МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ И ВЕЧЕРНЕМУ ОБУЧЕНИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Ю. И. МАНИН

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть I
Аффинные схемы

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1970

1.
2.
3.

4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.

Содержание

Стр.

Предисловие..... 3

Литература..... 5

Уравнения и кольца..... 6

Геометрический язык: точки..... 12

Геометрический язык (продолжение). Функции на спектрах и топология..... 16

Основные свойства топологии Зариского..... 22

Аффинные схемы..... 32

Топологические свойства некоторых морфизмов..... 37

Замкнутые подсхемы и примарное разложение..... 44

Теорема Гильберта о нулях..... 53

Отступление: дзета-функция..... 57

Расслоенное произведение..... 65

Отступление: аффинные групповые схемы..... 71

Векторные расслоения и проективные модули..... 83

Нормальное расслоение и регулярные вложения..... 94

Дифференциалы.....101

Отступление: проблема Серра и теорема Сешадри.....108

Добавление. Язык категорий (общая часть).....113

Упражнения.....126

Предисловие

В 1966–1968 гг. автор прочел на механико-математическом факультете МГУ двухгодовой курс лекций по алгебраической геометрии. Материал первого года был размножен на ротапринте [2], материал второго года был опубликован в "Успехах математических наук" [6]. Оба эти издания сохранили отпечаток лекционного стиля, с его преимуществами и недостатками.

Предлагаемая сейчас читателю небольшая книжка является первой главой задуманного учебника по алгебраической геометрии. Она была написана на основе материала нескольких старших лекций [2], значительно расширенных и переработанных.

Специалисту может показаться странным, что в книжке, которая называется "Аффинные схемы", на самом деле ни разу не появляется определение схемы как пространства с пучком. В действительности наша цель – практически научить читателя геометрическому языку коммутативной алгебры. Необходимость излагать алгебраический материал отдельно и затем "применять" его к алгебраической геометрии постоянно обсуждали геометры: О. Зариский и П. Самюэль очень выразительно пишут об этом в предисловии к книге "Коммутативная алгебра".

Появление теории схем А. Гротендика открыло счастливую возможность вообще не проводить границу между "геометрией" и "алгеброй" – они выступают теперь как дополнительные аспекты единого целого, подобно пространствам и функциям в других геометрических теориях.

С этой точки зрения коммутативная алгебра совпадает с теорией локальных геометрических объектов – аффинных схем.

Расшифровка последней фразы и составляет содержание книжки. Я попытался последовательно объяснить, какого рода геометрические представления должны быть связаны, скажем, с примарным разложением, модулями или нильпотентами. По словам А.Вейля, пространственная интуиция "неоценима, если сознавать ее ограниченность". Я хотел учесть оба члена этой изящной формулировки.

Конечно, геометрический акцент оказал сильное влияние и на выбор материала; в частности, эта глава должна подготовить почву для введения глобальных объектов. Поэтому в параграфе о векторных расслоениях на "наивном" уровне изложены конструкции, принадлежащие по существу уже теории пучков.

Наконец, мне хотелось как можно раньше ввести категорные понятия, которые не так важны в локальных вопросах, но играют все бо́льшую роль в дальнейшем. Читателю рекомендуется заранее просмотреть дополнение "Язык категорий" и возвращаться к нему по мере необходимости.

Эти записки были предметом семинара на мехмате МГУ в 1969-1970 гг. Семинаром руководили В.Исковских и В.Данилов, которым я глубоко признателен за ряд замечаний. Задачи и упражнения, собранные в конце книжки, были составлены до семинара и имеют довольно случайный характер. Составление хорошего учебного сборника по алгебраической геометрии было бы самостоятельным предприятием.

Следующий небольшой список литературы не претендует на полноту. Он должен помочь читателю быстрее войти в рабочие аспекты теории, которые в этих записках отложены, быть может, слишком надолго.

Литература

Общие курсы

[1]. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. „Успехи математ. наук", т. 24, вып. 6 (1969), 3-184.

[2]. Манин Ю.И. Лекции по алгебраической геометрии. МГУ, 1968.

[3]. Mumford D. Introduction to algebraic geometry, preprint (есть в библиотеке мехмата МГУ).

[4]. Дьедонне Ж. Алгебраическая геометрия. Сб. переводов "Математика", 9 : 1 (1965), 54-126.

Более специальные вопросы

[5]. Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М., "Мир", 1968.

[6]. Манин Ю.И. Лекции о К-функторе в алгебраической геометрии. „Успехи математ. наук", т. 24, вып. 5 (1969), 3-86

[7]. Серр Ж.П. Локальная алгебра и теория кратностей. Сб. переводов "Математика", 7 : 5 (1963), 3-94.

[8]. Серр Ж.П. Алгебраические группы и поля классов. М., "Мир", 1968.

Автор

1*-1523

Уравнения и кольца

Изучение алгебраических уравнений – древнейшая математическая наука. В новые времена мода и удобство диктуют обращение к кольцам.

Рассмотрим систему уравнений X:

$$F_i(T_j)=0, \quad i\in I, \ j\in J.$$

Здесь I, J – некоторые множества индексов, T_j – независимые переменные, F_i – многочлены из кольца $K[T_j]_{j\in J}$. Кольцо K, в котором лежат коэффициенты, считается фиксированным, оно называется <u>основным кольцом</u> или <u>кольцом констант</u>. О системе X говорят, что она <u>определена над</u> K.

Таким образом, <u>система уравнений</u>, по определению, состоит из следующих объектов: 1) кольцо констант K; 2) "неизвестные" T_j; 3) многочлены F_i ("левые части").

Что следует называть <u>решением</u> системы X?

Одно определение напрашивается: решение есть набор элементов $(t_j)_{j\in J}$ кольца K такой, что $F_i(t_j)=0$ при всех $i\in I$. Однако это определение слишком ограничительно: нас могут интересовать решения, не принадлежащие K, например, комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами. Более общо, пусть L – некоторое кольцо. Чтобы рассматривать решения системы X в кольце L, мы должны уметь подставлять элементы из L в многочлены с коэффициентами из K, в частности, уметь умножать L на элементы из K. Класс таких колец L выделяется следующим определением.

1.1. Определение. K-<u>алгеброй</u> L <u>называется множество</u> L, <u>снабженное структурами</u> K-<u>модуля и кольца, которые связаны следующими аксиомами</u>:

а) <u>внешнее умножение</u> $K\times L\to L$ <u>дистрибутивно относительно сложения слева и справа</u>;

б) $k(l_1l_2)=(kl_1)l_2$ <u>для всех</u> $k\in K$, $l_1, l_2\in L$.

1.2. Лемма. Пусть L - некоторая K-алгебра, тогда отображение $K \to L : k \mapsto k1_L$ является гомоморфизмом колец.

Наоборот, пусть L - некоторое кольцо, $f: K \to L$ - гомоморфизм колец. Тогда умножение $K \times L \to L$, определенное формулой

$$(k, l) \mapsto f(k)l, \quad k \in K, \ l \in L,$$

определяет на L структуру K-алгебры.

Доказательство, сводящееся к автоматической проверке аксиом, мы оставляем читателю.

Гомоморфизмом K-алгебр $f: L_1 \to L_2$ называется отображение, которое одновременно является гомоморфизмом K-модулей и колец.

1.3. Пример. Любое кольцо L является $\mathbb{Z}$-алгеброй ($\mathbb{Z}$ всегда обозначает кольцо целых чисел). Эта структура определена однозначно гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to L$, при котором единица переходит в единицу.

Теперь мы можем определить, что такое решение системы X.

1.4. Определение. Решением системы X со значениями в K-алгебре L называется семейство элементов $(t_j)_{j \in J}$, $t_j \in L$ такое, что $F_i(t_j) = 0$ для всех i. Множество таких решений обозначается $X(L)$.

По предыдущему замечанию, для системы с целыми коэффициентами можно рассматривать ее решения в любом коммутативном кольце.

Пусть $f: L_1 \to L_2$ - гомоморфизм K-алгебр. Сопоставляя каждому решению (t_j) системы X со значениями в L_1 решение $(f(t_j))$ этой же системы со значениями в L_2, получаем отображение множеств $X(L_1) \to X(L_2)$.

Следующее элементарное рассуждение сведется в дальнейшем обе эти идеи.

1.5. Пример: "Малая теорема Ферма". Пусть p - простое число, $p \neq 2$, все классическое доказательство того, что p является суммой двух квадратов целых чисел: иначе было бы возможно сравнение $-1 \equiv x^2 \pmod{p}$, простейший пере-

бор доказывает, что это не так.

С нашей точки зрения это рассуждение означает следующее. Пусть $X: T_1^2+T_2^2=n$, $K=\mathbb{Z}$. Мы хотим доказать, что $X(\mathbb{Z})=\emptyset$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/(4)$ "редукции mod 4"; он определяет отображение множеств решений $X(\mathbb{Z})\to X(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Если бы $X(\mathbb{Z})$ было непусто, то и $X(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ было бы непусто, что не так.

Более общо, для любой системы уравнений X с целыми коэффициентами и любого целого числа m мы можем рассматривать множества $X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ и пытаться извлекать отсюда сведения о $X(\mathbb{Z})$. Вообще, если $X(L)=\emptyset$ для какого-угодно нетривиального $(1\neq 0)$ кольца L, то и $X(\mathbb{Z})=\emptyset$.

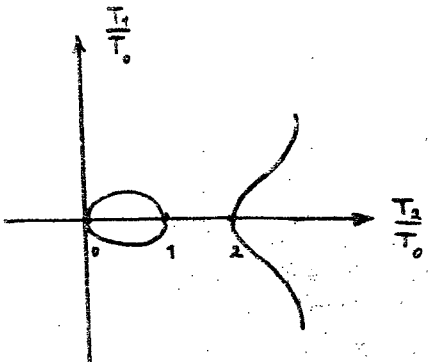
(Практически обычно проверяются конечные кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и поле вещественных чисел $\mathbb{R}$). Ряд самых глубоких результатов теории диофантовых уравнений связан с вопросом, когда верно обратное утверждение. Прототипом их является <u>теорема Лежандра</u>: пусть $X: a_1T_1^2+a_2T_2^2+a_3T_3^2=0$, $K=\mathbb{Z}$; если $X(\mathbb{Z})=\{(0,0,0)\}$, то хотя бы для одного из колец $L=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $(m\neq 0,1)$ или $L=\mathbb{R}$ имеем $X(L)=\{(0,0,0)\}$. (Боревич-Шафаревич. Теория чисел, гл. I, § 7).

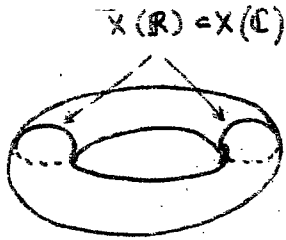
*1.6. <u>Пример</u>. Пусть $K=\mathbb{R}$, число неизвестных конечно и равно n. Тогда $X(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^n$ есть алгебраическое множество над $\mathbb{R}$, $X(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}^n$ – его "комплексификация". Из-за алгебраической замкнутости $\mathbb{C}$ изучение $X(\mathbb{C})$ часто оказывается более легким и в большинстве случаев составляет необходимый первый этап исследования, даже если мы в основном интересуемся чисто вещественными вопросами.

Яркий пример доставляет следующая <u>теорема Гарнака</u>. Пусть $F(T_0,T_1,T_2)$ – форма степени d с вещественными коэффициентами. Уравнение $F=0$ определяет на вещественной проективной плоскости кривую $X(\mathbb{R})$. Теорема Гарнака утверждает, что <u>число связных компонент этой кривой не превосходит</u> $\frac{(d-1)(d-2)}{2}+1$.

Метод доказательства ее основан именно на вложении $X(\mathbb{R})$ в $X(\mathbb{C})$, а не в проективную плоскость, где она банально

помещается с самого начала. Ограничимся для простоты случаем, когда кривая $X(\mathbb{C})$ "неособа", то есть





$F = T_0 T_1^2 - T_2(T_2 - T_0)(T_2 - 2T_0)$

тор $X(\mathbb{C})$

$X(\mathbb{R})$ на проективной плоскости

является компактным ориентируемым двумерным многообразием. Его род, то есть "число ручек" равен тогда $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ (на рисунке $d=3$, $X(\mathbb{C})$ – тор). Доказательство теоремы основано на двух утверждениях.

Прежде всего, автоморфизм комплексного сопряжения действует на $X(\mathbb{C})$ непрерывно, $X(\mathbb{R})$ является в точности множеством неподвижных точек этого автоморфизма. Кроме того, если "разрезать" $X(\mathbb{C})$ вдоль $X(\mathbb{R})$, $X(\mathbb{C})$ распадется в точности на два куска, как распадается сфера Римана, разрезанная вдоль вещественной оси (случай $d=1$). Отсюда оценка Гарнака получается уже несложными чисто топологическими соображениями: см., например, Н.Г.Чеботарев. Теория алгебраических функций (Москва, 1948), § 44. *

1.7. <u>Пример</u>. X: $0 \cdot T + 2 = 0$, $K = \mathbb{Z}$. Очевидно, $X(L) = \varnothing$, если $2 \cdot 1_L \neq 0$, и $X(L) = L$, если $2 \cdot 1_L = 0$. Пример нарочито искусственный, но подобные ему встречаются в "арифметической геометрии": дискриминанты и дифференты появляются именно так.

1.8. Определение. Две системы уравнений X, Y с одними и теми же неизвестными, заданные над кольцом K, называются эквивалентными, если $X(L) = Y(L)$ для любой K-алгебры L.

Среди систем уравнений, которые эквивалентны данной, мы можем рассмотреть "самую большую", которая однозначно определяется.

Именно, пусть P - идеал в кольце многочленов $K[T_j]$, порожденный левыми частями системы уравнений X: $\{F_i(T_j)\}$. Легко понять, что система уравнений, полученная приравниванием к нулю всех элементов идеала P, эквивалентна данной системе уравнений $F_i(T_j) = 0$. В то же время построенная система максимальна в том смысле, что если к ней добавить еще одно уравнение $F = 0$, в ней не содержащееся, то получится новая, неэквивалентная данной, система. Чтобы в этом убедиться, достаточно в качестве K-алгебры L взять фактор-кольцо $K[T_j]/P$, где T_j' - независимые переменные. В этом кольце L решением исходной системы будет $t_j = T_j' \bmod P$, в то время как $F(t_j) \neq 0$, потому что $F \notin P$.

1.9. Предложение. $X(L) = Hom_K(A, L)$, где $A = K[T_j]/P$, Hom_K - множество гомоморфизмов K-алгебр.

Доказательство. Пусть $(t_j) \in X(L)$. Существует гомоморфизм K-алгебр $K[T_j] \to L$, который на K совпадает со структурным гомоморфизмом $K \to L$ (см. 1.2), а T_j переводит в t_j. По определению $X(L)$, P принадлежит ядру этого гомоморфизма, так что его можно провести через гомоморфизм $A = K[T_j]/P \to L$.

Наоборот, пусть дан гомоморфизм K-алгебр $A \to L$. Он однозначно определяет сквозной гомоморфизм $K[T_j] \to A \to L$. Пусть t_j - образ T_j при этом гомоморфизме, тогда $(t_j) \in X(L)$ потому что все элементы P переходят в нуль.

Легко проверить, что построенные отображения $X(L) \rightleftarrows Hom_K(A, L)$ взаимно обратны, что доказывает предложение.

Система X над кольцом K называется совместной, если $X(L) \neq \emptyset$ для некоторой ненулевой K-алгебры L и несов-

ленной в противном случае. Предложение 1.3 показывает, что система X несовместна лишь в случае, когда ее алгебра нулевая, иными словами, $1 \in P$.

Резюмируем основной результат обсуждения. Мы установили эквивалентность двух языков: систем уравнений (который используется во всех конкретных вычислениях) и теории колец. Точнее говоря, следующие понятия соответствуют друг другу:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Система уравнений } X \text{ над}\\ \text{кольцом } K \text{ с неизвестными}\\ t_j,\ j \in J\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}K\text{-алгебра } A \text{ с выде-}\\ \text{ленной системой образую-}\\ \text{щих } t_j,\ j \in J\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Решение системы } X \text{ в } K\text{-}\\ \text{алгебра } L\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{гомоморфизм } K\text{-алгебр}\\ A \to L\end{array}\right\}$$

Заметим, наконец, что при использовании языка колец нет никакой необходимости рассматривать фиксированную систему образующих (t_j). Опуская ее, мы отождествляем системы уравнений, получающиеся друг из друга взаимно обратимой заменой множества неизвестных. Каждый элемент кольца A играет роль одной из "неизвестных"; значение, которое эта неизвестная принимает в данном решении системы, совпадает с ее образом в L при соответствующем гомоморфизме.

2. Геометрический язык: точки

Пусть по-прежнему K -основное кольцо, X - некоторая система уравнений над K с неизвестными $T_1, \dots, T_n$.

Для любой K-алгебры L мы представляем себе множество $X(L)$ как некоторый "график" в L^n - координатном пространстве над кольцом L. Точки этого графика суть решения системы X. Учитывая результат предыдущего параграфа, мы можем ввести следующее определение.

2.1. Определение. 1. <u>Точками K-алгебры A со значениями в K-алгебре L (или просто L-точками A) называются K-гомоморфизмы $A \to L$.</u>

2. <u>L-точка A называется геометрической, если L - поле.</u>

<u>Пример.</u> Пусть K - поле, V - некоторое конечномерное линейное пространство над ним.

Покажем, что существует K-алгебра, K-точки которой находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами пространства V.

Обозначим через V^* пространство линейных функционалов на V со значениями в K. Построим симметрическую алгебру $S(V^*)$ пространства V^* над K (см. Ленг. Алгебра, гл. XVI, § 7). Так как $S^1(V^*) = V^*$ составляет систему образующих алгебры $S(V^*)$, любой K-гомоморфизм $S(V^*) \to K$ определяет линейный функционал на V^*, который можно канонически отождествить с точкой из V. Наоборот, любой функционал на V^* однозначно продолжается до гомоморфизма $S(V^*) \to K$ в силу предложения 13 в главе XVI книги Ленга, согласно которому $S(V^*)$ есть кольцо многочленов от элементов любого базиса пространства K. Это доказывает требуемое.

Вернемся к определению 2.1.

Если мы хотим отделить свойства самого кольца A от свойств переменной алгебры L, разумно рассматривать вместо гомоморфизмов их ядра. Ядро гомоморфизма $A \to L$, соответствующего <u>геометрической</u> точке, является, очевидно, простым идеалом. По многим причинам следует ограничиться ими, вводя

основной геометрический объект, связанный с кольцом A.

2.2. Определение. Множество всех простых идеалов кольца A (отличных от A) называется спектром A и обозначается $\operatorname{Spec} A$. Элементы $\operatorname{Spec} A$ называются его точками.

В дальнейшем мы обогатим множество $\operatorname{Spec} A$ дополнительными структурами, превратив его в топологическое пространство и построив на нем пучок колец: это приведет к определению аффинной схемы. Схемы, то есть топологические пространства с пучком, локально изоморфные аффинным схемам, являются основными объектами алгебраической геометрии.

Приступая к изучению спектров, мы прежде всего должны убедиться в их нетривиальности.

2.3. Теорема. $\operatorname{Spec} A \neq \emptyset$, если $A \neq \{0\}$.

Для доказательства этого и ряда других фактов нам понадобится

лемма Цорна: всякое частично упорядоченное множество M, в котором каждое линейно упорядоченное подмножество $N \subset M$ имеет верхнюю грань в M, обладает максимальным элементом.

Доказательство см., например, в книге Данфорда и Шварца "Линейные операторы. Общая теория", стр. 17.

Упорядоченные множества, удовлетворяющие условию леммы Цорна, называются индуктивными.

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим через M множество всех идеалов кольца A, отличных от A; оно содержит (0) и потому непусто. Множество M частично упорядочено по включению. Возьмем в M произвольное линейно упорядоченное множество $\{P_\alpha\}$, где P_α – идеалы A. Тогда $\bigcup_\alpha P_\alpha$ – тоже идеал A (учесть линейную упорядоченность), отличный от A (единица, разумеется, не принадлежит $\bigcup_\alpha P_\alpha$). Отсюда следует индуктивность множества M. Обозначим через P его максимальный элемент. P – максимальный идеал, а потому и простой: в фактор-кольце A/P всякий ненулевой идеал, в том числе все главные, совпадают с A/P. Значит, каждый ненулевой элемент из A/P обратим, так что A/P является полем. Теорема доказана. По пути мы получили

Следствие. <u>Каждый простой идеал кольца содержится в некотором максимальном идеале.</u>

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что всякое ненулевое кольцо A имеет геометрические точки (например, гомоморфизм $A \to A/p$, где $p \in A$ – максимальный идеал).

Назовем <u>центром</u> геометрической точки $A \to L$ ее ядро как элемент $\operatorname{Spec} A$. Из определений легко следует

2.4. Предложение. <u>Геометрические L-точки K-алгебры A с центром $x \in \operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с K-гомоморфизмами $k(x) \to L$, где $k(x)$ – поле частных кольца A/p_x, $p_x \subset A$ – идеал, соответствующий x.</u>

Доказательство. В самом деле, гомоморфизм $A \to L$ разлагается в последовательность $A \to A/p_x \to k(x) \to L$ (ибо L – поле). Первые две строки этой последовательности определены раз навсегда.

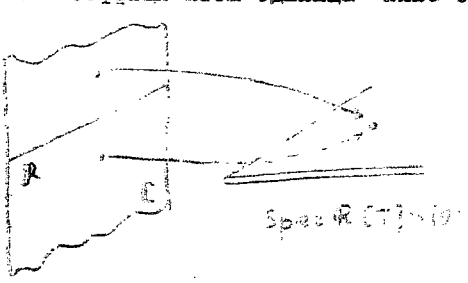
2.5. Пример. Пусть K – совершенное поле, L – алгебраически замкнутое поле, содержащее K; A – K-алгебра, $x \in \operatorname{Spec} A$, $p_x \subset A$ – соответствующий идеал.

Если $\deg x = [k(p_x):K] < \infty$, то в силу теории Галуа имеется ровно $\deg x$ геометрических L-точек с центром в x.

Если же $k(p_x)$ неалгебраично над K, а в L достаточно много трансцендентностей над K, то геометрических L-точек с центром в p может быть бесконечно много.

Вот совсем частный случай.

Рассмотрим $\mathbb{R}$-алгебру $\mathbb{R}[T]$. Множество ее геометрических $\mathbb{C}$-точек есть комплексная плоскость $\mathbb{C}$. $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[T]$ – это множество всех неприводимых многочленов над $\mathbb{R}$ со старшим коэффициентом единица плюс еще нулевой идеал. Каждый такой многочлен степени 2 имеет два комплексно-сопряженных корня, соответствующих двум разным геометрическим точкам.



Вообще для любого совершенного поля K геометрических точки

K -алгебры $K[T]$ со значениями в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ - это просто элементы $\bar{K}$, а их центры - это неприводимые многочлены над K, то есть наборы, состоящие из всех элементов $\bar{K}$, сопряженных над K одному из них.

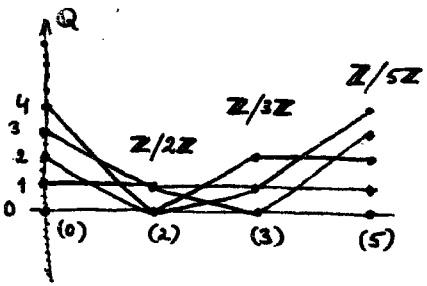
2.6. Замечание. Рассматривая $\operatorname{Spec} A$, мы можем забыть при желании о том, что A - K-алгебра; любой идеал кольца A выдерживает умножение на элементы из K. Когда же мы интересуемся геометрическими точками (или, более общо, любыми L -точками), указание K существенно, ибо приходится рассматривать K-гомоморфизмы $A \to L$. Любые гомоморфизмы являются, очевидно, $\mathbb{Z}$ -гомоморфизмами, так что этот "абсолютный случай" можно рассматривать как специализацию "относительного" (над K).

Для систем уравнений переход к абсолютному случаю означает, что мы забываем о различии между "неизвестными" и "коэффициентами" и можем придавать переменные значения и тем и другим.

3. Геометрический язык (продолжение). Функции на спектрах и топология

Пусть X – система уравнений над K от неизвестных T_i. Каждое решение X – элемент из $X(L)$ – определяет "значения" $T_i : t_i \in L$. Таким образом, T_i естественно рассматривать как функцию на $X(L)$ со значениями в L. Эта функция, конечно, зависит лишь от класса T_i по модулю идеала, порожденного левыми частями уравнений (см. п. I). Этот класс является элементом K-алгебры A, связанной с системой X; вообще все элементы A являются функциями на $X(L) = Hom_K(A, L)$: для всякого $\varphi : A \to L$ и $f \in A$ "значение f в φ", по определению, равно $\varphi(f)$. (Классическое обозначение функций не очень хорошо приспособлено к передаче фундаментальной двойственности "пространство – функции на пространстве").

В применении к $Spec\, A$ это приводит к рассмотрению любого элемента $f \in A$ как функции на $Spec\, A$. Пусть $x \in Spec\, A$ и пусть $p_x \subset A$ – соответствующий идеал. Тогда $f(x) = f \bmod p_x$, по определению; мы считаем, что $f(x)$ принадлежит <u>полю частных</u> $k(x)$ кольца A/p_x. <u>В дальнейшем, говоря о функциях на</u> $Spec\, A$, <u>мы обычно подразумеваем элементы из</u> A.



Таким образом, <u>всякой точке</u> $x \in Spec\, A$ <u>приписано свое поле</u> $k(x)$, <u>и этим полям принадлежат значения функций на</u> $Spec\, A$. Я попытался нарисовать график первых четырех целых чисел, рассматриваемых как функции на $Spec\, \mathbb{Z}$. Он не очень убедителен; нужно добавить, что по разным причинам прямую над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – вертикальную ось над точкой (p) – следовало бы рисовать "свернутой в кольцо", то есть в виде вершин правильного p-угольника, что нисколько не облегчило бы задачу художника.

Разным элементам кольца A могут соответствовать одинаковые функции на спектре; их разность тогда представляет нулевую функцию, то есть принадлежит $\bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} p_x$. Все нильпотенты заведомо содержатся в этом пересечении; докажем обратное.

3.1. Теорема. Функция, обращающаяся в нуль во всех точках спектра, представляется нильпотентным элементом кольца. Иначе говоря, $\bigcap_{p \in A} p$ – нильрадикал, то есть идеал всех нильпотентных элементов.

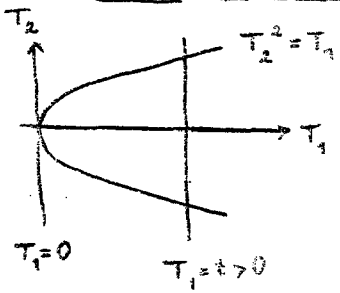
Доказательство. Достаточно установить, что для каждого не нильпотентного элемента существует простой идеал, который его не содержит.

Пусть $h \in A$ и $h^n \neq 0$ при любом натуральном n. Пусть M – множество всех идеалов кольца A, не содержащих h^m при $\forall m$; M непусто: в нем есть нулевой идеал. Индуктивность M доказывается так же, как в теореме 2.3. Пусть p – максимальный элемент M. Докажем, что он прост.

Пусть $f, g \in A$ и $f, g \notin p$. Докажем, что $fg \notin p$. В самом деле, $p+(f) \supset p$ и $p+(g) \supset p$. Так как p максимален в M, при некоторых m и n имеем $p+(f) \ni h^n$ и $p+(g) \ni h^m$. Тогда $h^{m+n} \in p+(fg)$, но $h^{m+n} \notin p$. Поэтому и $fg \notin p$. Тем самым, p –простой идеал, и теорема доказана.

Этот результат может создать впечатление, что нильпотентам нет места в геометрической картине. Это неверно: нильпотенты доставляют адекватный способ описания дифференциально-геометрических ситуаций типа "касание", "кратность пересечения", "бесконечно малая деформация", "слой отображения" в точках, где нарушается регулярность.

3.2. Пример. (Кратные точки пересечения). Рассмотрим в аффинной плоскости над $\mathbb{R}$ параболу $T_1 - T_2^2 = 0$ и прямую $T_1 - t = 0$, $t \in \mathbb{R}$ – параметр. Их пересечение задается системой уравнений



2-1528

$$\begin{cases} T_1 - T_2^2 = 0 \\ T_1 - t = 0 \end{cases},$$

которой соответствует кольцо

$$A_t = \mathbb{R}[T_1, T_2] / (T_1 - T_2^2, T_1 - t)$$

(см. п.1). Легкое вычисление показывает, что

$$A_t = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & t > 0 \\ \mathbb{R}[T]/(T^2), & t = 0 \\ \mathbb{C}, & t < 0. \end{cases}$$

<u>Геометрические</u> $\mathbb{R}$ -точки кольца A_t : при $t > 0$ их две, при $t = 0$ – одна, при $t < 0$ их нет. <u>Геометрические</u> $\mathbb{C}$ -точки: их всегда две, кроме случая $t = 0$: "касание". Желая сохранить утверждение, что $\mathbb{C}$ -точек пересечения всегда две, если приписать им надлежащие кратности, мы должны считать, что при $t = 0$ точка пересечения имеет кратность 2. (Отметим, что $\dim_{\mathbb{R}} A_t = 2$ независимо от t . Равенство $\dim_{\mathbb{R}} A_t$ "числу" точек пересечения неслучайно; мы сможем доказать теорему об этом, когда введем проективное пространство что позволит учитывать и точки, ускользнувшие на бесконечность). Совпадение точек пересечения, соответствующее касанию, приводит к возникновению нильпотентов в кольце A_0 .

3.3. <u>Пример</u>. ("<u>Одноточечные спектры</u>"). Пусть $\operatorname{Spec} A$ состоит из одной точки, отвечающей идеалу $p \subset A$. Тогда A/p поле, а p состоит из нильпотентов. Если кольцо A к тому же <u>нетерово</u>, стандартное рассуждение показывает, что p – нильпотентный идеал. Действительно, пусть $f_1, \dots, f_n$ его образующие и пусть $f_i^m = 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда для любых $a_{ij} \in A$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, mn$ имеем

$$\prod_{j=1}^{mn} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) = 0,$$

потому что в каждом одночлене произведения по крайней мере один из элементов f_i входит в степени $\geq m$. Следовательно,

$p^{m+1}=0$. Факторы ряда $A \supset p \supset p^2 \supset \dots \supset p^{m+1}=0$) являются конечномерными линейными пространствами над полем A/p. Поэтому A как модуль над собой имеет конечную длину (см. Ленг. Алгебра, глава IУ, § 4).

