Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

Ю.И.Манин

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Часть I

Учебное пособие для студентов
специальности 0647

Рекомендовано Редсоветом института
в качестве учебного пособия

Москва - 1974

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Глава Ш. Проблема континуума.

§ I. Постановка задачи. Неформальные объяснения.

§ 2. Язык $L_2 Real$ и его стандартная интерпретация.

§ 3. Континуум-гипотеза и аксиома выбора.

§ 4. Нестандартная булева интерпретация языка $L_2 Real$ основные понятия.

§ 5. Конструкция булевой интерпретации языка $L_2 Real$.

§ 6. Континуум-гипотеза "ложна".

§ 7. Аксиомы $L_2 Real$.

§ 8. Аксиома выбора "истинна".

§ 9. Аксиома полноты "истинна".

§ IO. Обсуждение.

Введение

0.I. Содержанием математической логики является изучение языка математики.

Разумеется, забота о языке и постоянная его перестройка для приведения в соответствие с меняющимся состоянием знаний характерна для любой естественной науки (ср. судьбу "флогистона" и "мирового эфира" в физике). Тем не менее, необходимая работа обычно осуществляется по ходу дела, и то пристальное критическое рассмотрение, которому математика подвергла самое себя и свои средства выражения, представляется уникальным.

Причина этого состоит, конечно, в том, что все остальные естественные науки имеют предмет, внеположный им, и эволюция языка науки определяется постоянным сравнением научного описания с описываемой реальностью.

Попытка применить эту же схему к математике сразу наталкивается на принципиальную трудность, ибо совершенно не ясно, в каком смысле числа и множества являются реальностью. Столь же не ясным при внимательном рассмотрении становится ответ на вопрос, что такое истинность (математического рассуждения).

Если быть до конца последовательным, следует признать это обстоятельство роковым.

* Действительно, до выяснения природы истинности, мы, по-видимому, не в состоянии сделать ни одного истинного утверждения, и исследование должно остановиться не начавшись. *

Предыдущий абзац не является просто софизмом. Он предопределяет две характерные черты математической логики.

Первая состоит в том, что строя формализмы логики, мы неизбежно должны пользоваться неформализованными, интуитивными представлениями, близкими к обычной рабочей интуиции математика. Технический термин для этого - "метаязык", на котором идет описание "формальных языков", в свою очередь являющихся моделями дедуктивных, в том числе математических (в том числе метаязыковых!) рассуждений.

Положение дел здесь можно сравнить с понятием "элементарности" в физике. Элементарные частицы - это не те объекты, которые являются последними кирпичиками анализа, - скорее это те объекты, дальнейший анализ которых обнаруживает повышение уровня сложности вместо его понижения. "Элементарность" понятия истины имеет сходные черты.

Вторая характерная черта логики состоит в том, что рассуждение, выделенное двумя звездочками в шестом абзаце служит (очень грубой) моделью доказательства нетривиальных теорем о невозможности тех или иных математических конструкций. Такие теоремы о невозможности, сопоставимые с "принципом запрета" в современной физике, составляют вершины современной математической логики. Чтобы убедиться в этом, достаточно указать, что фундаментальные результаты Геделя и других авторов называются теоремами о <u>не</u>полноте, <u>не</u>разрешимости, <u>не</u>зависимости и т.п.

Такого типа результаты, представляющие очевидный общегуманитарный интерес, не имеют прецедентов в развитии философской мысли до XX века, и являются существенным вкладом естественных наук в фонд гуманитарных. С ним можно сравнить по значению и глубине только анализ квантовомеханических представлений о

"дополнительности" и "неопределенности", распространенный Нильсом Бором далеко за пределы физики микромира. Возможно, что оба круга идей - логики и квантовой механики - имеют глубинную связь. Дело в том, что результаты о невозможности, упомянутые выше, относятся к детерминированным ("запрограммированным" как принято говорить сейчас) мыслительным процессам, а квантовая механика как раз очерчивает границы наивного детерминизма.

Практические применения методов математической логики к проектированию и эксплуатации вычислительных и управляющих систем сейчас хорошо известны, и мы позволим себе не останавливаться на них здесь подробно.

0.2. Для понимания генезиса и структуры математической логики необходимо проследить ее многостороннюю связь с теорией множеств, "наивная" или "содержательная" форма которой была основана в работах Г.Кантора на рубеже нашего века.

Прежде всего, вся современная математика может быть построена на базе теории множеств. (Наиболее последовательное и целостное изложение этой позиции предпринято в многотомном труде "Основы математики" Н.Бураки). Поэтому логика как "теория математики" вынуждена соотноситься с теорией множеств.

Далее, уже в начале века обнаружилось, что некоторые конструкции, основанные на интуитивном представлении о том, что множества могут состоить из каких угодно объектов, быстро приводят к противоречию (парадоксы Бурали-Форти, Расселла и др.). Разные попытки устранить эти противоречия породили первые понятия и результаты современной математической логики.

Наконец, теория множеств полужила для логики источником нескольких важнейших идей (диагональный процесс, интерпретация)

и задач (гипотеза континуума), во многом предопределивших направление ее развития.

Для большей конкретности дальнейшего обсуждения кратко опишем три теоретико-множественных конструкции.

Предполагается, что читатель знаком с понятием множества, с первоначальными операциями над множествами и их стандартными обозначениями. К ним относятся, в частности, понятие взаимно однозначного соответствия, мощности и следующие конструкции: $P(A)$ - множество всех частей (подмножеств) множества; A ; $A \times B \times \ldots \times M$ - произведение семейства множеств $A, B, \ldots, M$ элементы которого суть наборы $(a, b, \ldots, m)$, где $a \in A$, $b \in B, \ldots, m \in M$; отношения эквивалентности R на множестве A : фактор-множество A/R , состоящее из всех классов эквивалентности, является частью $P(A)$ и т.п. (См., например, Н.Бурбаки "Теория множеств" Сводка результатов).

0.3. <u>Первая конструкция</u>: <u>диагональный процесс Кантора</u>.

<u>Теорема</u>. (Г.Кантор, 1890). Не существует взаимно однозначного соответствия между множеством N целых положительных чисел и множеством вещественных чисел α в интервале $[0,1[$.

<u>Доказательство</u>. Будем представлять числа α десятичной записью $0,\overline{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$, где $\alpha_i \in [0, 1, \ldots, 9]$. Однозначность записи, важная для дальнейшего, может быть достигнута, скажем, запретом писать подряд бесконечно много девяток.

Предположим, что нумерация $[0,1[$ - взаимно однозначное соответствие между N и $[0,1[$ - существует. Пусть

$$\alpha^{(n)} = 0,\overline{\alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} \ldots \alpha_k^{(n)} \ldots} \quad , \; n \in N$$

n-е вещественное число в этой нумерации. Для каждого $n \in N$ выберем десятичную цифру β_n так, чтобы $\beta_n \neq \alpha_n^{(n)}$, $\beta_n \neq 9$ (отраховка от запрещенных разложений!). Тогда число

$$\beta = 0, \overline{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}$$

принадлежит $[0,1[$, но не может получить никакого номера, ибо β отличается от α_n в n-м знаке для всех n . Противоречие. ■ (Знак ■ здесь и ниже означает конец доказательства или его отсутствие).

0.3. Вторая конструкция: вещественные числа. Вещественные числа составляют арену для большей части классического анализа и его приложений. Проследим в общих чертах, как они строятся в теории множеств, начиная буквально "с пустого места". Процесс состоит из нескольких этапов.

Натуральные числа $\mathbb{N}$ и нуль. Натуральные числа суть мощности конечных множеств. Нуль 0 есть мощность пустого множества ϕ ; единица 1 есть, например, мощность множества $\{\phi\}$, единственным элементом которого является пустое множество ϕ ; двойка 2 есть мощность множества $\{\phi, \{\phi\}\}$ и т.п. Сложение чисел определяется через объединение непересекающихся множеств и т.п.

Целые числа $\mathbb{Z}$. Во множестве пар натуральных чисел $N \times N$ введем отношение эквивалентности R_1 , положив $(x,y) \underset{R_1}{\sim} (x',y')$, если и только если $x+y'=x'+y$ Определим

$$\mathbb{Z} = N \times N / R_1$$

Интуитивно, класс пары $(x,y) \bmod R_1$ есть разность $x-y$. Сложение, вычитание, умножение в $\mathbb{Z}$ можно далее определить обычным способом. Вложение $N \subset \mathbb{Z}$ определяет также порядок на $\mathbb{Z}$: $x > y$, если $x-y \in N$.

<u>Рациональные числа $\mathbb{Q}$</u>. Во множестве пар $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (вторые элементы ненулевые) введем отношение эквивалентности R_2, положив $(x,y) \underset{R_2}{\sim} (x',y')$, если и только если $xy' = x'y$. Определим

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / R_2$$

Интуитивно, класс пары $(x,y) \bmod R_2$ есть частное $\frac{x}{y}$. Сложение, вычитание, умножение, деление, порядок в $\mathbb{Q}$ вводятся обычным порядком.

<u>Последовательности Коши рациональных чисел</u>. Последовательности $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ рациональных чисел суть элементы бесконечного произведения $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \times \dots$. Среди них выделяются последовательности Коши условием:

$(x_1, \dots, x_n, \dots)$ последовательность Коши $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ для всякого $m \in N$ существует $n_0 \in N$ такое, что при всех $n_2 \geqslant n_1 \geqslant n_0$ имеем

$$-\frac{1}{m} \leqslant x_{n_2} - x_{n_1} \leqslant \frac{1}{m}$$

Пусть $C_1 \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \times \dots$ множество всех последовательностей Коши.

Вещественные числа $\mathbb{R}$. На множестве C_1 введем отношение эквивалентности R_3, положив

$$(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \underset{R_3}{\sim} (x'_1, \ldots, x'_n, \ldots) \Leftrightarrow$$

последовательность $(x_1 - x'_1, \ldots, x_n - x'_n, \ldots)$ "сходится к нулю", т.е. для всякого $m \in N$ существует $n_0 \in N$ такое, что при всех $n \geq n_0$

Имеем $-\frac{1}{m} \leq x_n - x'_n \leq \frac{1}{m}$

Определим, наконец, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ как фактор-множество

$$\mathbb{R} = C_1 / R_3$$

Замечание. Читатель, не продумывавший этих конструкций во всех деталях ранее, вероятно, будет обескуражен их громоздкостью и краткостью изложения. Этот эффект до некоторой степени входил в намерение автора. Вещеотвенное число есть "класс последовательностей пар мощностей конечных множеств" - нельзя ли как-нибудь попроще?

Нельзя.

В некоторых вариантах глубоко формализованной математики даже единица " I " оказывается уже чрезвычайно сложным образованием. В формальной системе Н.Бурбаки используются всего 6 первоначальных неопределенных знаков: $\tau, \square, \vee, \neg, =, \in$. Чтобы изложение имело реалистическую длину, приходится очень быстро вводить правила сокращенной записи и новые знаки. На

одном из этапов единица впервые появляется как "терм" (в сокращенной записи) вида

$$\tau_Z((\exists u)(\exists \mathcal{U})(u=(\mathcal{U},\{\phi\},Z) \& \mathcal{U} \subset \{\phi\}\times Z \& (\forall x)((x\in\{\phi\}) \Rightarrow (\exists y)((x,y)\in\mathcal{U})) \& (\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x,y)\in\mathcal{U} \& (x,y')\in\mathcal{U}) \Rightarrow (y=y')) \& (\forall y)((y\in Z) \Rightarrow (\exists x)((x,y)\in\mathcal{U})))).$$

Грубый подсчет показывает, что это выражение, записанное без сокращений, должно было бы содержать несколько десятков тысяч знаков первоначального шестибуквенного алфавита.

0.4. Третья конструкция: парадокс Рассела (1910).

Определение. Множество M называется хорошим, если оно не является своим собственным элементом; не хорошие множества называются плохими.

Парадокс. Рассмотрим множество S, состоящее из всех хороших множеств. Является ли оно хорошим или плохим? Оба предположения приводят к противоречию:

S хорошее $\Rightarrow$ S должно содержать себя по определению S $\Rightarrow$ S плохое.

S плохое $\Rightarrow$ S не должно содержать себя по определению S $\Rightarrow$ S хорошее.

Многие предложенные способы избавления от этого парадокса сводятся к тому, чтобы истолковать его как доказательство следующей теоремы:

Теорема. Множество S не существует.

(По причинам, скорее психологическим, чем математическим, чаще всего пытаются добиться того, чтобы множество S нельзя было даже определить).

0.5. Теперь читателю полезно будет мысленно вернуться к конструкции вещественных чисел $\mathbb{R}$, в которой, по-видимому, обращение с множествами было гораздо более многоступенчатым и сложным, чем в парадоксе Рассела; вообразить себе все здание Анализа – с интегрированием Лебега, кривыми Пеано и т.п., надстроенным над $\mathbb{R}$ в соответствии с теоретико-множественными принципами; и задаться вопросом:

Существуют ли вещественные числа $\mathbb{R}$?

Различные школы в математической логике, особенно в ее метаматических аспектах, удобно характеризовать тем, как они относятся к этому вопросу.

Нижеследующее описание нескольких основных направлений очень неполно и, наверняка, содержит искажения: эта тема совершенно не поддается формализации.

а) Формализм в стиле Гильберта. Математика есть игра, в ходе которой по определенным правилам пишутся значки на бумаге. Вещественные числа $\mathbb{R}$ фигурируют в массе неформализованных математических текстов вместе со своими свойствами. Анализируя реальные тексты, следует составить список основных значков и жестких правил составления из них правильных формальных математических текстов. Если, следуя этим правилам, можно составить, скажем, текст 0 = I, то наша "формальная математика" будет противоречивой, и ничего, с чем мы в ней работаем, "не существует".

На самом деле, мы надеемся, что все (или большая часть) классических математических объектов "существует", то есть (ЖС !), что рассуждая о них по правилам, мы не можем прийти к противоречию. Мы надеемся также, что это утверждение можно доказать, исследуя тексты и правила их составления безотносительно к их "содержанию".

Вот грубая модель такой программы. Рассмотрим тексты, которые являются записями шахматных партий в стандартной нотации от начальной позиции до какого-то хода. Ясно, что правила "ходов" можно сформулировать как правила последовательного составления таких текстов безотносительно к реальным деревянным олонам, пешкам и т.д. Ясно также, что по записи можно подсчитать, скажем, количество фигур того или иного цвета на доске в конечной позиции текста. При этом утверждение о том, что "на дооке не может оказаться больше двух королей" можно сформулировать и доказать, анализируя только правила составления текстов и не аппелируя к "настоящей" шахматной доске.

б) Конотруктивизм. "Все" вещественные числа, безусловно, не существуют. Имеет смысл говорить лишь о тех из них, для которых указан алгоритм вычисленин, скажем, их последовательных десятичных знаков (типа программы для ЭВМ). Вообще "существуют" только объекты, которые можно построить, хотя бы в принципе. Для очень многих понятий и результатов классической математики можно указать их конструктивные варианты. Те результаты, которые являются по существу неконструктивными, подлежат полной дискредитации, в том числе практичеоки вся теория множеств и вещественного континуума и т.п. Особенно широко известен кон-

структивистский отказ от принципа исключенного третьего.

в) Интуиционизм. Концепция, близкая к конструктивизму. Ее сторонники, однако, подчеркивают свою отделенность от формализованной (мета)математики и тяготение к философии и социальным наукам.

г) Логицизм. Концепция, в которой логическая система предшествует математической; представлена, в частности, фундаментальным трудом Уайтхеда и Расселла " Principia Matematica". Согласно Клини, "логицистический тезис может быть ... подвергнут сомнению по той причине, что логика уже предполагает математические идеи в своей формулировке ... Существенное математическое ядро содержится в идее итерации, которой приходится пользоваться, например, при описании ... вывода из данных посылок".

0.6. Рабочая точка зрения, которую принимает автор этих записок, состоит в том, что математическая логика есть часть "наивной" математики. Так она и будет излагаться. Метаматематическое истолкование логических теорем приводится лишь в качестве интуитивных объяснений, возможность которых, однако, определяет эмоциональную ценность логики.

Оправдание такой точки зрения в значительной мере основано на результатах К.Геделя, лежащих в русле гильбертовского формализма.

Эти результаты, как уже говорилось, носят отрицательный характер.

Теорема о "неполноте" любой формализованной теории, содержащей определенную часть арифметики, утверждает, что всегда

существуют содержательно истинные теоремы этой теории, которые нельзя доказать средствами этой теории.

Проблема непротиворечивости достаточно богатой формальной теории также не может быть решена только средствами, формализуемыми в этой теории.

Математику нельзя формализовать.

Попытки формализовать ее, однако, оставляют содержательную и интересную часть математики.

0.7. В заключение мы приведем здесь простую, но уже нетривиальную теорему, родственную геделевским "принципам запрета". Чтобы избежать долгих формальных объяснений, мы аппелируем к интуиции читателя с небольшим опытом работы на ЭВМ.

Постановка задачи. В Вычислительный центр поступают тексты, написанные на алгоритмическом языке (окажем, типа АЛГОЛа). Транслятор - специальная программа - превращает эти тексты в программы на машинном языке. Некоторые тексты содержат ошибки, скажем, синтаксические; транслятор реагирует на некоторые из ошибок остановом.

Естественно поставить задачу написания транслятора, который обнаруживал бы все больше и больше типов ошибок и, может быть, даже и "все" ошибки в любом тексте на алгоритмическом языке.

Уточним постановку задачи.

Фиксируем алгоритмический язык L ; его алфавит состоит из конечного числа знаков. Любую конечную последовательность этих знаков назовем текстом.

Текст назовем правильной программой, если его перевод на машинный язык возможен и если после введения в машину, получившаяся программа заставляет машину работать (потенциально) бесконечно долго и последовательно выпечатывать на выходе таблицу вида

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & \ldots \end{array}$$

где $f(n)$ - некоторые натуральные числа. Иными словами, правильные программы вычисляют функции от натурального аргумента с натуральными значениями, всюду определенные и всюду вычислимые.

Назовем ТРАНСЛЯТОРОМ программу, на вход которой можно подать любой текст, и получить на выходе I, если этот текст является правильной программой, и 0 в противном случае.

0.8. Теорема. ТРАНСЛЯТОР не существует.

Доказательство. Предположим, что ТРАНСЛЯТОР существует. Пользуясь им, напишем некоторую правильную программу, которую назовем Большой Программой (БП). БП будет работать так. Упорядочим как-нибудь символы языка L ; назовем этот порядок алфавитным.

а) Специальная подпрограмма БП порождает по очереди все тексты на языке L , упорядоченные по длине, а внутри текстов одинаковой длины - в словарном порядке.

б) Очередной текст подается на вход ТРАНСЛЯТОРА. Если на выходе появляется 0, этот текст не учитывается. Если на выходе появляется I, этот текст является правильной программой, и ему

присваивается очередной номер $\underline{\underline{n}}$. Таким образом, мы порождаем по очереди все правильные программы и только их, в словарном порядке.

Пусть $\underline{\underline{n}}$ -я правильная программа вычисляет функцию $f_{\underline{\underline{n}}}(k)$.

в) Последний цикл БП вычисляет для каждого натурального n число

$$\mathcal{F}(n) = f_n(n) + 1$$

и подает пару $(n, \mathcal{F}(n))$ на выход.

Очевидно, так определенная БП является правильной программой. Поэтому функция $\mathcal{F}(n)$ должна содержаться в списке $(f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots)$, который по своей конструкции содержит <u>все</u> функции, вычисленные правильными программами.

<u>Противоречие</u>: $\mathcal{F}$ не может содержаться в этом списке, ибо значения $\mathcal{F}(x)$ и $f_n(x)$ не совпадают при $x = n$. ■

0.9. Читатель заметит пуповину, связывающую это рассуждение одновременно с диагональным процессом Кантора и парадоксом Расселла. Последнее станет особенно ясно, если вместо поисков $\mathcal{F}$ среди (f_n) попытаться отыскать БП среди всех правильных программ.

Литература

Ниже указаны некоторые основные книги по логике на русском языке. Помещенная в них библиография позволяет проследить более специальные работы.

а) Общие курсы

С.К.Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.

П.С.Новиков. Элементы математической логики. М., 1959.

Ф.Гудстейн. Математическая логика. М., ИЛ, 1961.

Р.Линдон. Заметки по логике. М., МИР, 1968.

А.Тарский. Введение в логику и методологию естественных наук. М., ИЛ, 1948.

Мендельсон. Введение в математическую логику. М., МИР, 1971.

б) Более специальные вопросы

В.А.Успенский. Лекции о вычислимых функциях. М., Физматгиз, 1960.

А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., "Наука", 1966.

А.Гейтинг. Интуиционизм. М., "мир", 1965.

П.Дж.Козн. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., "Мир", 1969.

Приложение

Ниже собраны некоторые любопытные неформальные высказывания о предмете логики.

" В Копенгагенском институте, куда в те годы съезжался для дискуссий целый ряд молодых физиков из разных стран, мы имели обыкновение в трудных случаях утешаться шутками, среди которых особенно любимым было старое присловье о двух родах истины.

К одному роду относятся такие простые и ясные утверждения, что противоположные им очевидно неверны.

Другой род, так называемые "глубокие истины", представляют,наоборот, такие утверждения, что противоположные им также содержат глубокую истину." (Нильс Бор. Избранные научные труды. Т. II, Наука, 1971, стр. 432).

(Читатель заметит, что утверждение о существовании "глубоких истин", несомненно, является глубокой истиной, ибо противоположное убеждение - "всякая истина проста" - также содержит глубокую истину.

Это - очень метаматематическое рассуждение. Ю.М.).

"Леви Брюль обнаружил, что мышление первобытных людей является не логическим, а, как он его назвал, "пралогическим", в частности, оно характеризуется безразличием к принципу исключенного третьего, выражаемому формулой $a\bar{a} = 0$ или утверждениями типа "нельзя съесть пирог, сохранив его". Это

было очень важным и плодотворным открытием, особенно потому, что, как указывали уже многие авторы, Леви Брюль, безусловно, ошибался, когда находил существенное различие между "цивилизованным" и "первобытным" человеком. Постепенно становится все более и более очевидным, что все мы - братья, несмотря на различие цвета кожи, и что логическое мышление даже у "цивилизованных" людей похоже скорее на танцы лошадей, то есть на трюк, которому можно обучить некоторых, но далеко не всех, причем он может исполняться лишь с большей затратой сил и с разной степенью мастерства, и даже лучшие представители не в состоянии повторять его много раз подряд."

(Х.Ульдалль. Основы глоссематики. В сб. "Новое в лингвистике". М., ИЛ, 1960).

Общее впечатление от результатов Геделя прекрасно резюмировано в беседах Гете с Эккерманом (Гедель еще не родился, когда эти слова были сказаны):

"Плохо то, что всякое мышление ничем не помогает самому мышлению. Надо быть правильным от природы ... ".

Н.Бурбаки, как практически работающий математик, высказывается на эту тему с галльским здравомыслием и терпимостью: "Математики, кажется, сходятся на том, что между нашими "интуитивными" представлениями о множествах и числах и призванными описывать их формализмами имеется не более чем поверхностное сходство. Разногласия относятся лишь к вопросу о выборе между теми и другими."

ГЛАВА I

ЯЗЫК ВЫСКАЗЫВАНИЙ

"Ты пишешь на листе, и смысл, означен и закреплен блужданьями пера, для сведущего до конца прозрачен: на правилах покоится игра."

Г.Гессе, Алфавит

I. Общие сведения о языках

I.I. Формальные языки (иначе формальные системы или исчисления) подобны физическим теориям в том отношении, что они призваны идеализированно описывать некоторую реальность.

"Реальностью" для формального языка являются определенные типы (математических) рассуждений или некоторые процессы работы абстрактных автоматов. Разные языки отличаются друг от друга в первую очередь широтой охвата формализуемых типов рассуждений; во вторую очередь - ориентацией на конкретные математические теории; и в третью - отбором элементарных рассуждений и оформлением - выбором алфавита, то есть системы первоначальных символов.

Правила составления допустимых комбинаций из символов алфавита образуют синтаксис языка. Правильно составленные комбинации того или иного вида называются термами, формулами и т.п.

Основные математические задачи о языке состоят в выяснении "истинности" тех или иных классов формул. Этому пред-

шествует формализация разных аспектов понятия истинности, в частности, его разделение на содержательную истинность и синтаксическую истинность (иначе доказуемость, выводимость и т.п.) и выяснение соотношений между этими аспектами.

