partial \vartheta} i_1^2 + \frac{\partial (p_{2,3}^2)}{\partial \vartheta} i_2^2 + 2 \frac{\partial (p_{1,3} p_{2,3})}{\partial \vartheta} i_1 i_2 \right\}$$

и

$$\alpha^2 \vartheta = -\frac{N}{2p_3} \left\{ \frac{\partial p_{1,3}^2}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_1^2 dt + \frac{\partial p_{2,3}^2}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_2^2 dt + 2 \frac{\partial (p_{1,3} p_{2,3})}{\partial \vartheta} \int_0^\infty i_1 i_2 dt \right\}.$$

Пренебрегая ϑ^2 и высшими степенями ϑ , можно положить в общем случае

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial p_{1,3}^2}{\partial \vartheta} &= L_1 + M_1 \vartheta, \\ -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial p_{2,3}^2}{\partial \vartheta} &= L_2 + M_2 \vartheta, \\ -\frac{1}{2p_3} \frac{\partial 2(p_{1,3} p_{2,3})}{\partial \vartheta} &= L_{1,2} + M_{1,2} \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

так что

$$\alpha^2 \vartheta = N \{ (L_1 + M_1 \vartheta) J_1 + (L_2 + M_2 \vartheta) J_2 + (L_{1,2} + M_{1,2} \vartheta) J_{1,2} \},$$

где для

$$\int_0^\infty i_1^2 dt, \quad \int_0^\infty i_2^2 dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty i_1 i_2 dt$$

введены обозначения J_1 , J_2 и $J_{1,2}$.

Отсюда получается окончательно

$$\vartheta = N \frac{L_2 J_1 + L_2 J_2 + L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2})}, \quad (20)$$

Мы перейдем теперь к дискуссии этой формулы и применим ее к следующим случаям:

Случай I. Совершенная симметрия и уравновешенность аппарата. В этом случае должно быть $\vartheta_1 = 0$ при $i_1 = 0$ и $\vartheta_2 = 0$ при $i_2 = 0$.

Для $i_1 = 0$ (20) дает

$$\vartheta_1 = N \frac{L_2 J_2}{\alpha^2 + N \cdot M_2 J_2} = 0,$$

т. е.

$$L_2 = 0.$$

Для $i_2 = 0$

$$\vartheta_2 = N \frac{L_1 J_1}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1} = 0,$$

т. е.

$$L_1 = 0.$$

Кроме того, на основании предположенной симметрии, ϑ должно переходить в $-\vartheta$ в случае перемены знака i_1 или i_2 , т. е. должно быть

$$\frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2})} = \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2 - M_{1,2} J_{1,2})},$$

или

$$M_{1,2} = 0.$$

Таким образом, в этом случае мы имеем

$$\vartheta = N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2)}. \quad (20_1)$$

Примем теперь во внимание, что в нашем случае — использования кривой $J_{1,2}$ для определения логарифмического декремента — речь идет о весьма слабой связи, т. е., что J_2 очень мало, а J_1 весьма постоянно. Формула (20₁) принимает поэтому вид

$$\vartheta = N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1}, \quad (20_2)$$

где выражение $\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1$ должно рассматриваться как постоянное по отношению к i_1 и i_2 . Из формулы (20₂) следует, что в случае совершенной симметрии и уравновешенности стационарные углы отклонения подвижного кольца действительно пропор-

циональны интегралу $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$.

Однако практически этот случай совершенной симметрии и полной уравновешенности не может быть реализован во всей строгости. Для того чтобы найти поправки, которые должны быть введены в углы отклонения прибора в практически важном случае неполной симметрии и приближенной уравновешенности, мы рассмотрим

Случай II. Неполная симметрия и приближенная уравновешенность. В этом случае мы имеем

$$\text{при } i_2 = 0 \quad \vartheta = N \frac{L_1 J_1}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta_1, \quad (21)$$

$$\text{при } i_1 = 0 \quad \vartheta = N \frac{L_2 J_2}{\alpha^2 + N \cdot M_2 J_2} = \vartheta_2. \quad (22)$$

При этом дифференциальное уравнение движения стрелки имеет вид

$$\begin{aligned} T \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + 2r \frac{d\vartheta}{dt} + [\alpha^2 + N(M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2})] \vartheta = \\ = N(L_1 J_1 + L_2 J_2 + L_{1,2} J_{1,2}). \end{aligned}$$

Если определить теперь периоды колебаний следующим образом:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{T} - \frac{r^2}{T^2}}} \quad \text{при } i_1 = 0, i_2 = 0,$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_1 J_1}{T}}} \quad \text{при } i_1 = i_1, i_2 = 0,$$

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_2 J_2}{T}}} \quad \text{при } i_1 = 0, i_2 = i_2,$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{T} - \frac{r^2}{T^2} + N \frac{M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_{1,2} J_{1,2}}{T}}} \quad \text{при } i_1 = i_1, i_2 = i_2,$$

то мы получим отсюда

$$N \cdot \frac{M_1 J_1}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_0^2} \right),$$

$$N \cdot \frac{M_2 J_2}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_0^2} \right),$$

$$N \cdot \frac{M_{1,2} J_{1,2}}{T} = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} \right).$$

Таким образом, эти формулы делают возможным точное сравнение относительных величин $M_1 J_1$, $M_2 J_2$ и $M_{1,2} J_{1,2}$. При сохранении условий очень слабой связи и приближенной симметрии положения кольца по отношению к i_1 , можно пренебрегать величинами $M_2 J_2$ и $M_{1,2} J_{1,2}$ по отношению к $M_1 J_1$. Сделав это пренебрежение, получим

$$N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2 \frac{\alpha^2}{z^2 - N \cdot M_1 J_1},$$

или

$$N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1} = \vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2 \frac{4\pi^2 + \lambda_0^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2} \cdot \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}, \quad (23)$$

где λ_0 и λ_1 означают логарифмические декременты колебаний стрелки для случаев $i_1 = 0$, $i_2 = 0$ и $i_1 = i_1$, $i_2 = 0$.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что из показаний динамометра можно получить кривую $J_{1,2}$ также и в случае несовершенного уравнивания и лишь приближенной симметрии, если к действительно наблюдаемым углам отклонения прибавить определяемые экспериментальным путем поправки

$$-\vartheta_1 \text{ и } -\vartheta_2 \frac{4\pi^2 + \lambda_0^2}{4\pi^2 + \lambda_1^2}.$$

Впрочем при очень слабой связи, вследствие малости J_2 , вторая поправка не будет играть никакой роли.

Мы хотели бы заметить еще следующее. Из

$$\vartheta = N \frac{L_{1,2} J_{1,2}}{\alpha^2 + N \cdot M_1 J_1}, \quad (20_2)$$

если α^2 мало по сравнению с $N \cdot M_1 J_1$, следует, что

$$\vartheta = \frac{L_{1,2}}{M} \cdot \frac{J_{1,2}}{J_1}, \quad (24)$$

т. е. ϑ не зависит от N .¹ Другими словами, если сделать

¹ Из любезного, более раннего сообщения г-на Тыкоцинера (Tykociner) нам известно, что он экспериментальным путем разработал волномер с непосредственным отсчетом, который основан на принципе разделения токов высокой частоты и в котором также достигнута независимость от амплитуды, что впрочем принципиально необходимо для его прибора. Насколько нам известно, в литературе не упоминается о приборах, в которых была бы достигнута подобная независимость при высокочастотных измерениях.

направляющую силу подвеса стрелки очень малой по сравнению с направляющей силой катушки S_1 , то δ зависит только от

$$\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt / \int_0^{\infty} i_1^2 dt,$$

но в очень широких пределах не зависит более от числа разрядов N и, в частности, не зависит более от работы прерывателя.

В этом заключается практическое преимущество нового прибора по сравнению с ранее известными измерительными приборами, основанными на тепловом действии, как термоэлемент, болометр и динамометр в его обычном выполнении.

II. ОПЫТЫ

Для проверки пригодности как приведенного метода, так и описанного динамометра были проведены следующие опыты.

Для одного и того же конденсаторного контура с одним и тем же резонансным контуром одновременно снимались кривые $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ и $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$. Кривая $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ снималась динамометром, кривая $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ — термоэлементом Брандеса (Brandes),¹ который был отградуирован постоянным током, и из кривых, согласно теории, рассчитывались частоты и сумма логарифмических декрементов $\epsilon_1 + \epsilon_2$.

Для того чтобы подойти ближе к теоретическому случаю, вначале были проведены опыты с „гасящей искрой“ по Вину² („ударное возбуждение“). В этом случае отпадает мешающее влияние искрового промежутка и, согласно Вину,³ бьеркнесовская резонансная кривая соответствует теории. Таким образом, этот случай

¹ Чувствительность гальванометра по току $4 \cdot 10^{-8}$ А, внутреннее сопротивление 5,552; расстояние до шкалы 50 см.

² M. Wien. Phys. Zs. 7, 872, 1906.

³ M. Wien. Ann. d. Phys. 25. 625, 1908.

особенно хорош для проверки применимости нашего метода. После проверки методики и прибора этим способом были проведены опыты и с обычным искровым возбуждением быстрых колебаний и тем самым наблюдалось влияние искрового промежутка на кривую.

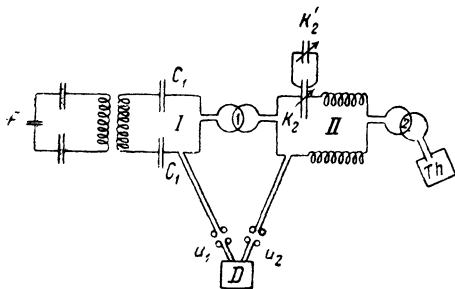


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

ный контур, который очень слабо (с помощью 1) связан с II — резонансным контуром; D — динамометр; Th — термоэлемент. Ток резонансного контура i_2 проходит непосредственно через S_2 ; ток первичного контура i_1 — непосредственно через S_1 . u_1 и u_2 — переключатели, позволяющие пропускать весь ток только через S_1 или только через S_2 и, таким образом, делающие возможной установку и проверку динамометра по способу, указанному выше (на стр. 189). Термоэлемент Th включен в II не непосредственно, а находится, как обычно, в связанном с II индуктивном контуре. K_2 и K_2' — переменные конденсаторы с воздушным диэлектриком системы Телефункен (K_2 — 16 пластин, K_2' — 2 пластины); они отградуированы и включены параллельно. Требуемое методом изменение емкости осуществляется вращением K_2' .

При испытании метода с „обрывающей искрой“ применялась установка, изображенная на рис. 4. Здесь F означает разрядник Вина, который возбуждался трансформатором (резонансным трансформатором), питаемым сетевым переменным током; I — „первичный“ контур, который очень слабо (с помощью 1) связан с II — резонансным контуром; D — динамометр; Th — термоэлемент. Ток резонансного контура i_2 проходит непосредственно через S_2 ; ток первичного контура i_1 — непосредственно через S_1 . u_1 и u_2 — переключатели, позволяющие пропускать весь ток только через S_1 или только через S_2 и, таким образом, делающие возможной установку и проверку динамометра по способу, указанному выше (на стр. 189). Термоэлемент Th включен в II не непосредственно, а находится, как обычно, в связанном с II индуктивном контуре. K_2 и K_2' — переменные конденсаторы с воздушным диэлектриком системы Телефункен (K_2 — 16 пластин, K_2' — 2 пластины); они отградуированы и включены параллельно. Требуемое методом изменение емкости осуществляется вращением K_2' .

При испытании метода с „обрывающей искрой“ применялась установка, изображенная на рис. 4. Здесь F означает разрядник Вина, который возбуждался трансформатором (резонансным трансформатором), питаемым сетевым переменным током; I — „первичный“ контур, который очень слабо (с помощью 1) связан с II — резонансным контуром; D — динамометр; Th — термоэлемент. Ток резонансного контура i_2 проходит непосредственно через S_2 ; ток первичного контура i_1 — непосредственно через S_1 . u_1 и u_2 — переключатели, позволяющие пропускать весь ток только через S_1 или только через S_2 и, таким образом, делающие возможной установку и проверку динамометра по способу, указанному выше (на стр. 189). Термоэлемент Th включен в II не непосредственно, а находится, как обычно, в связанном с II индуктивном контуре. K_2 и K_2' — переменные конденсаторы с воздушным диэлектриком системы Телефункен (K_2 — 16 пластин, K_2' — 2 пластины); они отградуированы и включены параллельно. Требуемое методом изменение емкости осуществляется вращением K_2' .

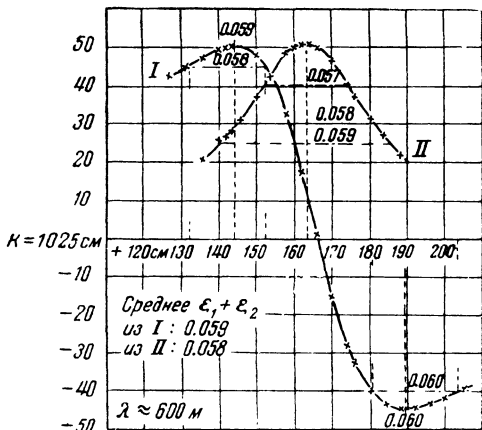


Рис. 5. Ударное возбуждение

Рис. 5 и 6 и табл. 1 и 2, которые содержат значения K_2 , отклонения динамометра (Dyn) и термоэлемента (Th) для отдельных точек

кривой, воспроизводят результаты двух опытов с ударным возбуждением. По известной формуле

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi x \sqrt{\frac{J_2}{J_{2\max} - J_2}},$$

где J_2 — пропорциональная $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ ордината кривой, которая относится к абсциссе c_2 , а $x = (c_{20} - c_2)/c_2$ (c_{20} — значение емкости, для которого J_2 максимальна), из Бьеркнесовской резонансной кривой II

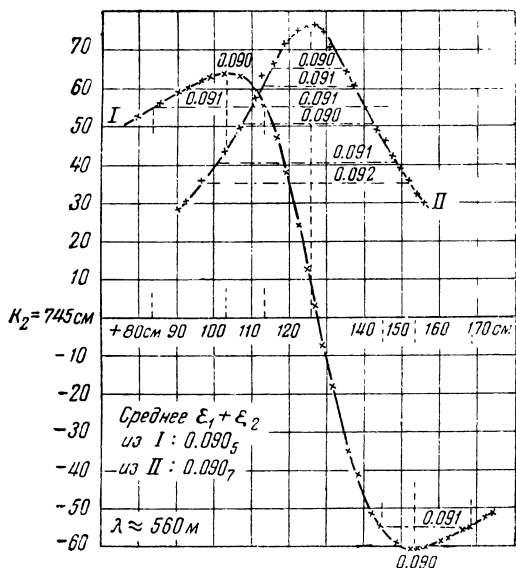


Рис. 6. Ударное возбуждение

была вычислена сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ логарифмических декрементов первичного контура I и вторичного II. Это вычисление было проведено для кривой II рис. 5, для трех значений x , а для кривой рис. 6, — для шести значений, причем полученные для $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ значения нанесены, как обычно, в соответствующем месте кривых.

Отдельные значения отличаются друг от друга очень мало и, следовательно, как это нашел еще М. Вин, резонансная кривая при ударном возбуждении гораздо лучше соответствует теоретической кривой, чем при искровом возбуждении. Среднее значение для резонансной кривой (кривая II) рис. 5 составляет: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.058$, а для кривой рис. 6: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.0907$.

Таблица 1 (к рис. 6)

K'_2 (см)	$Dyn.$	Th	K'_2 (см)	$Dyn.$	Th
86	+55.7	—	137.8	41.6	61.0
90.5	59.7	29.6	142	51.7	50.7
92.5	60.0	30.3	144	54.3	43.8
97.0	61.8	36.0	146	57.2	46.2
99.0	62.8	38.0	148	59.0	42.1
103.0	63.9	44.0	150	59.7	38.6
107	62.6	49.7	152	60.7	36.0
111	59.5	57.9	154	60.3	33.0
113	55.2	63.5	155	60.2	30.7
117	46.7	66.6	160	58.5	—
119	37.5	72.0	162	53.4	—
123	23.9	74.5	166	55.0	—
125	12.3	75.6	168	55.2	—
127	+ 2.7	75.8	172	52.3	—
129	— 7.8	7 2	174	—51.8	—
131	—13.1	70.5			
135.5	35.2	64.0			

$K_2 = 745$ см
 $\lambda_0 \approx 560$ м

Таблица 2 (к рис. 5)

K'_2 (см)	$Dyn.$	Th	K'_2 (см)	$Dyn.$	Th
127	+42.7	—	166	+ 0.3	49.7
131.5	44.8	—	170	—15.3	46.7
135.7	47.3	20.7	174	23.0	40.6
140	49.3	24.7	175	32.3	36.8
142	49.8	25.8	130	39.7	31.5
144	50.5	28.3	134	43.2	26.6
146	50.3	30.7	183	44.5	22.0
150	47.7	37.5	192	44.2	—
154	42.3	43.2	196	43.0	—
158	32.7	43.7	200	41.3	—
160	24.5	50.1	205	—39.5	—
162	17.0	50.5			
164	9.0	50.7			

$K_2 = 1025$ см
 $\lambda_0 \approx 600$ м

Суммы логарифмических декрементов $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ были соответственно определены и из кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ (кривые I рис. 5 и 6). Определение производилось по положениям обоих экстремальных

значений по отношению к нулевой точке кривой согласно формуле (10).¹

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi x, \text{ где } x = \frac{c_{20} - c_2}{c_2},$$

а c_{20} — значение емкости, при которой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ равен нулю. Эти

значения $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ нанесены в соответствующих местах кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$.

Но, кроме того, для каждой кривой были определены по два значения суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ по формуле (16₂)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi \sqrt{\frac{c_{20} - c_2'}{c_2'} \cdot \frac{c_{20} - c_2''}{c_2''}},$$

где c_2' и c_2'' — те значения емкости, которые соответствуют точкам пересечения какой-либо прямой, параллельной оси абсцисс,

с кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$. Определенные таким образом значения $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

нанесены в соответствующих местах кривых *I*. В качестве среднего

¹ На рис. 5 и 6 и на рис. 7 легко констатировать сдвиг нулевой точки кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ по отношению к резонансной точке кривой $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$. Согласно упо-

мянутой в примечании (стр. 184) более точной теории это есть следствие влияния сопротивления подвижного кольца динамометра. Знак сдвига и примерная величина его соответствуют теории. Так как величина этого сдвига составляет приблизительно 0.2% емкости, т. е. примерно 0.1% длины волны, то это обстоятельство в большинстве случаев не играет никакой роли, так как оно, как это уже указывалось в примеч. 1 на стр. 176, не оказывает никакого влияния на определение логарифмического декремента. Из рис. 5 и 6, кроме того, видно, что в противоречие с простой формулой (1.) (стр. 180) $|\bar{J}_{1,2}| < |\overset{+}{J}_{1,2}|$ Это тоже соответствует более точной теории, согласно которой

$$\frac{|\overset{+}{J}_{1,2} - \bar{J}_{1,2}|}{|\overset{+}{J}_{1,2}| + |\bar{J}_{1,2}|} = \frac{2\eta_3 - \eta_1}{2\pi}.$$

Эта формула качественно подтвердилась и непосредственными опытами, при которых постепенно увеличивалось η_1 .

из всех этих значений для кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ (рис. 5) получается

$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0.059$, а для кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ (рис. 6) — $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0.0905$.

И здесь отдельные значения очень мало отличаются друг от друга. Сравнение этих значений $\epsilon_1 + \epsilon_2$ со значениями, полученными из бьеркнесовских резонансных кривых, дает вполне удовлетворительное совпадение.

Схема установки с искровым возбуждением отличается от „метода обрывающей искры“ только тем, что возбуждающий контур отсутствует, а контур *I* содержит искровой промежуток. Индуктивность контура *I*, вплоть до подводящих проводов, оставалась той же, что при ударном возбуждении; напротив, конденсатор

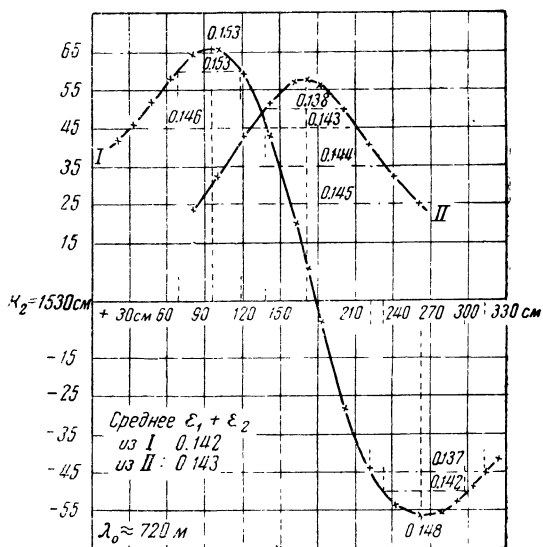


Рис. 7. Искровое возбуждение.

состоял из четырех лейденских банок (две группы по две банки, включенные параллельно по симметричной схеме), так что результирующая емкость (примерно 10 000 см) вместе со вторичной катушкой резонансного трансформатора была близка к резонансу с частотой сети переменного тока. Контур *II* оставался неизменным.

Результаты одного опыта воспроизведены на рис. 7 (табл. 3).

Мы видим, что хотя оба метода и здесь дают примерно одинаковые „средние“ затухания (из $I \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0.142$, а из $II \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0.143$), но совпадение отдельных значений для кривой I ($\epsilon_1 + \epsilon_2$ между 0.137 и 0.153) и для кривой II ($\epsilon_1 + \epsilon_2$ между 0.138 и 0.145) хуже, чем в случае ударного возбуждения. Повидимому, наличие искрового

Таблица 3 (к рис. 7)

K'_2 (см)	D_{yn} .	Γh	K'_2 (см)	D_{yn} .	Γh
20	+42.0	—	182	— 6.0	55.2
33	46.0	—	201	23.0	49.8
47	52.0	—	220	44.0	40.2
63	53.4	—	240	53.0	32.1
80	64.4	23.8	259	56.0	25.4
101	65.4	32.2	275	55.6	—
121	59.6	43.1	289	53.0	—
142	43.2	51.5	302	49.2	—
162	20.0	56.6	312	43.0	—
172	+ 8.0	57.3	322	—42.0	—

промежутка деформирует и кривую $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$, аналогично тому, как это давно известно для бьеркнесовской резонансной кривой.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы еще раз коротко суммируем результаты работы:

I. Описан метод исследования частоты и затухания конденсаторных контуров, в котором используется переменный конденсаторный контур, слабо связанный с исследуемой системой; искомые параметры (частота и логарифмический декремент) определяются из свойств кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$.

II. Развита общая, пригодная для любой связи теория кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ и показано, как из положения нулевой точки этого интеграла можно определить частоту, а из положения его экстремальных значений — сумму логарифмических декрементов $\epsilon_1 + \epsilon_2$. Преимущества этого метода мы видим в большой точности определения частоты и в отсутствии необходимости

измерения отклонений при определении логарифмических декрементов.

III. Описан „динамометр с короткозамкнутым кольцом“, позволяющий измерять $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$, и развита его теория. При этом применен принцип конструкции, который позволяет достичь весьма далеко идущей независимости отклонений от амплитуды измеряемой величины и вместе с тем от неравномерности хода прерывателя (стр. 191).

IV. Сравнительными опытами доказана применимость как метода, так и динамометра.

Страсбург,
Физический институт.

О ЗАТУХАНИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕТЯЩИХСЯ ПАРАХ НАТРИЯ

[*Phys. Zs.* 11, 752—753, 1910]

(Поступило 6 августа 1910 г.)

Некоторое время спустя после открытия Зеемана Кёниг¹ предложил очень простой метод, позволяющий демонстрировать качественную сторону явления Зеемана. Натриевое пламя находится в магнитном поле. В направлении, перпендикулярном к силовым линиям, можно поместить вне поля второе натриевое пламя. Первое пламя наблюдается с помощью полярископа Савара, непосредственно или через второе пламя.

Если возбудить магнитное поле, то в полярископе появляются полосы. Следовательно, свет частично поляризован, причем преобладает та компонента, для которой электрический вектор расположен перпендикулярно к направлению силовых линий.

Это явление наблюдается как в случае прохождения света от находящегося в поле пламени через пламя, помещенное вне поля, так и в случае отсутствия второго пламени. При включении магнита в отсутствие второго пламени в полярископе появляются слабые полосы. Если теперь на пути луча поместить второе пламя, то полосы становятся резче.

В таком виде, по мнению Кёнига, этот опыт удобен для доказательства расщепления спектральных линий в магнитном поле. Тот факт, что компонента, колеблющаяся перпендикулярно к силовым

¹ W. König. *Wied. Ann.* 63, 268, 1897.

линиям, поглощается находящимся вне поля пламенем слабее, чем параллельная силовым линиям, может быть объяснен только наличием волн разной длины и с различной поляризацией. При этом менее поглощаемая компонента должна отстоять от нормального колебания натриевого пламени дальше, чем другая. То, что явление наблюдается уже в одном только первом пламени, Кёниг объясняет поглощением внутри самого этого пламени.

В свое время на установке, близкой к описанной установке Кёнига, я произвел некоторые опыты, причем я исходил из следующих соображений. В поглощающем пламени находятся резонаторы с определенной частотой и затуханием. Явление Зеемана дает средство смещать частоту падающего света относительно частоты собственных колебаний этих резонаторов на любую величину. Если теперь количественно проследить за уменьшением поглощения при расстройке, иными словами, снять в некотором роде резонансную кривую, то из формы этой кривой можно найти затухание молекулярных резонаторов.

Так как резонансная кривая симметрична (теоретически) относительно максимума, то, в предположении симметричного расщепления и наличия нормального триплета, одновременное появление двух различно смещенных волн не является помехой.

Получение подобной кривой облегчается в особенности тем, что в случае нормального триплета сохраняется и несмещенная компонента и что она поляризована в плоскости, повернутой на 90° по отношению к плоскости поляризации смещенных компонент.

Отдельные точки кривой получаются, таким образом, из сравнения интенсивностей света, поляризованного перпендикулярно и параллельно силовым линиям, после того как он прошел через поглощающее пламя. Если бы линии испускания были значительно тоньше линий поглощения, то можно было бы считать, что незатухающая волна падает на резонатор, обладающий затуханием. Но такого предположения сделать нельзя.

Можно, однако, принять, что излучение состоит из нерегулярно следующих друг за другом затухающих волновых цугов, каждый из которых имеет форму обычного затухающего колебания.

При таком допущении мы будем, очевидно, иметь дело со случаем, который был просчитан Бьеркнесом для электрической системы. Из формы резонансной кривой может быть найдена тогда сумма логарифмических декрементов падающей волны и поглощающего резонатора.

Опыт ставился следующим образом.

Одно из двух пламен натрия, находящихся в одинаковых условиях, помещается между плоскими полюсными наконечниками электромагнита Румкорфа. При возбуждении поля в полярископе появляются, скажем, горизонтальные полосы. Затем на пути луча оставится плоскопараллельная стеклянная пластинка, которая может вращаться вокруг вертикальной оси. Пластинка поворачивается из перпендикулярного к направлению луча положения до тех пор, пока полосы не исчезают.

После такой компенсации компоненты выходящего света, поляризованные перпендикулярно и параллельно силовым линиям, равны между собой. Тогда на пути луча ставится второе пламя, и полосы появляются вновь. С помощью второй стеклянной пластинки, помещаемой между поглощающим пламенем и полярископом, достигается повторное исчезновение полос. Из угла, на который надо повернуть вторую пластинку для получения этой компенсации, можно определить соотношение интенсивностей перпендикулярно и параллельно поляризованных компонент света, выходящего из поглощающего пламени.

Кроме этого, можно определить, насколько вообще велико поглощение в пламени для несмещенной длины волны. Это можно сделать обыкновенными фотометрическими методами или же взять настолько сильное поле, чтобы смещенные компоненты вообще не поглощались, затем с помощью стеклянной пластинки уравнять обе компоненты и т. д.

Так как величина зеемановского расщепления в функции поля известна, то таким способом можно определить поглощение, соответствующее каждому значению длины волны падающего света, и отсюда вычислить логарифмический декремент.

Я произвел лишь довольно грубые измерения. Поле выбиралось таким, чтобы поглощение перпендикулярно поляризованной компоненты составляло половину от поглощения параллельно поляризованной.

Для логарифмического декремента или, скорее, для среднего значения обоих получились величины порядка 10^{-5} . Понятно, что приведенные выше соображения не свободны от ряда упрощающих предположений. Например, показатель преломления считается равным единице. Расщепление линий натрия не является нормальным, средняя линия также расщепляется. Но это обстоятельство легко учесть, и порядок величины из-за этого не изменяется.

Помимо этого, одновременно наблюдаются обе линии D, так что получается некоторое среднее затухание.

Таким образом, описанный метод может дать лишь порядок величины логарифмического декремента. Я пробовал также, вместо поглощающего пламени, брать несветящиеся пары натрия, которые создавались в откачанной трубке. Однако эти опыты не доведены до конца.

Страсбург,
Физический институт.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ДЕКРЕМЕНТА И ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

[Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 4, 605—618, 1911. Совм. с Н. Д. Папалекси]

(Поступило 20 февраля 1911 г.)

Обычно применяющийся до сего времени метод измерения логарифмических декрементов и частот электромагнитных колебательных систем — резонансный метод Бьеркнеса — заключается, как известно, в следующем. Исследуемую систему заставляют воздействовать на колебательный контур — измерительный или резонансный контур — и снимают так называемую резонансную кривую по какому-либо из результатов воздействия (например, кривую тока или напряжения). Из этой резонансной кривой определяется затем логарифмический декремент $\epsilon = 2\pi \frac{\delta}{\nu}$ и частота $n = 2\pi\nu$, причем n определяется из положения максимума кривой (точка изохронизма), а ϵ — из формы кривой, например по формуле

$$\epsilon + \epsilon' = \pi x \sqrt{\frac{J_2}{J_{2\max} - J_2}}$$

Здесь $x = \frac{c_{20} - c_2}{c_2}$, а $J_{2\max}$ и J_2 — значения эффективного тока при емкости измерительного контура соответственно c_{20} и c_2 ; ϵ' — логарифмический декремент измерительного контура.

Мы разработали метод измерения логарифмического декременты и частоты, который также основан на использовании резонансного

контура. Но в противоположность бьеркнесовскому методу, в котором параметры колебательного процесса определяются из хода кривых $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$ или $\int_0^{\infty} V^2 dt$, в нашем методе используется кривая $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$.

Этот способ представляется нам обладающим известными преимуществами по сравнению с бьеркнесовским, а именно:

1. Равенство частот резонансного контура и измеряемого контура указывается прохождением кривой $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$ через нуль, так что частота измеряемого контура может быть определена чрезвычайно точно.

2. Логарифмический декремент определяется из положения экстремальных значений того же эффекта, а определение положения производится, вообще говоря, точнее и удобнее, чем количественное определение ряда отклонений.

3. Отклонения прибора, используемого для указания или измерения величины $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$, могут быть сделаны полностью независимыми от нерегулярности действия прерывателя или источника переменного тока, или искрового промежутка, что также обуславливает повышение точности измерений.

Теорию метода и прибора и полученные результаты мы подробно описали в *Annalen der Physik*, том 33, стр. 490, 1910. По просьбе редакции ежегодника *Jahrbuch der drahtlose Telegraphie* мы с удовольствием реферлируем здесь основные результаты этой работы.¹

¹ [Дальнейшее содержание этой работы кратко воспроизводит содержание указанной одноименной работы. См. статью 11, стр. 173].

МАЯТНИКОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДЕМОНСТРАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ В СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ

[Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 4. 515 — 521, 1911]

(Поступило 16 марта 1911 г.)

Несколько лет тому назад в связи с лекцией о беспроводной телеграфии я сконструировал модель для иллюстрации явлений в двух связанных колебательных контурах. По желанию редакции этого журнала, я привожу здесь краткое описание этой модели, в некоторых отношениях отличающейся от известной модели Обербека (Oberbeck).

Модель состоит из двух основных маятников, „связанных“ между собой с помощью системы зубчатых колес, и третьего „среднего“ маятника. Кроме того, прибор снабжен еще тремя маленькими маятниковыми резонаторами (слева на рис. 1). Эти маленькие маятники прикреплены к оси одного из основных маятников и настолько легки, что на движение основного маятника заметного влияния не оказывают. Они служат для анализа колебательного процесса.

Как видно из рисунка, основные маятники состоят из стержней, которые укреплены наверху на оси и несут передвижные грузы.

Средний маятник, связывающий оба основных, устроен так, что ось вращения проходит через его центр тяжести. Для этой цели передвижные грузы помещены на обеих сторонах стержня среднего маятника и могут закрепляться в любом месте.

Механизм, связывающий основные маятники с помощью среднего, в увеличенном масштабе представлен на рис. 2.

Каждый из маятников имеет отдельную ось; все оси лежат на одной прямой. С концами осей основных маятников жестко скреплены два одинаковых зубчатых колеса, сцепленных с третьим зубчатым колесом, свободно сидящим на стержне среднего маятника и могущим свободно вращаться вокруг последнего.

Эта механическая система является системой с двумя степенями свободы. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих положение системы, можно выбрать, очевидно, углы φ_1 и φ_2 ,

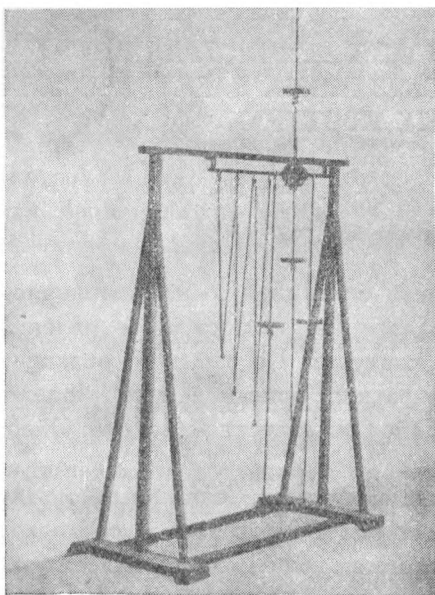


Рис. 1

которые образуют с вертикалью основные маятники. Тогда, благодаря механизму связи задан и угол $\varphi_{1,2}$, образуемый средним маятником с вертикалью, ибо, как легко видеть, $\varphi_{1,2} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$. Обозначим через K_1 и K_2 моменты инерции, через g_1 и g_2 — веса, через l_1 и l_2 — расстояния от центров тяжести до оси вращения обоих основных маятников, через M_1 и M_2 — моменты вращения $g_1 l_1$ и $g_2 l_2$. Обозначим, далее, момент инерции среднего маятника через $K_{1,2}$. Моментом инерции свободно сидящего на среднем маятнике зубчатого колеса мы пренебрегаем. Так как ось вращения проходит через центр тяжести среднего маятника, то его момент вращения $M_{1,2}$ следует положить равным нулю. Если рассматривать только малые отклонения маятников, то потенциальная энергия E_M и кинетическая энергия T_M могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2} (M_1 \varphi_1^2 + M_2 \varphi_2^2), \\ T_M &= \frac{1}{2} \left\{ K_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + K_2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{K_{1,2}}{4} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Мы можем теперь применить к нашей системе уравнения Лагранжа и получаем при этом следующие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} (K_1 + \frac{K_{1,2}}{4}) \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{K_{1,2}}{4} \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + M_1 \varphi_1 &= 0, \\ (K_2 + \frac{K_{1,2}}{4}) \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{K_{1,2}}{4} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + M_2 \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ia})$$

Сопоставим теперь уравнения (Ia) и соотношения (I) с известными уравнениями для двух непосредственно связанных колебательных контуров. Обозначим через c_1 и c_2 емкости, через $p_{1,2}$ — общую для обоих контуров самоиндукцию, через p_1 и p_2 — остальные части самоиндукций обоих контуров, а через q_1 и q_2 — заряды на конденсаторах. Тогда, как известно, выражения для электростатической энергии E_e и магнитной энергии T_e будут

$$\left. \begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{c_1} + \frac{q_2^2}{c_2} \right), \\ T_e &= \frac{1}{2} \left\{ p_1 \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + p_2 \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 + p_{1,2} \left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

а дифференциальные уравнения для q_1 и q_2

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + p_{1,2}) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + p_{1,2} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_1}{c_1} &= 0, \\ (p_2 + p_{1,2}) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + p_{1,2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_2}{c_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIa})$$

Сравнение уравнений (I) и (Ia) с уравнениями (II) и (IIa) показывает, что эти уравнения имеют одинаковую форму и различаются только смыслом переменных и коэффициентов. Если в уравнениях (I) и (Ia) заменить

$$\left. \begin{aligned} M_1 \text{ и } M_2 &\text{ через } 1/c_1 \text{ и } 1/c_2, \\ K_1 \text{ и } K_2 &\text{ „ } p_1 \text{ и } p_2, \\ K_{1,2}/4 &\text{ „ } p_{1,2} \\ \varphi_1, \varphi_2 &\text{ „ } q_1, q_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

то мы получим уравнения (II) и (IIa). Отсюда следует, что наша механическая система действительно может служить моделью двух непосредственно связанных колебательных контуров.

Маленькие маятники, находящиеся на модели слева (см. рис. 1), служат, как уже упоминалось, для анализа колебательного процесса; в области электрических явлений они соответствуют, следовательно,

резонансному контуру. Оказалось целесообразным не изменять период одного единственного маятника, а с самого начала брать столько маятников, сколько необходимо для анализа колебаний, и настраивать эти маленькие маятники на соответствующие частоты. В модели, изображенной на рис. 1, оба основных маятника были одинаковыми. В соответствии с этим для анализа колебаний необходимо было иметь только три маятника, причем средний из маленьких маятников был настроен на собственную частоту каждой

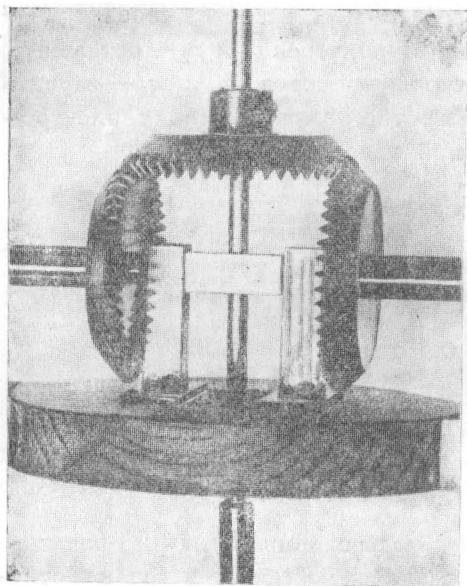


Рис. 2

из обеих парциальных систем, а два крайних — на нормальные частоты, возникающие в результате наличия связи.

Прежде чем перейти к описанию опытов, которые можно поставить с помощью этой модели для иллюстрации явлений в связанных электрических контурах, сделаем еще следующее замечание.