В вопросах теории пересечений длина локального кольца A играет роль кратности единственной точки $\operatorname{Spec} A$, как мы видели в предыдущем примере. Кратность точки равна единице, если и только если кольцо A является полем.

3.4. Пример. (Дифференциальные окрестности). Пусть $x \in \operatorname{Spec} A$ – некоторая точка, $p_x \subset A$ – соответствующий идеал. Мы определили значение $f \in A$ в точке x – это элемент кольца A/p_x (или его поля частных). В дифференциальной геометрии часто рассматривают "m-ю дифференциальную окрестность точки x", то есть учитывают, кроме значений функций, значения ее производных до m-й включительно. Это равносильно рассмотрению ее разложения Тэйлора, в котором "бесконечно малыми" порядка выше m пренебрегают.

Алгебраически это означает, что мы рассматриваем класс $f \bmod p_x^{m+1}$. Элементы из p_x являются бесконечно малыми "не ниже первого порядка"; в кольце A/p_x^{m+1} они как раз превращаются в нильпотенты.

(Позже будет ясно, что $\operatorname{Spec} A/p_x^{m+1}$ естественно считать дифференциальной окрестностью точки x лишь когда идеал p_x максимален; в общем случае интуитивная интерпретация сложнее).

3.5. Пример. (Редукция по модулю p^n). Рассматривая диофантовы уравнения, то есть фактор-кольца колец $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ часто пользуются редукцией по модулю степеней простого числа (ср. п. 1.5). Это немедленно приводит к нильпотентам; мы видим, что с алгебраической точки зрения этот процесс ничем не отличается от рассмотрения дифференциальных окрестностей предыдущем примере.

(Сравнение $3^5 \equiv 7 \bmod 5^3$ означает, что "функции 3^5 и 7 в точке (5) совпадают до второй производной включительно". Этот язык не кажется особенно экстравагантным в теории

чисел после введения p -адических чисел Гензелем).

Превратим теперь $\operatorname{Spec} A$ в топологическое пространство. Минимальное естественное условие согласованности топологии с имеющимся набором функций состоит в том, чтобы множество нулей любой функции было замкнутым.

3.6. Определение - лемма. Для любого семейства элементов $E \subset A$ обозначим через $V(E) \subset \operatorname{Spec} A$ множество всех точек $x \in \operatorname{Spec} A$, для которых $f(x) = 0$ при всех $f \in E$.

Множества $V(E)$ составляют систему всех замкнутых множеств в некоторой топологии $\operatorname{Spec} A$, которая называется топологией Зариского или спектральной топологией.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\{V(E)\}$ допустимо относительно конечных объединений и произвольных пересечений, потому что $\varnothing = V(1)$, $\operatorname{Spec} A = V(0)$.

Обозначим $E_1 E_2 = \{fg \mid f \in E_1,\ g \in E_2\}$. Предоставляем читателю проверить, что

$$V(E_1) \cup V(E_2) = V(E_1 E_2),$$

$$\bigcap_i V(E_i) = V\Big(\bigcup_i E_i\Big), \quad i \in I.$$

Этим все доказано.

Пользуясь теоремой 3.1, мы можем описать множество функций, обращающихся в нуль на $V(E)$. Очевидно, к нему принадлежат все элементы идеала (E), порожденного E, а также все элементы $f \in A$ такие, что $f^n \in (E)$ для некоторого n. Это и всё.

3.7. Теорема. Пусть $\tau(E) = \{f \in A \mid \exists\, n \geq 0,\ f^n \in (E)\}$. Если $f(x) = 0$ для всех $x \in V(E)$, то $f \in \tau(E)$.

Доказательство. $f(x) = 0$ для всех $x \in V(E)$ означает, что $f \in \bigcap_{p_x \supset E} p_x$, то есть, что $f \bmod (E) \in A/(E)$ принадлежит пересечению всех простых идеалов кольца $A/(E)$. Поэтому $f^n \bmod (E) = 0$ для некоторого n, по теореме 4.4, что доказывает требуемое.

Идеал $r(a)$ называется радикалом идеала a, а идеалы, совпадающие со своим радикалом, называются радикальными. Из теоремы 3.I вытекает

3.8. Следствие. Отображение $a \rightsquigarrow V(a)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между радикальными идеалами кольца A и замкнутыми подмножествами его спектра.

4. Основные свойства топологии Зариского

Пространства $\operatorname{Spec} A$ имеют очень неклассическую топологию: они, как правило, неотделимы. Изучение разных аспектов неотделимости приводит к выделению топологических понятий, характерных для алгебраической геометрии. Начнем с обсуждения двух типичных явлений.

4.1. Незамкнутые точки.

Пусть $x \in \operatorname{Spec} A$ – любая точка; как устроено ее замыкание? Имеем

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{E \subset p_x} V(E) = V\Big(\bigcup_{E \subset p_x} E\Big) = V(p_x) = \{y \in \operatorname{Spec} A \mid p_y \supseteq p_x\}.$$

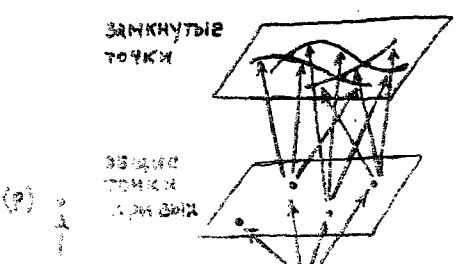
Иначе говоря, пространство $\overline{\{x\}}$ изоморфно $\operatorname{Spec} A/p_x$, и только точки, соответствующие максимальным идеалам, замкнуты.

Специфическое отношение между точками: $y \in \overline{\{x\}}$ иногда выражают, говоря, что y есть специализация точки x: оно равносильно включению $p_x \subseteq p_y$.

Если кольцо A не имеет делителей нуля, то $\{0\} \in \operatorname{Spec} A$ – точка, замыкание которой совпадает со всем спектром.

Таким образом, точки спектра A лежат как бы на разных уровнях.

Выше всех находятся замкнутые точки; на следующем уровне – точки, специализации которых замкнуты, ..., на i-м уровне – точки, специализации которых принадлежат уровням с номерами $\leq (i-1)$. Вершина этой перевернутой пирамиды – "общая точка" (0), если A не имеет делителей нуля, или конечное число точек, если A – любое нетерово кольцо (доказательство см. в п. 4.9).



На чертеже изображены спектр кольца целых p - адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и спектр $\mathbb{C}[T_1, T_2]$. Стрелки указывают отношение специализации. Рисунок $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ не нуждается в комментариях, стоит лишь отметить, что $\operatorname{Spec} A$ может быть конечным, но не дискретным пространством. Второй рисунок основан на следующем утверждении

Предложение. Пусть K - алгебраически замкнутое поле. Следующий список исчерпывает простые идеалы кольца $K[T_1, T_2]$:

а. Максимальные идеалы $(T_1 - t_1, T_2 - t_2)$; $t_1, t_2 \in K$ - любые элементы.

б. Главные идеалы $(F(T_1, T_2))$, где F пробегает все неприводимые многочлены.

в. (0)

Доказательство будет дано ниже.

Наглядные представления, связанные с этой картинкой, можно положить в основу рабочей теории размерности в алгебраической геометрии. Это будет сделано позже; пока мы ограничимся предварительным определением и двумя простыми примерами.

Последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ топологического пространства X называется цепочкой длины n с началом x_0 и концом x_n, если $x_i \neq x_{i+1}$ и x_{i+1} является специализацией x_i для всех $0 \leq i \leq n$.

Высотой точки $x \in X$ называется верхняя грань длин цепочек с началом x.

Размерностью $\dim X$ пространства X называется верхняя грань высот его точек.

Пример. В пространстве $X = \operatorname{Spec} K[T_1, \ldots, T_n]$ (K - поле) имеется цепочка длины n, состоящая из цепочек простых идеалов $(0) \subset (T_1) \subset \ldots \subset (T_1, \ldots, T_n)$. Поэтому $\dim X \geq n$. Аналогично, $\dim \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \geq n+1$: есть цепочка $(0) \subset (p) \subset (p, T_1) \subset (p, T_1, T_2) \subset \ldots$. На самом деле, как мы увидим позже, в обоих случаях имеет место точное равенство.

Истоки этого определения размерности можно проследить у Евклида: (замкнутые) точки ограничивают линии, линии ограничивают поверхности и т.д.

4.2. Большие открытые множества.

Для всякого элемента $f \in A$ положим $D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V(f) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Множества $D(f)$ называются специальными открытыми множествами; они составляют базис топологии $\operatorname{Spec} A$, потому что для любого $E \subseteq A$

$$\operatorname{Spec} A \setminus V(E) = \bigcup_{f \in E} D(f)$$

Рассмотрим, например, $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]$. Его замкнутые точки соответствуют идеалам $T - t$, $t \in \mathbb{C}$, и составляют, тем самым, "комплексную плоскость"; непустые открытые множества состоят из (0) и всех точек комплексной плоскости, кроме конечного числа. Замыкание любого открытого множества совпадает со всем пространством!

Более общо, если A без делителей нуля, $f \neq 0$, то множество $D(f)$ всюду плотно в $\operatorname{Spec} A$. Действительно, $D(f)$ содержит (0), так что $\overline{D(f)} = \overline{(0)} = \operatorname{Spec} A$. Тем самым, все непустые открытые множества спектра кольца без делителей нуля всюду плотны. Анализируя этот тип неотделимости, мы выделим важный класс топологических пространств.

4.3. Определение – лемма. Топологическое пространство X называется неприводимым, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

а. Любое непустое открытое множество в X всюду плотно.

б. Любые два непустые открытые множества в X имеют непустое пересечение.

в. Если $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 – замкнуты, то либо $X_1 = X$, либо $X_2 = X$.

Доказательство эквивалентности: а) и б), очевидно, эквивалентны. Если в) неверно, то есть представление $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 – собственные замкнутые подмножества X; тогда $X \setminus X_1 = X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$ – непустое открытое множество, так что а) не выполняется. Наоборот, если а) не выполняется и $U \subseteq X$ – неплотное открытое множество, то

$$X = \overline{U} \cup (X \setminus U)$$

Заметим, что хаусдорфово пространство, имеющее больше од-

...ки, не может быть неприводимым. Пусть теперь A – любое кольцо, N – его нильрадикал. Следующая теорема устанавливает, когда $\operatorname{Spec} A$ неприводим.

4.4. Теорема. $\operatorname{Spec} A$ неприводим, если и только если N – простой идеал.

Доказательство. Пусть N – прост, x – соответствующая ему точка в $\operatorname{Spec} A$. Так как N содержится в любом простом идеале, $\operatorname{Spec} A$ гомеоморфен $\operatorname{Spec} A/N$, а A/N не имеет делителей нуля.

Наоборот, пусть N не прост. Достаточно проверить, что ...A неприводим, то есть можно ограничиться случаем, когда A не содержит нильпотентов, но содержит делители нуля.

Пусть $f, g \in A$, $fg = 0$, $f \neq 0$, $g \neq 0$.

Очевидно, $\operatorname{Spec} A = V(f) \cup V(g) = V(fg)$. Стало быть, f и g обращаются в нуль на замкнутых подмножествах всего спектра, вместе покрывающих пространство (это – естественный способ появления делителей нуля в кольцах функций).

Нужно лишь убедиться, что $V(f), V(g) \neq \operatorname{Spec} A$, но это очевидно, ибо f, g не нильпотенты.

4.5. Следствие. Пусть $a \in A$ – некоторый идеал; замкнутое множество $V(a)$ неприводимо, если и только если $r(a)$ прост.

Мы получаем, следовательно, взаимно однозначное соответствие: точки спектра $A \Longleftrightarrow$ – неприводимые замкнутые подмножества спектра A. Каждой точке $x \in \operatorname{Spec} A$ соответствует замкнутое множество $\overline{\{x\}}$; x называется общей точкой этого замкнутого множества; у каждого неприводимого замкнутого подмножества есть единственная общая точка.

Разложение на неприводимые компоненты.

4.6. Теорема. Пусть A – нетерово кольцо. Тогда пространство $\operatorname{Spec} A$ однозначно представляется в виде конечного объединения $\bigcup X_i$, где X_i – минимальные замкнутые неприводимые подмножества; они называются неприводимыми компонентами $\operatorname{Spec} A$.

В доказательстве используется лишь геометрическое следствие обрыва возрастающих цепочек идеалов в кольце A : каждая убывающая цепочка замкнутых подмножеств в $\operatorname{Spec} A$ стабилизируется. Так как нам встречаются пространства с таким свойством, не гомеоморфные спектрам, введем

Определение. Топологическое пространство X называется нетеровым, если любая убывающая цепочка замкнутых множеств в нем стабилизируется.

4.7 Теорема. Пусть X - нетерово топологическое пространство. Тогда X является конечным объединением своих максимальных замкнутых неприводимых подмножеств; они называются неприводимыми компонентами пространства X.

Доказательство. Рассмотрим множество неприводимых замкнутых подмножеств в X, упорядоченное по включению. Покажем, что это индуктивно: если (X_α) - линейно упорядоченное семейство неприводимых замкнутых подмножеств в X, то в качестве верхней грани для него можно взять $\overline{(\bigcup X_\alpha)}$. Неприводимость его вытекает, например, из того, что если $U_1, U_2 \subset \bigcup X_\alpha$ - непустые открытые множества, то для некоторого α $U_1 \cap X_\alpha$ и $U_2 \cap X_\alpha$ непусты, и потому непусто пересечение $U_1 \cap U_2$, так как X_α неприводимы.

Отсюда следует, что X является объединением всех своих максимальных замкнутых неприводимых подмножеств: $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

До сих пор мы не пользовались нетеровостью.

Пусть теперь пространство X нетерово и пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 замкнуты. Если X_1 или X_2 приводимы, мы можем снова представить их в виде объединения двух замкнутых множеств и т.д.; этот процесс закончится - иначе мы получили бы бесконечную убывающую цепочку замкнутых множеств (принцип нетеровой индукции). В получившемся конечном объединении возьмем минимальные элементы: $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Это разложение совпадает с предыдущим: если Y - любое (абсолютно) минимальное замкнутое подмножество в X, то $Y = \bigcup_{i \in I} X_i \Rightarrow Y = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap Y)$, откуда $X_i \cap Y = Y$ для какого-то $i \Rightarrow Y = X_i$.

Если $I' \subset I$ – некоторое собственное подмножество индексов, то $\bigcup_{i \in I'} X_i$, уже не совпадает с X: пусть X_j – выброшенная компонента, то есть $j \notin I'$; если бы $X_j \subset \bigcup_{i \in I'} X_i$, то $X_j = \bigcup_{i \in I'} (X_i \cap X_j)$ и в силу неприводимости X_j мы имели бы $X_i \cap X_j = X_j$ для какого-то $i \in I'$: противоречие.

4.8. Следствие. Пусть A – нетерово кольцо; тогда число минимальных простых идеалов в A конечно.

Действительно, минимальные простые идеалы в $\operatorname{Spec} A$ дают общие точки максимальных замкнутых подмножеств, то есть неприводимых компонент $\operatorname{Spec} A$.

4.9. Следствие. Пусть A – нетерово кольцо. Если все точки $\operatorname{Spec} A$ замкнуты, то пространство $\operatorname{Spec} A$ конечно и дискретно. Кольца с этим условием называются артиновыми. Спектры артиновых колец наиболее близки к конечным множествам обычной топологии. Как отмечено в п. 3.3 и ниже в п. 4.13, каждая точка такого спектра дополнительно снабжена кратностью.

Следующая теорема дает полезную геометрическую интерпретацию делителей нуля в кольце; она будет уточнена в п. 7.14.

4.10. Теорема. Элемент $f \in A$, обращающийся как функция в нуль на одной из неприводимых компонент $\operatorname{Spec} A$, является делителем нуля в A.

Наоборот, если $f \bmod N$ является делителем нуля в A/N, где N – нильрадикал кольца A, то f обращается в нуль на одной из неприводимых компонент $\operatorname{Spec} A$.

Замечание. Из второго утверждения теоремы нельзя исключить упоминание о нильпотентах: если f является делителем нуля лишь в A, а не в A/N, то f может не обращаться в нуль на неприводимой компоненте. Вот пример: пусть $A = B \oplus \mathfrak{a}$ как группа, где B – подкольцо без делителей нуля, $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал с нулевым умножением. Пусть $\mathfrak{a}$ как B-модуль изоморфен $B/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \subset B$ – ненулевой простой идеал. Тогда элементы из $\mathfrak{p}$ являются делителями нуля в A.

они аннулируются умножением на a. С другой стороны, очевидно, $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} B$ неприводим, и ненулевые элементы из p не могут обращаться в нуль на всем $\operatorname{Spec} A$

Доказательство теоремы. Пусть $\operatorname{Spec} A = X \cup Y$, где X – неприводимая компонента, на которой обращается в нуль $f \in A$, Y – объединение остальных неприводимых компонент. Так как Y замкнуто и $X \not\subset Y$, существует такой элемент $g \in A$, который обращается в нуль на Y, но не равен тождественно нулю при ограничении на X. Тогда fg обращается в нуль во всех точках $\operatorname{Spec} A$, так что $(fg)^n = 0$ для некоторого n. Следовательно, $f(f^{n-1}g^n) = 0$. Это еще не доказывает, что f является делителем нуля, ведь возможно, что $f^{n-1}g^n = 0$, но тогда мы снова можем отщепить f и продолжать до тех пор, пока не получим $f^m g^n = 0$, $f^{m-1}g^n \neq 0$. Этим всегда кончится, ибо $g^n \neq 0$ – иначе g обращался бы в нуль и на X.

Пусть теперь $\bar{f} = f \bmod N$ делитель нуля в A/N: $\bar{f}\bar{g} = 0$. Тогда $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A/N = V(f) \cup V(g)$. Разлагая $V(f)$ и $V(g)$ на неприводимые компоненты, мы получим, что по крайней мере одна из неприводимых компонент $V(f)$ является таковой и для $\operatorname{Spec} A$. Иначе все неприводимые компоненты $\operatorname{Spec} A$ содержались бы в $V(g)$, а это противоречит тому, что $\bar{g} \neq 0$, то есть $g \notin N$. Значит, f обращается в нуль на одной из неприводимых компонент $\operatorname{Spec} A$, что и доказывает теорему.

Пример. Пусть A – кольцо с однозначным разложением, $f \in A$. Пространство $\operatorname{Spec} A/(f) \simeq V(f)$ неприводимо тогда и только тогда, когда $f = \varepsilon p^n$, где p – неразложимый элемент. (Это непосредственно следует из теоремы 4.4. В частности, пусть $A = K[T_1, \ldots, T_n]$, K – поле. $V(f)$ соответствует гиперповерхности (в аффинном пространстве), которая задана одним уравнением $f = 0$. Мы получаем естественный критерий неприводимости такой гиперповерхности.

Пример. Пусть K – поле, $\operatorname{char} K \neq 2$, $f \in K[T_1, \ldots, T_n]$ – квадратичная форма. Уравнение $f = 0$ определяет приводимое множество, если и только если $\operatorname{ранг} f = 2$. Действительно, приводимость равносильна тому, что $f = l_1 l_2$, где l_1, l_2 –

непропорциональные линейные формы.

Связность.

Общетопологическое определение связности вполне годится для наших нужд (Бурбаки. Общая топология, гл. I, § II).

4.II. Определение. Пространство X называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых подмножеств.

Неприводимое пространство, очевидно, связно.

Всякое пространство X однозначно разлагается в объединение своих максимальных связных подпространств, которые попарно не пересекаются (Бурбаки, loc. cit.) и называются связными компонентами.

Каждая неприводимая компонента пространства целиком принадлежит одной его связной компоненте. Из теоремы 4.7 следует, в частности, что у нетерова пространства число связных компонент конечно.

Пространство $\operatorname{Spec} A$ может не быть связным. В обычной топологической ситуации кольцо непрерывных функций на несвязном объединении $X_1 \cup X_2$ естественно распадается в прямое произведение колец функций на X_1 и X_2 в отдельности.

То же самое происходит со спектрами.

Опишем сначала разложение $\operatorname{Spec} A$, отвечающее разложению кольца A.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – некоторые кольца, их произведение $\prod_{i=1}^{n} A_i = A$ снабжено структурой кольца с покоординатными сложением и умножением. Множество элементов A, у которых все координаты, кроме i-й, нулевые, образуют идеал a_i кольца A, причем $a_i a_j = 0$ при $i \neq j$. Положим $b_i = \sum_{k \neq i} a_k$, $X_i = V(b_i) \subset \operatorname{Spec} A$. Тогда имеем:

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = V(b_1 \dots b_n) = V(0) = X,$$

$$X_i \cap X_j = V((b_i \cup b_j)) = V(A) = \emptyset \quad \text{при } i \neq j.$$

Стало быть, $\operatorname{Spec} \prod_{i=1}^{n} A_i$ разлагается в несвязное объединение

замкнутых подмножеств $V(\mathfrak{b}_i) \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{b}_i = \operatorname{Spec} A_i$.
(Для бесконечных произведений это не так: см. упражнение 7).

Верно и обратное утверждение

4.12. Предложение. Пусть $X = \operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, где X_i – замкнутые, попарно непересекающиеся множества. Тогда существует такой изоморфизм $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, что в обозначениях предыдущего пункта $X_i = V(\mathfrak{b}_i)$.

Доказательство. Рассмотрим подробно случай $n = 2$. Пусть $X_i = V(\mathfrak{b}_i)$. В силу 3.5 имеем:

$$X_1 \cup X_2 = X \Leftrightarrow V(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = X \Leftrightarrow \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \in N,$$

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \Leftrightarrow V(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = A,$$

где N – идеал нильпотентов. Поэтому существуют такие элементы $f_i \in \mathfrak{b}_i$ и целое число $k > 0$, что

$$f_1 + f_2 = 1, \quad (f_1 f_2)^k = 0.$$

В силу упражнения 2 в п. 3 для некоторых $g_i \in A$ имеем

$$g_1 f_1^k + g_2 f_2^k = 1.$$

Положим $e_i = g_i f_i^k$. Тогда

$$e_1 + e_2 = 1, \quad e_1 e_2 = 0.$$

Поэтому элементы $e_i \in \mathfrak{b}_i$ являются ортогональными идемпотентами, которые определяют разложение кольца A:

$$A \xrightarrow{\sim} A_1 \times A_2 : \quad g \rightsquigarrow (ge_1, ge_2).$$

Остается показать лишь, что $V(Ae_i) = X_i$. Но $V(Ae_i)$, очевидно, не пересекаются и в объединении дают всё X; кроме того, $Ae_i \subset \mathfrak{b}_i$, так что $V(Ae_i) \supset X_i$, откуда следует требуемое.

Теперь нетрудно завершить доказательство индукцией по n; подробности мы оставляем читателю.

4.13. Пример. Пусть A – артиново кольцо (определение см. в п. 4.9). Так как $\operatorname{Spec} A$ является объединением конечного числа замкнутых точек, кольцо A изоморфно произведению конечного числа локальных артиновых колец. В частности, любое артиново кольцо имеет конечную длину (см. пример 3.3).

Квазикомпактность.

Обычный термин сопровождается приставкой "квази", потому что определение относится и к нехаусдорфовым пространствам.

4.14. Определение. Топологическое пространство X называется квазикомпактным, если из любого открытого покрытия его можно выбрать конечное подпокрытие.

Следующий простой результат несколько неожидан, потому что не накладывает никаких условий конечности на кольцо A:

4.15. Предложение. Пространство $\operatorname{Spec} A$ квазикомпактно.

Доказательство. Любое покрытие $\operatorname{Spec} A$ можно измельчить до покрытия спектральными открытыми множествами: $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$. Тогда $\bigcap V(f_i) = \varnothing$, так что $(\dots, f_i, \dots) = A$. Поэтому существует разложение единицы

$$1 = \sum_{i\in I} g_i f_i ,$$

в котором лишь конечное число индексов $i \in J \subset I$ таково, что $g_i \neq 0$. Стало быть, $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i\in J} D(f_i)$, что доказывает требуемое.

5. Аффинные схемы

В топологии любому непрерывному отображению пространств $X \to Y$ соответствует гомоморфизм колец непрерывных функций, направленный в обратную сторону. Для нас первичным объектом являются "функции", то есть кольца; поэтому геометрически важные отображения пространств – это те, которые получаются из гомоморфизмов колец.

Пусть $\varphi : A \to B$ – некоторый гомоморфизм колец. Каждому простому идеалу $p \subset B$ поставим в соответствие его прообраз $\varphi^{-1}(p)$. Идеал $\varphi^{-1}(p)$ прост, потому что φ индуцирует вложение $A/\varphi^{-1}(p) \to B/p$, а так как B/p не имеет делителей нуля, то же верно для $A/\varphi^{-1}(p)$.

Мы определили отображение ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

5.1. Теорема. 1. ${}^a\varphi$ <u>непрерывно как отображение топологических пространств.</u>

2. ${}^a(\varphi\psi) = {}^a\psi \circ {}^a\varphi$.

Доказательство. Достаточно проверить, что прообраз замкнутого множества замкнут; на самом деле

$$({}^a\varphi)^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E)).$$

Действительно,

$$y \in V(\varphi(E)) \Leftrightarrow \varphi(E) \subset p_y \Leftrightarrow E \subset \varphi^{-1}(p_y) = p_{{}^a\varphi(y)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow {}^a\varphi(y) \in V(E) \Leftrightarrow y \in ({}^a\varphi)^{-1}(V(E)).$$

Второе утверждение очевидно. Тем самым, Spec <u>есть (контравариантный) функтор из категории коммутативных колец в категорию топологических пространств.</u>

Топологическое пространство $\operatorname{Spec} A$ само по себе является довольно грубым инвариантом кольца A: ср. примеры ниже. Поэтому единым геометрическим объектом естественно считать пару $(\operatorname{Spec} A, A)$, состоящую из пространства $\operatorname{Spec} A$ и элементов кольца A, более или менее точно сопоставляемых с

функциями на $\operatorname{Spec} A$.

5.2. Определение (предварительная форма). а. Аффинной схемой называется тройка (X, α, A), состоящая из топологического пространства X, кольца A и изоморфизма пространств $\alpha: X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} A$.

б. Морфизмом аффинных схем $(Y, \beta, B) \to (X, \alpha, A)$ называется пара (f, θ), состоящая из гомоморфизма колец $\theta: A \to B$ и непрерывного отображения пространств $f: Y \to X$ такая, что диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\beta} & \operatorname{Spec} B \\ f \downarrow & & \downarrow {}^{\tilde{\theta}} \\ X & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Spec} A \end{array}$$

коммутативна.

Композиция морфизмов определяется очевидным образом.

(Конечно, это очень важное определение: оттого-то оно такое чопорное).

Каждому кольцу A отвечает аффинная схема $(\operatorname{Spec} A, id, A)$ (id – тождественное отображение), которую мы для краткости будем чаще всего обозначать просто $\operatorname{Spec} A$. Любая аффинная схема изоморфна такой. Аффинные схемы образуют категорию. Двойственная к ней категория эквивалентна категории колец.

Определение, которое мы дали, не является окончательным, потому что оно плохо приспособлено к глобализации – склеиванию общих схем из аффинных. Впоследствии оно будет изменено: дополнительным элементом структуры, превращающим пространство $\operatorname{Spec} A$ в схему $\operatorname{Spec} A$, будет не кольцо A, а пучок. Но эти кольцо и пучок однозначно восстанавливаются друг по другу, и пока мы не выходим за пределы категории аффинных схем, нынешнего определения хватит для всех нужд.

Для того, чтобы оценить различие между множеством $\operatorname{Hom}(A, B)$ (единственно важным для нас) и множеством всех непрерывных отображений $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, рассмотрим несколько простых примеров.

3_1520

Пример. $A=B=\mathbb{Z}$. $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ состоит из замкнутых то чек (p), p пробегает все простые числа, и (0). Замыкание (0) является все пространство; остальные замкнутые множе ва состоят из конечного числа замкнутых точек. Топологичес пространство $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ имеет много автоморфизмов: можно ка угодно переставлять замкнутые точки. Между тем, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}$ содержит лишь тождественное отображение.

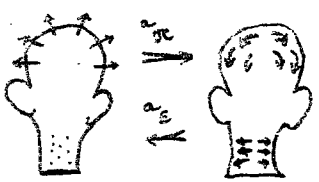
Пример. $B=\mathbb{Z}$, $A=K[T]$, K - конечное поле. Очеви но, $\operatorname{Spec}A$ и $\operatorname{Spec}B$ изоморфны как топологические просп ства, тогда как множество $\operatorname{Hom}(A,B)$ пусто.

Эти примеры наводят на мысль, что морфизмов аффинных схем гораздо меньше, чем непрерывных отображений их спектро Возможен ,однако, и обратный эффект.

Пример. Пусть K - поле. $\operatorname{Spec}K$ состоит из одной точ так что все автоморфизмы пространства $\operatorname{Spec}K$ тождественны между тем автоморфизмы схемы $\operatorname{Spec}K$ соответствуют автомор физмам поля K, и потому могут образовывать даже бесконечн группу.

Тем самым, одноточечные схемы могут иметь "внутренние степени свободы" подобно элементарным частицам. Присутстви нильпотентов еще увеличивает число этих степеней свободы.

Пример ("причесывание нильпотентов"). Пусть A - неко рое кольцо, $B=A[T]/(T^2)$, $t=T \bmod (T^2)$. Естес венный гомоморфизм $\varepsilon: B\to A$ (где $\varepsilon(a+bt)=a$), инду цирует изоморфизм топологических пространств ${}^a\varepsilon: \operatorname{Spec}A\to\operatorname{Sp}$ но, конечно, не схем. Схема $(\operatorname{Spec}B, id, B)$ "богаче" схемы $(\operatorname{Spec}A, id, A)$ нильпотентами tA. Чтобы уяснить, как это проявляется, рассмотрим всевозможные "проекции" ${}^a\pi: \operatorname{Spec}$ $\to\operatorname{Spec}A$, то есть морфизмы схем, отве чающие гомоморфизмам колец $A\to B$ с условием $\varepsilon\pi=id$. Тогда $\pi(f)-f\in At$.