Содержательная истинность вводится через понятие интерпретации данного языка. В этих записках язык интерпретируется всегда в "наивной" (или содержательной, интуитивной) теории множеств, теории чисел и т.п.

Трехчленное отношение

$$\text{физичеокая теория} \xleftrightarrow{\text{(мысленный) эксперимент}} \text{реальность}$$

параллельно трехчленному отношению

$$\text{язык} \xleftrightarrow{\text{интерпретация}} \text{содержательные рассуждения.}$$

Интерпретация является математическим понятием, которое для каждого языка подлежит точному определению. Ее не следует смешивать с интуитивными пояснениями и мотивировками.

Синтаксическая истинность вводится на основе аксиом и правил вывода и имитирует свойство "доказуемость данными средствами".

I.2. Замечания.

а) Психологические трудности овладения новым формальным языком близки к трудностям овладения новым человеческим языком. На первых порах они связаны с необходимостью запомнить облик (звуковой, графический) слов, их значения (интуитивный вариант интерпретации) и грамматику (аналог синтаксиса).

б) Алгоритмические языки (типа АЛГОЛ) близки к формальным, но имеют другое назначение: они формализуют вычислительный процесс, а не теорию. Еще одно важное отличие состоит в том, что для "формул" на этих языках, то есть программ, имеется прагматический критерий "истинности" - работает программа, или нет.

I.3. Каждый математический текст в принципе может быть "переведен" на подходящий формальный язык, хотя зачастую процесс перевода не тривиален, а результат не однозначен и кое-что теряет по сравнению с оригиналом. После такого перевода текст на формальном языке сам может стать предметом математического исследования. Теоремы математической логики о "недоказуемости" или "алгоритмической неразрешимости" суть теоремы о несуществовании текстов того или иного вида на формальных языках. При оценке содержания таких теорем необходимо как можно яснее представлять себе, в какой мере формальные тексты адэкватны неформальным. Потери, связанные с бедностью формального языка, можно компенсировать расширением его выразительных средств; один из удивительных результатов логики состоит в том, что очень немногих средств хватает для формального описания "всей" математики. Однако более тонкий анализ показывает принципиальную недостаточность даже самых богатых формальных языков для передачи интуитивного содержания во всей его полноте и обнаруживает глубоко гуманитарный аспект математики.

Мы будем возвращаться к этим вопросам позже, по мере накопления математического материала.

2. Язык высказываний: алфавит, синтаксис, интерпретация

Язык высказываний L_0 является в известной мере простейшим и в той или иной форме входит в качестве составной части во многие другие языки.

2.1. Алфавит L_0. Он состоит из следующих символов (пояснения в скобках используются в последующих интуитивных формулировках).

Множество A символов атомарных формул, элементы которого мы будем обозначать буквами p, q, r и т.д.

Множество логических связок, элементы которого обозначаются значками $\rightarrow$ (влечет), $\vee$ (неразделительное или), $\wedge$ (и), $\neg$ (не). Скобки (,).

В принципе для счетного A можно обойтись конечным алфавитом, обозначая элементы A, скажем, так: $|$, $||$, $|||$ и т.п.

2.2. Синтаксис и формулы L_0. Формулы в L_0 - это некоторые конечные последовательности символов алфавита. Их множество F описывается следующими соглашениями:

а) Атомарные формулы являются формулами.

б) Если P и Q формулы, то

$$(P)\rightarrow(Q),\ (P)\vee(Q),\ (P)\wedge(Q),\ \neg(P)$$

суть формулы.

в) Любая формула получается конечным числом шагов, состоящих из применения правил а) и б).

2.3. Замечание о скобках. Скобки, как в элементарной алгебре, вводятся для обеспечения однозначности порядка действий. Если условиться, что связки $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ расположены в порядке "возрастания силы", то часть скобок можно опускать, получая сокращенную запись. Например, формула

$$(P) \rightarrow (\neg(Q) \vee ((R) \wedge (S)))$$

в сокращенной записи имеет вид

$$P \rightarrow \neg Q \vee R \wedge S$$

Более детальное обсуждение см. у Клини. Введение в математику. ИЛ, 1957, § 17.

"Метаматематические утверждения о ... формулах системы должны рассматриваться как относящиеся к несокращенным выражениям ... , какого бы рода стенографией мы не пользовались при записи этих выражений" (Клини, стр. 72).

Существуют варианты бесскобочной записи формул. Например, мы могли бы сразу писать $\rightarrow PQ$, $\vee PQ$, $\wedge PQ$ вместо $(P) \rightarrow (Q)$, $(P) \vee (Q)$ и $(P) \wedge (Q)$ соответственно. Это обеспечивает однозначность чтения и удобнее для метаматематики, но несколько менее удобно для "интуитивной" математики из-за расхождения с привычками читателя, воспитанного на "окобочных" текстах.

2.4. Интерпретация L_0. Интерпретацией называется любое отображение

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\} \qquad ж)$$

(множества всех формул языка $\mathcal{F}$ во множество, состоящее только из нуля и единицы), которое удовлетворяет следующим условиям:

(I) $\varphi(\neg(P)) = 1 - \varphi(P)$

(2) $\varphi((P) \wedge (Q)) = \min(\varphi(P), \varphi(Q))$

(3) $\varphi((P) \vee (Q)) = \max(\varphi(P), \varphi(Q))$

(4) $\varphi((P) \rightarrow (Q)) = 1 - \varphi(P)(1 - \varphi(Q))$

Таким образом, язык может иметь много разных интерпретаций.

Другое название φ - функции истинности; в более богатых языках ее значение на атомарных высказываниях будет получаться автоматически после того, как мы придадим "смысл" другим объектам языка, то есть интерпретируем их.

2.5. Мы хотим обратить внимание на то, что алфавитом мы называем некоторое аботрактное множество, тогда как значки ($p, q, \wedge, \rightarrow$ и т.д.) используются только как обозначения, или имена элементов этого множества. При определении интерпретации (см.ниже) сами элементы алфавита отановится

ж) Стрелка $\longrightarrow$ в метаязыке будет использоваться для обозначения отображений множеств, как это сейчас общепринято. Автор надеется, что во всех таких случаях контекст исключает возможность путаницы.

естественно рассматривать как имена элементов другого множества (или имена операций над ними), так что p, q и т.д. превращаются в имена имен. Возможно еще более многоэтажное отношение между знаком и последним обозначаемым.

В ряде традиционных изложений алфавитом называются сами значки на бумаге; это заставляет вносить в текст комментарии о том, как писать, различать и отождествлять эти значки (ср. первые страницы книги А.А.Маркова "Теория алгоритмов"). Автору кажется, что эта система соглашений неудобна по двум причинам. Во-первых, в математическом тексте приходится обсуждать вопросы, относящиеся по существу к прикладной психологии. Во-вторых, если уж правила отождествления и различения значков приняты, то можно вернуться к алфавиту в нашем смысле слова, определив один его элемент как класс отождествляемых между собой значков данного текста.

В заключении приведем пассаж об именах из книги Россера "Логика для математиков".

" ... суть дела в том, что если у нас есть утверждение типа " 3 больше 9/12" о рациональном числе 9/12, которое содержит некоторое имя 9/12 этого рационального числа, то мы можем заменить это имя любым другим именем того же рационального числа, например "3/4". Когда же мы рассматриваем утверждение типа "3 делит знаменатель "9/12" о некотором имени некоторого рационального числа, и наше утверждение содержит некоторое имя этого имени, то это имя имени можно заменить другим именем того же имени, но вообще говоря, нельзя заменить именем другого имени, хотя бы это другое имя было именем того же рационального числа".

Впрочем, продолжает Роосер, "отказ от скрупулезного соблюдения этих тонкостей редко приводит к путанице в логике и еще реже в математике".

3. Интуитивные пояснения

3.I. Атомарные формулы языка L_0 интуитивно отвечают целостным высказываниям, которые начинаются словами "Верно, что ...": "верно, что снег белый", "верно, что 2 x 2 = 5", "верно, что электрон так же неисчерпаем, как и атом". В дальнейших описаниях слова "верно, что ... " иногда опускаются, но всегда подразумеваются.

Логические связки примерно соответствуют словам "если ... то" ($\rightarrow$); "и" ($\wedge$); "или ..., или ..., или и то и другое вместе" ($\vee$), "не" ($\neg$). См., однако, ниже замечания об $\rightarrow$, где обнаруживается особенно большое расхождение формализма с интуитивными привычками.

Формулы, таким образом, отвечают некоторым составным высказываниям или цепочкам утверждений. Так, формула $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ может читаться примерно так:

"Верно, что если верно P , то верно, что из (верности) Q следует (верность) P ".

3.2. Интуитивный смысл интерпретации φ состоит в том, что φ описывает каждой формуле - высказыванию значение истинности (1) или ложности (0). Обсудим согласованноость формул (I) - (5) п. 2.3. с этим объяснением.

(I) означает, что истинность P равносильна ложности отрицания P и наоборот.

Согласно (2) высказывание " P или Q " ложно лишь тогда, когда оба Q и P ложны. В этом проявляется неразделительность связки $\vee$ "или": $P \vee Q$ истинно, когда хотя бы одно из P, Q истинно. Аналогично обсуждается (3). "Разделительное или" можно представить формулой:

$$(P \vee Q) \wedge (\neg (P \wedge Q))$$

"верно, что P или Q, но неверно, что P и Q вместе".

При продумывании (4) следует освоиться с двумя обстоятельствами.

Во-первых, согласно (5), если $\varphi(P) = 0$ (P ложно), то $\varphi((P) \rightarrow (Q)) = 1$, то есть $(P) \rightarrow (Q)$ истинно. "Из лжи следует все, что угодно". В частности, высказывание "если 2x2=5, то 2x2=4" (при естественной интерпретации "2x2=5 ложно", "2x2=4 истинно") должно считаться истинным, хотя интуитивные привычки скорее относят его к категории бессмысленных.

Во-вторых, высказывание типа "если 2x2=4, то Фишер чемпион мира 1972 года" также должно считаться истинным. В языке L_0 нет никаких средств для констатации "наличия или отсутствия связи" между разными атомарными высказываниями, а в интерпретации нет никакого аналога категории "бессмыслицы".

Эти свойства связки $\rightarrow$ в языках более высокого уровня приводят к резкому несоответствию понятия "противоречивости" интуитивным представлениям.

Множественность интерпретаций - очень важное обстоятельство. Интуитивно оно связано с несколькими соображениями.

Прежде всего, каждая формула должна быть схемой многих разных рассуждений, которые получаются при подстановке вместо атомарных формул тех или иных конкретных утверждений, истинность или ложность которых может меняться.

Далее, в доказательство " от противного" мы можем предположить ложность P в начале, чтобы, придя к противоречию, установить истинность P в конце. Правильность самого рассуждения не должна зависеть от истинности или ложности P.

Наконец, истинность или ложность конкретных атомарных высказываний бывает установить очень трудно ("теорема Ферма верна", "эта позиция выигрышна для белых").

4. Содержательная истинность

4.I. Определение. Формула P языка L_0 называется тавтологией, если $\varphi(P) = 1$ для любой интерпретации φ.

В более богатых языках понятие истинности, аппелирующее к интерпретации, будет называться содержательной истинностью. Применительно к L_0 это название было бы чересчур громким.

Тавтологии интуитивно отвечают рассуждениям, которые правильно построены и "внутренне верны" вне зависимости от истинности или ложности их посылок, то есть атомарных утверждений, входящих в рассуждение.

4.2. Алгоритм для выяснения, является ли P тавтологией. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ - все атомарные формулы, входящие в P (очевидно, их конечное число). Значение $\varphi(P)$

зависит только от вектора $(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n))$, ибо индуктивные правила (I) - (4) из п. 2.3 позволяют выразить $\varphi(P)$ через $\varphi(p_1) \ldots \varphi(p_n)$ (подробно это объяснено ниже). Вектор $(\varphi(p_1), \ldots \varphi(p_n))$ может принимать всего 2^n разных значений. Перебрав все их, вычислим $\varphi(P)$ для каждого из них и проверим, всегда ли $\varphi(P) = 1$.

4.3. Примеры. Следующие формулы являются тавтологиями (P, Q, R - любые формулы). Ниже они будут играть роль "схем аксиом". Мы пишем кратко $P \leftrightarrow Q$ вместо пары формул $P \to Q$, $Q \to P$.

A.0. $P \to P$

A.I. $P \to (Q \to P)$

A.2. $P \to (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

B.I. $\neg(P \to \neg Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

B.2. $((\neg P) \to Q) \leftrightarrow (P \vee Q)$

C.I. $\neg\neg P \leftrightarrow P$

C.2. $\neg P \to (P \to Q)$

C.3. $P \to (\neg Q \to \neg(P \to Q))$

C.4. $(P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$

C.5. $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$

A.3. $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$

B.I. и B.2. - это по существу определения связок $\wedge$, $\vee$ через связку $\longrightarrow$.

С.I. означает, что двойное отрицание P равносильно P – это закон исключенного третьего. С.2. – механизм, с помощью которого противоречие в системе разрушает всю систему (подробности ниже, п. 5.6 гл. II).

4.4. Образец проверки тавтологичности.

Продемонстрируем три варианта проверки тавтологичности простой формулы А.I.

Вариант а) Пусть φ – некоторая интерпретация. Дважды применяя (5) п. 2.3, находим $\varphi((P \to (Q \to P))) =$

$$= 1 - \varphi(P)(1 - \varphi((Q \to P))) =$$

$$= 1 - \varphi(P)[1 - 1 + \varphi(Q)(1 - \varphi(P))] = 1 - \varphi(P)\varphi(Q) +$$

$$+ \varphi^2(P)\varphi(Q) = 1$$

потому что $\varphi^2(P) = \varphi(P)$ для любых P.

Вариант б) Протабулируем $\varphi(P \to (Q \to P))$ в зависимости от $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$:

$\varphi(P)$	$\varphi(Q)$		$\varphi(P)$	$\varphi(Q \to P)$	$\varphi(P \to (Q \to P))$
0	0		0	I	I
0	I		0	0	I
I	0	, затем	I	I	I
I	I		I	I	I

(заметьте, что если P, Q не атомарные, то может оказаться, что не все пары $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ реализуются. Например, P и Q сами могут быть тавтологиями).

Вариант в) Основное свойство связки $\longrightarrow$ состоит в том, что $P \to Q$ ложно, только если P истинно, а Q ложно.

Допустим, что в некоторой интерпретации $P \to (Q \to P)$ ложно. Тогда P истинно, а $Q \to P$ ложно, откуда в свою очередь Q истинно, а P ложно - противоречие для P.

Читателю рекомендуется провести все три варианта проверки для более сложных формул А.2., А.3., С.3., С.4. и решить, который из них более приемлем.

Опишем в заключение множество всех возможных интерпретаций языка L_0.

4.5. Предложение. Пусть $\varphi_0 : A \to \{0,1\}$ - любое отображение множества атомарных формул в $\{0,1\}$. Тогда существует единственная интерпретация $\varphi : \mathcal{F} \to \{0,1\}$, совпадающая с φ_0 на A.

Доказательство. Назовем длиной формулы P количество знаков алфавита, из которых она составлена. Пусть $\mathcal{F}_K$ - множество формул длины K.

Прежде всего $\mathcal{F}_1 = A \cup \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Так как по условию $\varphi(\mathbb{0}) = 0$, $\varphi(\mathbb{1}) = 1$, существование и единственность предложения φ_0 на $\mathcal{F}_1$ очевидна.

Пусть доказано, что φ_0 однозначно продолжается до "частичной" интерпретации φ на множестве всех формул длины $\leq K-1$. Покажем, что φ продолжается на $\mathcal{F}_K$; индукция по K даст требуемое. Нам понадобится

4.6. Лемма. Пусть $P \in \mathcal{F}_K$, $K \geq 2$. Тогда либо

$P = \neg(Q)$, где $Q \in \mathcal{F}_{K-3}$, либо существуют такие формулы $Q_1, Q_2 \in \bigcup_{i=1}^{K-1} \mathcal{F}_i$, что $P = (Q_1) \to (Q_2)$ или $P = (Q_1) \vee (Q_2)$ или $P = (Q_1) \wedge (Q_2)$.

Все эти альтернативы взаимоисключающие, и в каждом случае формулы Q, Q_1, Q_2 определены однозначно.

<u>Набросок доказательства</u>. Существование Q или (Q_1, Q_2) и то, что длина их меньше длины P, следует из определения множества формул. В доказательстве нуждается только единственность такого представления.

Она сводится к некоторому комбинаторному утверждению о скобках, если исключить случай $P = \neg(Q)$, который, очевидно, не может совпасть с остальными и однозначно определяет Q.

Это утверждение о скобках состоит в том, что в любой формуле языка L_0 по каждой скобке парная ей скобка восстанавливается <u>однозначно</u> (доказательство см. у Клини, § 7 и § 17).

Считая, что это так, и что $P \neq \neg(Q)$, дадим рецепт для однозначного восстановления Q_1 и Q_2 и связки между ними. Он состоит в следующем:

а) Q_1 есть формула, стоящая между левой крайней скобкой в P и парной к ней.

б) Q_2 есть формула, стоящая между правой крайней скобкой в P и парной к ней.

в) Связка - это та связка в P, которая стоит между двумя найденными парными скобками.

Окончание доказательства 4.5. Продолжим φ на $\mathcal{F}_K$, пользуясь формулами (I) - (4) п. 2.3. Единственность продолжения следует из этих формул, а существование из леммы 4.6.

5. Синтаксическая истинность

5.I. Как было сказано, формальный язык идеализированно описывает некоторые типы математических рассуждений. Среди реальных типов совершенно особую роль играют доказательства-цепочки рассуждений, которые исходят из некоторых (более или менее явно указанных) аксиом, и выводят из них новые утверждения - теоремы - по определенным (также более или менее явным) правилам.

Этим объектам интуитивно отвечают следующие конструкции внутри формального языка L. Пусть $\mathcal{F}$ - множество формул L.

5.2. Определение.

а) Правилом вывода RI (англ. rule of inference) (из j формул языка L еще одной формулы) называется $(j+1)$ - местное отношение между формулами языка, то есть подмножество $RI \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \ldots \times \mathcal{F}$ ($(j+1)$ раз);

б) если $(p_1, \ldots, p_j, p_{j+1}) \in RI$, то формула p_{j+1} называется непосредственным следствием $(p_1, \ldots, p_j)$ по правилу RI (в соответствии с правилом, согласно правилу ...).

5.3. Пример. В языке высказываний L_c применяется единственное правило вывода MP (лат. modus ponens): $MP \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ состоит из троек вида $(P, P \to Q, Q)$, где P, Q - любые формулы. Иными словами, Q является непосредственным следствием из P и $P \to Q$.

5.4. Определение. Пусть $\mathcal{E}$ - некоторое множество формул языка L, R - некоторое множество правил вывода. Выводом в языке L (подразумевается "из $\mathcal{E}$ в соответствии с правилами R") называется любая конечная последовательность формул $P_1, \dots, P_n$ со следующими свойствами:

а) $P_1 \in \mathcal{E}$

б) Если $n \geq 2$, то либо $P_n \in \mathcal{E}$, либо P_n является непосредственным следствием части формул $P_1, \dots, P_{n-1}$ в соответствии с одним из правил из множества R.

Примеры выводов в языке L_c см. в § 6.

5.5. Определение. Пусть заданы $\mathcal{E}$ и R, как в п. 5.4. Формула $P \in \mathcal{F}$ называется выводимой из $\mathcal{E}$, если существует такой вывод $P_1 \dots P_n$, что $P_n = P$.

Утверждение " P выводима из $\mathcal{E}$ " в метаязыке сокращенно записывается $\mathcal{E} \vdash P$.

5.6. Замечания.

а) Правило вывода есть важнейшее понятие, которое в реальных математических текстах обычно никак не формализуется. Modus ponens отвечает простейшим рассуждениям, построенным по схеме "Если верно P и верно,

что из P следует Q, то верно Q ".

б) Множеотво "посылок" $\mathcal{E}$ в реальных текстах, когда его удается выделить, обычно состоит не только из аксиом теории, но также из некоторых выведенных ранее утверждений, которые входят в последующие конструкции "целыми блоками", без повторного воспроизведения их вывода. В изолированных случаях в $\mathcal{E}$ могут входить не "истинные" утверждения, когда в доказательстве какого-нибудь факта от противного мы принимаем его отрицание в качестве одной из посылок.

в) Вывод есть аналог доказательства. Если в $\mathcal{E}$ входят только содержательно истинные формулы, и если правила вывода сохраняют содержательную истинность, то выводимые из $\mathcal{E}$ формулы можно назвать доказуемыми, или синтаксичеоки истинными (относительно $\mathcal{E}$, R). В достаточно богатых языках (но не в L_0 !) доказуемых формул оказывается существенно меньше, чем содержательно истинных, если понимать содержательную истинность в смысле некоторой стандартной интерпретации.

г) Реальные правила вывода обычно позволяют эффективно распознавать, является ли данная формула P_{j+1} непосредственным следствием формул $P_1, \ldots, P_j$ или нет. Точно так же, обычно можно эффективно распознать, является ли данная формула аксиомой или нет.

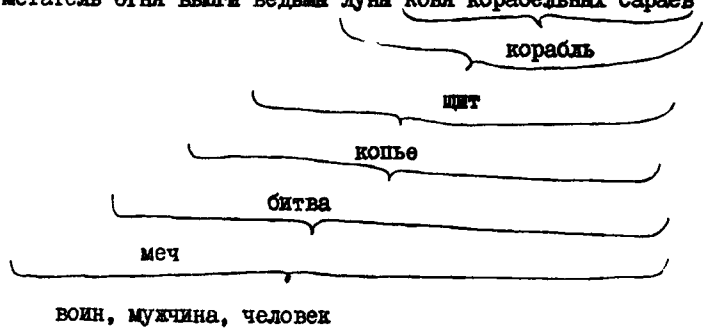
5.7. Пример-шутка. Один из главных элементов поэтической системы древнеисландской поэзии составляют специальные

поэтические формулы, которые называют кеннингами. Кеннинг есть выражение, которое может заменить одно слово. Например,

"вьюга копий" есть кеннинг "битвы"		
"древо битвы"		"воина"
"куст шлема"	суть кеннинги	
"метатель меча"		"мужчины"
"раздаватель золота"		"человека"
"море телеги"	есть кеннинг	"земли"
"небо песка	суть кеннинги	"моря" и т.п.
"поле тюленя"		

Простой кеннинг - это кеннинг, никакая часть которого не является кеннингом. Приведенные выше примеры доставляют простые кеннинги. Они играют роль аксиом, и создавать новые простые кеннинги, очевидно, имеют право только великие поэты. На долю невеликих поэтов остается создание новых кеннингов по правилам вывода. Правило вывода нового кеннинга из уже имеющихся: любое слово в одном из данных кеннингов может быть заменено его кеннингом (не обязательно простым). Пример сложного кеннинга с его расшифровкой (пример реальный):

"метатель огня вьюги ведьмы луны коня корабельных сараев".



Леонид Мартынов воспринял кеннинги как метафоры (глубокое заблуждение, хотя и простительное. Структурные роли кеннингов и метафор в разных поэтических системах совершенно разные) и написал стихотворение "Песни скальдов", которое кончается так:

... А может быть, переводчики что-то перемудрили?
Нет! Возможно и в наши живут времена
какие-то метатели огня вьюги ведьмы луны коня
корабельных сараев или
расточители янтаря холодной земли великанского кабана?
Все возможно!
И кто утверждать может твердо,
Что и ныне нет песен, которые можно назвать
Прибоем дрожжей людей костей фьорда?
Может быть, есть и нынче такие песни, как знать?

5.8. Задачи:

а) Восстановить простые кеннинги, входящие в вывод двух последних кеннингов, процитированных Мартыновым.

б) Построить кеннинги максимальной длины, выводимые из приведенных в п. 5.7. Доказать, что более длинных кеннингов вывести нельзя.

в) Придумать кеннинг В.П.Маслова (не путать с метафорой!).

6. Совпадение содержательной и синтаксической истинности в языке L_0

6.I. В этом параграфе будет доказана следующая основная теорема о языке L_0. Обозначим через Ax (аксиомы) множество тех формул языка L_0, которые получаются из формул A.I., ... , C.5. пункта 4.3. подстановкой вместо букв P, Q, R любых формул из F (таким образом A.I., ... , C.5. это "схемы аксиом"). Определение правила MP дано в п. 5.3.

6.2. Теорема. Любая тавтологичная ("содержательно истинная") формула P языка L_0 выводима из Ax посредством MP; наоборот, любая выводимая формула тавтологична.