Для того чтобы вызвать собственные колебания одной из частей (контуров) электрической системы (двух связанных контуров), поступают, как известно, так: одну из частей системы возбуждают, в то время как другую часть лишают воз-

можности совершать заметные колебания. Это достигается, как оно делается и на практике, например тем, что второй контур разрывают. Но разорвать некоторый контур означает не что иное, как включить в него бесконечно малую емкость последовательно с имеющейся. В нашей механической модели, как следует из (III), бесконечно малой емкости соответствует бесконечно большой вращающий момент M . Следовательно, для того чтобы возбудить собственные колебания одного из маятников, надо вывести этот маятник из его положения равновесия и затем предоставить самому себе, в то время как второй маятник удерживается неподвижным, проще всего с помощью руки.

Модель позволяет демонстрировать следующие опыты.

1. Сначала можно показать собственные колебания одной из частей системы. Для электрической системы в этом случае конденсатор одного из контуров заряжается до тех пор, пока внезапный искровой разряд не положит начала колебаниям. При этом второй контур остается разомкнутым.

Для того чтобы это продемонстрировать на модели, основной маятник (левый на рис. 1) выводится на известный угол из положения равновесия и затем отпускается, причем второй основной маятник удерживается рукой.

При этом наблюдается следующее. Первый основной маятник совершает простые колебания вокруг своего положения равновесия. Все три маленьких маятниковых резонатора начинают двигаться, однако их амплитуды очень малы. Постепенно амплитуда среднего резонатора растет, становится намного больше, чем у остальных, и затем остается некоторое время постоянной.

2. Для демонстрации процесса колебаний в связанной системе мы снова выводим один из маятников (целесообразно правый на рисунке) из положения равновесия и предоставляем его самому себе. Но при этом второй маятник не фиксируется. Электрически это соответствует тому обычному случаю, когда мы имеем два непосредственно связанных колебательных контура, из которых заряжается только один. Теперь мы наблюдаем на модели следующее. Сначала колебания совершает только один основной маятник. Затем постепенно приходит в движение другой основной маятник, его амплитуда растет, и одновременно с этим амплитуда первого маятника уменьшается, потом наблюдается обратный процесс и т. д.

Обратившись к анализу колебаний при помощи маленьких резонаторов, мы увидим в этом случае, что сначала опять все три маятника придут в слабые колебания, но потом амплитуды обоих внешних будут сильно нарастать, в то время как средний маятник придет в состояние почти полного покоя. Таким образом, мы здесь непосредственно видим, что благодаря связи возникают два колебания, из которых одно ниже, а другое выше частоты собственных колебаний каждой из парциальных частей системы.

С помощью модели можно просто демонстрировать также явления при ударном возбуждении. Процесс ударного возбуждения, как его себе обычно представляют, в основном заключается в следующем. Имеются два связанных контура, один из которых (ударный контур) заряжен. При разряде энергия переходит к дру-

гому контуру, и как только вся энергия сосредоточилась во втором контуре, искра гаснет. Тем самым ударный контур прерывается, и, начиная с этого момента, второй контур продолжает колебаться со своей собственной частотой.

Это можно продемонстрировать с помощью модели следующим образом. Второй (правый) маятник приводят в колебания, а первый (левый) оставляют свободным. Как только амплитуда левого маятника станет большой, а амплитуда правого уменьшится до минимума, правый маятник задерживают рукой. Левый маятник продолжает колебаться, очевидно, с собственной частотой. Это ясно показывают маленькие резонаторы. Сначала все три приходят в слабые колебания, но как только правый основной маятник остановлен, амплитуда среднего маятникового резонатора очень сильно возрастает.

(Послано в печать 16 марта 1911 г.)

К ТЕОРИИ МИКРОСКОПИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ АББЕ

[*Ann. d. Phys.* 35, 881—897, 1911]

(Поступило 19 мая 1911 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с Аббе, различают изображения самосветящихся (накаленных) и несамосветящихся (освещенных) объектов и оба случая рассматривают в общем совершенно различно. Речь идет, в частности, об изменении, которое испытывает при ограничении изображающего пучка лучей диафрагмой точечное, подобное объекту изображение, построенное по правилам геометрической оптики. В случае самосветящегося объекта на месте каждой точки стигматического изображения появляется пятнышко, обусловленное дифракцией на диафрагме. Так как в этом случае лучи, исходящие из различных точек объекта, не когерентны между собой, то в плоскости изображения складываются интенсивности отдельных дифракционных пятнышек. Если две точки объекта лежат близко одна от другой и диафрагма мала, то пятнышки, соответствующие отдельным точкам объекта, могут взаимно перекрыться, так что вообще разделения обеих точек не получится. Как известно, Гельмгольц определил отсюда предел разрешающей силы микроскопа, показав, что если точки объекта отстоят друг от друга менее, чем на $\lambda/2$, перекрывание дифракционных пятнышек делает невозможным разрешение обеих точек даже тогда, когда ширина пучка достигает наибольшего теоретически возможного значения 180° .

Совершенно иным путем шел, как известно, Аббе при рассмотрении изображения несамосветящихся объектов. Если объект,

например решетка, освещается параллельным пучком лучей, то в фокальной плоскости объектива получается фраунгоферовская диффракционная картина, соответствующая структуре объекта. В случае решетки она состоит из спектров различных порядков. Эти спектры следует рассматривать как когерентные источники света, которые вызывают в плоскости, сопряженной с плоскостью объекта, интерференционное явление, представляющее собой собственно изображение объекта. Поэтому Аббе называет это изображение „вторичным“ в противоположность „первичной“ диффракционной картине, получающейся в фокальной плоскости.

Действие диафрагмы, которую мы представляем себе помещенной в фокальной плоскости объектива, заключается, по Аббе, в том, что она пропускает только часть первичного изображения; только эта часть участвует, далее, в образовании вторичного изображения. Мы можем, таким образом, построить первичное и вторичное изображения для любого направления освещающих лучей, приходящих по предположению из бесконечно удаленной точки. Если источник является протяженным, то суперпонируют интенсивности отдельных изображений, так как отдельные точки источника испускают не когерентные между собой лучи.

Если, в случае решетки, диафрагма пропускает только один, в частности, неотклоненный спектр, то в изображении вообще будет отсутствовать какая бы то ни было структура. Таким путем Аббе со своей стороны определил предел разрешающей силы микроскопа. Его результат совпадает с результатом, полученным Гельмгольцем для самосветящегося объекта.

Однако теория Аббе идет гораздо дальше решения указанного вопроса (определение разрешающей силы).

Сам Аббе говорит следующее:¹

„Итак, я считаю, что вопрос о пределе разрешающей силы играет в моем исследовании только второстепенную роль. Его задача, как это видно из „Beitrag“, состоит не в установлении того, что определенные предметы могут быть видимы, но скорее того, как они видимы. Оно имеет целью установить и объяснить многообразные модификации изображения при изменении освещения и при различном ограничении изображающих пучков“.

Результат своего исследования, который, конечно, вполне очевиден, если исходить из его изложения, Аббе выражает утверждением:²

¹ E. Abbe. *Gesamm. Werke* 1, стр. 283.

² E. Abbe. *l. c.*, стр. 82.

„... различные структуры всегда дают одинаковое микроскопическое изображение, если различия в связанных с ними диффракционных эффектах в микроскопе искусственно устранены, и что одинаковые структуры всегда дают различные изображения, если диффракционные эффекты в той их части, которая играет для микроскопа существенную роль, искусственно сделаны различными“.

Правильность этого положения обычно, следуя Аббе, подтверждают известными опытами с решеткой. Особенно поразительна при этом получающаяся при известных обстоятельствах полная несхожесть изображения и объекта, несмотря на большую резкость контуров.

Диафрагмированием каждого второго спектра в диффракционной картине простой решетки получают, например, появление ложной структуры, вдвое более тонкой, чем в действительности. Щелевая диафрагма, соответствующим образом повернутая по отношению к штрихам двухмерной прямоугольной решетки, позволяет получить в изображении вместо горизонтальных и вертикальных штрихов резкие диагонали.

Вопрос, который я хотел бы ниже обсудить, касается видоизменений изображения в результате действия диафрагмы в случае самосветящегося объекта.

Представим себе, например, что в одном из описанных выше опытов освещающий источник удален, а решетка раскалена до свечения. Спрашивается, как теперь будет выглядеть изображение, если никаких других изменений в опыте не произведено.

Общий результат может быть указан сразу же: если структура объекта груба по сравнению с длиной волны, то самосветящийся объект будет вести себя совершенно так же, как несамосветящийся, равномерно освещенный со всех сторон.¹

Хотя это положение в значительной мере очевидно, несколько более подробный подход к его обоснованию и к вытекающим из него следствиям представляется мне не лишним, тем более что в литературе, насколько я могу судить по соответствующим публикациям, удовлетворительного изложения этого вопроса не имеется.

Если, например, произвести опыт с диафрагмированием спектров нечетных порядков, причем решетка один раз освещается, а другой

¹ Я хотел бы здесь отметить, что для объекта, состоящего из двух светящихся точек, соответствующее замечание было сделано уже лордом Релеем, См. Lord Rayleigh, Scientific Papers, 4, стр. 241; см. также замечание на стр. 242 „It seems fair to conclude“ и т. л.

раз накаливается, то, как показывает опыт, в обоих случаях получается кажущееся удвоение числа штрихов, т. е. изображение, отнюдь не похожее на объект.

Сам Аббе, а также позднейшие авторы, например Луммер и Райхе, в их недавно появившейся книге,¹ считают, повидимому, что появление такого рода ложных структур в случае самосветящегося объекта невозможно.²

При сравнении модификаций изображения, обусловленных диафрагмой в случае самосветящегося объекта и в выясненном Аббе случае несамосветящегося объекта, целесообразно рассмотреть оба случая единообразно. Именно, можно и для несамосветящегося объекта, так же как это обычно делают для самосветящегося, считать, что действие диафрагмы сводится к появлению дифракционного пятнышка на месте каждой точки изображения. Однако в то время как для самосветящегося объекта отдельные пятнышки не когерентны между собой, в случае несамосветящегося объекта они когерентны, потому что отдельные точки объекта испускают теперь когерентные между собой лучи. При этом складываются амплитуды, а не интенсивности.

Подобное рассмотрение столько же правомерно, как и рассмотрение Аббе. Это подчеркнул лорд Релей,³ который на отдельных примерах показал путем расчета, что обоими методами получаются одинаковые результаты. Луммер и Райхе в их упомянутой выше книге также пользуются этим, отличным от аббевского, способом рассуждения. Я исхожу при дальнейшем рассмотрении из специальной оптической системы. Почти те же рассуждения справедливы, как это легко видеть, например, и для объектива микроскопа.

В фокальной плоскости системы линз L_1 находится объект. Плоскостью изображения является фокальная плоскость системы

¹ O. Lummer u. F. Reiche. Die Lehre von der Bildentstehung in Mikroskop. Braunschweig, 1910.

² Доктор Кёлер (A. Köhler), которому я имел случай показать описанные ниже опыты, любезно сообщил мне следующее. Позднее сам Аббе изменил свою точку зрения на поведение самосветящихся объектов. В разговоре с др. Кёлером он сказал, что не думает, чтобы опыты с удвоением числа штрихов, появлением ложных диагоналей и т. п. служили доказательством его теории, так как при этих условиях самосветящиеся объекты должны были бы вследствие дифракции на диафрагме давать в основном такие же ложные изображения. Но, насколько мне известно, Аббе об этом ничего не опубликовал.

³ Lord Rayleigh. l. c.

линз L_2 (рис. 1). Я предполагаю, что объект имеет характер решетки, т. е. состоит из очень длинных штрихов, перпендикулярных к плоскости рисунка, причем штрихи не должны быть обязательно эквидистантны или одинаковы по интенсивности. В этом случае мы можем ограничиться рассмотрением в одном измерении, как это большей частью делается для обычной решетки. В остальном объект должен обладать в разных точках только различной величиной абсорбции, но не различиями в показателе преломления.

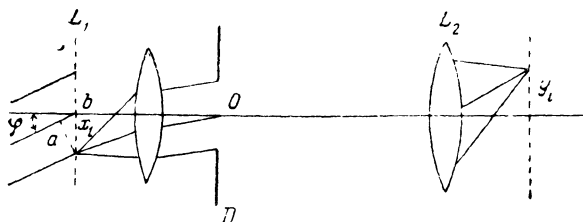


Рис. 1.

Речь идет, таким образом, об „абсорбционных“, а не о „рефракционных“ структурах.

Мы рассмотрим теперь 1) объект, состоящий из p дискретных линий, и 2) объект с непрерывным изменением яркости.

Для простоты предположим, что расстояния от оси как точек объекта, так и точек изображения малы по сравнению с фокусным расстоянием. Апертуру также возьмем малой.¹

СТРУКТУРА, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если через x_i обозначена координата i -ой точки объекта (рис. 1), то в относительных единицах мы можем положить амплитуду волны, излучаемой этой точкой, скажем, на единичном расстоянии, равной $f(x_i)$, причем $f(x)$ отлична от нуля только для отдельных значений x , именно $x=x_i$ ($i=1, 2, \dots, p$).

Мы рассматриваем произвольную точку объекта x_i .

Сопряженная ей (в смысле геометрической оптики) точка в плоскости изображения имеет координату y_i , а y (без индекса) означает текущую координату в плоскости изображения. Амплитуда A_i

¹ При большой апертуре необходимо было бы между прочим учитывать различную интенсивность излучения в различных направлениях. Об одном отношении сюда сообщением лорда Релея см. I, с., стр. 249.

светового вектора в точке y этой плоскости с точностью до несущественного постоянного множителя есть

$$A_i = f(x_i) \cdot F(y_i - y).$$

Эта формула является выражением того, что при сдвигании точки объекта в плоскости объекта, соответствующая ей дифракционная картина передвигается как целое. F определяется формой диафрагмы. Например, для одной щели

$$F(y_i - y) = \frac{\sin c(y_i - y)}{c(y_i - y)},$$

где c известным образом зависит от ширины щели и длины волны.

Сказанное касается амплитуды. Относительно фазы необходимо заметить следующее.

а) Если диафрагма симметрична относительно оси, что мы и предположим, то фаза в произвольной точке изображения определяется фазой в центре диафрагмы.¹ Для самосветящегося объекта, состоящего из многих дискретных точек, интенсивность J_s в плоскости изображения равна, очевидно, сумме отдельных интенсивностей. С точностью до числового множителя она равна, таким образом,

$$J_s = \sum_i (A_i^2) = \sum_i [f(x_i) \cdot F(y_i - y)]^2. \quad (I)$$

Для несамосветящегося объекта существенны фазовые сдвиги между отдельными точками объекта. Эти фазовые сдвиги определяются направлением падающего на объект параллельного пучка лучей (см. рис. 1). Если φ есть угол между падающим пучком и осью, то сдвиг фазы ψ_i в i -ой точке по отношению к точке на оси определяется отрезком ab . Он равен, таким образом,

$$\psi_i = \frac{2\pi x_i}{\lambda} \sin \varphi, \quad (1)$$

что в дальнейшем мы будем записывать в виде $\psi_i = m x_i$. Если световой вектор плоской волны, соответствующей осевой точке объекта, пропорционален в плоскости диафрагмы

$$\cos n t,$$

¹ См. например, В. Р. D r u d e, Lehrbuch der Optik, стр. 198 и 174. [Русский перевод: Д р у д е. Оптика. ОНТИ, 1935.]

то световой вектор волны, соответствующей точке x_i объекта выражается в центре диафрагмы как

$$\cos(nt - \psi_i), \quad (2)$$

так как оптические пути от всех точек объекта до центра диафрагмы равны между собой. Это сразу же становится очевидным, если представить себе центр диафрагмы O в виде светящейся точки. Плоскость объекта будет тогда волновой поверхностью. При учете (1) и (2) мы получаем в этом случае, т. е. при освещении объекта в направлении φ , результирующую амплитуду равной

$$\sum_i A_i \cos(nt - \psi_i)$$

и, следовательно, интенсивность J_D равной

$$J_D = \left[\sum_i f(x_i) F(y_i - y) \cos mx_i \right]^2 + \left[\sum_i f(x_i) F(y_i - y) \sin mx_i \right]^2. \quad (II)$$

Рассмотрим теперь J_s и J_D как функции y [(I) и (II)]. Мы видим, что в общем случае структура изображается различно, в зависимости от того, светится ли она сама, или освещается, и что ни одно из этих изображений не является непременно похожим на объект, так как J_s и J_D отличны друг от друга и от $[f(x_i)]$.² Если, однако, диафрагма такова (а именно — достаточно широка), что функция F заметно отличается от нуля только для аргумента, равного нулю, и, напротив, очень близка к нулю для $y = y_k$ ($k \neq i$), то оба рода изображений, как это без дальнейшего видно из (I) и (II), сходны между собой и с объектом.

Впрочем ясно и без расчета, что в случае, когда диффракционные пятнышки взаимно не налагаются, совершенно безразлично, являются ли они когерентными, или не когерентными.¹

Мы рассматриваем случай, когда диафрагма существенно изменяет изображение, а значит (I) и (II) отличаются друг от друга. Но пусть теперь при несамосветящемся объекте его освещают лучи не одного лишь направления, а одновременно всех направлений, заключенных внутри угла между $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$. Лучи различных направлений внутри этого конуса не когерентны между собой. Чтобы найти

¹ См. Lord Rayleigh, l. c., стр. 236.

распределение интенсивностей J'_D в изображении в этом случае, мы должны умножить (II) на

$$\cos \varphi d\varphi = \text{const} \cdot dm$$

и проинтегрировать в интервале $\neq \varphi_0$ ($\cos \varphi$ входит здесь вследствие наклона плоскости объекта по отношению к освещающим лучам. Предполагается, что освещение „равномерное“, как это примерно имеет место в действительности в случае светящейся линии, находящейся в фокальной плоскости линзы и перпендикулярной к штрихам).

Легко видеть, что члены, получающиеся в (II) при возведении сумм в квадрат из удвоенных произведений и содержащие $\cos m(x_i - x_k)$, после интегрирования оказываются исчезающе малыми по сравнению с квадратичными членами, имеющими вид

$$[f(x_i) F(y_i - y)]^2,$$

если только $m_0 = \frac{2\pi \sin \varphi_0}{\lambda}$ очень велико по сравнению с $1/|x_i - x_k|$ (x_k означает координату k -ой точки).² Но тогда после интегрирования (II) вплоть до несущественного фактора совпадает с (I). Мы получаем таким образом результат:

Если структура, состоящая из дискретных элементов, равномерно освещается с различных направлений и раствор освещающего пучка так велик, что сдвиг фаз между двумя соседними точками объекта, имеющий различную величину для каждого направления освещения, принимает с большой частотой все возможные значения, то эта структура отображается, как самосветящаяся.

Применим этот результат к изображению решетки. Пусть вначале решетка является несамосветящейся. Теория Аббе дает тогда, что при диафрагмировании каждого второго спектра получается удвоение числа штрихов. Диафрагма должна быть при этом такой, чтобы ширина отверстий была меньше, чем ширина непрозрачных полос. Тогда, при фиксированном положении диафрагмы, в зависимости от направления освещающих лучей будут диафрагмированы либо

¹ Так как в этом случае $\cos m(x_i - x_k)$ очень часто меняет свой знак в области интегрирования.

² Если число штрихов p , из которых состоит объект, велико, то достаточным условием является, чтобы m_0 было велико по сравнению с $\lg p/|x_i - x_{i+1}|$, где $|x_i - x_{i+1}|$ означает наименьшее расстояние между двумя соседними штрихами.

все спектры, либо каждый второй из них. Таким образом, для любого направления освещения, если вообще что-либо видно, получается структура вдвое более тонкая, чем в действительности. Поскольку это справедливо при параллельном освещении произвольного направления, постольку удвоение должно получаться и для произвольного освещения с как угодно широким углом раствора. Но отсюда следует, что, вследствие указанного выше свойства самосветящихся объектов, удвоение должно наблюдаться и для них.

С другой стороны, ясно, что если при той же самой диафрагме с самого начала взять в качестве объекта решетку с двойным числом штрихов, то она даст подобное себе изображение. Таким образом, при известных условиях, похожее изображение могут давать и „различные самосветящиеся объекты“. Сам Аббе придерживался, повидимому, того мнения, что это невозможно.¹

НЕПРЕРЫВНЫЕ СТРУКТУРЫ

До сих пор мы рассматривали структуру, состоящую из дискретных элементов. Как мы видели, в этом случае существенную роль играет отношение расстояния между двумя соседними точками объекта к длине волны и поэтому результат не может быть непосредственно перенесен на непрерывные структуры. Простой пример показывает далее, что нельзя утверждать и следующее: прерывной структуре с очень далеко, по сравнению с λ , отстоящими друг от друга дискретными точками соответствует непрерывная структура, у которой на сравнимых с λ расстояниях изменения интенсивности, представляющие здесь структуру, очень малы.

Действительно, если отдельные точки в первом случае так далеко отстоят друг от друга, что дифракционные пятнышки не перекрываются, то при изменении направления освещения изображение остается неизменным. Напротив, если мы имеем дело с непрерывным объектом, например с широкой щелью, то рассмотрение по Аббе немедленно приводит нас к почти полному отсутствию освещенности, коль скоро освещающие лучи так наклонены, что изображение бесконечно удаленной точки, из которой они исходят, не попадает в отверстие диафрагмы.

Мы исходим из выражения (II). $f(x)$ является теперь непрерывной функцией от x и отлична от нуля не только для отдельных

¹ E. Abbe. Abhandlungen I. стр. 284.

значений x . Квадраты сумм могут быть написаны в виде двойных интегралов, и для интенсивности J_D от несамосветящегося объекта, простирающегося от $x = a$ до $x = b$, мы получаем

$$J_D = \int_a^b f(x_1) F(y_1 - y) dx_1 \int_a^b f(x_2) F(y_2 - y) \cos m(x_1 - x_2) dx_2.$$

Если объект освещается не с одного направления, а равномерно со всех, лежащих между $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$, то мы должны, как и ранее в случае прерывной структуры, умножить (IIa) на $\cos \varphi d\varphi$ и проинтегрировать от $-\varphi_0$ до $+\varphi_0$. Обозначим опять $\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = m$ и изменим порядок интегрирования, что мы предполагаем допустимым. Мы получим тогда (с точностью до несущественного множителя) выражение для интенсивности J'_D

$$J'_D = \int_a^b f(x_1) F(y_1 - y) dx_1 \int_a^b f(x_2) F(y_2 - y) \frac{\sin m_0(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} dx_2 \quad (\text{IIa})$$

$$\left(m_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi_0 \right).$$

Но для самосветящегося объекта выражение для интенсивности J'_s есть, очевидно,

$$J'_s = \int_a^b [f(x_1) F(y_1 - y)]^2 dx_1. \quad (\text{Ia})$$

Здесь, как и выше, x_1 и x_2 обозначают координаты в плоскости объекта; y_1 и y_2 — координаты в плоскости изображения, причем $y_{1,2} = N x_{1,2}$, где N — линейное увеличение.

Если $\varphi(\alpha)$ — произвольная непрерывная функция аргумента α , то, как известно,¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha} d\alpha = \pi\varphi(0) \quad \text{при } a < 0 < b. \quad (3)$$

Интеграл будет близок к $\pi\varphi(0)$ и тогда, когда n конечно, но так велико, что $\varphi(\alpha)$ остается еще достаточно постоянной в интервалах, больших по сравнению с $2\pi/n$.²

¹ Riemann — Weber. Partielle Differentialgl., I, стр. 37.

² Если φ имеет в рассматриваемом интервале большое количество максимумов, то учет их ведет к результату, аналогичному указанному во второй ссылке на стр. 218 для дискретных структур.

Применив это к (IIa), мы получаем $J'_D = J'_s$, т. е.: *изображение накаленного объекта идентично изображению равномерно освещенного объекта, если 1) структура груба по отношению к $\lambda/\sin \varphi_0$, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с $\lambda/\sin \varphi_0$, имеют место лишь небольшие различия интенсивности, и одновременно 2) диафрагма такова, что интенсивность дифракционной картины, которая соответствует в плоскости изображения одной точке объекта, очень мало меняется на расстояниях, больших по сравнению с $\lambda N/\sin \varphi_0$.*

С помощью (3) из (IIa) и (Ia) легко получить, кроме того, как это впрочем видно и непосредственно, что при применении в качестве диафрагмы одного широкого отверстия грубая структура дает как в случае самосветящегося объекта, так и при (не слишком наклонном) освещении изображение, похожее на объект.

ОПЫТЫ

Я хотел бы описать еще несколько простых опытов, которые могут служить иллюстрацией выше описанного поведения самосветящихся объектов.

Я исхожу при этом из установки, описанной А. Винкельманом¹ и позволяющей показать большой аудитории те опыты, которые Аббе производил с микроскопом для обоснования своей теории изображения несамосветящихся объектов. Устройство этой установки следующее. Двухмерная решетка с постоянной 0.33 мм освещается посредством вольтовой дуги и линзы. Вторая линза отбрасывает увеличенное изображение решетки на экран. В обращенной к экрану фокальной плоскости этой линзы помещается щелевая диафрагма, которую можно поворачивать. При соответствующей ширине щели и в зависимости от ее положения, т. е. от пропускаемой ею части дифракционной картины, на экране появляются только горизонтальные или только вертикальные штрихи или же диагонали. Винкельман описал также простую установку для субъективного наблюдения при помощи трубы. Примененная им в этой установке более грубая решетка имела постоянную, равную 3 мм. В моих опытах я пользовался описанной методикой с несущественными изменениями. Применявшиеся мной структуры имели постоянные того же порядка,

¹ A. Winkelmann. Ann. d. Phys. 19, 417; см. также U. Behr u. W. Heuse, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8, 283, 1906.

что и у Винкельмана. Но я мог, как это будет видно далее, делать объект самосветящимся.

В фокальной плоскости ахроматической линзы с фокусным расстоянием около 30 см помещался кусок ауэровской сетки (примерно 1.5×1.5 см), который служил объектом. Сетка укреплялась в жестяной рамке с соответствующим отверстием. Позади линзы, в ее фокальной плоскости, находилась щель, ширину которой можно было менять. Щель могла, кроме того, поворачиваться в своей плоскости. Наблюдение производилось с помощью трубы небольшого спектрометра. Вместо линзы и щели я применял также перевернутый коллиматор спектрометра.

Если осветить сетку сзади, например, ауэровской горелкой и хорошо сфокусировать трубу на сетку при широко открытой, скажем, вертикальной диафрагме, а затем суживать щель, то видно, как постепенно исчезают все детали ткани, пока, наконец, не остаются резкие, совершенно прямые горизонтальные полосы на темном фоне. Если теперь повернуть щель на 90° , то видны такие же резкие вертикальные прямые полосы.

При повороте щели примерно на 30° появляются резко выраженные прямолинейные диагонали. Как вертикальные, так и горизонтальные линии при этом исчезают.

Если при каком-либо из указанных положений диафрагмы удалить освещающий источник и раскалить служащую объектом сетку с помощью бунзеновской горелки, оставляя все остальное без изменений, то картина не меняется. Попрежнему видны горизонтальные или вертикальные полосы или же диагонали, но, само собой разумеется, светлые и темные участки меняются местами.

Это иллюстрируется рис. 2, *b* и 2, *c*, которые срисованы с фотографического снимка. Рис. 2, *a* дает вид изображений при освещении параллельным пучком лучей. Если накалить сетку и поставить диафрагму, например, на появление диагоналей и после этого осветить сетку сзади, то, подобрав интенсивность освещения, можно добиться почти полного исчезновения структуры в отдельных местах изображения.

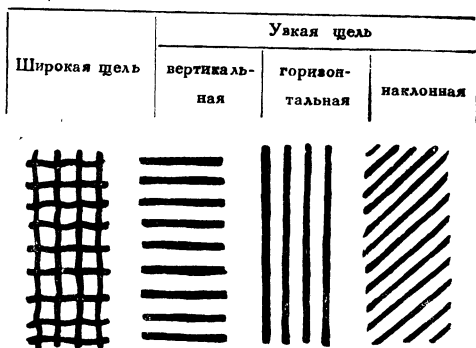
При другой примененной мною сетке в поле зрения попадали три горизонтальные полосы. Сами эти полосы были узкими и резкими. Если теперь вертикальную щелевую диафрагму поставить накрест с горизонтальной решеткой (достаточно уже немногих отверстий), то видно, как увеличивается число штрихов в изображе-

нии.¹ Для примененной сетки я получал утроение числа штрихов. Отдельные полосы были эквидистантны между собой. Когда, вместо освещения, объект накаливался, утроение сохранялось.

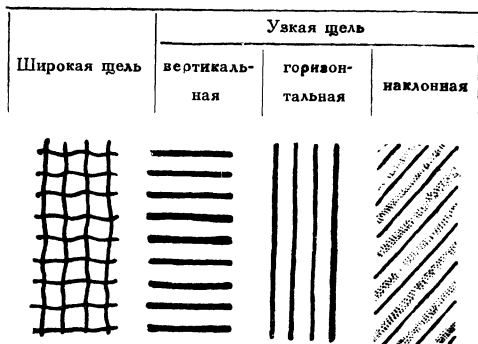
Еще несколько опытов было проведено с более тонкой платиновой сеткой (около 1000 ячеек на квадратный сантиметр). Сетка помещалась на место ауэровской сетки и освещалась вертикальной лампой Нериста, удаленной примерно на 2.5 м.

В качестве диафрагмы здесь использовалась щель коллиматора. Коллиматор обычным образом помещался на спектрометре и мог поворачиваться над лимбом. Линза коллиматора была удалена. Сетка наблюдалась с помощью трубы того же спектрометра.

Получаемые при этом вертикальные спектры могли наблюдаться на листе бумаги, помещенном в фокальной плоскости изображающей линзы. Таким путем щель коллиматора устанавливалась так, что пропускался только неотклоненный спектр и притом точно через середину щели. Ширина щели выбиралась вначале такой, чтобы



а. Объект освещается параллельными лучами



б. Объект освещается диффузно



с. Самосветящийся объект

Рис. 2

¹ При этом опыте желательно брать сетку, у которой горизонтальные полосы более редкие и резкие, чем вертикальные.

оба первых боковых спектра не попадали в ее отверстие. При этом, как известно, вертикальные полосы в изображении отсутствуют. (Сетка используется здесь, собственно говоря, как простая решетка с вертикальными полосами). Эта установка соответствует, очевидно, центральному освещению. Чтобы осветить теперь объект косым пучком, можно, вместо сдвигания лампы Нернста, притти к тому же результату, поворачивая коллиматор на лимбе до тех пор, пока при неизменной ширине щели не будут пропущены два спектра. А именно, если средний спектр падает при этом на край щели, то и первый отклоненный спектр также попадает в отверстие.

В изображении ясно видны теперь вертикальные полосы. Если затем отклонить лампу Нернста из ее вертикального положения так, чтобы в горизонтальной плоскости (которая нас здесь только и интересует) падающие лучи уже не были параллельными, то вертикальные полосы становятся менее четкими, так как добавляется равномерный светлый тон. Если удалить лампу Нернста и накалить сетку, то вертикальные полосы появляются. Эти полосы, насколько можно судить на фоне общей довольно сильной освещенности и окрашивания, оказываются такими же, как в случае наклоненной лампы, т. е. освещения непараллельным пучком.

Это, во всяком случае качественно, совпадает с результатами изложенных выше теоретических соображений. При щели, наклоненной под углом примерно в 45° по отношению к вертикали, резкие диагонали выступают и в этом случае накаленной решетки.

РЕЗЮМЕ

Я хотел бы кратко суммировать изложенное. Уже лорд Релей указал на то, что теория Аббе не является единственно возможной теорией изображения несамосветящихся объектов. Случай самосветящегося и несамосветящегося объекта можно трактовать единообразно, если и для несамосветящегося объекта учитывать при вычислениях действие диафрагмы путем замены каждой точки геометрического изображения обусловленным диафрагмой дифракционным пятнышком. При этом необходимо только принять во внимание, что отдельные пятнышки когерентны между собой. Если условия таковы, что эта когерентность существенна для вида изображения, то несамосветящийся объект будет изображаться иначе, чем самосветящийся. Между изложенными соображениями и рассмотрением

Аббе нет никакого противоречия. В зависимости от обстоятельств может оказаться более удобным либо тот, либо другой способ.

С помощью единообразного метода рассмотрения выше было показано, что в общем случае не слишком тонких структур самосветящийся объект ведет себя так же, как несамосветящийся, равномерно освещенный со всех сторон.

Этот результат позволяет между прочим применять теорию Аббе и в специальных случаях изображения самосветящихся объектов.

Применение этой теории чрезвычайно целесообразно в вопросах об изменении изображения благодаря диафрагме, так как она исходит из первичного изображения, лежащего в плоскости диафрагмы. Она позволяет поэтому часто без всяких вычислений предвидеть действие различных диафрагм.

Пример подобного перенесения теории Аббе на случай самосветящегося объекта приведен на стр. 11. Аналогично может быть рассмотрен вопрос о пределе разрешающей силы для самосветящегося объекта. Представим себе сначала несамосветящуюся решетку с постоянной $< \lambda/2$. Как показал Аббе, такая решетка не может дать изображения, так как в этом случае в фокальной плоскости объектива существует вообще один единственный максимум, который создает в плоскости изображения только равномерную освещенность и не дает никакой структуры. Но это остается справедливым и в том случае, если мы представим себе, что каждые два соседние штриха обладают произвольной постоянной разностью фаз. Так как и суперпозиция всех таких распределений интенсивности не дает никакой структуры, то мы заключаем,¹ что и самосветящаяся решетка с постоянной меньшей, чем $\lambda/2$, не может быть отображена.

Страсбург,
Физический институт
Университета.

¹ Предполагается, что большая апертура, которая при этом необходима, по крайней мере качественно результата не изменит.

**ОТВЕТ НА ЗАМЕЧАНИЯ ГОСПОД О. ЛЮММЕРА и Ф. РАЙХЕ
ПО ПОВОДУ МОЕЙ СТАТЬИ
„К ТЕОРИИ МИКРОСКОПИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ АББЕ“**

[*Ann. d. Phys.* 39, 493—495, 1912]

(Поступило 25 июля 1912 г.)

Господа О. Люммер и Ф. Райхе¹ опубликовали несколько замечаний к моей вышеназванной статье.² Эти замечания могут быть разделены, по-моему, на три части.

В первой господа Люммер и Райхе признают, что в результате моей работы установлена связь между изображениями самосветящихся и несамосветящихся объектов при различных диафрагмах.

Второй частью их статьи является известная претензия в пользу приоритета Аббе по отношению к лорду Релею. Речь идет о следующем:

Изображение несамосветящегося объекта можно рассматривать как суперпозицию дифракционных картин, получающихся от отдельных точек объекта; при этом необходимо учитывать когерентность этих отдельных изображений. Можно также, как впервые показал Аббе, исходить из „первичной“ картины, соответствующей источнику света. Я обозначил первый способ рассмотрения как „неаббевский“ и при этом сослался на лорда Релея. Господа Люммер и Райхе протестуют против этого. Я хотел бы заметить по этому поводу, что указанное обозначение я употребил исключительно для того,

¹ O. Lummer u F. Reiche. *Ann. d. Phys.* 37, 839, 1912.

² L. Mandelstam. *Ann. d. Phys.* 35. 881, 1911. [Статья 15.]

чтобы иметь возможность коротко охарактеризовать первый способ рассмотрения в противоположность второму — специфическому для Аббе. При этом я был далек от намерения затрагивать какие бы то ни было вопросы приоритета.

Все это не дало бы мне никакого повода для возражений.

Но господа Люммер и Райхе сделали еще третье высказывание. Они оспаривают следующее положение моей статьи: „Сам Аббе, а также позднейшие авторы, например Люммер и Райхе, в их недавно появившейся книге считают, повидимому, что появление такого рода¹ ложных структур в случае самосветящегося объекта невозможно“.

В своих „Замечаниях“ они объявляют появление ложных структур в случае самосветящегося объекта общеизвестным фактом. Если они хотят сказать этим, что на вид изображения влияние диафрагмы является и в случае самосветящихся объектов давно известным, то это, само собой разумеется, правильно. Однако в моей работе речь идет не об этом. Цитированная фраза стоит у меня после обсуждения известных опытов Аббе с появлением диагоналей в случае двухмерной решетки, с удвоением числа штрихов у обычной решетки и т. д. Нельзя поэтому ошибочно истолковать, что я понимал под „такого рода“ ложными структурами. Если же господа Люммер и Райхе хотят сказать, что и *появление таких ложных структур при самосветящихся объектах* тоже было известно, то с этим согласиться я не могу.

В литературе я не нахожу никаких подобных указаний и, наоборот, нахожу противоположные утверждения. Я процитирую здесь самих господ Люммера и Райхе.²

„При отображении самосветящихся объектов, изображение, построенное согласно волновой теории, тем больше совпадает в отношении сходства и точечного соответствия с изображением, построенным по законам геометрической оптики, чем больше угол раскрытия изображающегося пучка лучей. Таким образом, обе теории приводят к различным результатам только в отношении четкости изображения, *в то время как сходство между изображением и объектом сохраняется в обеих. Иначе обстоит дело при*

¹ Подчеркнуто уже в моей первой статье.

² „Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von E. Abbe“. Bearbeitet und herausgegeben von O. Lummer u. F. Reiche. Verf. v. Fr. Vieweg & John in Braunschweig, 1910, стр. 2.

отображении несамосветящихся объектов. Как впервые показал Аббе, здесь при известных обстоятельствах появляются изображения, совершенно не похожие на объект“.

Я подчеркнул то, что существенно для дискутируемого вопроса. Я не знаю, как нужно понимать это место иначе, чем в моем цитированном выше утверждении.

Страсбург,
Физический институт.

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

[Weber-Festschrift, 1912]

В большинстве применений интегральных уравнений к физическим вопросам речь идет о сведении решения дифференциального уравнения с заданными граничными условиями к решению уравнений вида

$$f(\xi) = \varphi(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, x) f(x) dx \quad (1)$$

относительно неизвестной f .

Данная статья посвящена оптической задаче, математическая формулировка которой непосредственно приводит к интегральному уравнению (1) (при $\varphi \equiv 0$) без того, чтобы обращаться к какому-либо известному дифференциальному уравнению, которое определяло бы искомую функцию.

§ 1

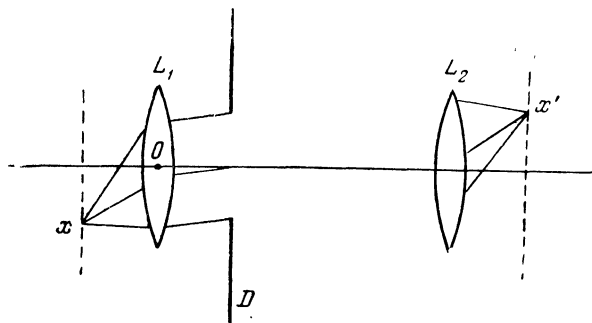
После работ Аббе известно, что для всякого оптического изображения весьма существенную роль играет ограничение изображающих пучков диафрагмой. Построенное по правилам геометрической оптики и подобное объекту изображение различным образом модифицируется в зависимости от величины и формы диафрагмы. Действительное изображение в общем случае не похоже на объект. Это справедливо

как для несамосветящихся (освещенных), так и для самосветящихся (например, накаливаемых) объектов.¹

До сих пор преимущественно занимались изучением того, как изображается заданный объект через данную диафрагму, например интересовались той шириной, которую по меньшей мере должна иметь диафрагма, чтобы в изображении еще выявлялась какая-либо структура. Этот вопрос сводится, как известно, к определению предела разрешающей силы оптических инструментов.²

Вопрос, который я хотел бы ниже коротко обсудить, заключается в следующем:

Какие структуры дают подобное себе изображение при заданной диафрагме?