Для каждого такого π опред лим отображение $\partial_\pi: A\to A$ фо мулой

$$\pi(f)-f=\partial_\pi(f)t.$$

из того, что π – гомоморфизм колец, вытекает, что $\partial_\pi(f)$ удовлетворяет условиям

$$\partial_\pi(f+g) = \partial_\pi(f) + \partial_\pi(g),$$

$$\partial_\pi(fg) = \partial_\pi(f)g + f\partial_\pi(g),$$

потому что $\pi(f)\pi(g) - fg = (f+\partial_\pi(f)t)(g+\partial_\pi(g)t) - fg$ и $t^2 = 0$. Следовательно, ∂_π является <u>дифференцированием</u> кольца A.

Легко убедиться, что и наоборот, для любого дифференцирования $\partial: A \to A$ отображение $\pi: A \to B$, определенное формулой $\pi(f) = f + \partial f t$, является гомоморфизмом колец и определяет проекцию ${}^a\pi$.

В дифференциальной геометрии дифференцирование кольца функций интерпретируется как "векторное поле" на многообразии. Удобно представлять себе, что схема $\operatorname{Spec} B$, по сравнению со схемой $\operatorname{Spec} A$, снабжена полем векторов, "торчащих вовне". Морфизм ${}^a\pi$ "приглаживает" их, превращая в векторное поле на $\operatorname{Spec} A$.

В частности, если K – поле, схема $\operatorname{Spec} K$ есть точка, а схема $\operatorname{Spec} K[T]/(T^2)$ – "вектор" (или "направление"), исходящий из этой точки.

Мы и в дальнейшем будем иногда изображать на чертежах нильпотенты стрелками, хотя очевидно, что даже для схем $\operatorname{Spec} K[T]/(T^n)$, $n>2$ или $\operatorname{Spec} K[T_1,T_2]/(T_1^2, T_1T_2, T_2^2)$ или, наконец, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/(p^2)$, p – простое, такие картинки имеют лишь очень ограниченную информативность.

<u>Пример</u> (<u>нежесткость аффинных пространств</u>). Пусть K – поле простого поля, V – линейное пространство над ним, $A = S_K(V)$. Рассмотрим группу G автоморфизмов K-схемы $\operatorname{Spec} A$. Эта группа изоморфна группе K-автоморфизмов кольца многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$, где $n = \dim V$. В ней содержится подгруппа невырожденных неоднородных линейных преобразований:

$$T_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_{ij} T_j + d_i, \quad c_{ij}, d_i \in K,$$

то есть обычная аффинная группа G_0.

Более того, легко видеть, что при $n=1$ даже $G_0=G$, это далеко не так при $n\geqslant 2$. В самом деле, в этом случае любая "треугольная" подстановка вида

$$T_1 \rightsquigarrow T_1 + F_1 ,$$
$$T_2 \rightsquigarrow T_2 + F_2(T_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_i \rightsquigarrow T_i + F_i(T_1,\dots,T_{i-1}),$$

где $F_i \in K[T_1,\dots,T_{i-1}] \subset K[T_1,\dots,T_n]$, очевидно, принадлежит G. Тем самым, группа автоморфизмов схемы аффинного пространства размерности $\geqslant 2$ содержит нелинейные подстановки сколь угодно большой степени.
Их существование используется для доказательства так называемой леммы Нетера о нормализации.

Отметим еще, что при $n=2$ группа G порождается линейными и треугольными подстановками (Энгель; И.Р.Шафаревич)
При $n\geqslant 3$ неизвестно, так ли это.

<u>Пример</u> (<u>линейные проекции</u>). Пусть $V_1 \subset V_2$ - два линейные пространства над полем K, $X_i = \operatorname{Spec} S_K(V_i)$. Морфизм $X_2 \to X_1$, индуцированный вложением $S_K(V_1) \subset S_K(V_2)$, называется <u>проекцией схемы</u> X_2 на X_1: на множествах K-точек он индуцирует естественное отображение $X_2(K) = V_2^* \to V_1^* = X_1(K)$ (ср. 2.1), при котором линейный функционал ограничивается с V_2 на V_1.

6. Топологические свойства некоторых морфизмов

В этом параграфе мы исследуем самые элементарные свойства морфизмов ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, дающие частичный ответ на вопрос, какова структура топологического пространства ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$.

Любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$ разлагается в произведение сюръективного гомоморфизма колец $A \to A/\operatorname{Ker}\varphi$ и вложения $A/\operatorname{Ker}\varphi \to B$. Выясним свойства ${}^a\varphi$ в этих двух случаях. Первый из них совсем прост.

6.1. Предложение. Пусть $\varphi : A \to B$ – эпиморфизм колец. Тогда отображение ${}^a\varphi$ является гомеоморфизмом пространства $\operatorname{Spec} B$ на замкнутое подпространство $V(\operatorname{Ker}\varphi) \subset \operatorname{Spec} A$.

Это прямо следует из определений, и мы оставляем проверку читателю (обратить внимание на доказательство непрерывности обратного отображения $({}^a\varphi)^{-1} : V(\operatorname{Ker}\varphi) \to \operatorname{Spec} B$).

В частности, пусть A – кольцо конечного типа над некоторым полем K или кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. По определению, это означает, что A есть фактор кольца многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ или $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$. Спектр кольца многочленов играет роль аффинного пространства (над K или над $\mathbb{Z}$ соответственно; ср. пример в п. 2.1). Значит, спектры колец конечного типа соответствуют аффинным многообразиям ("арифметическим аффинным многообразиям", если над $\mathbb{Z}$): они вкладываются в конечномерные аффинные пространства.

Итак, сюръективные гомоморфизмы колец превращаются во вложения пространств. Однако вложения колец не обязательно индуцируют отображения спектров на: только замыкание ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$ совпадает со $\operatorname{Spec} A$. Это следует из несколько более общего факта.

6.2. Предложение. Для любого гомоморфизма колец $\varphi : A \to B$ и идеала $\mathfrak{b} \subset B$ имеем:

$$\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})).$$

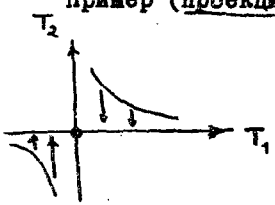
(В частности, при $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ получаем $\overline{{}^a\varphi(V(0))} =$ то есть образ $\operatorname{Spec} B$ плотен в $\operatorname{Spec} A$).

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{b}$ - радикальный и ал, потому что $V(r(\mathfrak{b})) = V(\mathfrak{b})$ и $\varphi^{-1}(r(\mathfrak{b})) = r(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$

Множество $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}$ является пересечением всех замкнуты множеств, содержащих ${}^a\varphi V(\mathfrak{b})$, то есть множеством общих нулей всех функций $f \in A$, обращающихся в нуль на ${}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))$. Н обращение f в нуль на ${}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))$ равносильно обращению $\varphi(f)$ в нуль на $V(\mathfrak{b})$, то есть включению $\varphi(f) \in \mathfrak{b}$ (потому что $\mathfrak{b}$ радикален) или, наконец, включению $f \in \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$. Поэтому интересующее нас замыкание равно $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

Теперь мы приведем примеры вложений колец, в которых действительно ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$ не совпадает со $\operatorname{Spec} A$.

Пример (<u>проекция гиперболы</u> <u>на координатную ось</u>):



$\varphi: A = K[T_1] \hookrightarrow K[T_1, T_2]/(T_1T_2 - 1$

где K - поле. Здесь ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B) = D(T_1)$ в соответствии с картинкой.

Действительно, ${}^a\varphi$ переводит общу точку в общую. Простой идеал $(f(T_1)) \subset A$ где $f \neq cT_1$ - неприводимый многочлен, является прообразом простого идеала $(f(T_1) \bmod (T_1T_2 - 1)) \subset B$. Наконец, T_1 вме те с $T_1T_2 - 1$ порождают единичный идеал в $K[T_1, T_2]$, поэтому $(T_1) \notin {}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$.

В этом примере образ ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$ открыт; но он может быть не открытым и незамкнутым:

Пример. $\varphi: A = K[M, N] \hookrightarrow B = K[M, N, T]/(MT - N$

Читателю предлагается проверить, что

$$ {}^a\varphi(\operatorname{Spec} B) = D(M) \cup V(M, N) $$

и что это множество действительно не является открытым (незамкнутость его очевидна).

Этот пример иллюстрирует явление, давно замеченное в теории уравнений. Образ ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$ - это "множество тех значени

коэффициентов M, N, при которых уравнение $MT-N=0$ относительно неизвестной T разрешимо (в какой-нибудь K-алгебре). Вообще говоря, условием разрешимости является неравенство $M \neq 0$, но даже при $M=0$ разрешимость обеспечена, если также $N=0$.

Можно доказать, что если кольцо A нетерово, а A-алгебра B имеет конечное число образующих, то множество ${}^a\varphi(\mathrm{Spec}\,B)$ является объединением конечного числа локально замкнутых множеств (пересечений замкнутого и открытого множеств).

Такие множества называются конструктивными; образ конструктивного множества относительно ${}^a\varphi$ в описанных условиях всегда конструктивен (теорема Шевалле).

В терминах неопределенных коэффициентов (конечной) системы уравнений это означает, что условие ее совместности имеет следующий вид: коэффициенты должны удовлетворять одному из конечного числа утверждений, а каждое утверждение представляет собой набор конечного числа полиномиальных равенств и неравенств (нулю).

Для $MT-N=0$ утверждение 1: $M \neq 0$; утверждение 2: $M=N=0$.

В разобранных случаях что-то "уходило на бесконечность".

Мы опишем сейчас важный класс морфизмов ${}^a\varphi$, для которых этого не происходит. Они подобны "конечнолистным накрытиям" римановых поверхностей.

6.3. Определение. Пусть B - некоторая A-алгебра; элемент $x \in B$ называется целым над A, если он удовлетворяет некоторому уравнению вида $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ ("уравнение целой зависимости"), где $a_i \in A$.

Кольцо B называется целым над A, если любой элемент B цел над A.

Есть два важных случая, когда целость B над A легко установить.

Случай 1. Если B как A-модуль имеет конечное число образующих, то B цело над A.

Действительно, если кольцо A нетерово, то для любого элемента $g \in B$ возрастающая последовательность A-модулей $B_k = \sum_{i=0}^{k} Ag^i \subset B$ стабилизируется. Поэтому для некоторого k

имеем $g^k \in \sum_{i=0}^{k-1} A g^i$, что и доставляет уравнение целой зависимости.

Общий случай сводится к разобранному с помощью следующего приема. Пусть $B = \sum_{i=1}^{n} A f_i$. Положим $f_i f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k f_k$, $a_{ij}^k \in A$ и $g = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i$, $g_i \in A$. Обозначим через $A_0 \subset A$ наименьшее подкольцо, содержащее все a_{ij}^k и g_i, и положим $B_0 = \sum_{i=1}^{n} A_0 f_i$. Очевидно, A_0 – нетеровс кольцо, B_0 – A_0-алгебра и $g \in B_0$. Поэтому g удовлетворяет уравнению целой зависимости с коэффициентами в A_0.

Случай 2. Пусть G – некоторая конечная группа автоморфизмов кольца B, $A = B^G$ – подкольцо G-инвариантных элементов. Тогда B цело над A.

Действительно, все элементарные симметрические многочлены от g^s, $s \in G$ для любого $g \in B$ принадлежат A, а g удовлетворяет уравнению $\prod_{s \in G} (g - s(g)) = 0$.

6.4. Теорема. Пусть $\varphi: A \hookrightarrow B$ – вложение колец и B цело над A. Тогда ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B) = \operatorname{Spec} A$.

Доказательство. Мы сначала докажем два частных случая теоремы, а затем сведем к ним общее утверждение.

Случай I. Теорема верна, если B – поле.

Тогда ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B) = \{(0)\} \subset \operatorname{Spec} A$, и эпиморфность равносильна тому, что у A нет других простых идеалов, то есть что A – поле. Проверим это. Пусть $f \in A$, $f \neq 0$; покажем, что элемент $f^{-1} \in B$ принадлежит A. Он цел над A, то есть удовлетворяет уравнению

$$f^{-n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{-i} = 0, \quad a_i \in A,$$

откуда, умножая на f^{n-1}, нах дим

$$f^{-1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{n-i-1} \in A,$$

что доказывает требуемое.

Случай 2. Если A - локальное кольцо, то в условиях теоремы единственная замкнутая точка $\operatorname{Spec} A$ принадлежит ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)$; более того, она является ${}^a\varphi$ -образом любой замкнутой точки $\operatorname{Spec} B$.

Действительно, пусть p - максимальный идеал A , q - любой максимальный идеал B. Тогда B/q - поле, целое над подкольцом $A/A\cap q$, которое, по доказанному, тоже должно быть полем. Это означает, что $A\cap q$ - максимальный идеал в A и, стало быть, $A\cap q = \varphi^{-1}(q) = p$.

Общий случай. Пусть $p\subset A$; мы хотим показать, что существует идеал $q\subset B$ с $q\cap A = p$.

Положим $S = A\setminus p$. Это - мультипликативное множество (Ленг. Алгебра, глава II, § 3), потому что оно состоит из функций, не обращающихся в нуль в точке $\{p\}\in \operatorname{Spec} A$.

Рассматривая S как подмножество A и B, мы можем построить кольца частных $A_S\subset B_S$ (у Ленга они обозначаются $S^{-1}A$ и т.д.) . Положим $p_S = \{f/s \mid f\in p, s\in S\}$. Легко видеть, что $p_S\subset A_S$ - простой идеал. Он максимален, так как $A_S\setminus p_S$ состоит из обратимых элементов $s/1$.

Кольцо B_S цело над A_S , потому что если $f\in B$ удовлетворяет уравнению $f^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0$, то $f/s\in B_S$ удовлетворяет уравнению $(f/s)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i/s^{n-i}(f/s)^i = 0$.

Следовательно, по предыдущему утверждению, существует такой простой идеал $q_S\subset B_S$, что $A_S\cap q_S = p_S$.

Прообраз идеала q_S в B (относительно естественного гомоморфизма $B\to B_S$) прост. Остается проверить, что $A\cap q = p$. Включение $p\subset A\cap q$ очевидно.

Пусть $f\in A\cap q$. Существуют $n\in\mathbb{Z}$ и $s\in S$ такие, что $f/s^n\in q_S$. Поэтому $f/s^n\in A_S\cap q_S = p_S$, так что $s^m f\in p$ для некоторого $m\geqslant 0$. Следовательно, $f\in p$. Доказательство закончено.

В этом доказательстве кольцо частных A_S появилось как технический трюк, позволяющий "изолировать" простой идеал

$p \subset A$, сделав его единственным максимальным идеалом в A_S. Именно с такими геометрическими представлениями связан термин "локализация" в применении к конструкции колец частных.

Дальше нам будет полезно следующее дополнение к теореме 6.4. Обозначим через $\mathrm{Spm}\, A$ множество максимальных идеалов в кольце A ("максимальный спектр").

6.5. Предложение. В условиях теоремы 6.4, ${}^a\varphi(\mathrm{Spm}\, B) = \mathrm{Spm}\, A$ и $({}^a\varphi)^{-1}(\mathrm{Spm}\, A) = \mathrm{Spm}\, B$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{Spm}\, B$; тогда B/p поле, целое над $A/A\cap p = A/\varphi^{-1}(p)$. В силу случая 1 теоремы 6.4, $A/\varphi^{-1}(p)$ тоже поле, так что $\varphi^{-1}(p)$ максимален в A.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим простой идеал $q \subset B$ такой, что $p = A\cap q \subset A$ максимален. Кольцо без делителей нуля B/q цело над полем A/p; нужно проверить, что оно является полем. В самом деле, любой элемент $f \in B/q$, будучи целым над A/p, принадлежит конечномерной A/p - алгебре, порожденной степенями f. Умножение на f в этой алгебре линейно и не имеет ядра, поэтому является эпиморфизмом. В частности, разрешимо уравнение $fu = 1$, что доказывает требуемое.

6.6. Предупреждение. Пусть $\varphi: A \to B$ - гомоморфизм колец и пусть $x \in \mathrm{Spm}\, B$, $y \in \mathrm{Spm}\, A$. Вообще говоря, точка ${}^a\varphi(x)$ незамкнута, а $({}^a\varphi)^{-1}(y)$ содержит и незамкнутые точки, так что предложение 6.5 списывает довольно специальную ситуацию. Вот пример:

$\varphi: \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[T]$ - естественное вложение, $\mathbb{Z}_p$ - кольцо целых p-адических чисел. Пусть $p_x = (1-pT)$ - максимальный идеал в $\mathbb{Z}_p[T]$ (его фактор-кольцо изоморфно полю $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел). Очевидно, $\varphi^{-1}(p_x) = \mathbb{Z}_p \cap (1-pT) = (0)$. Поэтому ${}^a\varphi(x) \notin \mathrm{Spm}\, \mathbb{Z}_p$. Более того, замкнутая точка x имеет своим образом общую точку в $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_p$, которая является открытым множеством, будучи дополнением к (p)!

В частности, $\mathrm{Spm}\, A$ не является функтором от A, в отличие от $\mathrm{Spec}\, A$.

Пусть теперь $p_y = (p) \subset \mathbb{Z}_p[T]$, $x = (p) \subset \mathbb{Z}_p$. Тогда $y \in ({}^a\varphi)^{-1}(x)$; точка x замкнута, а y – нет. Впрочем, здесь нет ничего неожиданного. Еще очевиднее был бы пример проекции плоскости на прямую $K[T_1] \hookrightarrow K[T_1, T_2]$. Прообраз точки $T_1 = 0$ на прямой содержит, конечно, общую точку T_2-оси, незамкнутую в плоскости.

7. Замкнутые подсхемы и примарное разложение

7.1. Определение. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ - аффинная схема, $\mathfrak{a} \subset A$ - некоторый идеал. Замкнутой подсхемой X, соответствующей идеалу $\mathfrak{a}$, называется схема $(V(\mathfrak{a}), \alpha, A/\mathfrak{a})$, где $\alpha : V(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ - канонический изоморфизм пространств определенный в п. 6.1.

Таким образом, замкнутые подсхемы схемы $X = \operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными идеалами кольца A, в отличие от замкнутых подмножеств пространства $\operatorname{Spec} A$, которые отвечают радикальным идеалам (см. 3.8).

Мы будем часто обозначать подсхему $(V(\mathfrak{a}), \alpha, A/\mathfrak{a})$ просто $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ и опускать слово "замкнутый", потому что в этом параграфе никакие другие подсхемы не рассматриваются.

Носителем подсхемы $Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \subset X$ называется пространство $V(\mathfrak{a})$; оно обозначается $\operatorname{Supp} Y$.

Каноническому гомоморфизму колец $A \to A/\mathfrak{a}$ отвечает мономорфизм схем $Y \to X$, который называется замкнутым вложением подсхемы Y.

Для любого кольца L мы будем обозначать через $X(L)$ множество $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} L, X) = \operatorname{Hom}(A, L)$ и называть его множеством L - точек схемы X (ср. с определением 2.1). Тогда L-точки подсхемы Y образуют подмножество $Y(L) \subset X(L)$, а функтор $L \rightsquigarrow Y(L)$ - подфунктор для $L \rightsquigarrow X(L)$.

На множестве замкнутых подсхем схемы X имеется естественная упорядоченность: $Y_1 \subset Y_2$, если $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$ (где $\mathfrak{a}_i$ - идеал, определяющий Y_i). Использование знака включения оправдано тем, что $Y_1 \subset Y_2 \Leftrightarrow Y_1(L) \subset Y_2(L)$ для всех колец L.

Отношение "Y есть замкнутая подсхема X" транзитивно в очевидном смысле слова.

Для всякого замкнутого множества $V(E) \subset X$ существует единственная наименьшая замкнутая подсхема с носителем $V(E)$: она определена идеалом $\tau((E))$, и в ее кольце нет нильпотентов. Такие схемы называются приведенными. В частности, подсхема $\operatorname{Spec} A/N$ (N - нильрадикал A) является наименьшей замкнутой подсхемой, носитель которой - всё про-

пространство $\mathrm{Spec}\, A$. Если $X = \mathrm{Spec}\, A$, схему $\mathrm{Spec}\, A/N$ часто обозначают X_{red}.

7.2. Определение. <u>Пересечением</u> $\bigcap_i Y_i$ <u>семейства подсхем</u> $Y_i = \mathrm{Spec}\, A/a_i$ <u>называется подсхема, определенная идеалом</u> $\sum_i a_i$.

Название оправдано тем, что для любого кольца L множество L-точек $(\bigcap_i Y_i)(L)$ естественно отождествляется с $\bigcap_i Y_i(L)$. Действительно, L-точка $\varphi : A \to L$ принадлежит $\bigcap_i Y_i(L)$ в том и только том случае, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi \supset a_i$ для всех i, что равносильно включению $\mathrm{Ker}\,\varphi \supset \sum a_i$. Это же рассуждение показывает, что $\mathrm{Supp}\,(\bigcap_i Y_i) = \bigcap_i \mathrm{Supp}\, Y_i$.

В этом смысле понятие <u>объединения</u> семейства подсхем не определено. Вообще говоря, для данных Y_i <u>не существует</u> замкнутой подсхемы Y такой, что $Y(L) = \bigcup_i Y_i(L)$ для всех L. Однако существует <u>наименьшая</u> подсхема Y со свойством

$$Y(L) \supset \bigcup_i Y_i(L)$$

для всех L. Она определяется идеалом $\bigcap_i a_i$.

В самом деле, если $Y(L) \supset \bigcup_i Y_i(L)$, то идеал a подсхемы Y удовлетворяет условию: "всякий идеал, содержащий один из a_i, содержит a".

Сумма всех таких идеалов a удовлетворяет этому же условию и является единственным максимальным элементом этого множества; с другой стороны, все они содержатся в a_i и, значит, в $\bigcap_i a_i$.

7.3. Определение. <u>Квазиобъединением</u> $\bigvee_i Y_i$ <u>семейства замкнутых подсхем</u> (Y_i) <u>схемы</u> X <u>называется подсхема, соответствующая пересечению всех идеалов подсхем</u> Y_i.

Важно заметить, что квазиобъединение подсхем Y_i не зависит от того, внутри какой замкнутой подсхемы, содержащей все Y_i, мы его строим.

Главная цель этого параграфа - построить для нетеровых

аффинных схем теорию разбиения на "неприводимые" в некотором смысле компоненты, аналогичную построенной в п. 4.6 – 4.10 для нетеровых топологических пространств. При этом мы будем пользоваться операцией квазиобъединения. На носителях она совпадает с объединением (для конечных семейств подсхем).

7.4. Лемма $\operatorname{Supp}\left(\bigvee_{i=1}^{n} Y_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Supp} Y_i$.

В самом деле, включение $\supseteq$ уже доказано. Наоборот, если $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Supp} Y_i$, то для всех i существует элемент $f_i \in a_i$, для которого $f_i(x) \neq 0$. Поэтому $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) \neq 0$ и, значит, x не принадлежит множеству нулей всех функций из $\bigcap_{i=1}^{n} a_i$, которое и есть $\operatorname{Supp}\left(\bigvee_{i=1}^{n} Y_i\right)$ (см. также п. 3, упражнение 1).

Теперь нам нужно перенести на подсхемы понятие неприводимости. Первое, что приходит в голову, – имитировать определение неприводимости для пространств.

7.5. Определение. <u>Аффинная схема X называется приводимой, если существует представление вида $X = X_1 \vee X_2$, где X_1, X_2 – собственные замкнутые подсхемы X.</u>

7.6. Теорема. <u>Всякая нетерова аффинная схема X разлагается в квазиобъединение конечного числа замкнутых неприводимых подсхем.</u>

(Аффинная <u>схема</u> X называется <u>нетеровой</u>, если ее кольцо нетерово. Эквивалентное определение: убывающие цепочки замкнутых подсхем X стабилизируются).

Доказательство. То же рассуждение, что и в конце п. 4.7, приводит к требуемому результату. Если X приводима, мы пишем $X = X_1 \vee X_2$, затем при необходимости разлагаем X_1 и X_2 и т.д. Процесс обрывается в силу нетеровости.

[illegible] понятие неприводимости [illegible] нетеровых топ[illegible]. Вполне полезно иметь в виду [illegible].

7.7. Определение. [illegible] <u>неприводимым для любой лемниската</u> [illegible].

Замыкание [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

7.8. Предложение. Всякая неприводимая нетерова схема примарна.

Обратное утверждение неверно. В самом деле, рассмотрим кольцо $A = K \times V$, где V – идеал с нулевым умножением, K – бесконечное поле. Идеал (0) примарен, и для любого подпространства $V' \subset V$ идеал $(0, V')$ примарен. В то же время, если $\dim_K V > 1$, существует бесконечно много представлений вида $(0) = V_1 \cap V_2$, ($V_i \subset V$ – собственные подпространства), то есть представлений $X = Y_1 \vee Y_2$, где $X = \operatorname{Spec} A$. Это непоправимо портит надежды на единственность разложения в квазиобъединение неприводимых подсхем. С примарными подсхемами, как мы увидим ниже, дело обстоит лучше.

Доказательство предложения 7.8. Покажем, что непримарная нетерова схема X приводима. Действительно, в ее кольце A есть два элемента f, g такие, что $fg = 0$, $g \neq 0$ и f не является нильпотентом.

Положим $a_k = A \cap f^k = \{h \in A \mid hf^k = 0\}$. Последовательность идеалов a_k возрастает и потому стабилизируется. Пусть $a_n = a_{n+1}$.

Тогда имеем: $(0) = (f^n) \cap (g)$. Действительно:

$$h \in (f^n) \cap (g) \Rightarrow h = h_1 f^n = h_2 g;$$

но $h_1 f^{n+1} = h_2 g f = 0$, откуда $h_1 f^n = 0$, потому что $a_{n+1} = a_n$. Поэтому $Y = Y_1 \vee Y_2$, где Y_1 определяется идеалом (f^n), а Y_2 – идеалом (g).

7.9. Замечания. а. Носитель примарной нетеровой схемы неприводим. Действительно, радикал примарного идеала прост.

б. Результаты 7.6 и 7.8 вместе показывают, что нетерова аффинная схема разлагается в квазиобъединение своих примарных подсхем: $X = \bigvee_{i=1}^{n} X_i$. Мы могли бы оставить в этом разложении лишь максимальные элементы и затем попытаться доказать его единственность аналогично тому, как это делалось для пространств в конце п. 4.7. Но это рассуждение не проходит сразу

в двух местах. Во-первых, формула $X \cap (\bigvee_{i=1}^{n} Y_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (X \cap Y_i)$ вообще говоря, неверна. Во-вторых, как мы выяснили, наши примарные подсхемы X_i сами вполне могут быть приводимы.

Поэтому вместо вычеркивания немаксимальных Y_i в $\bigvee_{i=1}^{n} Y_i$ нужно применить менее тривиальный процесс, [illegible] после этого теорема единственности будет сначала формулироваться и доказываться.

Назовем примарное разложение $X = \bigvee_{i=1}^{n} X_i$ <u>несократимым</u>, если выполнены следующие два условия:

1) $\operatorname{Supp} X_i \neq \operatorname{Supp} X_j$ при $i \neq j$;

2) $X_k \not\subset \bigvee_{i \neq k} X_i$ для всех k.

7.10. Теорема. <u>Всякая нетерова аффинная схема X разлагается в несократимое квазиобъединение конечного числа своих примарных замкнутых подсхем.</u>

Доказательство. Начнем с какого-нибудь примарного разложения $X = \bigvee_{j=1}^{n} X_j$ (см. выше, 7.9 [illegible]). Пусть Y_j $(j=1,\dots,m)$ – квазиобъединения всех тех подсхем X_j, которые имеют общий носитель. Тогда $X = \bigvee_{j=1}^{m} Y_j$. Если $Y_j \subset \bigvee_{j \neq k}^{m} Y_j$, вычеркнем Y_j. Продолжая так же, за конечное число шагов мы придем к объединению $X = \bigvee Y_j$, которое удовлетворяет второму условию в определении несократимости. Осталось лишь убедиться, что подсхемы Y_j примарны.

Лемма. <u>Квазиобъединение конечного числа примарных подсхем с общим носителем примарно (и имеет тот же носитель).</u>

Доказательство. Пусть $Y = \bigvee_{i=1}^{n} Y_i$, $\operatorname{Supp} Y_i = \operatorname{Supp} Y$ для всех i. Пусть Y_i соответствует идеалу $\mathfrak{a}_i$ в кольце A схемы Y. Тогда $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = (0)$. Рассмотрим делитель нуля $f \in A$. Пусть $fg = 0$, $g \neq 0$; $g \notin \mathfrak{a}_i$ для некоторого i; в силу примарности $\mathfrak{a}_i$ $f^m \in \mathfrak{a}_i$ для некоторого m. Но так как

$V(a_i) = V(0)$, a_i состоит из нильпотентов, так что f нильпотент. Это завершает доказательство.

Теперь мы в состоянии доказать первую теорему единственности.

7.11. Теорема. Пусть $X = \bigvee_{i=1}^{n} X_i$ – неприводимое примарное разложение нетеровой аффинной схемы X. Система общих точек неприводимых замкнутых множеств $\operatorname{Supp} X_i$ не зависит от выбора такого разложения. Она обозначается $\operatorname{Ass} X$ (или $\operatorname{Ass} A$, если $X = \operatorname{Spec} A$) и называется множеством простых идеалов, ассоциированных с X (или A).

Мы установим более сильный результат, дающий инвариантную характеризацию множества $\operatorname{Ass} X$. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $X_i = \operatorname{Spec} A$

7.12. Предложение. Следующие два утверждения эквивалентны.

а. Простой идеал $p \subset A$ соответствует общей точке одного из множеств $\operatorname{Supp} X_i$

б. Существует такой элемент $f \in A$, что идеал $\operatorname{Ann} f = \{g \in A \mid fg = 0\}$ примарен, а p – его радикал.