Доказательство будет разбито на ряд лемм.

6.3. Лемма.

а) Все формулы из Ax тавтологичны.

б) Если $P, P \to Q$ тавтологичны, то и Q тавтологична.

Доказательство. Упражняйтесь. ■

6.4. Следствие. Если $Ax \vdash P$, то P тавтологична.

Доказательство. Пусть $P_1, \dots, P_n = P$ - вывод P из Ax. Проведем индукцию по n. Если $n = 1$, то $P = P_1 \in Ax$, так что P тавтологична по лемме 6.3.а). Пусть $n \geq 2$ и доказано,

что $P_1, \dots, P_{n-1}$ тавтологии. По определению вывода, либо $P_n \in Ax$ либо P_n непосредственно следует из P_i и P_k (вида $P_i \to P_n$) для $i, k \leq n-1$. Лемма 6.3 а) в первом случае и 6.3 б) во втором доказывает тавтологичность .

Этим доказана вторая часть теоремы 6.2. Первая требует гораздо большей работы.

6.5. <u>Лемма о дедукции</u>. <u>Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ - любое множество формул языка L_0, содержащее все те формулы, которые получаются из А.0., А.I., А.2. (п.4.3) подстановкой вместо P, Q, R любых формул. (В частности, можно взять $\mathcal{E} = Ax$). Пусть, далее, $P, Q \in \mathcal{F}$.</u>

<u>Если $\{\mathcal{E}, P\} \vdash Q$, то $\mathcal{E} \vdash P \to Q$</u>

<u>Доказательство</u>. Пусть $Q_1, \dots, Q_n = Q$ - вывод Q из $\{\mathcal{E}, P\}$, (здесь = есть знак метаязыка). Индукцией по n покажем существование вывода $(P \to Q)$ из $\mathcal{E}$.

Если $n = 1$, то либо $Q \in \mathcal{E}$, либо $Q = P$. В первом случае $P \to Q$ является непосредственным следствием из $\{Q, Q \to (P \to Q)\}$ (аксиома А.I.) Во втором случае $P \to P$ есть аксиома А.0. Обе нужные аксиомы, по предположению, содержатся в $\mathcal{E}$.

Пусть теперь $n \geq 2$ и пусть $\mathcal{E} \vdash (P \to Q_i)$ для всех $i \leq n-1$. Так как $\{\mathcal{E}, P\} \vdash Q_n = Q$ для Q имеются три возможности: а) $Q \in \mathcal{E}$; б) $Q = P$ в) Q следует по МР из Q_i и $Q_k = (Q_i \to Q)$ ($i, k < n$).

Случаи а), б) разбираются точно так же, как случай $k=1$.

В случае в) последовательность формул, составляющая вывод $P \to Q$ из $\mathcal{E}$, имеет такой вид (справа краткое пояснение)

(I) вывод $P \to Q_i$, (индуктивное предположение)

(2) вывод $P \to (Q_i \to Q)$; (индуктивное предположение)

(3) $(P \to (Q_i \to Q)) \to ((P \to Q_i) \to (P \to Q))$ (аксиома А.2.)

(4) $(P \to Q_i) \to (P \to Q)$ (МР к (2) и (3))

(5) $P \to Q$ (МР к (I) и (4)).

В дальнейшем такие рассуждения будут проводиться более кратко, с указанием лишь завершающих шагов вывода (здесь (3), (4), (5)).

Для формулировки следующей леммы введем одно обозначение. Пусть $\varphi : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ – любая интерпретация языка L_0. Для каждой формулы $P \in \mathcal{F}$ определим новую формулу P^φ, положив

$$P^\varphi = \begin{cases} P & \text{, если } \varphi(P) = 1 \\ \neg P & \text{, если } \varphi(P) = 0 \end{cases}$$

(Здесь P^φ и = суть значки сокращенной записи метаязыковых выражений).

6.6. <u>Основная лемма</u>. <u>Пусть</u> $P_1, \dots, P_r$ – <u>конечное множество атомарных формул, содержащее все атомарные формулы, входящие в</u> P. <u>Для любой интерпретации</u> φ <u>имеем</u>

$$\{Ax, P_1^\varphi, \dots, P_r^\varphi\} \vdash P^\varphi$$

Доказательство отложим до п. 6.8. Интуитивно лемму можно рассматривать как оформление следующей идеи. Естественно пытаться доказывать теорему 4.2. индукцией по длине тавтологии P, представляя ее в виде $\neg Q$ или $Q_1 \to Q_2$ и т.п. Но включать тавтологичность в индуктивное предположение невозможно, ибо части Q, Q_1, Q_2 тавтологий $\neg Q$, $Q_1 \to Q_2$ вовсе не обязаны быть тавтологиями. Если $P = \neg Q$, то Q "содержательно ложно"! Операция P^{φ} насильственно делает любую формулу истинной в интерпретации φ, и лемма 6.6. составляет тогда важнейший шаг, поддающийся индуктивному доказательству по длине P.

6.7. <u>Доказательство теоремы 6.2 с помощью основной леммы.</u>

Нужно доказать, что если $P^{\varphi} = P$ для всех φ, то $\{Ax\} \vdash P$.

Согласно основной лемме $\{Ax, p_1^{\varphi} \dots p_r^{\varphi}\} \vdash P$ для некоторых атомарных формул p_i. Проведем индукцию вниз по r.

Индуктивное предположение: $\{Ax, p_1^{\varphi}, \dots, p_s^{\varphi}\} \vdash P$ $1 \leq s \leq r$. Начало индукции: $s = r$; конец – $s = 0$.

Переход от s к $s-1$. По лемме о дедукции, из $\{Ax, p_1^{\varphi}, \dots p_s^{\varphi}\} \vdash P$ следует выводимость $\{Ax, p_1^{\varphi} \dots p_{s-1}^{\varphi}\} \vdash (p_s^{\varphi} \to P)$. По предположению 4.5. существует интерпретация φ', совпадающая с φ на $\{p_1 \dots p_{s-1}\}$, отличающаяся на p_s. Следовательно, из $\{Ax, p_1^{\varphi} \dots p_{s-1}^{\varphi}\}$ выводится как $p_s \to P$, так и $\neg p_s \to P$. Согласно аксиоме С.4. из Ax выводима также формула

$$(p_s \to P) \to ((\neg p_s \to P) \to P).$$

Дважды применяя МР к ней, находим

$$\{Ax, p_1^{\varphi} \dots p_{s-1}^{\varphi}\} \vdash P \quad .$$

6.8. <u>Доказательство леммы 6.6</u>. Проведем индукцию по длине формулы P (см. п. 4.5). Для формул длины I, то есть элементов множеотва $A \cup \{\mathbb{O}, \mathbb{1}\}$ лемма проверяется непосредственнс.

Предположим, что для более ксротких, чем P, формул лемма доказана. Как в п. 4.6 представим P в одном из четырех видов:

$P = \neg Q$ или $P = Q_1 * Q_2$, где $* = \rightarrow$ или $\vee$ или $\wedge$

а) <u>Случай $P = \neg Q$</u>. Если $\varphi(Q) = 0$, то $Q^{\varphi} = \neg Q = P = P^{\varphi}$. Выводимость $Q^{\varphi} = P^{\varphi}$ из $\{Ax, p_1^{\varphi} \dots p_2^{\varphi}\}$ следует из индуктивнсго предположения, потому что длина Q меньше длины P.

Если же $\varphi(Q) = 1$, то $Q^{\varphi} = Q$, $P^{\varphi} = \neg\neg Q$. Здесь Q выводится из $\{Ax, p_1, \dots p_2\}$ пс индуктивному предположению, затем $\neg\neg Q = P^{\varphi}$ выводится из Q и аксиомы С.I. $Q \rightarrow \neg\neg Q$ посредством МР.

б) <u>Случай $P = Q_1 * Q_2$</u>. Сначала сведем в таблицу при разных сочетаниях $*$ и $\varphi(Q_1), \varphi(Q_2)$ формулы, вывод которых существует по индуктивному предположению и формулы, которые нужно вывести.

В столбцах для $\wedge$ и $\vee$ мы намерены вывести такие формулы, из которых $(Q_1 \wedge Q_2)^{\varphi}$ и $(Q_1 \vee Q_2)^{\varphi}$ соответственно выводятся с помощью В.I, В.2 соответственно применением МР.

Выводимость ниже означает "выводимость из Ax и пары формул I-го столбца".

$\varphi(Q_1)$	$\varphi(Q_2)$	Даны	Нужно вывести		
			$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$
0	0	$\neg Q_1, \neg Q_2$	I $Q_1 \rightarrow Q_2$	5 $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	9 $\neg(\neg Q_1 \rightarrow Q_2)$
0	I	$\neg Q_1 \quad Q_2$	2 $Q_1 \rightarrow Q_2$	6 $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	I0 $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$
I	0	$Q_1, \neg Q_2$	3 $\neg(Q_1 \rightarrow Q_2)$	7 $\neg\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	II $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$
I	I	Q_1, Q_2	4 $Q_1 \rightarrow Q_2$	8 $\neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$	I2 $\neg Q_1 \rightarrow Q_2$

<u>Вывод формул I - I2</u>. Простейшее соображение состоит в следующем: если P выводима, то для любой R формула $R \rightarrow P$ также выводима (аксиома А.I : $P \rightarrow (R \rightarrow P)$, и МР). Это сразу же доставляет выводимость 2, 4, I0 и I2. Сняв в столбце $\wedge$ двойные отрицания с помощью С.I, получим выводимость 5 и 7.

I выводится из $\neg Q_1 \rightarrow \neg Q_2$ и С.5 посредством МР.

3 выводится из С.3 : $Q_1 \rightarrow (\neg Q_2 \rightarrow \neg(Q_1 \rightarrow Q_2))$ (и данных) двукратным применением МР.

6 выводится из С.2 : $\neg Q_1 \rightarrow (Q_1 \rightarrow \neg Q_2)$ (и данных) применением МР и затем С.I и МР.

8 выводится из С.3: $Q_1 \rightarrow (\neg\neg Q_2 \rightarrow \neg(Q_1 \rightarrow \neg Q_2))$ (и данных) применением МР, С.I к $\neg\neg Q_2$ и снова МР.

9 выводится из С.3: $\neg Q_1 \rightarrow (\neg Q_2 \rightarrow \neg(\neg Q_1 \rightarrow Q_2))$ двукратным МР.

II выводится из С.2: $\neg\neg Q_1 \rightarrow (\neg Q_1 \rightarrow Q_2)$ заменой $\neg\neg Q_1$ на Q_1 по С.I и МР.

6.10. Замечание об Ax. Формула P называется не зависящей от множества $\mathcal{E}$ формул языка, если P и $\neg P$ не выводимы из $\mathcal{E}$.

Множество Ax определенно содержит формулы, зависящие от остальных: из аксиом А.I, А.2, А.3, В.I, В.2 можно вывести все остальные (Мендельсон, стр. 39–43). Опустив эти малоинтересные выводы, автор надеялся более выпукло показать содержание теоремы 6.2.

С другой стороны, существуют частные случаи аксиом А.I, скажем, невыводимые из А.2, А.3, В.I, В.2 и т.п. (см. Мендельсон, стр. 46). Среди способов доказательства независимости имеются интересные образцы синтаксических рассуждений, и мы проиллюстрируем их на следующем примере.

Утверждение. Формула $(\neg P \to \neg P) \to ((\neg P \to P) \to P)$, частный случай А.3, не выводима из А.I, А.2 посредством МР.

Доказательство. Пусть Q – формула. Обозначим через Q^a формулу, которая получается устранением из Q всех знаков $\neg$ и сопутствующих скобок. Укажите точное определение Q^a индукцией по длине Q !). Верны следующие утверждения:

а) Если P есть частный случай А.I или А.2, то P^a – тавтология.

б) Если R является непосредственным следствием P и Q, а P^a и Q^a тавтологии, то R^a – тавтология.

Значит, если Q выводима из А.I, А.2, то Q^a – тавтология. Но $[(\neg P \to \neg P) \to ((\neg P \to P) \to P)]^a$, где P –атомарное высказывание, не является тавтологией.

ГЛАВА II

ЯЗЫК ПРЕДИКАТОВ

В этой главе вводится и частично исследуется класс таких языков L_1, которые способны уже гораздо более реалистически описывать содержательные математические рассуждения, чем язык высказываний. Общее название этого класса языков: "языки предикатов первого порядка". Мотивировка названия будет дана ниже. Перед чтением этой главы читателю рекомендуется перечитать § I главы I: "Общие сведения о языках". План второй главы вначале близок к плану первой главы, но структура определений и результатов, естественно, усложняется.

I. Алфавит и синтаксис.

I.I. Алфавит L_1. Он состоит из следующих множеств символов.

а) Символы переменных (в обозначениях x, y, z с индексами),

символы констант (в обозначениях a, b, c с индексами),

символы операций (в обозначениях f, g, h с индексами),

символы отношений (в обозначениях p, q, r с индексами).

Каждому символу операции (отношения) сопоставляется натуральное число - его ранг: интуитивно это число аргументов операции (число мест отношения).

(Множество символов переменных обозначается X; оно предполагается непустым, так же как множество символов отношений. Остальные множества символов могут быть и пустыми).

В тексте слово "символ" будет часто опускаться. Мы пишем "пусть x - переменная" вместо "пусть x - символ переменной", и т.п.

б) Логические связки $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ - те же, что и в языке L_0.

в) Квантор общности $\forall$, квантор существования $\exists$.

г) Скобки (,) и запятые.

Это описание алфавита относится к целому классу языков. Количество символов функций и отношений разных рангов и - позже - вид налагаемых на них условий - аксиом - отличают языки разных ориентаций: языки арифметики, теории множеств, геометрии и т.п.

I.2. Синтаксис L_1. Конечные последовательности знаков языка L_1 суть выражения. Одно выражение (в частности, символ) может входить в другие как его часть несколькими разными способами; указать вхождение Q в S означает указать представление выражения S в виде PQR, где P и R - выражения. Заменить Q на Q' (в данном вхождении Q в S) значит построить выражение $PQ'R$.

Среди всех выражений языка L_1 основную роль играют три класса выражений: термы, атомарные формулы и формулы. Вот их описание.

а) Термы. Символы переменных и констант суть термы. Если $t_1, \ldots, t_n$, а f - символ операции ранга n, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм. Любой терм получается применением этих правил конечное число раз.

(запись $t_1, \ldots, t_n$ есть сокращение для выражения, состоящего из n термов, разделенных запятыми).

Интуитивно термы - это названия математических объектов, о которых говрит данная теория, а символы операций суть названия операций над ними. Константы суть названия каких-то конкретных объектов. Скажем, в языке арифметики x, y могут быть названиями целых чисел, а f - названием операции "сложение" (ранга два). Тогда $f(x,y)$ - название "суммы x и y". Удобно иметь также две специальные константы - названия 0 и I.

б) Атомарные формулы. Атомарная формула есть выражение вида $p(t_1, \ldots, t_n)$, где p - символ отношения ранга n, а $t_1, \ldots, t_n$ - термы.

Интуитивно $p(t_1, \ldots, t_n)$ отвечает фраза вида "верно, что упорядоченный набор объектов $t_1, \ldots, t_n$ обладает свойством p".

(Таким образом, $p(t_1, \ldots, t_n)$ можно рассматривать как высказывание о $t_1, \ldots, t_n$; отсюда происходит другое название для p - предикатный символ. Мы им не пользуемся, сохранив слово "предикат" лишь в общепринятом родовом названии языков L_1. С теоретико-множественной точки зрения указание "свойства" n объектов равносильно указанию всех $n-0$ объектов, обладающих этим свойством, то есть n - местного отношения. Этим объясняется наша терминология).

в) Формулы. Атомарные формулы суть формулы. Если Q_1, Q_2, Q - формулы, x - переменная, то выражения

$$\neg(Q),\ (Q_1)\to(Q_2),\ (Q_1)\vee(Q_2),\ (Q_1\wedge Q_2) \qquad (I)$$
$$\forall x(Q) \quad \exists x(Q)$$

суть формулы. Любая формула получается применением этих правил конечное число раз. $\forall x(Q)$ читается " для всех x верно

Q "; $\exists x(Q)$ читается "существует такое x, что верно Q".

(В сокращенной записи скобки будут опускаться в соответствии с прежними соглашениями и здравым смыслом).

I.3. Замечания. а) Атомарные формулы и формулы языков L_0 и L_1 соответственно описывают один и тот же класс утверждений. Однако описание с помощью L_1 гораздо богаче и детализированней, потому что, во-первых, в языке L_1 есть средства для описания субъектов высказываний и конструкций над ними и, во-вторых, в языке L_1 есть символ для слов "для всех" и "существует".

б) В языках выше первого порядка могут допускаться отношения и функции, аргументами которых являются другие отношения и функции. Могут допускаться также кванторы по отношениям и/или функциям. В третьей главе будет введен язык второго порядка, ориентированный на теорию вещественных чисел и континуум-проблему.

Конец этого параграфа посвящен описанию некоторых простых, но важных синтаксических свойств языка L_1, которые постоянно используются в дальнейшем.

Следующая лемма параллельна лемме 4.6 главы I и является основой индуктивных рассуждений по длине термов и формул.

I.4. Лемма. а) Если терм t не является ни переменной, ни константой, то t однозначно представляется в виде $f(t_1, \dots, t_n)$, где f - функция ранга n, а $t_1, \dots t_n$ - термы.

б) Если формула P не является атомарной, то она однозначно представляется в одном из видов (I).

Вот первое индуктивное рассуждение, описывающее противопоставление свободных и связанных вхождений переменной x в формулу P.

I.5. Определение. а) Всякое вхождение переменной в атомарную формулу свободно.

б) Всякое вхождение переменной в $\neg Q$ или $(Q_1) * (Q_2)$ ($*$ - любая связка) свободно (или связано) в точности тогда, когда свободно (или связано) соответствующее вхождение ее в Q (или Q_1, или Q_2).

в) Всякое вхождение переменной x в $\forall x(Q)$ и $\exists x(Q)$ связано. Вхождения остальных переменных в $\forall x(Q)$ и $\exists x(Q)$ таковы же, как в Q.

В пункте в) Q называется областью действия кванторов $\forall$ соответственно $\exists$. По лемме I.4. область действия каждого квантора в формуле определена однозначно.

I.6. Определение. Переменная x не ограничивает терм t в формуле P, если ни одно из свободных вхождений x в P не лежит в области действия квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y - переменная, входящая в t.

Эквивалентная формулировка: x не ограничивает t в P, если после подстановки t в P вместо каждого из свободных вхождений x в P все вхождения переменных под знаком t остаются свободными.

Объем класса формул, которые допускаются определением I.2 в), несколько велик: он содержит, например, выражение

$\exists x \forall x\, P(z)$, которое на интуитивном уровне отвечает неудачному высказыванию "существует такое x , что для всех x z обладает свойством P ". Хотя это в общем не мешает развитию формальной теории, можно ограничиться рассмотрением класса хороших формул.

I.7. Определение. а) Атомарные формулы хорошие.

б) Формулы $\neg Q_1$, $(Q_1) * (Q_2)$ тогда и только тогда хорошие, когда Q_1, Q_1, Q_2 хороши и, кроме того, общие переменные для Q_1 и Q_2 входят только свободно.

в) Формулы $\forall x(Q)$ и $\exists x(Q)$ тогда и только тогда хороши, когда Q хороша, а x входит в Q и притом только свободно.

Из определения нетрудно усмотреть, что для каждой переменной все ее вхождения в хорошую формулу P либо одновременно свободные, либо одновременно связанные.

2. Интерпретация.

2.I. Одна интерпретация φ языка L_1 в множестве M состоит из наборов отображений, которые сопоставляют разным выражениям языка элементы M или структуры над M (в смысле Бурбаки). Эти отображения делятся на первичные, которые, собственно, и определяют интерпретацию, и вторичные, которые естественно и однозначно восстанавливаются по первичным. Сами же отображения, а также иногда их значения мы будем для краткости также называть интерпретациями.

Перейдем к систематическому описанию интерпретации φ .

2.2. Первичные отображения.

Интерпретация констант есть отображение φ множества символов констант в M.

Интерпретация операций есть отображение, которое каждому символу операции f ранга n сопоставляет операцию $\varphi(f)$ то есть функцию на $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}$ со значениями в M.

Интерпретация отношений есть отображение, которое каждому символу отношений p ранга n сопоставляет подмножество $\varphi(p) \subset M \times M \times \ldots \times M$, то есть n-местное отношение над M.

2.3. Вторичные отображения.

А. Интерпретация термов. Интуитивно, мы хотим интерпретировать переменные как названия "общего элемента" множества M, которым при желании можно приписывать конкретные значения из M. Терм $f(x_1, \ldots, x_n)$ мы хотим интерпретировать как функцию $\varphi(f)$ от n аргументов $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)$, которые могут пробегать M, и т.п.

Чтобы дать точное определение, введем обозначение

M^X = множество всех отображений в M множества переменных X языка L_1.

Один элемент $\xi \in M^X$, стало быть, сопоставляет каждой переменной x из X ее образ в M, который мы будем обозначать $\varphi(x)(\xi)$ (а не $\xi(x)$!). Элементы M^X мы будем иногда называть точками.

Таким образом, мы рассматриваем переменные как функции на M^X со значениями в M, и так же будут интерпретироваться все термы.

Итак, интерпретация термов есть сопоставление каждому терму t функции $\varphi(t)$ на M^X со значениями в M, которое определяется индуктивно следующими соглашениями:

а) если c -константа, то $\varphi(c)$ есть постоянная функция со значением $\varphi(c)$ (которое задано первичным отображением);

б) если x -переменная, то $\varphi(x)$ есть $\varphi(x)(\xi)$ как функция от ξ;

в) если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, то для всех $\xi \in M^X$

$$\varphi(t)(\xi) = \varphi(f)(\varphi(t_1)(\xi), \dots \varphi(t_n)(\xi))$$

где $\varphi(t_i)(\xi) \in M$ предполагаются уже определенными, а $\varphi(f)$ есть функция на $M \times M \times \dots \times M$, заданная первичным отображением.

Б. Интерпретация атомарных формул. Всякой формуле P языка при интерпретации φ приписывается ее функция истинности $\varphi(P)$. В отличие от языка L_0, $\varphi(P)$ не есть просто 0 или I, но функция на M^X, принимающая лишь значения 0 и I.

Если $P = p(t_1, \dots t_n)$ атомарная формула, эта функция определяется так:

$$\varphi(P)(\xi) = \begin{cases} \text{I, если } (\varphi(t_1)(\xi), \dots \varphi(t_n)(\xi)) \in \varphi(P) \\ \text{0 иначе.} \end{cases}$$

Интуитивно это означает следующее. Утверждение "объекты $(t_1, \dots, t_n)$ обладают свойством p" не обязано быть верным или ложным при всех значениях объектов

оно иногда истинно, а иногда ложно. Переменная точка $\xi \in M^X$ отмечает приписывание конкретных значений переменным термам; $\varphi(P)(\xi)$ есть значение истинности утверждения P для этих конкретных интерпретаций термов.

В. Интерпретация формул. Как и сами формулы, она определяется индукцией по числу связок и кванторов. Интерпретация атомарных формул уже дана.

Если $P = \neg(Q)$ или $(Q_1)*(Q_2)$, где $*$ - одна из связок, то функция истинности $\varphi(P)$ определяется по $\varphi(Q), \varphi(Q_1), \varphi(Q_2)$ по тем же формулам, что и в языке L_0 : см. (1) - (4) из п. 2.4. главы I.

Чтобы определить $\varphi(P)$ в случаях P вида $\forall x Q$ или $\exists x Q$ удобно ввести следующее словоупотребление.

Точка $\xi' \in M^X$ называется изменением точки $\xi \in M^X$ по переменной x (соответственно, по множеству переменных X_0), если $\varphi(y)(\xi') = \varphi(y)(\xi)$ для всех переменных y, отличных от x (соответственно, для всех $y \notin X_0$).

Теперь положим

$$\varphi(\forall x Q)(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(Q)(\xi') = 1 \text{ для всех } \xi' \text{ изменений } \xi \text{ по } x; \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(\exists x Q)(\xi) \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(Q)(\xi') = 1 \text{ хотя бы для одного } \xi', \text{ изменения } \xi \text{ по } x: \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Примеры интерпретаций.

3.I. Описанные выше свойства интерпретаций относятся ко всем языкам класса L_1. Конкретный язык может быть ориентирован на ту или иную математическую теорию, и на его интерпретации тогда естественно наложить те или иные дополнительные ограничения.