При дальнейших рассуждениях я буду исходить из изображающей системы, схематически показанной на рисунке. Во всех существенных своих пунктах рассуждения могут быть перенесены, например, на микроскоп или подзорную трубу.

В фокальной плоскости системы линз L_1 находится объект. Пусть линия пересечения этой плоскости с плоскостью чертежа будет осью x ; ось z расположим в точке O перпендикулярно плоскости чертежа. O является осевой точкой изображающей системы. Диафрагма D находится во второй фокальной плоскости L_1 . Изображение получается в фокальной плоскости системы линз L_2 .

¹ См. L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 35, 881, 1911. [Статья 15.]

² Укажу в особенности на работу лорда Релея (Scientific Papers, 4, стр. 235), который рассматривает в качестве объекта бесконечную решетку с бесконечно близкими штрихами или бесконечно большим числом эквидистантных точек и вычисляет распределение освещенности, соответствующее этому объекту при круглой и прямоугольной диафрагмах.

Я буду говорить здесь только об одномерных объектах, т. е. о таких, у которых распределение освещенности (структура) ограничивается одной линией — осью x , являясь в остальном произвольной функцией от x . „Изображением“ является тогда распределение освещенности на линии, сопряженной с осью x . В отличие от предыдущей работы,¹ я не ограничиваюсь здесь щелевидной диафрагмой. Однако, как и там, апертура изображающего пучка предполагается малой.

Замечу еще следующее. Равенства (5) и (7) остаются справедливыми и для решеткообразных структур, т. е. таких, у которых распределение света на объекте является функцией только от x и не зависит от z , но K является тогда дифракционным изображением не светящейся точки, а светящейся линии, параллельной оси z .² Соотношение между самосветящимся и несамосветящимся объектом при этом в общем случае изменяется. Для решеткообразных структур и решеткообразных диафрагм соотношения, приведенные в тексте, сохраняют неизменную форму.

Примеры 1 и 2 справедливы как для линейных, так и для решеткообразных объектов. Примеры 3 и 4 — только для первого случая. Последующие рассуждения могут быть, вообще говоря, без дальнейшего перенесены на случай двумерных объектов и приводят в этом случае к интегральному уравнению с двумя переменными.

§ 2

Пусть первоначально объект состоит из n дискретных точек. Если x_i обозначает расстояние от оси i -ой точки объекта, x_i' — расстояние от оси точки изображения, сопряженной ей в смысле геометрической оптики, то $x_i' = \kappa x_i$, где постоянная κ означает увеличение. Мы положим $\kappa = 1$, т. е.

$$x_i' = x_i. \quad (2)$$

Мы не ограничиваем этим общности результата, поскольку окончательные уравнения остаются справедливыми для любого увеличения.

В плоскости изображения распределение света, исходящего из точки x_i — „изображение“ этой точки, — представляет собой,

¹ Ann. d. Phys., l. c.

² Lord Rayleigh. l. c., стр. 255.

как известно, фраунгоферову дифракционную картину, соответствующую диафрагме D , освещенной из точки x_i . Таким образом, в произвольной точке ξ' плоскости изображения амплитуда светового вектора есть

$$A = B_i K(x_i' - \xi'), \quad (3)$$

где B_i определяется амплитудой в рассматриваемой точке объекта, а вид функции K зависит от формы диафрагмы. Например, для прямоугольного отверстия

$$K(x_i' - \xi') = \text{const} \frac{\sin c(x_i' - \xi')}{x_i' - \xi'},$$

где c известным образом зависит от ширины отверстия и длины волны света.

K зависит только от $x_i' - \xi'$; этим выражается то обстоятельство, что при смещении точки объекта x_i дифракционная картина передвигается как целое.

Если объект состоит из большего числа точек, то необходимо различать два случая:

1. Объект освещается, и мы предположим при этом центральное освещение, т. е. освещающие лучи параллельны оси.

В этом случае различные точки объекта излучают колебания одинаковой фазы. Суперпонируют амплитуды изображений, соответствующих отдельным точкам.¹

Если мы вновь обозначим через A полную амплитуду в точке ξ' плоскости (или, вернее, линии) изображения, то

$$A = \sum_{i=1}^n B_i K(x_i' - \xi'). \quad (3a)$$

2. Объект является самосветящимся. Отдельные точки объекта излучают не когерентные между собой колебания. При этом суммируются интенсивности, т. е. квадраты амплитуд, и мы получаем при тех же обозначениях

$$A^2 = \sum_{i=1}^n B_i^2 K^2(x_i' - \xi'). \quad (3b)$$

¹ См. L. Mandelstam. l. c., стр. 887 [стр. 217 этого тома].

Мы можем теперь потребовать, чтобы в n точках плоскости изображения, сопряженных n точкам объекта, наблюдалось определенное распределение освещенности, например то же самое, какое имеет место между точками объекта. Большого сходства между объектом и изображением в случае n отдельных точек, очевидно, требовать нельзя.

При этом мы получаем из (3а) n линейных уравнений

$$B_k = \lambda \sum_{i=1}^n B_i K(x_i' - x_k') \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

В случае самосветящегося объекта (3б) дает совершенно аналогичные уравнения

$$B_k^2 = \lambda \sum_{i=1}^n B_i^2 K^2(x_i' - x_k') \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

для интенсивностей B_i^2 , которые только и имеют значение в этом случае.

§ 3

Рассмотрим теперь непрерывную структуру. В этом случае распределение амплитуд не ограничивается n дискретными точками, а представляет собой непрерывную функцию $f(x)$. Тогда амплитуда лучей, выходящих из элемента объекта dx , есть $f(x) dx$, а соответствующее распределение амплитуд в функции от ξ' в плоскости изображения вполне аналогично выражению (3):

$$f(x) dx \cdot K(x' - \xi').$$

x' означает, как и в (3), точку изображения, сопряженную x , а ξ' — текущая координата в изображении.

Обусловленная всем объектом освещенность $\Phi(\xi')$ — его изображение — равна, очевидно,

$$\Phi(\xi') = \int_{-a}^{+a} f(x) K(x' - \xi') dx. \quad (4)$$

При этом принято, что объект простирается от $x = -a$ до $x = +a$.

Для того чтобы изображение было подобно объекту, необходимо, чтобы

$$\Phi(\xi') = \frac{1}{\lambda} f(\xi'),$$

где $1/\lambda$ — постоянная. Подставляя это в (4) и учитывая, что, согласно (2), $x = x'$, мы приходим к следующему выводу.

При данной диафрагме и центральном освещении подобное себе изображение дают те структуры (распределения амплитуд), которые удовлетворяют интегральному уравнению

$$f(\xi) = \lambda \int_{-a}^{+a} f(x) K(x - \xi) dx. \quad (5)$$

Ядро K представляет собой при этом соответствующую данной диафрагме фраунгоферовскую дифракционную картину.

Для самосветящегося объекта, вместо уравнения (5) для распределения амплитуд f , получается совершенно аналогичное уравнение для распределения интенсивностей f^2 . А именно, подобное изображение дают те f^2 , которые удовлетворяют уравнению

$$f^2(\xi) = \lambda \int_{-a}^{+a} f^2(x) [K(x - \xi)]^2 dx. \quad (5a)$$

Конечно, физический смысл имеют только те решения, которые не принимают отрицательных значений. В случае несамосветящихся объектов, когда искомая функция представляет собой распределение амплитуд, имеют смысл и другие решения. А именно, отрицательное значение амплитуды означает сдвиг фазы на половину длины волны, который может быть получен, например, в результате помещения на пути освещающих лучей слюдяной пластинки.

Предположим теперь, что диафрагма симметрична по отношению к оси. Тогда K является четной функцией аргумента, т. е. симметричной относительно x и ξ .

Не прибегая к теории интегральных уравнений, можно вывести следующее:

Если $K(x, \xi)$ может быть представлено в форме

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \varphi_i(\xi) \quad (6)$$

при конечном n , то из (5) получается

$$f(\xi) = \lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \int_{-a}^{+a} f(x) \psi_i(x) dx.$$

Подставив сюда f в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x),$$

где c_i — неопределенные коэффициенты, мы получим n линейных уравнений для c_i :

$$c_i = \lambda \sum_{k=1}^n K_{i,k} c_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$K_{i,k} = \int_{-a}^{+a} \psi_i(x) \varphi_k(x) dx.$$

Полагая детерминант (6а) равным нулю, получим уравнение n -го порядка для λ , т. е. n значений λ , которые не обязательно отличны друг от друга и которые при $K_{i,k} = K_{k,i}$, что всегда имеет место в рассматриваемом случае, все действительны.

Если все корни различны, то существует точно n решений, т. е. n структур, дающих подобные себе изображения. Случай кратных корней может быть исследован общеизвестным образом.

Уравнение (6а) показывает, что при данной диафрагме подобные изображения могут давать не более чем $\frac{n(n+1)}{2}$ самосветящихся объектов.

Случай, когда ядро допускает разложение (6), практически осуществляется, если диафрагма состоит из многих очень тонких прозрачных штрихов.

Теория интегральных уравнений¹ в том виде, в каком она в последнее время разработана преимущественно Фредгольмом

¹ Я хотел бы и здесь выразить мою глубокую благодарность г-ну профессору Мизесу (Mises) за любезность, с которой он неоднократно давал мне консультации по затронутым здесь вопросам.

и Гильбертом, показывает, что совершенно аналогичные выводы могут быть сделаны, если даже разложение (6) невозможно. В этом случае — для симметричных ядер — существует бесконечно много действительных значений λ , для которых (5) может быть решено. Каждое такое значение λ обладает самое большее конечной кратностью. Если все значения простые, то существует бесконечное множество подобно изображающихся структур, которые не переходят друг в друга непрерывно. В случае кратных корней таких структур существует континуум, так как линейная комбинация из отдельных решений (5), соответствующих кратным значениям λ , при произвольных постоянных коэффициентах также является решением (5). Практически важно следующее положение: для произвольного Λ существует только конечное число значений λ таких, что $|\lambda| < \Lambda$. Отсюда следует, что из бесконечного множества структур, которые (при различных значениях λ) дают подобные изображения, только конечному числу соответствует заметная освещенность изображения. Если мы предположим, что различные объекты освещены или накалены таким образом, что они дают одинаковую среднюю освещенность, то средние освещенности соответствующих изображений относятся, как это видно из вывода уравнений (5) и (5а), обратно пропорционально соответствующим λ^2 в случае несамосветящихся объектов или обратно пропорционально соответствующим (положительным) λ в случае самосветящихся объектов. Так как вследствие вышеприведенного положения существует только конечное количество λ , меньших заданной величины Λ , то мы видим, что если положить Λ достаточно большим, то структуры, соответствующие всем остальным значениям λ , будут изображаться лишь с ничтожной яркостью.

Нужно заметить коротко еще следующее. Каждое ядро может быть аппроксимировано конечной суммой произведений вида (6), и тогда можно получить приближенные значения λ и соответствующих решений f из системы линейных уравнений.

В рассматриваемом случае подобное приближение легко может быть получено, так как ядро является функцией только от разности $(x - \xi)$. Чтобы получить сумму (6) из $2n$ членов, нужно только разложить $K(x - \xi)$ в ряд по косинусам от $(x - \xi)$ в интервале $\pm 2a$ и ограничиться n первыми членами. Совершенно так же можно воспользоваться в этом случае оборванным степенным рядом.

§ 4

Соотношение (3) справедливо только для точек, не слишком удаленных от оси. Поэтому уравнения (5) и (5а) имеют силу только для не очень протяженных объектов. Однако в практически встречающихся случаях интегралы (5) и (5а) сходятся очень быстро.

Без существенной ошибки можно распространить это уравнение и на бесконечно протяженные объекты, во всяком случае, если ограничиваться не слишком большими значениями ξ . Совершенно аналогично поступают между прочим при рассмотрении обычных диффракционных решеток.¹

Для структур, дающих подобные изображения, полагая a в (5) бесконечно большим, мы имеем теперь уравнение

$$f(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(x - \xi) dx. \quad (7)$$

Для самосветящихся объектов получаем соответственно

$$f^2(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) K^2(x - \xi) dx. \quad (7a)$$

Вследствие бесконечности пределов упомянутые в § 3 положения из теории интегральных уравнений не могут быть непосредственно перенесены на эти уравнения. Однако (7) и совершенно аналогично (7а) могут быть решены элементарным способом.

Полагая

$$f(x) = \cos(bx + \varphi),$$

мы получим, подставляя это в (7) и вводя $s = x - \xi$,

$$\cos(b\xi + \varphi) = \lambda \cos(b\xi + \varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) \cos bs ds,$$

где предположено, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s) \cos bs ds$$

¹ См., например, Lord Rayleigh. l. c.

сходится и что для конечного x

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_{m-x}^{m+x} K(s) \sin bs \, ds = 0.$$

Таким образом, при этих условиях

$$\cos(bx + \varphi)$$

является решением (7) или (7а) и соответствующее значение λ_1 параметра λ есть

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} K(s) \cos bs \, ds, \quad (8)$$

или

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} [K(s)]^2 \cos bs \, ds. \quad (8a)$$

Если интеграл в первой части равен нулю, то соответствующая структура вообще не дает освещенности в плоскости изображения. Если λ_b — кратный корень, то и произвольная линейная комбинация соответствующих косинусов дает подобное изображение. Этот случай особенно важен для самосветящегося объекта. При этом отдельные члены с \cos не имеют реального значения, так как искомыми функциями в (7а) являются интенсивности. Но комбинация косинусов, не принимающая отрицательных значений, представляет возможное распределение интенсивностей.

§ 5

Рассмотрим в качестве примера:

Изображение бесконечно протяженного I) несамосветящегося, II) самосветящегося объектов, при α) прямоугольной и β) круглой диафрагме.

Iа. Центральное освещенный объект; прямоугольная диафрагма

В этом случае с точностью до несущественной постоянной $K(s)$ есть

$$K(s) = \frac{\sin cs}{s},$$

где $c = \frac{2\pi d}{lf}$, d — половина ширины диафрагмы в направлении x , l — длина волны света, f — фокусное расстояние первой системы линз.

Относящееся к решению $\cos(b\zeta + \varphi)$ значение λ , согласно (8), есть

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin cs}{s} \cos bs \, ds.$$

Следовательно¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_b} &= \pi && \text{при } b < c, \\ &= \frac{\pi}{2} && \text{при } b = c, \\ &= 0 && \text{при } b > c. \end{aligned}$$

Таким образом, при прямоугольной диафрагме ширине $2d$ и при центральном освещении подобные изображения дают структуры, имеющие форму

$$f(\zeta) = \int_0^B A \cos(b\zeta + \varphi) \, db,$$

где A и φ — произвольные функции b и

$$B < \frac{2\pi d}{lf}.$$

IIa. Самосветящийся объект; прямоугольная диафрагма

Решением уравнения (7a) здесь является

$$\cos(b\zeta + \varphi)$$

с значениями λ [см. (8a)]

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin cs}{s} \right)^2 \cos bs \, ds.$$

Теперь²

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_b} &= \frac{\pi c}{2} \left(2 - \frac{b}{c} \right) && \text{при } b < 2c, \\ &= 0 && \text{при } b \geq 2c. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹ Н. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig, 1910, т. I, стр. 50.

² Lord Rayleigh. l. c., стр. 250.

Таким образом, помимо простых косинусоидальных членов, здесь не существует других решений (7а), т. е. не существует решений, которые не принимают отрицательных значений. Следовательно, строго говоря, не существует самосветящихся структур (распределений интенсивности), дающих подобные изображения при прямоугольной диафрагме. Однако структура, представляющая линейную комбинацию таких $\cos b\xi$, что все b очень малы по сравнению с c , несмотря на это дает приблизительно подобное изображение, так как соответствующие λ , т. е. яркости отдельных косинусоидальных членов, как показывает (9), при этом мало отличаются друг от друга. Так, например, самосветящийся объект с распределением интенсивностей

$$f^2(\xi) = \cos^2 b\xi$$

дает приблизительно подобное изображение в случае, если b очень мало по сравнению с $4\pi d/lf$.

На этом основан и тот факт, что всякая не слишком тонкая структура при достаточно широкой диафрагме дает приблизительно подобное изображение.

1β. Центральное освещенный объект; круглая диафрагма

Здесь опять-таки с точностью до несущественной постоянной¹ $K(s) = \frac{J_1(cs)}{s}$, где J_1 есть бесселева функция первого порядка, а $c = \frac{2\pi r}{fl}$; r — радиус круглой диафрагмы.

Решению $\cos(b\xi + \varphi)$ соответствуют значения

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} \frac{J_1(cs)}{s} \cos bs \, ds.$$

Из данных Г. Вебером формул можно получить²

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_b} &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2} & b < c, \\ &= 0, & b \geq c. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹ В. Г. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Optik, стр. 93.

² Lord Rayleigh. l. c., стр. 255.

Таким образом, при круглой диафрагме радиуса r и при центральном освещении подобное изображение дают только структуры вида $\cos(bz' + \varphi)$, где $b < \frac{2\pi r}{lf}$. Яркость отдельных изображений, в противоположность случаю прямоугольной диафрагмы, убывает при увеличении тонкости структуры.

В остальном к этому случаю относится все сказанное в примере Iа.

IIб. Самосветящийся объект; круглая диафрагма

Значения λ даются здесь выражением

$$\frac{1}{\lambda_b} = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{J_1(cs)}{s} \right]^2 \cos bs \, ds.$$

Здесь также легко показать, что $1/\lambda_b$ исчезает для всех значений b , которые больше, чем $2c$.

Имеем¹

$$\left[\frac{J_1(cs)}{s} \right]^2 = \text{const} \int_0^{\pi/2} \frac{J_1(s \cdot 2c \sin \varphi)}{s} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Отсюда, умножая обе стороны на $\cos bs \, ds$, интегрируя по s от 0 до ∞ и меняя справа порядок интегрирования, получаем

$$\frac{1}{\lambda_b} = \text{const} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_1(s \cdot 2c \sin \varphi)}{s} \cos bs \, ds,$$

из чего при учете (10) видно, что $\frac{1}{\lambda_b} = 0$, если $b \geq 2c$.

В остальных случаях $1/\lambda_b$ имеет определенное, зависящее от b значение. Сюда также может быть отнесено замечание, сделанное к примеру IIа.

Страсбург,

Физический институт.

¹ Gray and Mathews. Treatise on Bessel Functions, Macmillan and Co., London, 1895, стр. 258.

ОТРАЖЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

[*Phys. Zs.* 14, 220—222, 1913. Совм. с Г. Романом (*H. Rohmann*)]

(Поступило 17 февраля 1913 г.)

Согласно сообщению в „Nature“, Брэгг¹ обнаружил отражение рентгеновских лучей от слюды. Повторение этих опытов показало, что отражение становится особенно сильным тогда, когда слюда как-либо повреждена или расщеплена. Такие повреждения всегда возникают при резке слюды, и поврежденная зона простирается при этом от края к середине листа. Если заставить пучок рентгеновских лучей падать на лист таким образом, чтобы он захватывал края (см. схему на рис. 1), то в отраженной картине места, соответствующие краю, кажутся на фотографии особенно темными.

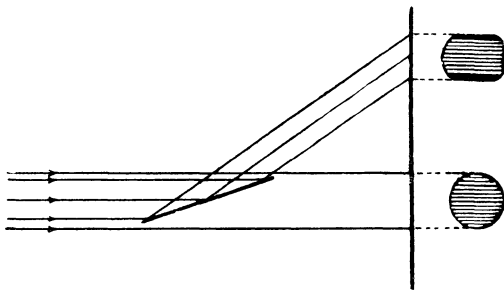


Рис. 1

Если повредить слюдяной лист, вызывая на нем известные фигуры расщепления [*Schlagfiguren*], то опять-таки в отраженной картине места, соответствующие поврежденным участкам, обнаруживают особенно сильное почернение. Аналогичные явления наблюдаются и в гипсе, который дает очень сильное отражение.

¹ Bragg. *Nature*, Dec. 1912.

Насколько можно судить по фотографиям, усиленное отражение не ограничено только той областью пластинки, которая кажется расщепленной при наблюдении в видимом свете, но простирается и на известную область вокруг поврежденной части.

Можно заключить поэтому, что и в кристаллических пластинках, кажущихся совершенно неповрежденными, отражение рентгеновских лучей имеет место не только на внешней поверхности, но и на параллельных к ней невидимых „поверхностях расщепления“ внутри кристалла. Впрочем существование таких невидимых поверхностей расщепления установлено исследованиями Зидентопфа на каменной соли.¹

Гипс, как известно, способен расщепляться по многим поверхностям. Если ориентировать гипсовую пластинку по отношению к падающему пучку рентгеновских лучей так, как это показано на рис. 2 (штриховка изображает положение одной из плоскостей расщепления), то на фотографии получается соответствующее пятно, которое легко может найти себе объяснение в отражении от соответствующей плоскости расщепления. Насколько можно судить, законы отражения при этом выполняются.

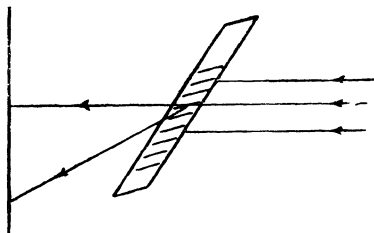


Рис. 2

На фотографиях всегда имеется большое число более или менее темных пятен. Положение этих пятен зависит от ориентировки пучка рентгеновских лучей по отношению к кристаллу. У слюды, например, при надлежащей ориентировке получается система из трех пятен вокруг проходящего пучка. Это соответствует ее кристаллической структуре, и можно предположить, что пятна вызваны отражением от внутренних поверхностей расщепления, тем более что и здесь интенсивность при расщеплении увеличивается.

Таким образом, напрашивается предположение, что и явления, наблюдавшиеся Фридрихом, Книппингом и Лауе,² которые Лауе искал и объяснял как дифракционные явления, должны, по крайней мере частично, объясняться отражениями на оптически невидимых поверхностях расщепления.

¹ H. Siedentopf. Phys. Zs. 6, 853, 1905.

² W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue. Sitzber. v. Kgl. Bayr. Akad. d. Wissensch., Juni u. Juli 1912.

Поэтому естественно было посмотреть, в какой мере лауевские фотографии можно объяснить количественно посредством отражения на уже известных поверхностях кристаллов. В случае цинковой обманки для некоторых поверхностей получается очень хорошее совпадение.

Если принять, что координатные оси на лауевском рис. 6 параллельны кристаллическим осям, то на рис. 5 восемь пятен, образующих второй темный круг, соответствуют поверхности 505, в чем можно удостовериться графическим построением. Кроме того, имеются пятна, соответствующие 404, 20 и 30. Эти поверхности действительно наблюдались на цинковой обманке. Для остальных пятен также имеются поверхности, являющиеся кристаллографически возможными.

Из нашего рассмотрения объясняется и то обстоятельство, что дифракционные явления наблюдаются, вообще говоря, только при малых углах по отношению к проходящему пучку. Как уже показал Брэгг, интенсивность отражения сильно падает с увеличением угла падения. Совершенно естественное объяснение нашло бы себе и то обстоятельство, что при небольшом изменении направления падающего пучка дифракционные пятна смещаются. Правда, исходя из лауевских фотографий, нельзя сделать по этому поводу никаких количественных заключений, так как не указан характер изменения направления. При определенных предположениях получилось бы, конечно, только приблизительное совпадение. Пока еще нельзя судить, насколько изложенные взгляды пригодны для объяснения совокупности всех наблюдаемых явлений. Нам казалось, однако, желательным указать на подобную возможность объяснения, которая, насколько мы можем видеть, не находится в противоречии с фактами.

З а м е ч а н и е при корректуре. Только теперь мы получили более подробные сведения о взглядах Брэггов (W. H. и W. L. Bragg) на происхождение дифракционных явлений в рентгеновских лучах, наблюдавшихся Фридрихом, Книппингом и Лауе, а также о соответствующих опытах Баркла (C. G. Barkla) и Мартина (G. H. Martyn).

Господа W. H. и W. L. Bragg принимают „that any plane within the crystal, which is „rich“ in atoms, can be looked on as a reflecting plane“ (Nature, 28 November 1912, стр. 360), „and that the spots in Laues crystallographs can be shown to be due to partial reflection of the incident beam in sets of parallel planes in the crystal on which the atom centres may be arranged, the simplest of which

are the actual cleavage planes of the crystal" (Nature, 12 December 1912, стр. 410).¹

Различие между этим взглядом, который должен быть „merely another way of looking at the diffraction“,² и нашим заключается в следующем.

Мы заключаем из наших опытов, что отражение происходит на действительно существующих (хотя и оптически невидимых) поверхностях расщепления, в которых нарушена нормальная кристаллическая структура. Согласно W. H. и W. L. Bragg'ам, отражение должно иметь место и в идеальном кристалле.

Для нас, таким образом, положение лауевских пятен не связано непосредственно с молекулярными расстояниями и длиной волны „диффрагированных“ лучей, а их интенсивность определяется только числом и характером поверхностей расщепления (о которых впрочем не легко получить более подробное представление).

Опыты Баркла и Мартина (Nature, 19 December 1912, стр. 435) в основном совпадают с нашими опытами по отражению от внутренних поверхностей кристаллов гипса.

Страсбург,

Физический институт,

13 февраля 1913 г.

¹ [„... что каждая плоскость внутри кристалла, „богатая“ атомами, может рассматриваться как отражающая плоскость „...“ и что пятна в лауевских кристаллограммах можно объяснить как результат частичного отражения падающего пучка на последовательности параллельных плоскостей в кристалле, на которых могут располагаться центры атомов и простейшие из которых являются действительными плоскостями спайности кристалла“].

² [„просто другим истолкованием дифракции“].

О ШЕРОХОВАТОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТЕЙ

[*Ann. d. Phys.* 41, 609—624, 1913]

(Поступило 5 апреля 1913 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Статистическое рассмотрение второго начала приводит, как известно, к представлению, что система, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, все же не остается в покое, а непрерывно флюктуирует около своего положения равновесия. Закон Больцмана — Максвелла о распределении энергии дает возможность, по крайней мере в принципе, найти выражение для этих флюктуаций.

Однако лишь изредка создаются такие благоприятные условия, при которых ожидаемые флюктуации действительно можно наблюдать. Таким случаем является, например, броуновское движение. Здесь, как известно, теория может найти себе хорошее подтверждение.

Голубой цвет неба следует также отнести к подобного рода статистическим отклонениям. И здесь имеет место удовлетворительное согласие с теорией.

Ниже мне хотелось бы подробнее обсудить вопрос, относящийся к форме поверхности жидкостей. Поверхность жидкости, которая при идеальном равновесии должна быть, например, плоской, вследствие нерегулярного теплового движения непрерывно деформируется. Если заставить отражаться от такой поверхности световой луч, то наряду с регулярным отражением должно появиться и

диффузное. Достаточны уже очень малые — по сравнению с длиной волны — шероховатости, чтобы это рассеяние обладало заметной величиной.

Я хотел бы заметить сразу, что уже Смолуховский¹ указал на то, что на основе статистических представлений следует ожидать возникновения вышеуказанного явления.

Ниже будет сначала вычислена величина шероховатости; отсюда по законам оптики может быть найдено диффузное отражение и его свойства (зависимость от направления падающего луча и направления наблюдения). В заключение будут описаны некоторые опыты, повидимому подтверждающие теорию, во всяком случае с качественной стороны.

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1

Для вычисления шероховатости поверхности жидкости мы воспользуемся известными положениями статистической механики. Интересующее нас положение об „Äquipartition“² приведено Эйнштейном к форме, отличающейся от обычной.³

К этой форме и примыкают нижеследующие рассуждения.

Применяемый Эйнштейном метод, как он это и сам отчетливо высказывает, не основывается непосредственно на молекулярных представлениях. Поэтому в его методе — и это существенно для дальнейшего — не предполагается знание сил, действующих между отдельными молекулами, а используются только те константы, которые доступны эксперименту.

Положение об „Äquipartition“ в том виде, в каком им пользуется Эйнштейн, может быть формулировано следующим образом.

I. Система рассматривается как континуум. Ее состояние определяется параметрами a_1, a_2, \dots (В качестве примера можно взять случай, рассматриваемый Эйнштейном: некоторый замкнутый объем газа имеет не всюду одинаковую плотность. Представим себе, что отклонения действительной плотности от равномерной разложены

¹ M. v. Smoluchowski. Ann. d. Phys. 25, 225, 1908.

² Речь идет о равномерном распределении по отдельным степеням свободы не кинетической, а потенциальной энергии.

A. Einstein. Ann. d. Phys. 33, 1275, 1910; см. также M. v. Smoluchowski, Phys. Zs. 13, 1070, 1912.

как функция точки в ряд Фурье. Тогда коэффициенты этого ряда и будут такими параметрами.)

II. Пусть параметры a выбраны так, что подсчитанная обычным термодинамическим способом работа, которую нужно совершить для того, чтобы перейти из состояния равновесия в состояние, характеризующееся величинами a , может быть записана в виде

$$A = \sum_i \beta_i a_i^2. \quad (1)$$

С течением времени система пробегает различные состояния, причем каждому состоянию соответствует своя система значений a . Положение об „Äquipartition“ говорит тогда, что

III. Усредненные по времени значения слагаемых $\beta_i a_i^2$ суммы (1) равны между собой и имеет место соотношение

$$\beta_i \overline{a_i^2} = \frac{RT}{2N}, \quad (2)$$

где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, а N означает число молекул в одном поле (число Лошмидта).

Эта эйнштейновская формулировка и будет положена в основу дальнейшего рассмотрения.

Следует коротко заметить еще следующее. Число параметров, вообще говоря, не ограничено. Разумеется, Эйнштейну для его задачи приходится учитывать лишь некоторое конечное их число. То же относится и к рассматриваемому здесь вопросу.

Но, повидимому, возможны случаи, когда применение формулировки Эйнштейна может по началу натолкнуться на трудности. Тогда, быть может, следует расширить III, допустив, что имеет силу не закон об „Äquipartition“, а планковский закон распределения энергии.

§ 2. Расчет шероховатости

Выберем в качестве плоскости xy плоскость, образующую при идеальном состоянии равновесия поверхность жидкости или поверхность раздела между двумя жидкостями.

Представим себе на этой плоскости квадрат со сторонами длиной $2L$. Пусть начало координат находится в центре этого квадрата. Обозначим через z возвышение точки (xy) действительной поверхности над плоскостью $z = 0$.

В рассматриваемом интервале можно представить z в виде¹

$$z = \left. \begin{aligned} & \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(a_{\rho\sigma} \cos \frac{\pi\rho x}{L} \cos \frac{\pi\sigma y}{L} + a'_{\rho\sigma} \cos \frac{\pi\rho x}{L} \sin \frac{\pi\sigma y}{L} + \right. \\ & \left. + b_{\rho\sigma} \sin \frac{\pi\rho x}{L} \cos \frac{\pi\sigma y}{L} + b'_{\rho\sigma} \sin \frac{\pi\rho x}{L} \sin \frac{\pi\sigma y}{L} \right) + \\ & + \sum_{\rho=1}^{\infty} \left(a_{\rho 0} \cos \frac{\pi\rho x}{L} + b_{\rho 0} \sin \frac{\pi\rho x}{L} \right) + \\ & \left. + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(a_{0\sigma} \cos \frac{\pi\sigma y}{L} + a'_{0\sigma} \sin \frac{\pi\sigma y}{L} \right). \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

Приращение поверхности ΔF , соответствующее переходу от плоскости к поверхности (3), равно

$$\Delta F = \iint_{-L}^{+L} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy - 4L^2.$$

Величины $\partial z / \partial x$ и $\partial z / \partial y$ должны быть малы; поэтому

$$\Delta F = \frac{1}{2} \iint_{-L}^{+L} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy.$$

Подставляя для z его значение из (3), получим

$$\Delta F = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2} \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{\rho\sigma}^2 + a'_{\rho\sigma}{}^2 + b_{\rho\sigma}^2 + b'_{\rho\sigma}{}^2) (\rho^2 + \sigma^2) + \\ & + \pi^2 \sum_{\rho=1}^{\infty} (a_{\rho 0}^2 + b_{\rho 0}^2) \rho^2 + \pi^2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{0\sigma}^2 + a'_{0\sigma}{}^2) \sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Работа A_1 , совершаемая при увеличении поверхности на ΔF , будет

$$A_1 = K \Delta F, \quad (5)$$

где через K обозначен коэффициент поверхностного натяжения.

¹ Примененное здесь разложение удобней, чем разложение, в котором за начало берется угловая точка и которое приводит, например, к ряду по $\cos \cdot \cos$. Оно выбрано потому, что всё равнозначное в оптическом отношении с самого начала получает одинаковое представление. Постоянный член из разложения, выпадает, так как жидкость рассматривается как несжимаемая.

Работа A_2 , совершаемая против силы тяжести, равна, очевидно,

$$A_2 = \frac{g\mu}{2} \iint z^2 dx dy, \quad (6)$$

где g — ускорение силы тяжести, а μ — плотность жидкости или же разность плотностей двух жидкостей, находящихся одна над другой.

Из (3) и (6) получаем

$$A_2 = \frac{g\mu L^2}{2} \left[\sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{\rho\sigma}^2 + a'_{\rho\sigma} + b_{\rho\sigma}^2 + b'_{\rho\sigma}) + 2 \sum_{\rho=1}^{\infty} (a_{\rho 0}^2 + b_{\rho 0}^2) + 2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{0\sigma}^2 + a'_{0\sigma}) \right].$$

Полная работа A , которую надо совершить для того, чтобы придать поверхности форму (3), будет поэтому

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{\rho\sigma}^2 + a'_{\rho\sigma} + b_{\rho\sigma}^2 + b'_{\rho\sigma}) [K\pi^2(\rho^2 + \sigma^2) + g\mu L^2] + \\ + \sum_{\rho=1}^{\infty} (a_{\rho 0}^2 + b_{\rho 0}^2) (K\pi^2\rho^2 + g\mu L^2) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (a_{0\sigma}^2 + a'_{0\sigma}) (K\pi^2\sigma^2 + g\mu L^2).$$

Таким образом, A имеет требуемый в II (стр. 248) вид и, следовательно, в соответствии с III (стр. 248) справедливы соотношения

$$\overline{a_{\rho\sigma}^2} \quad \overline{a'_{\rho\sigma}} = \overline{b_{\rho\sigma}^2} = \overline{b'_{\rho\sigma}} = \frac{RT}{N[K\pi^2(\rho^2 + \sigma^2) + g\mu L^2]}, \quad \rho, \sigma = 1, 2, \dots \quad (7)$$

и

$$\overline{a_{\rho\sigma}^2} = \overline{b_{\rho\sigma}^2} = \frac{RT}{2N[K\pi^2\rho^2 + g\mu L^2]}. \quad (7a)$$

§ 3. Отражение от деформированной поверхности

Лордом Релеем рассмотрен следующий случай:¹

Поверхность раздела между двумя прозрачными телами не является плоской. Пусть возвышение этой поверхности над плоскостью может быть представлено в виде

$$z = \sum_{\rho} (a_{\rho} \cos \rho px + b_{\rho} \sin \rho px). \quad (8)$$

¹ Lord Rayleigh, Scientific Papers 5, стр 398 сл.

Так как в (8) z зависит только от x , но не от y , то мы имеем дело с деформацией типа решетки. Коэффициенты a и b должны быть малы по сравнению с длиной волны падающего света. На эту поверхность раздела падает плоская волна. Пусть нормаль к фронту волны лежит в плоскости xz и образует с осью z угол падения θ_1 .

Требуется рассчитать свет, отраженный от деформированной поверхности (8).

Полученный лордом Релеем результат гласит (при учете членов первого порядка относительно a_i/λ и b_i/λ):

Во-первых, имеется регулярно отраженная волна. С указанной степенью точности ее интенсивность и фаза не отличаются от таковых для волны, регулярно отраженной от плоскости $z=0$ и, следовательно, рассчитываемой по формулам Френеля.

Помимо этого, имеются еще диффрагированные лучи, рассчитываемые следующим образом. Каждый член суммы (8) может рассматриваться как отражательная диффракционная решетка с соответствующей его периоду постоянной. Для каждой такой решетки достаточно учесть только два первых спектра — по одному с каждой стороны от недиффрагированного луча, так как интенсивности остальных являются величинами более высокого порядка относительно a_i/λ . Следовательно, член

$$a_\rho \cos \rho px + b_\rho \sin \rho px$$

дает волну, видимую под углом отражения θ , где θ вычисляется из

$$\sin \theta_1 - \sin \theta = \pm \frac{\lambda \rho p}{2\pi}. \quad (9)$$

Как уже упоминалось, θ_1 есть угол падения.

Таким образом, направления диффрагированного поверхностью (8) света находятся непосредственно из (9). Амплитуда A_ρ , соответствующая решетке с индексом ρ , вычислена лордом Релеем;¹ если амплитуду падающего света положить равной единице, то

$$A_\rho = \frac{a_\rho \pm ib_\rho}{\lambda} f(\theta_1, \theta),$$

где

$$f(\theta_1, \theta) = \frac{-2i\pi \cos \theta_1 \sin(\psi_1 - \theta_1)}{\sin \psi_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \cos \psi}. \quad (10)$$

¹ См. Lord Rayleigh. l. c., стр. 401, формула 85.

Здесь ψ_1 и ψ — углы преломления, соответствующие по закону преломления углам θ_1 и θ . Из комплексной формы A_p следует, что фаза диффрагированного луча зависит от отношения a_p/b_p .

Выражение (10) относится к свету, поляризованному параллельно плоскости падения. Для другой компоненты справедлива аналогичная формула,¹ имеющая несколько более сложный вид. Те члены ряда (8), которые имеют столь большое ρ , что вычисленные из (9) углы дифракции получаются мнимыми, не дают диффрагированных лучей. Эти члены вообще не играют никакой роли среди членов первого порядка относительно a/λ . Во втором порядке они изменяют регулярно отраженную волну.

Теперь следовало бы распространить теорию Релея на случай поверхности (3), деформированной в двух измерениях (стр. 249). Это расширение, как мне кажется, не вызывает никаких трудностей, но все же приводит к громоздким формулам.

Если ограничиться наблюдениями в плоскости падения, то эти сложные вычисления можно обойти.

Направления дифракционных спектров, получаемых от поверхности (3), могут быть указаны тотчас же. Именно, каждый член ряда (3) может рассматриваться как крестообразная решетка.

Введем теперь полярные координаты: пусть θ будет широта, отсчитываемая от оси z , а φ — долгота, отсчитываемая от плоскости zx .