Доказательство. а $\Longrightarrow$ б. Пусть p_j – идеал общей точки $\operatorname{Supp} X_j$, a_j – идеал, определяющий X_j. Очевидно, $p_j = r(a_j)$. Так как представление $X = \bigvee_{j=1}^{n} X_j$ неосократимо, $a_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} a_j$. Выберем элемент $f \in \bigcap_{j \neq i} a_j - a_i$ и покажем, что $\operatorname{Ann} f$ примарен с радикалом p_i.

Прежде всего, $\operatorname{Ann}(f \bmod a_i)$ в кольце A/a_i состоит только из нильпотентов, поэтому $\operatorname{Ann} f \subset p_i$ (ибо p_i является прообразом нильрадикала в A/a_i при естественном гомоморфизме $A \to A/a_i$). Кроме того, $a_i \subset \operatorname{Ann} f$, потому что по построению $f a_i \subset \bigcap_j a_j = (0)$. Следовательно, $r(\operatorname{Ann} f) = p_i$.

Проверим теперь, что в $A/\operatorname{Ann} f$ все делители нуля – нильпотенты.

Пусть это не так; тогда существуют элементы $g, h \in A$ такие, что $gh \in \operatorname{Ann} f$, $h \notin \operatorname{Ann} f$, g не является нильпотентом.

нулем $\bmod \operatorname{Ann} f$ и, стало быть, также $\bmod \mathfrak{a}_i$.

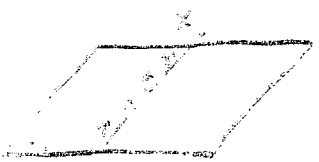
С другой стороны, $fgh = 0$, так как $g \bmod \mathfrak{a}_i$ не нильпотент, из примарности $\mathfrak{a}_i$ следует, что $fh \bmod \mathfrak{a}_i = 0$, то есть $fh \in (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{a}_j) \cap \mathfrak{a}_i = (0)$, откуда $h \in \operatorname{Ann} f$, вопреки выбору h. Полученное противоречие устанавливает примарность $\operatorname{Ann} f$.

б) $\Longrightarrow$ а). Пусть $f \in A$ такой элемент, что $\operatorname{Ann} f$ примарен с радикалом $\mathfrak{p}$. Положим $\mathfrak{s}_i = (\mathfrak{a}_i : f) = \{g \in A \mid gf \in \mathfrak{a}_i\}$. Из того, что $\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$, легко следует, что $\operatorname{Ann} f = \bigcap_i \mathfrak{s}_i$ и далее $\mathfrak{p} = r(\operatorname{Ann} f) = \bigcap_i r(\mathfrak{s}_i)$. Если $f \in \mathfrak{a}_i$, то $\mathfrak{s}_i = r(\mathfrak{s}_i) = \mathfrak{p}$. Если же $f \notin \mathfrak{a}_i$, то $\operatorname{Ann}(f \bmod \mathfrak{a}_i)$ в кольце $A/\mathfrak{a}_i$ состоит из нильпотентов, так что $r(\mathfrak{s}_i) = \mathfrak{p}_i$.

Следовательно, мы имеем $\mathfrak{p} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$, где $I = \{i \mid f \notin \mathfrak{a}_i\}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{p}$ совпадает с одним из идеалов $\mathfrak{p}_i$. Действительно, $V(\mathfrak{p}) = \bigcup_{i \in I} V(\mathfrak{p}_i)$ и $V(\mathfrak{p})$ неприводимо. Предложение доказано, а с ним и теорема единственности 7.II.

7.I3. Самое характерное отличие несократимого примарного разложения $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ от разложения пространства $\operatorname{Spec} X$ в объединение максимальных неприводимых компонент состоит в следующем. Хотя среди носителей подсхем X_i содержатся все неприводимые компоненты $\operatorname{Spec} X$ по одному разу, носители могут не исчерпываться этим; возможно, что $\operatorname{Supp} X_i = \operatorname{Supp} X_j$ для некоторых i, j.

Простой пример доставляет кольцо, описанное в замечании к теореме 4.I0. В обозначениях п. 4.I0, имеем в кольце B $(0) = (0, a) \cap (p, 0)$, так что



$X = X_1 \cup X_2$, где $\operatorname{Supp} X_1 = \operatorname{Spec} A_1$, $\operatorname{Supp} X_2 = \{(p, 0)\}$. Подпространство $\operatorname{Supp} X_2$ полностью содержится в пространстве $\operatorname{Supp} X_1$, но как подсхема X_2 выделяется на общем фоне X_1 сколь нильпотентными (см. теорему

$$X_i \cong \operatorname{Spec} A_i$$

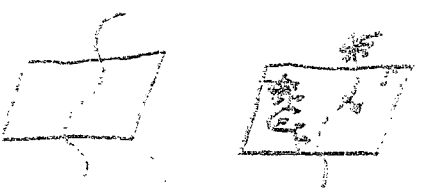
$$X_i \cong \operatorname{Spec} A/p[T]/(T^2)$$

Все замечания о нильпотентах имеют общий характер. В самом деле, пусть $\operatorname{Supp} X_i \subset \operatorname{Supp} X_j$ в неприводимом разложении, $X_i \neq X_j$. Тогда $\operatorname{Supp}(X_i \cap X_j) = \operatorname{Supp} X_i$, но $X_i \cap X_j$ является собственной подсхемой в X_i. Это может быть лишь в том случае, когда нильпотентов в кольце схемы X_i больше, чем в кольце пересечения $X_i \cap X_j$, где они индуцированы нильпотентами "приведенных" с большего пространства X_j.

Среди компонент X_i несократимого примарного разложения те, для которых $\operatorname{Supp} X_i$ максимален, называются <u>доминирующими</u>, остальные – <u>вложенными</u>. Та же терминология применяется к самим множествам $\operatorname{Supp} X_i$ и к их общим точкам, элементам A и X.

Пространство вложенной компоненты может принадлежать одновременно нескольким (доминирующим или вложенным) компонентам. Кроме того, цепочка компонент, последовательно вложенных друг в друга, может быть как угодно длинна.

Таким образом, нильпотент на замкнутом пространстве аффинной схемы может иметь в себе сложную структуру вложенных примарных подсхем, вроде изображенной на чертеже. Читатель должен привыкнуть к геометрической реальности этой структуры.



Пространство Схема

(Конечно, изображая нильпотенты отрезками, неправильно разделять детали сколько-нибудь точно. Если лишь, что вложенные компоненты лежат ниже, чем в каждом их предшественнике).

Конечное множество простых идеалов $\mathfrak{p}_i \in A$, которые мы инвариантно связаны с каждым нетеровым кольцом A, имеет

ряд важных свойств. В частности, оно позволяет уточнить теорему 4.10.

7.14. Теорема. Элемент $f \in A$ является делителем нуля, если и только если он обращается (как функция) в нуль на одной из компонент несократимого примарного разложения $\operatorname{Spec} A$.

Иными словами, множество делителей нуля в A совпадает с $\bigcup_{p \in \operatorname{Ass} A} p$.

Доказательство. Покажем, сначала, что если $f \notin \bigcup_{p_i \in \operatorname{Ass} A} p_i$, то $\operatorname{Ann} f = (0)$.

Пусть $(0) = \bigcap_i a_i$ – несократимое примарное разложение, где $p_i = r(a_i)$. Пусть $fg = 0$. Так как $f \notin p_i$, из примарности a_i следует, что $g \in a_i$. Это верно для всех i, следовательно, $g = 0$.

Наоборот, пусть $\operatorname{Ann} f = (0)$. Предположим, что $f \in p_i$ и придем к противоречию. Если $f \in p_i$, то для некоторого $k \geq 1$ в силу нетеровости A получим $f^k \in p_i^k \subset a_i$, то есть $a_i : (x^k) = A$. С другой стороны, $\operatorname{Ann} f^k = (0)$. Отсюда

$$(0) = \operatorname{Ann} f^k = \bigcap_j (a_j : x^k) = \bigcap_{j \neq i} (a_j : x^k) \supset \bigcap_{j \neq i} a_j ,$$

а это противоречит несократимости разложения и завершает доказательство.

Отметим, наконец, что теорема единственности 7.11 относится лишь к носителям примарных компонент несократимого разложения, а не к самим компонентам. О них можно утверждать лишь следующее.

7.15. Теорема. Множество изолированных компонент несократимого примарного разложения нетеровой схемы $\operatorname{Spec} A$ не зависит от выбора разложения.

Для вложенных компонент это, вообще говоря, неверно.

Мы опускаем доказательство; читатель может обратиться к книге О.Зариского и П.Самюэля "Коммутативная алгебра" (т.I, гл. IV, § 5, теорема 3) или С.Ленга "Алгебра" (гл. VI, § 5, теорема 3).

8. Теорема Гильберта о нулях

В этом разделе мы установим, что замкнутые подсхемы конечномерных аффинных пространств над полем или над кольцом имеют много замкнутых точек.

8.1. Теорема. Пусть A – кольцо конечного типа (определение см. в п. 6.1). Тогда множество замкнутых точек $\operatorname{Spm} A$, всюду плотно в $\operatorname{Spec} A$.

8.2. Следствие. Для любого открытого или замкнутого подмножества $X \subset \operatorname{Spec} A$ пересечение $X \cap \operatorname{Spm} A$ всюду плотно в X.

(Действительно, если $X = V(E)$ и мы отождествим X с $\operatorname{Spec} A/(E)$, то $\operatorname{Spm} A \cap V(E)$ совпадет с $\operatorname{Spm} A/(E)$, а A/E является кольцом конечного типа вместе с A. Отсюда легко следует утверждение и для открытых множеств).

Пространство $\operatorname{Spm} A$ легче поддается геометрической интуиции из-за отсутствия в нем незамкнутых точек (все же большие открытые множества" остаются). С другой стороны, из следствия 8.2 вытекает, что для колец конечного типа пространство $\operatorname{Spec} A$ однозначно восстанавливается по $\operatorname{Spm} A$ (если считать, что индуцированная топология в $\operatorname{Spm} A$ известна).

Рецепт следующий:

1) точки $\operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми замкнутыми подмножествами в $\operatorname{Spm} A$. (Тем самым, каждому неприводимому замкнутому подмножеству в $\operatorname{Spm} A$ отвечает его "общая точка" в $\operatorname{Spec} A$).

2) Каждое замкнутое множество в $\operatorname{Spec} A$ состоит из общих точек всех неприводимых замкнутых подмножеств некоторого замкнутого множества в $\operatorname{Spm} A$.

(Чтобы освоиться с этими утверждениями, читателю рекомендуется доказать их).

Доказательство теоремы 8.I. Мы будем последовательно расширять класс колец, для которых верна теорема.

а. Пусть K - алгебраически замкнутое поле. В $\operatorname{Spec} K[T_1,\dots,T_n]$ множество замкнутых точек плотно.

Замыкание множества замкнутых точек совпадает с пространством нулей всех функций, обращающихся в нуль во всех замкнутых точках. Поэтому достаточно доказать, что многочлен F, принадлежащий всем максимальным идеалам кольца $K[T_1,\dots,T_n]$, тождественно равен нулю. Но такой многочлен обладает свойством $F(t_1,\dots,t_n)=0$ для всех $t_1,\dots,t_n \in K$; легко индукция по n показывает, что $F=0$ (здесь по существу используется даже не замкнутость, а лишь бесконечность поля).

б. То же утверждение, что в а), но поле K не предполагается алгебраически замкнутым.

Обозначим через $\overline{K} \supset K$ алгебраическое замыкание поля K. Имеем $A = K[T_1,\dots,T_n] \xrightarrow{i} \overline{K}[T_1,\dots,T_n] = B$. Кольцо B цело над A, поэтому, в силу результатов 6.4 и 6.5 имеем:

$$\overline{\operatorname{Spm} A} = (a_i)^{-1}(\overline{\operatorname{Spm} B}) = (a_i)^{-1}(\operatorname{Spec} B) = \operatorname{Spec} A$$

в. Теорема 8.I верна для колец без делителей нуля конечного типа A над полем K.

Действительно, согласно теореме Нетера о нормализации (см. Ленг. Алгебра, гл.10, § 4), существует подалгебра многочленов $i: B \hookrightarrow A$ такая, что A цела над B. Так как уже доказано, что $\operatorname{Spm} B = \operatorname{Spec} B$, в точности такое же рассуждение, как в предыдущем пункте, показывает, что $\operatorname{Spm} A = \operatorname{Spec} A$.

г. Теорема 8.I верна для любых колец конечного типа A над полем.

Действительно, любая неприводимая компонента $\operatorname{Spec} A$ гомеоморфна $\operatorname{Spec} A/p$, где p - некоторый простой идеал. Кольцо A/p удовлетворяет условиям предыдущего пункта. Поэтому замкнутые точки плотны на всех неприводимых компонентах $\operatorname{Spec} A$ и, следовательно, на всем пространстве.

д. То же для колец A конечного типа над $\mathbb{Z}$. В этом случае $\operatorname{Spec} A = \bigcup_p V(p)$, где p пробегает простые числа. Зам

нутое множество $V(p)$ гомеоморфно спектру $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ - алгебры конечного типа A/pA ; поэтому на нем замкнутые точки плотны. Отсюда следует, что они плотны на $\operatorname{Spec} A$.

Теорема доказана.

8.3. Предложение. Пусть $p \subset A$ - максимальный идеал в кольце конечного типа над $\mathbb{Z}$ (соотв. над полем K). Тогда A/p является конечным полем (соотв. конечным алгебраическим расширением K).

Доказательство. Пункт д) доказательства предыдущей теоремы показывает, что достаточно ограничиться случаем кольца A над полем K. Фактор-кольцо по максимальному идеалу A/p, будучи полем, содержит единственный максимальный идеал. С другой стороны, по теореме Нетера о нормализации, оно является целым расширением кольца многочленов B от n переменных над K. Случай $n \geq 1$ невозможен, так как тогда кольцо B и, значит, A имело бы бесконечно много максимальных идеалов. Поэтому $n = 0$, и A - целое расширение конечного типа поля K. Это доказывает требуемое.

Результаты 8.1 и 8.3 служат основанием для введения дзета-функций колец конечного типа над $\mathbb{Z}$. Мы обсудим элементарные сведения о них в следующем параграфе.

Сейчас обратимся к случаю алгебраически замкнутого поля K.

Согласно предложению 8.3, в этом случае замкнутые точки в $\operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с K-точками схемы $\operatorname{Spec} A$; пространство последних и называется "аффинным алгебраическим множеством" над K в классическом смысле слова. Обсуждение в п. 8.2 показывает, что в этом случае $\operatorname{Spec} A$ со спектральной топологией и множество геометрических K-точек схемы $\operatorname{Spec} A$ с топологией Зариского являются, по существу, эквивалентными понятиями: переход от одного к другому не требует никакой дополнительной информации.

Приведем, наконец, классическую формулировку теоремы о нулях на языке систем уравнений.

Теорема. Пусть K - алгебраически замкнутое поле, $F_i \in K[T_1,\dots,T_n]$, $i \in I$ - некоторое семейство многочленов.

а. Система уравнений $F_i = 0$, $i \in I$ имеет решение в K, если и только если уравнение $1 = \sum F_i X_i$ неразрешимо в $K[T_1,\dots,T_n]$, то есть идеал (F_i) не совпадает со всем кольцом.

б. Если многочлен $G \in K[T_1,\dots,T_n]$ обращается в нуль во всех решениях системы $F_i = 0$, $i \in I$, то для некоторого натурального числа n имеем

$$G^n = \sum F_i G_i, \quad G_i \in K[T_1,\dots,T_n].$$

Доказательство. Если идеал (F_i) не совпадает со всем кольцом, то $\operatorname{Spec} K[T_1,\dots,T_n] / (F_i)$ непуст (теорема 2.3); поэтому в нем есть и максимальный идеал, поле классов вычетов которого совпадает с K (предложение 8.3); образы T в этом поле дают решение системы уравнений $F_i = 0$.

Если G обращается в нуль во всех решениях этой системы, то его образ в кольце $K[T_1,\dots,T_n]/(F_i)$ принадлежит пересечению всех максимальных идеалов этого кольца и значит, по теореме 8.I, пересечению всех простых идеалов. Поэтому он нильпотентен в силу теоремы 3.I.

9. Обобщенные дзета-функции

Назовем кольца конечного типа над полем геометрическими, а кольца конечного типа над $\mathbb{Z}$ - арифметическими.

Эти два класса колец имеют непустое пересечение - кольца конечного типа над конечными полями. Сплав арифметических и геометрических свойств, которым обладают кольца такого типа (и склеенные из них спектры пространств), был продемонстрирован А.Вейлем в его знаменитых гипотезах о дзета-функции.

Мы введем здесь дзета-функции арифметических колец A и укажем их простейшие свойства.

Мотивировка введения дзета-функции состоит в том, что замкнутые точки x в спектре арифметического кольца имеют естественную "норму" $N(x)$ - число элементов в конечном поле $k(x)$ (см. 8.5) и количество точек данной нормы конечно. Можно ожидать, что прямой подсчет таких точек доставит интересные инварианты кольца.

9.1. Лемма. Пусть A - арифметическое кольцо. Введем следующие инварианты кольца A и пространства $\operatorname{Spec} A$: $n(p^a)$ - число замкнутых точек $x \in \operatorname{Spec} A$, для которых $N(x) = p^a$; $\nu(p^a)$ - число геометрических точек кольца A со значением в $\mathbb{F}_{p^a}$ (поле из p^a элементов). Все эти числа конечны и связаны следующими соотношениями

$$\nu(p^a) = \sum_{b/a} b\, n(p^b).$$

Доказательство. Каждая геометрическая $\mathbb{F}_{p^a}$-точка кольца A есть гомоморфизм $A \to \mathbb{F}_{p^a}$. Рассмотрим все геометрические точки с одним и тем же центром x; тогда $\mathfrak{p}_x \in A$ - ядро соответствующего гомоморфизма, а его образ совпадает с единственным подполем $\mathbb{F}_{p^b} \to \mathbb{F}_{p^a}$, где $p^b = N(x)$. Всего гомоморфизмов с фиксированным ядром и образом имеется ровно b, ибо $\mathbb{F}_{p^b} / \mathbb{F}_p$ расширение Галуа степени b. Поэтому

$$\nu(p^a) = \sum_{b/a} b \sum_{\substack{x \\ N(x)=p^b}} 1 = \sum_{b/a} b\, n(p^b).$$

(Это равенство имеет очевидный смысл, даже если мы не знаем, что $\nu(p^a)$ и $n(p^s)$ конечны).

В частности, $n(p^a) \le \nu(p^a)$, и достаточно доказать конечность ν. $\operatorname{Spec} A$ отождествляется с замкнутым подмножеством в $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ и $N(x)$ не зависит от того, рассматриваем мы точку x как принадлежащую $\operatorname{Spec} A$ или $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$. Поэтому в очевидных обозначениях

$$\nu_A(p^a) \le \nu_{\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]}(p^a) = p^{na}$$

(p^{na} - это просто число геометрических точек n-мерного аффинного пространства над полем из p^a элементов).

Лемма доказана.

9.2. Теперь мы определим ζ-функцию любого арифметического кольца A сначала как формальное произведение.

Определение: $\zeta_A(s) = \prod_{x \in \operatorname{Spm} A} (1 - N(x)^{-s})^{-1}$.

Конечно, для $A = \mathbb{Z}$ получается обычное эйлерово произведение

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$$

по всем простым числам p.

Связь дзета-функция с числами $n(p^a)$ и $\nu(p^a)$ дается следующим очевидным тождеством:

$$(1) \qquad \zeta_A(s) = \prod_p \prod_{a=1}^{\infty} (1 - p^{-as})^{-n(p^a)} = \prod_p \zeta_{A/pA}(s)$$

и еще одним, несколько менее очевидным:

$$(2) \qquad \ln \zeta_A(s) = \sum_p \sum_a \nu(p^a) \frac{p^{-as}}{a}.$$

(Доказательство:

$$\ln \zeta_A(s) = -\sum_p \sum_b \ln(1-p^{-bs})\, n(p^b) =$$

$$= -\sum_p \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n(p^b) \frac{p^{-bks}}{k} =$$

$$= \sum_p \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b/a} \frac{p^{-as\frac{b}{a}}}{a} n(p^b) =$$

$$= \sum_p \sum_a \nu(p^a)\, p^{-as} a^{-1}$$

в силу леммы 9.I).

Поэтому вычисление ζ -функции равносильно вычислению чисел $n(p^a)$ или $\nu(p^a)$ для всех p, a.

Формула (I) показывает, что $\zeta_A(s)$ разбивается в произведение дзета-функций для колец конечного типа над конечным полем. Отсюда ни в коей мере не следует, конечно, что к ним сводится изучение ζ -функций - пример функции Римана показывает, насколько нетривиальным может быть поведение глобальной дзета-функции при простейших локальных множителях.

Однако и отдельные p -множители могут быть достаточно сложно устроены, если A - нетривиальное кольцо.

Часть гипотез Вейля, доказанная Б.Дворкиным, показывает, однако, что <u>для любого кольца конечного типа A характеристики p, $\zeta_A(s)$ является рациональной функцией от p^{-s}</u>.

Для таких колец удобно ввести замену переменной $p^{-s} = t$ и положить

$$\zeta_A(s) = Z_A(t).$$

Тогда формула (2) показывает, что

$$\ln Z_A(t) = \sum_a \nu(p^a)\, t^a a^{-1}$$

или

$$\frac{Z_A'(t)}{Z_A(t)} = \sum_{a=1}^{\infty} \nu(p^a)\, t^{a-1}$$

Рациональность $Z_A(t)$, в частности, устанавливает, что последовательность $\nu_a = \nu(p^a)$ должна удовлетворять некоторому рекуррентному соотношению типа

$$\nu_{a+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \nu_{a+i}$$

для достаточно больших a (n, τ_i – некоторые фиксированные константы). Так как ν_a – числа решений системы уравнений в конечных полях растущей степени, утверждение о рациональности имеет прямой арифметический смысл.

Для всех исследований дзета-функции колец A характеристики p фундаментальное значение имеет то обстоятельство, что $\nu(p^k)$ можно представить как число неподвижных точек некоторого отображения F^k, действующего на множестве геометрических точек кольца.

9.3. Определение. Морфизмы Фробениуса $F: A \to A$ кольца характеристики p называются отображения $F(g) = g^p$, $g \in A$.

Тот же термин применяется к соответствующему морфизму спектров ^aF, к степеням F^k и $(^aF)^k$ и к отображениям, которые они индуцируют на различных других объектах. В частности, пусть $\bar{\mathbb{F}}_p$ – алгебраическое замыкание простого поля характеристики p. Тогда морфизм Фробениуса F индуцирует отображение множества $\bar{\mathbb{F}}_p$ в себя, которое мы для краткости обозначаем так же F:

$$F: A(\bar{\mathbb{F}}_p) \to A(\bar{\mathbb{F}}_p)$$

9.4. Предложение. $A(\bar{\mathbb{F}}_p)$ совпадает с множеством неподвижных точек отображения F^a.

Доказательство. Пусть $\varphi \in A(\overline{\mathbb{F}}_p)$; φ представлен гомоморфизмом $\varphi: A \to \overline{\mathbb{F}}_p$, а $F^a\varphi$ - гомоморфизмом $f \rightsquigarrow \varphi(f)^{p^a}$, $f \in A$.

Условие $\varphi \in A(\mathbb{F}_{p^a})$ означает, что $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{F}_{p^a} \subset \overline{\mathbb{F}}_p$, то есть что $\varphi(f)^{p^a} = \varphi(f)$ для всех f . Стало быть, $F^a\varphi = \varphi$. Обратное утверждение следует из теории Галуа: $\mathbb{F}_{p^a}$ является полем инвариантов для F^a. Предложение доказано.

9.5. Если на компактном топологическом многообразии V действует некоторый эндоморфизм F , то для числа $\nu(F)$ его неподвижных точек (надлежащим образом определенного) справедлива знаменитая формула Лефшеца:

$$\nu(F) = \sum_{i=0}^{\dim V} (-1)^i \operatorname{Tr} F\Big|_{H^i(V)} \tag{3}$$

(под знаком суммы стоят следы линейных операторов, которые F индуцирует на пространствах когомологий V с комплексными коэффициентами).

Мы еще не ввели геометрических объектов, которые были бы "достаточно похожи" на компактные топологические многообразия - их роль играют гладкие проективные схемы. Позже, когда они будут в нашем распоряжении, мы введем и для них дзета-функции и сформулируем точно гипотезы Вейля. Существенная часть этих гипотез состоит в предположении, что числа $\nu(p^a)$ <u>всегда</u> выражаются формулами типа Лефшеца (3). (В упражнениях мы предлагаем читателю вывести отсюда рациональность Z-функций).

В заключение остановимся на вопросе о сходимости эйлеровских произведений и рядов Дирихле, с которыми мы оперировали до сих пор чисто формально.

9.6. Определение. <u>Пусть</u> A - <u>арифметическое кольцо</u>, $\{x_i\}$ - <u>общие точки его неприводимых компонент. Определим размерность кольца</u> A , <u>положив</u>

$$\dim A = \begin{cases} \max\limits_i (t - \deg k(x_i)) + 1, & \text{если } \mathbb{Z} \subset A \\ \max\limits_i (t - \deg k(x_i)) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(Степень трансцендентности вычисляется над простым подполем поля классов вычетов $k(x_i)$. Размерность, которую мы ввели, рассматривал еще Кронекер).

9.7. Теорема. <u>Эйлерово произведение $\prod\limits_{x \in \operatorname{Spm} A} (1 - N(x)^{-s})^{-1}$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > \dim A$.</u>

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 8.1, мы будем проверять теорему, последовательно расширяя класс рассматриваемых колец. Мы считаем известным сходимость произведения для функции Римана $\zeta_{\mathbb{Z}}(s)$.

а. Пусть $A = \mathbb{F}_p[T_1, \ldots, T_n]$. Из формулы (2) следует, что ряд (2) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > n = \dim A$ к функции $\ln(1 - p^{n-s})^{-1}$, потому что $\nu(p^a) = p^{an}$.

Отсюда вытекает, что в тех же условиях эйлерово произведение для кольца A абсолютно сходится к $(1 - p^{n-s})^{-1}$.

б. Пусть A – кольцо без делителей нуля конечного типа над $\mathbb{F}_p$. Пользуясь теоремой о нормализации Нётера, найдем подкольцо многочленов $B = \mathbb{F}_p[T_1, \ldots, T_n] \subset A$ такое, что A – B-модуль с конечным числом образующих. Существует такая константа d, что над каждой геометрической $\overline{\mathbb{F}}_p$-точкой кольца B лежит не больше d геометрических точек кольца A. В самом деле, пусть гомоморфизм $A \to \overline{\mathbb{F}}_p$ задан на подкольце B. Чтобы продолжить его на A, мы должны задать образы в $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного числа образующих B над A, каждый из которых является корнем целого уравнения с коэффициентами в A. Образы этих коэффициентов уже определены, поэтому корни уравнений определяются конечным числом способов.

Отсюда следует, что $\nu_A(p^a) \le d\,\nu_B(p^a) = d\,p^{na}$. Следовательно, $\zeta_A(s)$, как выше, абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > n = \dim A$. Более того, в этой области верна оценка

$$(*) \qquad |\ln \zeta_A(s)| \le d \ln(1 - p^{n-\sigma}), \quad \sigma = \operatorname{Re} s$$

в. A – произвольное кольцо конечного типа над $\mathbb{F}_p$. Пусть $p_i \subset A$ – все минимальные простые идеалы кольца A, $A_i = A/p_i$. Каждая геометрическая точка $\operatorname{Spec} A$ лежит на какой-нибудь неприводимой компоненте, поэтому

$$\nu_A(p^s) \le \sum_i \nu_{A_i}(p^s),$$

так что эйлерово произведение для A сходится при $\operatorname{Re} s > \max \dim A_i$ и мажорируется там

$$|\ln \zeta_A(s)| \le \sum d_i \ln(1-p^{n_i-s})^{-1}, \quad n_i = \dim A_i.$$

г. $A = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$. Вычисление в пункте а) показывает, что в этом случае

$$\zeta_A(s) = \prod_p (1-p^{n-s})^{-1} = \zeta(s-n)$$

обычная дзета-функция Римана со сдвинутым аргументом, эйлерово произведение которой, как хорошо известно, абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(s-n) > 1$, то есть $\operatorname{Re} s > n+1 = \dim A$.

д. A – кольцо без делителей нуля, содержащее $\mathbb{Z}$. Если бы мы могли найти подкольцо многочленов $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \subset A$, над которым A было бы цело, рассуждение пункта б) привело бы к цели. К сожалению, это не всегда возможно; но можно поправить дело ценой локализации по конечному числу простых чисел.

Точнее говоря, применим теорему Нётера к кольцу $A' = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ и найдем в нем подкольцо многочленов $\mathbb{Q}[T_1, \dots, T_n]$, над которым A цело. Умножив в случае необходимости T_i на целые числа, мы сможем добиться того, что $T_i \in A$. Любой элемент кольца A над $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ удовлетворяет некоторому уравнению, старший коэффициент которого является целым числом. Рассмотрим множество простых делителей всех таких старших коэффициентов для некоторой конечной системы образую-

щих A над $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$ и обозначим через S порожденную или мультипликативную систему. Тогда A_S цело над $\mathbb{Z}_S[T_1,\dots,T_n]$. Далее,

$$\zeta_A(s)=\prod_{p\in S}\zeta_{A/(p)}(s)\prod_{p\notin S}\zeta_{A/(p)}(s). \tag{5}$$

Множество $p\in S$ конечно и, по доказанному выше, $\zeta_{A/(p)}(s)$ равномерно сходится для $\operatorname{Re} s>\dim A/p\le\dim A-1$.

При $p\notin S$ имеем $\zeta_{A/(p)}(s)=\zeta_{A_S/(p)}(s)$ и константу d для пары колец $\mathbb{Z}_S[T_1,\dots,T_n]/(p)\subset A_S/(p)$, определенную в пункте б), можно выбрать независящей от p. Действительно, класс $\bmod p$ фиксированной системы целых образующих A_S над $\mathbb{Z}_S[T_1,\dots,T_n]$ дает систему образующих в $A_S/(p)$ для всех $p\notin S$. Поэтому второе (бесконечное) произведение в (5) для $\sigma=\operatorname{Re} s>\dim A/p$ мажорируется произведением

$$\prod_{p\notin S}(1-p^{n-\sigma})^{-d}$$

и, стало быть, равномерно сходится при $\sigma>n+1=\dim A$.