Приведем несколько примеров языков и интерпретаций.

3.2. Язык арифметики $L_1 Ar$. В алфавите этого языка есть одна константа 0; три символа операций $'$ (штрих) (ранга I) $+$ и $\cdot$ (оба ранга 2); один символ отношения ранга 2: $=$.

Стандартная интерпретация φ языка $L_1 Ar$ во множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ состоит из следующих отображений.

Первичные отображения

$\varphi(0)$ есть 0, нуль в $\mathbb{Z}$;

$\varphi(')$ есть операция "прибавление единицы", или "непосредственно следующее число"

$\varphi(+)$ есть сложение;

$\varphi(\cdot)$ есть умножение;

$\varphi(=)$ есть равенство в $\mathbb{Z}$

О вторичных отображениях трудно сказать что-либо новое. Скажем, атомарная формула P вида $=(x,y)$ имеет следующую функцию истинности:

$$\varphi(P)(\xi) \quad \begin{cases} \text{I, если } \varphi(x)(\xi) = \varphi(y)(\xi) \\ \text{0 иначе} \end{cases}$$

3.3. Язык теории множеств $L_1 Set$. В самом экономном алфавите этого языка есть символ константы $\emptyset$, символ отношения ранга 2 $\in$ и совсем нет символов операций.

Стандартная интерпретация φ языка $L_1 Set$ подразумевает, что в качестве M взят некоторый "универсум" - большое множество множеств, замкнутое относительно некоторых стандартных операций над множествами, которые описаны ниже. В этой интерпретации

$\varphi(\emptyset)$ есть пустое множество;

$\varphi(\in)$ есть отношение "быть элементом".

3.4. Нестандартные интерпретации. Язык, даже предназначенный для описания некоторой конкретной области математики, - арифметики, теории множеств или геометрии, - может иметь также в высшей степени нестандартные интерпретации. Обычно на интерпретации отношений и операций в ориентированных языках накладываются дополнительные условия: скажем, отношение $\varphi(=)$ (см. п. 3.1 описание $L_1 Ar$) даже в нестандартной интерпретации должно удовлетворять естественным аксиомам равенства. Тем не менее, однозначность интерпретации эти требования не могут обеспечить: см. ниже теорему Левенгейма-Сколема, а также - в следующей главе - описание нестандартной интерпретации языка вещественных чисел в множестве случайных чисел.

Здесь мы приведем простейший пример интерпретации произвольного языка L_1, подчиняющийся только условиям из § I.

3.5. Минимальная интерпретация φ языка L_1. Это интерпретация в одноточечном множестве $M = \{m\}$

Легко убедиться, что константы и функции интерпретируются однозначно. Небольшая свобода выбора есть лишь в интерпретации отношений: так как $M \times \ldots \times M$ – одноточечное множество, мы можем положить для каждого отношения P :

$$\varphi(P) = \emptyset \quad \text{(пустое подмножество)}$$

или

$$\varphi(P) = M \times M \times \ldots \times M = \{(m, \ldots, m)\}$$

В зависимости от этого меняется значение истинности атомарных формул (M^x – одноточечное множеотво, так что $\varphi(P)$ принимает просто значения 0 или I):

$$\varphi(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} \text{I, если } \varphi(P) \neq \emptyset \\ \text{0, если } \varphi(P) = \emptyset \end{cases}$$

для любых термов $t_1, \ldots, t_n$ и отношений P ранга n .

Интерпретация формул дальше подчиняется правилам языка L_0 , потому что кванторы, как легко видеть, не оказывают никакого влияния: $\varphi(\forall x Q) = \varphi(Q)$, $\varphi(\exists x Q) = \varphi(Q)$

4. <u>Некоторые вычисления функций истинности</u>.

4.I. Пусть φ – некоторая интерпретация языка L_1 . Формула P называется <u>истинной в интерпретации</u> φ , если $\varphi(P)(\xi) = 1$ для всех $\xi \in M^x$.

Пусть Σ – некоторое множество формул. Интерпретация φ называется <u>моделью для</u> Σ , если все формулы из Σ истинны в φ .

Ниже мы фиксируем язык L и интерпретацию φ и приведем несколько примеров вычислений $\varphi(P)$, важных для дальнейшего.

4.2. Лемма. Пусть P - формула. $\xi, \xi' \in M^X$. Предположим, что для всех переменных x, имеющих свободные вхождения в P, $\varphi(x)(\xi)$ совпадает с $\varphi(x)(\xi')$. Тогда $\varphi(P)(\xi) = \varphi(P)(\xi')$.

Доказательство. а) Пусть t - некоторый терм и пусть для любой переменной x, входящей в t, имеем $\varphi(x)(\xi) = \varphi(x)(\xi')$. Тогда, пользуясь 2.3.А, индукцией по длине t легко находим, что $\varphi(t)(\xi) = \varphi(t)(\xi')$.

б) Докажем лемму для атомарной формулы P вида $p(t_1, \dots, t_n)$. Согласно 2.3.Б,

$$\varphi(P)(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } (\varphi(t_1)(\xi), \dots, \varphi(t_n)(\xi)) \in \varphi(p) \\ 0 \text{ иначе,} \end{cases}$$

и аналогично для $\varphi(P)(\xi')$. Но если ξ и ξ' совпадают на всех переменных, входящих в P, то тем более они совпадают для всех переменных, входящих в t_i, и по пункту а) имеем $\varphi(t_i)(\xi) = \varphi(t_i)(\xi')$. Значит, $\varphi(P)(\xi) = \varphi(p)(\xi')$.

в) Проведем теперь индукцию по общему числу связок и кванторов в P. Если $P = \neg(Q)$ или $(Q_1) * (Q_2)$, то вывод леммы для P из леммы для Q и Q_1, Q_2 очевиден.

Пусть теперь $P = \forall x(Q)$, и пусть лемма верна для Q (проверка случая $\exists x(Q)$ аналогична).

Имеем по определению

$$\varphi(\forall x Q)(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi(Q)(\eta) = 1 \text{ для всех } \eta \text{ изменений } \xi \text{ по } x, \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\varphi(\forall x Q)(\xi') \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi(Q)(\eta') = 1 \text{ для всех } \eta' \text{ изменений } \xi' \text{ по } x. \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Разрешим в правых частях этих формул изменять η и η' также по всем переменным, не входящим свободно в Q. Утверждения после слова "если" останутся справедливыми или ложными в этой более широкой области значений, если они были справедливы или ложны раньше, в силу леммы 4.2. Но тогда η и η' будут пробегать одинаковые области значений, потому что ξ и ξ' отличаются как раз по переменным, не входящим свободно в Q, и по x.

4.3. <u>Следствие. Если формула P не содержит свободных вхождений переменной, то $\varphi(P) = 0$ или I (независимо от $\xi \in M^X$).</u>

Следующие примеры истинных формул будут служить ниже <u>аксиомами</u>. На них будет основано определение понятия <u>выводимости</u> (синтаксической истинности) в языке L_1.

4.4. <u>Формулы Ax_c</u>. Они получаются из аксиом А.0 – С.5. (п. 4.3. главы I) языка L_0 подстановкой вместо P, Q, R любых формул языка L_1. Проверка их истинности в любой интерпретации языка L_1 ничем не отличается от проверки в языке L_0.

Более общо, если в любой тавтологии языка L_0 на место атомарных формул подставить формулы языка L_1, получится формула, истинная в любой интерпретации L_1.

4.5. Формула $\mathfrak{D}$.I.

$\mathfrak{D}$.I. $\forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$, если все вхождения x в P связаны.

Проверка истинности $\mathfrak{D}$.I. Предположим, что $\varphi(R)(\xi) = 0$ где R - формула $\mathfrak{D}$.I, $\xi \in M^X$, и придем к противоречию.

Мы должны иметь тогда $\varphi(P \to \forall x Q)(\xi) = 0$ и $\varphi(\forall x(P \to Q))(\xi) = 1$.

Из первого равенства следует, что $\varphi(P)(\xi) = 1$ и $\varphi(\forall x Q)(\xi) = 0$. Последнее означает, что для некоторого ξ_0, изменения ξ по x, имеем $\varphi(Q)(\xi_0) = 0$. Но тогда $\varphi(P)(\xi_0) = \varphi(P)(\xi) = 1$. В силу леммы 4.2., что по предположению x не входит в P свободно. Значит, $\varphi(P \to Q)(\xi_0) = 0$; но это противоречит $\varphi(\forall x(P \to Q))(\xi) = 1$.

4.6. Формулы $\mathfrak{D}$.2.

$\mathfrak{D}$.2. $\neg P \leftrightarrow \neg \exists x P$

(напомним, что $P \leftrightarrow Q$ означает $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Проверка истинности $\mathfrak{D}$.2 легка и оставляется читателю.

4.7. Формула $\mathfrak{D}$.3. Прежде, чем выписывать ее, введем следующее соглашение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - разные переменные, $t_1, \ldots, t_n$ - термы, и пусть P - некоторая формула.

Мы будем иногда писать P в виде $P(x_1, \dots, x_n)$, для того, чтобы указать точный смысл очень неоднозначной сокращенной записи $P(t_1, \dots, t_n)$:

$P(t_1, \dots, t_n)$ означает результат подстановки в $P(x_1, \dots, x_n)$ терма t_1 вместо каждого из свободных вхождений переменной x_1, ... ;
терма t_n вместо каждого из свободных вхождений переменной x_n (допускается, что части таких вхождений нет).

(Не путать запись $P(x_1, \dots, x_n)$ с $p(x_1, \dots, x_n)$ в случае, когда p - символ -местного отношения. Последняя запись является лишь частным случаем первой).

Напомним, кроме того, что переменная x <u>не ограничивает</u> терм t в формуле $P(x)$, если в $P(t)$ все вхождения переменных под знаками t остаются свободными.

Теперь выпишем формулу $\mathcal{D}$.3:

$\mathcal{D}$.3. $\forall x P(x) \longrightarrow P(t)$, если x не ограничивает t в P.

<u>Проверка истинности $\mathcal{D}$.3</u>. Пусть $\xi \in M^X$, R - формула $\mathcal{D}$.3. Предположим, что $\varphi(R)(\xi) = 0$. Тогда

$$\varphi(\forall x P(x))(\xi) = 1, \quad \varphi(P(t))(\xi) = 0$$

Из первого равенства следует, что $\varphi(P(x))(\xi') = 1$ для всех ξ' изменений ξ по X.

Возьмем в качестве ξ' такое специальное изменение, для которого $\varphi(x)(\xi') = \varphi(t)(\xi)$. Если мы докажем, что

$$\varphi(P(t))(\xi) = \varphi(P(x))(\xi'),$$

то получим желаемое противоречие.

Сформулируем нужный нам результат в виде леммы:

4.8. Лемма. Пусть x не ограничивает t в P. Если $\xi \in M^x$, а ξ' есть изменение ξ по x, для которого $\varphi(x)(\xi') = \varphi(t)(\xi)$, то

$$\varphi(P(t))(\xi) = \varphi(P(x))(\xi')$$

Доказательство. Проведем индукцию по общему числу связок и кванторов в P.

а) Пусть P – атомарная формула $p(t_1, \ldots, t_n)$. Последовательно находим:

$$\varphi(t)(\xi) = \varphi(x)(\xi')$$

φ (результат подстановки t в t_i вместо $x)(\xi) = \varphi(t_2)(\xi')$;

$$\varphi(P(t))(\xi) = \varphi(P(x))(\xi')$$

б) Пусть P есть $\neg(Q)$ или $(Q_1) * (Q_2)$. Так как x не ограничивает t в P, то же верно для Q, Q_1, Q_2, и индукционный шаг проводится автоматически.

в) Наконец, пусть P еоть $\exists y Q$ или $\forall x Q$. Разберем первый случай; второй разбирается аналогично.

Случай I. $y = x$. Тогда x связана в P; поэтому

$$P(x) = P(t) = P \quad \text{и} \quad \varphi(P)(\xi) = \varphi(P)(\xi')$$

в силу леммы 4.2.

Случай 2. $y \neq x$. Индуктивное предположение:

$\varphi((Q(t)))(\eta) = \varphi(Q(x))(\eta')$, если η' – такое изменение η по x, что $\varphi(x)(\eta') = \varphi(t)(\eta)$.

Нужно доказать совпадение (для ξ, ξ', как в условии леммы) двух значений истинности

$$\varphi(\exists y\, Q(x))(\xi') = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi(Q(x))(\eta') = 1 \text{ для некоторого } \eta', \text{ изменения } \xi' \text{ по } y. \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$\varphi(\exists y\, Q(t))(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi(Q(t))(\eta) = 1 \text{ для некоторого } \eta, \text{ изменения } \xi \text{ по } y. \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

При этом известно, что ξ' – такое изменение ξ по x, что $\varphi(x)(\xi') = \varphi(t)(\xi)$.

Предположим сначала, что второе значение истинности равно I. Выберем такое $\eta \in M^x$, что $\varphi(Q(t))(\eta) = 1$. В соответствии с индуктивной гипотезой, изменив η по x так, чтобы $\varphi(x)(\eta') = \varphi(t)(\eta)$, получим

$$1 = \varphi(Q(t))(\eta) = \varphi(Q(x))(\eta')$$

Покажем, что η' есть изменение ξ' по y ; отсюда будет следовать, что и первое значение истинности равно I. В самом деле, η' получилось изменением η по x , η - изменением ξ по y , а ξ - изменением ξ' по x . Значит η' есть изменение ξ' по x и y ; нужно проверить, что изменение по x на самом деле не произошло:

$$\varphi(x)(\eta') = \varphi(x)(\xi')$$

Действительно, левая часть есть $\varphi(t)(\eta)$ по определению η' ; правая часть есть $\varphi(t)(\xi)$ по определению ξ' , но η получилось изменением ξ по y , а y не входит в t , ибо x не ограничивает t в $P = \exists y Q$.

Осталось проверить, что если второе значение истинности равно 0, то и первое равно 0. Рассуждения почти такие же. Если второе значение истинности равно 0, то $\varphi(Q(t))(\eta) = 0$ для всех η , изменений ξ по y . По каждому такому η построим η' , как в первой части доказательства. Как выше, проверяется, что η' является изменением ξ' по y и, более того, пробегает все такие изменения, когда η пробегает все изменения ξ по y . Значит и первое значение истинности равно 0.

5. Аксиомы и выводимость в L_1 .

Перед чтением этого параграфа рекомендуется прочесть § 5 главы I.

5.I. Правила вывода в L_1 . Их два:

а) MP: Q является непосредственным следствием P и $P \to Q$; б) Gen (generalization , обобщение): $\forall x P$ является непосредственным следствием P , где x - любая переменная, а P - любая формула.

(Интуитивно Gen отвечает обычной практике формулировки свойств "общих" объектов: утверждение типа " $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ " следует читать " для всех x и для всех y верно, что $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ").

5.2. Логические аксиомы языков L_1 . Для каждого языка L_1 обозначим через Ax_1 множество формул, которые получаются из следующих схем аксиом подстановкой в них любых формул языка:

а) тавтологии языка L_0 .

б) Формулы

Д.I. $\forall x(P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$, если все вхождения x в P связаны.

Д.2. $\forall x P \leftrightarrow \neg \exists x P$

Д.3. $\forall x P(x) \to P(t)$, если x не ограничивает t в P .

Здесь P, Q - формулы, x - переменные, t - терм.

5.3. Специальные аксиомы L_1 . Это аксиомы, которые накладываются на символы отношений и операций в ориентированных языках. Ниже будут приведены некоторые специальные аксиомы теории множеств $L_1 Set$ и арифметики $L_1 Ar$. Здесь мы укажем лишь важный пример, общий многим ориентированным языкам: аксиомы равенства.

5.4. Аксиомы равенства. Равенство - это символ $=$ отношения ранга 2, подчиненный следующим аксиомам: (мы пишем $x=y$ вместо $=(x,y)$):

E.I. $\forall x(x=x)$

E.2. $x=y \to (P(x,x) \to P(x,y))$

где $P(x,y)$ получается из $P(x,x)$ заменой любой части свободных вхождений x на свободные вхождения y.

Интерпретация φ языка с равенством $=$ называется нормальной, если $=$ интерпретируется как обычное равенство, то есть $\varphi(=) \subset M \times M$ есть диагональ.

5.5. Выводимость. Пусть $\mathcal{E}$ - некоторое множество формул языка L_1, P - формула. Как в главе I, мы пишем $\mathcal{E} \vdash P$, если существует вывод формулы P из множества $\mathcal{E}$ с помощью правил МР и Gen. Мы говорим тогда, что P выводима из $\mathcal{E}$ и т.п.

5.6. Определение. Множество формул $\mathcal{E}$ называется противоречивым или несовместным, если существует такая формула P, что одновременно $\mathcal{E} \vdash P$ и $\mathcal{E} \vdash \neg P$.

Важный частный случай. Если $\mathcal{E}$ противоречива и содержит Ax_1 (или даже только тавтологии из Ax_0), то любая формула R выводима из $\mathcal{E}$. Вот вывод R:
вывод P; вывод $\neg P$; аксиома С.2: $\neg P \to (P \to R)$, двойное применение МР к этой аксиоме.

5.7. Теорема. Пусть интерпретация φ является моделью для множества $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E} \vdash P$, то $\varphi(P) = 1$.

Иными словами, вывод сохраняет истинность.

Доказательство. Нужно проверить, что непосредственное следствие φ -истинных формул является φ -истинной. Для МР это уже было сделано, для Gen предоставляется читателю.

5.8. Следствие. Если для множества формул $\mathcal{E}$ существует модель, то $\mathcal{E}$ непротиворечиво.

Доказательство. Предположим, что φ - модель для $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E} \vdash P$, то $\varphi(P) = 1$, если $\mathcal{E} \vdash \neg P$, то $\varphi(P) = 0$, поэтому вывод P и $\neg P$ вместе невозможен.

5.9. Замечание. Непротиворечивость есть чисто синтаксическое свойство множества $\mathcal{E}$; между тем, критерий 5.8 требует привлечения содержательных соображений для доказательства непротиворечивости. Согласно одной теореме Геделя, этого нельзя избежать: уже непротиворечивость системы аксиом $L_1 Ar$ (см. ниже) не может быть установлена чисто финитными синтаксическими рассмотрениями.

Следующий параграф будет посвящён формулировке и обсуждению результата, обратного к 5.8. Он ведет уже не к тривиальным представлениям о природе математической истины.

6. Теоремы о моделях Геделя и Левенгейма-Сколема. Обсуждение.

6.I. Теорема. Пусть $\mathcal{E} \supset Ax_1$ - непротиворечивое множество формул языка L_1. Тогда $\mathcal{E}$ имеет модель - интерпретацию в множестве M, мощность которого не превосходит мощности алфавита L_1 (или счетна, если алфавит конечен).

Существование модели было доказано для языка $L_1 Ar$ Геделем (финитными средствами) в 1930 г. Утверждение о мощности принадлежит Левенгейму и Сколему (1915, 1919 г.).

6.2. Следствие. (Совпадение содержательной и синтаксической истинности в языке L_1). Если $\mathcal{E} \supset Ax_1$, то формула P выводима из $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда она истинна во всех моделях $\mathcal{E}$.

Доказательство. Если P выводима из $\mathcal{E}$, то она истинна во всех моделях $\mathcal{E}$ согласно теореме 5.7.

Предположим теперь, что P замкнута и невыводима из $\mathcal{E}$. Мы проверим, что множество $\{\mathcal{E}, \neg P\}$ в этом случае непротиворечиво. Из теоремы 6.I. будет следовать существование модели $\{\mathcal{E}, \neg P\}$, то есть модели $\mathcal{E}$, в которой P ложно. (Случай незамкнутой P сводится к этому случаю, потому что φ-истинность P равносильна φ-истинности замыкания P, а выводимость P из $\mathcal{E}$ равносильна выводимости замыкания P из $\mathcal{E}$ в силу Gen и аксиомы Д.3. при $t = x$).

Допустим, что $\{\mathcal{E}, \neg P\}$ несовместно и придем к противоречию. Для любой формулы R имеем тогда $\{\mathcal{E}, \neg P\} \vdash R$ и $\{\mathcal{E}, \neg P\} \vdash \neg R$. Аксиома-тавтология $R \to (\neg R \to P)$ и двойное применение MP дадут $\{\mathcal{E}, \neg P\} \vdash P$. Ниже будет доказано, что лемма о дедукции для языка L_0 (п. 6.5 главы I) остается справедливой в языке L_1, если P замкнута. Применяя ее, найдем $\mathcal{E} \vdash \neg P \to P$. Из аксиомы $(\neg P \to P) \to P$ посредством MP выводим наконец $\mathcal{E} \vdash P$, вопреки предположению. ■

6.3. Обсуждение. а) Основное отличие результата 6.2 от соответствующей теоремы в языке L_0 состоит в отсутствии способа эффективности проверки обоих свойств формулы P – быть выводимой из $\mathcal{E}$ и быть содержательно истинной. (Понятие

эффективности впоследствии также будет формализовано, и соответствующая теорема о невозможности эффективной проверки может быть доказана).

Доказательство эквивалентности этих свойств также будет неэффективным.

б) В содержательных применениях множество $\mathcal{E}$ обычно получается добавлением к Ax_1 специальных аксиом ориентированного языка (ср. п. 5.3). Существование модели у любой (синтаксически) непротиворечивой системы аксиом выглядит вполне естественным. Дальнейший анализ теоремы 6.I в применении к конкретным языкам, однако, выявляет такие черты аксиоматического метода, которые были неожиданными для математиков. Мы обсудим здесь два характерных примера: "парадоксы" Сколема и Геделя.

Первый из них относится к языку $L_1 Set$ и состоит в следующем. Для реалистической формализации текстов по теории множеств средствами языка $L_1 Set$ достаточно считать, что алфавит $L_1 Set$ счетен. Тогда, по теореме Сколема-Левенгейма, аксиомы $L_1 Set$ имеют счетную модель. Между тем, одна из аксиом обеспечивает существование бесконечного множества в модели, а другая говорит о множестве всех его подмножеств, которое несчетно (согласно диагональному рассуждению Кантора, которое может быть формализовано в $L_1 Set$).

Второй "парадокс" относится даже к $L_1 Ar$. Для его описания следует привлечь еще одну глубокую теорему Геделя о существовании такой "неразрешимой" формулы P , что ни P , ни $\neg P$ не выводима из аксиомы $L_1 Ar$, но в то же время P истинна в стандартной интеопретации $L_1 Ar$ во множестве целых чисел (эта теорема будет доказана во второй части записок).

Построив тогда модель множества $\{$ аксиомы $L_1 A_2, \neg P\}$ мы получим " нестандартную арифметику", в которой все аксиомы справедливы, однако некоторое "интуитивно истинное" утверждение о целых числах ложно.

При этом положение дел нельзя спасти расширением системы аксиом: согласно Геделю, добавление какого угодно набора эффективно распознаваемых новых аксиом не может избавить от существования "неразрешимых" утверждений P .

Вопрос о том, как относиться к этому открытию, принадлежит психологии по крайней мере на столько же, насколько к математике. Поэтому небезынтересно сравнить две крайние точки зрения, между которыми располагается целый спектр оттенков.

"Реализм" (или "неоплатонизм"). Целые числа существуют и однозначно определены независимо от наших конструкций, и осмысленные вопросы об их свойствах имеют ответы, независимо от того, умеем мы получить эти ответы, исходя из принятых за "интуитивно ясные" утверждении, или нет. По мере развития математики развивается и наша интуиция. Геделевские "неразрешимые" суждения должны по очереди становиться либо "интуитивно разрешимыми" (как явные примеры Геделя), либо выводиться из тех суждений, которые будут появляться в классе "интуитивно разрешимых" с ростом опыта и интуиции.

(Не слишком ясно, что значит "существование" в первой фразе. Согласно Геделю "допущение таких объектов столь же законно, как и допущение физических тел, и имеются столь же веские основания верить в их существование". Тем самым, существование становится примитивным понятием и объектом веры.

Автор записок склонен разделять дух позиции Геделя, если не ее букву).

"Ультраинтуиционизм". Основатель этой концепции Есенин-Вольпин кратко характеризует ее в следующих словах (см. Френкель Бар-Хиллел. Основания теории множеств. МИР, 1966, стр. 316).

"Последовательное развитие брауэровского скептицизма приводит к ультраинтуиционистской критике, характеризуемой неверием в единственность натурального ряда, существование хотя бы одного натурального ряда, в котором примитивно-рекурсивные функции (и даже сложение) определены всюду, а также в принцип математической индукции и в математику, основанную на этих спорных допущениях.