Рассмотрим отдельно член

$$a_{\rho\sigma} \cos \frac{\rho\pi x}{L} \cos \frac{\sigma\pi y}{L}.$$

Если на эту решетку падает луч с координатами $(\theta_1, 0)$, то возникает четыре диффрагированных луча первого порядка.

Координаты (θ, φ) направления этих лучей определяются, как это известно из теории решеток, уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_1 &= \pm \rho \frac{\lambda}{2L}, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \pm \sigma \frac{\lambda}{2L}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ряд (3) всегда содержит четыре члена, имеющих одинаковые ρ и σ (они выписаны там под знаком двойной суммы). Все эти члены дают диффрагированные лучи по одному и тому же направлению. Амплитуды пропорциональны соответственно $a_{\rho\sigma}$, $a'_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$, $b'_{\rho\sigma}$, фазы же не одинаковы.

¹ См. Lord Rayleigh, l. c., стр. 400, формула (80).

Можно легко показать следующее: первый и третий члены дают синфазные спектры, то же справедливо для второго и четвертого членов. При этом первая из только что названных пар сдвинута по фазе по отношению ко второй на 90° . С учетом этого замечания мы можем записать амплитуду $A_{\rho\sigma}$ диффрагированного луча (θ, φ) в виде

$$A_{\rho\sigma} = \frac{(a_{\rho\sigma} + b_{\rho\sigma}) + i(a'_{\rho\sigma} + b'_{\rho\sigma})}{\lambda} \Phi(\theta_1, \theta, \varphi). \quad (12)$$

Вид функции Φ для произвольного φ не известен. Однако можно показать следующее. Если σ очень мало по сравнению с ρ или, что, согласно (11), означает то же самое, если азимут φ диффрагированного луча является малой величиной, то амплитуда диффрагированного такой крестообразной решеткой луча приблизительно равна половине амплитуды, которую дала бы одномерная решетка с постоянной ρ . Множитель $1/2$ появляется из-за того, что крестообразная решетка дает четыре спектра первого порядка, вместо двух для обыкновенной решетки.

Таким образом, если мы обозначим через $\Phi(\theta_1, \theta, 0)$ значение Φ для очень малого азимута φ , то

$$\Phi(\theta_1, \theta, 0) = \frac{1}{2} f(\theta_1, \theta),$$

причем $f(\theta_1, \theta)$ имеет значение (10). Следовательно, для очень малых φ $A_{\rho\sigma}$ является известным, коль скоро даны $a_{\rho\sigma}, \dots, b'_{\rho\sigma}$.

§ 4. Расчет диффузного отражения

В разложении (3) допущено, что L очень велико по сравнению с λ . Отсюда следует, что направления диффракционных максимумов, соответствующих соседним членам этого ряда, лежат очень близко друг к другу. Диффрагированные лучи получаются по всевозможным, хотя и дискретным, но весьма густо лежащим направлениям. Другими словами, наряду с обычным отражением от поверхности будет иметь место диффузное отражение.

Нам нужно теперь подсчитать интенсивность этого света, приходящуюся на малый телесный угол $d\omega$. Пусть ось этого угла имеет направление l с координатами θ и φ .

На самой оси интенсивность равна $|A_{\rho\sigma}|^2$, где ρ и σ связаны с θ и φ уравнением (11). Соседние лучи, например $A_{\rho+1,\sigma}, A_{\rho,\sigma+1}, \dots$, также попадают в этот малый телесный угол.

Полная интенсивность J в этом угле будет

$$J = \Sigma \Sigma |A_{\rho\sigma}|^2,$$

причем суммирование должно быть распространено настолько далеко, чтобы направления, вычисленные из значений ρ и σ , согласно (11), попадали внутрь указанного телесного угла.

Если этот угол мал, то можно все значения $A_{\rho\sigma}$ этой суммы считать между собой равными и тогда

$$J = |A_{\rho\sigma}|^2 \Delta\rho \Delta\sigma.$$

Здесь $\Delta\rho$ и $\Delta\sigma$ обозначают те приращения, которые испытывают ρ и σ при переходе от первого члена суммы к последнему. Иными словами, $\Delta\rho \cdot \Delta\sigma$ представляет собой число членов этой суммы.

Усредненное по времени значение J , если обозначить усреднение по времени чертой, будет

$$\bar{J} = \overline{|A_{\rho\sigma}|^2} \Delta\rho \Delta\sigma.$$

Подставим теперь вместо $\overline{|A_{\rho\sigma}|^2}$ его значение из (12); учтем, далее, что $\overline{a'_{\rho\sigma} b'_{\rho\sigma}} = \overline{a'_{\rho\sigma} b'_{\rho\sigma}} = 0$, и, наконец, воспользуемся соотношением (7) на стр. 250; мы получим тогда

$$\bar{J} = \frac{4RT}{\lambda^2 N [K\pi^2(\rho^2 + \sigma^2) + g\mu L^2]} \Phi^2(\theta_1, \theta, \varphi) \Delta\rho \Delta\sigma. \quad (13)$$

Теперь остается только выразить ρ и σ через θ и φ . Из (11) получаем

$$\begin{aligned} \Delta\rho \Delta\sigma &= \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta, \\ \rho^2 + \sigma^2 &= \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 (\sin^2\theta - 2\sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi + \sin^2\theta_1). \end{aligned}$$

Внося эти выражения в (13), находим

$$\bar{J} = \frac{4RT \cos\theta d\omega}{\lambda^2 N \left[K\pi^2 (\sin^2\theta - 2\sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi + \sin^2\theta_1) + \frac{g\mu\lambda^2}{4} \right]} \Phi^2(\theta, \theta_2, \varphi) \quad (14)$$

причем $d\omega$ обозначает телесный угол. Если ограничиться наблюдением вблизи плоскости падения, то в (14) следует положить $\varphi = 0$. Тогда и $\Phi^2(\theta_1, \theta, 0)$ также известно.

Таким образом, для интенсивности света, рассеянного в плоскости падения, в качестве окончательного результата мы получаем

$$\bar{J} = \frac{4RT \cos d\omega}{\lambda^2 N \left[K\pi^2 (\sin \theta - \sin \theta_1)^2 + \frac{g\mu\lambda^2}{4} \right]} \Phi^2(\theta_1, \theta, 0), \quad (15)$$

причем

$$\Phi^2(\theta_1, \theta, 0) = \left(\frac{\pi \cos \theta_1 \sin(\psi_1 - \theta_1)}{\sin \psi_1 \cos \theta - \sin \theta_1 \cos \psi} \right)^2.$$

Приведем еще раз все обозначения.

\bar{J} — интенсивность света, диффузно отраженного от поверхности жидкости в малом телесном угле $d\omega$,

θ_1 — угол падения; ψ_1 — соответствующий ему угол преломления,

θ — угол, под которым производится наблюдение; ψ — соответствующий ему угол преломления,

R, T, N — газовая постоянная, температура, число Лоренца,

λ — длина световой волны,

K — коэффициент поверхностного натяжения,

g — ускорение силы тяжести,

μ — удельный вес жидкости.

По поводу изложенного расчета интенсивности рассеянного света мне хотелось бы коротко заметить еще следующее: отдельные крестообразные решетки

$$a_{\rho\sigma} \cos \frac{\rho\pi x}{L} \cos \frac{\sigma\pi y}{L} \dots,$$

на которые мы разложили деформированную поверхность, рассматривались так, как если бы это были бесконечные решетки. Мы допустили, следовательно, что ρ и σ являются очень большими числами.¹

Если наблюдения производятся в плоскости падения (плоскость zx) и не слишком близко к направлению непосредственно отраженного света, то большими будут все ρ , но отнюдь не все σ , так как существенные для нас значения σ начинаются с 1. То обстоятельство, что, несмотря на это, мы производили вычисления так, как будто σ велики, не может, однако, привести к значительной ошибке, во-первых, потому, что при экспериментально исполь-

¹ Мы предполагаем, что падающий свет заполняет всю площадь с длиной сторон $2L$.

зуюмом угле $d\omega$ имеют вес еще очень многие отдельные решетки со все возрастающим σ , из которых члены с малым σ составляют лишь небольшую долю. Далее, хотя решетка с малым σ и не будет отбрасывать свет по одному единственному направлению, но вследствие малости α_{rs} он будет все же концентрироваться в очень малом угле и будет попадать поэтому большей частью в телесный угол $d\omega$.

II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Выведенная в предыдущем разделе формула (15) позволяет подсчитать интенсивность света, рассеянного поверхностью жидкости. Вычисление показывает, что если взять жидкость в обычных условиях, то этой интенсивности едва ли хватило бы для возможности наблюдения. Кроме того, уже незначительного загрязнения поверхности достаточно, чтобы перекрыть ожидаемое явление.

Но формулы (14) и (15) показывают, что интенсивность рассеянного света растет *ceteris paribus* обратно пропорционально коэффициенту поверхностного натяжения. Легко убедиться, что в (15) почти во всех случаях можно пренебречь членом, обусловленным силой тяжести, по сравнению с членом, содержащим коэффициент поверхностного натяжения.

Но, как известно, коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела двух частично смешивающихся жидкостей вблизи критической точки смеси очень мал, в то время как относительный показатель преломления может иметь еще заметную величину. Следовательно, можно ожидать, что на подобной поверхности раздела описанное явление будет проявляться достаточно сильно для возможности его наблюдения. Это и имеет место в действительности, как будет показано ниже.

Впрочем, уже Смолуховским¹ было указано, что такая поверхность раздела благоприятствует явлению, о котором идет речь.

Опыт ставился на смеси из метилового спирта и сероуглерода. Известно, что эти жидкости при температуре выше 40.5° могут смешиваться в любых отношениях. Ниже этой температуры, вообще говоря, существуют два слоя. Например, при 35° верхний слой содержит 63.86% сероуглерода и 36.14% метилового спирта, а нижний — соответственно 93.28% и 6.68% . Оба слоя различаются тем меньше, чем ближе температура к критической точке.

¹ M. v. Smoluchowski. I. c., стр. 225.

В зависимости от взятых количеств сероуглерода и метилового спирта температурная точка, при которой имеется только одна фаза, в той или иной степени отдалается от критической температуры. В описываемых ниже опытах эта точка лежала приблизительно при 39° .

Сероуглерод и метиловый спирт тщательно очищались, и смесью наполнялся стеклянный шар диаметром 4—5 см. Получение очень чистой поверхности раздела представляет известные трудности. В первых опытах поверхность раздела была загрязнена. Во всяком случае, при длительном стоянии загрязнения большей частью собирались в одном месте, так что значительная часть поверхности раздела оказывалась чистой и допускала наблюдения. Однако представлялось желательным проводить наблюдения в возможно более чистых условиях. С этой целью был изготовлен стеклянный сосуд, состоящий из двух шаров одинакового размера (примерно 5 см в диаметре), соединенных трубкой. Один из них наполнялся жидкостью через вспомогательную трубку, которая затем запаивалась, и вся жидкость перегонялась в другой шар. После этого соединительная трубка отпаивалась вблизи от шара. Насколько можно судить, таким путем получается чистая поверхность раздела.

Д-р Вейтц (Weitz) был настолько любезен, что взял на себя как весьма тщательную очистку жидкостей, так и только что описанный процесс наполнения шара. Мне хотелось бы и здесь выразить ему мою глубокую признательность.

Сам опыт, носивший качественный характер, ставился следующим образом.

Шар с жидкостью находился в большом стакане, наполненном водой, и подогревался бунзеновской горелкой, связанной с толловым термостатом. В течение длительного времени температура оставалась с точностью до одной десятой градуса постоянной.

На расстоянии примерно 60 см помещалась лампа Нернста с горизонтально расположенным стержнем. Линза с фокусным расстоянием 55 мм и отверстием 9 мм концентрировала свет от стержня лампы Нернста на поверхность раздела обоих слоев внутри шара. Свет, отраженный от поверхности раздела, наблюдался невооруженным глазом. Угол падения составлял около 80° . К сожалению, установка не позволяла пользоваться значительно меньшими углами. Я ограничился наблюдениями при относительно больших углах падения.

Если производить наблюдения при комнатной температуре в направлении регулярно отраженного света, то можно видеть довольно хорошее зеркальное изображение стержня лампы Нернста. Если вывести глаз из этого направления, но оставаться при этом в плоскости падения и рассматривать то место поверхности раздела, на которое падает свет, то совсем слабо видна линия, соответствующая сечению светового конуса поверхностью раздела. Интенсивность этого диффузно отраженного света при комнатной температуре весьма незначительна, так что приходится напрягать зрение для того, чтобы вообще найти эту линию.

Если поднять температуру примерно до 37° , то диффузно отраженный свет становится значительно интенсивнее, попрежнему, однако, далеко уступая интенсивности регулярного отражения.

При этом можно констатировать следующее. Интенсивность диффузно отраженного света быстро убывает, если направление наблюдения, оставаясь все время в плоскости падения, отклоняется от направления регулярного отражения. Интенсивность убывает еще быстрее, если глаз вывести из плоскости падения.

Диффузно отраженный свет не является заметно поляризованным, если падающий свет не поляризован. Впрочем, при больших углах падения заметная поляризация не наблюдается с помощью николя и для регулярно отраженного луча. Напротив, если падающий свет поляризован, то рассеянный свет также поляризован. Если еще повышать температуру, то интенсивность диффузно отраженного света все время возрастает. Различие между его интенсивностью и интенсивностью регулярно отраженного света постепенно уменьшается, пока, наконец, оба они не сливаются друг с другом. Следует заметить, что оба слоя сильно опалесцируют и пути падающего, преломленного и отраженного лучей хорошо видны.

Описанные наблюдения производились после установления температурного равновесия, что достигалось следующим образом. После того как баня и шар длительное время выдерживались при температуре, на которую устанавливался термостат, например при 37° , жидкость в шаре сильно встряхивалась и затем оставлялась в покое. Разделение обоих слоев происходит быстро, если температура, как это имело место в нашем случае, не слишком близка к критической точке для соответствующей смеси. Правда, на поверхности раздела еще некоторое время можно видеть маленькие пузырьки. Рассеянный ими свет выглядит совсем иначе, нежели описанное выше

явление, а поэтому не может быть с ним спутан. Наблюдение производилось после исчезновения пузырьков.

Если поддерживать температуру постоянной, то установку можно предоставить самой себе на произвольно долгое время без того, чтобы произошли какие-либо изменения интенсивности рассеянного света (а также опалесценции). Так, например, я часто выжидал по 24 часа и в течение всего этого времени интенсивность, насколько можно было судить, оставалась постоянной.

В непосредственной близости к критической точке регулировка термостата оказалась недостаточно тонкой. Около 39° жидкость мутнеет, затем сама собой становится снова прозрачной и т. д.

Как уже отмечалось, только что описанные опыты были чисто качественными, что делает невозможной более точную проверку теории.

Но я хотел бы еще коротко заметить следующее. Наряду с наблюдаемым соответствием между ростом интенсивности рассеянного света и уменьшением коэффициента поверхностного натяжения, что вполне согласуется с теорией, зависимость интенсивности от угла наблюдения также, как мне кажется, в основном находится в согласии с приведенной формулой. Если производить наблюдения в плоскости падения, то интенсивность рассеянного света дается формулой (15). С увеличением разности $\theta - \theta_1$ знаменатель первого сомножителя быстро увеличивается, так что интенсивность должна также быстро уменьшаться. Второй сомножитель f в этой формуле хотя и зависит от угла θ , но его изменение происходит значительно медленнее, так что по существу все сводится к разности $(\sin \theta - \sin \theta_1)^2$.

Вышеописанное весьма быстрое уменьшение интенсивности, наступающее при удалении от плоскости падения, также находится в согласии с формулами. Правда, количественная зависимость интенсивности рассеянного света от азимута φ неизвестна, так как не приведен вид функции Φ для $\varphi \neq 0$. Но, вероятно, $\Phi(\varphi)$ очень мало отличается от $\Phi(0)$, пока φ мало. Зато стоящий перед Φ множитель в (14) очень сильно убывает при переходе от азимута 0 к очень малому азимуту φ . Конечно, это быстрое убывание имеет место только при больших углах падения. Например, при $\theta = 80^\circ$, $\theta_1 = 75^\circ$ интенсивность, согласно (14), падает уже до одной десятой при отходе от плоскости падения всего на 3° . Взятые здесь значения θ и θ_1 соответствуют условиям опыта.

В заключение заметим еще следующее. Приведенные выше опыты подтверждают наличие диффузного отражения от поверхности раздела двух жидкостей и, если приведенные расчеты и соображения правильны, говорят о существовании шероховатости поверхности жидкости, вызванной молекулярным движением.

То, что мы имеем дело действительно с резкой границей раздела, доказывается наличием регулярного отражения. Повидимому, диффузное отражение происходит на этой поверхности раздела. Предположение, что это диффузное отражение вызывается загрязнениями, не является вероятным уже вследствие способа приготовления жидкостей. Против этого говорит также сильная зависимость интенсивности от температуры.

Количественная проверка станет возможной, конечно, только на основе расширенного экспериментального исследования. При таком исследовании должно также выясниться, влияют ли на явление локальные изменения поверхностного натяжения и неоднородность жидкости, которые в проведенном выше вычислении не учитывались.

Страсбург,
Физический институт.

ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКА СВЕТА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ОЧЕНЬ БЛИЗКО ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ПРОЗРАЧНЫХ СРЕД¹

[*Phys. Zs.* 15, 220—225, 1914]

(Поступило 9 января 1914 г.)

§ 1

Описанные ниже опыты относятся к явлению, которое происходит, когда источник света находится очень близко от граничной поверхности двух прозрачных тел, и о котором обычные законы преломления не дают никакого представления. Оно состоит в следующем. Представим себе две бесконечно протяженные среды, разграниченные между собой плоскостью. Пусть в оптически менее плотной из них находится точечный источник света. Если мы проследим исходящие из него лучи и обычным образом учтем преломление лучей на поверхности раздела, то мы придем к тому известному результату, что в более плотной среде свет заключен

¹ В качестве электрической задачи этот случай был рассмотрен А. Зоммерфельдом в его работе „О распространении волн в беспроволочной телеграфии“ (*Ann. d. Phys.* 28, 665, 1909). Исходным пунктом для моей работы был вопрос о том, какие оптические явления наблюдаются при тех же условиях. Из тетради С. Р. от 22 декабря я только что узнал, что П. Зеленый (P. Zelényi) рассмотрел такое же оптическое явление. Так как моя статья содержит новые опыты и дает более точную теорию явления (Зеленый имел в виду заняться подобной теорией впоследствии), я публикую эту рукопись, готовую к печати уже в течение нескольких месяцев, без изменений.

лишь внутри конуса, раствор которого не превышает удвоенного предельного угла φ ($\sin \varphi = n$; n — относительный показатель преломления).

Метод косою падения лучей для определения показателя преломления именно на том обстоятельстве и основан, что в более плотной среде существует подобная — и чрезвычайно резкая — граница между светом и тенью. Оказывается, однако, что дело обстоит иначе, если источник света находится близко от плоскости раздела. Чем меньше расстояние между ними, тем более размытой становится граница света. Когда же, наконец, это расстояние становится мало по сравнению с длиной волны, то свет излучается в более плотную среду во всех направлениях и предельного угла в обычном его смысле более не существует.

Более точная теория этого явления будет изложена ниже. Но соображения, на которых она основана, я хочу привести уже здесь. Тогда можно будет сразу же представить себе качественную сторону названного явления.

1. Если заставить плоскую волну падать из более плотной среды на менее плотную, то, как известно, в менее плотной среде поле будет существовать и тогда, когда угол падения превышает предельный угол и происходит полное внутреннее отражение. Амплитуда этого поля чрезвычайно быстро (экспоненциально) убывает с удалением от плоскости раздела, так что в менее плотной среде область, в которой имеется поле, ограничивается практически слоем, толщина которого — порядка длины волны.

2. Имеет место следующий общий принцип взаимности (см. § 5). Рассматриваются следующие два различных случая: а) Точечный источник монохроматического света, с определенным направлением колебаний h и силой s ,¹ находится в точке A и возбуждает в точке B электрическое поле напряженности E . Пусть компонента этого поля в направлении h' будет $(E_{h'}) \cdot b$ Во-вторых точно такой же источник с направлением колебаний h' и силой s' находится в точке B . Пусть поле, возбужденное им в точке A , будет E' с компонентой $E'_{h'}$ в направлении h .

Принцип взаимности гласит: если $s = s'$, то и $E'_{h'} = E_{h'}$.

Пункты 1 и 2, очевидно, дают объяснение описанному выше явлению.

¹ Определение силы источника света будет дано ниже.

§ 2

Прежде чем описать самые опыты, я хотел бы остановиться на установке, которая далее применяется и которая одновременно может служить для доказательства существования поля, проникающего в менее плотную среду при полном внутреннем отражении. Я хочу, впрочем, сразу же заметить, что это поле уже неоднократно подвергалось экспериментальному исследованию.¹

Если заставить свет падать на поверхность раздела между стеклом и флюоресцирующей жидкостью в направлении стекло — жидкость и постепенно увеличивать угол падения, то, как только превзойден предельный угол, флюоресцирующий конус исчезает. Однако если раствор не слишком слаб, то та часть поверхности раздела, на которую падает свет, продолжает светиться и тогда, когда предельный угол значительно превзойден. Это свечение указывает, очевидно, на существование искомого поля. Этот метод доказательства представляется мне особенно хорошим потому, что здесь — в соответствии с теорией — мы действительно имеем дело с двумя оптически однородными произвольно протяженными средами, граничащими между собой по плоскости.

Конечно, вследствие наличия поглощения в жидкости отражение в первую среду не является в точности полным. Но само собой разумеется, это возражение может быть сделано по отношению к любому способу доказательства существования поля, проникающего во вторую среду при „полном отражении“.

§ 3

Опыты, касающиеся описанных выше свойств излучения от источника, расположенного вблизи поверхности раздела двух тел, были проведены с установкой, изображенной на рис. 1. На края прямоугольного стеклянного сосуда, наполненного до краев водным раствором флюоресцирующего вещества, накладывалась прямоугольная стеклянная призма плоскостью гипотенузы вниз, так что жидкость находилась в непосредственном соприкосновении с поверхностью стекла. Возникающие иногда воздушные пузырьки легко удаляются путем доливания жидкости при наложенной призме.

¹ Cl. Schaefer u. G. Gross. Ann. d. Phys. 32. 649, 1910. Там же дается сводка остальной литературы.

Линза L (рис. 2) проектирует изображение горизонтально расположенного штифта лампы Нернста N сквозь призму на поверхности раздела стекло — жидкость. Проникающий в жидкость флюоресцирующий конус и служит источником света для самих опытов.

Мы имеем здесь таким образом, как это и требуется, источник света, непосредственно прилегающий к плоскости раздела или, точнее говоря, наиболее интенсивная часть которого удовлетворяет этому условию, поскольку конус флюоресценции виден на известном расстоянии внутри жидкости.

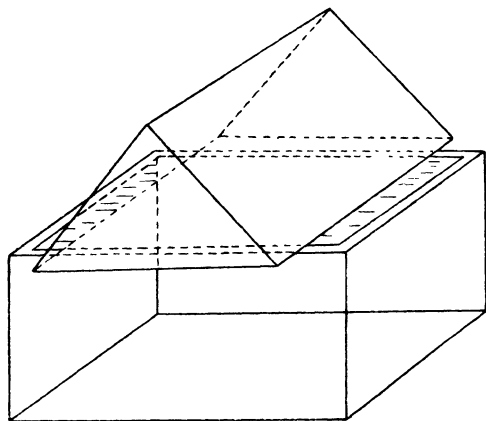


Рис. 1

Флюоресценцию в области d (рис. 2) лучше всего наблюдать с той же стороны, с которой падает свет, возбуждающий флюоресценцию, для чего следует несколько выйти из его плоскости падения.

При малом угле φ (рис. 2) видно весьма сильное свечение. Если постепенно переходить к большим углам наблюдения φ , то в определенном месте большая часть интенсивности почти внезапно исчезает. Это происходит тогда, когда угол φ становится равным предельному углу стекло — жидкость. Однако часть интенсивности сохраняется, и при дальнейшем возрастании φ эта часть убывает лишь очень медленно. Объяснение опыта заключается в следующем: остаточная интенсивность получается от той части источника света, которая находится на очень малом удалении от плоскости раздела. Для этой части никакого предельного угла не существует. Насколько малым должно быть указанное удаление, можно приближенно оценить из отношения интенсивности, не исчезающей

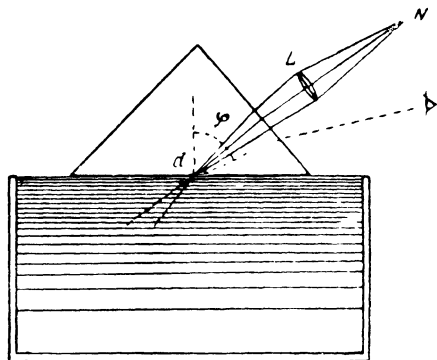


Рис. 2

при переходе через предельный угол, к полной интенсивности, наблюдаемой непосредственно перед этим. Изложенное объяснение подтверждается вторым опытом.

А именно, угол падения пучка, возбуждающего флюоресценцию, увеличивается до тех пор, пока не наступает полное отражение. Свет проникает тогда в флюоресцирующую жидкость лишь на очень малую глубину. Флюоресцирующий слой, чрезвычайно тонкий в этом случае, опять служит источником света.

Можно констатировать, что полная интенсивность флюоресценции теперь примерно такова же, как и та, которая оставалась в первом опыте при переходе через предельный угол. Это обусловлено очевидно, малой полной толщиной светящегося слоя.

Если теперь, как и в первом опыте, производить наблюдение, постепенно переходя ко все большим углам наблюдения, то, в противоположность первому опыту, нельзя обнаружить никакого направления, при котором интенсивность претерпевала бы внезапное изменение. Это происходит потому, что теперь весь источник света расположен в непосредственной близости к плоскости раздела.

Небольшим видоизменением опыта можно добиться того, что одновременно будут иметься два близких друг к другу источника, из которых один лежит очень близко от поверхности раздела, а другой, напротив, в существенной части далек от нее.

Возбуждающий свет (см. рис. 3), после того как он отразился от ab и bc , проходит еще раз под малым углом сквозь плоскость раздела и вблизи e входит в жидкость. При этом, как и в первом опыте, свет флюоресценции расположен в направлении луча, однако он относительно слаб, потому что сам дважды отраженный свет является слабым. Наблюдаются оба свечения — в d и e . При переходе через предельный угол, как уже описано, интенсивность в d заметно не изменяется. Напротив, свечение в e исчезает почти совершенно, потому что теперь интенсивность непосредственно прилегающего

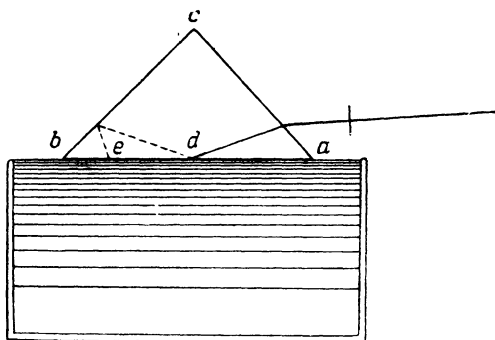


Рис. 3

к граничной плоскости тонкого слоя слишком мала для того, чтобы его можно было хорошо наблюдать. Впрочем и здесь при более внимательном наблюдении замечается слабое свечение.

К ТЕОРИИ

§ 4

В точке A менее плотной среды I (рис. 4) находится источник монохроматического света. Требуется определить поле в точке B среды II .

Мы принимаем, что точка наблюдения B находится на очень большом, по отношению к длине волны, расстоянии z от плоскости раздела. Пусть для простоты расстояние a (см. рис. 4) мало по отношению к z . На отношении a к длине волны не накладывается никаких ограничений.

Ход вычисления поля, возбуждаемого источником A в точке B , следующий. Представим себе, что в точку B помещен источник света. Из него исходят обычные шаровые волны, так как он находится далеко от плоскости раздела.

На поверхности раздела он преломляется. Амплитуда преломленных волн может быть обычным способом рассчитана с помощью формул Френеля для плоских волн (мы отвлекаемся от абсорбции). Таким путем определяется поле, которое образуется в A источником, мысленно помещенным в B . Так как расстояние a мало по сравнению с z , то вместо угла падения лучей, которые после преломления достигают точки A , можно взять угол, образуемый с нормалью линией AB . На том же основании можно пренебречь уменьшением амплитуды, которое имеет место вследствие расхождения пучка на пути от плоскости раздела до точки A .

После того как таким способом определено поле источника B в точке A , применением упомянутого принципа взаимности можно немедленно найти искомое поле источника A в точке B .

Обозначим через \mathbf{E} и \mathbf{H} электрическое и, соответственно, магнитное поле, создаваемое точечным источником монохроматического

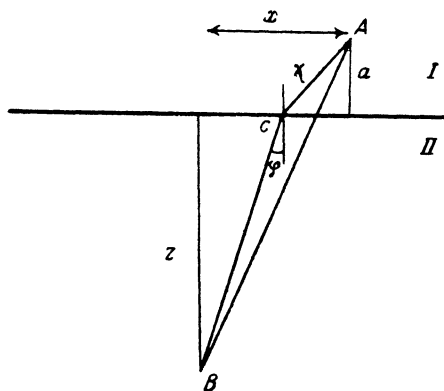


Рис. 4

света, колеблющимся в направлении y (\perp плоскости x, z). Такой источник можно представлять себе, например, в виде колеблющегося электрона. Он находится в бесконечно протяженной среде.

Положим

$$k^2 = \frac{\epsilon \nu^2 + i \nu \sigma}{c^2},$$

где c — скорость света, ν — циклическая частота, ϵ — диэлектрическая постоянная, σ — проводимость. Пусть магнитная проницаемость будет $= 1$.

Уравнения Максвелла, написанные в единицах Хевисайда

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E} &= c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

по известному методу Герца (см., например, Зоммерфельд, 1. с.), дают

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \frac{\partial \pi}{\partial x}, & H_x &= -\frac{\partial \pi}{\partial z}, & H_y &= 0, \\ E_x &= \frac{i \nu}{ck^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial z \partial y}, & E_x &= \frac{i \nu}{ck^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y}, \\ E_y &= -\frac{i \nu}{ck^2} \left(\frac{\partial^3 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \pi}{\partial z^2} \right), \\ \pi &= \frac{s \cdot e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

R означает расстояние от источника. Временной множитель $e^{-i \nu t}$ опущен. Константу s мы называем силой источника света.

Мы представляем себе теперь, что в точке B помещен источник, колебания которого перпендикулярны к плоскости чертежа. Пусть его сила $= 1$. Если через r обозначить расстояние Bc , то электрический вектор в точке c будет равен

$$\frac{i \nu}{cr} e^{ik_2 r}.$$

Преломленная волна E в точке A выражается, согласно Френелю, в виде

$$E = \frac{i \nu \sin \chi \cos \varphi}{cr \sin(\varphi + \chi)} e^{i(k_2 \sin \varphi \cdot r + k_2 \cos \varphi \cdot z + k_1 \cos \chi \cdot a)}, \quad (3)$$

где a — расстояние от A до поверхности раздела.

Применяя принцип взаимности, мы получаем следующий результат. Если в точке A находится источник света, колеблющийся перпендикулярно к плоскости чертежа, то он излучает во вторую среду волну, которая на больших расстояниях имеет вид (3). При этом следует различать два случая.

1. $\sin \varphi < n$. Тогда, очевидно, амплитуда \mathcal{A} выражается в виде

$$\mathcal{A} = \frac{2\nu \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (4)$$

где

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = n.$$

2. Второй, специально интересующий нас случай имеет место при $\sin \varphi > n$. Формула остается в силе и в этом случае, но только следует положить

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n}, \quad \cos \chi = i \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{n}\right)^2 - 1}$$

и обычным способом перейти к действительным значениям. Если проделать это, то амплитуда \mathcal{A} примет в этом случае вид

$$\mathcal{A} = \frac{2\nu}{cr} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - n^2}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1} \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{n}\right)^2 - 1}},$$

где положено $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$, поскольку предполагается, что среда не обладает поглощением; при этом λ_1 означает длину волны в I.

Совершенно аналогично могут быть вычислены амплитуды для двух других направлений колебаний источника света.

Для источника, колебания которого происходят перпендикулярно к плоскости раздела, получается

$$\mathcal{A} = \frac{2\nu}{cr} \frac{\sin^2 \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}, \quad \sin \varphi < n, \quad (5)$$

$$\mathcal{A} = \frac{2\nu}{cr} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi)(1 - n^2)}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1} \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{n}\right)^2 - 1}}, \quad \sin \varphi > n. \quad (5a)$$

И, наконец, для источника, который колеблется в плоскости чертежа параллельно граничной плоскости, получается

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{cr} \frac{\sin \chi \cos \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}, \quad \sin \varphi < n, \quad (6)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{cr} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2} \cdot \cos \varphi}{\sqrt{(\sin^2 \varphi - n^2 \cos^2 \varphi)(1 - n^2)}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1} \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{n}\right)^2 - 1}}, \quad \sin \varphi > n. \quad (6a)$$

Соответствующие фазы также могут быть легко вычислены, но мы не будем подробнее этого касаться.

Если рассмотреть выражения (4а), (5а), (6а), которые имеют силу после перехода через предельный угол, то видно, что падение интенсивности, наступающее при переходе через предельный угол, происходит быстро или медленно в зависимости от того, велико или мало число a/λ_1 . Если a/λ_1 очень велико, то интенсивность падает до нуля практически сразу. Это обычный случай, при котором

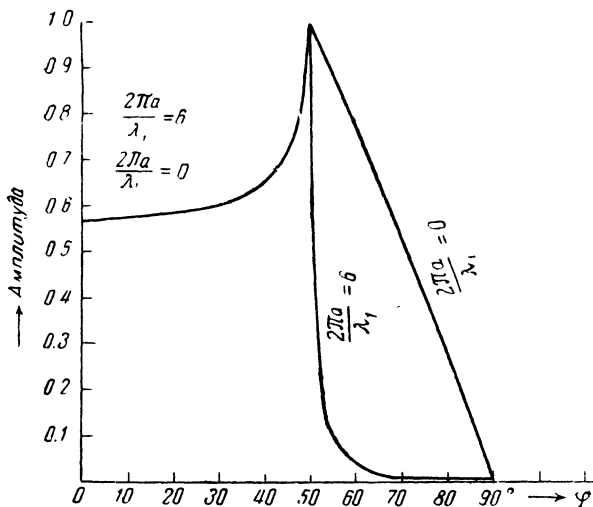


Рис. 5

существует резкая граница между светом и тенью. Если же, напротив, $2\pi a/\lambda_1$ невелико, то падение происходит лишь постепенно. Этот случай соответствует описанному выше опыту II. То, что в этом опыте источник света является протяженным, а не точечным, принципиально ничего не меняет. На рис. 5 в относительном мас-

штабе изображены в функции угла наблюдения амплитуды, вычисленные по формулам (4) и (4а), при относительном показателе преломления $\approx \frac{3}{4}$ и для значений $2\pi a/\lambda_1 = 0$ и 6, т. е. для $a=0$ и $a \approx \lambda_1$.

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ

§ 5

Принцип взаимности, сформулированный в § 1 и примененный для вычисления амплитуд, выведен Г. А. Лорентцом.¹ Примененная здесь формулировка несколько отличается от лорентцовской. Поэтому я хочу коротко привести доказательство, которое также впрочем совпадает в основном с доказательством, данным Лорентцом.

Обозначим поля, создаваемые источниками A и B , соответственно через \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{E}' , \mathbf{H}' . Как \mathbf{E} и \mathbf{H} , так и \mathbf{E}' и \mathbf{H}' удовлетворяют уравнениям Максвелла везде, за исключением самих точек A и B соответственно. Исключим эти точки с помощью небольших сфер. Обозначим оставшееся бесконечное пространство через Ω . Представим себе вначале уравнения (1) написанными для \mathbf{E} и \mathbf{H} ; умножим первое скалярно на \mathbf{E}' , второе — на \mathbf{H}' и вычтем второе из первого. Из полученного выражения вычтем совершенно аналогичное, в котором штрихованные и нештрихованные величины переставлены.

Так как $\frac{\partial}{\partial t} = -iv$, то вся левая часть при этом исчезает. Проинтегрируем теперь по всему пространству Ω . Преобразуя объемный интеграл в поверхностный, мы получаем

$$\int [(\mathbf{E}' \mathbf{H})_n - (\mathbf{E} \mathbf{H}')_n] d\sigma = 0. \quad (7)$$

$[]_n$ означает нормальную компоненту векторного произведения.

Интеграция распространяется на бесконечно удаленную поверхность и поверхности обеих сфер. Первая часть может быть отброшена (см. Г. А. Лорентц, l. c.).

Интегралы по поверхностям обеих сфер, при уменьшении их радиусов до нуля, легко могут быть вычислены.

При этом следует только принять во внимание, что поле источника, находящегося в центре такой сферы, в непосредственной

¹ H. A. Lorentz. Versl. K. Ak. van Wet., стр. 345, 1905.

близости от источника, а следовательно и на поверхности бесконечно малой сферы, дается выражением (2), так как в этом вообще состоит определение точечного источника.¹

Если выполнить интеграцию (7), то получается

$$s\mathbf{E}_h' = s'\mathbf{E}_h, \quad (8)$$

где h и h' означают направления, в которых происходят колебания источника A и соответственно B . Соотношение (8) выражает принцип взаимности.

§ 6. Связь с теорией А. Зоммерфельда

Зоммерфельд рассмотрел распространение волн в беспроводной телеграфии.² Эта проблема, само собой разумеется, по существу не отличается от чисто оптической проблемы. То, что в беспроводной телеграфии нельзя обойтись обычными оптическими формулами, объясняется тем, что здесь имеет место случай источника, расположенного очень близко от поверхности раздела двух сред; случай, который не встречался в оптике.

В работе Зоммерфельда и в примыкающей к ней работе Гершельмана (Herschelmann) дано общее решение для этого случая. Однако вопрос этим не исчерпывается, поскольку, как указывает сам Зоммерфельд, трудность заключается не в получении, а в дискуссии решения. В соответствии с характером своей задачи Зоммерфельд дискутирует решение только для того случая, когда точка, в которой вычисляется поле, также находится на небольшом расстоянии от плоскости раздела. Знание поля существенно именно на таких расстояниях, которые сравнимы или малы по сравнению с длиной волны λ . Как показал Зоммерфельд, при этом образуются поверхностные волны, которые, заметим между прочим, и в оптическом случае могут, повидимому, привести к интересным явлениям. Но выражения, данные Зоммерфельдом, справедливы и для расстояний от плоскости раздела, которые хотя и велики по сравнению с λ , но малы по сравнению с расстоянием от источника. Иными словами, они справедливы только для углов наблюдения, очень близких к $\pi/2$. Кроме того, формулы выведены только для вертикальных

¹ Случай источника, лежащего в плоскости раздела, должен быть исключен.

² A. Sommerfeld. Ann. d. Phys. 28, 665, 1909.

колебаний и в предположении, что источник находится на самой плоскости раздела.