г. Наконец, общий случай арифметического кольца A тривиально сводится к уже разобранным разложением $\operatorname{Spec} A$ на неприводимые компоненты, как в пункте в).

Теорема доказана.

10. Расслоенное произведение

В этом параграфе нет никаких содержательных теорем. Здесь излагается конструкция расслоенного произведения аффинных схем. Это понятие, несмотря на свою простоту, относится к числу самых фундаментальных и объясняет популярность тензорных произведений в современной коммутативной алгебре. Наша главная цель – связать с ними геометрические интуитивные представления.

Перед чтением этого раздела мы рекомендуем просмотреть дополнение "Язык категорий", особенно п.п. 4, 9, 10.

Начнем с общего определения.

10.1. Определение. Пусть C – некоторая категория, $S \in Ob\, C$, C_S – категория "объектов над S" ("Язык категорий", п. 4). Расслоенным произведением двух объектов над S: $\varphi: X \to S$, $\psi: Y \to S$ называется их произведение в C_S.

Иначе говоря, это расслоенное произведение представляет собой тройку (Z, π_1, π_2), где $Z \in Ob\, C$, $\pi_1: Z \to X$, $\pi_2: Z \to Y$ со следующими свойствами:

а. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & S \end{tikzcd} \tag{I}$$

коммутативна. (Тогда $(Z, \varphi\pi_1) = (Z, \psi\pi_2) \in Ob\, C_S$, $\pi_1, \pi_2 \in Mor\, C_S$).

б. Для любого объекта $\chi: Z' \to S$ (ниже он обозначается просто Z') в C_S множество $Hom_{C_S}(Z', Z)$ отождествляется с $Hom_{C_S}(Z', X) \times Hom_{C_S}(Z', Y)$ с помощью отображений, индуцированных морфизмами π_1, π_2. (Иначе говоря, (Z, π_1, π_2) – универсальный объект в классе таких троек, делающих диаграмму

(1) коммутативной).

Диаграмма типа (1) со свойствами (1) иногда называется "*декартовым квадратом*". Объект Z в ней обычно обозначается $X \times_S Y$ и называется сам по себе расслоенным произведением X и Y над S. Пользуясь этим кратким обозначением, не следует забывать, что в нем опущено явное указание морфизмов $X \to S$, $Y \to S$ и $X \times_S Y \to X$, $X \times_S Y \to Y$.

Обычное прямое произведение формально говоря, не является частным случаем расслоенного; но это так, если в категории C имеется "конечный объект" E такой, что $Hom_C(X,E)$ состоит ровно из одного элемента для всех $X \in Ob\, C$. Тогда $X \times_E Y$ – по существу то же самое, что и $X \times Y$.

Расслоенное произведение существует без ограничений в категории множеств Ens; мы проиллюстрируем его смысл на нескольких примерах.

10.2. Лемма. *Пусть* $X \xrightarrow{\varphi} S$, $Y \xrightarrow{\psi} S$ – *отображения множеств; положим*

$$Z = \{(x,y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\} \subset X \times Y$$

и определим $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ *как отображения, индуцированные проекциями* $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$. *Тогда тройка* (Z, π_1, π_2) *образует расслоенное произведение* X *и* Y *над* S.

Доказательство [illegible]

Эта конструкция объясняет [illegible] *данной* [illegible] [illegible]

[illegible] слоев X [illegible]

Частными случаями этой [illegible]

[illegible] встречаются [illegible]

[illegible] *произведение* [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Z [illegible] X [illegible]

Пример: слой отображения. Пусть $Y = E$, $\varphi(E) = s$. Тогда $Z = \varphi^{-1}(s)$.

Более общо, если φ – вложение, отождествляя Y с $\varphi(Y) \subseteq S$, имеем $Z = \varphi^{-1}(Y)$.

Пример: замена базы. Эта терминология употребляется в топологии: если $X \xrightarrow{\pi} S$ – расслоение (в каком нибудь смысле), $\varphi: S' \to S$ – морфизм топологических пространств, расслоение $X' = X \times_S S'$ называется получившимся из $X \to S$ "заменой базы" S на S'. Другое название – "индуцированное расслоение".

Эти примеры послужат нам образцом для введения соответствующих понятий в категории схем (пока только аффинных).

Прежде всего теорема существования.

10.3. Теорема. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} C$, где A и B – C-алгебры. Расслоенное произведение схем X и Y над S существует и представлено тройкой $(\operatorname{Spec} A \otimes_C B, \pi_1, \pi_2)$, где π_1 (соотв. π_2) – отображение, индуцированное гомоморфизмом C-алгебр $A \to A \otimes_C B$: $f \mapsto f \otimes 1$ (соотв. $B \to A \otimes_C B$ $g \mapsto 1 \otimes g$).

Доказательство: мы отсылаем читателя к "Алгебре" Бурбаки, гл. XVI § 4, предложение 5, где устанавливается что в категории колец A и B существует "расслоенное произведение" и называется именно так, как указано. "Обращение стрелок" даёт нужный нам результат.

Отметим, что в частности выделены $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, что мы можем получить от "абсолютного" произведения $X \times Y = \operatorname{Spec} A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

10.4. Предупреждение. Множество точек схемы $X \times_S Y$ за редкими исключениями, не является расслоенным произведением множеств точек X и Y над S. Это верно лишь для точек со значениями в C-алгебрах ($S = \operatorname{Spec} C$), или, что то же для множеств морфизмов над S: $Z \to X \times Y$. Вот два типичных примера, показывающих, что может происходить

Пример. K – поле, $S = \operatorname{Spec} K$, $X = \operatorname{Spec} K[T_1]$, $Y = \operatorname{Spec} K[T_2]$ с очевидными морфизмами. Здесь $X \times_S Y$ – плоскость над K, и на ней есть масса незамкнутых точек – общие точки неприводимых кривых, "непараллельных осям" – которые не представлены парами точек (x, y), $x \in X$, $y \in Y$.

Пример. Пусть $L \supset K$ – пара полей; будем считать, что это конечное расширение Галуа. Пусть $X = \operatorname{Spec} L$, $S = \operatorname{Spec} K$; попытаемся вычислить $X \times_S X$, то есть $L \otimes_K L$.

Представим второй из сомножителей L в виде $L = K[T]/(F(T))$, где $F(T)$ – неприводимый многочлен. Иначе говоря, выберем в L "примитивный элемент" $t = T \bmod (F)$ над K.

Из определения тензорного произведения легко следует, что в этом случае $L \otimes_K L \simeq L[T]/(F(T))$ как L-алгебра, если считать, что структура L-алгебры на $L \otimes_K L$ определяется отображением $l \to l \otimes 1$. Но, по предположению, $F(T)$ распадается в $L(T)$ на линейные множители:

$F(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - t_i)$, где (t_i) – все сопряженные t над K, $n = [L:K]$.

По общей теореме о структуре модулей над кольцом главных идеалов (Ленг. Алгебра, гл. XV, § 2, теорема 3), получаем отсюда:

$$L \otimes_K L \simeq L[T]/\left(\prod_{i=1}^{n}(T - t_i)\right) \simeq \prod_{i=1}^{n} L[T]/(T - t_i) \simeq L^n.$$

В частности, $\operatorname{Spec} L \otimes_K L \simeq \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} L$: хотя $\operatorname{Spec} L$ состоит из единственной точки, $\operatorname{Spec} L \otimes_K L$ имеет их n!

Неприятность другого характера может произойти, если в этом же примере взять в качестве L чисто несепарабельное расширение поля K. Пусть, например, $F(T) = T^p - g$, где $g \in K \setminus K^p$, p – характеристика поля K. Тогда в $L[T]$ имеем $T^p - g = (T - t)^p$, где $t = g^{1/p}$, так что

$$L \otimes_K L \simeq L[T]/(T-t)^p \simeq L[T]/(T^p):$$

мы приобрели нильпотенты, которых раньше не было. "Зато" $\operatorname{Spec} L \otimes_K L$ по-прежнему состоит из единственной точки.

В качестве упражнения читателю предлагается разобрать, как устроено кольцо $L \otimes_K L$ для произвольного конечного расширения полей $L \supset K$. В частности, какова структура L-алгебры $L \otimes_K L$ в вычисленных примерах относительно отображения $\ell \to 1 \otimes \ell$?

Теперь мы приведем несколько примеров, параллельных теоретико-множественным конструкциям.

10.5. Пример. Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $Y_1 \xrightarrow{i_1} X$, $Y_2 \xrightarrow{i_2} X$ – две замкнутые подсхемы X, определенные идеалами $a_1, a_2 \subset A$. В силу 7.2 их пересечение $Y_1 \cap Y_2$ представляет функтор $Y_1(Z) \cap Y_2(Z)$, то есть должно совпадать с их расслоенным произведением над X. Так оно и есть: соответствующее утверждение о кольцах

$$A/(a_1+a_2) \simeq A/a_1 \otimes_A A/a_2$$

легко проверяется непосредственно.

10.6. Пример. Пусть $\operatorname{Spec} B = Y \to X = \operatorname{Spec} A$ – морфизм аффинных схем, $x \in X$ – некоторая точка, $\overline{k(x)}$ – алгебраическое замыкание ее поля вычетов. Естественный гомоморфизм $A \to \overline{k(x)}$ представляет геометрическую точку с центром в x. Расслоенное произведение

$$Y_x = Y \times_X \operatorname{Spec} \overline{k(x)}$$

называется геометрическим слоем Y над точкой x, а $Y \times_X \operatorname{Spec} k(x)$ – обыкновенным слоем.

5*-1523

Частный случай: для любого простого числа p и кольца A, $\operatorname{Spec} A/pA$ является слоем $\operatorname{Spec} A$ над $(p) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

10.7. Диагональ. Пусть $\operatorname{Spec} B = X \longrightarrow S = \operatorname{Spec} A$ – морфизм аффинных схем; коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

определяет морфизм $\delta : X \to X \times_S X$ (см. 10.1 с.), который называется диагональным.

10.8. Предложение. Морфизм δ отождествляет X с замкнутой подсхемой Δ_X схемы $X \times_S X$, которая называется (относительной) диагональю и определяется идеалом

$$I = \operatorname{Ker}(B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B) \quad ; \quad \mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2 .$$

Доказательство. Выписывая все необходимые диаграммы колец, убеждаемся, что $\delta = {}^a\mu$. Так как μ – сюръективное отображение, его ядро определяет замкнутую подсхему, изоморфную образу δ.

III. Отступление: аффинные групповые схемы

В этом параграфе мы приведем определение и несколько важнейших примеров аффинных групповых схем. Кроме важности самого понятия, оно интересно тем, что выпукло показывает роль и возможности "категорного" и "структурного" подходов. Мы свободно пользуемся обозначениями дополнения "Язык категорий".

Мы последовательно приведем два определения групповой структуры на объекте категории и сравним их, в частности, в категории схем.

III.1. Первое определение групповой структуры. Пусть $\mathcal{C}$ - некоторая категория, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Групповая структура на объекте X состоит в задании (теоретико-множественных) групповых структур на всех множествах $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, которое подчинено следующему условию:

для всякого морфизма $Y_1 \to Y_2$ соответствующее отображение множеств $h_X(Y_2) \to h_X(Y_1)$ является гомоморфизмом групп.

Объект X вместе с групповой структурой на нем называется группой в категории $\mathcal{C}$ и часто обозначается просто X. Морфизм объектов $X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ называется морфизмом соответствующих групп, если все отображения $h_{X_1}(Y) \to h_{X_2}(Y)$ - гомоморфизмы групп.

Группу в категории аффинных схем мы будем называть аффинной групповой схемой или просто аффинной группой.

Вот список важнейших примеров с их стандартными обозначениями и названиями.

III.2. Пример: мультипликативная группа $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$. Для любой схемы $X = \mathrm{Spec}\,A$ морфизм $X \to \mathbb{G}_m$ однозначно определяется элементом $t \in A$ - образом T при гомоморфизме $\mathbb{Z}[T, T^{-1}] \to A$. Наоборот, t соответствует такому морфизму, если и только если $t \in A^*$ (группа единиц или обратимых элементов кольца A). Поэтому

$$h_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spec}\,A) = \mathbb{G}_m(A) \simeq A^*,$$

и на множестве A-точек определена естественная групповая структура (умножение). Далее, любой гомоморфизм колец $A \to B$ очевидно, индуцирует гомоморфизм групп $A^* \to B^*$. Этим определяется групповая структура на $\mathbb{G}_m$

Пример: аддитивная группа $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$. Как выше морфизм $\operatorname{Spec} A \to \mathbb{G}_a$ однозначно определяется элементом $t \in A$, образом T, который можно выбрать произвольно. Аддитивные группы колец A определяют структуру группы на $\mathbb{G}_a$.

Иначе говоря, $\mathbb{G}_m$ представляет функтор $\operatorname{Spec} A \rightsquigarrow A^*$, $\mathbb{G}_a$ - функтор $\operatorname{Spec} A \rightsquigarrow A^+$.

Пример: полная линейная группа $\mathbb{GL}_n = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_{ij}, (\det(T_{ij}))^{-1}]$, где $i,j = 1, \dots, n$. Она представляет функтор $\operatorname{Spec} A \rightsquigarrow$ (группа обратимых (n,n)-матриц с элементами из A).

Очевидно, $\mathbb{GL}_1 \simeq \mathbb{G}_m$.

Пример: группа корней из единицы степени n: $\mu_n = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]/(T^n - 1)$. Она представляет функтор

$$\operatorname{Spec} A \rightsquigarrow \{\text{множество } t \in A^* \mid t^n = 1\}.$$

Схема этой группы является замкнутой подсхемой $\mathbb{G}_m$. Более общо, пусть задана аффинная групповая схема X и ее замкнутая подсхема Y; если для всех схем Z подмножество $h_Y(Z) \subset h_X(Z)$ является подгруппой, то Y вместе с индуцированной групповой структурой называется замкнутой подгруппой группы X. Тем самым, μ_n - замкнутая подгруппа $\mathbb{G}_m$.

Более того, отображение $T \rightsquigarrow T^n$ определяет гомоморфизм групповых схем $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ "возведения в степень n" и μ_n представляет ядро этого гомоморфизма.

Пример: схема конечной группы G. Пусть G - обычная (теоретико-множественная) конечная группа. Положим $A = \mathbb{Z}^G = \prod_{g \in G} \mathbb{Z}$. Иначе говоря, A как группа есть свободный модуль $\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}_g$ с таблицей умножения

$$e_g e_h = \begin{cases} 0 & \text{при } g \neq h, \\ e_g & \text{при } g = h. \end{cases}$$

$X = \operatorname{Spec} A$ несвязен и состоит из компонент $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, пронумерованных элементами из G. Для любого кольца B, спектр которого связен, множество морфизмов $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ находится поэтому в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы G.

Если $\operatorname{Spec} B$ несвязен, морфизм на $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ определяется своим набором ограничений связные компоненты $\operatorname{Spec} B$. Обозначим их множество символом $\operatorname{Conn} B$; тогда, как мы показали

$$h_X(\operatorname{Spec} B) \simeq (G)^{\operatorname{Conn} B}.$$

Таким образом, схема $X = \operatorname{Spec} A$ имеет естественную групповую структуру. Она называется схемой группы G.

Пример: пусть $S = \operatorname{Spec} K$. Групповой объект в категории аффинных схем над S называется аффинной S-группой (или K-группой). Полагая $\mathbb{G}_{m,K} = \mathbb{G}_m \times S$, $\mu_{n,K} = \mu_n \times S$ и т.д., мы получаем серию групп над произвольной схемой S или кольцом K. Каждая из них представляет "тот же" функтор, что и соответствующая абсолютная группа, но ограниченный на категорию K-алгебр.

Пример: линейные алгебраические группы. Пусть K – поле. Замкнутая подгруппа полной линейной группы $GL_{n,K}$ называется линейной алгебраической группой, определенной над полем K.

Иначе говоря, линейная алгебраическая группа определяется системой уравнений

$$X: \quad F_\alpha(T_{ij}) = 0, \qquad i,j = 1, \dots, n,$$

которая обладает следующим свойством. Пусть $(t'_{ij}), (t''_{ij})$ – два решения системы X в K-алгебре A, образующие невырож-

денные матрицы. Тогда матрица $(t_{ij})(t'_{ij})^{-1}$ - также является решением X.

Место линейных алгебраических групп в общей теории выясняет следующая фундаментальная теорема (Розенлихт, Шевалле), которую мы приведем здесь без доказательства.

II.3. Теорема. Пусть X - аффинная групповая схема конечного типа над полем K. Тогда X изоморфна линейной алгебраической группе.

Напомним, что Герман Вейль присвоил полной линейной группе титул "Ее Всеобъемлющее Величество".

II.4. Пример: группы дают еще один повод поговорить о нильпотентах. Пусть K - поле характеристики $p \neq 0$. Тогда

$$\mu_{p,K} = \operatorname{Spec} K[T]/(T^p-1) = \operatorname{Spec} K[T]/((T-1)^p).$$

Очевидно, $K[T]/((T-1)^p)$ - локальная артинова алгебра длины p и ее спектр должен рассматриваться как " p -кратная точка". Это вполне соответствует обычной интуиции: корни из единицы p -й степени все склеиваются и превращаются в один корень кратности p.

Более общо

$$\mu_{p^n,K} = \operatorname{Spec} K[T]/(T-1)^{p^n},$$

так что длина нильрадикала может быть как угодно большой.

Оказывается, однако, что наличие нильпотентов в группах существенно связано с конечностью характеристики.

II.5. Теорема (Картье). Пусть X - линейная алгебраическая групповая схема над полем характеристики нуль. Тогда она приведена, то есть в ее кольце нет нильпотентов.

У нас еще не хватает технических средств для доказательства этого результата: см., например, Д.Мамфорд. Лекции о кривых на алгебраической поверхности, § 25.

Теперь мы приведем второе определение групповой структуры на объекте X категории $\mathcal{C}$, которое оперирует только с

самим объектом X, а не со всеми объектами категории.

Пусть в $\mathcal{C}$ существует:

а) конечный объект E;

б) произведения $X \times X$, $X \times X \times X$.

11.6. Второе определение групповой структуры. Групповая структура на объекте X состоит в задании трех морфизмов:

$$m : X \times X \to X \qquad (\text{"умножение"}),$$
$$i : X \to X \qquad (\text{"обращение"}),$$
$$e : E \to X \qquad (\text{"единица"}),$$

которые удовлетворяют следующим аксиомам.

Аксиома ассоциативности: диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "(m, id_X)"] \arrow[d, "(id_X, m)"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Аксиома левого обращения: диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "(i, id_X)"] & & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \arrow[u, "\delta"] \arrow[dr] & & X \\ & E \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

(δ – диагональный морфизм) коммутативна.

Аксиома левой единицы: диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "(e, id_X)"] & E \times X \arrow[r, "(e, id_X)"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнения. [illegible]

II.7. В категории множеств Ens это обычное определение группы на несколько непривычном языке. Пусть X - множество, $x, y, z \in X$; тогда в стандартных обозначениях

$$m(x,y) = xy \quad , \quad i(x) = x^{-1}, \quad e(E) = 1 .$$

Аксиомы (в порядке их появления) записываются в виде:

$$(xy)z = x(yz) ,$$
$$x^{-1}x = 1 ,$$
$$1x = x ,$$

и, стало быть, превращают X в обычную группу.

II.8. <u>Эквивалентность двух определений групповой структуры.</u> Пусть на $X \in Ob\, C$ задана групповая структура в смысле второго определения. Тогда для всякого $Y \in Ob\, C$ морфизмы m, i, e индуцируют структуру группы на множестве Y - точек $h_X(Y)$ в силу предыдущего значения. Проверку совместимости этих структур с отображениями $h_X(Y_1) \to h_X(Y_2)$ мы оставляем читателю.

Наоборот, пусть на $X \in Ob\, C$ задана групповая структура в смысле первого определения. Мы хотим восстановить по ней морфизмы m, i, e.

а. В группе $h_X(X \times X)$ есть "проекции": $\pi_1, \pi_2 : X \times X \to X$. Положим $m = \pi_1 \pi_2$ (произведение в смысле группового закона!)

б. В группе $h_X(X)$ есть элемент id_X. Обратный к нему (в смысле группового закона) обозначим i.

в. В группе $h_X(E)$ есть единичный элемент. Обозначим его $e : E \to X$.

Упражнения. 1) Доказать, что m, i, e удовлетворяют аксиомам второго определения.

2) Проверить, что построенные отображения

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{множество структур группы на } X \\ \text{в смысле первого определения} \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{l} \text{то же в смысле} \\ \text{второго определения} \end{array} \right\}$$

взаимно обратны.

II.9. Выясним теперь, как описываются групповые структуры на заданной аффинной схеме $X = \operatorname{Spec} A$ в терминах ее кольца.

Мы будем сразу рассматривать относительный случай, то есть считать A K-алгеброй.

II.10. Определение. Структура биалгебры на A определяется заданием трех гомоморфизмов K-алгебр:

$$\mu : A \to A \otimes_K A \quad (\text{"умножение"}),$$
$$\nu : A \to A \quad (\text{"обращение"}),$$
$$\varepsilon : A \to K \quad (\text{"единица"}),$$

которые подчинены следующим аксиомам.

Аксиома коассоциативности: диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\mu \otimes id_A"'] \\ A \otimes A \arrow[u, "id_A \otimes \mu"] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Аксиома левого кообращения: диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\nu \otimes id_A"'] \\ A \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

(левая стрелка - умножение; [illegible]

Аксиома левой единицы: диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A & A \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_A"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes id_A"] & A \otimes A \\ A \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "id_A"'] & & A \arrow[u, "\mu"'] \arrow[ul, "id_A"] \end{tikzcd}$$

(левая стрелка [illegible] левая стрелка в верхней строке: [illegible]

Лингвистическое примечание. Серр называет биалгебры "бигебрами", очевидно ощущая как варваризм комбинацию "би-ал" - "ал" происходит из артикля единственного числа "аль".

II.11. Разумеется, это определение построено по двойственности с определением II.6, так что групповые структуры на K-схеме $X = \operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии со структурами биалгебры на K-алгебре A.

Пример. Выпишем явно отображения μ, ν, ε для аддитивной групповой схемы $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$:

$$\mu(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T,$$
$$\nu(T) = -T,$$
$$\varepsilon(T) = 0$$

Читателю предлагается проделать вычисления μ, ν, ε для остальных примеров, рассмотренных в п. II.2.

II.12. Определение II.10 не только доставляет удобное для вычислений описание групповых схем, но также позволяет вскрыть существование красивой и важной двойственности, впервые замеченной Картье.

Чтобы ввести ее, заметим сначала, что сама структура K-алгебры на K-модуле A может быть описана данными, близкими к тем, которые введены в п. II.10. Именно, эта структура задается K-линейными отображениями:

$$\bar{\mu} : A \otimes_K A \to A \qquad \bar{\mu}(a \otimes b) = ab$$

$$\bar{\varepsilon} : K \to A \qquad \bar{\varepsilon}(1_K) = 1_A$$

с аксиомами ассоциативности и коммутативности для $\bar{\mu}$ и единицы для $\bar{\varepsilon}$.

Если групповая схема $\operatorname{Spec} A$ к тому же коммутативна, то есть коумножение μ "симметрично" ($\mu = \tau \circ \mu$, где $\tau : A \otimes_K A \to A \otimes_K A$ переставляет множители), то мы получаем на

K -модуле A структуру "бикоммутативной биалгебры", которая определяется морфизмами модулей

$$
(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} A\otimes A \xrightarrow{\bar\mu} A \xrightarrow{\mu} A\otimes A, \\ K \xrightarrow{\bar\varepsilon} A \xrightarrow{\varepsilon} K, \\ A \xrightarrow{\nu} A \end{cases}
$$

и списком аксиом, часть которого содержится в п. II.10 (за исключением коммутативности μ), другая часть получается заменой направления стрелок на обратные и превращением $\bar\mu, \bar\varepsilon$ в μ, ε ; наконец, нужно еще потребовать, чтобы μ был гомоморфизмом алгебр с умножением $\bar\mu, \bar\mu\otimes\bar\mu$.

Пусть теперь A - свободный K -модуль, $A^* = \mathrm{Hom}_K(A,K)$. Тогда любая структура биалгебры (I) на A определяет структуру биалгебры на A^*, если перейти от (I) к двойственным диаграммам, отождествив $(A\otimes A)^*$ с $A^*\otimes A^*$ и K^* с K:

$$
(\mathrm{I})^*\qquad \begin{cases} A^*\otimes A^* \xrightarrow{\mu^*} A^* \xrightarrow{\bar\mu^*} A^*\otimes_K A^*, \\ K \xrightarrow{\varepsilon^*} A^* \xrightarrow{\bar\varepsilon^*} K, \\ A^* \xrightarrow{\nu^*} A^*. \end{cases}
$$

Проверка аксиом биалгебры для A^* совершенно тривиальна.

II.13. Определение. Пусть $X = \mathrm{Spec}\, A$ (где A свободный K-модуль) — коммутативная групповая схема над K. Тогда групповая схема $X^* = \mathrm{Spec}\, A^*$ (биалгебра, определенной выше) называется двойственной к данной схеме X.

II.14. Примеры-упражнения. Пусть $X = \mu_n$ — мультипликативной группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Доказать, $X^* \simeq$

11.15.

Пример. Фиксируем K-алгебру K'; пусть K' является свободным K-модулем конечного ранга.

Группа автоморфизмов алгебры K' над K является основным объектом изучения, например, в теории Галуа (где рассматривается лишь случай полей $K' \supset K$). Однако эта группа может оказаться тривиальной - если расширение полей ненормально или несепарабельно и т.п.

Функторная точка зрения подсказывает следующую мысль: рассмотреть всевозможные <u>замены базы</u> K, то есть для переменной K-алгебры L построить $L' = L \otimes_K K'$ и вычислить группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L'/K)$.

Мы одновременно покажем, что отображение $L \rightsquigarrow \mathrm{Aut}(L'/L)$ является функтором и что этот функтор представим.

Выберем раз навсегда свободный базис модуля K' над K: $K' = \bigoplus_{i=1}^{n} Ke_i$. В этом базисе закон умножения K' задается системой коэффициентов $c_{ij}^k \in K$:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k .$$

Имеем, далее $L' = \bigoplus_{i=1}^{n} Le'_i$ (мы пишем e'_i вместо $1 \otimes_K e_i$), и любой эндоморфизм τ L-модуля L' задается некоторой матрицей (t_{ij}), $t_{ij} \in L$, $1 \le i,j \le n$.

Условие того, что эта матрица определяет эндоморфизм алгебры, записывается в виде соотношений

$$\tau(e'_i)\,\tau(e'_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k}\,\tau(e'_k).$$

Записывая равенство коэффициентов при e'_k слева и справа в терминах неопределенных коэффициентов T_{ij}, мы получим некоторую фиксированную систему алгебраических соотношений для T_{ij} с коэффициентами из K, выполнение которой необходимо и достаточно для того, чтобы T_{ij} давали эндоморфизм алгебры L'/L.

Автоморфизмы получаются, если мы введем дополнительную переменную T и добавим соотношение

$$T\det(T_{ij}) - 1 = 0$$

(ср. пример $\mathbb{GL}_n$).

Профакторизовав кольцо $K[T, T_{ij}]$ по описанной системе соотношений, мы, как легко видеть, получим K-алгебру, представляющую функтор $L \rightsquigarrow \mathrm{Aut}\,(L'/L)$.

Эта K-алгебра является интересным инвариантом, заменяющим в общем случае группу Галуа расширения K'/K.

Рассмотрим простейший частный случай, когда K – поле, $K' = K(\sqrt{a})$, $a \in K^* \setminus (K^*)^2$.

Мы можем положить здесь $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{a}$; таблица умножения сводится к $e_2^2 = a$.

$$\tau(1) = 1 \text{ ; пусть } \tau(\sqrt{a}) = T_1 + T_2\sqrt{a}.$$

Учитывая, что $\tau(\sqrt{a})^2 = a$, находим уравнения, связывающие T_1, T_2 и дополнительную переменную T:

$$\begin{cases} T_1^2 + aT_2^2 = a, \\ 2T_1T_2 = 0, \\ TT_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(последнее обеспечивает обратимость τ). Теперь будем различать два случая.

Характеристика K отлична от 2, так что 2 обратима в любой K-алгебре. Функтор автоморфизмов представлен K-алгеброй $K[T;T_1,T_2]/(T_1^2+aT_2^2-a;\ T_1T_2;\ TT_2-1)$.

Если L не имеет делителей нуля, то L-точки этой алгебры устроены просто: так как T_2 не должен переходить в нуль, $T_1 \rightsquigarrow 0$, откуда $T_2 \rightsquigarrow \pm 1$. Как обычная группа Галуа, здесь группа изоморфна $\mathbb{Z}_2$: автоморфизмы просто меняют знак $\sqrt{a}$! Когда у L имеются делители нуля, группа может быть гораздо больше.

Характеристика K равна 2. Функтор автоморфизмов представлен K-алгеброй $K[T,T_1,T_2]/(T_1^2+aT_2^2+a;\ TT_2-1)$. Иначе говоря, L-точками здесь являются все L-точки окружности $T_1^2+aT_2^2-a=0$, в которых значение T_2 обратимо!

Посмотрим на это ближе. Пусть L - поле и пусть (t_1,t_2) такая L-точка; тогда либо $t_2=1,\ t_1=0$ и мы получаем тождественный автоморфизм, либо $a=\left(\frac{t_1}{t_2+1}\right)^2$. Значит, нетривиальные L-точки могут существовать лишь если $\sqrt{a}\in L$; тогда уравнение окружности превращается в квадрат линейного $(T_1+\sqrt{a}\,T_2+\sqrt{a})^2=0$ и мы имеем целую прямую автоморфизмов! (без точки $T_2=0$). Группа $\mathrm{Aut}\,L'/L$ здесь, очевидно, изоморфна L^* (при итерации автоморфизмов коэффициенты при $\sqrt{a}$ перемножаются.