... В основе ультраинтуиционистской программы лежит широкая теория модальностей ... и связанная с ней теория грамматических времен (ибо еще не наступившие члены становящейся последовательности следует рассматривать как возможные в будущем). Истина при этом рассматривается как результат возможного доказательства, т.е. процедуры, благодаря которой предложение становится бесспорным".

7. Доказательство теорем о моделях.

В этом параграфе мы считаем фиксированным язык L_1, с бесконечным множеством переменных. Основной целью будет доказательство следующего результата, объединяющего теоремы Геделя и Левенгейма-Сколема:

7.1. Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ - непротиворечивое множество формул языка L_1, содержащее Ax_1. Тогда существует интерпретация $\mathcal{Y}$ языка L_1 в некотором множестве M, являющаяся моделью $\mathcal{E}$ и такая, что

мощность $M \leq$ мощность алфавита L.

Мы изложим сначала план доказательства этой теоремы, которое получится в результате соединения нескольких лемм. Чтобы сформулировать их, введем два удобных определения.

7.2. Определения. Множество формул $\mathcal{E}$ называется полным, если для любой замкнутой формулы P либо $P \in \mathcal{E}$, либо $\neg P \in \mathcal{E}$.

Важнейший пример полного множества $\mathcal{E}$ в ориентированном языке: "все утверждения, истинные в (интуитивной) стандартной интерпретации". Это множество должно быть полно, если мы верим, что всякое математическое утверждение либо истинно, либо ложно, даже когда мы не в состоянии выбрать между этими двумя возможностями.

7.3. Определение. Алфавит языка L называется достаточным для множества $\mathcal{E}$, если для любой формулы $P(\bar{\bar{x}}) \in \mathcal{E}$, содержащей равно одну свободную переменную $(\bar{\bar{x}})$, существует такая константа $\bar{\bar{c}}_p$ (зависящая от $\bar{\bar{P}}$), что формула $R_{\bar{\bar{P}}}$:

$$\neg \forall x\, P(x) \rightarrow \neg P(c_p)$$ содержится в $\mathcal{E}$.

Интуитивный смысл R_p: "если не все $\bar{\bar{x}}$ обладают свойством $\bar{\bar{P}}$, то можно указать конкретный объект $\bar{\bar{c}}_p$, не обладающий этим свойством". Терминология "достаточность алфавита" связана с тем, что в случае нехватки формул R_p в $\mathcal{E}$ мы можем просто увеличить $\mathcal{E}$, добавив все $R_{\bar{\bar{P}}}$;

но если не хватит констант $\bar{\bar{c}}_{\varrho}$, нам придется их добавить к алфавиту языка (см. ниже).

Свойства 7.2. и 7.3. выделяют класс таких обширных [redacted]жеств формул $\mathcal{E}$, что для них доказательство теоремы [redacted]. можно провести, непосредственно построив модель M:

7.4. Основная лемма. Если $\mathcal{E}$ совместно, полно, $\mathcal{E} \supset Ax_1$ [redacted]алфавит L_1 достаточен для $\mathcal{E}$, то существует модель $\mathcal{E}$ [redacted]ощности $\leq$ мощности алфавита L_1.

Следующие две леммы позволят вложить любое множество $\mathcal{E}$ [redacted] полное или в такое, для которого алфавит L достаточен:

7.5. Лемма. Если $\mathcal{E} \supset Ax$ совместно, то существует полное совместное множество формул $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}$ (мощность которого, конечно, ограничена мощностью алфавита L_1).

7.6. Лемма. Если $\mathcal{E} \supset Ax_1$ совместно, то существует:

а) язык L_1', алфавит которого получается добавлением к алфавиту L_1 множества новых констант мощности [redacted]ощности алфавита L_1;

б) множество формул $\mathcal{E}'$ в языке L_1' совместное, содержащее $\mathcal{E}$ и Ax_1' (логические аксиомы L_1'); и такое, что алфавит L_1' достаточен для него.

Однако эти конструкции над $\mathcal{E}$ мешают друг другу: пополняя множество $\mathcal{E}$, для которого алфавит был достаточен, мы можем получить множество с недостаточным алфавитом, а добавляя новые константы, мы увеличиваем общий запас формул в языке и тем нарушаем полноту старых множеств. Поэтому конструкции 7.5. и 7.6. нужно по очереди провести счетное число раз, чтобы в конце концов доказать последнюю лемму:

7.7. Лемма. Если $\mathcal{E} \supset Ax_1$ непротиворечиво, то существует:

а) язык $L_1^{(\infty)}$, алфавит которого получается добавлением к алфавиту L_1 множества новых констант мощности алфавита L_1;

б) множество формул $\mathcal{E}^{(\infty)}$ в языке $L_1^{(\infty)}$ полное, совместное, содержащее $\mathcal{E}$ и $Ax_1^{(\infty)}$ и такое, что алфавит $L_1^{(\infty)}$ достаточен для него.

После того, как лемма 7.7. будет доказана, теорема 7.I. получится из основной леммы, если применить ее к $\mathcal{E}^{(\infty)}$, а затем ограничить получившуюся модель на L_1 и $\mathcal{E}$.

Приступим теперь к доказательству лемм. Основная лемма будет доказана в п. 7.8, леммы 7.4, 7.5 и 7.6 – пп. 7.9 – 7.I0, 7.II, 7.I2 соответственно.

7.8. Доказательство основной леммы. Начнем с явного построения интерпретации $\mathcal{S}$ языка L_1, которая окажется моделью для $\mathcal{E}$.

а) Назовем постоянным термом такой терм в L_1, который не содержит символов переменных. Положим далее M = "второй экземпляр" множества постоянных термов языка

$$= \{ \bar{t} \mid t \text{ – постоянные термы} \},$$

и определим первичные отображения интерпретации $\mathcal{S}$ условиями:

$\mathcal{S}(c) = \bar{c}$ для любой константы c;

$\mathcal{S}(f)(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) = \overline{f(t_1, \ldots, t_n)}$ для любого символа операции f ранга n и любых постоянных термов $t_1, \ldots, t_n$,

$(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \in \mathcal{S}(p)$, если и только если $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{E}$ для любого отношения p ранга n и постоянных термов $t_1, \ldots, t_n$.

Докажем теперь следующее

б) Утверждение. Пусть P - замкнутая формула. Имеем $\mathcal{Y}(p) = I$ в том и только том случае, когда $p \in \mathcal{E}$.

(Отсюда уже будет следовать, что $\mathcal{Y}$ - модель $\mathcal{E}$. В самом деле, если $p \in \mathcal{E}$ незамкнута, то ее замыкание $\forall x_1, \ldots, \forall x_n P$ выводимо из $\mathcal{E}$ с помощью Gen, и в силу полноты и непротиворечивости $\mathcal{E}$ должно содержаться в $\mathcal{E}$. В силу утверждения, $\mathcal{Y}(\forall x_1, \ldots, \forall x_n \neq p) = I$, откуда $\mathcal{Y}(p) = I$).

Доказательство утверждения б). Проведем индукцию по общему числу кванторов и связок в формуле p.

$б_I$) p - атомарная формула $p(t_1, \ldots, t_n)$. Утверждение следует из определения $\mathcal{Y}(p)$ в списке первичных отображений, потому что из замкнутости p вытекает, что термы t_i - постоянны.

$б_2$) $p = (\neg Q)$

Если $\mathcal{Y}(p) = 1$, то $\mathcal{Y}(Q) = 0$ и $Q \notin \mathcal{E}$ по индуктивному предположению для Q; в силу полноты $\neg Q \in \mathcal{E}$, то есть $P \in \mathcal{E}$.

Если же $\mathcal{Y}(P) = 0$, то $\mathcal{Y}(Q) = 1$ и $Q \in \mathcal{E}$, откуда $\neg Q \notin \mathcal{E}$ в силу непротиворечивости $\mathcal{E}$.

$б_3$) $P = (Q_1 \to Q_2)$

Сначала покажем, что если $\mathcal{Y}(p) = 0$, то $P \in \mathcal{E}$. Действительно, в этом случае $\mathcal{Y}(Q_1) = 1$, $\mathcal{Y}(Q_2) = 0$; в силу индукции $Q_1 \in \mathcal{E}$, $Q_2 \notin \mathcal{E}$; в силу полноты, $\neg Q_2 \in \mathcal{E}$; в силу тавтологии $Q_1 \to (\neg Q_2 \to \neg(Q_1 \to Q_2))$ и два МР

дают $\mathcal{E} \vdash \neg(Q_1 \to Q_2)$. В силу полноты, выводимые из $\mathcal{E}$ замкнутые формулы содержатся в $\mathcal{E}$; значит, $\neg(Q_1 \to Q_2) = \neg P \in \mathcal{E}$, так что $P \notin \mathcal{E}$.

Теперь покажем, что если $P \notin \mathcal{E}$, то $\mathcal{V}(P) = 0$. Действительно, тогда в силу полноты $\neg P = \neg(Q_1 \to Q_2) \in \mathcal{E}$. Тавтологии $\neg(Q_1 \to Q_2) \to Q_1$ и $\neg(Q_1 \to Q_2) \to \neg Q_2$ и МР дают $\mathcal{E} \vdash Q_1$, $\mathcal{E} \vdash \neg Q_2$, откуда в силу полноты $Q_1 \in \mathcal{E}$, $\neg Q_2 \in \mathcal{E}$ по индуктивному предложению, $\mathcal{V}(Q_1) = 1$, $\mathcal{V}(Q_2) = 0$, откуда $\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(Q_1 \to Q_2) = 0$.

б$_4$) $\underline{P = Q_1 \vee Q_2}$ или $Q_1 \wedge Q_2$. С помощью аксиом В.I, В.2. этот случай сводится к предыдущим, и мы опускаем его разбор.

б$_5$) $\underline{P = \forall x\, Q}$

Если x не входит в Q свободно; то $\mathcal{V}(P) = 1$ равносильно $\mathcal{V}(Q) = 1$, то есть, по индуктивному предположению, $Q \in \mathcal{E}$. Это включение, в свою очередь, равносильно включению $\forall x\, Q \in \mathcal{E}$: в одну сторону по Gen, в другую - по аксиоме Д.3. с $t = x$ и МР.

Дальше мы предполагаем поэтому, что x входит в Q свободно.

Сначала предположим, что $\mathcal{V}(P) = 1$, но $P \notin \mathcal{E}$, и придем к противоречию.

Если $P \notin \mathcal{E}$, то $\neg P \in \mathcal{E}$, то есть $\neg \forall x\, Q(x) \in \mathcal{E}$. Так как алфавит L достаточен для $\mathcal{E}$, в $\mathcal{E}$ содержится формула $\neg \forall x\, Q(x) \to \neg Q(c_Q)$. Применяя МР, получим $\mathcal{E} \vdash \neg Q(c_Q)$, откуда, в

силу непротиворечивости $\mathcal{E}$, $Q(c_Q) \notin \mathcal{E}$. По индуктивному предположению, $\varphi(Q(c_Q)) = 0$. ($Q(c_Q)$ замкнута!). Это означает, что $\varphi(P)(\xi) = 0$ если $\varphi(x)(\xi) = \bar{c}_Q$, в противоречие с предложением $\varphi(P) = 1$.

Теперь предположим, что $\varphi(P) = 0$, но $P \in \mathcal{E}$, придем к противоречию.

Так как $\varphi(P) = 0$, для некоторого ξ имеем $\varphi(Q)(\xi) = 0$. Найдем постоянный терм t из условия $\varphi(x)(\xi) = \bar{t} = \varphi(t)$. Очевидно, x не ограничивает t в Q, так что по лемме 4.8

$$0 = \varphi(Q(x))(\xi) = \varphi(Q(t))$$

откуда $Q(t) \notin \mathcal{E}$ по индуктивному предположению, и $\neg Q(t) \in \mathcal{E}$ в силу полноты.

С другой стороны, если $P \in \mathcal{E}$, то есть $\forall x\, Q(x) \in \mathcal{E}$, то по аксиоме Д.3.: $\forall x\, Q(x) \to Q(t)$ получаем $\mathcal{E} \vdash Q(t)$. Это противоречит совместности $\mathcal{E}$ и результату предыдущего абзаца.

σ_6) $\underline{P = \exists x\, Q}$. Этот случай сводится к предыдущему с помощью аксиомы Д.2., и мы опускаем его разбор.

7.9. <u>Доказательство леммы 7.5</u>. Чтобы сложить множество $\mathcal{E}$ в полное совместное множество $\mathcal{E}'$, мы должны будем воспользоваться <u>леммой Цорна</u> (которая здесь будет применяться без доказательства) и <u>леммой с дедукции для языка L_φ</u>, которая будет доказана в следующем пункте.

Лемма Цорна будет применяться к множеству

$$C\mathcal{E} = \left\{ \begin{matrix} \text{множество множеств формул } \mathcal{E}', \\ \text{содержащих } \mathcal{E} \text{ и непротиворечивых} \end{matrix} \right\},$$

которое упорядочено включением.

Проверка условий леммы Цорна. Пусть такое подмножество в $C\mathcal{E}$, что для любых α, β либо $\mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}'_\beta$, либо $\mathcal{E}'_\beta \subset \mathcal{E}'_\alpha$. Тогда объединение $\bigcup \mathcal{E}'_\alpha$ принадлежит $C\mathcal{E}$. Действительно, иначе $\bigcup \mathcal{E}'_\alpha$ было бы противоречиво. Существовал бы вывод противоречия из конечного числа формул. Пусть они содержатся в $\mathcal{E}'_\alpha, \ldots, \mathcal{E}'_{\alpha_n}$. Среди $\mathcal{E}'_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{E}'_{\alpha_n}$ есть множество, содержащее остальные $n-1$; оно было бы противоречиво, вопреки предположению.

Вывод из леммы Цорна: в множестве $C\mathcal{E}$ существует максимальный элемент, то есть такое непротиворечивое множество $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$, что если $Q \notin \mathcal{E}'$, то $\{\mathcal{E}', Q\}$ противоречиво.

Я утверждаю, что $\mathcal{E}'$ полно. Действительно, предположим, что P замкнута, $P \notin \mathcal{E}'$, $\neg P \in \mathcal{E}'$ и придем к противоречию. Из максимальности $\mathcal{E}'$ следует, что $\{\mathcal{E}, P\} \vdash R$, $\{\mathcal{E}, \neg P\} \vdash R$, где R - любая формула. По лемме с дедукции (см. п. 7.10), $\mathcal{E} \vdash P \to R$, $\mathcal{E} \vdash \neg P \to R$. По аксиоме С.5.: $(P \to R) \to ((\neg P \to R) \to R)$. находим $\mathcal{E} \vdash R$ - это противоречит совместности $\mathcal{E}$.

7.10. Лемма о дедукции. Если $\mathcal{E} \supset Ax$ и формула P замкнута, то из $\{\mathcal{E}, P\} \vdash Q$ следует, что $\mathcal{E} \vdash (P \to Q)$.

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_n = Q$ - вывод Q из $\{\mathcal{E}, P\}$. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ доказательство ничем не отличается от соответствующего доказательства в языке L_0 (см. п. 6.5 главы I).

Пусть $n \geq 2$ и для выводов длины $\leq n-1$ лемма доказана. По определению вывода, Q_n либо принадлежит $\{\mathcal{E}, P\}$, либо выводится из МР из Q_i, Q_j, $i < j \leq n-1$, либо, наконец, имеет вид $\forall x\, Q_j$ для $j \leq n-1$. Все случаи, кроме последнего, разбираются как в L_0. Пусть $Q_n = \forall x\, Q_j$. Вывод $(P \to \forall x\, Q_j)$ из $\mathcal{E}$ тогда получается так:

Вывод $P \to Q_j$ из $\mathcal{E}$ (индуктивное предположение);

$\forall x\, (P \to Q_j)$ (обобщение);

$\forall x\, (P \to Q_j) \to (P \to \forall x\, Q_j)$ (аксиома Д.3, применимая в силу замкнутости P);

$P \to \forall x\, Q_j$ (МР к двум последним формулам).

7.II. Доказательство леммы 7.6. Чтобы построить язык L_1' с достаточным алфавитом для непротиворечивого множества формул $\mathcal{E}'$, содержащего $\mathcal{E}$ и Ax_1', поступим самым естественным образом.

а) Добавим к алфавиту языка L_1 множество новых констант той же мощности, что и алфавит L_1. Получится язык L_1'.

б) Рассмотрим множество формул $\mathcal{E} \cup Ax_1'$ в языке L_1', где Ax_1' - всеологические аксиомы языка . Оно непротиворечиво. Действительно, если бы существовал вывод противоречия из $\mathcal{E} \cup Ax_1'$ в L_1', то следующая

процедура превратилы бы его в вывод противоречия из $\mathcal{E}$ в L_1 : возьмем конечное множеотво всех новых констант, входящих в формулы этого вывода, и заменим эти константы старыми переменными (из L_1), не входящими в формулы этого вывода. Легко проверить, что вывод противоречия останется выводом противоречия и будет проходить целиком в L_1 .

в) В $\mathcal{E} \cup Ax'_1$ возьмем множество формул $P(x)$, содержащих ровно одну свободную переменную. Для каждой такой формулы P выберем свою новую константу c_P , определим формулу

$$R_P : \quad \neg \forall x\, P(x) \to \neg P(c_P)$$

и положим окончательно

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup Ax'_1 \cup \{R_P\}$$

Очевидно, осталось проверить только, что $\mathcal{E}'$ непротиворечиво. Если бы из $\mathcal{E}'$ выводилось противоречие, то оно выводилось бы с участием конечного числа формул R_P . Поэтому достаточно проверить, что добавление <u>одной</u> формулы R_P не может привести к противоречию, если R_P добавляется к совместному множеству. Очевидным образом, меняя обозначения, можно считать, что это совместное множество и есть $\mathcal{E} \cup Ax'_1$.

Предположим обратное: $\{\mathcal{E} \cup Ax'_1, R_P\}$ противоречиво. Тогда, в частности, $\{\mathcal{E} \cup Ax'_1, R_P\} \vdash \neg R_P$ м, по лемме о дедукции, $\{\mathcal{E} \cup Ax'_1\} \vdash R_P \to \neg R_P$. Тавтология $(R_P \to \neg R_P) \to \neg R_P$ и МР дают

$$\{\mathcal{E} \cup Ax'_1\} \vdash \neg R_P = \neg(\neg \forall x\, P(x) \to \neg P(c_P))$$

Тавтология $\neg(P \to Q) \to P$ и МР теперь дают

$$\{\mathcal{E} \cup Ax'_1\} \vdash \neg \forall x\, P(x)$$

С другой стороны, $P(x) \in \mathcal{E}$, значит, по $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \vdash \forall x\, P(x)$. Сопоставляя это с последней формулой предыдущего абзаца, получаем противоречие.

7.12. Доказательство леммы 7.7. Пусть L_1 - язык, $\mathcal{E}$ - множество формул в нем. Вложим $\mathcal{E}$ в полное непротиворечивое множество $\mathcal{E}'$, затем к $(L_1, \mathcal{E}')$ применим лемму 7. Получившиеся язык и множество формул обозначим через L_1^*, $\mathcal{E}^*$. Положим, далее, по индукции

$$(L_1^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)}) = (L_1, \mathcal{E});\ (L_1^{(i+1)}, \mathcal{E}^{(i+1)}) = \{L_1^{(i)*}, \mathcal{E}^{(i)*}\}$$

и, наконец,

$$L_1^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^{(i)}, \quad \mathcal{E}^{\infty} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{E}^{(i)}.$$

Множество $\mathcal{E}^{(\infty)}$ непротиворечиво, ибо иначе вывод противоречия получался бы "на конечном уровне", а все $\mathcal{E}^{(i)}$ совместны. Оно полно, ибо каждая замкнутая формула $L_1^{(\infty)}$ записывается в алфавите $L_1^{(i)}$, для какого-то i, $\mathcal{E}^{(i+1)}$ содержит пополнение $\mathcal{E}^{(i)}$ в $L_1^{(i)}$. Наконец, алфавит $L_1^{(\infty)}$ достаточен для $\mathcal{E}^{(\infty)}$ по тем же соображениям. ■

Этим заканчивается доказательство теоремы 7.1. ■

Некоторый недостаток теоремы 7.1. состоит в том, что интерпретация $\mathcal{E}$ строится в искусственном множестве M, состоящем из слов в специально оконструированном алфавите. Между тем для содержательного обсуждения, скажем, парадокса Сколема, интересно иметь модель, элементы которой являются обыкновенными множествами, интерпретация $\in$ - обыкновенным отношением включения и т.п.

Такую модель можно получить, если подходящая "естественная" модель большеи мощности задана, "урезая" ее надлежащим образом, как показывает следующая

7.13. Теорема. Пусть $\mathcal{S}$ - некоторая интерпретация языка L_1, во множестве M. Тогда существует подмножество $M' \subset M$, мощность которого не превосходит мощности алфавита L_1, и интерпретация $\mathcal{S}'$ языка L_1 во множестве M', со следующими свойствами:

а) ограничение $\mathcal{S}$ на M' совпадает с $\mathcal{S}'$;

б) множество $\mathcal{S}$ - истинных формул языка L_1 совпадает с множеством $\mathcal{S}'$ - истинных формул.

Доказательство. Для каждой формулы p языка L_1 и каждого значения истинности $t = 0, 1$, которое $\mathcal{S}(p)$ принимает в точках M^x, выберем по точке $\xi_p^{(t)} \in M^x$ так, чтобы

$$\mathcal{S}(p)(\xi_p^{(t)}) = t$$

Положим

M_0 = множество, состоящее из $\mathcal{S}(c)$ для всех констант c, и $\mathcal{S}(x)(\xi_{\mathcal{S}}^{(t)})$ для всех переменных x, формул p и значении t.

Далее, пусть $\bar{M} \subset M$ - некоторое подмножество. Положим $\bar{M}^* = M \cup$ (множество значений $\mathcal{S}(f)(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, когда f пробегает символы операций ранга n, а $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ - n-ка элементов из $\bar{M}$, n любое).

Наконец, положим $M^{(i+1)} = M^{(i)*}$, $i \geqslant 0$ и

$$M' = \bigcup_{i=0}^{\infty} M^{(i)}.$$

Мощность M', очевидно, не превосходит мощности (бесконечного) алфавита L_1. Нетрудно убедиться, что существует интерпретация $\mathcal{S}'$ языка L_1, в M', являющаяся ограничением $\mathcal{S}$. Действительно, не совсем очевидна разве лишь возможность интерпретировать термы, не выходя за пределы M', но это без труда следует из того, что значения всех $\mathcal{S}(f)$ на $M' \times \ldots \times M'$ по конструкции принадлежат M'.

Наконец, для каждой формулы P множества значений истинности, применяемых $\mathcal{S}(P)(\xi)$ при $\xi \in M'^{(*)}$ или при $\xi \in M'^{\times}$, одинаковы, ибо по конструкции $\xi^{(t)} \in M'^{\times}$ для всех P, t. Поэтому и множества $\mathcal{S}$-истинных и $\mathcal{S}'$-истинных формул совпадают.

8. Метаматематические свойства языков L_1.

"I know what you're thinking about", said Tweedledum: "but it isn't so, nohow"
"Contrariwise", continued Tweedledee, "if it was so, it might be; if it were so, it would be: but as it isn't, it ain't. That's logic"
L. Carrol Through the Looking Glass.

8.1. Как неоднократно указывалось, языки, в том числе класса L_1, призваны формализованно описывать те или иные части интуитивной математики. Этот параграф будет посвящен обсуждению того, в какой мере это описание можно считать

адэкватным, и выяснению принципиальных границ формализации на материале парадокса Сколема.

8.2. Достаточность логических принципов, заложенных в языки класса L_1. Логические принципы - это логические аксиомы Ax_1, и правила вывода МР, Gen. Аргументом в пользу их достаточности может служить теорема 6.I. о совпадении содержательной истинности и выводимости (коль скоро мы убедимся, что языки L_1 настолько богаты выразительными средствами, что способны описывать значительные фрагменты математики).

Все же принятая нами система логики открыта для критики со многих точек зрения.

Конструктивистская критика считает эту логику слишком щедрой: аксиома $\neg\neg P \rightarrow P$ является для нее безусловно неприемлемой, во всяком случае, при интерпретации в (потенциально) бесконечных областях. Ряд других принятых нами спооообов рассуждений также лишены для нее смысла.