В противоположность этому мы с самого начала ограничиваемся точками наблюдения, которые расположены на большом по отношению к λ расстоянии от плоскости раздела, как это и соответствует описанным опытам. Благодаря этому теория становится значительно более простой. Как показано выше, можно найти при этом поле для любых углов наблюдения и произвольных направлений колебаний и положений источника, комбинируя формулы Френеля с принципом взаимности и не прибегая к общему решению Зоммерфельда. Впрочем для этого случая дискуссия его решений, видимо, также не будет особенно сложной.

Таким образом, формулы Зоммерфельда и приведенные здесь формулы взаимно дополняют друг друга.

Для углов наблюдения, очень близких к $\pi/2$, но не равных $\pi/2$, справедливы и те и другие; здесь, следовательно, возможно сравнение. Для этой цели в выражении (5a) нужно положить $\alpha = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ (ψ очень мало). Полученное таким путем значение нужно сравнить, очевидно, с электрическим полем, которое получается из зоммерфельдовского Q_2 , I. с., (34a), стр. 700 (причем нужно учитывать только члены с первой степенью z) или, что то же самое, с его выражением E_z , (35a), стр. 702, в котором надо поменять местами k_1 и k_2 , а вместо $k_1^2 + k_2^2$ подставить $2k_2^2$.¹

Сравнение показывает, что наша формула (5a) действительно переходит в зоммерфельдовскую.

Страсбург,

Физический институт.

¹ У Зоммерфельда источник расположен на самой плоскости раздела; у нас он целиком расположен в среде I. См. Зоммерфельд, I. с., и Гершельман, *Jahrb. d. drahtl. Telegr.* 5, 14, 1911.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ¹

[*Math. Ann.* 95, 154—160, 1925. Совм. с И. Е. Таммом]

(Поступило 6 февраля 1925 г.)

Ниже будет изложено обобщение уравнений Минковского для случая анизотропных сред.

С этой целью мы прежде всего даем в § 1 новое написание уравнений Минковского. Обычно тензорная зависимость между тензорами поля F_{ik} и f^{ik}

$$\begin{aligned} (F_{14}, F_{24}, F_{34}) &= (E_1, E_2, E_3); & (F_{23}, F_{31}, F_{12}) &= (B_1, B_2, B_3); \\ (f^{11}, f^{12}, f^{13}) &= (D_1, D_2, D_3); & (f^{23}, f^{31}, f^{12}) &= (H_1, H_2, H_3) \end{aligned}$$

устанавливается с помощью тензора скорости u^i [уравнения (1) и (2)]; диэлектрическая постоянная ϵ и магнитная проницаемость μ рассматриваются при этом как скалярные величины. Можно, однако, рассматривать также и ϵ и μ как компоненты четырехмерного тензора диэлектрической и магнитной проницаемости s_{ij} или s^{ij} [(3) или (6)] (в последующем коротко называемого Д.-М.-тензором); уравнения Минковского (1) и (2) могут быть тогда приведены к очень простому виду. В эти уравнения тензор скорости явно уже не входит.

¹ Подробное рассматриваемый здесь вопрос будет освещен одним из нас в другом месте (*Журн. Русск. физ.-хим. общества*).

После того как это сообщение уже было закончено, мы узнали, что проф. Фредерикс (Ленинград) независимо от нас провел аналогичное рассмотрение.

В § 2 даны уравнения для анизотропных тел. Д.-М.-тензор оказывается здесь уже не второго ранга, как в случае изотропных тел, а четвертого ранга. Мы обозначаем его через $s_{ij\alpha\beta}$ или $s^{ij\alpha\beta}$ [(11) и (13)].

Тензорная форма полученных нами уравнений позволяет перенести эти уравнения и в область общей теории относительности.

Мы надеемся в следующей публикации сообщить о применении полученных результатов к некоторым вопросам, касающимся оптики и определения метрики в движущихся средах.

§ 1

Если первоначально мы ограничим наше рассмотрение непроводящими средами, то мы будем иметь дело только с уравнениями

$$f_{ij} u^j = \epsilon F_{ik} u^k, \quad (1)$$

$$F_{kl} u_i + F_{li} u_k + F_{ik} u_l = \mu (f_{kl} u_i + f_{li} u_k + f_{ik} u_l), \quad (2)$$

ибо два других основных уравнения

$$\text{Div } f^{ij} = 0, \quad \text{Rot } F_{ij} = 0$$

сохраняют в этих средах свою обычную, справедливую и для вакуума форму. Кроме тензоров поля F_{ik} и f^{ik} и материальных констант ϵ и μ , в уравнения (1) и (2) входит еще тензор скорости u^i . Если величины ϵ и μ рассматриваются как скаляры, то привлечение подобного вспомогательного тензора неизбежно, ибо линейная тензорная связь двух тензоров (в данном случае F_{ij} и f^{ij}) может быть установлена только с помощью третьего тензора (в данном случае u^i) (исключая тривиальный случай прямой пропорциональности).

Если же рассматривать величины ϵ и μ не как скаляры, а как компоненты четырехмерного тензора, то привлечение тензора скорости становится излишним. Подобное рассмотрение представляется вполне естественным, если вспомнить обычные трехмерные тензоры ϵ_{ij} и μ_{ij} кристаллофизики.

Мы определяем „тензор диэлектрической и магнитной проницаемости“ s_{ij} , приписывая его компонентам в покоящейся системе следующие значения:

$$(s_{ij}) = \left\{ \begin{array}{cccc} -\sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon \sqrt{\mu}} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

С помощью этого тензора можно объединить оба уравнения (1) и (2) в одно уравнение (4)

$$F_{ij} = s_{ix} s_{j\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (4)$$

так как в покоящейся системе это уравнение (4) дает правильную связь между F_{ij} и f^{ij} , в чем можно легко убедиться простой подстановкой. Вследствие своего тензорного характера уравнение сохраняет силу в любой произвольной системе координат.¹

В уравнение (4) компоненты скорости u^i явно не входят, но они содержатся в нем неявно, так как коэффициенты лорентцова преобразования зависят от скорости среды.

Разрешая уравнение (4) относительно f^{ij} , мы приходим к уравнению следующего вида:

$$f^{ij} = s^{i\alpha} s^{j\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где $s^{i\alpha}$ — ковариантные компоненты тензора, имеющие в покоящейся системе следующие значения:

$$(s^{ij}) = \left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \sqrt{\mu} \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Тензоры s_{ij} и s^{ij} находятся между собой в таком же соотношении, как и гравитационные потенциалы g_{ij} и g^{ij} в общей теории относительности, а именно:

$$s^{i\alpha} s_{k\alpha} = \delta_k^i; \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta_k^i = 0, & \text{если } i \neq k, \\ \delta_k^i = 1, & \text{если } i = k, \end{array} \right. \quad (7)$$

¹ В случае необходимости можно убедиться в справедливости последнего утверждения действительным проведением преобразования координат.

Иными словами, s^{ij} равны соответствующим минорам, образованным из s_{ij} , деленным на детерминант $|s_{ij}|$.

Заметим, что в (3) и (6) электрические и магнитные величины ϵ и μ оказываются компонентами одного единственного тензора, что полностью отвечает известному слиянию векторов электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{B} (или \mathbf{D} и \mathbf{H}) в один четырехмерный тензор F_{ij} (соответственно f^{ij}).

Далее следует заметить, что приведенное выше рассмотрение может быть распространено и на случай проводящих сред. Зависимость четырехмерного тока J^i от плотности заряда и напряженности поля может быть выражена в следующей форме:

$$J^i = \lambda^{i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \rho^i. \quad (8)$$

Тензорные компоненты $\lambda^{i\alpha\beta}$ и ρ^i в покоящейся системе имеют, согласно определению, следующие значения:

$$\rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = 0, \quad \rho^4 = \rho$$

и $\lambda^{i\alpha\beta} = 0$, за исключением $\lambda^{114} = \lambda^{224} = \lambda^{334} = \lambda^1$.

Через ρ и λ здесь обозначены плотность заряда и проводимость, измеренные в покоящейся системе.

Легко можно показать, что уравнения (4), (5) и (8) совпадают с соответствующими уравнениями Минковского.

§ 2

Легко обобщить теперь предыдущие выкладки для случая анизотропии. Мы попробуем вновь привести уравнения, связывающие F_{ij} и f^{ij} , к форме, аналогичной уравнению (4). Однако теперь для этой цели недостаточно Д.-М.-тензора второго ранга, а необходимо воспользоваться тензором четвертого ранга $s_{ij\alpha\beta}$.²

Мы полагаем

$$F_{ij} = s_{ij\alpha\beta} f^{\alpha\beta}. \quad (9)$$

¹ Мы оставляем неопределенным, не будет ли $\lambda^{i\alpha\beta} = 0$ за исключением

$$\lambda^{114} = \lambda^{224} = \lambda^{334} = -\lambda^{141} = -\lambda^{242} = -\lambda^{343} = \frac{\lambda}{2}.$$

² Если потребовать симметрии Д. М.-тензора, то непосредственно видно, что десяти компонент симметричного тензора второго ранга недостаточно для того, чтобы однозначно представить двенадцать независимых величин ϵ_{ij} и μ_{ij} . В следующей публикации мы надеемся показать, что это обстоятельство (что в анизотропных средах Д. М.-тензор есть тензор четвертого ранга) может быть приведено в тесную зависимость с двойным лучепреломлением в этих средах.

Значения тензорных компонент $s_{ija\beta}$ в покоящейся системе определяются из требования, чтобы в этой системе уравнение (9) было эквивалентно обычным уравнениям

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j.$$

Правда, для однозначного определения необходимых значений этого требования недостаточно, но вполне естественно потребовать еще следующее: при непрерывном переходе к изотропии уравнение (9) должно переходить в соответствующее уравнение (4), т. е. $s_{ija\beta}$ в $s_{i\alpha} \cdot s_{j\beta}$. Вычисление приводит к следующим значениям компонент (в покоящейся системе, координатные оси которой совпадают с главными направлениями анизотропии; в последующем такая координатная система коротко обозначается как „А-система“):

$$s_{1212} = s_{2121} = \mu_3, \quad s_{1313} = s_{3131} = \mu_2, \quad s_{2323} = s_{3232} = \mu_1, \\ s_{1414} = s_{4141} = -\frac{1}{\epsilon_1}, \quad s_{2424} = s_{4242} = -\frac{1}{\epsilon_2}, \quad s_{3434} = s_{4343} = -\frac{1}{\epsilon_3}; \quad (10)$$

все остальные $s_{ija\beta}$ за исключением членов главной диагонали, в А-системе исчезают. Что же касается этих диагональных членов, то наших требований хватает только для определения их размерности, но не их значений. Однако эти члены для нас не имеют значения, так как в любой системе отсчета они выпадают из уравнений (9).¹

Как легко видеть из (10), тензор $s_{ija\beta}$ симметричен относительно перестановки индексов (i, α) , (j, β) и $(i\alpha, j\beta)$. В А-системе его отличные от нуля компоненты могут быть расположены в виде квадратной матрицы

$$(s_{ija\beta}) = \left\{ \begin{array}{cccc} [\mu] & \mu_3 & \mu_2 & -\frac{1}{\epsilon_1} \\ \mu_3 & [\mu] & \mu_1 & -\frac{1}{\epsilon_2} \\ \mu_2 & \mu_1 & [\mu] & -\frac{1}{\epsilon_3} \\ -\frac{1}{\epsilon_1} & -\frac{1}{\epsilon_2} & -\frac{1}{\epsilon_3} & \left[\frac{1}{\epsilon^2 \mu} \right] \end{array} \right\}. \quad (11)$$

¹ Пример: $\frac{\partial F'_{ij}}{\partial B'_3} = s'_{ij12} - s'_{ij21}$, так как $B'_3 = f'^{12} = -f'^{21}$;

$$\frac{\partial (s'_{ij12} - s'_{ij21})}{\partial s_{pppp}} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x^p}{\partial x'^1} \frac{\partial x^p}{\partial x'^2} - \frac{\partial x^p}{\partial x'^2} \frac{\partial x^p}{\partial x'^1} \right) = 0.$$

Члены (11), (12), (13) и т. д. этой матрицы соответствуют компонентам s_{1111} , s_{1212} , s_{1313} и т. д.; для диагональных членов приведены только их размерности.

Совершенно аналогично может быть найден соответствующий контравариантный тензор $s^{ij\alpha\beta}$, который определяется уравнением

$$f^{ij} = s^{ij\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

а именно в А-системе:

$$(s^{ij\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} & \frac{1}{\mu_3} & \frac{1}{\mu_2} & -\epsilon_1 \\ \frac{1}{\mu_3} & \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} & \frac{1}{\mu_1} & -\epsilon_2 \\ \frac{1}{\mu_2} & \frac{1}{\mu_1} & \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} & -\epsilon_3 \\ -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & [\epsilon^2 \mu] \end{pmatrix}. \quad (13)$$

При этом справедливо соотношение, аналогичное (7),

$$s^{ij\alpha\beta} s^{\alpha\beta hk} = \delta_h^i \delta_k^j.$$

Уравнения (9) и (11) и соответственно (12) и (13) решают поставленную задачу и позволяют определить зависимость между F_{ij} и f^{ij} в произвольной системе отсчета. Например, в системе отсчета, которая движется относительно рассматриваемой среды со скоростью \mathbf{v} , причем так, что скорость \mathbf{v} параллельна одной из главных осей анизотропии, основные уравнения (9) и (12) могут быть приведены к следующей форме:¹

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} + [\mathbf{vH}] &= \epsilon (\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]), \\ \mathbf{B} - [\mathbf{vE}] &= \mu (\mathbf{H} - [\mathbf{vD}]). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти уравнения совершенно аналогичны уравнениям Минковского для изотропных сред; единственное отличие заключается в том, что здесь буквами ϵ и μ обозначены не скаляры, а трехмерные тензоры

$$(\epsilon) = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad (\mu) = \begin{Bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{Bmatrix}.$$

Поэтому, например, произведение $\epsilon \mathbf{E}$ имеет следующее значение:

$$\epsilon \mathbf{E} = i_{\epsilon_{1\alpha}} E_\alpha + j_{\epsilon_{2\alpha}} E_\alpha + k_{\epsilon_{3\alpha}} E_\alpha,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные координатные векторы.

¹ Промежуточные вычисления здесь опущены.

В заключение заметим еще, что выше мы неявно сделали предположение, что главные оси обоих пространственных тензоров ϵ_{ij} и μ_{ij} совпадают друг с другом, что не обязательно имеет место в кристаллах низших классов симметрии. Можно, однако, снять это ограничение, если принять во внимание, что при ограничении чисто пространственными преобразованиями координат каждый четырехмерный тензор может быть разложен в ряд пространственных тензоров.¹ Вообще говоря, тензор четвертого ранга распадается на 16 пространственных тензоров. Для специального тензора $s_{ij\alpha\beta}$ (или $s^{ij\alpha\beta}$) только четыре из этих пространственных тензоров отличны от нуля, а именно: один „внутренний“ тензор четвертого ранга, два идентичных „внешних“ тензора второго ранга и, наконец, один тензор нулевого ранга (скаляр) \hat{s}_{4yyy} . При этом оказывается, что компоненты „внутреннего“ тензора зависят исключительно от μ_{ij} , компоненты „внешнего“ же — только от ϵ_{ij} . Это обстоятельство делает правдоподобным следующее предположение.

Если главные оси эллипсоидов ϵ_{ij} и μ_{ij} не совпадают, то можно образовать матрицу (11) и подвергнуть ее внутренние (соответственно — внешние) члены чисто пространственному преобразованию координат, при котором, однако, ее внешние (соответственно — внутренние) члены остаются неизменными. Если выбрать это преобразование так, что оно приводит оси эллипсоидов ϵ_{ij} и μ_{ij} , предположенные при образовании матрицы (11) совпадающими, в правильное взаимное положение, то получатся правильные значения тензорных компонент.

¹ Ср., например, Weyl, Raum-Zeit-Mathematik, 5 Aufl., стр. 183 и сл.

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ СВЕТА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

[ЖРФХО. 58, 381 — 386, 1926]

Настоящая заметка посвящена вопросу об изменении во времени френгоферовой диффракционной картины, возникающей при прохождении плоской световой волны через среду, слегка оптически неоднородную, для случаев, когда неоднородности вызываются распространяющимися упругими возмущениями, либо когда среда состоит из различных компонент и неоднородность обуславливается различиями концентрации, выравнивающейся диффузией, либо, наконец, для случая непостоянной температуры, выравнивающейся теплопроводностью. Подобный вопрос возникает при наблюдении по методу затемненного поля.

Мы обратимся сначала к первому случаю и предположим:

1) что изменение $\delta\mu$ показателя преломления обуславливается только изменением плотности $\delta\rho$ и пропорционально этому изменению; далее, что $\delta\mu$ настолько мало, что можно ограничиться рассмотрением членов с первой степенью $\delta\rho$,

2) что за время наблюдения возмущение заключено в ограниченной замкнутой области, целиком находящейся в поле зрения.

Пусть плоская волна распространяется в направлении оси X . Если линейные размеры области возмущения в этом направлении не слишком велики или, другими словами, если $\partial\delta\rho/\partial l$ достаточно мало по сравнению с c/l , где c — скорость света, а l — линейный размер области возмущения,¹ то диффракционную картину можно

¹ Это предполагает, что скорость звука очень мала по отношению к скорости света.

рассчитывать «статически», т. е. не учитывая тех изменений δr , которые произошли за время прохождения световой волны через область.

В настоящей заметке я ограничусь рассмотрением случаев, где такое предположение допустимо с достаточным приближением.

Обозначим через P комплексную амплитуду какой-нибудь составляющей светового вектора (магнитного или электрического) в точке, очень отдаленной от области возмущения, расположенной в направлении R , либо в точке фокальной плоскости линзы, соответствующей этому направлению. Мы получаем

$$P = A \int \delta\mu \cdot e^{ik(R-x)} d\tau, \quad (1)$$

где R — расстояние элемента объема от какой-нибудь нормальной к направлению R плоскости, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина световой волны и A — величина, которую при наших условиях можно считать постоянной.

Интегрирование распространяется согласно предположению 2) на область, целиком включающую область возмущения.

Для того чтобы получить из (1) слагающую вектора Π , надо P помножить на $e^{i\nu t}$ и перейти, как обычно, к действительной части (ν — частота светового колебания). Наша задача состоит в том, чтобы найти зависимость P или, вернее, квадрата действительной амплитуды, т. е. интенсивности, от времени.

Заметим, что так как $\delta\mu$ пропорционально δr , а δr подчиняется волновому уравнению, то для $\delta\mu$ справедливо

$$\frac{\partial^2 \delta\mu}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \delta\mu, \quad (2)$$

где a — скорость звука в данной среде.

Продифференцировав (1) два раза по t , мы получим, благодаря (2)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = Aa^2 \int \nabla^2 \delta\mu e^{ik(R-x)} d\tau. \quad (3)$$

Замечая, далее, что для любых двух функций, удовлетворяющих известным условиям непрерывности внутри замкнутой области, ограниченной поверхностью σ , справедливо

$$\int (\nabla^2 \varphi \cdot \psi - \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma \quad (4)$$

¹ Lord Rayleigh. *Scient. Papers* V. 547.

² Речь идет, таким образом, о возмущении, каким-либо образом созданном и распространяющемся согласно уравнению (2).

и полагая $\varphi = \delta\mu$, $\psi = e^{ik(R-x)}$, мы получим, принимая во внимание, что по предположению 2) $\delta\mu$ и $\frac{\partial\delta\mu}{\partial n}$ на границе области равны 0,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = Aa^2 \int \nabla^2 \delta\mu \cdot e^{ik(R-x)} dt. \quad (5)$$

Простым вычислением легко убедиться, что

$$\nabla^2 e^{ik(R-x)} = -4k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} e^{ik(R-x)},$$

где Θ — угол, образованный направлением R с осью X .

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -4k^2 a^2 \sin^2 \int \delta\mu \cdot e^{ik(R-x)} dt,$$

или по (1)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + m^2 P = 0, \text{ где } m = -2ak \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (6)$$

Отсюда $P = C_1 e^{imt} + C_2 e^{-imt}$, а дополняя временным множителем $e^{i\nu t}$, получим

$$\Pi = C_1 e^{i(m+\nu)t} + C_2 e^{i(\nu+m)t}. \quad (7)$$

Действительная часть $Re(\Pi)$ выразится так:

$$Re(\Pi) = \sqrt{D^2 + D_1^2} \cos(2mt + \alpha) \cos(\nu t + \chi), \quad (8)$$

где D, D_1, α — постоянные, а χ — медленно (m всегда мало по сравнению с ν) меняющаяся со временем фаза.

Отсюда интенсивность J рассеянного света

$$J = D^2 + D_1^2 \cos(2mt + \alpha). \quad (9)$$

D, D_1 и α зависят от характера возмущения и от угла наблюдения, но не зависят от времени.

Мы получаем, таким образом, следующий результат.

При диффракции плоской световой волны, обуславливаемой возмущением, распространяющимся в неограниченной упругой среде, интенсивность света, рассеянного в каком-нибудь определенном направлении, меняется периодически по закону (9). Закон изменения не зависит от формы возмущения, а зависит исключительно от отношения скорости звука к скорости света, светового периода и от угла, образованного направлением наблюдения с направлением падающей волны. Полученный результат может быть интерпретирован несколько иначе.

Из (7) непосредственно вытекает следующее.

Рассеянный в каком-нибудь отличном от направления падающей монохроматической волны свет состоит из дублета; частота (циклическая) каждой компоненты отличается от частоты падающей волны на величину $\delta\nu$, где

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \pm 2 \frac{a}{c} \sin \frac{\Theta}{2}; \quad (10)$$

$\delta\nu/\nu$ зависит опять-таки исключительно от a/c и от угла Θ .

Мы имеем, очевидно, дело с особым видом принципа Доплера.¹

Этот результат может быть применен (в несколько ином виде) к вопросу о рассеянии света „однородной средой“, обусловливаемом статистическими флуктуациями.

Я рассчитываю вернуться к этому вопросу в другом месте. Я не буду здесь также касаться случая, являющегося для названного вопроса существенным, когда на границе области, от которой рассеяние наблюдается, $\delta\rho$ или $\partial\delta\rho/\partial t$ не равно 0.

Замечу только, что и здесь, при известных предположениях, найденные соотношения остаются в силе.

В упомянутых выше случаях, когда рассеяние обусловливается различиями температур или концентраций, мы можем (исходя из предпосылок, соответствующих 1 и 2) рассуждать совершенно так же, как в только что рассмотренном случае.

Разница заключается лишь в том, что $\delta\mu$ удовлетворяет теперь уравнению

$$\frac{\partial\delta\mu}{\partial t} = D\nabla^2\delta\mu, \quad (11)$$

где D — либо коэффициент температурной проводимости, либо коэффициент диффузии.

Продифференцировав (1) один раз по t , подставляя вместо $\partial\delta\mu/\partial t$ его значение из (11) и идя далее совершенно тем же путем, как в первом случае, мы получим для P

$$\frac{\partial P}{\partial t} + 4Dk^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cdot P = 0,$$

ИЛИ

$$P = Ce^{-\alpha t}, \quad \text{где } \alpha = 4Dk^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

¹ В своей работе (Ann. de Phys. XVII, 1922) Бриллюэн (Brillouin) также рассматривает вопрос о рассеянии света звуковыми волнами. В ней, между прочим, есть указание на явление Доплера.

и отсюда

$$J = J_0 e^{-2\sigma t}. \quad (12)$$

Таким образом, в случае теплопроводности или диффузии интенсивность рассеянного света меняется экспоненциально. Постоянная времени зависит исключительно от длины волны падающего света, коэффициента проводимости или диффузии и угла наблюдения и не зависит от формы неоднородности.

В только что рассмотренных процессах теплопроводности и диффузии, в которых исходным уравнением служило уравнение (11), мы шли тем же путем, как и в первом случае упругих возмущений, в котором мы исходили из уравнения (2).

С математической стороны между обоими случаями есть различие, правда практически значения не имеющее, но отметить которое мне кажется не лишним.

При переходе от уравнения (3) к (5) мы предполагали, что интеграл в правой части (4), взятый по поверхности, пропадает.

В случае распространения упругого возмущения, ограниченного первоначально конечной областью, существует фронт волны, и поэтому при данном t всегда можно найти замкнутую поверхность σ так, чтобы на ней $\delta\mu$ и $\partial\delta\mu/\partial n$ равнялись 0.

В случае же уравнения (11) известно, что, вообще говоря, даже если для $t=0$ возмущение ограничено конечной областью, все же при каком угодно малом t $\delta\mu$ отлично от 0 во всем неограниченном пространстве. Легко тем не менее убедиться¹ из общего решения уравнения (11) при заданных значениях $\delta\mu = f(x, y, z)$ для $t=0$ в том (физически это очевидно), что при данном t можно всегда уйти поверхностью σ так далеко от области первоначального возмущения, чтобы интеграл в правой части (4) был бы как угодно мал. Тогда найденные нами соотношения остаются во всяком случае справедливыми с любой степенью приближения.

Относительно численных значений полученных величин m , δv и α можно заметить следующее. В случае акустических возмущений интерес представляет $\delta v/v$.

Для воздуха, согласно (10), при угле наблюдения в 90° $\frac{\delta v}{v} \approx \pm 1.5 \cdot 10^{-6}$, т. е. весьма малая величина.²

¹ См., например, Goursat. Cours d'analyse mathématique. III, стр. 108.

² Необходимо подчеркнуть, что затухание акустических волн, особенно существенное при коротких волнах, при наших рассуждениях во внимание не принято.

Для кварца $\frac{\delta v}{v} \approx \pm 4,5 \cdot 10^{-5}$. Эта величина уже при достаточной интенсивности света может быть измерена вполне удобно.

Известная трудность осуществления рассмотренного явления на опыте обуславливается следующим. Для того чтобы вызвать рассеяние для больших углов Θ , создаваемое возмущение должно иметь весьма частую (порядка λ) пространственную структуру.

В случае теплопроводности мы для постоянной времени β получим

$$\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8Dk^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}.$$

Для стекла D в круглых цифрах $= 3 \cdot 10^{-3}$ см/сек.

Если положить $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см, то мы получим

$$\beta \approx \frac{1,5 \cdot 10^{-8}}{\left(2 \sin \frac{\Theta}{2}\right)^2} \text{ сек.}$$

Величины, приблизительно в сто раз большие, мы получим в обычных случаях диффузии.

Физически это чрезвычайно быстрое падение интенсивности для не очень малых углов Θ объясняется тем, что, как указано выше, рассеяние в этих направлениях обуславливается весьма мелкими по структуре пространственными неоднородностями (высокими членами в разложении в ряд Фурье).

Такие неоднородности сглаживаются диффузией или теплопроводностью чрезвычайно быстро.¹

Все же, может быть, не исключена возможность, что в известных случаях (малые углы наблюдения, чрезвычайно медленные процессы диффузии) наблюдение изменения интенсивности рассеянного света может быть осуществлено и оказаться полезным, например для измерений.

¹ Нужно, однако, иметь в виду, что для случаев очень малых β „статический“ способ расчета не применим.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

[*Zs. f. Phys.* 47, 131—136, 1928. Совм. с М. А. Леонтовичем]

(Поступило 15 декабря 1927 г.)

Рассматривается физический смысл вопроса о поведении $V(x)$ в „бесконечности“. Далее, на примере показывается, что при известных условиях одно и то же уравнение Шрёдингера может охватывать более чем одну физическую задачу. В заключение исследуется, в какой мере можно в этом случае из поведения собственных функций делать заключения о квантовых соотношениях.

В данной работе мы хотели бы изложить некоторые соображения относительно уравнения Шрёдингера. Хотя речь идет о вопросах общего характера, мы ограничимся здесь рассмотрением по возможности простого случая.

Речь идет о системе с одной степенью свободы, для которой уравнение Шрёдингера в обычных обозначениях имеет вид

$$\psi'' + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x)] \psi = 0, \quad (1)$$

$V(x)$ — потенциальная энергия. Собственные значения определены требованием „конечности“ $\psi(x)$ во всей (действительной) области, а следовательно, и при $x = \pm \infty$. Поведение решения (1) с одной стороны существеннейшим образом определяется асимптотическим поведением $V(x)$ в бесконечности. Если, например, мы возьмем случай гармонического осциллятора с одной степенью свободы, $V(x) = \alpha x^2$, то уравнение будет иметь дискретный спектр. Если же, напротив, мы положим, например,

$$V(x) = \alpha x^2 e^{-kx^2},$$

где k положительно и произвольно мало, то уравнение (1) будет иметь всюду конечное решение для любого положительного E . Различие же обоих $V(x)$ при малых k , становится заметным только для очень больших x .

С другой стороны, из физических соображений следовало бы ожидать, что, пока речь идет о не слишком высоких энергетических уровнях, поведение $V(x)$ в „бесконечности“ должно было бы оказывать на явления лишь ничтожное влияние. Поэтому нельзя, собственно говоря, указать никакого разумного основания, почему следует исходить именно из первой формы $V(x)$.

Нам представлялось не лишним интереса исследовать этот вопрос подробнее на основе простого примера. Мы рассмотрим „конечный“ осциллятор. А именно, пусть

$$\begin{aligned} V(x) &= \alpha x^2 & \text{для } |x| < c, \\ V(x) &= \text{const} = V_\infty & \text{для } |x| > c. \end{aligned}$$

То, что $V(x)$ прерывно в точках $x = \pm c$, несущественно; принятый же здесь ход $V(x)$ значительно облегчает рассмотрение всего вопроса.

В соответственно выбранных единицах уравнение Шрёдингера имеет теперь вид

$$\begin{aligned} \psi'' + \left(\lambda - \frac{1}{4}x^2\right)\psi &= 0, & |x| < c, \\ \psi'' + (\lambda - V_\infty)\psi &= 0, & |x| > c, \end{aligned} \quad (2)$$

причем $\lambda = E/h\nu_0$, а ν_0 — классическая частота осциллятора; таким образом, в выбранных нами единицах $x^2/4$ и V_∞ представляют собой потенциальную энергию, измеренную в $h\nu_0$. Решения обоих уравнений (2) должны быть приспособлены одно к другому так, чтобы как ψ , так и ψ' оставались непрерывными в точках $x = \pm c$. Кроме того, само собой разумеется, ψ должно быть всюду конечно.

Пусть

$$\psi = a\psi_1 + b\psi_2 \quad (3)$$

будет общим интегралом первого уравнения (2) для интеграла $(-c, +c)$. Рассмотрим два случая.

I случай

$$\lambda < V_\infty \text{ и } V_\infty > 0.$$

В общем решении второго уравнения (2)

$$\left. \begin{aligned} \psi &= Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x}, & x > c, \\ \psi &= A'e^{-\beta x} + B'e^{\beta x}, & x < -c, \end{aligned} \right\} \beta = \sqrt{V_\infty - \lambda}, \quad (4)$$

для того, чтобы удовлетворить требованию конечности ψ при $x = \pm \infty$, необходимо положить $B = A' = 0$. Оставшиеся константы надо выбрать так, чтобы $a\psi_1 + b\psi_2$ и ее первая производная в точках $x = \pm c$ непрерывно переходили в решение (4) и соответственно в его производную.

Это дает четыре однородных уравнения, связывающих четыре константы a , b , A и B' . Таким образом, нетривиальное решение в случае $\lambda < V_\infty$ получается только тогда, когда соответствующий детерминант, который мы обозначим через $F(\lambda)$, обращается в нуль. При этом

$$\begin{aligned} F(\lambda) \equiv & \beta^2 [\psi_2(c)\psi_1(-c) - \psi_2(-c)\psi_1(c)] + \\ & + \beta [\psi_2'(-c)\psi_1(c) - \psi_2(-c)\psi_1'(c) + \psi_2'(c)\psi_1(-c) - \psi_2(c)\psi_1'(-c)] + \\ & + [\psi_1'(c)\psi_2'(-c) - \psi_1'(-c)\psi_2'(c)] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Как известно, ψ_1 , ψ_2 и ψ_1' , ψ_2' являются целыми функциями от $\lambda = V_\infty - \beta^2$.¹ Отсюда следует, что $F(\lambda)$ является целой функцией от β и имеет дискретные нули. В интервале $0 < \lambda < V_\infty$ содержится лишь конечное число корней уравнения $F(\lambda) = 0$.

Легко впрочем показать, что не может существовать отрицательных собственных значений (в случае $V_\infty < 0$ не существует собственных значений, меньших V_∞).

Если c очень большое число, то, кроме того, можно доказать, что первые соответственные значения нашей задачи почти совпадают с соответствующими собственными значениями для неограниченного осциллятора. Конечно, всего этого и следовало ожидать.

Совершенно иначе обстоит дело в случае II

$$\lambda > V_\infty.$$

Система решений (4) должна быть заменена здесь следующей:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, & x > c, \\ \psi &= A'e^{i\alpha x} + B'e^{-i\alpha x}, & x < -c, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda - V_\infty}$$

где

¹ См., например., J. Horn. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2 Aufl., 1927, § 46 [есть русский перевод].

Требование конечности ψ в бесконечности выполнено при произвольных значениях констант. Поэтому здесь, в противоположность случаю I, мы имеем для удовлетворения четырех условий непрерывности в $x = \pm c$ шесть констант a, b, A, B, A', B' .

Каждому значению λ , если только $\lambda > V_\infty$, соответствует решение, удовлетворяющее поставленным требованиям. Таким образом, начиная со значения V_∞ , спектр является непрерывным. В частности, если $V_\infty = 0$, то задача вообще не имеет дискретного спектра; непрерывный спектр распространяется на все положительные значения λ .

Таким образом, дело обстоит в этом случае так, как будто „конечный“ осциллятор вообще (даже и на низких энергетических уровнях) не квантуется, причем это справедливо для произвольно большого (конечного) c , т. е. для модели, „силовое поле“ которой отличается от „силового поля“ „неограниченного“ осциллятора лишь на очень больших удалениях от положения равновесия.

Описанное положение вещей становится, однако, ясным, если обратить внимание на следующее (мы ограничиваемся более частным случаем $V_\infty = 0$). Положим, что мы исходим из другой физической задачи: представим себе частицу, находящуюся очень далеко справа или слева от начала координат. Если написать уравнение Шрёдингера для свободного движения этой частицы, то снова получаются уравнения (2). Но так как движение свободной частицы не подлежит квантованию, то любое положительное значение λ должно быть дозволено. Действительно, уравнения (2) охватывают одновременно две задачи: осциллятор и движение свободной частицы и, само собой разумеется, дискретный спектр первой задачи перерывается непрерывным спектром второй.

Это обстоятельство ни в какой мере не связано со специальной схематизацией (разделение всего интервала на три части и т. п.), а лишь с немонотонным ходом $V(x)$.¹

Мы приходим, таким образом, к выводу, что исследование собственных значений уравнения Шрёдингера не всегда является достаточным для того, чтобы дать исчерпывающее заключение о квантовых соотношениях задачи, для которой это уравнение написано.

Квантование „ограниченного“ осциллятора (хотя в известной мере и не резкое) выявляется сразу же, как только мы обратимся к рассмотрению собственных функций.

¹ Мы намерены вернуться к этому вопросу в дальнейшем.

Ограничимся здесь случаем $c \gg 1$.¹ Асимптотическое представление обоих интегралов первого уравнения (2) известно. Именно, если для ψ_1 мы выберем удовлетворяющую первому уравнению (2) функцию $D_{\lambda-\frac{1}{2}}(x)$, которую Уиткер и Ватсон² называют функцией Вебера, а для ψ_2 — функцию $D_{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix)$, также удовлетворяющую этому уравнению, то для больших x справедливы следующие асимптотические выражения:

$$\psi_1(x) = D_{\lambda-\frac{1}{2}}(x) \approx e^{-x^{3/4}} x^{\lambda-\frac{1}{2}}, \quad x > 0,$$

$$\psi_1(x) = D_{\lambda-\frac{1}{2}}(x) \approx e^{-x^{3/4}} x^{\lambda-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2\pi} e^{i\pi}}{\Gamma(-\lambda+\frac{1}{2})} e^{x^{3/4}} x^{-\lambda-\frac{1}{2}}, \quad x < 0,³$$

$$\psi_2(x) = D_{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix) \approx e^{x^{3/4}} x^{-\lambda-\frac{1}{2}}, \quad x \leq 0.$$

Из этих выражений для ψ_1 и ψ_2 и из уравнений для констант a, b, A, B, A', B' , вытекающих из условий непрерывности в точках $x = \pm c$, мы можем сделать следующие выводы о характере собственных функций.

Если λ отлично от

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2N+1}{2},$$

то

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda+\frac{1}{2})} \neq 0$$

и все решения первого уравнения (2) очень быстро возрастают с ростом $|x|$, причем в зависимости от выбора a и b возрастают

¹ Насколько большим должен быть c , для того чтобы с достаточным приближением были справедливы нижеприведенные асимптотические выражения, зависит от значения λ .

² E. T. Whittaker und G. N. Watson. A course of modern Analysis § 5, 16 и след. (3 Aufl.).

³ Если $\lambda \neq \frac{2N+1}{2}$ (N — положительное целое число), то и $\frac{1}{\Gamma(-\lambda+\frac{1}{2})} \neq 0$

и первый член $e^{-x^{3/4}} x^{\lambda-\frac{1}{2}}$ должны быть зачеркнуты.

либо в положительном направлении (ψ_1 не симметрично для $+x$ и $-x$), либо в отрицательном, либо в обоих. В точках $x = \pm c$ к этому решению, справедливому внутри интервала, примыкают синусоиды, которые без затухания простираются в бесконечность. Амплитуда

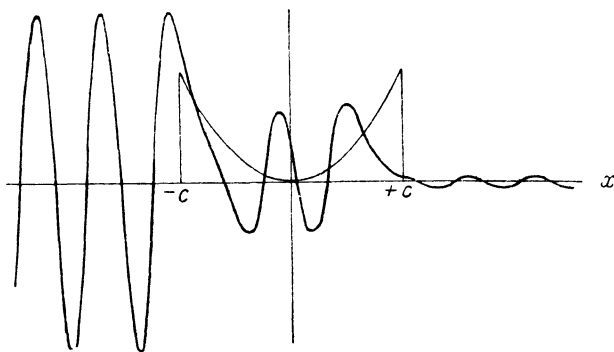


Рис. 1. Жирная кривая схематически изображает ход собственной функции для $\lambda = 4$. Тонкая кривая изображает ход $V(x)$

правого или левого волнового цуга (или обоих), в результате условий непрерывности, очень велика по сравнению с максимальными значениями собственной функции при малых x . Такой ход собственных функций, совершенно схематически изображенный на рис. 1,

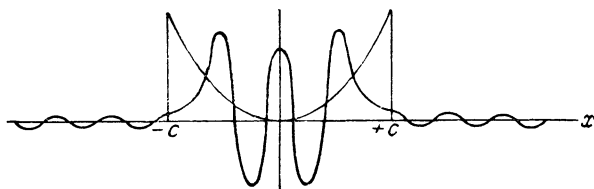


Рис. 2. Жирная кривая изображает ход собственной функции для $\lambda = 4.5$

соответствует, очевидно, равномерному движению свободной частицы и отражению от силового поля осциллятора.