Тем самым, несепарабельные расширения в некотором смысле имеют даже больше автоморфизмов, чем сепарабельные. Причина здесь состоит в том, что когда $\sqrt{a}\in L$, алгебра $L'=L\otimes_K K$ содержит нильпотенты: действительно, $K(\sqrt{a})\subset L$, так что $K(\sqrt{a})\otimes_K K(\sqrt{a})\subset L'$; с другой стороны, это произведение изоморфно $K(\sqrt{a})[x]/(x^2-a)\simeq K(\sqrt{a})[y]/(y^2)$. Автоморфизмы просто умножают y на обратимые элементы.

Аналогично можно исследовать случай произвольных конечных несепарабельных расширений и построить для них теорию Галуа, которая является обобщением теории Джекобсона.

I2. Векторные расслоения и проективные модули

I2.I. Пусть $\psi : Y \to X$ - некоторый морфизм аффинных схем; $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $\varphi : A \to B$ - соответствующий гомоморфизм колец. Мы хотим выделить класс таких морфизмов, подобный локально тривиальным векторным расслоениям в топологии.

Удобно начать с введения более широкого понятия "семейства векторных пространств" (термин заимствован из книги Атья). Пример в п. 2.I показывает, что аналог векторного пространства V над полем K доставляет схема $\operatorname{Spec} S_K(V^*)$, где $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$, $S_K(V^*)$ - симметрическая алгебра пространства V^*. Заменив здесь поле K на произвольное кольцо A, а пространство V^* - на A-модуль M, мы приходим к следующему определению.

I2.2. Определение. В обозначениях предыдущего пункта пусть M - некоторый A-модуль, $\chi : M \to B$ - гомоморфизм A-модулей. Предположим, что χ индуцирует изоморфизм A-алгебр $S_A(M) \xrightarrow{\sim} B$. Тогда пара $(\chi ; \psi : Y \to X)$ называется семейством линейных пространств над $X = \operatorname{Spec} A$.

Иначе говоря, на B должна быть задана явная структура симметрической алгебры над A: это определяет послойную линеаризацию морфизма ψ.

Морфизм семейств векторных пространств над фиксированной базой определяется очевидным образом. Категория таких семейств двойственна категории A-модулей, так что, в частности, семейство определяется своим модулем с точностью до изоморфизма.

Для нас важнее сейчас другое понятие.

I2.3. Определение. В прежних обозначениях пусть еще дан гомоморфизм колец $A \to A'$, определяющий морфизм схем $X' = \operatorname{Spec} A' \to X = \operatorname{Spec} A$. Рассмотрим семейство векторных пространств $(\chi' ; \psi' : Y' \to X')$, где $Y' = \operatorname{Spec} A' \otimes_A B$, $\chi' = \mathrm{id} \otimes \chi : M' = A' \otimes_A M \to A' \otimes_A B$. Это семейство называется индуцированным заменой базы X на X'.

X' действительно является семейством векторных пространств, потому что есть канонический изоморфизм

$$(I) \qquad S_{A'}(A' \underset{A}{\otimes} M) \xrightarrow{\sim} A' \underset{A}{\otimes} S_A(M).$$

В частности, пусть A' - поле; тогда Y' - "схема" векторного пространства $(A' \underset{A}{\otimes} M)^*$ над A'. Это означает, что все слои семейства $\varphi: Y \to X$ над геометрическими точками являются векторными пространствами, что оправдывает название. Размерности слоев могут, конечно, претерпевать скачки.

Отметим еще, что в силу (I) схема Y' отождествляется с расслоенным произведением $X' \underset{X}{\times} Y$, так что наша операция замены базы в точности соответствует топологической.

12.4. Определение. Семейство векторных пространств $(\mathcal{L}; Y \to X)$ называется тривиальным, если определяющий его A-модуль свободен.

Векторными расслоениями, естественно, называть те семейства векторных пространств, которые в окрестности любой точки тривиальны. Не совсем ясно, однако, как определить свойство локальной тривиальности: ведь окрестности точек в $\operatorname{Spec} A$ являются лишь топологическими пространствами, но не схемами. Здесь мы впервые сталкиваемся с задачей, которая будет систематически исследована в следующей главе. Для ближайших целей естественно принять следующее паллиативное определение.

12.5. Определение. Семейство векторных пространств $(\mathcal{L}; Y \to X)$ называется локально тривиальным в точке $x \in X$, если существует такая открытая окрестность $\mathcal{U} \ni x$, что для любого морфизма $\varphi: X' \to X$ со свойством $\varphi(X') \subset \mathcal{U}$ индуцированное семейство $Y' \to X'$ тривиально.

Мы заменим сейчас это условие другим, которое легче проверяется. Прежде всего, специальные открытые множества $D(f)$ (см. п. 4.2) образуют базис топологии $\operatorname{Spec} A$. Поэтому в определении 12.5 достаточно рассматривать лишь окрестности $\mathcal{U} = D(f)$.

Ими обладают следующим замечательным свойством.

12.6. Предложение. Пусть A - некоторое кольцо, $f \in A$ не нильпотент, A_f - кольцо частных A относительно мультипликативной системы $(f^n)_{n \geq 0}$. Положим $X_f = \operatorname{Spec} A_f$ и обозначим через $i : X_f \to X$ морфизм, индуцированный гомоморфизмом $A \to A_f : g \mapsto g/1$.

Выполнены следующие утверждения:

а. i определяет гомеоморфизм пространств X_f и $D(f)$;

б. Для любого морфизма $\varphi : X' \to X$ со свойством $\varphi(X') \subset D(f)$ существует единственный морфизм $\psi : X' \to X_f$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X \\ & X_f \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Все это означает, что специальные открытые множества $D(f)$ снабжены канонической структурой аффинной схемы $(D(f), i^{-1}|_{D(f)} A_f)$. Далее отсюда следует, что семейство векторных пространств $Y \to X$ локально тривиально в точке $x \in \operatorname{Spec} A$, если и только если для некоторого элемента $f \in A$, $f(x) \neq 0$ семейство, индуцированное над X_f, тривиально. Переводя это на язык модулей, находим простое условие, которое будет использовано позже.

12.7. Следствие. A-модуль M определяет семейство векторных пространств, локально тривиальное в точке $x \in \operatorname{Spec} A$, если и только если существует $f \in A$, $f(x) \neq 0$ такой, что A_f-модуль $M_f = A_f \otimes_A M$ свободен.

12.8. Доказательство предложения 12.6.

а. Прежде всего i определяет взаимно однозначное отображение $\operatorname{Spec} A_f$ на $D(f)$ (аналогичное утверждение верно для любой мультипликативной системы $S \subset A$, а не только (f^n)). Действительно, пусть $p_f \subset A_f$ - простой идеал.

Его прообраз в A имеет вид $p = \{g \in A \mid \exists\, n \geq 1,\ g/f^n \in p_f\}$. Иначе говоря, $i(p_f)$ есть идеал "числителей" элементов из p_f. Так как $f/1$ обратим в A_f, если идеалы числителей для p_f и q_f совпадают, то $p = q$. Поэтому i – мономорфизм.

Наоборот, пусть p – любой идеал из $D(f)$. Тогда его локализация $p_f = \{g/f^n \mid g \in p\}$ не совпадает с A_f, является простым идеалом в A_f и удовлетворяет условию $i(p_f) = p$.

Так как отображение i непрерывно, для доказательства первого утверждения еще остается проверить, что оно открыто. В самом деле, как нетрудно убедиться,

$$i\Big(\bigcup_\kappa D(g_\kappa/f^{n_\kappa})\Big) = D(f) \cap \Big(\bigcup_\kappa D(g_\kappa)\Big).$$

6. Второе утверждение выражает известное универсальное свойство колец частных. Действительно, пусть $\psi : A \to A'$ – такой гомоморфизм колец, что $\psi(\operatorname{Spec} A') \subset D(f)$. Это означает, что f не принадлежит ни одному из идеалов $\psi^{-1}(p)$, $p \in \operatorname{Spec} A'$, то есть что $\psi(f)$ не обращается в нуль на $\operatorname{Spec} A'$. Поэтому $\psi(f)$ обратим в A'. В категории таких A'-алгебр $A \to A'_f$ является универсальным объектом (см. Ленг, Алгебра, гл. II, § 3). Это доказывает требуемое.

В частности, если $D(f) = D(g)$, то кольца A_f и A_g канонически изоморфны: ср. п. 4, упр. I.

Теперь мы можем сформулировать основное определение и главный результат этого параграфа.

12.9. Определение. <u>Векторным расслоением над схемой</u> $X = \operatorname{Spec} A$ <u>называется семейство векторных пространств, локально тривиальное в каждой точке</u> $x \in \operatorname{Spec} A$.

В остальной части этого параграфа, если не оговорено обратное, мы рассматриваем лишь <u>нетеровы кольца и модули</u>.

12.10. Теорема. <u>A-модуль M определяет векторное расслоение над $\operatorname{Spec} A$, если и только если он проективен.</u>

Напомним, что модуль M называется проективным, если он

изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.

Назовем модуль M, удовлетворяющий условию 12.7 для всех точек $x \in \operatorname{Spec} A$, локально свободным. Теорема 12.10 утверждает, что класс локально свободных модулей совпадает с классом проективных модулей. Это мы и будем доказывать: сначала включение в одну сторону, затем в другую. Придется проделать довольно длинную работу; мы воспользуемся случаем и установим по дороге несколько больше вспомогательных результатов, чем строго необходимо в этом месте. Они пригодятся нам позже в теории пучков.

12.11. Пусть $S \subset A$ – мультипликативное множество, содержащее 1, но не 0, M – некоторый A-модуль. Пусть A_S – локализация кольца A относительно S; положим $M_S = A_S \otimes M$ (но мы пишем A_f вместо $A_{(f^n)}$ и т.п.). Хотя здесь нам нужны лишь сведения об A_f, M_f, ничего не стоит получить их для общих S.

Элементы из A_S мы записываем в виде f/s, $f \in A$, $s \in S$; тогда выполняются обычные правила действий над дробями. В частности, $f/1$ есть образ f при естественном гомоморфизме $A \to A_S$. Аналогично можно записывать элементы из M_S, положив $m/s = 1/s \otimes m$; легко видеть, что $tm/ts = m/s$, и далее

$$m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss',$$

$$(f/s)(m/s') = fm/ss',$$

в частности, любой элемент из M_S имеет вид m/s.

12.12. Лемма. $m/s = 0 \iff \exists\, t \in S$ такой, что $tm = 0$. В частности, ядро естественного гомоморфизма $M \to M_S$, $m \mapsto m/1$ состоит из таких элементов m, что $Am \cap S \neq \varnothing$.

Доказательство. $tm = 0 \Rightarrow tm/ts = 0 = m/s$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим сначала частный

случай:

а. M – свободный модуль. Пусть $\{m_i\}$ – свободный A-базис M, тогда $\{m_i' = m_i/1\}$ – свободный A_S-базис M_S. Положим $m = \sum f_i m_i$, $f_i \in A$; $m/s = 0 \Rightarrow f_i/s = 0$ для всех i $\Rightarrow$ $\exists\, t_i \in S$, $t_i f_i = 0$. Положим $t = \prod_i t_i \in S$ (произведение распространено на конечное множество индексов i, для которых $f_i \neq 0$); очевидно, $t f_i = 0 \Rightarrow t m = 0$.

б. Общий случай. Существует точная последовательность

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \xrightarrow{\psi} M \to 0,$$

где F_0, F_1 – свободные модули. Умножая ее тензорно на A_S получаем точную последовательность

$$F_{1,S} \xrightarrow{\varphi_S} F_{0,S} \xrightarrow{\psi_S} M_S \to 0$$

(см. Ленг. Алгебра, гл. XVI, § 2, предложение 6). Здесь мы положили $\varphi_S = id_{A_S} \otimes \varphi$ и т.п.

Пусть $m/s = 0$, $m = \psi(n)$, $n \in F_0$. Тогда $\psi_S(n/s) = 0 \Rightarrow n/s = \varphi_S(\ell/t) = \varphi(\ell)/t$, где $\ell \in F_1$, $t \in S$. Иначе говоря, $(tn - s\varphi(\ell))/st = 0$ в $F_{0,S}$. Так как F_0 свободен, существует $\tau \in S$ такой, что $\tau t n = \tau s \varphi(\ell)$ в F_0. Применяя к этому соотношению ψ, находим

$$\tau t m = \psi(\tau t n) = \tau s\, \psi\circ\varphi(\ell) = 0,$$

что доказывает требуемое.

Заметим, что мы не пользовались нетеровостью.

12.13. Следствие. Пусть M – нетеров A-модуль, $f \in A$. Существует такое целое число $q > 0$, что $f^q m = 0$ для всех $m \in \operatorname{Ker}(M \to M_f)$.

Действительно, нужно выбрать свое значение q_i для каж-

дой из конечного числа образующих ядра и положить $q = \max q_i$).

В доказательстве 12.12 мы использовали общее свойство тензорного умножения: оно переводит короткие точные последовательности в точные всюду, кроме крайнего левого члена.

Однако умножение на A_S обладает более сильным свойством: оно сохраняет точность полностью. Технически говоря, A_S является плоской A-алгеброй.

12.14. Предложение. Для любой точной последовательности A-модулей $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ последовательность A_S-модулей

$$M_S \xrightarrow{\varphi_S} N_S \xrightarrow{\psi_S} P_S$$

точна.

Доказательство. $\psi \circ \varphi = 0 \Rightarrow \psi_S \circ \varphi_S = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} \psi_S \supset \operatorname{Im} \varphi_S$. Наоборот, пусть $n/s \in \operatorname{Ker} \psi_S$; тогда $\psi(n)/s = 0$, отсюда, по предыдущему, $t\psi(n) = 0$ для некоторого $t \in S$. Значит, $tn = \varphi(m)$, откуда $n/s = tn/ts = \varphi(m)/ts = \varphi_S(m/ts)$, что доказывает требуемое.

Пусть теперь $\varphi : M \to N$ – гомоморфизм A-модулей, $f \in A$. Он индуцирует гомоморфизм A_f-модулей $\varphi_f : M_f \to N_f$, $\varphi_f = id_{A_f} \otimes \varphi$ (мы будем говорить иногда, что φ_f поднимается до φ).

Лемма.

12.15. Пусть F – свободный нетеров A-модуль, M – нетеров A-модуль, $f \in A$, M_f – свободный A_f-модуль. Тогда для любого гомоморфизма $\varphi : M_f \to F_f$ существует такое целое число q, что гомоморфизм $f^q \varphi : M_f \to F_f$ поднимается до некоторого гомоморфизма $\psi : M \to F$.

Доказательство. Прежде всего, F_f свободен с конечным числом образующих, так что φ "состоит" из конечного числа координатных A_f-гомоморфизмов $M_f \to A_f$. Если после умножения на надлежащую степень f каждый из них поднимается до $M \to A$, то же верно и для φ. Поэтому мы будем считать, что $F = A$.

Пусть m_i $(i=1,\dots,n)$ – система образующих M. Умножив φ на подходящую степень f, мы можем считать, что $\varphi(m_i) = g_i/1$, $g_i \in A$, для всех i.

Напрашивается мысль поднять $\varphi: M_f \to A_f$ до гомоморфизма $\psi: M \to A$, положив $\psi(m_i) = g_i$. Это, однако, может оказаться невозможным из-за наличия соотношений $\sum_{i=1}^{n} f_i m_i = 0$, для которых $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i \neq 0$. Но всегда $\sum_{i=1}^{n} f_i (g_i/1) = 0$, поэтому множество

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i g_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} f_i m_i = 0 \right\} = A$$

в силу 12.12 образует нетеров A-подмодуль, принадлежащий ядру $A \to A_f$. По следствию 12.13, этот подмодуль аннулируется умножением на f^q для некоторого q. Отсюда следует, что существует гомоморфизм $f^q\psi: M \to A$, для которого $f^q\psi(m_i) = f^q g_i$. Лемма доказана, потому что $(f^q\psi)_f = f^q\varphi$.

Теперь мы можем установить первую часть теоремы 12.10.

12.16. Предложение. <u>Локально свободные модули проективны.</u>

Доказательство. Пусть M – нетеров локально свободный A-модуль, $F \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ – некоторый эпиморфизм, где F – нетеров свободный модуль. Мы хотим доказать, что M выделяется из F прямым слагаемым; для этого нужно найти гомоморфизм – сечение $\psi: M \to F$, для которого $\psi\circ\varphi = id_M$. Более общо, введем A-модуль

$$P = \left\{ \chi \in Hom_A(M,M) \;\middle|\; \chi = \psi\circ\varphi,\ \psi \in Hom_A(M,F) \right\}.$$

Покажем сначала, что для любой точки $x \in Spec\, A$ найдется элемент $f \in A$, $f(x) \neq 0$, такой, что $f^q id_M \in P$ для некоторого $q \geq 0$.

Для этого выберем f так, чтобы M_f был A_f-свободен. Тогда гомоморфизм $\varphi_f: F_f \to M_f \to 0$ имеет сечение $\psi: M_f \to F_f$. В силу 12.15 $f^2\psi$ поднимается до гомо-

морфизма $\lambda: M \to F$ (для некоторого $\tau \geq 0$). Так как $\psi_f \circ \varphi = id_{M_f}$, отсюда следует, что $(\psi \circ \lambda)_f = f^\tau id_{M_f}$, в частности, $(\psi \circ \lambda - f^\tau id_M)_f(m_i) = 0$ для конечного числа образующих m_i модуля M. Поэтому для некоторого $t \geq 0$ имеем $f^t(\psi \circ \lambda - f^\tau id_M) = 0$, так что $f^{\tau+t} id_M = \psi \circ f^t \lambda \in P$.

Теперь выберем из покрытия $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{x \in \operatorname{Spec} A} D(f_x)$ ($f_x(x) \neq 0$, M_{f_x} свободен над A_{f_x}) конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^{k} D(f_i)$; это возможно в силу квазикомпактности $\operatorname{Spec} A$: см. п. 4.15. Найдем общее число q, для которого $f_i^q id_M \in P$ при всех i. Так как $D(f_i^q) = D(f_i)$, (f_i^q) порождают единичный идеал. Из соотношения $\sum_{i=1}^{k} g_i f_i^q = 1$ следует

$$id_M = \left(\sum_{i=1}^{k} g_i f_i^q\right) id_M \in P.$$

Это завершает доказательство.

12.17. Теперь мы должны установить, что проективные модули локально свободны. Сначала мы проверим это для более сильной процедуры локализации, вплоть до локального кольца.

Следующий простой, но фундаментальный результат известен под названием леммы Накаяма.

12.18. Лемма. <u>Пусть</u> A – <u>локальное кольцо</u>, $\mathfrak{p} \subset A$ – <u>максимальный идеал</u>, M – A-<u>модуль конечного типа</u>. <u>Если</u> $M = \mathfrak{p}M$, <u>то</u> $M = \{0\}$.

Примеры, показывающие необходимость условия конечности.

а. Пусть A – без делителей нуля, M – его поле частных. Очевидно, если $\mathfrak{p} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{p}M = M$, но $M \neq \{0\}$.

б. Пусть A – кольцо ростков C^∞-функций вблизи нуля в $\mathbb{R}$, $\mathfrak{p}$ – идеал функций, обращающихся в нуль в начале координат; $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{p}^n$ – идеал "плоских" функций, т.е. имеющих в нуле все нулевые производные. Нетрудно установить, что $\mathfrak{p}M = M$. Это следует из того, что для любой плоской функ-

ции f и координатной функции x частное f/x, доопределенное нулем в нуле, является плоской функцией.

Доказательство леммы Накаяма. Пусть $M \neq \{0\}$; выберем минимальную конечную систему образующих $m_1, \dots, m_r$ модуля M. Так как $M = pM$, имеем $m_1 = \sum_{i=1}^{r} f_i m_i$, $f_i \in p$, то есть $(1-f_1)m_1 = \sum_{i=2}^{r} f_i m_i$. Так как элемент $1-f_1 \notin p$ обратим, m_1 выражается линейно через $m_2, \dots, m_r$, что противоречит минимальности системы образующих.

12.19. Следствие. <u>В условиях леммы Накаямы, если элементы $\bar{m}_i = m_i \bmod pM$ $(i=1,\dots,r)$ порождают M/pM как линейное пространство над полем A/p, то элементы m_i порождают A-модуль M. В частности, образующие A/p-пространства p/p^2 порождают идеал p.</u>

Доказательство. Пусть $M' = M/(Am_1 + \dots + Am_r)$; так как $M = pM + Am_1 + \dots + Am_r$, имеем $M' = pM'$, откуда $M' = 0$.

12.20. Предложение. <u>Проективный модуль M конечного типа над локальным кольцом A свободен.</u>

Доказательство. M/pM – конечномерное пространство над A/p; пусть $\bar{m}_i = m_i \bmod pM$, $i=1,\dots,r$, – его базис. По предыдущему, m_i составляют систему образующих M; покажем, что она свободна. Рассмотрим эпиморфизм $F \to M \to 0$, где $F = A^r$ – свободный модуль ранга r, свободные образующие которого отображаются в (m_i). Так как M проективен, существует сечение $\varphi: M \to F$. Оно индуцирует изоморфизм $\bar{\varphi}: M/pM \to F/pF$, потому что размерности обоих линейных пространств равны r. Отсюда следует, что $F = \varphi(M) + pF$, или $F/\varphi(M) = p(F/\varphi(M))$. В силу леммы Накаяма $F = \varphi(M)$, так что φ – изоморфизм. Предложение доказано.

Мы можем, наконец, закончить доказательство теоремы 12.10.

12.21. Предложение. <u>Проективный нетеров модуль M над нетеровым кольцом A локально свободен.</u>

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Spec} A$, $p \subset A$ – соответствующий простой идеал. Обозначим через A_p локальное кольцо-локализацию A по мультипликативной системе $A \setminus p$ (непоследовательность обозначений – ср. A_g и A_p – общепринята). Модуль $M_p = A_p \otimes_A M$ проективен и, следовательно, по I2.20, свободен. Выберем его A_p-базис; приводя элементы базиса к общему знаменателю, можем считать, что они имеют вид m_i/g, $m_i \in M$, $g \in A$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A_g^n \longrightarrow M_g$, переводящий элементы свободного базиса A_g^n в m_i/g, и положим $K = \operatorname{Ker} \varphi$, $C = \operatorname{Coker} \varphi$. Умножив точную последовательность A_g – модулей

(I) $$0 \to K \to A_g^n \to M_g \to C \to 0$$

тензорно на A_p (это кольцо является локализацией также A_g по $A_g \setminus p_g$), мы, по I2.I4, получим точную последовательность A_p-модулей. Но ее средняя стрелка является изоморфизмом, поэтому $A_p \otimes_{A_g} K = \{0\}$ и $A_p \otimes_{A_g} C = \{0\}$. Пусть $k_1, \dots, k_s$; $c_1, \dots, c_r$ – образующие A_g-модулей K, C; в силу леммы I2.I2 существуют элементы $h_i, h_j' \in A_g \setminus p_g$ такие, что $h_i k_i = 0$, $h_j' c_j = 0$; в частности, $h = \prod_{i=1}^{r} h_i \prod_{j=1}^{s} h_j' \in A_g \setminus p_g$ аннулирует K и C. Пусть $h = f/g^k$, $f \in A \setminus p$; тогда даже $f/1$ аннулирует K и C. Умножая точную последовательность (I) на $(A_g)_{f/1}$ тензорно над A_g и пользуясь изоморфизмом A_{fg}-модулей $(M_g)_{f/1} \simeq M_{fg}$, находим изоморфизм $A_{fg}^n \simeq M_{fg}$, потому что $K_{f/1} = \{0\}$, $C_{f/1} = \{0\}$. Так как $fg(x) \neq 0$, M локально свободен в точке x. Доказательство закончено.

13. Нормальное расслоение и регулярные вложения

13.1. Определение. Пусть Y - замкнутая подсхема схемы $X = \operatorname{Spec} A$, определенная идеалом a. Тогда A/a - модуль a/a^2 называется конормальным модулем к Y (относительно погружения $Y \hookrightarrow X$), а семейство векторных пространств $N = \operatorname{Spec} S_{A/a}(a/a^2)$ - нормальным семейством.

С этим определением связаны наглядные дифференциально-геометрические представления: a - идеал "функций" на X, обращающихся в нуль на Y, a^2 - функции, обращающиеся в нуль" не ниже второго порядка", a/a^2 - модуль линейных частей этих функций в окрестности Y. Касательный вектор к X в некоторой точке из Y определяет линейную функцию на таких линейных частях.

Нормальный вектор к Y (при отсутствии естественной метрики) - это класс касательных векторов к X в точке $y \in Y$ по модулю тех из них, которые касаются Y, то есть обращаются в нуль на линейных частях функций из a. Поэтому в "достаточно регулярных" случаях a/a^2 образует (локально) пространство, двойственное к пространству нормальных к Y векторов. Этим объясняется название "конормальный модуль".

Этот модуль, вообще говоря, отнюдь не является свободным или проективным, но есть очень важный класс подсхем, для которых это так.

13.2. Определение. Последовательность элементов $(f_1, \dots, f_n)$ кольца A называется регулярной (длины n), если для всех $i \le n$ элемент $f_i \bmod (f_1, \dots, f_{i-1})$ не является делителем нуля в кольце $A/(f_1, \dots, f_{i-1})$. (Удобно считать, что пустая последовательность регулярна длины 0 и порождает нулевой идеал).

Замкнутая подсхема $Y \subset X = \operatorname{Spec} A$ называется регулярно вложенной (коразмерности n), если в A существует регулярная последовательность длины n, порождающая идеал подсхемы Y.

Геометрический смысл регулярности становится вполне про-

рачен, если вспомнить теорему 7.14. Мы задаем Y, постепенно добавляя по одному уравнению $f_i = 0$. Так получается убывающая последовательность подсхем $X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_n = Y$. Условие регулярности состоит в том, что Y_i не должна содержать целиком носитель ни одной из компонент несократимого примарного разложения Y_{i-1}. Иначе говоря, очередное уравнение $f_i = 0$ должно быть "трансверсально" ко всем этим носителям (в очень слабом смысле слова).

Иногда о регулярно вложенной подсхеме говорят, что она является "полным пересечением".

13.3. Предложение. Пусть $Y \hookrightarrow X$ - регулярно вложенная замкнутая подсхема коразмерности n. Тогда ее конормальный модуль свободен ранга n.

В частности, число n не зависит от выбора регулярной системы образующих идеала, что позволяет называть его коразмерностью.

Доказательство. Пусть $a = (f_1, \ldots, f_n) \subset A$, где $f_1, \ldots, f_n$ - регулярная последовательность. Очевидно, элементы $\bar{f}_i = f_i \bmod a$ порождают A/a-модуль a/a^2. Поэтому достаточно проверить, что они свободны. Проведем индукцию по n.

Пусть сначала $n = 1$, $f_1 = f$, $\bar{g} = g \bmod Af$. Если $\bar{g}\bar{f} = 0$, то $gf = hf^2$ для некоторого $h \in A$, откуда $f(g - hf) = 0 \Rightarrow g = hf$, ибо f - не делитель нуля в A. Следовательно, $\bar{g} = 0$.

Пусть результат уже доказан для регулярной последовательности $(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Допустим, что $\sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i \bar{f}_i = 0$ в a/a^2, где $\bar{g}_i = g_i \bmod a$. Можно считать, что $\sum_{i=1}^{n} g_i f_i = 0$ в A: иначе $\sum_{i=1}^{n} g_i f_i = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i$, где $u_i \in a$, и можно заменить g_i на $g_i - u_i$, не изменив $\bar{g}_i$.

Так как класс f_n не является делителем нуля в кольце $A/(f_1, \ldots, f_{n-1})$, из равенства $g_n f_n + \sum_{i=1}^{n-1} g_i f_i = 0$ следует, что $g_n \in (f_1, \ldots, f_{n-1})$, то есть $g_n = \sum_{i=1}^{n-1} h_i f_i$,

откуда $\sum_{i=1}^{n-1}(g_i+h_i f_n)f_i=0$. По индуктивному предположению, отсюда следует, что $g_i+h_i f_n\in(f_1,\dots,f_{n-1})$ при $i=1,\dots,n-1$, так что $g_i\in a$ для всех i, то есть $\bar{g}_i=0$, что завершает доказательство.

Более общее понятие локально регулярно вложенной подсхемы получится, если имитировать рассуждения п.п. 12.5-12.7. Оставляя читателю подробности, заметим лишь, что рабочая форма определения такова: подсхема $Y\hookrightarrow X$ называется локально регулярно вложенной в точке $y\in Y$, если существует такая окрестность $D(f)\ni y$, что $Y\cap D(f)$ регулярно вложена в $D(f)$. Пересечение $Y\cap D(f)$, разумеется, определено идеалом $a_f\subset A_f$ и совпадает с расслоенным произведением $Y\times_X X_f$ (ср. п. 12.6).

Нормальные семейства к локально регулярно вложенным подсхемам являются векторными расслоениями, потому что $(a/a^2)_f=a_f/a_f^2$, так что A/a модуль a/a^2 для такой подсхемы локально свободен.

Заметим, что подсхема вполне может быть локально регулярно вложена, но не глобально. Впервые это выяснилось в теории чисел.

Пример. Пусть $A\supset\mathbb{Z}$ – конечное целое расширение; иначе говоря, A – кольцо целых алгебраических чисел некоторого поля K. Если число классов поля K больше единицы, в A есть неглавные идеалы $a\subset A$ (даже простые). Однако любой такой идеал, как известно, является "локально главным". Поэтому a определяет локально регулярно вложенную подсхему коразмерности единица.

Пусть теперь $x\in X$ – замкнутая точка; будем для краткости обозначать через x также единственную приведенную подсхему с носителем в этой точке. Обсуждение в п. 13.1 показывает, что конормальный модуль к x является аналогом касательного пространства к X в этой точке. Это – так называемое "касательное пространство Зариского".

Замкнутые точки могут быть, а могут и не быть локально регулярно вложены.

Например, все замкнутые точки пространства $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} K[T_1,\dots,T_n]$ (K – для простоты предполагается алгебраически замкнутым полем) в силу результатов п. 8 отвечают идеалам $(T_1-t_1,\dots,T_n-t_n)$, $t_i \in K$. Выписанная система образующих такого идеала, очевидно, является регулярной последовательностью.