Возможны также точки зрения, связанные с отказом от ограничения двузначностью истинноотных функций. Среди многих обсуждавшихся альтернатив автору представляются особенно интересными две.

Одна будет описана ниже в связи с континуум-проблемой: при ней значениями истинности служат элементы специальных булевых алгебр, например, измеримые подмножества вероятностных пространств (по модулю меры нуль).

Другая альтернатива подсказывается, например, языком фрагмента квантовой механики в варианте Фейнмана (интегралы по траекториям). Этот язык можно рассматривать как состоящий из

двух слоев. Высказываниям типа "электрон, испущенный в точке A, прошел через щели I и 2 и попал в точку B" сопоставляется "комплексное значение истинности" - амплитуда. Правила перемножения и сложения амплитуд аналогичны правилам вычисления функций истинности для конъюнкций или дизъюнкций высказываний.

Здесь нет возможности обсуждать эту тему подробнее. Автор склонен думать, однако, что для адэкватной трактовки квантовой механики окажется необходимой перестройка логических принципов, а не только совершенствование чисто вычислительных средств традиционной математики.

8.3. Достаточность выразительных средств языков L_1.

Анализ конкретных текстов, посвященных данной математической дисциплине, обычно позволяет сконструировать язык класса L_1, дающий возможность формально записывать основные аксиомы, рассуждения и теоремы этой дисциплины. Как правило, это не является тривиальной задачей, и для проведения такого анализа в каждом случае требуются значительные навыки. Общим принципом анализа посвящена книга Rosser J B Logic for mathematicians, NJ 1953

Особенно детально исследованы языки теории множеств, на базе которой имеется принципиальное построение всей интуитивной математики. Мы остановимся подробно на одном из стандартных языков теории множеств ниже.

8.4. Непротиворечивость. Одним из основных мотивов для создания теории языков было желание выделить такие типы рассуждений о множествах, которые заведомо не приводят к противо-

речию. После этого сложилась парадоксальная ситуация, ибо было установлено, что непротиворечивость, скажем, системы аксиом теории множеств (и даже только арифметики), может быть доказана только средствами интуитивной математики, оправдания которых и хотели первоначально достичь.

По этому поводу можно заметить следующее.

Вопрос о непротиворечивости вообще не может всерьез ставиться для интуитивной математики; противоречие в конкретном рассуждении не способно распространиться на все здание математики и ведет лишь к признанию ложности нескольких ближайших посылок. Только в жестоко формализованной системе вывод P и $\neg P$ немедленно приводит к выводу любой формулы и тем самым к разрушению этой системы; в интуитивной математике этот механизм просто отсутствует.

С другой стороны, анализ противоречий, обнаруженных во многих предложенных формальных системах, которым посвящались целые книги, также обычно не приводят к полному крушению принципов, заложенных в эти системы. Как правило, оказываются необходимыми лишь те или иные локальные изменения. Плодотворная идея полезна, даже если при ее разработке нарушались правила гигиены.

Можно думать, что вопрос о <u>непротиворечивости средств описания</u> тесно связан с вопросом о <u>полноте описания</u>. Вероятно, безнадежно пытаться предусмотреть заранее все те способы конструкции множеств, которые, с одной стороны, не ведут к противоречию, а с другой - могут оказаться полезными в интуитивной математике.

Ниже мы на конкретном разборе языка $L_1\ Set$ и аксиом Цермело-Френкеля для теории множеств попытаемся прояснить соотношение между интуитивным и формальным описанием и дать аргументы в пользу принципиальной неполноты последнего.

8.5. Язык $L_1\ Set$. Мы введем настолько богатый алфавит, что несколько традиционных аксиом существования сразу будут выглядеть как определения, каковыми они по существу и являются в интуитивной математике.

Алфавит. Константа 0 (содержательно, "пустое множество").
Переменные $x, y, z, u, v, \ldots$ (счетное множество).
Отношения: $\in$ (ранга 2), $=$ (равенство, ранга 2).
Операции: $\{\ \}$ ("образование пары" ранга 2), $\bigcup$ (объединение элементов, ранга I), P_w (множество подмножеств, ранга I).

Мы будем также считать заданной с самого начала некоторую интерпретацию φ языка $L_1\ Set$ в множестве M. Мы будем предполагать, что элементами M являются множества и что

$\varphi(\in)$ - включение,

$\varphi(=)$ - тождество.

Остальные свойства интерпретации будут вытекать из требования, чтобы специальные аксиомы языка $L_1\ Set$ были истинными. Аксиомы будут вводиться по очереди и обсуждаться по следующему плану:

А. Словесная интуитивная формулировка.

Б. Формула языка $L_1\ Set$, отвечающая А.

В. Условие на M, накладываемое требованием, чтобы формула Б. была истинной в интерпретации φ.

6xx-1977

После этого мы сравним А. и В., особенно в случае, когда M – счетная модель (см. п. 7.18), чтобы разобраться в парадоксе Сколема.

8.6. Аксиома объемности $\mathcal{E}x$.

А. Множество однозначно определяется своими элементами.

Б. $\mathcal{E}x : \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y))$

В. $\varphi(\mathcal{E}x) = 1$, если и только если всякое множество из M однозначно определяется своим пересечением с M .

Утверждение В. настолько важно, что мы подробно проведем его доказательство, хотя оно и очень простое.

Для любого $\mathbf{X} \in M$ будем писать $\mathbf{X}_M = \mathbf{X} \cap M$

Пусть сначала $\varphi(\mathcal{E}x) = 1$ и пусть $X_M = Y_M$. Покажем, что тогда $X = Y$.

Выберем две разных переменных x, y и такую "точку" ξ (см. п. 2.3), что $\varphi(x)(\xi) = X$, $\varphi(y)(\xi) = Y$. По правилам вычисления функций истинности находим

$$\varphi(\forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y))(\xi) = 1 ,$$

потому что $\varphi(z \in x \leftrightarrow z \in y)(\xi') = 1$,

при всех ξ',

изменениях ξ по z , что в свою очередь равносильно условию $X_M = Y_M$. Теперь, комбинируя это с условием $\varphi(\mathcal{E}x)(\xi) = 1$, получаем: $\varphi(x = y)(\xi) = 1$ то есть $\varphi(x)(\xi) = \varphi(y)(\xi)$, или $X = Y$.

Наоборот, если из $X_M = Y_M$ всегда следует, что $X = Y$, то, просматривая эти рассуждения в обратном порядке, получаем, что $\varphi(\mathcal{E}x) = 1$.

Обсуждение. Различие между А. и В. разительно; если в M есть несчетное иножество X (см. ниже), а сама модель счетна, то X_M "гораздо меньше" X и, тем не менее, должно полностью определять X.

Заметим, что положение дел нельзя спасти, "заменив" все X на соответствующие X_M. В самом деле, изменение даже одного $X \in M$ меняет все множество M и, таким образом, затрагивает все остальные множества Y_M.

Таким образом, "не уловимые" средствами языка элементы из $X - X_M$ тем не менее оказывают сильнейшее влияние на математику модели, обеспечивая выполнение ее аксиом.

Несколько следующих аксиом являются по существу определениями константы и операций, и мы ограничимся самыми краткими пояснениями.

8.7. Аксиома пустого множества N.

А. Пустое иножество не имеет элементов.

Б. $\forall y\ (\neg(y \in 0))$

В. $\varphi(N) = 1$, если и только если $\varphi(0) \cap M$ пусто. Иными словами, $\varphi(0)$ — "M —пустое" множество, элементы не из M в $\varphi(0)$ вполне могут быть! Пусть $\varphi(0) = \emptyset$; Это множество определено однозначно в силу аксиомы Ex.

8.8. Аксиома пары P.

А. Для любых двух множеств x, y существует множество $\{x, y\}$, элементами которого являются в точности x и y.

Б. $\forall x \forall y \forall z\ (z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \vee z = y)$

В. Если $X, Y \in M$, то в M есть множество $\{X, Y\}$, пересечение которого с M состоит только из X и Y; оно (как функция от X, Y) является интерпретацией $\{\,,\}$.

(Дальше мы будем писать $\{x\}$ вместо $\{x, x\}$).

8.9. Аксиома объединения $\mathcal{U}$.

А. Для любого множества x существует множество $\mathcal{U}(x)$ – объединение тех элементов x, которые являются множествами.

Б. $\forall x \forall y (y \in \mathcal{U}(x) \leftrightarrow \exists z (y \in z \wedge z \in x))$

В. Упражняйтесь.

8.10. Аксиома степени (или множества подмножеств) P_w.

А. Для любого множества x существует множество $P_w(x)$, элементами которого являются все подмножества x.

Б. $\forall x \forall y (y \in P_w(x) \leftrightarrow \forall z (z \in y \rightarrow z \in x))$

В. Для любого множества $X \in M$ существует такое множество $P'_w(X)$ в M, что $P'_w(X)_M$ состоит из тех элементов $Y \in M$, для которых $Y_M \subset X_M$, P'_w есть интерпретация P_w.

Расхождение между А. и В., пожалуй, еще более сильно, чем для аксиомы объемности!

8.11. Аксиома бесконечности I.

А'. Существует бесконечное множество.

Здесь мы впервые сталкивается со случаем, когда перевод интуитивной формулировки на формальный язык существенно неоднозначен. Принятое уточнение словесной формулировки примерно таково:

А. Существует множество, которое содержит $\phi, \{\phi\}$, $\{\phi\} \cup \{\{\phi\}\}$, и т.д. (индуктивно: вместе со всяким элементом y оно содержит $\mathcal{U}(\{y, \{y\}\}) = y \cup \{y\}$)

Б. $\exists x (0 \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \mathcal{U}(\{y, \{y\}\}) \in x))$

В. Упражняйтесь.

8.12. Мы опускаем формулировку еще трех или четырех аксиом, ибо характер "неформализуемости" виден уже сейчас.

Мораль.

Интуитивный смысл слова "все" не может быть полностью передан языковыми средствами. Если заменить его словами "все (объекты), которые можно описать средствами данного языка", то синтаксически истинные (ложные) утверждения останутся синтаксически истинными (ложными).

Ряд логиков делают отсюда вывод, что интуитивное понимание слова "все" (скажем, в контексте "все подмножества натурального ряда") вообще лишено смысла.

Для других мыслителей это означает только, что язык как средство общения обладает принципиальными ограничениями.

Поскольку математикам все же удается добиться взаимопонимания (и даже объяснить друг другу смысл фраз типа "моя интуиция в этом пункте отлична от Вашей"!), это поднимает интересный вопрос о внеязыковых каналах общения.

Если не верить в парапсихологию, следует считать, что общность "интуиции" объясняется общностью структуры головного мозга у разных людей. Опытные вычислители знают, что при работе сложных программ на ЭВМ (шахматная игра, распознавание образов ...) создается ощущение, что у программы есть своя

неформализуемая "интуиция", понимание которой требует подчас значительных усилий и которая может не совпадать с "интуицией" автора программы.

Точно так же расхождение интуитивных представлений у людей может обуславливаться индивидуальными физиологическими особенностями. С большой остротой эту точку зрения выразил Адамар: "Кто знает, мое различие мнений с Лебегом об идеализме и реализме - не обуславливается ли оно некоторой разностью осмотического давления P_h в той или иной категории клеток моего мозга и мозга Лебега?"

Таким образом, приятие или неприятие, скажем, принципа исключенного третьего Брауэром или Гильбертом, доставляет идеальную психологическую модель решения, которое не имеет никаких внешних мотивировок, но сопровождается чувством глубокой внутренней правоты. Возможно, этот эффект более распространен, чем принято думать, и играет значительную роль в тех случаях, когда возможность подобрать внешние причины создает иллюзию понимания источника разногласий.

§ 9. Структура формальной математики.

В этом параграфе собраны некоторые замечания о том, как выглядит математика, записанная, скажем, на языке $\mathcal{L}_1 Set$.

9.I. Перевод. Очень многие современные математические тексты написаны на языке наивной теории множеств; остальные легко поддаются переводу на такой язык. Последующий перевод на формальный язык требует подготовительной работы, которую мы здесь не проделали: формализация произведения $X \times Y$,

отображений как подмножеств в $X \times Y$, теории кардиналов и ординалов. Этот материал можно найти в стандартных курсах.

Еще один этап подготовительной работы - формализация "определений" и обсуждение удобных средств расширения языка (скажем, введения новых констант для обозначения объектов типа π, для обозначения объектов, существование и единственность которых мы доказали). Смотри по этому поводу книги Мендельсона и Россера.

9.2. Потенциальная математика. Научившись вышеупомянутым приемам перевода, мы можем представлять себе, скажем, формальную теорию топологический пространств следующим образом. Присоединим к системе аксиом языка L, Set (включая аксиому выбора!), некоторое множество формул $Top(x_i)$, каждая со свободной переменной x_i, в содержательной интерпретации означающих " x - топологическое пространство". Обозначим получившееся множество формул через $\mathcal{E}$. Все выводимые из $\mathcal{E}$ формулы отвечают теоремам формальной теории, а выводы - доказательствам теорем. Наложение на топологию дополнительных условий - хаусдорфовость, метризуемость, - равносильно присоединению новых формул к $\mathcal{E}$.

9.3. Реальная математика. Лишь небольшая часть теорем формальной теории отвечает теоремам реальной математики, и не только в том смысле, что число теорем последней в любой данный момент конечно, тогда как число первых бесконечно. Мы чувствуем, что подавляющее большинство формально выводимых формул абсолютно неинтересно, и лишь ничтожная доля их представляет настоящие математические открытия.

Было бы любопытно попытаться найти какие-то характеристики интересных формул. Одной из них могла бы быть малость отношения "длина формулы": "длина ее кратчайшего вывода". Действительно, многие замечательные факты имеют короткую формулировку и очень длинное доказательство. (Рекорд, возможно, принадлежит двум проблемам Бернсайда в теории конечных групп). Другую характеристику подсказывает наблюдение, что после установления некоторых важных результатов из них легко получается целый спектр следствий, которые не были известны раньше или получались лишь с большим трудом. Это означает, что после добавления такой формулы к $\mathcal{E}$ длины кратчайших выводов других формул резко сокращаются.

Важно не забывать, однако, что отбор интересных фактов происходит и на другом конце (то есть в начале) теории: в выборе формул-определений, которые мы присоединяем к аксиомам, чтобы начать делать выводы. Можно с уверенностью сказать, что кристаллизация определений комплексного числа, группы, топологического пространства сыграла в математике бо́льшую роль, чем тысячи теорем, даже тонких и трудных, но относящихся к не столь существенным объектам.

Возможно ли найти какие-то формальные признаки "хороших определений", или здесь отвлечение от семантики делает задачу безнадежной?

ГЛАВА III

ПРОБЛЕМА КОНТИНУУМА

§ I. Постановка задачи. Неформальные объяснения.

I.I. Кантору принадлежат фундаментальные открытия в теории бесконечных множеств: существование шкалы их мощностей и неограниченность этой шкалы.

Напомним, что два множества называются равномощными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие. Напомним, далее, что если даны два множества M и N, то обязательно одно из них равномощно подмножеству другого, а если это так в обе стороны, то M и N равномощны.

Мощность $|M|$ есть класс равномощных множеств, к которому принадлежит M. Согласно сказанному, бесконечные мощности упорядочены: для любых двух из них $|M|$, $|N|$ верно одно из неравенств $|M| \leq |N|$ или $|N| \leq |M|$, а если верны оба, то $|M| = |N|$.

I.2. Теорема. (Кантор) - Мощности вполне упорядочены; в частности, для каждой мощности существует "непосредственно следующая за ней большая" (то есть такая, что строго промежуточных мощностей не существует). ■

Принятые обозначения: $\aleph_0$ - первая бесконечная мощность (счетных множеств); $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ - следующие за ней, определяются также мощности с трансфинитными индексами, на которых мы здесь не можем останавливаться. Это - "шкала алефов".

I.3. Теорема. (Кантор) - Пусть $P(M)$ - множество всех подмножеств M. Тогда $|P(M)|$ строго больше $|M|$

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $|P(M)| = |M|$ (ибо M вкладывается в $P(M)$: каждому элементу M сопоставляется подмножество, состоящее из этого элемента). Значит, должно существовать отображение M на все $P(M)$. Пусть при этом отображение элементу $\bar{\bar{x}} \in M$ ставится в соответствие подмножество $M_{\bar{\bar{x}}} \subset M$. Построим явно подмножество N, не входящее в $\{M_{\bar{\bar{x}}}\}$, вопреки предположению. Положим:

$$N = \{z \mid z \in M_z\} \subset M$$

Если предположить, что $N = M_{\bar{\bar{x}}}$ для некоторого $\bar{\bar{x}}$, то противоречие получится при рассмотрении положения $\bar{\bar{x}}$ относительно N

$$\left.\begin{array}{l} x \in N \Rightarrow x \in M_x \Rightarrow x \notin N \\ x \notin N \Rightarrow x \notin M_x \Rightarrow x \in N \end{array}\right\} \text{ противоречие. } \blacksquare$$

По аналогии с конечными мощностями, принято писать $|P(M)| = 2^{|M|}$. Мощность $2^{\aleph_0}$ = мощность множества подмножеств $\mathbb{Z}$ = мощность множества вещественных чисел называется континуумом.

Проблема континуума - это следующий вопрос:

I.4. Каково место континуума на шкале алефов?

Кантор высказал следующее предположение:

I.5. Гипотеза континуума (CH). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Все попытки доказать или опровергнуть его оказались

безуспешными. Гедель и Коэн выяснили причину безуспешности, установив следующие результаты:

I.6. Теорема. а) Отрицание СН не выводимо из остальных аксиом теории множеств, если они непротиворечивы (Гедель).

б) СН не выводима из остальных аксиом теории множеств, если они непротиворечивы (Коэн). ∎

Мы обсудим эти результаты в конце главы, а сейчас объясним идею доказательства теоремы Коэна, ослабленная модель которого будет подробнее изложено в следующих параграфах. Это доказательство отличается от первоначального и принадлежит Д.Скотту и Р.Соловью.

I.7. Можно сформулировать СН как следующее утверждение: "Любое бесконечное подмножество вещественных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума". Соответственно, мы будем излагать теорему Коэна на языке вещественных чисел (и функций, функционалов ...), а не теории множеств: доказательство становится тогда несколько нагляднее.

Идея Скотта и Соловья состоит в том, чтобы построить нестандартную модель вещественных чисел: случайные функции на очень большом вероятностном пространстве.

Точнее, пусть

I = множество мощности строго больше $2^{\aleph_0}$;

$\Omega = [0,1]^I$ с мерой Лебега;

$\overline{R}$ = множество случайных величин на Ω, то есть множество вещественно-значных измеримых функций на Ω.

Соловей и Скотт доказывают следующий результат (формулировка которого будет значительно уточнена в следующих параграфах).

I.8. Теорема. а) В $\overline{\mathbb{R}}$ существует подмножество мощности, промежуточной между $|\mathbb{Z}|$ и $|\overline{\mathbb{R}}|$, то есть СН в модели $\overline{\mathbb{R}}$ не "истинна".

б) Для $\overline{\mathbb{R}}$ "истинны" все аксиомы теории вещественных и все следствия из них.

Следствие. СН не выводима из аксиом теории вещественных чисел.

I.9. Первоначальные объяснения. а) Конечно, подмножество в $\overline{\mathbb{R}}$ промежуточной мощности построить нетрудно. Пусть $J \subset I$ - несчетное подмножество мощности, строго меньшей, чем $|I|$.

Для любого $i \in I$ определим случайную величину $\overline{x}_i : \Omega \to \mathbb{R} : x_i(\omega) = i$-я координата ω в $[0,1]^I$. Тогда множество $\{\overline{x}_j\}_{j \in J} \subset \Omega$ имеет промежуточную мощность $|J|$.

б) При проверке аксиом $\mathbb{R}$ для $\overline{\mathbb{R}}$, однако, мы встречаемся с существенной трудностью: при "естественном понимании" аксиом большинство из них перестает быть верным или теряют смысл.

Рассмотрим следующий пример: в $\mathbb{R}$ нет делителей нуля, то есть если $xy = 0$, то либо $x=0$, либо $y=0$.

Это не так в $\overline{\mathbb{R}}$: вполне возможно, что ненулевые $\overline{x}$ и $\overline{y} \in \overline{\mathbb{R}}$ имеют множества нулей, в объединении дающие Ω, тогда $\overline{x}\overline{y} = 0$.

Верно, однако, следующее утверждение: "если $\bar{x}\bar{y}=0$, то при каждом испытании $\omega \in \Omega$ с вероятностью I либо $\bar{x}(\omega)=0$, либо $\bar{y}(\omega)=0$".

Таким образом, возникает идея: по-новому определить истинность утверждения об $\bar{\mathbb{R}}$ (то есть формулы соответствующего формального языка) - как "истинность при каждом испытании с вероятностью единица".

Замечательно, что эту идею удается провести во всех деталях. Эта конструкция и составляет предмет последующего изложения. Конечно, при таком новом истолковании "истинности" смысл большинства "истинных" утверждений меняется; в том числе меняется смысл СН, и наше наивное рассуждение о том, почему СН ложна в этой модели, перестает быть применимым. Тем не менее, его основной замысел сохраняется.

§ 2. Язык L_2 Real и его стандартная интерпретация.

2.I. Этот параграф посвящен описанию конкретного языка второго порядка, ориентированного на теорию вещественных чисел. На этом языке мы будем записывать гипотезу континуума ГН и аксиом.

Нужно сразу же предупредить, что язык L_2 Real значительно беднее языка теории множеств; поэтому невозможность вывести СН средствами этого языка, которую мы докажем, еще далека от интуитивного представления о "недоказуемости СН". Однако основные принципы нестандартной интерпретации и механизм нарушения СН при использовании этого языка становится очень

вмнуклыми. Распространение этих конструкций на случай более богатых языков (L_ω Real - язык "бесконечного" уровня, или лучше L_1 Set) уже не требует введения существенно новых идей.

Перед чтением этого параграфа рекомендуется перечитать § I гжавы П.

2.2. Алфавит L_2 Real . Он состоит из следующих множеств символов:

а) Символы переменных ($x, y, z, \ldots$),
символы (переменных) функций ($f, g, h,$);
символы констант $0, 1$,

б) Символы операций $+, \cdot$ (ранга 2)

в) Символы отношений $=, \leq$ (ранга 2)

г) Связка, кванторы, скобка, запятые - те же, что в языке L_1 .

2.3. Синтаксис L_2 Real .

а) Термы. Символы переменных $x, y, z, \ldots$ и констант $0, 1$ суть термы.

Далее, если t, t_1, t_2 - термы, f - функция, то $f(t)$, $t_1 \cdot t_2$, $t_1 + t_2$ - термы.

Все термы получаются так.

б) Атомарные формулы. Атомарные формулы - это выражения вида $t_1 = t_2$ и $t_1 \leq t_2$, где t_1, t_2 - любые термы.

в) Формулы. Атомарные формулы суть формулы. Если Q , Q_1 , Q_2 - формулы, $*$ - одна из связок, то $\neg(Q), (Q_1)*(Q_2)$ формулы.

Если Q - формула, x - переменная, f - функция, то $\forall x(Q), \forall f(Q), \exists x(Q), \exists f(Q)$ - формулы. Все формулы получаются так.

2.4. Читателю рекомендуется самостоятельно перенести на случай языка $L_2\ Real$ понятия свободного и связанного вхождения переменных (обратить внимание на переменные функции!). Аналогично переносятся: понятие "переменная (x или f) не ограничивает терм t в формуле P " (см. п. I.6. главы II) и операция подстановки термов $t_1, \quad , t_n$ вместо свободных вхождений переменных $x_1, \quad , x_n$ в P (см. п. 4.7 главы II).

Существует, однако, еще одна полезная операция подстановки; если P - формула, f и g - символы функций, то, записывая P в виде $P(f)$, мы можем обозначить через $P(g)$ результат подстановки g вместо всех свободных вхождений f в P. (Заметим, что символы функций не являются термами!). Если все эти вхождения g остаются свободными, то f не ограничивает g в P.

2.5. <u>Стандартная интерпретация</u>. Это интерпретация языка $L_2\ Real$ во множестве R вещественных чисел. Опишем ее по тому же плану, который был принят в § 2 главы II.

А) <u>Первичные отображения</u>. Константы $0, 1$ интерпретируются как вещественные 0 и I; $+$, - как сложение и умножение, $=$, $\leq$ - как равенство и (нестрогое) неравенство соответственно.

Б) <u>Вторичные отображения</u>. Здесь определение несколько усложняется, потому что нужно, кроме термов, интерпретировать символы функций.