Если, напротив, λ полуцелое, то $\frac{1}{\Gamma(-\lambda + \frac{1}{2})} = 0$ и в этом случае существуют собственные функции, которые практически отличны от нуля только в ограниченной области вокруг начала координат (см. рис. 2).

Впрочем и здесь справа и слева примыкают идущие в бесконечность незатухающие волны, но их амплитуды, вследствие

наличия множителя $e^{-x^2/4}$ в решении внутри $(-c, +c)$ очень малы, если только c выбрано достаточно большим.

Решения только что описанного вида существуют лишь в том случае, если λ равно или приблизительно равно $\frac{2N+1}{2}$. Эти решения, очевидно, соответствуют осциллятору, и, таким образом, их отыскание приводит при упомянутом условии к дискретному ряду собственных значений.

Москва,

Институт теоретической физики

I Университета

НОВОЕ ЯВЛЕНИЕ ПРИ РАССЕЙНИИ СВЕТА

[ЖРФХО. 60, 335—338, 1928. Совм. с Г. С. Ландсбергом]¹

(Предварительное сообщение)

При изучении молекулярного рассеяния света в твердых телах, предпринятого нами для выяснения вопроса, имеет ли при этом место изменение длины волны, предполагать которое позволяет дебаевская теория теплоемкости, нами было открыто явление, представляющее значительный теоретический интерес. Явление это заключается в изменении длины волны рассеянного света, однако значительно бóльшем, имеющем иной характер и иное происхождение, чем то, которое мы искали.

Схема расположения опыта подобна применявшейся в предыдущих работах одного из нас.² Только в настоящем случае источником служила ртутная кварцевая лампа (Heraeus, 110 V), ибо являлась необходимость пользоваться монохроматическим светом. сверх того, все применявшиеся линзы были кварцевыми, ибо исследование велось в ультрафиолетовом свете. Последнее было сделано потому, что лучи короткой длины волны рассеиваются значительно сильнее и сверх того нам было важно иметь в своем распоряжении резонансную линию ртути (см. ниже). Исследовались кристаллы кварца, отшлифованные в виде прямоугольных параллелепипедов (два образца с размерами: $20 \times 40 \times 40$ мм и $25 \times 35 \times 35$ мм).

¹ [Аналогичные сообщения опубликованы также в *Naturwissenschaften*, 16 Jahrg., H. 28, 557—558, 1923 и *Comptes Rendus* 189, 109, 1928].

² Gr. Landsberg. *Zs. f. Phys.* 43, 773, 1927; 45, 442, 1927.

Рассеянный свет фотографировался при помощи кварцевого спектрографа (Fuess, модель В, светосила 1 : 5), причем щель спектрографа придвигалась непосредственно к рассеивающему кристаллу или отодвигалась на некоторое расстояние, а рассеянный свет концентрировался на щели при помощи кварцевой линзы. И в том и в другом случае между кристаллом и спектрографом помещалась диафрагма с маленьким отверстием, так что в спектрограф попадал свет, рассеянный приблизительно под углом 90° к первичному пучку. Экспозиция от 2 до 14 часов на пластинках Ilford, Zenith, чувствительность 650 *H. et D.* При неизменном расположении всех аппаратов в качестве спектра сравнения на той же пластинке фотографировался также свет, отраженный куском черного бархата, помещенным на место кристалла кварца. На всех без исключения спектрограммах выступает характерная особенность спектра рассеянного света: именно, относительная интенсивность коротких линий по сравнению с длинными больше, чем в нормальном спектре ртутной дуги (Релеевский закон рассеяния, согласно которому интенсивность рассеянного света пропорциональна $\frac{1}{\lambda^4}$).

Сверх того, совершенно неожиданно обнаружилось, что все линии ртути сопровождаются спутниками, расположение которых вполне закономерно повторяется вблизи каждой линии. Один из этих спутников, наиболее ясно выраженный, расположен в части, соответствующей большей длине волны; второй, менее интенсивный, также смещен в красную сторону спектра, но менее значительно, чем первый; наконец, еще два спутника окаймляют по обе стороны основную линию, располагаясь в непосредственной близости к ней.

Эти два последних спутника установлены менее надежно и имеют по всей вероятности иное происхождение, чем первые два. В обоих исследованных образцах кварца вся система спутников приходится в точности на одних и тех же местах: спектры совпадают при наложении.

Само собою разумеется, что ни один из указанных спутников не совпадает по положению с какими-нибудь менее яркими линиями ртутной лампы и на спектрах сравнения не заметно никаких следов этих спутников, несмотря на значительно бóльшую яркость основных линий. Интенсивность более яркого из спутников составляет по грубой оценке 20—30% интенсивности соответствующей основной линии.

На рисунке приведена¹ одна из типичных спектрограмм. На репродукции видны лишь наиболее интенсивные спутники наиболее ярких линий. Спектрограммы, полученные с более узкой щелью, позволили определить наблюдаемое смещение. Измерения эти, пока довольно грубые, приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

λ в Å	Увеличение длины волны в Å	
	наблюденное	вычисленное
2536	около 31.5	30.8
3126	„ 45.0	47.0
3650	„ 61.5	64.0

Были произведены различные контрольные опыты для выяснения вопроса, не происходят ли получаемые линии как случайное отражение всей спектральной картины (*falsches Licht*). Наиболее убедительным из них является следующий.

Между рассеивающим кристаллом и щелью спектрографа помещался кварцевый сосуд, наполненный парами ртути. Повышая путем нагревания плотность паров ртути и регулируя с другой стороны режим лампы, служившей источником света, можно добиться, чтобы резонансная линия ртути (2536 Å) была поглощена.

Спектрограммы рассеянного света, полученные при этих условиях не обнаруживают, конечно, этой линии, но оба главных спутника ее ясно видны, что доказывает, что они действительно имеют иную длину волны.

Было бы преждевременно пытаться дать окончательное теоретическое истолкование наблюденному явлению. Аналогия с комптоновским смещением (в красную сторону) бросается в глаза. Но механизм изменения длины волны должен быть по всей вероятности иной.

Одно из возможных толкований могло бы быть следующим. При рассеянии света могут возбуждаться собственные инфракрасные колебания кварца за счет энергии рассеиваемого кванта. При этом энергия, а следовательно и частота рассеиваемого кванта, должна

¹ См. на вклейке после стр. 310.

уменьшаться на величину инфракрасного кванта, соответствующего собственным колебаниям кристалла.

Если выбрать то из собственных колебаний кварца, которое соответствует $\lambda=20.75 \mu$,¹ то получим для изменения длины волны цифры, приведенные в третьем столбце табл. 1. Они хорошо согласуются с наблюдаемыми. Понятно, что приведенное объяснение надо считать вполне предварительным. Для обоснования его необходимо прежде всего изучить кристаллы иных веществ.

В какой мере открытое нами явление имеет связь с явлениями, наблюдавшимися Раманом и Кришнаном в жидкостях и газах и кратко описанными ими в письмах в *Nature*,² мы в настоящее время еще затрудняемся сказать.

Москва, 10 мая 1928 г.

Институт теоретической физики I МГУ.

¹ Rubens und Nichols, *Ann. d. Phys.* **60**, 416, 1897. Мы пользуемся значением $\lambda=20.75 \mu$, непосредственно получаемым из максимумов отражения, не внося коррекции на собственную частоту, ибо речь идет о сравнении порядка величин; указанная же коррекция для случая кварца несколько затруднительна благодаря довольно сложному спектру его инфракрасных колебаний.

² Raman and Krishnan. *Nature*, March 31, 1928; April 21, 1928; May 5, 1928.

К ТЕОРИИ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

[ЖРФХО. 60, 413—419, 1928. Совм. с А. А. Андроновым
и М. А. Леонтовичем]

Настоящая работа посвящена выяснению некоторых вопросов теории адиабатических инвариантов. Понятие адиабатического инварианта мы трактуем здесь в рамках классической механики и не касаемся его применений к статической механике и теории атома.

В определении адиабатического инварианта в следующем пункте, как нам кажется, нет полной ясности. Определяя понятие адиабатического воздействия, Борн (Born), например, требует: «Wir betrachten als adiabatische Änderung des Systems eine solche, die erstens keine Beziehung zu der Periode des ungestörten Systems hat, und...»¹

(Другие авторы формулируют соответствующее требование несколько иначе. Sommerfeld (At. und Sp., 3 Aufl., стр. 376) пишет: «die unsystematische, gegenüber den Bewegungsphasen ungeordnete Art der Einwirkung».² Крутков (ЖРФХО. 50, 114, 1921) рассматривает скорость изменения параметра постоянной. Kneser (Math. Ann. 91, 155, 1924) не ограничивает вида зависимости параметра от времени, но установленное им определение инвариантности, как станет видно из дальнейшего, требует известного уточнения).

Это несколько неопределенное ограничение должно между прочим исключить случай такого воздействия, когда имеет место

¹ [„Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком соотношении с периодом невозмущенной системы, и...“]. Vorlesungen über Atommechanik, стр. 64.

² [„бессистемный, неупорядоченный по отношению к фазам движения вид воздействия“.]

нечто вроде резонанса. Для случая движения маятника в периодически меняющемся поле тяжести, рассмотренном с этой точки зрения Андроновым и Леонтовичем,¹ возможен как раз такой «параметрический резонанс» (нестабильное движение). Нам представлялось поэтому интересным для выяснения этого вопроса рассмотрение этого случая с точки зрения теории адиабатических инвариантов. Для того чтобы разобраться в этом вопросе, оказалось необходимым детализировать понятие адиабатического инварианта. В § 1 мы даем (для системы с одной степенью свободы) определение адиабатического инварианта в таком несколько детализованном виде. В дальнейшем оно поясняется примерами. Мы думаем, что при таком более строгом рассмотрении этого вопроса исчезают многие неясности в теории адиабатических инвариантов.

§ 1

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, определяемую функцией Лагранжа

$$L[y, \dot{y}, a],$$

где y — координата, определяющая положение системы, a — параметр.

Рассматривая реопараметрическое движение, примем, что параметр a определенным образом зависит от времени.

Вводя для удобного перехода к пределу новый параметр μ , имеем

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Мы предполагаем, что $a\left(\frac{t}{\mu}\right)$ непрерывная, дифференцируемая функция. Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x,$$

имеем

$$\begin{aligned} a &= a(x), \\ \dot{a} &= \frac{1}{\mu} \frac{da}{dx} \end{aligned}$$

при

$$\mu \rightarrow \infty, \quad \dot{a} \rightarrow 0.$$

¹ ЖРФХО. 59, 429, 1927.

Смысл введения переменной x заключается в том, что, фиксируя x , мы тем самым фиксируем значение параметра

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right) = a(x)$$

независимо от величины μ , характеризующей скорость его изменения.¹

Пусть некоторая величина A является функцией a, y, \dot{y} и не зависит явно от t

$$A(x) = A\left[a(x), y(x), \frac{1}{\mu} \frac{dy}{dx}\right].$$

Мы назовем величину A адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения, если для любого заданного ϵ ($\epsilon > 0$) можно найти такое M , что для всякого $\mu > M$ и x в интервале от 0 до X имеет место неравенство²

$$|A(x) - A(0)| \leq \epsilon.$$

Если M можно выбрать так, чтобы оно не зависело от X , то величину A мы назовем „стационарным“ (или „равномерным“) адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения.

Если M нельзя выбрать независимым от x , то величину A назовем „временным“ (или „неравномерным“) адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения. В обоих случаях мы требуем, чтобы

$$|A(x) - A(0)| \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow \infty$, т. е. при $\dot{a} \rightarrow 0$, но в случае стационарности мы требуем, чтобы это выполнялось равномерно относительно x от $x=0$ до $x=\infty$.

Для данной $L[y, \dot{y}, a]$ может существовать функция

$$I[y, \dot{y}, a],$$

которая является „временным“ адиабатическим инвариантом для всех $a(x)$, т. е. для всевозможных реопараметрических движений, отвечающих данной зависимости функции Лагранжа от a, y, \dot{y} .

¹ Заметим, что при таком способе рассмотрения автоматически исключаются случаи изменения параметра, подобные изменению его в известном примере, когда длина маятника изменяется рывком в крайнем его положении.

² Или в более общем случае в каком-нибудь интервале от α до β .

Кнезер (Н. Kneser) доказал,¹ что $\int pdq$ (для случая системы с одной степенью свободы) является адиабатически инвариантом именно в смысле временной адиабатической инвариантности.

§ 2

Рассмотрим движение, определяемое функцией

$$L = \frac{1}{2} l^2 \dot{y}^2 - \frac{1}{2} g l y^2, \quad (1)$$

где

$$l = l\left(\frac{t}{\mu}\right) \text{ и } g = g\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Физически это движение можно интерпретировать как случай малых колебаний маятника переменной длины l в переменном поле силы тяжести g .

Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x,$$

находим уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dx} l^2 \left(\frac{dy}{dx} \right) + \mu^2 g l y = 0. \quad (2)$$

Легко² найти асимптотическое выражение решения этого уравнения в случае больших M

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= Cl^{-\frac{3}{4}} g^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} dx + b \right], \\ \frac{y'(x)}{\mu} = \dot{y}(x) &= -Cl^{-\frac{5}{4}} g^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} dx + b \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где C и b — постоянные интегриации.

Мы не можем в рассматриваемом общем случае утверждать, что правые аппроксимируют решение равномерно во всем интервале x от 0 до ∞ . Однако для любого x мы всегда можем выбрать столь большое μ , чтобы погрешность была сколь угодно мала.

¹ Н. Кнезер. Math. Ann. **91**, 155, 1924.

² Наша работа ЖРФХО. **59**, 429, 1927.

Составляем выражение фазового интеграла для изопараметрического движения

$$I = \int p dq = \frac{E}{\nu} = \frac{l^2 y^2 + g l y^2}{2g^2 l^{\frac{1}{2}}}$$

(При изопараметрическом движении E — энергия нашей системы).

В случае l и g переменных, пользуясь соотношениями (3), имеем¹

$$I(x) = \frac{l^2 \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + g l y^2}{2g^2 l^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{C^2}{2} = \text{const.} \quad (4)$$

Таким образом мы нашли, что $I(x)$ во всяком случае [т. е. для всяких $l\left(\frac{t}{\mu}\right)$, $g\left(\frac{t}{\mu}\right)$] является „временным“ адиабатическим инвариантом. Это обстоятельство можно было предвидеть заранее — оно вытекает из результатов работы Кнезера,² и мы его приводим лишь для целей последующего изложения.

Если же правые части³ равномерно аппроксимируют решение, то $I(x)$ является „стационарным“ адиабатическим инвариантом.

I. Рассмотрим теперь два частных случая:

$$l = 1 + t, \quad g = 1.$$

Полагая

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \quad \text{и} \quad \frac{t}{\mu} = x,$$

имеем уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)^2 \frac{dy}{dx} \right] + \mu^2 (1+x)y = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид (3)

$$y = (1+x)^{-\frac{1}{2}} Z_1 \left[2\mu (1+x)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (5)$$

где $Z_1 []$ — знак цилиндрической функции.

¹ Заметим, что, пользуясь асимптотическим выражением (3), мы можем истолковать $I(x)$ как E/ν , если только будем считать за полупериод расстояние между корнями. (Ср. нашу цитированную статью, стр. 436).

² Math. Ann., I. c.

³ G. Krutkow und V. Fock. Zs. f. Phys. 13, 195, 1923.

На основании известного асимптотического представления цилиндрической функции для больших значений аргумента мы можем написать

$$y(x) \sim C(1+x)^{-\frac{3}{4}} \cos \left[2\mu(1+x)^{\frac{1}{2}} + b \right]. \quad (6)$$

Это выражение равномерно аппроксимирует y для всех x от 0 до ∞ . Действительно, если правая часть аппроксимирует наше решение для некоторого μ_0 и $x=0$, то она еще лучше аппроксимирует его для $x > 0$ и $\mu > \mu_0$. Из (6) сразу вытекает, что $I(x)$ не изменяется и, следовательно, является стационарным адиабатическим инвариантом.

Физически это значит, что можно указать столь малую скорость изменения длины (столь малое α), что изменение $I(x) = \frac{E}{v}$ будет сколь угодно мало для сколь угодно большого изменения длины.¹

II. Маятник в периодически меняющемся поле силы тяжести.

$$l=1, \quad g=1+q \cos pt.$$

Полагаем

$$\frac{2}{p} = \mu, \quad pt = 2x.$$

В этом случае μ равно периоду изменений поля, деленному на π . С точностью до множителя π , x представляет собой время, измеренное в периодах изменения поля. Уравнение движения имеет вид (2)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 (1 + q \cos 2x) y = 0.$$

Сколь большое M мы ни взяли бы, всегда найдутся большие его значения μ^2 (для которых это дифференциальное уравнение имеет нестабильные решения). Поэтому можно (для этих μ), взяв достаточно большое x , сделать $y(x)$ как угодно большим; следовательно

$$I(x) = \frac{E}{\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}}$$

¹ Точно так же легко доказать, что для маятника в поле тяжести, меняющемся по закону $g=l$, $I(x)$ обладает тем же свойством.

- На основании теоремы Нурт'а, цитированной в примечаниях к указанной нашей работе, этот пример может быть обобщен на другие формы периодического изменения силы тяжести.

может быть сделано сколь угодно велико, так как $g^{\frac{1}{2}}$ остается конечным, а E возрастает вместе с $y(x)$. Отсюда следует, что неравенство

$$|I(x) - I(0)| = |Eg^{-\frac{1}{2}} - (Eg^{-\frac{1}{2}})_0| < \varepsilon$$

не может иметь места для всех $\mu > M$ и для всех x в интервале от 0 до ∞ ни при каком M .¹ В этом случае $I(x)$, являясь временным адиабатическим инвариантом, не является стационарным адиабатическим инвариантом. Выражение (3) в этом случае (по крайней мере для нестабильных μ) не аппроксимирует равномерно решение.²

Полученный вывод можно формулировать так. Увеличивая период изменения поля тяжести, можно всегда достигнуть того, что величина I как угодно мало изменится за любое наперед заданное число периодов изменения поля. Но, с другой стороны, каким бы большим мы ни взяли период изменения поля, всегда существуют еще более медленные изменения поля, для которых, для достаточно большого числа периодов, величина I изменится как угодно сильно.

Формулировку допустимого адиабатического воздействия, данную у М. Борна, о которой говорилось вначале, едва ли можно

¹ Заметим, что в этом случае все же можно указать такие последовательности стабильных значений $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \rightarrow \infty$, для которых $I(x) - I(0) \rightarrow 0$ равномерно для всех x от нуля до ∞ (например, последовательность значений μ , которым соответствуют периодические решения с одним и тем же периодом $2\pi\mu$).

² Независимо от асимптотических выражений можно доказать, что частота определенная через расстояние между корнями функции $y(t)$, лежит в некоторых конечных границах. Действительно, на основании известной теоремы о корнях решений уравнения

$$y'' + p(x)y = 0$$

можно утверждать, что корни решений уравнения

$$y'' + \mu^2(1 + q \cos 2x)y = 0$$

лежат между соответствующими корнями уравнений

$$y'' + \mu^2(1 + q)y = 0 \quad \text{и} \quad y'' + \mu^2(1 - q)y = 0.$$

Отсюда для расстояния Δ между последовательными корнями нашего уравнения имеем

$$\frac{\pi}{\mu(1+q)^{\frac{1}{2}}} < \Delta < \frac{\pi}{\mu(1-q)^{\frac{1}{2}}},$$

а для частоты колебаний ν , определенной через это расстояние между корнями,

$$(1-q)^{\frac{1}{2}} < \nu < (1+q)^{\frac{1}{2}}.$$

рассматривать как запрещающую вышеизложенный пример. Дело в том, что значения μ , которым соответствуют нестабильные решения, расположены не отдельными дискретными точками, а целыми интервалами. Поэтому вряд ли можно говорить, что эти нестабильные значения периода изменения поля находятся в определенном соотношении с периодом системы.

§ 3

При применении теории адиабатических инвариантов к физическим проблемам должен быть поставлен вопрос, какого рода адиабатическая инвариантность существенна для данной физической задачи — временная или стационарная.

Так, например, Джинс¹ рассмотрел проблему об изменении орбит двойных звезд под влиянием излучения ими массы и применил к ней теорию адиабатических инвариантов. В этом случае существенно, что встречающийся в этой задаче адиабатический инвариант является стационарным.

Этот же вопрос представляет интерес в связи с той фундаментальной ролью, которую играет адиабатная гипотеза в теории квантов. Повидимому, многие исследователи, применяя теорию адиабатических инвариантов, подразумевали исключительно стационарную адиабатическую инвариантность, не говоря об этом в достаточно ясной форме.

Естественно поставить вопрос, какому условию должна удовлетворять функция $a\left(\frac{t}{\mu}\right)$, чтобы фазовый интеграл был стационарным адиабатическим инвариантом; решение этой задачи выделило бы класс „допустимых“ адиабатических воздействий.

Физический институт I МГУ,

Отд. теоретич. физики,
Москва.

¹ Jeans. Monthly Notices of R. Astr. Soc. 85, November 1924.

О РАССЕЯНИИ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ

[*Zs. f. Phys.* 50, 769—780, 1928. Совм. с Г. С. Ландсбергом]

(Поступило 12 июля 1926 г.)

При спектральном исследовании рассеяния света в кварце и исландском шпате было наблюдеено следующее явление. Каждая основная линия падающего света (ртутная лампа) сопровождается несколькими сателлитами. Наблюдаются сателлиты, сдвинутые в красную сторону, равно как и симметричные с ними сателлиты, сдвинутые в фиолетовую сторону. Вся совокупность сателлитов может быть разбита на системы. В каждой системе разность $\Delta\nu_i$ между частотами сателлита и соответствующей основной линии постоянна для всех основных линий. Истолкование этой закономерности лежит в том, что $\Delta\nu_i$ каждой такой системы соответствует собственной частоте кристалла ν_i . Для кварца установлено пока пять таких систем сателлитов, а для исландского шпата — две. Для соответствующих длин волн при этом получено: для кварца $\lambda_1 = 21.5 \mu$, $\lambda_2 = 48 \mu$, $\lambda_3 = 81 \mu$, $\lambda_4 = 13.5 \mu$, $\lambda_5 = 9 \mu$. Для исландского шпата $\lambda_1 = 9.1 \mu$, $\lambda_2 = 34 \mu$. Дискутируется связь найденных таким образом собственных частот с инфракрасными частотами кристалла. Установлено далее, что интенсивность фиолетовых сателлитов по отношению к красным при повышении температуры возрастает.

В заметке в „Naturwissenschaften“¹ мы коротко сообщили о новом явлении, которое наблюдается при рассеянии света в кристаллах.

Это явление заключается в следующем: каждой спектральной линии падающего света в рассеянном свете соответствует не одна только линия той же частоты, которую мы назовем основной линией, но еще некоторое количество сателлитов. Эти сателлиты в отношении длин волн и интенсивности находятся в определенных закономерных соотношениях с основными линиями.

¹ Naturwissenschaften, Juli 1928 [см. статью 24, стр. 293].

Явление наблюдалось нами первоначально на кварце. В дальнейшем мы распространили наблюдения на исландский шпат, а также подробнее исследовали явления в кварце.

В этой статье дается более подробное описание условий эксперимента и сообщаются результаты, полученные до настоящего времени. В последних параграфах приводятся некоторые соображения, относящиеся к теоретическому истолкованию явления.

§ 1

Схематическое расположение опытов изображено на рис. 1. В качестве источника света служила 100-вольтовая ртутная лампа

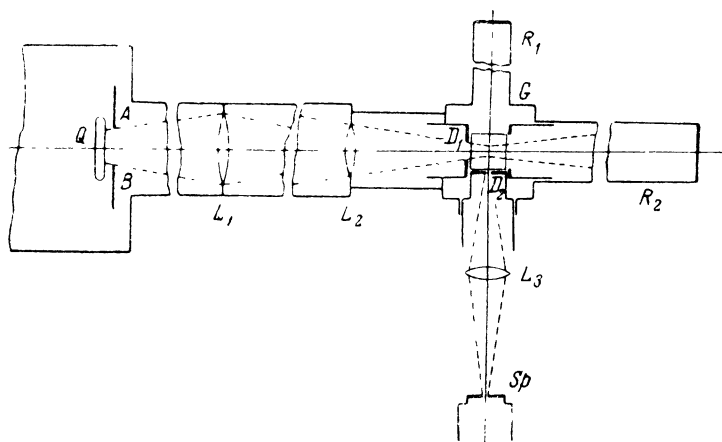


Рис. 1.

(Heraeus), горевшая при напряжении 70 вольт и токе 3 ампера. Две линзы L_1 ($d=80$ мм, $f=450$ мм) и L_2 ($d=50$ мм, $f=250$ мм) отбрасывали резкое изображение интенсивно освещенного прямоугольного отверстия AB ($a=20$ мм, $b=4$ мм) на то место, где находился кристалл. С помощью вспомогательной диафрагмы D достигалось резкое ограничение слабосходящегося светового пучка.

Высота поперечного сечения пучка в кристалле составляла приблизительно 3 мм, а его ширина (в горизонтальном направлении) 15 мм.

Правильная юстировка линз и всей установки может быть с удобствами проведена, если вначале на место кристалла поместить кубик из уранового стекла, в котором след светового пучка достаточно ярок.

Кристалл находится в непрозрачной камере *G*. Специальные насадки в виде труб R_1 и R_2 создают темный фон и препятствуют проникновению паразитного света в направлении наблюдения. Все обычные меры предосторожности (зачернение или покрытие стенок черным бархатом и т. п.), направленные к уменьшению мешающих отражений, разумеется были соблюдены.

Свет, рассеянный кристаллом, падает на щель кварцевого спектрографа. В нашем распоряжении имелся спектрограф Fuess'а, модель В, с относительным отверстием 1:5. Маленькая диафрагма D_2 защищала щель от возможных отражений в камере и на поверхностях кристалла. При первых снимках щель находилась в непосредственной близости от кристалла. Позднее мы освещали щель с помощью светосильной кварцевой линзы L_3 , которая отбрасывала на щель резкое изображение диафрагмы D_2 . Благодаря этому выигрывается довольно много света и одновременно достигается возможность удобно исследовать свет, рассеиваемый в различных направлениях.

Лучшие снимки мы получили на пластинках Ilford (Iso-Zenith и Monarch).

Проявление велось с помощью гидрохинонового проявителя в течение 6 минут при 19° в полной темноте. В большинстве случаев при каждом фотографировании спектра рассеянного света на той же пластинке снимался спектр сравнения, который получался посредством отражения от черного бархата или от мела.

§ 2

Уже первые спектрограммы света, рассеянного кристаллом кварца, сделанные при сравнительно коротких экспозициях (примерно до 15 час.), обнаружили явление: рядом со ртутными линиями, в рассеянном свете появлялись новые линии, причем каждая интенсивная основная линия сопровождалась сателлитами.

То обстоятельство, что это же явление точно повторялось с другим кристаллом кварца, а также не подлежащая сомнению закономерность в распределении новых линий сделали совершенно невероятным предположение, что дело сводится к появлению ложных линий, вызванных непредвиденными отражениями. Несмотря на это, мы считали необходимым проверить эту возможность контрольными опытами. Решающим был для нас следующий опыт. Как известно, резонансная линия 2536.5 \AA может быть легко поглощена несветящимися ртутными парами. Между рассеивающим кристаллом и щелью

спектрографа помещался эвакуированный кварцевый сосуд с ртутными парами, подогревавшийся электрической печкой. Подходящим выбором силы тока в лампе Q и соответствующей регулировкой температуры пара можно достичь полного поглощения линии 2536.5 \AA . Она исчезает из спектрограммы, принадлежащие же ей сателлиты остаются неизменными. Таким образом, им действительно соответствует другая длина волны.

На первых спектрограммах каждая ртутная линия, если она была достаточно интенсивной, появлялась в сопровождении двух сателлитов, сдвинутых в красную сторону. Интенсивность дальше отстоящего более сильного сателлита составляла, в среднем, по грубой оценке, примерно $30\%_{10}$ от интенсивности основной линии.

Следует упомянуть, что распределение интенсивностей основных линий в спектре рассеянного света сильно сдвинуто в сторону коротких волн по сравнению с распределением в первичном свете (в соответствии, по крайней мере качественном, с законом $1/\lambda^4$).

Сразу же удалось установить, что разность частот более интенсивного сателлита и соответствующей основной линии постоянна по всему спектру. Та же закономерность оказалась справедливой и для второго, менее интенсивного сателлита.

Когда время экспозиции было выбрано бóльшим, на спектрограмме появились новые линии. Теперь и относительно менее интенсивные основные линии сопровождалась сателлитами.

Последние спектрограммы для кварца были получены при времени экспозиции около 100 часов с узкой ($1/20$ мм) щелью. На них обнаруживается 72 новых (т. е. не содержащихся в ртутном спектре) линии, которые без труда могут быть все подразделены на пять систем, так что внутри каждой системы разность частоты сателлита и соответствующей основной линии постоянна по абсолютной величине.

Систематизация существенно облегчалась тем, что при малых временах экспозиции ясно выступали только две интенсивные системы. На них был надежно установлен закон $\Delta\nu = \text{const}$, который затем служил основой для систематизации остальных линий.

При этом выявилось следующее обстоятельство, которое кажется нам весьма существенным, а именно, что наряду с „красными“ сателлитами в рассеянном свете существуют и „фиолетовые“ сателлиты. Они располагаются по отношению к основным линиям симметрично с красными, но значительно менее интенсивны и поэтому ясно выступают только у наиболее интенсивных основных линий.

Промеры спектрограмм производились с помощью компаратора Hilger'a. Для расчета длин волн использовалась интерполяционная формула Гартмана.¹

§ 3. Рассеяние в кварце

Мы имели два кристалла кварца. Их размеры были $25 \times 30 \times 30$ мм³ и $20 \times 40 \times 40$ мм³. В одном из кристаллов при облучении ультрафиолетом наблюдалась заметная фосфоресценция. Другой был от нее свободен.

Количество сателлитов в рассеянном свете, их положение по отношению к основным линиям, их относительная интенсивность — последняя, конечно, лишь по грубой оценке — были в обоих случаях одинаковы. Влияния ориентировки кристаллических осей по отношению к направлению падающего света также не было замечено.

Фотография, приведенная на рис. 2 [см. вклейку на след. стр.], воспроизводит такой спектр рассеянного света. Разумеется, изображение не воспроизводит всех особенностей негатива.

Результаты измерений сведены в табл. 1. Числа показывают, что внутри каждой системы разность частот действительно должна считаться постоянной.

подавляющее большинство снимков сделано для перпендикулярно рассеянного света. Из соображений, которых мы здесь не будем подробнее касаться, нам казалось желательным исследовать и свет, рассеянный в других направлениях.

Соответственно с этим была снята спектрограмма света рассеяния под углом около 120° и другая — под углом около 60° с направлением первичного пучка. Никаких отличий в положении сателлитов при этом обнаружено не было. Изменяется ли распределение интенсивностей, мы в настоящее время сказать не можем.

§ 4. Рассеяние в исландском шпате

Исландский шпат до настоящего времени исследован нами меньше, чем кварц. Имевшийся у нас кусок исландского шпата не свободен от включений и неоднородностей. Кроме того, он обладает весьма интенсивной фосфоресценцией, которая прости-

¹ J. Hartmann. Zs. f. Instrkde 19, 57, 1899.

Первая система спутников в кварце

Время экспозиции 93 h

Красные спутники достаточно интенсивны, фиолетовые значительно слабее.

Красные спутники		Основные линии	Фиолетовые спутники	
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в Å	λ в Å	$\Delta\lambda$ в Å	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$
1.37	+38.5	4358.3	—	—
1.41	+78.5	4046.8	-73.5	1.37
1.38	+62.9	3663.3	-61.0	1.39
1.41	+63.5	3650.2	-59.2	1.35
1.42	+54.1	3341.5	—	—
1.38	+45.8	3131.8	-45.3	1.41
1.40	+46.3	3125.6	-45.6	1.42
1.38	+42.4	3023.5	—	—
1.42	+42.2	2967.3	-41.3	1.43
1.41	+40.0	2893.6	—	—
1.40	+37.0	2803.5	—	—
1.39	+35.5	2752.8	—	—
1.41	+33.4	2653.7	-32.2	1.39
1.33	+29.7	2536.5	—	—
1.38	+29.9	2534.8	—	—
1.33	+23.5	2482.0	—	—
$\Delta\nu_m = 1.395 \cdot 10^{13}$				$\Delta\nu_m = 1.394 \cdot 10^{13}$

Среднее значение: $\nu_1 = (1.395 \pm 0.005) \cdot 10^{13}$.
Соответствующая длина волны: $\lambda_1 = 21.5 \mu$.

рается примерно до 3200 Å и существенно затрудняет исследование спектральной области в окрестности $\lambda = 3650 \text{ Å}$ (см. вклейку, рис. 3).

Чтобы ослабить фосфоресценцию, мы заставляли освещающий пучок проходить через черное стекло (Heraeus), которое практически прозрачно только для спектральной области от 3100 до 3800 Å .

После этого, на относительно слабом фоне фосфоресценции можно было легко установить спутники, принадлежащие линии $\lambda = 3650 \text{ Å}$.

Всего мы нашли для исландского шпата 18 линий, которые могут быть распределены в две системы.

Для более точного исследования наш кристалл оказался недостаточно хорошим. Дальнейшие исследования мы предполагаем провести с лучшим кристаллом.

Возможно, что при этих наблюдениях будет целесообразно применить другой источник, содержащий меньшее количество линий.

к статье 24.

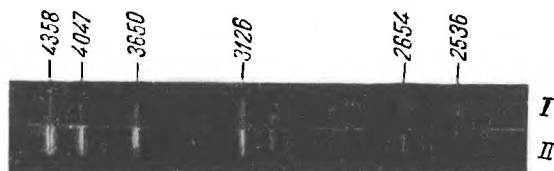


Рис. 1

к статье 25.

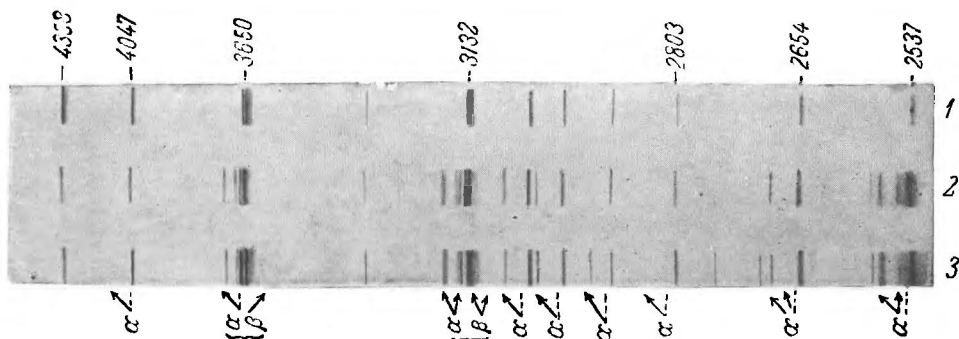


Рис. 2. Спектр света, рассеянного в кварце (двукратное увеличение)

1. Спектр сравнения
 2. Спектр рассеянного света, снятый при 20°C
 3. Спектр рассеянного света, снятый при 21°C
- } время экспозиции 105 час.
- α — красные спутники; β — фиолетовые спутники

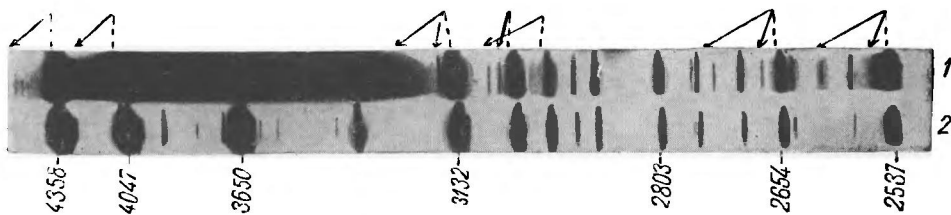


Рис. 3. Спектр света, рассеянного в исландском шпате (двукратное увеличение)

1. Спектр рассеянного света, снятый при 20°C. Экспозиция 46 час.
2. Спектр сравнения

Таблица 2

Вторая система спутников в кварце

Время экспозиции 93 h

Красные спутники интенсивны, фиолетовые заметно слабее.

Красные спутники		Основные линии	Фиолетовые спутники	
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в \AA	λ в \AA	$\Delta\lambda$ в \AA	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$
0.63	+40.2	4358.3	-36.7	0.59
	₁	4046.8	-33.4	0.60
0.62	+28.1	3663.3	-29.3	0.66
0.65	+23.9	3650.2	-23.8	0.66
0.64	+23.8	3341.5	-21.3	0.58
0.63	+20.6	3131.8	-18.9	0.58
	₂	3125.6	-21.6	0.67
0.63	+19.4	3023.5	-19.2	0.64
0.63	+18.5	2967.3	-17.5	0.60
0.64	+17.8	2893.6	—	—
0.63	+16.5	2803.5	—	—
0.64	+16.1	2752.8	—	—
0.62	+14.7	2653.7	—	—
$\Delta\nu_m = 0.633 \cdot 10^{13}$				$\Delta\nu_m = 0.62 \cdot 10^{13}$

Среднее значение: $\nu_2 = (0.63 \pm 0.01) \cdot 10^{13}$.
Соответствующая длина волны: $\lambda_2 = 48 \mu$.

Следует также заметить, что интенсивность спутников по отношению к основным линиям была при наших опытах с исландским шпатом значительно меньшей, чем у кварца. Однако вследствие упоминавшейся неоднородности использованного кристалла отсюда нельзя сделать никаких дальнейших заключений.

Результаты измерений для известкового шпата сведены в табл. 6 и 7.

Другие кристаллы до настоящего времени нами изучены еще мало. С помощью находившихся в нашем распоряжении мало пригодных кусков каменной соли и плавикового шпата мы пока не получили никаких результатов. Наилучшим способом для исследования мелких кристаллов будет, по всей вероятности, погружение их в жидкость с показателем преломления, приблизительно равным показателю преломления кристалла.

¹ Соответствующий красный спутник перекрывается ртутной линией 4078 \AA .

² Соответствующий красный спутник совпадает с спутником из третьей системы и не может быть точно измерен.

Третья система спутников в кварце

Время экспозиции 93 h

Красные спутники довольно слабы. Интенсивность фиолетовых спутников того же порядка. Вследствие мешающего действия почернения, обусловленного лежащими вблизи основными линиями, измерения здесь значительно менее точны, чем в табл. 1 и 2.

Красные спутники		Основные линии	Фиолетовые спутники	
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в Å	λ в Å	$\Delta\lambda$ в Å	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$
0.31	+19.7	4358.3	-21.2	0.34
0.36	+19.9	4046.8	-21.4	0.40
0.42	+15.5	3341.5	-12.5	0.34
0.39	+12.8	3131.8	-12.5	0.38
0.38	+12.3	3125.6	—	—
0.38	+11.7	3023.5	-12.6	0.42
0.40	+11.9	2967.3	-10.8	0.37
0.38	+10.7	2893.6	—	—
0.38	+ 9.86	2803.5	—	—
0.32	+ 7.96	2752.8	—	—
0.30	+ 0.02	2653.7	-8.87	0.38
$\Delta\nu_m = 0.366 \cdot 10^{13}$				$\Delta\nu_m = 0.376 \cdot 10^{13}$

Среднее значение: $\nu_3 = (0.37 \pm 0.01) \cdot 10^{13}$.
 Соответствующая длина волны: $\lambda_3 = 81 \mu$.