Чтобы получить примеры нелокально регулярно вложенных точек, достаточно рассмотреть спектр локального артинова кольца, но не поля: все элементы его максимального идеала–нильпотентны и поэтому не существует системы образующих, первый элемент которой не есть делитель нуля.

Более содержательные примеры доставляют гиперповерхности, то есть подсхемы аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, заданные одним уравнением.

13.4. Пример. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ – замкнутая подсхема, проходящая через начало координат x и определенная уравнением $F=0$, где $F=F_1+F_2+\dots$ (F_i – форма i-й степени от $T_1,\dots,T_n$).

Точка x локально регулярно погружена в X, если и только если $F_1 \neq 0$.

Следствие. Пусть $F(t_1,\dots,t_n)=0$, $t_i \in K$. Точка x, определенная идеалом $(\dots(T-t_i)\dots)$ локально регулярно погружена в X, если и только если

$$\exists i, \quad \frac{\partial F}{\partial T_i}(t_1,\dots,t_n) \neq 0.$$

Действительно, перенесем начало координат в $(t_1,\dots,t_n)$; тогда линейная часть F вблизи нового начала будет равна

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial T_i}(t_1,\dots,t_n)(T_i-t_i),$$

и остается применить утверждение 13.4.

Этот дифференциальный критерий показывает, [illegible] локально регулярно погруженные точки в точности совпадают [illegible], которые в классической теории называются "неособыми".

Оставляя систематическую теорию таких точек на будущее, ограничимся здесь лишь теми общими фактами, которые нужны для разбора примера 13.4.

Сначала мы проверим, что если $F_1 \neq 0$, то начало координат локально регулярно погружено в X. Для этого нужна следующая ЛЕММА.

13.5. Лемма. <u>Пусть $(f_1, \dots, f_n)$ - регулярная последовательность элементов в кольце A. Тогда последовательность, полученная из нее любой перестановкой, тоже регулярна.</u>

Доказательство. Как известно, симметрическая группа порождена перестановками, которые меняют местами два соседних элемента. Поэтому достаточно установить, что если последовательность $(f_1, \dots, f_n)$ регулярна, то же верно для $(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, f_i, f_{i+2}, \dots, f_n)$. Заменив кольцо A на $A/(f_1, \dots, f_{i-1})$, сведем дело к случаю, когда $i = 1$, $n = 2$. Это мы и будем предполагать дальше.

Итак, пусть последовательность (f_1, f_2) регулярна. Покажем, что (f_2, f_1) также регулярна. Пусть $f_1 g_1 \in A f_2$; нужно установить, что $g_1 \in A f_2$. Действительно: $f_1 g_1 = f_2 g_2 \Rightarrow g_2 = f_1 h$ (ибо $f_2 \bmod f_1 A$ регулярен в $A/f_1 A$), откуда $f_2(g_1 - f_2 h) = 0$, то есть $g_1 = f_2 h$, потому что f_2 регулярен в A. Лемма доказана.

13.6. <u>В условиях 13.4, если $F_1 \neq 0$, то начало координат локально регулярно погружено в X.</u>

В самом деле, сделав невырожденную линейную замену переменных, можем считать, что $F_1 = T_1$.

Для любого элемента $G \in K[T_1, \dots, T_n]$, обозначим через $\bar{G}$ класс $(G \bmod (F))$ в кольце $B = K[T_1, \dots, T_n]/(F)$ алгебры X.

Прежде всего, элементы $T_2, \dots, T_n, F$ образуют регулярную последовательность в кольце $K[T_1, \dots, T_n]$, потому что

$F \equiv T_1 + a_2 T_1^2 + \ldots \bmod (T_2, \ldots, T_n)$, $a_i \in K$. По лемме 13.5, $F, T_2, \ldots, T_n$ тогда также образуют регулярную последовательность. Стало быть, $\overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_n$ – регулярная последовательность в кольце B. Пусть $G(T_1) \in K[T_1]$ – такой многочлен, что $F(T) \equiv G(T_1) \bmod (T_2, \ldots, T_n)$. Корень $T_1 = 0$ у $G(T_1)$ имеет кратность единица. Поэтому идеал $(\overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_n)$ в кольце B есть делает замкнутую подсхему с носителем в конечном числе замкнутых точек, причем начало координат входит в нее "с кратностью единица". Отсюда уже легко следует требуемое.

Формально положим $H(T_1) = G(T_1)/T_1$, $\overline{H} = H \bmod (F)$. Тогда в $D(\overline{H}) \subseteq X$ идеал $(\overline{T}_2/1, \ldots, \overline{T}_n/1)$ есть в точности идеал замкнутой приведенной подсхемы с носителем в начале координат.

13.7. Для доказательства утверждения, обратного к 13.6, заметим прежде всего, что достаточно рассматривать локализованные кольца. Точнее, пусть $p = (T_1, \ldots, T_n) \subset A$, $\overline{p} = p \bmod (F) \subset B$. Если начало координат локально регулярно погружено в X, то максимальный идеал локального кольца $B_{\overline{p}}$ должен быть порожден регулярной системой элементов. Но

$$B_{\overline{p}} = A_p / (F/1).$$

Далее, в A_p максимальный идеал порожден регулярной системой $(T_1/1, \ldots, T_n/1)$, а условие $F_1 = 0$ означает, что $F/1$ принадлежит квадрату максимального идеала. Поэтому остается установить следующую лемму.

13.8. Лемма. <u>Пусть A – нетерово локальное кольцо, $p \subset A$ его максимальный идеал, порожденный регулярной последовательностью длины n. Если $f \in p^2$, f регулярен, то в локальном кольце $A/(f)$ максимальный идеал не может быть порожден регулярной последовательностью.</u>

Доказательство. Пусть максимальный идеал в $A/(f)$ порожден регулярной последовательностью $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n$, где $\overline{g}_i = g_i \bmod (f)$, $g_i \in A$. Тогда $(f, g_1, \ldots, g_n) \subset p$ – ре-

гулярная последовательность в A, порождающая p. Так как длина любой такой последовательности равна n (п. 13.3), мы должны иметь $k = n-1$. Но элементы $(f, g_1, \dots, g_k)$ порождают в n-мерном A/p-пространстве p/p^2 подпространство размерности $\leq k = n-1$, потому что $f \in p^2$. Полученное противоречие доказывает лемму и завершает разбор примера 13.6.

14. Дифференциалы

Пусть A, B – кольца, B – A-алгебра. Как в п. 10.8, положим

$$I = I_{B/A} = \operatorname{Ker} \mu, \quad \mu : B \otimes_A B \to B, \quad \mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2.$$

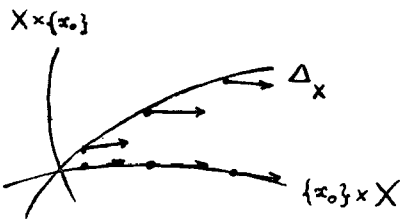
Очевидно, I – идеал в $B \otimes_A B$ и $B \otimes_A B / I \simeq B$.

14.1. Определение. B-модуль

$$\Omega^1_{B/A} = I_{B/A} / I^2_{B/A}$$

называется модулем (относительных) дифференциалов A-алгебры B (объяснение названия см. ниже, в п. 14.2).

По предложению 10.8, идеал I определяет диагональную подсхему $\Delta_X \subset X \times_S X$, где $X = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} A$. Согласно интерпретации в п. 13.1, модуль $\Omega^1_{B/A}$ является конормальным к диагонали. В дифференциальной геометрии нормальное расслоение к диагонали Δ изоморфно касательному расслоению к самому многообразию X: обычное рассуждение состоит в том, что, снося векторное поле на одном из слоев произведения $X \times X$ "параллельно" на диагональ, мы получаем векторное поле, всюду трансверсальное к диагонали (см. чертеж). Поэтому $\Omega^1_{B/A}$ является кандидатом на роль "кокасательного модуля" к X (вдоль слоев морфизма $X \to S$). С другой стороны, при интерпретации нильпотентов в п. 5 в качестве аналога "касательного модуля" к X (над S) выступал B-модуль $D_{B/A}$ дифференцирований A-алгебры B (касательное поле на X "есть" дифференцирование кольца функций на X).



В дифференциальной геометрии касательное и кокасательное расслоения двойственны. Здесь это, вообще говоря, неверно: лишь "одна половина" двойственности сохраняется:

$$(I) \qquad D_{B/A} = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, B).$$

Тем самым $D_{B/A}$ восстанавливается по $\Omega^1_{B/A}$, но не наоборот. Это объясняет преимущественную роль дифференциалов перед дифференцированиями.

Мы докажем более сильное утверждение, чем (I), но прежде отметим, что в ряде вопросов полезно рассматривать "дифференциальные окрестности диагонали" более высоких порядков, представленные подсхемами $\mathrm{Spec}\, B \otimes_A B / I^n_{B/A}$, $n \geq 1$. Они заменяют "пространства джетов" дифференциальной геометрии.

Определим отображение

$$d = d_{B/A} : B \to \Omega^1_{B/A}$$

формулой

$$d(b) = (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \bmod I^2_{B/A}.$$

14.2. Лемма. I) <u>Отображение</u> d <u>является</u> A - <u>дифференцированием, то есть удовлетворяет тождествам:</u>

$$d(b_1 + b_2) = db_1 + db_2,$$

$$d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1,$$

$$d(\varphi(a)) = 0, \quad a \in A,$$

<u>где</u> $\varphi : A \to B$ - <u>структурный гомоморфизм.</u>

2) <u>Пусть</u> (b_i) - <u>некоторая система образующих</u> A -<u>алгебры</u> B. <u>Тогда</u> (db_i) <u>составляют систему образующих</u> B -<u>модуля</u> $\Omega^1_{B/A}$.

доказательство. Первое утверждение проверяется (это упражнение); ограничимся тождеством для $d(b_1 b_2)$:

$$b_1 b_2 \otimes 1 - 1 \otimes b_1 b_2 = b_1 \otimes 1 (b_2 \otimes 1 - 1 \otimes b_2) + 1 \otimes b_2 (b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1).$$

(Учесть, что умножение в $\Omega^1_{B/A}$ на b индуцировано умножением на $b \otimes 1$ или на $1 \otimes b$ в $I_{A/B}$).

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что

$$\sum b_i \otimes b_i' \in I_{B/A} \to \sum b_i b_i' = 0 \Rightarrow \sum b_i \otimes b_i' =$$
$$= \sum b_i \otimes b_i' - \sum b_i \otimes 1 = \sum b_i \otimes 1 (1 \otimes b_i' - b_i' \otimes 1).$$

Отсюда следует, что $\Omega^1_{B/A}$ как B-модуль порождён элементами вида db при всех $b \in B$. Так как d – дифференцирование, обращающееся в нуль на образе A, то отсюда легко получается требуемое.

14.3. Пример. Пусть $B = A[T_1, \dots, T_n]$. Тогда $\Omega^1_{B/A}$ – свободный B-модуль, свободно порожденный элементами dT_i.

14.4. Предложение. <u>Для любого дифференцирования</u> $d': B \to M$ <u>кольца</u> B <u>в</u> B-<u>модуль</u> M, <u>обращающегося в нуль на образе</u> A, <u>существует единственный гомоморфизм</u> B-<u>модулей</u> $\psi: \Omega^1_{B/A} \to M$, <u>для которого</u>

$$d' = \psi \circ d_{B/A}.$$

(Применяя этот результат к $M = B$, получим изоморфизм (1)).

Доказательство. Единственность ψ немедленно следует из того, что $d'b = \psi(db)$ для всех $b \in B$, так что ψ однозначно определен на системе образующих $\Omega^1_{B/A}$.

Для доказательства существования определим сначала гомоморфизм групп

$$\chi : B \underset{A}{\otimes} B \to M ,$$

положив $\chi(b \underset{A}{\otimes} b') = -b d' b'$.

Он обращается в нуль на $I^2_{B/A}$. Действительно, прежде всего, χ является гомоморфизмом B-модулей, если действие B на $B \underset{A}{\otimes} B$ определить через $b \rightsquigarrow b \otimes 1$. Далее, как было показано выше, элементы $b \otimes 1 - 1 \otimes b$ порождают B-модуль $I_{B/A}$. Поэтому попарные произведения $(b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1)(b_2 \otimes 1 - 1 \otimes b_2)$ порождают B-модуль $I^2_{B/A}$. Следовательно, достаточно проверить, что χ обращается в нуль на них. Действительно,

$$\chi[(b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1)(b_2 \otimes 1 - 1 \otimes b_2)] = b_1 d' b_2 + b_2 d' b_1 - d'(b_1 b_2) = 0.$$

Поэтому χ индуцирует некоторое отображение $\varphi : I/I^2 \to M$. Имеем

$$\varphi(db) = \varphi(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = d' b,$$

что завершает доказательство.

14.5. Рассмотрим теперь следующую ситуацию. Пусть $i : Y \hookrightarrow X$ - замкнутое вложение схем. В дифференциально геометрической модели при соблюдении некоторых условий регулярности ограничение на Y касательного пучка к X содержит касательный пучок к Y, а фактором является нормальный пучок к Y. Мы хотим выяснить, в какой мере это перенести на случай схем.

Переведем вопрос на алгебраический язык.

Пусть B - некоторая A-алгебра, $b \subset B$ - идеал. Тогда $\bar{B} = B/b$ также является A-алгеброй, и мы имеем относительные (над $\operatorname{Spec} A$) кокасательные пучки к $\operatorname{Spec} B$ и $\operatorname{Spec} \bar{B}$, представленные модулями $\Omega^1_{B/A}$ и $\Omega^1_{\bar{B}/A}$.

С другой стороны, конормальный пучок вложения $\operatorname{Spec}\bar{B} \to \operatorname{Spec} B$ представлен $B/\mathfrak{b}$-модулем $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$. Аналог классической ситуации доставляет

14.6. Предложение. <u>Существует точная последовательность $B/\mathfrak{b}$-модулей</u>

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \xrightarrow{\delta} B/\mathfrak{b} \otimes_B \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{u} \Omega^1_{\bar{B}/A} \to 0 .$$

Доказательство. <u>Определение гомоморфизма δ</u>. Пусть $\bar{e} \in \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$ представлен элементом $e \in \mathfrak{b}$; положим

$$\delta \bar{e} = 1 \otimes d_{B/A} .$$

Результат не зависит от выбора e, потому что если $\bar{e} = 0$, то есть $e \in \mathfrak{b}^2$, то $de \in \mathfrak{b}\, d_{B/A}\mathfrak{b}$, так что $1_{\bar{B}} \otimes d_{B/A}\, e = 0$. То, что δ является гомоморфизмом групп, очевидно; совместимость с действием $B/\mathfrak{b}$ следует из того, что для любого элемента $\bar{f} = f \bmod \mathfrak{b}$ имеем

$$\delta(\bar{f}\bar{e}) = 1 \otimes_B d(fe) = 1 \otimes_B (e\,df + f\,de) = \bar{f} \otimes_B de = \bar{f}\,\delta(\bar{e}).$$

<u>Определение гомоморфизма u</u>. Отображение $d' : B \to \Omega^1_{\bar{B}/A}$, для которого

$$d' f = d_{\bar{B}/A}\,(f \bmod \mathfrak{b}) ,$$

очевидно, является дифференцированием над A. Поэтому (п. 14.4) его можно пропустить через некоторый однозначно определенный гомоморфизм B-модулей $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{\bar{B}/A}$. Так как второй модуль аннулируется умножением на $\mathfrak{b}$, этот гомоморфизм определяет гомоморфизм $B/\mathfrak{b}$-модулей

$$B/\mathfrak{b} \otimes_B \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{\bar{B}/A} ,$$

который, по определению, и есть u. Легко видеть, что

$$u(1 \otimes_B d_{B/A} f) = d_{\bar{B}/A}(f \bmod b),$$

и, следовательно, является эпиморфизмом.

<u>Проверка того, что</u> $u \circ \delta = 0$:

$$u \circ \delta(\bar{e}) = u(1 \otimes de) = d(e \bmod b) = 0.$$

<u>Точность в среднем члене</u>. Построим гомоморфизм

$$v: \Omega^1_{\bar{B}/A} \to \bar{B} \otimes_B \Omega^1_{B/A} / \operatorname{Im} \delta$$

такой, что u и v будут взаимно обратны. С этой целью определим сначала дифференцирование $d': \bar{B} \to \bar{B} \otimes_B \Omega^1_{B/A} / \operatorname{Im}\delta$, положив

$$d'(\bar{f}) = 1 \otimes_B d_{B/A} f \bmod \operatorname{Im}\delta, \quad \bar{f} = f \bmod b.$$

Независимость от выбора f следует из того, что $1 \otimes d_{B/A} e \in \operatorname{Im}\delta$ при $e \in b$. Это дифференцирование определяет гомоморфизм v. Так как

$$u \circ v(df) = df,$$
$$v \circ u(1 \otimes df \bmod \operatorname{Im}\delta) = 1 \otimes df \bmod \operatorname{Im}\delta,$$

v и u взаимно обратны на некоторой системе образующих наших модулей, что доказывает требуемое.

Отметим отличие от дифференциально-геометрической ситуации; может оказаться, что $\operatorname{Ker}\delta \neq 0$, даже в случае, когда подсхема $Y \hookrightarrow X$ вложена регулярно. Вот пример.

Пусть $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p – простое число; $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Тогда $\Omega^1_{X/S} = 0$ и $\Omega^1_{Y/S} = 0$; между тем $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$ – одномерное линейное пространство над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Неформально говоря, "в арифметическом направлении" нельзя дифференцировать.

15. Отступление: проблема Серра и теорема Сешадри

Серр поставил следующий вопрос: существуют ли над аффинным пространством размерности n нетривиальные векторные расслоения?

Иначе говоря, любой ли нетеров проективный модуль над кольцом многочленов $K[T_1,\dots,T_n]$ (K – поле) свободен?

При $n=1$ кольцо $K[T]$ является целостным кольцом главных идеалов. Поэтому любой нетеров модуль без кручения (в частности, всякий проективный модуль) свободен (Ленг. Алгебра, гл. XV, § 2).

При $n=2$ нетривиальных расслоений также не существует. Эта теорема принадлежит Сешадри; ее доказательству посвящен этот параграф.

При $n\geqslant 3$ ответ на вопрос Серра до сих пор неизвестен. Задача крайне привлекательна и имеет все черты "классичности": она очень естественна, относится к фундаментальным объектам и трудна. Во всяком случае, десять лет со времени ее постановки не принесли существенно новых результатов о кольцах многочленов сверх теоремы Сешадри и следующего факта, установленного самим Серром.

15.1. Теорема. Пусть P – нетеров проективный модуль над кольцом $K[T_1,\dots,T_n]$. Тогда существует такой нетеров свободный модуль F, что $P\oplus F$ свободен.

Иначе говоря, векторные расслоения над аффинным пространством стабильно свободны в терминологии топологов.

Доказательство легко следует из "теоремы о сизигиях" Гильберта, естественное место которой не здесь.

Мы ограничимся поэтому теоремой Сешадри. Она относится к классу колец, включающему кроме $K[T_1,T_2]$, например, $\mathbb{Z}[T]$.

15.2. Теорема. Пусть A – целостное кольцо главных идеалов. Тогда любой проективный нетеров $A[T]$ – модуль P свободен.

Доказательство будет разбито на ряд лемм. Его движущей пружиной является простое замечание о том, что если A – поле,

то теорема известна. Из A можно "сделать" поле двумя способами: перейти от кольца A к его полю частных K или к фактор-полю $k = A/(p)$, где p - любой простой элемент. Модули $K[T] \otimes_{A[T]} P$ и $k[T] \otimes_{A[T]} P$ окажутся свободными. Воспользуемся по очереди этими двумя обстоятельствами.

15.3. Лемма. <u>Существует точная последовательность</u> $A[T]$-<u>модулей</u>

$$(1) \qquad 0 \to F \to P \to P/F \to 0$$

<u>со следующими свойствами</u>:

а. F - <u>максимальный</u> $A[T]$-<u>свободный подмодуль</u> P.

б. $\mathrm{Ann}\, P/F \cap A \neq \{0\}$

Доказательство. Пусть $m_1', \dots, m_r'$ - свободный $K[T]$-базис модуля $K[T] \otimes P$. Существует такой элемент $0 \neq f \in A$, что $m_i = f m_i' \in P \hookrightarrow K[T] \otimes P$. Подмодуль $F' \subset P$, порожденный элементами m_i, $i = 1, \dots, r$, свободен. С другой стороны, любой элемент из конечной фиксированной системы образующих модуля P представляется в $K[T] \otimes P$ в виде линейной комбинации $\sum F_{ij}(t)\, m_i$, где $F_{ij}(T) \in K[T]$. Общий знаменатель коэффициентов всех многочленов $F_{ij}(T)$ в A аннулирует P/F'. Теперь в качестве F можно взять максимальный свободный подмодуль P, содержащий F': он существует в силу нетеровости. Очевидно, $\mathrm{Ann}\, P/F \supset \mathrm{Ann}\, P/F'$, так что $\mathrm{Ann}\, P/F \cap A \neq \{0\}$. Лемма доказана.

Дальше мы сохраняем обозначения леммы (1) и <u>намерены привести к противоречию предположение о том, что</u> $F \neq P$. В таком случае $\mathrm{Ann}\, P/F \cap A = (f) \subset A$, f необратим (ибо A - кольцо главных идеалов). Пусть p - простой элемент A, делящий f. Положим $k = A/(p)$ и умножим точную последовательность (1) тензорно на $k[T]$ над $A[T]$, положив $\overline{F} = F/pF = k[T] \otimes_{A[T]} F$ и т.п.:

$$\overline{F} \xrightarrow{i} \overline{P} \to \overline{P/F} \to 0.$$

Пусть $\overline{F}_1 = \mathrm{Ker}\, i$, $\overline{F}_2 = \mathrm{Im}\, i$. Так как $\overline{P}$ проективен над $k[T]$, $\overline{F}_2$ не имеет кручения и, значит, свободен. Следовательно, $\overline{F}_1$ тоже свободен и выделяется из $\overline{F}$ прямым слагаемым, так что определена расщепляющаяся последовательность свободных $k[T]$-модулей:

$$(2) \qquad 0 \to \overline{F}_1 \xrightarrow{j} \overline{F} \xrightarrow{i} \overline{F}_2 \to 0 .$$

15.4. Лемма. $\overline{F}_1 \neq \{0\}$.

Доказательство. В самом деле, $j(\overline{F}_1) = pP \cap F / pF$. Пусть $f = pg$. Так как $g \notin \mathrm{Ann}\, P/F \cap A$, имеем $gP \not\subset F \Rightarrow$ $\Rightarrow pgP \not\subset pF$ (ибо P не имеет кручения). Но $pgP = fP \subset pP \cap F$, так что тем более $pP \cap F \not\subset pF$. Лемма доказана.

Последний шаг требует некоторых дополнительных соображений.

15.5. Лемма. <u>Существует свободный $A[T]$ - подмодуль $F_1 \subset F$, имеющий свободное прямое дополнение и такой, что $k[T] \otimes F_1 = j(\overline{F}_1)$.</u>

Неформально говоря, последовательность (2) можно поднять до расщепляющейся точной последовательности свободных модулей над $A[T]$.

15.6. <u>Вывод теоремы 15.2.</u> Пусть $F_1 \subset F$ - подмодуль, существование которого утверждается в лемме, $F_2 \subset F$ - его свободное прямое дополнение. Так как $F_1 / pF_1 = \mathrm{Ker}\, i$, все элементы $F_1 \subset F \subset P$ делятся на p внутри P. Положим

$$F_1' = \{ m \in P \mid pm \in F_1 \}.$$

Очевидно, F_1' свободен (умножение на p определяет изоморфизм $F_1' \simeq F_1$) и строго больше F_1 (по лемме 15.4). Поэтому модуль $F' = F_1' \oplus F_2 \subset P$ свободен и содержит F в качестве собственного подмодуля, что противоречит максимальности F и завершает доказательство теоремы Сешадри.

15.7 <u>Доказательство леммы</u> 15.5.

Любой автоморфизм φ модуля F индуцирует некоторый автоморфизм $\overline{\varphi}$ модуля $\overline{F}$. Нам понадобится следующее вспомо-

гательное утверждение:

<u>Отображение</u> $\varphi \rightsquigarrow \bar{\varphi}: SL(n, A[T]) \to SL(n, k[T])$ <u>сюръективно</u>. Для доказательства воспользуемся классическим результатом о приведении матрицы над евклидовым кольцом $k[T]$ к диагональному виду "допустимыми преобразованиями". Этот результат содержится в книге ван дер Вардена "Современная алгебра", т. II, § 108, где изложен на языке базисов. Для его формулировки обозначим через $\bar{I}$ единичную (n,n) матрицу над $k[T]$, через $\bar{I}_{(ij)}$ (соотв. $\bar{I}^{(ij)}$) – матрицу, полученную из $\bar{I}$ перестановкой i-й и j-й строк (соотв. столбцов), через $\bar{E}_{ij}$ – матрицу, у которой на (ij)-м месте стоит 1, а на всех остальных местах – нули.

Доказательство "теоремы об элементарных делителях" в книге ван дер Вардена показывает, в частности, что в фиксированном базисе $\bar{F}$ любой автоморфизм с определителем единица представляется в виде произведения матриц одного из следующих типов:

а) $\bar{I} + f\bar{E}_{ij}$, $f \in k[T]$,

б) $\bar{I}_{(ij)}$;

в) $\bar{I}^{(ij)}$,

г) диагональные матрицы с коэффициентами из k и с определением единица.

Матрицы первых трех типов поднимаются до матриц из $SL(n, A[T])$ очевидным образом. Матрицы третьего типа разлагаются в произведение диагональных матриц с определителем 1, у которых лишь два диагональных элемента $\neq 1$. Тем самым, задача сводится к подъему матриц вида $\begin{pmatrix} \bar{f} & 0 \\ 0 & \bar{f}^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2,k)$ до матриц из $SL(2,A)$.

Это можно сделать совершенно элементарно. Выберем сначала элемент $f \in A$ такой, что $\bar{f} = f \bmod (p)$, затем элемент $g \in A$ такой, что $\bar{f}^{-1} = g \bmod (p)$ и $(g,f) = 1$ (это возможно в силу китайской теоремы об остатках). Теперь $fg = 1 + ph$.

Решим в A уравнение $fx+gy=h$; тогда $(f-py)(g-px)=$ $=1+p^2xy$, так что матрица $\begin{pmatrix} f-py & px \\ py & g-px \end{pmatrix}$ решает нашу проблему.

Вернемся теперь к доказательству леммы 15.5.

Выберем свободный $A[T]$ - базис (m_i) модуля F ; его редукция по модулю p даст свободный $k[T]$ - базис $(\overline{m}_i)$ модуля $\overline{F}$. Далее, выберем свободный $k[T]$ - базис $(\overline{n}_i)$ модуля $\overline{F}$, согласованный с расщепляющейся последовательностью (2) (в том смысле, что первые $\operatorname{rk}\overline{F}_1$ его элементов составляют базис $\overline{F}_1$). Можно считать, что матрица $\overline{M}\in GL(n,k[T])$, переводящая $(\overline{m}_i)$ в $(\overline{n}_i)$, принадлежит $SL(n,k[T])$: если это не так, достаточно заменить $\overline{n}_1$ на $(\det\overline{M})^{-1}\overline{n}_1$. Теперь поднимем $\overline{M}$ до $M\in SL(n,A[T])$ и обозначим через (n_i) $A[T]$ -базис $(m_i)M$ модуля F . Пусть далее F_1 - подмодуль F , порожденный первыми $\operatorname{rk}\overline{F}_1$ элементами базиса (n_i) , а F_2 - подмодуль, порожденный остальными элементами. Их конструкция показывает, что они удовлетворяют лемме 15.5, что завершает доказательство.

Добавление. Язык категорий (общая часть)

Язык категорий воплощает "социологический" подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных.

"Структурное" и "категорное" описания объекта (через предоставляемый им функтор) дополнительны. Второе играет все возрастающую роль в алгебраической геометрии, хотя его содержательность впервые была продемонстрирована, кажется, в топологии - пространствами $K(\pi, n)$.

Предлагаемая читателю сводка (определений и примеров) задумана как краткий фразеологический словарь языка категорий (построенный, однако, в логическом, а не алфавитном порядке).

1. Определение. Категория C состоит из следующих данных:

а. Множество $Ob\, C$, элементы которого называются объектами.

б. Для каждой упорядоченной пары $X, Y \in Ob\, C$ задано множество (возможно, пустое) $Hom(X, Y)$ (или $Hom_C(X, Y)$), элементы которого называются морфизмами (из X в Y).

Вместо $\varphi \in Hom(X, Y)$ часто пишут $\varphi: X \to Y$ или $X \xrightarrow{\varphi} Y$; морфизмы иногда называют стрелками; X есть начало, а Y - конец стрелки φ; каждая стрелка из C имеет однозначно определенные начало и конец. Множество $\coprod_{X, Y \in Ob\, C} Hom(X, Y)$ обозначается $Mor\, C$.

в. Для каждой упорядоченной тройки объектов X, Y, Z категории C задано отображение

$$Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \to Hom(X, Z).$$

Паре $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to Z$ оно ставит в соответствие морфизм, обозначаемый $\psi\varphi: X \to Z$ и называемый композицией φ и ψ.

Эти данные должны удовлетворять следующим двум аксиомам:

Асоциативность. Для любых $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to Z$, $\chi: Z \to U$

$$(\chi\psi)\varphi = \chi(\psi\varphi)$$

Тождественные морфизмы. Для каждого объекта $X \in Ob\, C$ существует морфизм $id_X : X \to X$, для которого $id_X \circ \varphi = \varphi$, $\psi \circ id_X = \psi$ всякий раз, когда эти композиции определены.

Легко видеть, что id_X определен однозначно. Морфизм $\varphi: X \to Y$ называется изоморфизмом, если существует такой морфизм $\psi: Y \to X$, что $\psi\varphi = id_X$, $\varphi\psi = id_Y$.

2. Комментарии. В ряде текстов $Ob\, C$ является классом, а не множеством, а категории, где $Ob\, C$ - множество, называются "малыми". Мы не можем рассматривать "большие" категории, потому что очень скоро нам придется ввести фундаментальную для алгебраической геометрии категорию функторов, которую невозможно определить, если считать $Ob\, C$ классом.