Пусть $\mathbb{R}^{(2)}$ - множество <u>всех</u> функций на $\mathbb{R}$ с вещественными значениями. Роль множества M^X из § 2 главы II здесь будет играть множество

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{отображения множества символов переменных} \\ \text{в } \mathbb{R} \end{array} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \text{отображения множества символов функций} \\ \text{в } \mathbb{R}^{(2)} . \end{array} \right\}$$

Таким образом, задание одной точки $\xi \in \mathcal{M}$ определяет для каждой переменной x <u>вещественное число</u> $x^{\xi} \in \mathbb{R}$ и для каждой функции f вещественную функцию $f^{\xi} \in \mathbb{R}^{(2)}$ (Мы пишем здесь x^{ξ} вместо $\varphi(x)(\xi)$, ибо интерпретация фиксированна, и незачем вводить ее символ).

Теперь мы можем продолжить описание стандартной интерпретации:

а) <u>Термы</u>. Пусть t - терм, $\xi \in \mathcal{M}$; тогда t^{ξ} есть вещественное число. определяемое очевидной индукцией (ср. § 2 главы II).

б) <u>Атомарные формулы</u>. Если P есть $t_1 \leq t_2$, то ее функция истинности $|P|$ определяется как отображение $\mathcal{M} \to \{0,1\}$

$$|P|(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } t_1^{\xi} \leq t_2^{\xi} \text{ в } \mathbb{R} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Аналогичное определение для $t_1 = t_2$.

в) <u>Формулы</u>. Действие отрицаний, связок и кванторов определяется точно так же, как в языках L_0, L_1.

Приведем типичный случай:

$$|\forall f P|(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ если } |P|(\xi') = 1 \\ \quad \text{для всех } \xi' \text{, изменений } \xi \\ \quad \text{под } f \text{ ;} \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

§ 3. <u>Континуум-гипотеза и аксиома выбора</u>.

3.1. В этом параграфе мы запишем на языке $L_2\ Real$ некоторые важные утверждения, которые встречаются в формулировке и исследовании проблемы континуума. Вторая цель параграфа - познакомиться с выразительными возможностями языка на не совсем тривиальных примерах. Как в § 8 главы II, мы начинаем со словесных формулировок.

3.2. А. "y - целое число".

Переход к записи в $L_2\ Real$ не очевиден. Он может быть совершен в два шага:

А . "y можно получить, вычитая (или прибавляя) 1 из (к) 0 конечное число раз".

А". "Любая функция (f) с периодом 1, обращающаяся в 0 в нуле, равна 0 в y ".

Б. $\forall f(((f(0) = 0 \wedge \forall x(f(x) = f(x+1)) \rightarrow f(y) = 0)$

Формулу Б. мы обозначим $Z(y)$.

3.3. А. Континуум-гипотеза: "любое подмножество в $\mathbb{R}$ либо равномощно $\mathbb{R}$, либо счетно, либо конечно".

А . "Для множества нулей любой функции (h) либо существует функция (g) , отображающая его на R , либо существует функция (f) , отображающая целые числа на него".

Б. $\forall h (\exists g \forall y \exists x (h(x)=0 \wedge y=g(x)) \vee$
$(\exists f \forall y (h(y)=0 \rightarrow \exists x (Z(x) \wedge y=f(x))))$

Формулу Б. мы будем обозначать СН. Обратите внимание, что формула $Z(x)$ входит в СН как единое целое.

3.4. А. Аксиома выбора: "Пусть $P(x,y)$ такое утверждение о названиях вещественных числах x, y , что для всякого значения x существует значение y , делающее это утверждение верным. Тогда существует такая функция f , что $P(x, f(x))$ тождественно верно".

Б. АС: $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists f \forall x P(x, f(x))$
где P - любая формула в $L_2 Real$, f - функция, y не ограничивает f в P, и все переменные, кроме x, y связаны в P .

§ 4. Нестандартная булева интерпретация $L_2 Real$: основные понятия

4.I. Алгебра истинностных значений. В этом параграфе будут введены понятия, необходимые для точной формулировки теоремы о невыводимости из § I, и указана эта формулировка.

Пусть I - некоторое множество (индексов); $\Omega=[0,1]^I$ - основное вероятностное пространство с мерой Лебега.

Положим

$\mathcal{B}$ = алгебра измеримых подмножеств в Ω по модулю множеств меры 0 (краткая запись - $mod\ 0$).

Операции в $\mathcal{B}$ мы будем обозначать $\cup, \cap$ и $'$; они индуцированы обычным объединением, пересечением и дополнением до Ω (измеримых) множеств.

Положим, далее

$\mathbb{0}$ = класс пустого подмножества $\in \mathcal{B}$

$\mathbb{1}$ = класс $\Omega \in \mathcal{B}$

Пусть $a, b \in \mathcal{B}$; мы будем писать $a \subseteq b$, если $a \cap b = a$, кроме того, мы будем говорить иногда, что a и b не пересекаются, если $a \cap b = \mathbb{0}$

Пусть (a_α) - некоторое семейство элементов $\mathcal{B}$. Мы будем говорить, что элемент $a \in \mathcal{B}$ является <u>верхней гранью</u> для (a_α), если $a_\alpha \subseteq a$ для всех α и, кроме того, для всякого $\bar{a}$ с таким же свойством $a \subseteq \bar{a}$. Аналогично определяется <u>нижняя грань</u> (a_α). По аналогии со случаем конечных семейств мы будем писать

Верхняя грань $(a_\alpha) = \bigcup_\alpha a_\alpha$

Нижняя грань $(a_\alpha) = \bigcap_\alpha a_\alpha$

Мы сведем сейчас воедино основные свойства алгебры $\mathcal{B}$, которые будут использоваться в дальнейшем:

4.2. <u>Предложение</u>. а) <u>Алгебра $\mathcal{B}$ является полной, т.е. верхняя и нижняя грани существуют в ней для любых семейств</u>

элементов. Кроме того, на бесконечные семейства распространяются следующие обычные свойства операций:

$$\left(\bigcup_\alpha a_\alpha\right) \cap b = \bigcup_\alpha (a_\alpha \cap b)$$

$$\left(\bigcap_\alpha a_\alpha\right) \cup b = \bigcap_\alpha (a_\alpha \cup b)$$

$$\left(\bigcap_\alpha a_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha a'_\alpha$$

б) Алгебра $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию счетности, то есть любое множество попарно непересекающихся и отличных от 0 элементов $\mathcal{B}$ не более чем счетно.

Заметим, что именно факторизация по множествам меры 0 обеспечивает выполнение этих свойств. В алгебре всех измеримых подмножеств Ω верхняя грань семейства может не существовать или не совпадать с объединением членов семейства (пример: семейство точек неизмеримого множества).

Условие счетности легко следует из существования положительной меры на $\mathcal{B}$: принимающей значение $\leq$ I. "Сумма нечетного множества" ненулевых вещественных чисел (мер элементов C) не может быть конечной.

Теперь мы можем точно оформулировать основной результат этой главы:

4.3. Теорема. Для любого множества индексов $\mathcal{J}$ существует отображение

$$\{\text{замкнутые формулы } L_2\ Real\} \to \mathcal{B} = \mathcal{B}(I) : P \to \|P\|$$

("булева функция истинности") которое обладает следующими свойствами:

а) Если P - аксиома $L_2 Real$, то $\|P\| = \mathbb{1}$

б) Если P непосредственно следует из (Q_i) по правилам вывода в $L_2 Real$ и если $\|Q_i\| = \mathbb{1}$ для всех i, то $\|P\| = \mathbb{1}$

в) $\|CH\| = \mathbb{0}$ при условии, что множество $\mathcal{J}$ достаточно велико, а именно $|\mathcal{J}| > 2^{\aleph_0}$. ■

<u>Следствие</u>. СН невыводима из аксиом в $L_2 Real$

4.4. Замечания. а) Высказывание $\|P\| = \mathbb{1}$ является точной формулировкой понятия об "истинности" P в § I.

б) Теорема 4.3. будет доказана в последующих параграфах. Порядок изложения следующий: в § 5 мы явно определим $\|P\|$ для любой (замкнутой) формулы P; в § 6 проверим, что $\|CH\| = \mathbb{0}$ для больших $\mathcal{J}$; в § 7 опишем аксиомы языка $L_2 Real$ и проверим их "истинность" в нетривиальных случаях.

§ 5. <u>Конструкция булевой интерпретации $L_2 Real$</u>

5.I. Мы сохраняем все обозначения § 4. Следующее изложение параллельно п. 2.5 этой главы; рекомендуется все время сравнивать булеву интерпретацию со стандартной.

$L_2 Real$ будет интерпретироваться во множестве $\bar{\mathbb{R}}$ = случайные величины на Ω = измеримые вещественнозначные функции на Ω.

А) <u>Первичные отображения</u>. Константы 0,I интерпретируются как постоянные функции на Ω со значениями 0,I; $+$ и $\cdot$ (как поточечное) сложение и умножений функций; $=$ и $\leq$ (как поточечное) сравнение функций на равенство или неравенство.

Б) Вторичные отображения. Прежде всего, введем аналог $\bar{\mathbb{R}}^{(2)}$ множества функций $\mathbb{R}^{(2)}$.

5.2. Определение. Отображение $f: \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ принадлежит множеству "случайных функций" $\bar{\mathbb{R}}^{(2)}$, если и только если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}$ имеем

$$\{\text{множество } \omega \in \Omega \mid \bar{x}_\omega = \bar{y}_\omega\} \bmod 0 \subseteq$$
$$\subseteq \{\text{множество } \omega \in \Omega \mid \bar{f}(\bar{x})_\omega = \bar{f}(\bar{y})_\omega\} \bmod 0. \blacksquare$$

Это определение настолько важно, что мы прокомментируем его немедленно.

Пусть $\bar{x}$ - функция на Ω; тогда для $\omega \in \Omega$ значение $\bar{x}_\omega$ в точке ω - это "значение случайной величины $\bar{x}$ при испытании ω".

Если в определении $\bar{f}$ из $\bar{\mathbb{R}}^{(2)}$ исключить условия $\bmod 0$, то новое требование будет обозначать просто, что значение случайной величины $\bar{f}(\bar{x})$ при каждом испытании должно однозначно определяться значением аргумента $\bar{x}$ при этом испытании. Добавление $\bmod 0$ равносильно требованию, чтобы предыдущее условие выполнялось "с условной вероятностью единица" (при условии $\bar{x} = \bar{y}$).

Это - очень естественное ограничение на $\bar{f}$, если мы хотим сохранить интуитивные свойства вещественных чисел в нашей нестандартной интерпретации. В самом деле, обыкновенные вещественные функции определяются своими значениями в точках, а наши "функции" обладают аналогичным свойством при "почти всех" испытаниях.

5.3. Теперь мы введем аналог множества $\mathcal{M}$ из 2.3.Б):

$$\bar{\mathcal{M}} = \{\text{отображения множества символов переменных в } \bar{\mathbb{R}}\} \times$$
$$\times \{\text{отображения множества символов функций в } \bar{\mathbb{R}}^{(2)}\}$$

Иными словами, задание одной точки $\xi \in \bar{\mathcal{M}}$ определяет для каждой переменной $\bar{\bar{x}}$ <u>случайную величину</u> $x^{\xi} \in \bar{\mathbb{R}}$ и для каждой функции f <u>случайную функцию</u> $f^{\xi} \in \bar{\mathbb{R}}^{(2)}$

Продолжая описание интерпретации, рассмотрим, наконец, термы и формулы.

а) <u>Термы</u>. Пусть t - терм, $\xi \in \bar{\mathcal{M}}$; тогда $t^{\xi} \in \bar{\mathbb{R}}$ есть случайная величина, определяемая индуктивным процессом.

б) <u>Атомарные формулы</u>. Если P есть $t_1 \le t_2$, то <u>истинностное значение P в точке</u> $\xi \in \bar{\mathcal{M}}$ определяется как следующий элемент алгебры $\mathcal{B}$ из § 4:

$$\|t_1 \le t_2\|(\xi) = \{\omega \in \Omega \mid t^{\xi}_{1,\omega} \le t^{\xi}_{2,\omega}\} \bmod 0$$

Аналогично для $t_1 = t_2$ (Обратите внимание, что если фиксированы $\xi \in \bar{\mathcal{M}}, \omega \in \Omega$ и терм t , то t^{ξ}_{ω} - обыкновенное вещественное число, "значение терма t в точке ξ при испытании ω ". В дальнейшем мы будем либерально пользоваться обозначением $\| \ \|$ в таких, например, контекстах:

$$\|\bar{x} = \bar{y}\| := \{\omega \mid \bar{x}_{\omega} = \bar{y}_{\omega}\} \bmod 0 \qquad \text{и т.п.}$$

в) <u>Формулы</u>. Если истинностные значения формул P, Q во всех точках $\xi \in \mathcal{M}$ уже определены, мы полагаем (опуская всюду аргумент ξ для краткости):

$$\|\neg P\| = \|P'\|$$

$$\|P \vee Q\| = \|P\| \cup \|Q\|$$

$$\|P \wedge Q\| = \|P\| \cap \|Q\|$$

$$\|P \to Q\| = \|P\|' \cup \|Q\|$$

$$\|P \leftrightarrow Q\| = (\|P\| \cap \|Q\|) \cup (\|P\|' \cap \|Q\|')$$

Наконец,

$$\|\forall x\, P(x)\|(\xi) = \bigcap_{\xi'} \|P\|(\xi')$$

(по всем ξ' изменениям ξ по x)

$$\|\exists x\, P(x)\|(\xi) = \bigcup_{\xi'} \|P\|(\xi')$$ (по тем же ξ')

(Аналогичное определение применяется к кванторам по функциям).

5.4. На этом завершается построение булевой функции истинности. Ниже будет проверено, что она обладает всеми свойствами, описанными в теореме 4.3. Мы рекомендуем, однако, читателю еще раз продумать все этапы конструкции $\|P\|$ и убедиться в том, что

а) Если P замкнута, то $\|P\|$ не зависят от $\xi \in \mathcal{M}$ (повторить рассуждения пп. 4.I - 4.3 главы II с новой функцией истинности).

б) Свойство $\|P\| = 1$ адекватно передает представление о том, что " P с вероятностью I истинна при каждом испытании в обычном смысле слова" (ср. комментарии к определению $\overline{\mathbb{R}}^{(2)}$).

В заключение этого параграфа обсудим правила вывода. Они по существу те же, что в языках $\mathcal{L}_1$.

5.5. Правила вывода сохраняют "истинность".

а) МР: пусть $\|P\| = \mathbb{1}$, $\|P \to Q\| = \mathbb{1}$. Согласно первому условию, $\|P\|' = \mathbb{0}$, в силу второго $\|P\|' \cup \|Q\| = \mathbb{1}$, откуда $\|Q\| = \mathbb{1}$.

б) Gen (по переменным): пусть $\|P\| = \mathbb{1}$. Это значит, что $\|P\|(\xi) = \mathbb{1}$ для всех $\xi \in \bar{\mu}$ но тогда

$$\|\forall x\, P\|(\xi) = \bigcap_{\xi'} \|P\|(\xi') = \bigcap_{\xi'} \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

(ξ' пробегает изменения ξ по x).

в) Gen (по функциям): $\forall f\, P$ следует из P - проверяется точно так же. ■

§ 6. Континуум-гипотеза "ложна".

В этом параграфе мы докажем утверждение в) теоремы 4.3:

6.I. Предложение. Если $|\bar{I}| > 2^{\aleph_0}$, то $\|CH\| = \mathbb{0}$

Доказательство. Напомним сначала вид СН (см. пп. 3.2 и 3.3).

$$CH.\ \forall h (\exists g\, \forall y\, \exists x (h(x) = 0 \wedge y = g(x)) \vee (\exists f\, \forall y\, (h(y) = 0 \to \exists x (Z(x) \wedge y = f(x))))$$

Определим P_1 и P_2 как первую и вторую альтернативы в этой формуле СН есть $\forall h (P_1 \vee P_2)$. Мы хотим доказать, что для любой данной точки $\xi \in \bar{\mu}$ имеем

$\| \forall h (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = \mathbb{O}$. По конструкции в § 5

$$\| \forall h (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = \bigcap_{\xi'} (\| P_1 \| (\xi') \cup \| P_2 \| (\xi'))$$

где ξ' пробегает все изменения ξ по h. Чтобы проверить, что это значение равно $\mathbb{O}$, достаточно найти одну такую точку ξ', в которой $\| P_1 \| (\xi') = \| P_2 \| (\xi') = \mathbb{O}$. Поскольку в P_1 и P_2 все переменные, кроме h, связаны, отыскание ξ' равносильно выбору $h^{\xi'} \in \overline{\mathbb{R}}^{(2)}$. Укажем искомое значение $h^{\xi'} = \bar{h}$ явно

6.2. <u>Определение</u>. а) Фиксируем подмножество $\mathcal{J} \subset I$ мощности, строго промежуточной между мощностями $\aleph_0$ и $|\mathcal{J}|$ (например, $2^{\aleph_0}$). Обозначим через $\bar{x}_i \in \overline{\mathbb{R}}$ функцию "$\cdot i$ -я координата" как в § I.

б) Для каждой случайной величины $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ выберем такое подмножество $\Omega(\bar{x})$, что

$$\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \| \bar{x} = \bar{x}_j \| = \Omega(\bar{x}) \bmod 0$$

(Здесь существенно используется предложение 4.2 а).

в) Для каждой $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\omega \in \Omega$ положим окончательно:

$$\bar{h}(\bar{x})_\omega = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in \Omega(\bar{x}), \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

6.3. <u>Утверждение о корректности</u>. а) $\bar{h}(\bar{x})$ как функция от ω (при фиксированном $\bar{x}$) измерима, так что $\bar{h}$ отображает $\overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$.

б) Для каждого $\bar{x} \in \bar{R}$ имеем:

$$\|\bar{h}(\bar{x}) = 0\| = \bigcup_{j=J} \|\bar{x} = \bar{x}_j\|$$

в) $\bar{h} \in \bar{R}^{(2)}$, так что существует $\xi' \in \mathcal{M}$, для которой $h^{\xi'} = \bar{h}$

<u>Доказательство</u>. а) $\bar{h}(\bar{x})$ принимает на Ω всего два значения 0.I и множества уровня этих значений измеримы по определению и свойству полноты $\mathcal{B}$.

б) Очевидно из определения.

в) Мы должны проверить для $\bar{h}$ свойство, фигурирующее в определении 5.2. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}$. Покажем, что множество точек $\omega \in \Omega$, для которых одновременно

$$\bar{x}_\omega = \bar{y}_\omega \quad \text{и} \quad \bar{h}(\bar{x})_\omega \neq \bar{h}(\bar{y})_\omega$$

имеет меру нуль.

Достаточно разобрать случай $\bar{h}(\bar{x})_\omega = 0,\ \bar{h}(\bar{y})_\omega = 1$ иными словами, установить, что

$$\|\bar{x} = \bar{y}\| \cap \|\bar{h}(\bar{x}) = 0\| \cap \|\bar{h}(\bar{y}) = 1\| = \emptyset$$

Запишем второй сомножитель в виде $\bigcup_{j \in J} \|\bar{x} = \bar{x}_j\|$ (см. в)) и применим к нему и первому сомножителю правило дистрибутивности. Учтем еще, что $\|\bar{x} = \bar{y}\| \cap \|\bar{x} = \bar{x}_j\| \subset \|\bar{y} = \bar{x}_j\|$

Тогда получим

$$\|\bar{x} = \bar{y}\| \cap \|\bar{h}(\bar{x}) = 0\| \subset \bigcup_{j \in J} \|\bar{y} = \bar{x}_j\| = \|\bar{h}(\bar{y}) = 0\|$$

откуда и следует требуемое.

6.3. Пояснения. Выбор $\bar{h}$ -существенное место доказательства, и мы хотим его мотивировать.

Напомним, что h - это название той функции, мощность множества нулей, который в $\mathbb{R}$ мы хотим вычислить (в стандартной интерпретации). Выбор $\bar{h}$ для "опровержения" СН осуществляется так, чтобы в множество "почти всюду нулей" $\bar{h}$ входило "множество промежуточной мощности" в наивном смысле: все $\bar{x}_j$ $j \in J$ (ср. § I). Однако, $\bar{h}$ не может быть какой угодно функцией - на нее наложено сильное ограничение $\bar{h} \in \bar{\mathbb{R}}^{(2)}$, поэтому вместе со всеми $\bar{x}_j$ во множество п.в. нулей $\bar{h}$ может оказаться неизбежным включить и еще какие-то $\bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}$, а также "частично включить" какие-то $\bar{z} \in \bar{\mathbb{R}}$! (Последнее выражение есть попытка передать возможность того, что $\| \bar{h}(\bar{z}) = 0 \|$ есть не $\mathbb{0}$ и не $\mathbb{1}$, так что $\bar{z}$ является нулем $\bar{h}$ с "ненулевой вероятностью").

Таким образом "множество нулей" $\bar{h}$ может оказаться больше, чем мы ожидали, так что естественно ожидать затруднений в доказательстве того, что его нельзя отобразить на все $\bar{\mathbb{R}}$ (альтернатива P_1). Казалось бы, это обстоятельство облегчит опровержение альтернативы P_2 (Z нельзя отобразить на множество нулей), но и это неверно! Дальше мы обнаружим, что $\| Z(\bar{x}) \| = \mathbb{1}$ для многих $\bar{x}$, не являющихся постоянными функциями с целыми значениями, а также $\| Z(\bar{x}) \| \neq \mathbb{0}$ еще для каких-то $\bar{x}$, так что "множество целых чисел" в нашей интерпретации также резко возросло.

Последнее замечание: в нашем обсуждении по существу возникло понятие "случайного множества", которое и является основным в аналогичной нестандартной интерпретации языка $L_1 Set$, позволяющей доказать невыводимость СН в самом сильном смысле. "Множество нулей $\bar{h}$" является случайным в том смысле, что отношение "$\bar{z} \in$ нули $\bar{h}$" получает булево значение истинности $\|\bar{h}(\bar{z}) = 0\|$.

6.4. <u>Доказательство</u>. $\|P_1\|(\xi') = \mathbb{O}$

Согласно правилам вычисления $\|P\|$ находим

$$\|P_1\|(\xi') = \bigcup_{\bar{g}} \bigcap_{\bar{y}} \bigcup_{\bar{x}} \{\|\bar{h}(\bar{x}) = 0\| \cap \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\|\}$$

($\bar{h}$ определена в п. 6.2, $\bar{g}$ пробегает все элементы $\bar{R}^{(2)}$, $\bar{x}, \bar{y}$ - все элементы $\bar{R}$). Мы предположим, что $\|P_1\|(\xi') \neq \mathbb{O}$ и придем к противоречию.

Если $\bigcup_{\bar{g}} a(\bar{g}) \neq \mathbb{O}$, то $a(\bar{g}) \neq \mathbb{O}$ для какой-то конкретной случайной функции $\bar{g} \in \bar{R}^{(2)}$. Выберем ее и положим

$$a = \bigcap_{\bar{y}} \bigcup_{\bar{x}} (\bigcup_{j \in J} \|\bar{x} = \bar{x}_j\|) \cap \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\|)$$

Здесь $\bigcup_j$ появилось, как замена $\|\bar{h}(\bar{x}) = 0\|$ силу 6.3 в). Далее, $\|\bar{x} = \bar{x}_j\| \cap \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\| \leq \|\bar{y} = g(\bar{x}_j)\|$ пользуясь этим и дистрибутивностью, находим

$$a \leq \bigcap_{\bar{y}} \bigcup_{j \in J} \|\bar{y} = g(\bar{x}_j)\|$$

В частности, для каждого $\bar{x}_i$ вместо $\bar{y}$

$$a \subseteq \bigcup_{j \in J} \| \bar{x}_i = g(\bar{x}_j) \|$$

Если, как мы предположили, $a \neq \mathbb{O}$, то для каждого i найдется $j(i) \in J$ такой, что

$$\| \bar{x}_i = g(\bar{x}_{j(i)}) \| \neq \mathbb{O}$$

Поскольку I несчетно и $|J| < |I|$, есть такое значение $j_0 \in J$, что $j_0 = j(i)$ для всех i из <u>несчетного</u> подмножества $I_0 \subset I$. Это, однако, противоречит предложению 4.2 б, потому что члены семейства $\| \bar{x}_i = g(\bar{x}_{j_0}) \|$ $(i \in I_0)$ попарно не пересекаются. В самом деле,

$$\| x_{i_1} = g(\bar{x}_{j_0}) \| \cap \| x_{i_2} = g(\bar{x}_{j_0}) \| \subset \| x_{i_1} = x_{i_2} \| = \mathbb{O},$$

если $i_1 \neq i_2$

Обратите внимание, в какой мере это рассуждение параллельно "наивному" из § I. Функция $\bar{g}$, предположительно, отображает нули $\bar{h}$ на $\bar{\mathbb{R}}$ "с ненулевой вероятностью". Но точный смысл вычислений гораздо тоньше.