Спутники ярких линий 3650 и 3663 Å отсутствуют в таблице, так как они перекрываются с другими основными линиями или спутниками.

Четвертая система спутников в кварце

Время экспозиции 93 h

Красные спутники очень слабы, фиолетовые не наблюдаются.

Красные спутники		Основные линии	Фиолетовые спутники	
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в Å	λ в Å	$\Delta\lambda$ в Å	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$
2.06	+97.3	3663.3	—	—
2.08	+95.0	3650.2	—	—
2.42	+81.4	3131.8	—	—
2.36	+78.8	3125.6	—	—
$\Delta\nu_m = 2.23 \cdot 10^{13}$				

Среднее значение: $\nu_4 = (2.2 \pm 0.1) \cdot 10^{13}$.
 Соответствующая длина волны: $\lambda_4 = 13.5 \mu$.

Таблица 5

Пятая система спутников в кварце

Время экспозиции 93 h

Красные спутники очень слабы, фиолетовые не наблюдаются.

Красные спутники		Основные линии	Фиолетовые спутники	
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в \AA	λ в \AA	$\Delta\lambda$ в \AA	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$
3.27	+150.2	3663.3	—	—
3.45	+117.5	3131.8	—	—
3.49	+118.2	3125.6	—	—
3.36	+ 81.4	2653.7	—	—
3.34	+ 73.5	2534.8	—	—
$\Delta\nu_m = 3.37 \cdot 10^{13}$				

Среднее значение: $\nu_5 = (3.4 \pm 0.4) \cdot 10^{13}$.
 Соответствующая длина волны: $\lambda_5 = 9 \mu$.

Таблица 6

Первая система спутников в исландском шпате

Время экспозиции 46 h

Красные спутники весьма интенсивны.

Красные спутники		Основные линии	Красные спутники		Основные линии
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в \AA	λ в \AA	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в \AA	λ в \AA
3.20	+212.8	4358.3	3.31	+86.2	2752.8
3.24	+184.9	4046.8	3.31	+83.1	2699.7
3.31	+112.3	3131.8	3.30	+79.9	2653.7
3.33	+112.6	3125.6	3.25	+71.8	2536.5
3.34	+101.4	2967.3	3.25	+71.8	2534.8
			$\Delta\nu_m = 3.284 \cdot 10^{13}$		

Среднее значение: $\nu_1 = (3.284 \pm 0.014) \cdot 10^{13}$.
 Соответствующая длина волны: $\lambda_1 = 9.1 \mu$.

Спутники, соответствующие ярким основным линиям 3650 и 3663 \AA , не могли быть достаточно хорошо измерены вследствие мешающей фосфоресценции.

Вторая система спутников в исландском шпате
 Время экспозиции 46 h
 Красные спутники интенсивны.

Красные спутники		Основные линии	Красные спутники		Основные линии
$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в Å	λ в Å	$\Delta\nu \cdot 10^{-13}$	$\Delta\lambda$ в Å	λ в Å
0.84	+53.8	4558.3	0.88	+24.9	2893.6
0.88	+29.1	3131.8	0.85	+22.7	2803.5
0.92	+30.2	3125.6	0.90	+23.0	2752.8
0.85	+26.1	3023.5	0.86	+21.2	2699.7
			$\Delta\nu_m = 0.872 \cdot 10^{13}$		
<p>Среднее значение: $\nu_2 = (0.87 \pm 0.01) \cdot 10^{13}$. Соответствующая длина волны: $\lambda_2 = 34 \mu$. (См. примечание к табл. 6).</p>					

Появление спутников при рассеянии света в кварце наблюдалось нами до публикаций Рамана и Кришнана,¹ которые описали изменение длины волны в свете, рассеянном некоторыми парами и жидкостями. Весьма вероятно, особенно согласно наблюдениям, которые в последнее время сообщены Кабанном и Дором,² что в обоих случаях речь идет принципиально об одном и том же явлении.

§ 5

Что касается истолкования явления, то мы ограничимся здесь лишь несколькими общими соображениями. Позже мы предполагаем еще раз вернуться к этому.

Из таблиц с несомненностью следует, что каждая система спутников характеризуется постоянной разностью частот по отношению к соответствующим основным линиям.

На языке теории световых квантов, который здесь весьма удобен, это означает, как известно, следующее. Если $h\nu$ — энергия падающего кванта, а $h\nu'$ — энергия рассеянного кванта, то $h\nu - h\nu'$ есть энергия, отданная кристаллу. Так как эта величина имеет постоянное значение для каждой системы, то можно принять, что

¹ C. V. Raman a. K. S. Krishnan. Nature, 31 März, 21 April, 5 Mai, 1928; C. V. Raman. Ind. Journ. Phys. 3, 2, 1928.

² J. Cabannes und P. Daure. C. R. 183. Nr. 23, 1928.

речь идет о возбуждении собственного колебания кристалла ν , с частотой

$$\nu_i = \nu - \nu'. \quad (I)$$

Если, наоборот, собственное колебание отдаст квант (падающему свету), то получается фиолетовый спутник и соотношение (I) обобщается. Тогда $\nu' - \nu = \nu_i$. Таким образом, для всей совокупности спутников получается зависимость $\nu' = \nu \pm \nu_i$. Это совпадает между прочим с соображением, высказанным много лет назад Смекалом¹ по отношению к рассеянию света отдельными молекулами.

Теория Крамерса и Гейзенберга² приводит, как известно, к тем же частотным соотношениям.

В нашем случае, возможно, речь идет частично о собственных колебаниях атомных комплексов, частично же это могут быть колебания решетки.

Как сказано выше, спутники, сдвинутые в фиолетовую сторону, расположены симметрично красным по отношению к основной линии. Однако их интенсивность значительно меньше, и они могли наблюдаться поэтому только у более интенсивных основных линий. Следует, однако, предположить, что их возникновение представляет собой общее явление.

Из числовых данных, содержащихся в табл. 1—5, для длин волн собственных колебаний в кварце получаются следующие значения:

$$\lambda_1 = 21.5 \mu, \quad \lambda_2 = 48 \mu, \quad \lambda_3 = 81 \mu, \quad \lambda_4 = 15.5 \mu, \quad \lambda_5 = 9 \mu.$$

Значения $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$ почти совпадают со значениями, полученными по методу остаточных лучей.

Действительно, максимумы отражения для кварца лежат, как известно, вблизи

$$\lambda = 20.7 \mu \quad \lambda = 8.7 \mu \quad \lambda = 12.8 \mu.$$

При этом следует иметь в виду, что, как показал Фёрстерлинг,³ максимумы отражения оказываются сдвинутыми по отношению к собственным колебаниям в сторону меньших длин волн.

Теория Фёрстерлинга относится к простому случаю одной единственной полосы поглощения. Условия в кварце гораздо сложнее.

¹ A. Smekal. Naturw. 11, 873, 1923.

² H. A. Kramers und W. Heisenberg. Zs. f. Phys. 31 681, 1925; M. Born. Probleme der Atomdynamik. Берлин, 1926, стр. 82.

³ K. Försterling. Ann. d. Phys. 61, 577, 1920.

Сдвиг у $\lambda = 20.7 \mu$ может быть очень грубо оценен в несколько процентов.

Что касается остальных значений λ_2 и λ_3 , то кривые Рубенса и Либиша¹ в соответствующих местах не имеют максимумов. Следует, однако, заметить, что в областях от $\lambda = 3.5 \mu$ до $\lambda = 56 \mu$ и от $\lambda = 74 \mu$ до $\lambda = 110 \mu$ кривые не были проведены по действительно измеренным точкам, а интерполированы. Было бы желательно исследовать эти области подробнее.

Что касается исландского шпата, то табл. 6 и 7 дают для него два собственных колебания, соответствующих значениям

$$\lambda = 9.1 \mu \quad \text{и} \quad \lambda = 34 \mu.$$

В инфракрасном спектре исландского шпата известны несколько максимумов отражения.² Между ними легко найти такие, которые весьма близки к найденным нами. Это максимум отражения при $\lambda = 8.80 \mu$, наблюдаемый Матосси,² и линия $\lambda = 30 \mu$, измеренная еще Либишем и Рубенсом.³

Вопрос о наличии в рассеянном свете систем сателлитов, соответствующих многим другим, частью сильно выраженным максимумам, которые характерны для известкового шпата, может быть решен только дальнейшими подробными исследованиями. Было бы очень интересно исследовать и другие кристаллы, содержащие группу CO_3 (например, арагонит, доломит и им подобные).

§ 6

Для теоретического истолкования всего явления нам представляется очень важным вопрос об интенсивности сателлитов. Соответствующие количественные опыты сейчас проводятся. Предварительно мы можем сообщить только о некоторых качественных результатах. Оказалось, что интенсивность красных сателлитов по отношению к соответствующей основной линии убывает с возрастанием длины волны. По совсем грубой оценке интенсивность сильнейшего сателлита в кварце составляет примерно 50% от интенсивности основной линии для $\lambda = 2536.5 \text{ \AA}$ и приблизительно 20% для $\lambda = 4358.3 \text{ \AA}$.

¹ Th. Liebisch und H. Rubens. Berl. Akad. Ber. 1921, стр. 216.

² F. Matossi. Zs. f. Phys. 48, 616, 1928.

³ Th. Liebisch und Rubens. Berl. Akad. Ber. 1919, стр. 198.

Далее мы смогли установить, что интенсивность фиолетовых сателлитов для наименьших значений ν_i (частота собственных колебаний в кристалле) хотя и меньше, но того же порядка, что и интенсивность соответствующих красных сателлитов, и что отношение этих интенсивностей заметно убывает с возрастанием ν_i . Если принять во внимание, что для рассматриваемых инфракрасных частот значение $h\nu_i$ того же порядка, что и kT , то это обстоятельство становится объяснимым. Кроме того, простые соображения приводят к тому вероятному заключению, что интенсивность фиолетовых сателлитов должна сильно возрасти с температурой, чего, напротив, не должно быть для красных. Для проверки этого заключения был сделан снимок (время экспозиции 96 час.) при температуре 220°C . Чтобы сделать возможной оценку интенсивностей, на ту же пластинку были сняты марки интенсивности. Полученные результаты могут быть истолкованы следующим образом. Интенсивность основных линий линейно возрастает с абсолютной температурой, как это должно быть согласно классической теории.¹ Интенсивность красных сателлитов, напротив, не возрастает, что указывает между прочим на наличие здесь некогерентного излучения. Интенсивность фиолетовых сателлитов — и это следует особенно подчеркнуть — возрастает с температурой значительно сильнее, чем интенсивность основных линий, как это было предусмотрено теоретически. Вопросы, затронутые здесь лишь коротко, мы предполагаем рассмотреть более подробно позднее.

В заключение следует заметить, что описанное выше явление, вероятно, сможет оказать ценные услуги при изучении атомных сил в кристаллах.

Мы хотели бы воспользоваться случаем и выразить здесь нашу сердечную благодарность М. Леонтовичу за его большую помощь при проведении этой работы.

Москва,

Институт теоретической физики

1 Гос. Университета,

9 июля 1928 г.

¹ G. Landsberg. Zs. f. Phys. **45**, 442, 1927.

К ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА

*[Журн. прикл. физ. 6, 155—158, 1929. Письмо в редакцию.
Совм. с Г. С. Ландсбергом]*

Возникновение сателлитов при молекулярном рассеянии света толкуется обычно на языке теории световых квантов.

Мы придерживаемся того мнения, что теория, глубоко охватывающая все явление, должна носить квантовый характер, ибо область низких температур вряд ли может быть исследована классическими методами. Но, с другой стороны, следует признать, что для очень высоких температур можно по крайней мере формально исходить из классической теории.

Совершенно естественное развитие идей, лежащих в основе обычной классической теории рассеяния, действительно открывает возможность включить в рамки классической теории и изменение частоты, так что эта теория дает хотя и ограниченно годную, но в пределах своей годности единую и простую картину рассеяния света. Выступающие при этом некоторые черты явления рассеяния могут иметь эвристическую ценность.

Мы хотели бы привести здесь ход рассуждений только качественно. О количественном исследовании явления, а также о следствиях, вытекающих из этого исследования, будет сообщено в другом месте. Мы ограничиваемся явлением в кристаллах.

Как известно, согласно классической теории, рассеяние света обусловлено статистическими флуктуациями плотности и связанными с ними изменениями показателя преломления. Для краткости мы отвлекаемся здесь от тех изменений, которые претерпевает показатель преломления в результате изменения формы.

Количественная трактовка основана на воззрениях Дебая. Кристалл рассматривается как континуум. Его упругий спектр является чисто акустическим. Атомистическая структура учитывается тем, что этот спектр обрывается после N -ого колебания. Мы будем оперировать со стоячими волнами. С тем же успехом можно говорить и о бегущих волнах.

Для рассеяния света колебания очень высокой частоты вообще не играют никакой роли. Определяющими являются только те колебания, у которых длина акустической волны не слишком мала по сравнению с длиной световой волны. Свет, рассеянный в определенном направлении φ по отношению к падающему лучу, можно рассматривать как часть падающего света, отражающуюся на плоских стоячих волнах, нормаль которых совпадает с биссектрисой угла φ и длина акустической волны которых связана с длиной волны падающего света λ соотношением

$$\lambda = 2\Lambda \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

Здесь проводятся точно такие же рассуждения (при учете синусоидальности распределения), какие для рентгеновских лучей приводят к формуле Брэгга. При этом явление рассматривается статически, т. е. отвлекаются от временных изменений плотности в стоячих волнах и проводят расчет просто со средним значением квадрата амплитуды как функции T .

Таким способом выводятся известные формулы для интенсивности рассеянного света. Разумеется, при этом получается, что длина волны при рассеянии остается неизменной.

Нам представляется, однако, что если последовательно придерживаться взглядов Дебая, то как раз следует учитывать временные изменения плотности в стоячей волне. Таким образом, амплитуда отраженного (рассеянного) света является периодической функцией времени. Но это означает, что рассеянный свет, возникающий при падении монохроматического луча, должен являться дублетом, причем соответствующие частоты равны $\nu = \nu_0 \pm n$, где через ν_0 обозначена частота падающего света, а через n — частота акустического колебания.

Если v означает скорость звука, то при учете (1) получается

$$\nu = \nu_0 \pm 2\nu_0 \frac{v}{c} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (2)$$

(c — скорость света в среде).

Таким образом, величина расщепления зависит от направления наблюдения (для простоты мы отвлекаемся от запаздывания).

Это рассуждение относится к идеальному случаю незатухающих акустических колебаний. Кроме того, в его основе лежит предположение, что размеры рассеивающих объемов велики по сравнению с λ . Если это последнее условие не выполнено, то в рассеянии по заданному направлению примут участие не только те волны, у которых Λ связана с λ соотношением (1), благодаря чему получится нерезкое расщепление.

Для кварца при $\varphi = 90^\circ$

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \pm \frac{1}{30\,000},$$

т. е. величина, которую можно хорошо наблюдать. Таким образом, с точки зрения обычной теории в спектре рассеянного света следует, в согласии с формулой, ожидать наличия тонкой структуры или соответствующего уширения линий.¹ Соответствующие опыты проводятся в настоящее время.

За исключением этого изменения частоты, результаты обычной теории остаются в силе, пока в качестве исходных берутся представления Дебая. Положение становится иным, как только принимается во внимание решетчатая структура кристалла.

Как известно, упругий спектр колебаний решетки может рассматриваться как состоящий из двух частей — акустической и оптической, если пользоваться обозначениями Борна. Нам кажется более целесообразным называть здесь оптическую часть инфракрасной. В образовании рассеянного света, кроме рассмотренной выше акустической части спектра, принимает участие и инфракрасная. Здесь также — что является существенным — имеются колебания с большими, по сравнению с молекулярными расстояниями, длинами волн Λ , которые лежат в области оптических длин волн. Таким образом, и здесь имеются предпосылки для суммирующихся отражений. Конечно, речь идет при этом не о колебаниях плотности, а об изменениях взаимных расстояний атомов решетки или комплексов атомов. Если принять, что эти смещения связаны

¹ На изменение частоты, соответствующее формуле (2), при отражении (или дифракции) света (отражение от движущегося зеркала) обратил внимание также Бриллюэн. Один из нас иным способом исследовал как эту проблему, так и аналогичные, связанные с процессом диффузии или теплопроводности.

с изменениями показателя преломления, то выше упомянутое отражение действительно будет иметь место. Таким образом, к спектру рассеяния, состоящему из основных линий, подвергшихся тонкому расщеплению или уширению, прибавляются еще линии рассеяния, обусловленного инфракрасной частью упругого спектра.

Сушествено при этом то, что большим (по сравнению с постоянной решетки) длинам волн Λ этого спектра соответствует частота, которая почти не зависит от Λ и совпадает с частотой остаточных лучей ν_0 . Таким образом, амплитуда рассеянного света будет изменяться с этой частотой, а это означает, что в рассеянном свете появятся обе частоты

$$\nu = \nu_0 \pm \nu_1.$$

Вследствие практической независимости частоты инфракрасной части упругого спектра от Λ это расщепление, или, иначе говоря, длина волны сателлитов, практически не зависит от угла наблюдения.

Из изложенного видно, что учет инфракрасной части упругого спектра действительно требует появления сателлитов и естественно вводит их, таким образом, в рамки классической теории.

Интенсивности красного и фиолетового сателлитов оказываются при этом примерно одинаковыми. Это не может рассматриваться как противоречие с опытом, так как, с одной стороны, классическая теория с самого начала должна быть ограничена областью высоких температур, а, с другой стороны, из опыта известно, что отношение интенсивностей фиолетового и красного сателлитов, которые всегда < 1 , действительно сильно возрастает с температурой.

Следует еще заметить, что в рамках приведенного здесь рассмотрения ход интенсивности красного сателлита при низких температурах, повидимому, должен быть связан с нулевой энергией. Однако эти соображения выходят за пределы здесь изложенного.

Институт теоретич. физики

I Университета.

Москва, 7 мая 1929 г.

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ ПРИ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ. I

[*Zs. f. Phys.* 58, 250, 1929. Совм. с Г. С. Ландсбергом]

(Поступило 10 августа 1929 г.)

Исследован спектр рассеяния кварца при высокой температуре.

Во время наших исследований рассеяния света в кварце при высокой температуре, которые мы предприняли для проверки некоторых теоретических представлений,¹ было получено несколько результатов, быть может не лишенных интереса. Хотя количественная обработка фотоснимков еще не закончена, мы хотели бы уже теперь сообщить о некоторых качественных результатах. А именно, оказалось, что при значительном повышении температуры вид сателлитов заметно изменяется. Красные сателлиты, очень резкие при применявшейся дисперсии, становятся менее резкими и даже диффузными. Сателлиты, соответствующие различным собственным частотам, меняются при этом различным образом. Линия, для которой $\lambda_{\text{инфракр}} = 21.5 \mu$, становится несколько более широкой и диффузной, чем при комнатной температуре,² но остается еще ясно выраженной вплоть до 900° абс. (т. е. выше точки превращения кварца — 850° абс.). Соответствующий фиолетовый сателлит также остается четким; его интенсивность сильно возрастает и приближается к интенсивности красного сателлита.

¹ *Zs. f. angew. Phys.*; [Журн. прикл. физ.] 6, 155, 1929 [статья 27, стр. 318].

² На это указывали уже Брикведе (F. G. Brickwedde) и Петерс (M. F. Peters).

Однако спутник, который соответствует $\lambda_{\text{инфракр}} = 48 \mu$ и который при комнатной температуре так же четок, как и первый ($\lambda_{\text{инфракр}} = 21.5 \mu$), с повышением температуры сильно размывается. Так, в тех местах, где при комнатной температуре находились совершенно четкие спутники, при 800° абс. можно обнаружить лишь максимумы интенсивности (причем симметрично с красной и фиолетовой стороны); при 900° абс. не остается и следа этого спутника.

Небольшое уширение первого спутника, вероятно, может быть объяснено предположением о неравных энергетических скачках (ангармонический осциллятор). Размытость и исчезновение второго спутника указывают, однако, на существенное изменение или на исчезновение связей, обуславливающих соответствующее колебание. Мы не были в состоянии установить, происходит ли это изменение скачками при температуре превращения, но, повидимому, в β -кварце связи такого рода совершенно отсутствуют.

Институт теоретич. физики

I Университета

1 авг. 1929 г.

О ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ

(Классическая теория)

[*Zs. f. Phys.* **60**, 354, 1930. Совм.
с Г. С. Ландсбергом и М. А. Леонтовичем]

(Поступило 13 декабря 1929 г.)

Рассеяние света в кристалле толкуется как диффракция на упругих колебаниях кристалла. При рассеянии частота света изменяется на ω_0 (ω_0 = частоте упругого колебания, являющегося определяющим для рассматриваемого процесса рассеяния). Если колебание принадлежит к акустическому спектру кристалла, то это изменение частоты является малым и зависит от направления рассеяния; если же это колебание принадлежит к инфракрасному спектру, то мы имеем дело со случаем комбинационного рассеяния (изменение частоты сравнительно велико и практически не зависит от направления рассеяния).

§ 1

Возникновение сателлитов при молекулярном рассеянии света обычно толкуется на языке теории световых квантов. Мы придерживаемся того мнения, которое впрочем общепринято, что теория, глубоко охватывающая все явление, должна иметь квантовый характер, поскольку область низких температур едва ли может быть рассмотрена классически. С другой стороны, следует допустить, что для очень высоких температур можно по крайней мере формально исходить из классической теории.

Совершенно естественное развитие соображений, лежащих в основе обычной классической теории, действительно дает воз-

возможность ввести в рамки этой теории и изменение частоты, так что она дает хотя и ограниченно годную, но в пределах ее годности единую и простую картину явления рассеяния света. При этом выступают некоторые черты явления рассеяния света, которые могут иметь эвристическую ценность.

Как известно, согласно классической теории, рассеяние света обусловлено статистическими флуктуациями плотности и связанными с ними изменениями показателя преломления. Для краткости мы отвлечемся здесь от изменений, которые претерпевает показатель преломления вследствие изменения формы.

Количественное рассмотрение опирается на воззрения Дебая. Кристалл рассматривается как континуум. Его упругий спектр является чисто акустическим. Атомистическая структура учитывается тем, что спектр обрывается после $3N$ -ого колебания. Мы будем оперировать здесь со стоячими волнами. С тем же успехом можно говорить и о бегущих волнах.

Разумеется, в рассеянии света колебания высоких номеров вообще не играют роли. Существенными являются лишь те колебания, акустическая длина волны которых не мала по сравнению с оптической. Свет, рассеянный под определенным углом ϑ по отношению к падающему лучу, можно рассматривать как часть падающего света, отражающуюся от плоскости стоячей волны, нормаль к которой совпадает с биссектрисой угла ϑ , а акустическая длина волны которой Λ связана с оптической длиной волны λ падающего света соотношением

$$\lambda = 2\Lambda \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Здесь проводится точно такое же рассуждение (с учетом синусоидальности распределения), какое в случае рентгеновских лучей приводит к формуле Брэгга. При этом явление рассматривается статически, т. е. отвлекаются от временных изменений плотности внутри стоячей волны и рассматривают среднее статистическое значение квадрата амплитуды как функцию T .

Таким путем получают известные формулы для интенсивности рассеянного света. При этом, само собой разумеется, получается, что длина волны остается при рассеянии неизменной.

Однако нам представляется, что если последовательно придерживаться воззрений Дебая, то временные изменения плотности в стоячей волне как раз необходимо учитывать. Амплитуда отраженного (рассеянного) света является тогда периодической функцией

времени. Но это означает, что рассеянный свет, возникающий при падении монохроматического луча, должен оказаться дублетом, причем соответствующие частоты равны $\nu = \nu_0 \pm \omega$, где ν_0 обозначает частоту падающего света, а ω — частоту акустического колебания.

Если обозначить через v скорость звука, то при учете (1) получаем

$$\nu = \nu_0 \pm 2\nu_0 \frac{v}{V} \sin \frac{\theta}{2}$$

(V — скорость света в среде).

Таким образом, величина расщепления зависит от направления наблюдения.

Эти соображения относятся к идеальному случаю незатухающих акустических колебаний. Кроме того, в основу положено предположение, что размеры рассеивающего объема велики по сравнению с λ . Если это последнее условие не выполнено, то в рассеянии по заданному направлению участвуют не только те волны, у которых Λ связано с λ соотношением (1), в результате чего получается нерезкое расщепление.

Для кварца при $\theta = 90^\circ$

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{30000},$$

т. е. величина, вполне поддающаяся наблюдению. Таким образом, с точки зрения обычной теории в спектре рассеяния следует, в согласии с формулой, ожидать наличия тонкой структуры или соответствующего расширения спектральных линий.¹ Соответствующие опыты в настоящее время проводятся.

За исключением этого изменения частоты, результаты обычной теории, пока мы исходим из представлений Дебая, остаются в силе. Но положение меняется, если учесть структуру кристаллической решетки.

Как известно, упругий спектр колебаний решетки можно рассматривать как состоящий из двух частей — акустической и оптической, по обозначению Борна. Эту последнюю мы считаем более целесообразным называть здесь инфракрасной частью. В создании

¹ Уже Бриллюэн (Ann. de phys. 17, 88, 1922) обратил внимание на соответствующее формуле (2) изменение частоты при отражении (или преломлении) света на акустических волнах (отражение от движущегося зеркала), а один из нас [Мандельштам] рассмотрел эту задачу другим способом, равно как и аналогичные, связанные с процессами диффузии и теплопроводности.

рассеянного света, кроме вышерассмотренной акустической части, принимает участие и инфракрасная часть спектра. Здесь также — и это существенный пункт — имеются колебания с большими, по сравнению с молекулярными расстояниями, длинами волн Λ , которые лежат в области оптических длин волн. Таким образом, и здесь имеется предпосылка для суммирующихся отражений. При этом, однако, речь идет не о колебаниях плотности, а об изменениях взаимных расстояний атомов решетки или комплексов атомов друг относительно друга (колебания структуры). Если принять, что эти смещения связаны с изменением показателя преломления, то упомянутое выше отражение действительно будет иметь место. Таким образом, к спектру рассеянного света, состоящего из основных линий, подвергшихся тонкому расщеплению или расширению, прибавляются еще линии рассеяния, обусловленного инфракрасной частью упругого спектра.

Существенно при этом, что большим (по сравнению с расстояниями между узлами решетки) длинам волн Λ этого спектра соответствует частота, которая почти не зависит от Λ и совпадает с частотой остаточных лучей ω_0 . Амплитуда рассеянного света будет меняться таким образом в темпе этой частоты. Это означает, что в рассеянном свете появятся две частоты

$$\nu = \nu_0 \pm \omega_0.$$

Вследствие практической независимости частоты инфракрасной части упругого спектра от Λ это расщепление, или, иными словами, длина волны сателлитов, практически не зависит от угла наблюдения. Мы видим, таким образом, что учет инфракрасной части упругого спектра действительно требует появления сателлитов и непринужденно вводит их в рамки классической теории.

Интенсивности красных и фиолетовых сателлитов получаются при этом приблизительно одинаковыми. Однако это не может рассматриваться как противоречие с опытом, ибо, с одной стороны, классическая теория заранее должна быть ограничена областью высоких температур, а, с другой стороны, из опыта известно, что отношение интенсивностей фиолетовых и красных сателлитов, которое всегда < 1 , действительно сильно возрастает с температурой.

При количественном исследовании вопроса мы ограничимся главным образом рассеянием, обусловленным колебаниями структуры.

§ 2. Об изменениях показателя преломления кристалла при колебаниях структуры

Мы предположим, что изменения оптического тензора диэлектрической постоянной ϵ_{xy} , вызванные искажением решетки, зависят от смещений \mathbf{u}_r элементов решетки (в первом приближении) линейно и могут быть представлены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_{xx} &= \sum_r \mathbf{g}_{xx}^r \mathbf{u}_r, \\ \Delta \epsilon_{xy} &= \sum_r \mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{u}_r, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где \mathbf{u}_r — смещение r -той частицы элементарной ячейки решетки.

Под $\mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{u}_r$ следует понимать $\sum_{\xi} g_{xy, \xi}^r u_{r\xi}$ (индекс ξ принимает значения x, y, z). Величины $g_{xy, \xi}^r$ при фиксированном r образуют тензор третьего ранга.

Симметрия структуры кристалла обуславливает, что во многих случаях определенные коэффициенты \mathbf{g}_{xy}^r должны исчезать.

Это будет иметь место, например, в том случае, когда структура, получающаяся при смещении \mathbf{u}_r , тождественна со структурой, получающейся при смещении $-\mathbf{u}_r$. Для решеток типа NaCl и CaCl₂ это имеет место для всех возможных смещений.

Как будет видно из дальнейшего, в этом заключается объяснение отсутствия сателлитов у этих кристаллов.¹

С другой стороны, несомненно существуют и такие случаи, когда величины \mathbf{g}_{xy}^r отличны от нуля. Это имеет место, например, в кристаллах, которые содержат группы атомов с тетраэдрической структурой. В таких атомных группах сдвиг атомов внутрь существенно отличен от сдвига наружу (пример: кристаллы, содержащие группу SO₄; группа CO₃ в исландском шпате).

Следует заметить еще, что величины \mathbf{g}_{xy}^r должны удовлетворять, например, условиям неизменности тензора диэлектрической постоянной при перемещении кристалла, как целого. Эти условия гласят

$$\sum_r \mathbf{g}_{xy}^r = 0.$$

Изменения показателя преломления при деформации решетки имеют несколько причин. Первой из них является изменение

¹ Отсутствие сателлитов в NaCl и т. п. объяснил из соображений симметрии уже К. Шефер (Cl. Schaefer), см. Zs. f. Phys. 54, 153, 1929.

Лоренцовского члена, который для кубической решетки типа D равен $\frac{4\pi}{3}P$. В общем случае этот член заменяется линейной векторной функцией от P , коэффициенты которой зависят от структуры элементарной ячейки. Однако эта причина, вероятно, не является единственной. К этому заключению можно прийти, быть может, на том основании, что изменение показателя преломления, обусловленное давлением, для (регулярных) кристаллов (например, NaCl , CaCl_2) не следует закону Лоренца-Лорентца ($\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = A\rho$).

§ 3. Расчет рассеяния света

Следуя Борну,¹ мы можем следующим образом разложить колебания кристаллической решетки по собственным колебаниям:

$$\mathbf{u}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j, \mathbf{k}} \mathbf{a}_{r,j} p_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор элементарной ячейки, \mathbf{k} — фазовый вектор, N — нормирующий множитель, который равен полному количеству ячеек в кристалле, p_j — амплитуды собственных колебаний и $\mathbf{a}_{r,j}$ — собственные векторы, определяющие направления собственных колебаний. Эти векторы нормированы условиями

$$\sum_r m_r \mathbf{a}_r \mathbf{a}_{r,j'} = \delta_{jj'} = \begin{cases} 0, & j \neq j', \\ 1, & j = j', \end{cases}$$

где m_r — масса r -той частицы. В дальнейшем мы будем пренебрегать зависимостью собственных векторов от длины волны; учет этой зависимости может, конечно, внести в последующее рассмотрение некоторые изменения.

Колебания дебаевской акустической области в разложение (4) включены. Но так как нас интересует только „инфракрасная“ часть упругого спектра, то мы примем, что в разложении

$$\omega_j = \bar{\omega}_j k + \bar{\omega}_j k^2 + \dots \quad (5)$$

($k = |\mathbf{k}|$ — волновое число) ω_{0j} отлично от нуля. Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только собственные колебания, относящиеся к определенной собственной частоте ω_{0j} , мы опустим индекс j .

¹ М. Вогн. *Enz. d. math. Wiss.* 25, 504 (Атомная теория твердого состояния).

Чтобы не усложнять дела, мы не будем явно учитывать в расчетах двойное преломление рассеянного света. Это допустимо постольку, поскольку при наблюдениях поляризации мы все равно должны ограничиваться определенным направлением. Расчет рассеянного света мы можем провести известным способом, с помощью введения фиктивной электродвижущей силы \mathbf{F}

$$\varepsilon_0 F_x = \Delta\varepsilon_{xx} \cdot E_x^0 + \Delta\varepsilon_{xy} \cdot E_y^0 + \Delta\varepsilon_{xz} \cdot E_z^0. \quad (6)$$

ε_0 есть (средняя) оптическая диэлектрическая постоянная кристалла. Мы принимаем, что электрический вектор \mathbf{E}^0 света, падающего в направлении оси x , образует угол χ с осью y

$$E^0 = \cos(\nu_0 t - s_0 x), \quad \text{где } s_0 = |\mathbf{s}_0| = \frac{\nu}{v} = \frac{\nu\sqrt{\varepsilon_0}}{c}.$$

Подставляя выражения $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{xy}$, ... из (3) и (4) в (6), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 F_x = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{r, \mathbf{k}} \{ & (\mathbf{g}_{xz}^r \mathbf{a}_r) \sin \chi + (\mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{a}_r) \cos \chi \} \rho \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \times \\ & \times \{ \cos[(\nu_0 + \omega)t - s_0 x + \varphi] + \cos[(\nu_0 - \omega)t - s_0 x - \varphi] \}. \end{aligned}$$

Здесь приведены члены, относящиеся только к одной определенной частоте ω_0 . Суммирование по r распространяется на все атомы элементарной ячейки, а по \mathbf{k} — по всем возможным значениям фазового вектора.

Для электрического вектора света, рассеянного элементом объема $d\tau$ в направлении оси y , мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{d\tau}{4\pi R} \left\{ \text{grad div} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \mathbf{F} \left(t - \frac{R}{v} \right), \\ \text{т. е.} \\ E_x = \frac{d\tau}{8\pi c^2 R \sqrt{N}} \sum_{r, \mathbf{k}} \{ & (\mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{a}_r) \cos \chi + (\mathbf{g}_{xz}^r \mathbf{a}_r) \sin \chi \} \rho \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \times \\ & \times \{ (\nu_0 + \omega)^2 \cos \left[(\nu_0 + \omega) \left(t - \frac{R}{v} \right) - s_0 x + \varphi \right] + \\ & + (\nu_0 - \omega)^2 \cos \left[(\nu_0 - \omega) \left(t - \frac{R}{v} \right) - s_0 x - \varphi \right] \}, \\ E_z = \frac{d\tau}{8\pi c^2 R \sqrt{N}} \sum_{r, \mathbf{k}} \{ & (\mathbf{g}_{zy}^r \mathbf{a}_r) \cos \chi + (\mathbf{g}_{zx}^r \mathbf{a}_r) \sin \chi \} \rho \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \{ \dots \} \\ E_y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

R — расстояние точки наблюдения от элемента объема $d\tau$.

Таким образом, рассеянный свет состоит из частот $\nu_0 + \omega$ и $\nu_0 - \omega$. Отношение амплитуд равно $\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\nu_0 - \omega}\right)^2$. Следовательно, оно приблизительно равно 1, если $\omega < \nu_0$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением частоты $\nu = \nu_0 - \omega$; для остальных сателлитов (для которых $\nu = \nu_0 + \omega$) соотношения совершенно аналогичны.

Нетрудно показать, что зависимость амплитуды рассеянного света от угла рассеяния соответствует обычной релеевской теории.

Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния света сферическим объемом $\tau = \frac{4\pi}{3} \rho^3$, бóльшим по сравнению с длиной волны света.

Мы можем преобразовать (7) следующим образом:

$$E_z = \frac{d\tau}{8\pi c^2 R^2 \sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{k}} \{ (\mathbf{g}_{xy}^r \mathbf{a}_r) \cos \chi + (\mathbf{g}_{zz}^r \mathbf{a}_r) \sin \chi \} p\nu^2 \times \quad (8)$$

$$\times \{ \cos [\nu t_1 - (\xi, \mathbf{r}) - \varphi_1] + \cos [\nu t_1 - (\eta, \mathbf{r}) - \varphi_2] \},$$

где $t_1 = t - \frac{R_0}{v}$, R_0 — расстояние между точкой наблюдения и центром объема τ и далее

$$\xi = \mathbf{s}_0 - \mathbf{s} - \mathbf{k}, \quad \eta = \mathbf{s}_0 - \mathbf{s} + \mathbf{k};$$

φ_1 и φ_2 являются новыми фазовыми константами. Интегрируя (8) по объему τ , получим

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\tau (G_{xz} \sin \chi + G_{xy} \cos \chi)}{8\pi c^2 R_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p\nu^2}{2\sqrt{N}\alpha^3} \{ Q(\xi\rho) \cos(\nu t_1 - \varphi_1) + \\ &\quad + Q(\eta\rho) \cos(\nu t_1 - \varphi_2) \}, \\ E_z &= \frac{\tau (G_{zz} \sin \chi + G_{yy} \cos \chi)}{8\pi c^2 R_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p\nu^2}{2\sqrt{N}\alpha^3} \{ Q(\xi\rho) \cos(\nu t_1 - \varphi_1) + \\ &\quad + Q(\eta\rho) \cos(\nu t_1 - \varphi_2) \}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$G_{xz} = \sqrt{\alpha^3} (\mathbf{g}_{xz}^r \mathbf{a}_r) \text{ и т. д.,} \quad Q(x) = \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x),$$

$$\xi = |\xi|, \quad \eta = |\eta|,$$

а α^3 — объем элементарной ячейки. Таким образом, величины G_{xy} характеризуют изменения показателя преломления, которые связаны

с определенным собственным колебанием. Для различных собственных частот ω_0 величины $G_{\alpha\beta}$ имеют различные значения. Они определяют интенсивность и поляризацию комбинационного рассеяния.

Так как функция $Q(x)$ очень быстро убывает с возрастанием аргумента, то $Q(\xi\rho)$ при достаточно большом ρ практически отличается от нуля только для очень малых значений ξ или соответственно η . Отсюда следует, что в заданном направлении рассеивают свет только те упругие волны, фазовый вектор которых \mathbf{k} удовлетворяет условию $\xi=0$ или $\eta=0$. Для различных направлений рассеяния этим условиям удовлетворяют различные \mathbf{k} . Но так как ω является функцией k (5), то для различных направлений частота рассеянного света $\nu = \nu_0 \pm \omega$ будет иметь различные значения. Однако эта зависимость рассеянной частоты ν от направления не существенна, так как для длин волн порядка оптических ω зависит от k лишь в очень малой степени. Поэтому мы пренебрежем этой зависимостью и положим просто $\omega = \omega_0$.¹

Рассчитаем теперь отношение интенсивности J рассеянного света (частоты ν) к интенсивности J_0 падающего света. Из (9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{J(\nu)}{J_0(\nu_0)} &= \overline{E_x^2} + E_z^2 = \\ &= \frac{\tau^2 G}{(3\pi c^2 R_0)^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{p^2 \nu^4}{4N\alpha^3} \{ Q^2(\xi\rho) + 2Q(\xi\rho) Q(\eta\rho) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + Q^2(\eta\rho) \}, \end{aligned}$$

где

$$G = (G_{xz} \sin \chi + G_{xy} \cos \chi)^2 + (G_{zz} \sin \chi + G_{zy} \cos \chi)^2.$$

При образовании среднего мы учитываем то обстоятельство, что члены с произведениями $\cos(\dots)$, относящимися к различным значениям \mathbf{k} , равны нулю. Фактор $p^2 \nu^4$ мы можем вынести за знак суммы, взяв его, скажем, для значения $\omega = \omega_0$, ибо, как уже замечено выше, мы не учитываем зависимость ω от k .