С другой стороны, приняв наше определение, мы отказываемся от рассмотрения, скажем, категории "всех" множеств, что крайне неудобно.

Из этой ситуации был предложен выход: нужно ввести "универсум" - большое множество множеств, стабильное относительно всех операций, какие могут понадобиться, после чего рассматривать лишь категории, принадлежащие этому универсуму. Список аксиом "универсума" содержится, например, в диссертации

P.Gabriel. Catégories abéliennes, Bull. Soc. Math.France, 1962. Мы также будем подразумевать присутствие "универсума" за неимением лучшего. Однако при современном состоянии оснований математики и вопроса о непротиворечивости автору вся проблема представляется несколько академической. Наша позиция близка к точке зрения физика-экспериментатора, не склонного ни фетишизировать, ни ломать свои приборы, пока они приносят результаты.

Мнение Николя Бурбаки и по этому вопросу отличается галльским здравомыслием и терпимостью: "Математики, кажется, сходятся на том, что между нашими "интуитивными" представлениями о

множествах и числах и призванными описывать их формализмами имеется не более чем поверхностное сходство. Разногласия относятся лишь к вопросу о выборе между теми и другими".
(N.Bourbaki, Elements d'Histoire des Mathematiques, Hermann, Paris, 1969 – конец сноски на стр. 61).

3. Примеры категорий. Мы разделим примеры на три группы; они входили в математический обиход в разное время.

Первая группа примеров. Объекты – это множества, снабженные тем или иным видом структуры, а морфизмы – все отображения множеств, сохраняющие эту структуру (по поводу понятия структуры см., например, добавление переводчика к книге К.Шевалле. Теория групп Ли, т. II, Москва, 1958).
Вот список важнейших для нас категорий с их стандартными обозначениями, используемыми в этой книге:

$\mathcal{E}ns$ – категория множеств и всевозможных отображений;

$\mathcal{T}op$ – категория топологических пространств и непрерывных отображений;

$\mathcal{G}r$ – категория групп и гомоморфизмов групп;

$\mathcal{A}b$ – категория абелевых групп;

$\mathcal{A}nn$ – категория коммутативных колец и их гомоморфизмов.

Вторая группа примеров. В этой группе объекты по прежнему представляют собой структурированные множества, но морфизмы не являются больше отображениями этих множеств.

Пример. Основная категория гомотопической топологии: ее объекты – топологические пространства, а морфизмы – гомотопические классы непрерывных отображений. Проверка аксиомы ассоциативности проводится на первых страницах любого стандартного курса.

Пример. Категория "аддитивных отношений": ее объектами являются абелевы группы. Морфизмом $\varphi : X \to Y$ называется любая подгруппа прямого произведения $X \times Y$. Композиция $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ определяется соотношением:

$$\psi\varphi = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists\, y \in Y \text{ такой, что } (x,y) \in \varphi,\ (y,z) \in \psi\}.$$

Эта категория изучена, например, в работе С.Маклейна "Алгебра аддитивных отношений". Математика 7:6, 1963.

(В алгебраической геометрии существует важный аналог этой конструкции, приводящий к категории соответствий).

Третья группа примеров. В эту группу входят некоторые классические виды структур, которые иногда удобно рассматривать как категории.

Пример. Пусть I - (частично) упорядоченное множество. С ним сопоставляется категория $C(I)$, в которой: $Ob\,C(I) = I$, и $Hom(x,y)$ состоит из одного элемента при $x \leq y$ и пусто в противном случае.

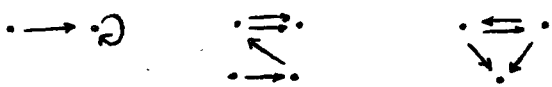
Эта интерпретация особенно употребительна, когда I - множество индексов, окажем, индуктивной системы групп.

Пример. Пусть E - некоторое топологическое пространство. С ним связана категория T_E, объектами которой являются открытые множества в E, а морфизмами - естественные вложения этих множеств.

(Эта тривиальная переформулировка содержит зародыш поразительно глубокого обобщения понятия топологического пространства - так называемых "топологий Гротендика": см. статью Д.Мамфорда "Проблемы модулей и их группы Пикара". Математика 13:2, 1969).

Пример. Категория, связанная со схемой диаграммы.

Схема диаграммы - это формализация следующего понятия: указано некоторое множество вершин и стрелок между ними. Примеры:



Точное определение (Гротендик): схемой диаграммы называется тройка, состоящая из двух множеств I ("вершины"), F ("стрелки") и отображения $d: F \to I \times I$, которое ставит каждой стрелке из M в соответствие две вершины: "начало" и "конец" этой стрелки.

Пусть Δ – некоторая схема диаграммы. Удобно связать с ней две категории, которые мы сейчас опишем.

Категория D определяется так: $Ob\, D = I$. Пусть $X, Y \in I$; тогда $Hom_D(X, Y)$ – это "пути по стрелкам" от вершины X к вершине Y. Точнее говоря, если $X \neq Y$, всякий элемент из $Hom(X, Y)$ – это, по определению, конечная последовательность стрелок $f_1, \dots, f_n \in F$ такая, что начало f_1 – X, конец f_n – Y и для любого i конец f_i совпадает с началом f_{i+1}. Если же $X = Y$, нужно добавить еще тождественный морфизм. Композиция морфизмов определяется очевидным образом, как композиция путей.

Категория D_c определяется так: $Ob\, D_c$ снова совпадает с I; кроме того, $Hom_{D_c}(X, Y)$ состоит из одного элемента, если $Hom_D(X, Y)$ не пусто; $Hom_{D_c}(X, Y)$ пусто в противном случае. Интуитивная формулировка: "все пути от объекта X к объекту Y определяют один и тот же морфизм": D_c – это конструкция категории из коммутативной диаграммы.

4. Некоторые конструкции. Существует ряд полезных формальных конструкций, которые позволяют строить из данных категорий новые. Мы ограничимся описанием трех.

Двойственная категория. Пусть C – некоторая категория; двойственная к ней категория C° задается так.

$Ob\, C^\circ$ находится во взаимно однозначном соответствии с $Ob\, C$: объект X отвечает объекту $X^\circ \in Ob\, C^\circ$.

$Hom_{C^\circ}(X^\circ, Y^\circ)$ находится во взаимно однозначном соответствии с $Hom_C(Y, X)$: морфизм $\varphi: Y \to X$ отвечает морфизму $\varphi^\circ: X^\circ \to Y^\circ$.

Умножение морфизмов определяется правилом:

$$\psi^\circ \varphi^\circ = (\varphi\psi)^\circ.$$

Неформально говоря, C° получается из C "обращением стрелок".

Эта конструкция бывает интересна в двух крайних случаях. Если категория C° "похожа" на категорию C (например, эквивалентна ей, как в случае конечных абелевых групп) - тогда это сцена для различных "законов двойственности".

Наоборот, для $C = Ann$ категория Ann° "есть" категория аффинных схем, очень далекая от Ann. В результате обращения стрелок в Ann она приобретает неожиданные "геометрические" качества, позволяет производить склеивание глобальных объектов из локальных и другие операции, вопиюще неестественные внутри Ann.

<u>Категория объектов над данной базой</u>. Пусть C - категория, $S \in Ob\, C$ - фиксированный объект. Введем категорию C_S, положив:

$Ob\, C_S$ - всевозможные морфизмы $(X \to S) \in Mor\, C$;

$Hom_{C_S}(\varphi, \psi)$ (где $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$) состоит из тех морфизмов $\chi \in Hom_C(X, Y)$, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Композиция морфизмов в C_S индуцирована композицией в C.

Двойственная конструкция исходит из морфизмов $S \to X$.

<u>Примеры</u>: K - алгебры, где K - фиксированное кольцо; топологические векторные расслоения над данной базой.

<u>Произведение категорий</u>. Пусть (C_i) - семейство категорий. Определим категорию $\prod_i C_i$, положив:

$$Ob \prod_i C_i = \prod_i Ob\, C_i ,$$

$$Hom_{\prod C_i}(\prod X_i, \prod Y_i) = \prod_i Hom_{C_i}(X_i, Y_i),$$

композиция морфизмов "покоординатная".

Полные подкатегории. Пусть C, D - две категории, такие, что $Ob\ C \subset Ob\ D$, $Hom_C(X,Y)=Hom_D(X,Y)$ для всех $X, Y \in Ob\ C$ и композиция морфизмов в C совпадает с композицией в D. Тогда C называется полной подкатегорией категории D.

Функторы

5. Определение. Функтор F из категории C со значениями в категории D (обозначение $F: C \to D$) состоит из следующих данных:

отображение $Ob\ C \to Ob\ D: X \rightsquigarrow F(X)$;

для всех $X, Y \in Ob\ C$ отображения $F_{X,Y}: Hom_C(X,Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$;

(чаще всего вместо $F_{X,Y}$ пишется просто F).

Эти данные должны быть подчинены следующим условиям:

$F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in Mor\ C$, для которых $\varphi\psi$ определен.

Иногда такие F называются ковариантными функторами, а функторы из C° в D - контравариантными функторами из C в D. Функтор $F: C_1 \times C_2 \to D$ называют функтором от двух аргументов и т.п.

Определение. Пусть C, D, E - категории, $F: C \to D$, $G: D \to E$ - функторы. Композиция $GF: C \to E$ получается композицией составляющих F и G отображений в обычном теоретико-множественном смысле.

Если наш "универсум" не слишком велик, существует категория, объектами которой являются категории, а морфизмами - функторы между ними.

Примеры функторов. Важнейшие функторы получаются "естественными конструкциями": когомологии и гомотопии топологических пространств; кольца характеров конечных групп и т.п. Эти

примеры слишком содержательны, чтобы их обсуждать здесь.

Контравариантный функтор в категории открытых множеств T_E топологического пространства E со значениями в Ens (соотв. Gr, Ann ...) называется предпучком множеств (соотв. групп, колец...) на E.

Пусть Δ – некоторая схема диаграммы, D и D_c – связанные с ней категории (см. п. 3). Функтор из D в категорию C – это то, что принято называть диаграммой из объектов C (типа Δ). Функтор из D_c – подобная же диаграмма с условиями коммутативности.

Если I – упорядоченное множество, рассматриваемое как категория, функтор из I в C есть семейство объектов из C, пронумерованных индексами I и связанных морфизмами так, что эти объекты образуют проективную или индуктивную систему в C.

6. Определение. Пусть F, G – два функтора из C в D. Функторным морфизмом (или естественным преобразованием) F в G (запись $f: F \to G$) называется множество морфизмов $f(X): F(X) \to G(X)$ по одному для каждого объекта $X \in Ob\, C$, удовлетворяющее следующему условию:

для всякого морфизма $\varphi: X \to Y$ в категории C диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Композиция функторных морфизмов определяется очевидным образом.

Функторный морфизм f называется функторным изоморфизмом, если морфизмы $f(X) \in Mor\, D$ являются изоморфизмами для всех $X \in Ob\, C$.

Согласно этому определению, функторы из C в D обра-

зуют множество объектов категории, обозначаемой $Funct(C,D)$.

7. Определение. Функтор $F: C \to D$ называется эквивалентностью категорий, если существует такой функтор $G: D \to C$, что

функтор GF изоморфен тождественному функтору Id_C;

функтор FG изоморфен тождественному функтору Id_D.

Категории C, D называются эквивалентными, если между ними существует эквивалентность.

Примеры: а. Категория Abf конечных абелевых групп эквивалентна двойственной категории Abf°. Функтор - эквивалентность сопоставляет каждой группе группу ее характеров.

б. Категория Ann° эквивалентна категории аффинных схем.

Венцом всей этой серии скучных определений является важное понятие представимого функтора и связанное с ним погружение любой категории C в $Funct(C^\circ, Ens)$.

Представимые функторы

Положим $\hat{C} = Funct(C^\circ, Ens)$.

Для любого объекта X категории C обозначим через $h_X \in Ob\,\hat{C}$ функтор

$$h_X(Y^\circ) = Hom_C(Y, X), \quad \forall\, Y^\circ \in Ob\, C^\circ,$$

который каждому морфизму $\varphi^\circ: Y_2^\circ \to Y_1^\circ$ ставит в соответствие отображение множеств

$$h_X(Y_2^\circ) \to h_X(Y_1^\circ),$$

переводящее морфизм $Y_2 \xrightarrow{\varphi} X$ в композицию $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2 \to X$.

8. Определение. Функтор $F: C^\circ \to Ens$ называется представимым, если он изоморфен функтору вида h_X для некоторого $X \in Ob\, C$. Объект X называется представляющим функтор F.

Пусть $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2$ – некоторый морфизм в C. Ему соответствует морфизм функторов $h_\varphi : h_{X_1} \to h_{X_2}$, который любому объекту $Y \in Ob\, C$ сопоставляет отображение

$$h_\varphi(Y) : h_{X_1}(Y) \to h_{X_2}(Y)$$

и переводит морфизм $Y \xrightarrow{\psi} X_1$ в сквозной морфизм $Y \xrightarrow{\psi} X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2$. Очевидно, $h_{\varphi\psi} = h_\varphi h_\psi$.

9. Теорема. <u>В описанных обозначениях отображение $\varphi \rightsquigarrow h_\varphi$ определяет изоморфизм множеств</u>

$$Hom_C(X, Y) \simeq Hom_{\hat{C}}(h_X, h_Y).$$

<u>Более того</u>, <u>это изоморфизм функторов от аргументов X, Y</u>. <u>Поэтому функтор $h : C \to \hat{C}$ определяет эквивалентность категории C с полной подкатегорией $\hat{C}$, состоящей из представимых функторов.</u>

Следствие. <u>Если функтор из $\hat{C}$ представим, представляющий его объект определен однозначно с точностью до изоморфизма.</u>

10. <u>Комментарий</u>. Доказательство этой теоремы, которое будет проведено ниже, сводится к тщательному выписыванию определений и проверкам коммутативности. Оно никак не проясняет содержательный смысл этого результата; именно это мы попытаемся сделать сейчас.

Теорема 9 служит исходной точкой для нескольких идей, которые можно развивать в разных направлениях.

<u>Первое направление</u>. Функтор h_X часто удобно представлять себе как "множество точек объекта X" (со значениями во всевозможных объектах $Y \in Ob\, C$; часто используется обозначение $h_X(Y) = X(Y)$):

$$h_X = \bigcup_{Y \in Ob C} h_X(Y) \text{ <u>с дополнительной структурой</u>}$$

Эта дополнительная структура, конечно, состоит в разбиении h_X на непересекающиеся подмножества $h_X(Y)$ и в задании мно-

жества отображений $h_X(Y_1) \to h_X(Y_2)$, индуцированных всевозможными морфизмами $Y_2 \to Y_1$.

Тем самым в принципе возможен переход от категорной точки зрения к структурной, потому что все категорные свойства объекта X точно отражаются в категорных свойствах структуры h_X.

Второе направление. Замена X на h_X позволяет переносить на произвольную категорию определения обычных теоретико-множественных конструкций. Вот самые стандартные примеры.

Пример. Объект $X \in Ob\, C$ вместе с парой морфизмов $p_1: X \to X_1$, $p_2: X \to X_2$ называется произведением X_1 и X_2, если отображения $h_{p_1}: h_X \to h_{X_1}$, $h_{p_2}: h_X \to h_{X_2}$ отождествляют h_X с $h_{X_1} \times h_{X_2}$ в теоретико-структурном смысле.

Несколько злоупотребляя краткостью, можно сказать, что $X_1 \times X_2$ – это объект, представляющий функтор $h_{X_1} \times h_{X_2}$; в силу теоремы 2, как это уже отмечалось, он определен однозначно с точностью до изоморфизма, если вообще существует.

Оговорка о существовании здесь весьма существенна: проверка его и составляет обычно содержательную часть "теоретико-множественных" конструкций в различных конкретных категориях.

Пример. На объекте $X \in Ob\, C$ можно "задать структуру" группы, кольца и т.д.: дело сводится к введению соответствующей структуры на каждом из множеств Y-точек $h_X(Y)$, которые должны быть согласованы относительно отображений, индуцированных морфизмами $Y_1 \to Y_2$. Более подробное изложение содержится в § II.

Третье направление. Пусть C – некоторая конкретная категория структур данного типа. Среди функторов $C \to Ens$, то есть объектов категории $\hat{C}$, могут существовать естественные функторы, которые априори скроются не как h_X, но в конце концов оказываются представимыми. (К содержательным примерам относятся функторы когомологий $X \mapsto H^n(X, \pi)$ на гомотопической категории). В таких случаях часто оказывается, что свойства функтора, представимого таким объектом, и

являются важнейшими свойствами самого объекта, которые лишь неявно содержатся в его структурном описании.

Более того, может оказаться, что некоторые естественные функторы $C \to Ens$ непредставимы, хотя "хотелось бы" иметь представляющие их объекты. Чаще всего это бывает, когда мы пытаемся провести некоторую обычную теоретико-множественную конструкцию, например, факторизацию по группе автоморфизмов (или по более сложному отношению эквивалентности).

В таких случаях может оказаться полезным добавить соответствующие функторы и категории C, погруженной в $\hat{C}$, и рассматривать их как "обобщенные" структуры типа C.

В алгебраической геометрии последних лет этот ход мысли привел к определению чудовищных образований, которые Б.Мойшезон называет "минисхемами", М.Артин – " étale schema", а А.Гротендик – просто многообразиями.

На этом мы заканчиваем общие замечания.

II. Доказательство теоремы 9. Построим отображение

$$i : Hom_{\hat{C}}(h_X, h_Y) \to Hom_C(X, Y),$$

которое каждому морфизму функторов $h_X \to h_Y$ сопоставляет образ $id_X \in h_X(X)$ в $h_Y(X)$ относительно отображения $h_X(X) \to h_Y(X)$, определенного этим функторным морфизмом. Проверим, что отображения $\varphi \rightsquigarrow h_\varphi$ и i являются взаимно обратными.

1) $i(h_\varphi) = h_\varphi(id_X) = \varphi$ в силу определения h_φ.

2) Наоборот, пусть дан функторный морфизм $g : h_X \to h_Y$. Он состоит из отображений $g(Z) : h_X(Z) \to h_Y(Z)$ для всевозможных $Z \in Ob\, C$. По определению, $i(g) = g(X)(id_X)$ и мы должны проверить, что

$$h_{i(g)}(Z) = g(Z).$$

Согласно определению, $h_{i(g)}(Z)$ ставит в соответствие

морфизму $Z \xrightarrow{\varphi} X$ композицию $Z \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{i(g)} Y$. Следовательно, нужно установить, что

$$g(Z)(\varphi) = i(g) \circ \varphi .$$

Воспользуемся коммутативностью диаграммы (см. определение 6):

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{g(X)} & h_Y(X) \\ h_X(\varphi) \downarrow & & \downarrow h_Y(\varphi) \\ h_X(Z) & \xrightarrow[g(Z)]{} & h_Y(Z) \end{array}$$

Переведем элемент $id_X \in h_X(X)$ двумя разными путями в правый нижний угол. Верхний путь переводит его сначала в $i(g)$, затем в $i(g) \circ \varphi$. Нижний путь переводит его сначала в $h_X(\varphi)(id_X) = \varphi$, а затем в $g(Z)(\varphi)$. Это доказывает требуемое.

Тем самым, мы проверили, что образ функтора h является полной подкатегорией в $\hat{C}$, поэтому он, очевидно, изоморфен C. Остальные утверждения проверяются тривиально. Быть может, стоит лишь отметить, что если к полной подкатегории функторов h_X из $\hat{C}$ добавить представимые функторы, то есть изоморфные уже имеющимся в ней, то новая подкатегория будет эквивалентна прежней.

Упражнение

В обозначениях теоремы 9 пусть $F \in Ob\,\hat{C}$, $X \in Ob\,C$. Построить функториальный изоморфизм множеств

$$Hom_{\hat{C}}(h_X, F) \simeq F(X).$$

Упражнения

1.

1. Система $2T-4=0$ эквивалентна системе $T-2=0$, если и только если 2 обратима в кольце констант K.

2. Система $(T-1)^2=0$ не эквивалентна системе $T-1=0$.

3. Пусть система $\{F_i(X_j)=0\}$, $i\in I$, $j\in J$ несовместна. Тогда у нее есть конечная подсистема, которая также несовместна.

4. $T_1, \dots, T_n$ – неизвестные; $s_i(T)$ – i-й элементарный симметрический многочлен от них. Над какими кольцами констант эквивалентны системы уравнений

$$X_1: \quad s_i(T)=0, \quad i=1,\dots,n,$$

$$X_2: \quad \sum_{j=1}^{n} T_j^i=0, \quad i=1,\dots,k\le n.$$

(Указание: использовать формулы Ньютона).

5. Любая система уравнений над кольцом K от конечного числа неизвестных эквивалентна конечной системе уравнений, если и только если кольцо K нетерово.

6. Пусть X – система уравнений над K, A – соответствующее ей кольцо. Отображения $L \rightsquigarrow X(L)$ и $L \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_K(A,L)$ определяют ковариантные функторы на категории K-алгебр со значениями в категории множеств. Проверить, что предложение 1.9 определяет эквивалентность этих функторов (см. Дополнение)

2.

1. <u>Слабая форма теоремы Гильберта о нулях</u>. Рассмотрим мно-

тему уравнений $\{F_i(T_j)=0\}$ над кольцом K. Тогда либо эта система имеет решение со значениями в некотором поле, либо существуют такие многочлены $G_i \in K[T_j]$ (конечное число которых $\neq 0$), что

$$\sum_i G_i F_i = 1 .$$

<u>Указание</u>: применить теорему 2.3 к кольцу, соответствующему системе.

3.

1. Пусть $a_1, \dots, a_n \subset A$ – идеалы. Доказать, что $V(a_1 \dots a_n) = V(a_1 \cap \dots \cap a_n)$. <u>Решение</u>: $a_1 \dots a_n \subset a_1 \cap \dots \cap a_n$, поэтому $V(a_1 \dots a_n) \supset V(a_1 \cap \dots \cap a_n)$. Наоборот, пусть p_x – простой идеал; $p_x \in V(a_1 \dots a_n) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} V(a_i) \Rightarrow x \in V(a_i)$ для некоторого i, поэтому $p_x \supset a_i \supset a_1 \cap \dots \cap a_n$, то есть $x \in V(a_1 \cap \dots \cap a_n)$.

2. Пусть $f_1, \dots, f_n \in A$. Если $(f_1, \dots, f_n) = A$, то для любых целых $m_i > 0$ имеем $(f_1^{m_1}, \dots, f_n^{m_n}) = A$.

<u>Решение</u>. В силу 3.5 имеем:

$$(g_1, \dots, g_n) = A \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V(g_i) = \emptyset .$$

Кроме того, $V(g^m) = V(g)$ при $m > 0$. Отсюда следует требуемое.

3. Элементы $f \in A$, не обращающиеся в нуль ни в одной точке $\operatorname{Spec} A$, обратимы.

4.

1. Пусть $S \subset A$ – мультипликативное множество (см. Лант

Алгебра, глава II, § 3). Назовем S <u>полным</u>, если $fg \in S \Rightarrow f \in S$ и $g \in S$ ($f, g \in A$). Каждое мультипликативное множество S имеет однозначно определенное пополнение $\tilde{S}$: минимальное полное мультипликативное подмножество, содержащее S.

Показать, что $D(f) = D(g) \Leftrightarrow (f^n)^{\sim}_{n \geq 0} = (g^n)^{\sim}_{n \geq 0}$.

2. Показать, что пространства $D(f)$ квазикомпактны.

3. Связны ли пространства:

а. $\operatorname{Spec} K[T]/(T^2-1)$, K – поле.

б. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$.

4. Неприводимые компоненты каждой из плоских кривых

$$T_1(T_1 - T_2^2) = 0,$$
$$T_2(T_1 - T_2^2) = 0$$

в $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T_1, T_2]$ состоят из прямой и параболы и поэтому попарно изоморфны. Точка пересечения двух компонент в обоих случаях есть вершина параболы. Доказать, что тем не менее кольца этих кривых неизоморфны.

5. Пусть A – нетерово кольцо. Построим граф, вершины которого взаимно однозначно соответствуют неприводимым компонентам $\operatorname{Spec} A$, а две вершины соединены, если и только если соответствующие компоненты имеют непустое пересечение. Доказать, что связные компоненты пространства $\operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с линейно связными компонентами графа.

6. Закончить доказательство предложения 4.12. Однозначно ли определено разложение $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$, существование которого утверждается?

7. Пусть $(K_i)_{i\in I}$ – некоторое семейство полей. Положим $A=\prod_{i\in I} K_i$ и обозначим через $\pi_i : A \to K_i$ гомоморфизмы проекции.

а. Пусть $a \subset A$ – некоторый собственный идеал. Определим по нему систему подмножеств Φ_a множества I, положив:

$K \in \Phi_a \Leftrightarrow \exists f \in a$ такой, что $\pi_i(f)=0$, если и только если $i \in K$.

Показать, что K непусты и что система Φ_a обладает следующими двумя свойствами:

$$\alpha.\ K_1 \in \Phi_a \ \& \ K_2 \in \Phi_a \Rightarrow K_1 \cap K_2 \in \Phi_a,$$

$$\beta.\ K_1 \in \Phi_a \ \& \ K_2 \supset K_1 \Rightarrow K_2 \in \Phi_a$$

б. Система Φ непустых подмножеств множества I со свойствами α) и β) называется <u>фильтром</u> на I.

Пусть Φ – некоторый фильтр; поставим ему в соответствие множество $a_\Phi \subset A$, положив:

$$f \in a_\Phi \Leftrightarrow \{ i \mid \pi_i(f)=0 \} \in \Phi.$$

Показать, что множество a_Φ является идеалом в кольце A.

в. Показать, что отображения $a \rightsquigarrow \Phi_a$ и $\Phi \rightsquigarrow a_\Phi$ определяют взаимно однозначное соответствие между идеалами кольца A и фильтрами на I. Далее, $a_1 \subset a_2 \Leftrightarrow \Phi_{a_1} \subset \Phi_{a_2}$. В частности, максимальным идеалам соответствуют максимальные

фильтры; они называются ультрафильтрами.

г. Пусть $i \in I$, $\Phi^{(i)} = \{K \subset I \mid i \in K\}$. Показать, что $\Phi^{(i)}$ – ультрафильтр. Показать, что если множество I конечно, то любой ультрафильтр имеет вид $\Phi^{(i)}$ для некоторого $i \in I$. Какие идеалы в A отвечают фильтрам $\Phi^{(i)}$? Каковы факторкольца A по этим идеалам?

д. Показать, что если I бесконечно, то на I существует ультрафильтр, отличный от фильтров $\Phi^{(i)}$. (Указание: пусть $\Phi = \{K \subset I \mid I \setminus K$ конечно$\}$; пусть $\overline{\Phi}$ – какой-нибудь максимальный фильтр, содержащий Φ. Проверить, что $\overline{\Phi} \neq \Phi^{(i)}$ для всех $i \in I$.

е. Пусть $A = \prod_{q \in I} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, I – множество всех простых чисел. Пусть $p \subset A$ – простой идеал, отвечающий некоторому ультрафильтру, отличному от всех $\Phi^{(q)}$. Показать, что A/p – поле нулевой характеристики.

6.

1. Пусть B – некоторая A-алгебра. Доказать, что элементы B, целые над A, образуют A-подалгебру B.

2. Пусть $A \subset B \subset C$ – три кольца, B цело над A, C цело над B. Показать, что C цело над A.

3. Пусть A – кольцо с однозначным разложением на множители. Тогда A целозамкнуто в своем поле частных, то есть любой элемент f/g, целый над A, принадлежит A.

Решение. Пусть f/g, $f, g \in A$ удовлетворяет уравнению $(f/g)^n + a_{n-1}(f/g)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_i \in A$. Тогда

$f^n + g a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + g^n a_0 = 0$, откуда g / f^n и если $(g, f) = 1$, то g обратим в A. Значит $f/g \in A$.

7.

1. Пусть K - алгебраически замкнутое поле. Описать все примарные замкнутые подсхемы прямой $\operatorname{Spec} K[T]$. То же в случае незамкнутого поля. То же для $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

2. Описать с точностью до изоморфизма примарные замкнутые подсхемы плоскости $\operatorname{Spec} K[T_1, T_2]$ с носителем $V(T_1, T_2)$ локальные кольца которых имеют длину ≤ 3.

9.

1. Найти формулы, выражающие $n(p^a)$ через $n(p^b)$.

2. Вычислить количество неприводимых многочленов от одной переменной степени d над полем из q элементов.

3. Вычислить $\zeta_A(x)$, где $A = \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]/(F)$, F - квадратичная форма.

4. Пусть A - кольцо конечного типа над $\mathbb{Z}$, P - множество натуральных простых чисел

$$S = \{p \in P \mid \exists\, x \in \operatorname{Spec} A,\ \operatorname{Char} k(x) = p\}.$$

Доказать, что либо S конечно, либо $P \setminus S$ конечно. Привести пример, когда S и $P \setminus S$ бесконечны, для области целостности не конечного типа над $\mathbb{Z}$.

12.

1. <u>Конструкция несвободного проективного модуля с помощью листа Мебиуса.</u>

Пусть A – кольцо непрерывных вещественнозначных функций f на $[0,1]$ с условием $f(0)=f(1)$; M – A -модуль таких функций с условием $f(0)=-f(1)$. Доказать, что M не свободен, но $M\oplus M \simeq A\oplus A$

Доказательство. I . Пусть $f_1, f_2 \in M$; тогда $f_1 f_2 (f_2) - f_2^2(f_1)=0$ и $f_1 f_2$, $f_2^2 \in A$. Поэтому любые два элемента из M зависимы над A . Значит, если M свободен, он должен быть ранга I. Но $M \neq Af$ для любой $f \in M$, ибо f обращается в нуль где-то на $[0,1]$, а в M есть функции, не обращающиеся в нуль в любой наперед заданной точке.

2 . Элементы $f=(\sin\pi t, \cos\pi t)$, $g=(-\cos\pi t, \sin\pi t)$ образуют свободный базис в $M\oplus M$: для любых $(m_1, m_2)\in M\oplus M$ система уравнений $\begin{cases} x\sin\pi t - y\cos\pi t = m_1 \\ x\cos\pi t + y\sin\pi t = m_2 \end{cases}$ однозначно разрешима в A.