<u>Вычисление</u> $\| Z(y) \|$. Формула $Z(y)$ написана в п. 3.2 Б. Так как она входит в P_2, вычисление $\| Z(y) \|$ необходимо для вычисления $\| P_2 \|$

6.5. <u>Лемма</u>. Пусть $\eta \in \mathcal{M}$, $y^2 = \bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\| Z(y) \|(\eta) = \bigcup_{n \in Z} \| \bar{y} = n \| = \text{класс} \{ \omega \in \Omega \,/\, \bar{y}_\omega \in Z \}$$

(В частности, $\|z(y)\|(\eta) = 1$, если $\bar{y}$ только "кусочно целая").

Доказательство. Мы должны установить, что

$$\bigcap_{\bar{f}}(\|\bar{f}(0)=0\|' \cup (\bigcup_{\bar{x}}\|f(\bar{x})=f(\bar{x}+1)\|') \cup f(\bar{y})=0\|) = \bigcup_{n\in Z}\|\bar{y}=n\| \quad n\in Z$$

Проверим по очереди включение в обе стороны.

<u>Включение</u> $\subseteq$. Достаточно найти конкретную функцию $\bar{f}$, для которой соответствующий член слева содержался бы в правом члене.

Определим $\bar{f}$, положив

$$\bar{f}(\bar{x})_\omega = \sin^2 \pi \bar{x}_\omega$$

(вместо $\sin^2 \pi x$ можно было бы взять любую измеримую функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с периодом I и равную 0 только в целых точках). Легко видеть, что $\bar{f}(\bar{x}) \in \bar{\mathbb{R}}$ и $\bar{f} \in \bar{\mathbb{R}}^{(2)}$

Тогда $\|\bar{f}(0)=0\|' = \mathbb{O}$ и $\|f(\bar{x})=f(\bar{x}+1)\|' = \mathbb{O}$

Поэтому нужно лишь проверить, что

$$\|\sin^2 \pi \bar{y} = 0\| \subset \bigcup_{n\in Z} \|\bar{y}=n\|$$

что очевидно.

<u>Включение</u> $\supseteq$. Достаточно проверить, что для любых фиксированных значений $n \in Z$, $\bar{f} \in \bar{\mathbb{R}}^{(2)}$, $\bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}$ имеем

$$\|\bar{y}=n\| \subseteq B \cup C, \quad \text{где} \begin{cases} B = \|\bar{f}(0)=0\|' \cup (\bigcup_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x})=\bar{f}(\bar{x}+1)\|') \\ C = \|\bar{f}(\bar{y})=0\| \end{cases}$$

Но включение $a \subseteq b \cup c$ равносильно $a \cap c' \subseteq b$;
далее в нашей ситуации

$$a \cap c' = \|\bar{y} = n\| \cap \|\bar{f}(\bar{y}) = 0\|' \subseteq \|\bar{f}(n) = 0\|'$$

ибо $\|\bar{y} = n\| \subseteq \|f(\bar{y}) = f(n)\|$ (n под знаком f - постоянная функция на Ω со значением n).

Поэтому достаточно убедиться, что

$$\|\bar{f}(n) = 0\|' \subseteq \|\bar{f}(0) = 0\|' \cup (\bigcup_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}+1)\|')$$

или, переходя к дополнениям, что

$$\|\bar{f}(n) = 0\| \supseteq \|\bar{f}(0) = 0\| \cap (\bigcap_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}+1)\|)$$

Мы лишь увеличим правую часть, если оставим в ней только члены, отвечающие $\bar{x}$ = 0, I, 2, ... -I. Но пересечение этих членов, очевидно, равно

$$\|\bar{f}(0) = 0\| \cap \|\bar{f}(0) = \bar{f}(1) = \cdots = \bar{f}(n)\| \subseteq \|\bar{f}(n) = 0\|$$

6.6. <u>Доказательство</u> $\|P_2\|(\xi') = \mathbb{O}$

Согласно правилам вычисления $\|P_2\|$ с учетом леммы 6.5 находим:

$$\|P_2\|(\xi') = \bigcup_{\bar{f}} \bigcap_{\bar{y}} (\|\bar{h}(\bar{y}) = 0\|' \bigcup_{\bar{x}} (\bigcup_{n} (\|\bar{x} = n\| \cap \|\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})\|)))$$

Как выше, $\|\bar{x} = n\| \subset \|f(\bar{x}) = f(n)\|$ так что

$$\|\bar{x} = n\| \cap \|\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})\| \subset \|\bar{y} = \bar{f}(n)\|$$

Далее, достаточно доказать, что член, отвечающий любому конкретному значению $\bar{f}$ равен $\mathbb{O}$. Допустим, что это не так, и придем к противоречию. Пусть $a \neq \mathbb{O}$ член, отвечающий f. По оказанному,

$$a \subseteq \bigcap_{\bar{y}} (\|\bar{h}(\bar{y}) = 0\|' \cup (\bigcup_{n} \|\bar{y} - \bar{f}(n)\|)$$

В частности, для каждого $j \in \mathcal{J}$ мы должны иметь (с $\bar{x}_j$ вместо $\bar{y}$):

$$a \subseteq \bigcup_{n} \|\bar{x}_j = \bar{f}(n)\| .$$

(учесть, что $\|\bar{h}(\bar{x}_j) = 0\|' = \mathbb{O}$ в силу предложения 6.3 б). Значит, для каждого j должно найтись целое число $n(j)$ такое, что

$$\|\bar{x}_j = \bar{f}(n(j))\| \neq \mathbb{O}$$

Так как $\mathcal{J}$ несчетно, существует n_0 и несчетное подмножество $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ таких j, что $n(j) = n_0$ для всех $j \in \mathcal{J}_0$. Тогда

$$\|\bar{x}_j = \bar{f}(n_0)\|, \quad j \in \mathcal{J}_0$$

образуют несчетное множество ненулевых попарно не пересекающихся элементов $\mathcal{B}$, как в конце п. 6.4, что нарушает условие счетности для $\mathcal{B}$.

§ 7. Аксиомы L_2 Real.

7.I. Логические аксиомы. Они разбиваются на две группы:

а) Аксиомы Ax_0 : результаты подстановок в тавтологии любых формул L_2 Real

б) Аксиома Ax_1 : результаты подстановок в формулы Д.I - Д.3 из п. 5.2 главы II любых формул языка L_2 Real . Кроме того, сюда следует включить следующий вариант формулы Д.3 "второго порядка".

$$\forall f\, P(f) \to P(g)$$

где f, g - символы функций.

7.2. Специальные аксиомы теории множеств

в) Аксиомы равенства:

$$\forall x\ (x = x)$$

$$\forall x \forall y\ (x = y \to (P(x,x) \to P(x,y)))$$

г) Аксиомы выбора AC

$$AC: \forall x \forall y\, P(x,y) \to \exists f\, \forall x\, P(x, f(x))$$

где P - любая формула, не имеющая свободных переменных, кроме x и y , и y не ограничивает f в P .

7.3. Специальные аксиомы теории полей (для краткости мы опускаем кванторы общности).

д) Аксиомы сложения:

$x+0=x$

$x+(y+z)=(x+y)+z$

$x+y=y+x$

$\forall x \exists y\,(x+y>0)$

е) Аксиомы умножения:

$x\cdot 1=x$

$x\cdot(yz)=(xy)z$

$xy=yx$

$\neg(x=0)\rightarrow\exists y\,(xy=1)$

ж) Связь сложения с умножением:

$x\,(y+z)=xy+xz$

з) Аксиомы порядка

$x\leq y \;\vee\; y\leq x$

$(x\leq y \wedge y\leq x)\leftrightarrow x=y$

$x\leq y\rightarrow(x+z\leq y+z)$

$(x\leq y\wedge 0\leq z)\rightarrow xz\leq yz$

е) Аксиомы полноты CO :

А. Любое, ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$ значения функции f имеет верхнюю грань (z)

Б. $\forall f(\exists y(f(x))\leq y\rightarrow\exists z\vee y\,(\forall x\,(f(x)\leq y)\leftrightarrow z\leq y)$

7.4. Замечания о стандартной интерпретации аксиом.

Смысл всех аксиом в стандартной интепретации ясен; может быть стоит сделать лишь следующие замечания.

В интуитивном понимении для аксиом группы д) подмоделью может служить множество целых чисел Z (или только 0, или любая аддитивная подгруппа R). Введение группы е) заставляет дополнить эту подгруппу до подполя R, содержащего 0 и I поэтому все рациональные числа Q. Аксиомы ж) и з) выполняются в этой модели автоматически.

Аксиомы полноты е) в интуитивном понимании заставляют добавить к подмодели все предельные точки и поэтому включить в нее все R (ибо любое вещественное число есть верхняя грань некоторого множества рациональных чисел).

Однако, согласно теореме 7.13 главы П, $L_2 Real$ всегда есть счетная подмодель (если алфавит счетен), ибо по существу множество всех ограниченных подмножеств в R и их верхних граней, которые можно описать формулами языка, счетно, и смысл слова "все" меняется - уже знакомый нам эффект.

7.5. Проверка аксиом в булевой модели. Проверить аксиому P в булевой модели - значит показать, что $\|P\| = 1$

Аксиомы Ax_0 проверяются стандартными вычислениями.

Аксиомы Ax_1 проверяются по тому же плану, по которому вычислялись их обычные функции истинности в § 4 главы П.

Первая аксиома равенства тривиально; вторая проверяется сначала для атомарных формул P и затем проводится индукция

по числу связок и кванторов в R. Рассуждения довольно кропотливые, но простые. Аксиомы полей д) - з) проверяются без всякого труда.

Ограничимся одним примером:

$$\|\neg(x=0)\to\exists y(xy=1)\| = \bigcap_{\bar{x}\in\bar{R}}(\|\bar{x}=0\|' \cup \bigcup_{\bar{y}\in R}\|\bar{x}\bar{y}=1\|)$$

Чтобы проверить, что это значение равно $\mathbb{1}$, достаточно проверить, что при любом фиксированном $\bar{x}\in\bar{R}$ найдется такое $\bar{y}\in\bar{R}$, что

$$\|\bar{x}=0\|' \cup \|\bar{x}\bar{y}=1\| = \mathbb{1}$$

Подходящее значение $\bar{y}$ легко построить явно: положим

$$\bar{y}_\omega = \begin{cases} \bar{x}_\omega^{-1}, & \text{если } \bar{x}_\omega \neq 0 \\ 0, & \text{если } \bar{x}_\omega = 0 \end{cases}$$

Аксиомы выбора AC и полноты CO требуют отдельного обсуждения, ибо их проверка не тривиальна.

§ 8. <u>Аксиома выбора "истинна"</u>.

В этом параграфе мы докажем

8.I. <u>Предложение</u> $\|AC\| = \mathbb{1}$

<u>Доказательство</u>. Начнем с того, что, воспользовавшись "наивной" аксиомой выбора, вполне упорядочим $\bar{R}$ отношением $\bar{x}<\bar{y}$ (не путать с $x\le y$; эти отношения никак не

связаны). Напомним, что полная упорядоченность влечет существование наименьшего элемента в каждом подмножестве). Идея доказательства - построить $\bar{f}$ так, чтобы $\bar{f}(\bar{x})$ был наименьшим из элементов $\bar{y}$, удовлетворяющих $P(\bar{x},\bar{y})$. Как обычно, такой $\bar{f}(\bar{x})$ придется "склеивать из кусочков". Фиксируем точку $\xi \in \mathcal{M}$ и будем проверять равенство $\|AC\|(\xi)=1$. Начнем с исследования первой части композиции

$$\|\forall x \exists y P(x,y)\|(\xi) = \bigcap_{\eta} \bigcup_{\xi} \|P(x,y)\|(\zeta) \tag{1}$$

где η пробегает изменения ξ по x, а (при фиксированном η) ζ пробегает изменения η по y.

При фиксированном η упорядочим ζ следующим образом:

$$\zeta_1 < \zeta_2 \Leftrightarrow y^{\zeta_1} < y^{\zeta_2}$$

Положим, далее:

$$\begin{aligned} a_\zeta &= \|P(x,y)\|(\zeta) \in \mathcal{B} \\ b_\zeta &= a_\zeta \cap \Big(\bigcap_{\zeta_0<\zeta} a_{\zeta_0}\Big)' \end{aligned} \tag{2}$$

Следующая лемма доказывается без труда индукцией:

8.2. <u>Лемма</u>. а) $\bigcup_\zeta a_\zeta = \bigcup_\zeta b_\zeta$

б) $b_{\zeta_1} \cap b_{\zeta_2} = \emptyset$, если $\zeta_1 \neq \zeta_2$

(Здесь η фиксировано, а ζ пробегает изменения η по y).

Заметим теперь, что при фиксированном ξ точка ζ вполне определяется значениями $x^\zeta = \bar{x}$ и $y^\zeta = \bar{y}$

Будем писать $b_{\bar{x},\bar{y}}$ вместо b_b

8.3. Лемма. Фиксируем $\bar{x}$ (то есть η) и заставим пробегать всевозможные значения $\bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}$. Можной найти такой элемент $\bar{x}' \in \bar{\mathbb{R}}$, зависящий от $\bar{x}$, что

для всех $\bar{y}$, $b_{\bar{x},\bar{y}} \subseteq \| \bar{x}' = \bar{y} \|$

Доказательство. Согласно лемме 8.2

$$\bigcup_{\bar{y}} b_{\bar{x},\bar{y}} = 1, \quad b_{\bar{x},\bar{y}_1} \cap b_{\bar{x},\bar{y}_2} = \emptyset \qquad \text{при } \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$$

Из условии счетности (предложение 4.2 б) следует, что можно найти подмножества $B_{\bar{x},\bar{y}} \subset \Omega$, из которых только счетные множества будут непустыми, со свойствами

$$b_{\bar{x},\bar{y}} = B_{\bar{x},\bar{y}} \bmod 0; \quad \bigcup_{\bar{y}} B_{\bar{x},\bar{y}} = \Omega$$

$$B_{\bar{x},\bar{y}_1} \cap B_{\bar{x},\bar{y}_2} = \emptyset \text{ при } \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$$

Теперь определим $\bar{x}'$ условиями:

$$\bar{x}'_\omega = \bar{y}_\omega \qquad \text{для всех } \omega \in B_{\bar{x},\bar{y}}$$

Проверка того, что $\bar{x}' \in \bar{\mathbb{R}}$ и что $b_{\bar{x},\bar{y}} \subseteq \| \bar{x}' = \bar{y} \|$ тривиальна.

Интуитивно, $\bar{x}'$ на $B_{\bar{x},\bar{y}}$ есть наименьший $\bar{y}$, удовлетворяющий P.

8.4. Лемма. Отображение $\bar{f} : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$, определенное формулой $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}'$,

где $\bar{x}'$ определяется по $\bar{x}$, как в лемме 8.3, принадлежит $\bar{R}^{(2)}$.

<u>Доказательство</u> опущено. В нем используется "истинность" второй аксиомы равенства.

8.5. Теперь вернемся к нашей основной цели. Мы хотим доказать, что $\|AC\|(\xi)=1$, то есть что

$$\|\forall x \exists y\, P(x,y)\|(\xi) \subseteq \|\exists f \forall x\, P(x,f(x))\|$$

Левая часть равна, по вышесказанному, $\bigcap_{\bar{x}} \bigcup_{\bar{y}} b_{\bar{x},\bar{y}}$, а правая часть равна

$$\bigcup_{\xi'} \bigcap_{\xi''} \|P(x,f(x))\|(\xi'')$$

где ξ' пробегает изменения ξ по f, а ξ'' – изменения ξ' по x. Для проверки включения $\bigcap_{\bar{x}} \bigcup_{\bar{y}} \subseteq \bigcup_{\xi'} \bigcap_{\xi''}$ достаточно проверить, что член слева, отвечающий данному значению $\bar{x}$, содержится в члене справа, отвечающем точке ξ'', для которой $f^{\xi''}=\bar{f}$ ($\bar{f}$ из леммы 8.4), $x^{\xi''}=\bar{x}$, то есть что $\bigcup_{\bar{y}\in\bar{R}} b_{\bar{x},\bar{y}} \subseteq \|P(x,f(x))\|(\xi'')$, если $f^{\xi''}=\bar{f}$, $x^{\xi''}=\bar{x}$. Это следует из того, что

$$b_{\bar{x},\bar{y}} \subseteq \|P(x,f(x))\|(\xi''),$$

потому что

$$b_{\bar{x},\bar{y}} \subseteq \|\bar{f}(\bar{x})=\bar{y}\| \subseteq \|P(x,f(x))\|(\xi'')$$

по аксиоме равенства.

§ 9. Аксиома полноты "истинна".

9.I. Предложение.

$$\|\forall f(\exists y \forall x (f(x) \le y) \to \exists z \forall y (\forall x (f(x) \le y) \leftrightarrow z \le y))\| = 1$$

Доказательство. Мы должны установить, что для каждой $\bar{f} \in \bar{R}^{(2)}$

$$\bigcup_{\bar{y}} \bigcap_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) \le \bar{y}\| \subseteq \bigcup_{\bar{z}} \bigcap_{\bar{y}} \left(\bigcap_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) \le \bar{y}\| \leftrightarrow \|\bar{z} \le \bar{y}\| \right) \qquad (I)$$

где мы положили $a \leftrightarrow b = (a \cap b) \cup (a' \cap b')$. Достаточно раосмотреть член слева с фиксированным $\bar{y}$.

Для каждого рационального числа $q \in Q$ положим

$$\bar{y}_{q,\omega} = \min(\bar{y}_\omega, q)$$

Очевидно, $\bar{y}_q \in \bar{R}^{(2)}$. Положим, далее

$$b_q = \bigcap_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) \le \bar{y}_q\|$$

9.2. Лемма. а) $\bigcup_{q \in Q} b_q = \bigcap_{\bar{x}} \|\bar{f}(\bar{x}) \le \bar{y}\|$

б) $\bigcap_{q \in Q} b_q = \mathbb{O}$ в) $b_q = \prod_{r > q} b_r$

Доказательство. а) Включение $\subseteq$ очевидно. Включение $\supseteq$ проверяется с помощью

$$\|\bar{f}(\bar{x}) \le \bar{y}\| \subseteq \bigcup_{q \in Q} \|f(\bar{x}) \le y_q\|$$

которое в свою очередь можно проверять "поточечно", ибо Q счетно.

б) следует из того, что $b_q \subseteq \| \bar{f}(\bar{o}) \leq \bar{y}_q \| \subseteq \| \bar{f}(o) \leq q \|$ и "поточечного" соотношения $\prod_q \| \bar{f}(o) \leq q \| = \emptyset$

Наконец, в) проверяется аналогично.

9.3. <u>Лемма</u>. Можно выбрать $B_q \subset \Omega$ так, чтобы $b_q = B_q \bmod 0$ и

$$\bigcup_q B_q = \{\omega \mid \bar{f}(\bar{x})_\omega \leq y_\omega\}, \ \bigcap_q B_q = \emptyset, \ B_q = \bigcap_{r>q} B_r$$

<u>Доказательство</u>. Сначала выберем любые $B_q^{(2)}$ в классах b_q, затем положим

$$B_q^{(1)} = \begin{cases} B_q^{(2)} \setminus \bigcap_r B_r^{(2)} & \text{при } q < 0, \\ B_q^{(2)} \cup (\Omega \setminus \bigcup_r B_r^{(2)}) & \text{при } q \geq 0, \end{cases}$$

наконец, положим

$$B_q = \bigcap_{r>q} B_r^{(1)}$$

9.4. <u>Лемма</u>. Определим $\bar{z} : \Omega \to R$ так:

$$\bar{z}_\omega = \inf \{ q \in Q \mid \omega \in B_q \}$$

Тогда $\bar{z} \in \bar{R}$ и $b_q = \| \bar{z} \leq \bar{y}_q \|$

9.5. Мы хотим теперь вернуться к доказательству $\|\omega\| = 1$. Согласно (I) достаточно проверить, что

$$\bigcap_{\bar{x}} \| \bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{y} \| \subseteq \bigcap_{\bar{y}} \| \bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{u} \| \Leftrightarrow \bar{z} \leq \bar{u} \|)$$

где $\bar{z}$ определяется по $\bar{y}$ как в лемме 9.4. По лемме 9.2 а) это равносильно включению (для всех q)

$$b_q \subseteq \bigcap_{\bar{u}} \left(\bigcap_{\bar{x}} \| \bar{f}(\bar{x}) \leq \bar{u} \| \longleftrightarrow \| \bar{z} \leq \bar{u} \| \right)$$

Чтобы окончить доказательство, нужно еще воспользоваться нетрудным равенством

$$\| \bar{z} \leq \bar{u} \| = \bigcap_{q} \left(\| \bar{z} \leq \bar{y}_q \| \cup \| \bar{u} \leq \bar{y}_q \| \right)$$

Дальнейшие детали мы опускаем.

§ 10. Обсуждение.

В связи с теоремами Геделя и Коэна о континуум-проблеме два круга вопросов заслуживают обсуждения: смысл результатов и смысл методов.

10.1. Результаты. Существует точка зрения, согласно которой несчетные (и даже счетно-бесконечные) множества являются фикциями. Став на такую точку зрения, мы, конечно, не можем рассматривать и проблему континуума.

С точки зрения последовательного формализма невыводимость CH и $\neg$ CH означает возможность добавления любой из этих формул (или утверждения о точном месте континуума на шкале алефов) к системе аксиом и исследования получившихся разветвлений теории множеств на равных основаниях с другими вариантами.

Наконец, многие практически работающие математики чувствуют, что континуум-проблема имеет смысл и однозначное решение. Тогда, очевидно, Гедель и Коэн показали глубокую недостаточность наших представлений о континууме: либо ин противоречивы, либо неполны в столь важном пункта.

Как развить интуицию до такой степени, чтобы положение дел с континуум-проблемой прояснилось?

Возможно, некоторые указания на это содержатои в методах Геделя и Коэна.

10.2. Методы. В среде специалистов по математической логике наблюдалась сильная тенденция использовать для доказательства непротиворечивости и независимости "как можно более синтаксические" методы. В частности, метод булевых моделей возник в результате реинтерпретации "вынуждения" Коэна, в котором роль модели гораздо скромнее и мнее связана с другими областями математики.

Конструкция модели по Скотту-Соловью очень красива и аппелирует к привычному кругу понятий, но в какой мере она является существенной?

Технически - ни в какой. Алгебра $\mathcal{B}$ не обязана возникать из вероятностного пространства; в конструкции не обязаны участвовать "настоящие" несчетные множества - все можно делать в счетной подмодели, согласно Левенгейму-Сколему.

Автору представляется, однако, что введение вероятностных идей в самые основания математики является очень существенным. Вот немногие аргументы в пользу этой точки зрения.

10.3. Фантазии. Обычная критика теории множеств исходит из утверждения, что положения (и трудности) теории множеств возникают при перенасении на бесконечное опыта обращения с конечным.

Мне кажется более важным то обстоятельство, что теория множеств абстрагирует опыт обращения с макрообъектами, которые существуют отделенно друг от друга, различимы и т.п., а также с макропроцессами, которые - в идеале классической физики - детерминированы и финитно описываемы.

Теория вещественного континуума, однако, мокет оказаться глубоко связанной с теорией микромира, где нет ни безграничной делимости, ни возможности жестко фиксировать положение, ни детерминированности.

Аксиомы теории множеств, абстрагированные от представлений о "множестве фотонов в ящике" или "множестве электронов в атоме", могут оказаться совершенно не похожими на привычные аксиомы Цермело-Френкеля. Обсуждение аксиомы выбора или понятия взаимно-однозначного соответствия с подобной точки зрения могло бы пролить новый свет на эти тяжелые проблемы и обнаружить любопытный "физический смысл" методов Геделя, Скотта и Соловья.

Подп. 25.12.73 г. 77352 ф. 60x90 16.
Физ. п. 8,5. Усл. п. л. 9,5.
Изд. 1977. Тираж 500. Цена 16
Тип. Ленинградского университета