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} Q^2(\xi\rho) &= \frac{N\alpha^3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/\alpha}^{+\pi/\alpha} \int \int dk_x dk_y dk_z Q^2(\xi\rho) = \frac{N\alpha^3}{\tau}, \\ \sum_{\mathbf{k}} Q(\xi\rho) Q(\eta\rho) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \quad (\text{приближенно}). \end{aligned}$$

¹ Это означает, другими словами, что с достаточной точностью можно принять, что каждая кристаллическая ячейка в своих колебаниях не зависима от других.

Так как p есть амплитуда собственного колебания, то $\omega_0^2 p^2/2 = \overline{W}$ — средней энергии осциллятора. Таким образом, относительная интенсивность рассеянного света равна

$$\frac{J(\nu)}{J_0(\nu_0)} = \frac{G\nu^4 \tau}{(8\pi c^2 R_0)^2} \cdot \frac{\overline{W}}{\omega_0^2}. \quad (10)$$

Мы видим, что это выражение зависит от значения \overline{W} . Таким образом, поведение интенсивности сателлитов, помимо прочего, определяется величиной нулевой энергии.

Так как коэффициенты $g'_{\alpha\beta}$ и $G_{\alpha\beta}$ не известны, то определить численную величину интенсивности рассеянного света мы не можем.¹

§ 4. Поляризация рассеянного света

Направление электрического вектора света, рассеянного в направлении оси y , будем обозначать углом ψ , который образует этот вектор с осью z . Мы получаем из (9)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_x}{E_s} = \frac{G_{xz} \sin \chi + G_{xy} \cos \chi}{G_{zs} \sin \chi + G_{zy} \cos \chi}. \quad (11)$$

Если рассматриваемое собственное колебание не является кратным, то собственные векторы \mathbf{a}_r , а следовательно и $G_{\alpha\beta}$, определены однозначно. Рассеянный свет поляризован линейно и направление колебаний его электрического вектора определено выражением (11).

Однако существуют случаи, когда собственные векторы \mathbf{a}_r не являются однозначно определенными. Собственное колебание называют тогда кратным. В этом случае и $G_{\alpha\beta}$ являются в известной мере неопределенными. Это указывает на возможность частичной деполаризации рассеянного света.

Для сравнения с экспериментом мы располагаем измерениями Кабанна² и Мензиса³ для кварца. Они исследовали два случая, а именно те, когда (неполяризованный) падающий луч направлен параллельно или перпендикулярно оптической оси кристалла. Они обнаружили при перпендикулярном направлении наблюдения, что наиболее сильные сателлиты (48.1 μ , 21.5 μ) линейно поляризованы

¹ Впрочем довольно грубая оценка дает правильный порядок величины (несколько процентов от интенсивности основных линий).

² J. Cabannes. C. R. 188, 249, 1929.

³ A. Menzies. Phil. Mag. 8, 511, 1929 (октябрь).

в том же направлении, что и основные линии (направление колебаний вдоль оси z , „нормальная“ поляризация), другие же поляризованы перпендикулярно к этому направлению („аномальная“ поляризация). Поляризация некоторых сателлитов (9.4 и 8.6 μ) оказывается различной в зависимости от того, направлена ли оптическая ось параллельно или перпендикулярно падающему свету. Некоторые сателлиты (81 μ , 24.7 μ) не поляризованы при одной ориентации кристалла, другие (120 μ) — при обеих.

С точки зрения развитой выше теории мы можем для толкования этих экспериментальных результатов заметить следующее. Для объяснения наличия „нормально“ поляризованных сателлитов достаточно [как видно из (11)] принять, что главные оси тензора $G_{\alpha\beta}$ направлены вдоль осей x, y, z . Следует, однако, заметить, что направления главных осей тензора $G_{\alpha\beta}$ в общем случае могут не совпадать с кристаллографическими осями кристалла. Это следует из того обстоятельства, что общий знак совокупности собственных векторов \mathbf{a} , а поэтому и общий знак совокупности компонент $G_{\alpha\beta}$ не имеют физического смысла. Как видно из (10) и (11), знаки всех компонент $G_{\alpha\beta}$ могут быть одновременно изменены без изменения интенсивности и поляризации рассеянного света.

На этом основании к тензору $G_{\alpha\beta}$ не применимы обычные рассуждения, с помощью которых доказывается совпадение с оптической осью главной оси какого-нибудь тензора, характеризующего особенности кристалла.

Все это справедливо для простых (некратных) собственных колебаний, для которых компоненты тензора $G_{\alpha\beta}$ однозначно определены с точностью до общего знака.

Для объяснения происхождения „аномально“ поляризованных сателлитов (направление колебаний по оси x) необходимо принять, что для этих сателлитов $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} = G_{xy} = 0$, а $G_{xx} \neq 0$, $G_{zy} \neq 0$. В случае неполяризованного падающего света при таком виде $G_{\alpha\beta}$ получается следующее. Из (6) и (9) имеем

$$E_x \sim G_{xy} E_y^0 + G_{xz} E_z^0 = G_{xz} E_z^0,$$

$$E_z \sim G_{zy} E_y^0 + G_{zz} E_z^0 = G_{zy} E_y^0.$$

Таким образом, сателлиты частично деполаризованы.

Если повернуть кристалл вокруг оси y на 90° , так что кристаллографическое направление, которое раньше совпадало с осью z ,

теперь совпадает с осью x , то во всех G_{α_3} в написанных выше выражениях надо переставить индексы z и x . Мы получаем тогда

$$E_x \sim G_{zy} E_y^0 + G_{z.c} E_z^0,$$

$$E_z \sim G_{xy} E_y^0 + G_{xx} E_x^0 = 0.$$

Таким образом, свет поляризован „аномально“.

Описанный случай можно сделать наглядным с помощью следующей простой модели. Представим себе, что наш кристалл содержит диполи, которые могут колебаться только в определенном направлении. В равновесном состоянии они имеют направление оси z , например направление оптической оси. Оси диполей в результате теплового движения совершают малые колебания с инфракрасной частотой вокруг своего равновесного направления. Как легко видеть, для этой модели только G_{zx} и G_{zy} отличны от нуля; остальные компоненты G_{α_3} (вплоть до членов высшего порядка относительно отклонений) равны нулю.¹

Подробная проверка теории возможна, однако, только для таких кристаллов, для которых хорошо изучены их собственные колебания (например, для исландского шпата).

Москва,

Институт теоретической физики

И Гос. Университета.

¹ Мы надеемся подробнее рассмотреть вопрос о поляризации комбинационного рассеяния в другом месте.

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ ПРИ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ. II

[*Zs. f. Phys.* **60**, 364, 1930. Совм. с Г. С. Ландсбергом]

(Поступило 13 декабря 1929 г.)

Исследована интенсивность спутников комбинационного рассеяния в кварце в температурном интервале от 295 до 810° К. Выяснилось, что кроме хорошо известного возрастания интенсивности фиолетовых спутников имеет место также возрастание интенсивности красных спутников. Полученные результаты находятся в качественном согласии с теоретическими соображениями.

§ 1

Простые представления о возникновении спутников при молекулярном рассеянии света, базирующиеся на гипотезе световых квантов, объясняют изменения частоты. Более труден вопрос об интенсивности спутников и особенно об ее температурной зависимости. Обычно принимается, что: 1. Отношение интенсивности фиолетовых (антистоксовых) и красных (стоксовых) спутников равно $e^{-h\nu/kT}$, и 2. Интенсивность фиолетовых спутников в общем сильно растет с возрастанием температуры, в то время как интенсивность красных медленно убывает.¹ Что касается высказывания 1, то его с достаточной точностью можно считать экспериментально подтвержденным.² Иначе обстоит дело с вопросом о температурной

¹ P. Pringsheim. *Hand. d. Phys.* **21**, стр. 619.

² P. Daure. *C. R.* **188**, 1605, 1929; L. S. Ornstein and I. Rekveld. *Zs. f. Phys.* **57**, 539, (1929); В. А. Фабрикант (не опубликовано).

зависимости интенсивности красных и фиолетовых сателлитов, взятых по отдельности. Быстрое возрастание интенсивности фиолетовых сателлитов с температурой качественно констатировано во многих случаях. Наши относящиеся к этому эксперименты с кварцем показывают сильное возрастание интенсивности фиолетовых сателлитов в интервале температур от 20 до 210°С.¹ Позже этот результат был подтвержден Брикведе и Петерсом² в интервале температур от 180 до 550°С. Кришнан обнаружил возрастание интенсивности в интервале от 34 до 81°С.³ Что касается температурной зависимости красных сателлитов, то по этому вопросу имеются следующие данные. Ландсберг и Леонтович⁴ не могли в пределах точности измерений обнаружить заметного возрастания или убывания интенсивности красных сателлитов в кварце при изменениях температуры от 20 до 210°С. Кришнан полагал, что ему удалось констатировать убывание интенсивности красных сателлитов в CCl_4 уже в малом температурном интервале (от 34 до 81°С). Брикведе и Петерс, работа которых известна нам только из весьма краткого реферата, наблюдали в кварце небольшое убывание интенсивности красных сателлитов. Эти последние наблюдения являются чисто качественными, и данные относятся к единичным линиям. Поэтому вопрос о температурной зависимости красных сателлитов представляется нам экспериментально недостаточно выясненным.

С другой стороны, простые теоретические представления, которые заставляют ожидать такого уменьшения интенсивности, кажутся нам, во всяком случае когда речь идет о кристаллах, мало удовлетворительными.

Как известно, исходят из представления, согласно которому возникновение красных сателлитов обусловлено только поглощением одного кванта энергии невозбужденными центрами. Однако если рассматривать вопрос с другой точки зрения, то этот результат окажется недостаточно обоснованным. Как мы уже указали в другом месте,⁵ мы придерживаемся того мнения, что проблема

¹ Gr. Landsberg und L. Mandelstam. *Zs. f. Phys.* 50, 769, 1928 [статья 26, стр. 305].

² F. G. Brickwedde a. V. Peters. *Phys. Rev.* (2) 33, 116, 1929.

³ K. J. Krischnan. *Nature*, 122, 650, 1928.

⁴ Gr. Landsberg und M. Leontowitsch. *Zs. f. Phys.* 53, 439, 1929.

⁵ Г. Ландсберг и Л. Мандельштам. *Zs. f. angew. Phys.* 6, 155, 1929 (русск.); см. также *Zs. f. Phys.* 58, 250, 1929; [статьи 27 и 28, стр. 318 и 322].

комбинационного рассеяния в кристаллах может быть при достаточно высоких температурах рассмотрена классически в соответствии с борновской теорией кристаллической решетки. Для очень высоких температур получается приблизительно одинаковая интенсивность красных и фиолетовых сателлитов, причем и та и другая возрастают приблизительно пропорционально абсолютной температуре. Таким образом, во всяком случае для высоких температур, следует ожидать возрастания интенсивности красных сателлитов. Впрочем легко усмотреть, в чем заключается неполнота приведенного выше квантового рассмотрения.

Инфракрасные колебания в кристалле представляют собой не что иное, как колебания решетки, и являются, как это обычно принимают, гармоническими колебаниями¹ (поправками на нелинейность, которые следует ввести при очень высоких температурах, мы для начала пренебрежем).

При этом в интенсивность красных сателлитов одной и той же частоты вносят свою долю не только основные состояния, но и все другие состояния, если они поглощают квант энергии. Учитывая это и делая приемлемое предположение о соответствующей вероятности, мы получим следующий результат для интенсивности красных и фиолетовых сателлитов:

$$J_r = \frac{A}{1 - e^{-h\nu/kT}},$$

$$J_v = \frac{A'}{1 - e^{-h\nu/kT}} \cdot e^{-h\nu/kT},$$

где A и A' — константы. A относится к A' , как $\left(\frac{\nu - \nu_i}{\nu + \nu_i}\right)^4$, так что в нашем случае можно с достаточной точностью положить $A = A'$.

Недавно И. Тамм² рассмотрел весь вопрос о рассеянии света в кристалле с точки зрения квантовой механики. Для температурной зависимости красных и фиолетовых сателлитов Тамм также получает соотношения (1) и (2).

Таким образом, надо было бы ожидать температурного хода, изображенного на рис 1. Для высоких температур выше указанный

¹ Подробнее об этом см. Л. Маңдельштам, Г. Ландсберг и М. Леонтович. *Zs. f. Phys.* **60**, 334, 1930; [статья 29, стр. 324] и И. Тамм. Там же **60**, 345, 1930.

² И. Тамм. *Zs. f. Phys.* **60**, 345, 1930.

классический результат оказывается подтвержденным. Здесь также $J_v/J_r = e^{-h\nu/kT}$.¹ Само собой разумеется, для случаев, когда рассеивающие центры не являются осцилляторами (например, ротационные колебания в газе и т. п.), дело обстоит бы совершенно иначе. Здесь различные возбужденные состояния будут давать разные сателлиты. Для температурной зависимости интенсивности первого красного сателлита здесь, конечно, получится обычно принимаемое

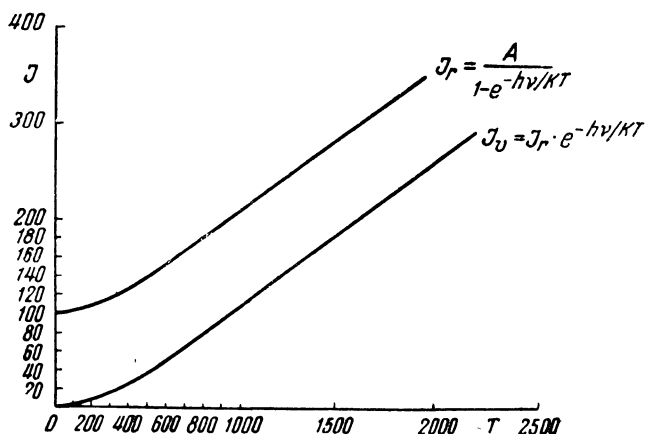


Рис. 1

уменьшение; напротив, интегральная интенсивность всех этих сателлитов должна возрастать с температурой приблизительно так, как показано на рис. 1.

Ввиду описанного положения вещей, нам казалось желательным исследовать вопрос о температурной зависимости интенсивности красных сателлитов в кристаллах в возможно более широком интервале температур.

§ 2

Экспериментальная установка была в основном такая же, как при исследованиях Ландсберга и Леонтовича.² Кристалл кварца нагревался в печи, которая могла давать температуры до 900° К.

¹ В работе Ландсберга и Леонтовича, на основе предположительно принятой оценки вероятности, которая впрочем кажется нам теперь недостоверной, приведено несколько отличное отношение.

² Г. Ландсберг и М. Леонтович. 1 с.

Измерения температуры производились с помощью термоэлемента NiFe.

Согласно измерениям Ландсберга и Леонтовича, следовало ожидать, что изменения интенсивности не должны быть особенно большими. Поэтому марки интенсивности можно было наносить по методу ослабления первичного пучка с помощью сеток. Примененные сетки пропускали соответственно 14, 16, 24, 26.5, 36, 50, 78 и 100% (без сетки) падающего света; таким образом, для определения кривой почернения фотопластинки можно было получить восемь точек, которые довольно точно определяли ход этой кривой. Свет ртутной лампы рассеивался водой, помещенной в кварцевом сосуде, в желательной степени ослаблялся упомянутыми сетками и фотографировался кварцевым спектрографом Fuess'a.

Этим методом можно получить для всего спектра марки, которые в отношении распределения интенсивности по длинам волн гораздо лучше соответствуют спектру рассеянного кварцем света, чем в случае применения света, отраженного от экрана (закон $1/\lambda^4$). Кварцевый сосуд с плоскими стенками наполнялся дистиллированной водой и оставался в покое в течение нескольких дней, так что большие частички оседали на дно и оставалась взвешенной только тонкая суспензия. Интенсивность света, рассеянного водой, оставалась во время съемки марок (приблизительно 10 часов) весьма постоянной. Постоянство работы ртутных ламп контролировалось посредством вольтметра и амперметра. Снимались две системы марок различной интенсивности; в первой время экспозиции для каждой марки составляло 90 мин., во второй 45 мин. Так как фотографирование света, рассеянного холодным и горячим кварцем, длилось по 120 час., времена экспозиции в течение опытов и при съемке марок относились как 80 или 160 к 1. Все же при соответствующем выборе фотоматериалов ход характеристической кривой почернения оставался и при таком отношении времен экспозиции неизменным. Мы работали с пластинками Ilford'a „Monarch“, проявитель Rodinal Agfa (1:15), 8 мин. при 20° С. Для родиналового проявителя допустимое отношение времен особенно велико и достигает, по измерениям Гельда и Баарса, 1000.¹

Как сказано, каждая экспозиция при съемке кварца составляла 120 час. Постоянство интенсивности лампы в нашем случае имело особое значение. Так как при разогревании печки температура

¹ E. F. M. von der Held und B. Baars. Zs. f. Phys. 45, 364, 1927.

помещения заметно возрастает (приблизительно на 10°C), то несколько изменяется и режим лампы. С помощью ползункового реостата этот режим регулировался таким образом, чтобы ваттное потребление лампы оставалось одинаковым при обоих снимках (для „холодных“ снимков 2.85 А, 69.5 В, для „горячих“ 2.65 А, 73 В). Неизбежные колебания напряжения почти полностью компенсировались во время этого большого промежутка (10 дней). Рассчитанные по показаниям измерительных приборов значения потребленной в лампе энергии составляют 23.8 kWh и 23.2 kWh, т. е. практически одинаковы.

§ 3

Поскольку режим лампы постоянен, естественно предположить, что и интенсивность света оставалась во время обоих опытов неизменной. Это косвенно подтверждается и следующими контрольными измерениями. На спектрограмме были определены плотности почернения нескольких основных линий ртутной лампы и измерены соответствующие отношения интенсивностей этих линий для холодного и горячего кварца. К сожалению, почернения основных линий оказались для горячего кварца столь значительными, что они легли вне наиболее плотных марок интенсивности. Для того чтобы провести эти измерения, мы были вынуждены экстраполировать кривые почернения.¹ Мы ограничивались при этом теми линиями, у которых плотности почернения еще надежно лежали в области нормальных почернений ильфордских пластинок „Monarch“ (наибольшая плотность почернения не превышает 1.9 и у большей части исследованных линий достигает только 1.5). При этих условиях не слишком большая экстраполяция кривых почернения вполне допустима и может быть выполнена просто и надежно, так как в этой области наши кривые еще прямолинейны. Рис. 2 изображает пример характеристической кривой почернения. Пунктирная часть кривой соответствует области экстраполяции.

В табл. 1 сведены значения полученных таким образом отношений интенсивностей нескольких основных линий.

¹ Нам, к сожалению, не удалось повторить опыты или распространить их на другие температуры, так как при повторении опыта наш исключительно хороший кристалл треснул и сделался непригодным.

Среднее значение (2.75) совпадает с отношением абсолютных температур $\frac{T_1}{T_2} = \frac{810}{295} = 2.75$.¹ Мы видим, таким образом, что непосредственные измерения прироста интенсивности основных линий

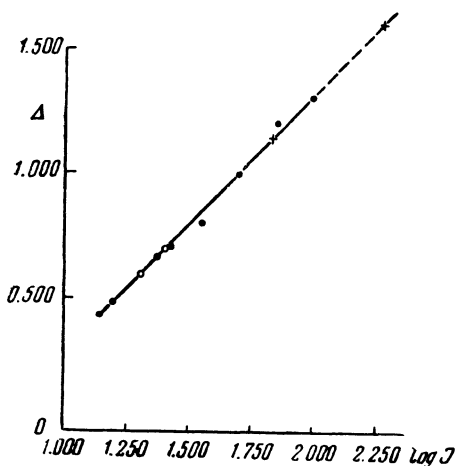


Рис. 2

Таблица 1

Отношение интенсивностей основных линий при температурах 810 и 295° К

λ в Å	J_{810}/J_{295}
3341	3.0
3132	2.6
3126	2.6
3024	2.7
2967	2.6
2804	3.1
2654	2.8
	Среднее 2.75

с температурой подтверждают предположение о постоянстве интенсивности лампы. При этом нужно заметить следующее. Как известно, если речь идет о молекулярном рассеянии, то интенсивность основных линий рассеянного света должна возрастать пропорционально абсолютной температуре рассеивающего тела. Та часть рассеянного света, которая обусловлена случайными неоднородностями или дефектами установки (паразитный свет), в общем не зависит от температуры. Общая интенсивность будет, следовательно, расти медленнее, чем абсолютная температура. Полученный нами результат ($J_{T_1}/J_{T_2} = T_1/T_2$) свидетельствует о постоянстве первичного света, если мы можем принять, что в нашей установке не было паразитного света. Другим объяснением могло бы быть то, что наличие не зависящего от температуры паразитного света было случайно скомпенсировано возра-

¹ Три не помещенные в таблице основные линии, для которых плотности почернения значительно больше, так что нам казалось недопустимым экстраполировать в этих случаях кривые почернения, давали для отношения интенсивностей горячих и холодных снимков значение 2.65 и не могли, таким образом, изменить число, приведенное в табл. 1.

основаниям. Так как предполагаемая компенсация осуществляется для всех длин волн, то паразитный свет должен был бы подчиняться закону $1/\lambda^4$. Это означает, что этот свет мог бы вызываться только очень тонкой суспензией в кристалле и эта суспензия должна была бы обуславливать существенную часть полного рассеяния. Однако наши прежние опыты с тем же самым кристаллом не дали возможности выявить никакого заметного немолекулярного рассеяния.¹ Следует подчеркнуть, что подобные исключительно чистые кварцевые кристаллы сравнительно редки. До сих пор мы располагали только двумя кусками кварца такого рода. Во всех других кусках всегда были включены посторонние частицы, которые значительно увеличивали рассеяние света.

§ 4

Определение отношения интенсивностей красных сателлитов при низкой и высокой температуре затруднялось изменением их вида. Как мы установили² (на это указывали уже раньше Брикведе и Петерс), при повышении температуры некоторые сателлиты немного уширялись, другие становились весьма диффузными и даже совершенно размывались. Сателлиты, которые соответствуют инфракрасному колебанию $\lambda = 21.5\mu$, обнаруживали наименьшее изменение. Вместе с тем они являются наиболее интенсивными; поэтому все наши измерения производились с этими сателлитами. Однако и эти сателлиты при температуре 810° абс. становятся несколько более широкими, чем при комнатной температуре. Для того чтобы сравнить их интенсивности при различных температурах, нужно было определять интегральное почернение всей поверхности, занятой изображением этого сателлита. В нашем же распоряжении имелся лишь визуальный микрофотометр Hartmann'а, который не давал возможности делать подобные измерения.³ Поэтому мы ограничивались определением максимального значения почернения.

Отношение максимальных интенсивностей должно получаться несколько меньшим, чем „истинное“ отношение, так как более высокой температуре соответствуют более широкие линии.

¹ Г. С. Ландсберг и М. Леонтович, *И. с.*; Г. Ландсберг и К. Вульфсон. *Zs. f. Phys.* 58, 95, 1929.

² Г. Ландсберг и Л. Мандельштам. *Zs. f. Phys.* 58, 250, 1929; [Статья 28, стр. 322].

³ За любезное предоставление этого прибора мы выражаем благодарность проф. В. Г. Фесенкову.

У всех измеренных линий плотность почернения красных сателлитов для холодных и для горячих снимков лежит в области нормальных почернений и не выходит за границы, определенные марками почернения.

Таким образом, здесь нет места упомянутым в § 3 соображениям и мы могли определить искомое отношение интенсивностей красных сателлитов и для наиболее интенсивных линий. При этом в большинстве случаев можно независимо использовать обе системы марок; получаемые таким путем два результата лишь незначительно отличаются

Таблица 2
Отношение интенсивностей красных сателлитов ($\lambda=21.5 \mu$) при температурах 810° и 295°K

λ в \AA	J_{810}/J_{295} красн
4047	1.26
3663	1.38
3650	1.31
3132	1.20
3126	1.26
3024	1.26
2804	1.36
2654	1.27
	Среднее 1.29

один от другого. Красные сателлиты линий $\lambda=3341 \text{\AA}$ и $\lambda=2967 \text{\AA}$ слишком слабы для того, чтобы допускать надежные измерения, и поэтому они были опущены. Результаты сведены в табл. 2.

Мы видим, таким образом, что измерения дают для восьми различных линий прирост интенсивности красных сателлитов приблизительно на 30% при повышении температуры от 295° до 810°K . По приведенным выше соображениям ошибка вследствие возможного непо-

стоянства интенсивности лампы представляется нам мало вероятной.¹

Прирост интенсивности, которого следует ожидать из наших формул (1) и (2), для $\lambda=21.5 \mu$ при повышении температуры от 295° до 810°K составляет 60% от интенсивности при комнатной температуре. Приведенные выше данные о расширении сателлитов при повышении температуры указывают на то, как можно было бы, повидимому, прийти к лучшему совпадению с теоретическим значением.

¹ Если мы примем, что весь эффект должен быть объяснен увеличением интенсивности лампы на 30%, то мы должны отнести 40% первичной интенсивности за счет паразитного света, в то время как при всех предыдущих опытах мы вообще не могли обнаружить в нашем кристалле заметного немолекулярного рассеяния.

§ 5

Наша спектрограмма, по крайней мере для наиболее ярких основных линий, дает возможность определить и отношение интенсивностей красных сателлитов к интенсивности фиолетовых, а также температурную зависимость интенсивностей фиолетовых сателлитов. Однако при этом следует учитывать, что фиолетовые сателлиты, особенно при комнатной температуре, очень слабы и их плотность лежит еще вне области нормальных почернений. Кроме того, фон фотографической пластинки, который вызван частью соседними интенсивными линиями, а частью непрерывным спектром нашей лампы, имеет конечную плотность, которая сравнима с плотностью, обусловленной фиолетовыми сателлитами. Поэтому непосредственно, без оценки влияния фона, определить отношение интенсивностей фиолетовых сателлитов невозможно. Эта оценка, как известно, весьма сложна и ни в коем случае не дает надежных результатов. Мы поступали следующим образом.

Общий фон (естественная вуаль пластинки) настолько слаб, что полученные с помощью марок интенсивности кривые почернения можно считать правильными без всяких поправок.

Наблюдаемая плотность почернения сателлита соответствует совокупному действию интенсивности сателлита (J) и интенсивности добавочного света (U), действующего на ту же часть фотографической пластинки (непрерывный спектр кварцевой дуги, ореол от близлежащих основных линий). Таким образом, почернение, измеренное в самом сателлите, обусловлено интенсивностью $J + U$, почернение же в непосредственной близости от сателлита обусловлено одной лишь интенсивностью U .

Для получения отношения интенсивностей двух линий мы определяли четыре плотности почернения, которые соответствовали интенсивностям $J_1 + U_1$, U_1 , $J_2 + U_2$, U_2 . Из кривых почернения мы находим попарное отношение этих величин и получаем

$$\frac{J_1 + U_1}{u_1} = \alpha, \quad \frac{J_2 + U_2}{u_2} = \beta, \quad \frac{U_1}{U_2} = \gamma,$$

где α , β и γ определены из кривых почернения.

Отсюда следует

$$\frac{J_1}{U_1} = \alpha - 1, \quad \frac{J_2}{U_2} = \beta - 1, \quad \frac{U_1}{U_2} = \gamma$$

н

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\alpha - 1}{\beta - 1} \gamma.$$

Таким образом приближенно определяется истинное отношение интенсивностей спутников. Если J значительно превосходит значение u , то описанная поправка незначительна. Определенные этим методом отношения интенсивностей слабых линий сведены в табл. 3, 4 и 5.

Таблица 3
Отношение интенсивности красных и фиолетовых спутников при 295°K

λ в Å	При оценке влияния фона	Без оценки влияния фона
3650	$\frac{J_{кр.}}{J_{фиол.}} = 12$	= 3.2
3132	$\frac{J_{кр.}}{J_{фиол.}} = 12$	= 3.8
	Среднее 12	3.5
Теоретическое значение по формулам (1) и (2): 9.6		

Таблица 4
Отношение интенсивностей красных и фиолетовых спутников при 810°K

λ в Å	При оценке влияния фона	Без оценки влияния фона
3650	$\frac{J_{кр.}}{J_{фиол.}} = 2.6$	= 1.9
3132	$\frac{J_{кр.}}{J_{фиол.}} = 2.5$	= 1.9
	Среднее 2.55	1.9
Теоретическое значение: 2.25.		

Таблица 5
 Отношение интенсивностей фиолетовых спутников при температурах 810 и 295°К

λ в Å	При оценке влияния фона	Без оценки влияния фона
3650	$\frac{J_{810}}{J_{295}} = 7$	= 2.2
3132	$\frac{J_{810}}{J_{295}} = 5$	= 2.5
	Среднее 6	2.4
Теоретическое значение: 6.5.		

Ясно видно, что при внесении указанной поправки полученные значения приближаются к теоретическим. Для табл. 4, где обе интенсивности велики по сравнению с фоном, поправка незначительна.

Измерения, приведенные в табл. 3, 4 и 5, никоим образом не претендуют на большую точность и служат скорее для ориентировки. Впрочем отношение $J_{\text{фиол}}/J_{\text{красн}}$, как уже сказано, было определено для CCl_4 и некоторых других жидкостей другими авторами при более благоприятных условиях (большая интенсивность) и дало хорошее совпадение с теоретическим значением (см. выше).

§ 6

Полученная нами спектрограмма позволила еще раз оценить интенсивности красных спутников по сравнению с интенсивностями основных линий. Такая оценка уже была проведена ранее Ландсбергом и Леонтовичем на основе других опытов. Наши новые цифры несколько отличаются от приведенных этими авторами. Разница не велика и не изменяет ничего принципиального в сделанных там выводах. Однако теперешние результаты получены при лучших условиях и для большего количества линий. Мы считаем их более надежными, чем прежние; нам кажется также, что приведенная Ландсбергом и Леонтовичем точность измерения несколько преувеличена.

Новые результаты приведены в табл. 6.

Таблица 6
Относительные интенсивности красных сателлитов

λ в \AA	$\frac{J_{кр.}}{J_{осн.}}$ в %
4047	28
{ 3663	31
{ 3650	25
	} 28
{ 3132	33
{ 3126	31
	} 32
3024	30
2804	38
2654	38

Однако $\left(\frac{\nu_{красн.}}{\nu_{осн.}}\right)^4 \approx \left(\frac{\nu_0 - \nu_i}{\nu_0}\right)^4 \approx 1 - 4 \frac{\nu_i}{\nu_0} = 1 - 1 \frac{\lambda_0}{\lambda_i}$, где λ_0 — длина волны основных линий, а $\lambda_i = 21.5 \mu$ означает собственную инфракрасную длину волны. Таким образом, при изменении λ_0 от 2650 \AA до 4500 \AA искомое отношение должно возрасти примерно на 3%. Наблюдаемое нами возрастание заметно больше. Однако приведенный численный материал недостаточно обширен и точен для того, чтобы можно было сделать какое-либо заключение о зависимости функции возбуждения от длины волны.

Мы выражаем благодарность студентам Г. Разоренову и К. Вульфсону, которые помогали нам при некоторых опытах и измерениях.

Москва, 29 ноября 1929 г.

Всесоюзный Электротехнический институт,
Физический отдел.

Мы видим, таким образом, что интенсивность красных сателлитов в кварце, которые соответствуют $\lambda_{инфракр.} = 21.5 \mu$, составляет заметную часть (примерно одну треть) от интенсивности основной линии. При этом следует заметить, что эта часть при переходе к более коротким длинам волн, по видимому, несколько возрастает. Однако это изменение с длиной волны столь незначительно, что закон распределения интенсивностей красных сателлитов может быть в первом приближении описан выражением $1/\lambda^4$. Согласно этому закону, мы могли ожидать, что отношение $\frac{J_{красн.}}{J_{осн.}}$ пропорционально $(\nu_{красн.}/\nu_{осн.})^4$.

О СЕЛЕКТИВНОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА

(Предварительное сообщение)

[*Zs. f. Phys.* **72**, 130—131, 1931. Совм. с Г. С. Ландсбергом]

(Поступило 6 августа 1931 г.)

В связи с некоторыми вопросами, касающимися резонансной флюоресценции, мы пришли к исследованиям рассеяния света в парах для длин волн, лежащих относительно близко к линиям абсорбции. При этом, однако, абсорбция не должна быть очень заметной. Поскольку здесь применима обычная классическая теория (формула Релея), мы имеем дело со случаем, при котором, в противоположность всем проведенным до сих пор экспериментальным исследованиям, ход интенсивности рассеянного света существенно отличен от закона $1/\lambda^4$. А именно, здесь ход показателя преломления (или вернее $(n-1)^2$) имеет максимум.

Так как, кроме того, легко могут быть реализованы условия, при которых даже при относительно малом давлении $(n-1)^2/N$ значительно больше, чем в „нормальных“ случаях, то и интенсивность молекулярного рассеяния будет иметь другой порядок величины, чем привычный для рассеяния света в газах (n означает показатель преломления, а N число молекул в кубическом сантиметре).

Мы хотим коротко сообщить об одном, относящемся сюда опыте. Рассеяние света наблюдалось в парах ртути. В качестве источника света служила мощная конденсированная искра между цинковыми электродами, так как она дает хорошо отвечающие нашей цели интенсивные линии с длинами волн $\lambda=2502 \text{ \AA}$ и $\lambda=2558 \text{ \AA}$,

между которыми почти посередине лежит резонансная линия ртути. Как показывает вычисление показателя преломления ртутного пара по дисперсионной формуле,¹ следует ожидать $\frac{(n-1)_{\lambda=2558}^2}{(n-1)_{\lambda=2502}^2} \approx 12$. Кроме того, легко подсчитать, что для $\lambda = 2558 \text{ \AA}$ ожидаемая интенсивность при давлении в 1 атм. должна быть примерно в 70 раз больше, чем для воздуха при нормальных условиях.

При давлении паров $p = 380$ мм и при 90-минутной экспозиции мы действительно смогли установить, что в рассеянном свете ясно видна линия 2558, причем ее интенсивность имеет ожидаемый порядок величины. Напротив, линия 2502, равно как и другие линии цинковой искры, едва заметны, что соответствует отношению

$$(n-1)_{\lambda_1}^2 / (n-1)_{\lambda_2}^2.$$

Москва,

Научно-иссл. институт физики

I Университета,

1 августа 1931 г.

¹ G. Wolfson. Zs. f. Phys 63, 634, 1930.

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	
5	7 св.	—	Все редакционные примечания взяты в квадратные скобки	
12	20 св.	v. Ubish	v. Ubisch	
14	10 св.	определили	определила	
30	1 сн.	62	61	
40	1 сн.	60	59	
55	8 сн.	июне	июне	
58	2 сн.	Там же, статья 70	Том III, статья 71.	
62	1 сн.	стр.	статья	
109	{	12 сн.	получает	излучает
—		8 сн.	grand div Z	grad div Z
—		4 сн.	Leide	Leiden
113	8 св.	$A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bi - x)$	$A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bt - x)$	
125	2 сн.	стр. 125	стр. 109	
129	5 сн.	B ₁	B'	
136	1 сн.	стр. 115	стр. 101	
146	1 сн.	стр. 169	стр. 143	
209	21 св.	памятник	маятник	
232	1 сн.	стр. 256	стр. 217	
248	14 св.	$\beta_i \overline{a_i^2} \frac{RT}{2N}$,	$\beta_i \overline{a_i^2} = \frac{RT}{2N}$,	
262	8 сн.	(<i>h'</i> · <i>b</i>)	(<i>E</i> _{<i>h'</i>} · <i>b</i>)	
271	9 св.	изаимности	взаимности	
293	12 сн.	Heareus	Heraeus	



Л. И. Мандельштам (1906 г.)



Л. И. Мандельштам (1930 г.)



Л. И. Мандельштам (апрель 1944 г.)

ОГЛАВЛЕНИЕ I ТОМА

От редактора	5
Н. Д. Папалекси. Леонид Исаакович Мандельштам (Краткий очерк жизни и научной деятельности)	7
1. Определение периода колебательного разряда конденсатора	67
2. К теории передатчика Брауна	91
3. Об одном методе получения сдвинутых по фазе быстрых колебаний	101
4. Об оптически однородных и мутных средах	109
5. К теории дисперсии	125
6. О направленной беспроволочной телеграфии	131
7. Об одном методе объективного изображения колебательных процессов в простых и связанных конденсаторных контурах	147
8. К теории изогнутой антенны	154
9. К теории дисперсии	162
10. К теории дисперсии	170
11. Об одном методе измерения логарифмического декремента и частоты электромагнитных колебательных систем	173
12. О затухании собственных колебаний в светящихся парах натрия	199
13. Об одном методе измерения логарифмического декремента и частоты электромагнитных колебательных систем	203
14. Маятниковая модель для демонстрации колебательных явлений в связанных электрических колебательных контурах	205
15. К теории микроскопического изображения Аббе	211
16. Ответ на замечания господ О. Люммера и Ф. Райхе по поводу моей статьи „К теории микроскопического изображения Аббе“	226
17. О применении интегральных уравнений к теории оптического изображения	229
18. Отражение рентгеновских лучей	242

19. О шероховатости свободной поверхности жидкостей	246
20. Излучение источника света, находящегося очень близко от границы раздела двух прозрачных сред	261
21. Электродинамика анизотропных сред в специальной теории относительности	273
22. К вопросу о рассеянии света неоднородной средой	280
23. К теории уравнения Шрёдингера	286
24. Новое явление при рассеянии света (Предварительное сообщение)	293
25. К теории адиабатических инвариантов	297
26. О рассеянии света в кристаллах	305
27. К теории молекулярного рассеяния света	318
28. Рассеяние света в кристаллах при высокой температуре. I	322
29. О теории молекулярного рассеяния света в кристаллах (Классическая теория)	324
30. Рассеяние света в кристаллах при высокой температуре. II	336
31. О селективном рассеянии света (Предварительное сообщение)	349

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

Редактор издательства *Г. А. Аристов*. Технический редактор *Н. П. Аузан*
Корректор *Л. К. Николаева*. Переплет и титул художника *И. А. Литвишко*

РИСО АН СССР № 3136, А-07272. Издат. № 1610. Тип. заказ — 1244. Подп. к печ. 10/IX 1948 г.
Формат бум. 70 X 108¹/₁₆. Печ. л. 22 + 6 вклеек. Уч.-изд. 20¹/₂. Тираж 2500. Цена в переплете 21 руб.

1-я Типография Изд-ва Академии Наук СССР, Ленинград, В. О., 9-я л. д. 12.