МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ И ВЕЧЕРНЕМУ ОБУЧЕНИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Ю. И. МАНИН

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

К-функтор в алгебраической геометрии

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1971

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ И ВЕЧЕРНЕМУ ОБУЧЕНИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Ю. И. МАНИН

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

К-функтор в алгебраической геометрии

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1971

Настоящее пособие печатается стереотипно на фоторотапринтах со статьи в журнале АН СССР «Успехи математических наук», т. XXIV, вып. 5 (149), «Наука», 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1966—1968 гг. автор прочел на механико-математическом факультете МГУ двухгодовой курс лекций.

Курс был задуман как введение в алгебраическую геометрию; записки его первой части [2] опубликованы годом раньше. Мне хотелось не только представить список некоторых основных понятий теории схем, но также показать, как они работают в более содержательных вопросах. Я полагал, что удачным примером такой содержательной математики является теория Гротендика колец K_0, приводящая в конце концов к доказательству теоремы

Настоящее пособие печатается стереотипно на фоторотапринтах со статьи в журнале АН СССР «Успехи математических наук», т. XXIV, вып. 5 (149), «Наука», 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1966—1968 гг. автор прочел на механико-математическом факультете МГУ двухгодовой курс лекций.

Курс был задуман как введение в алгебраическую геометрию; записки его первой части [2] опубликованы годом раньше. Мне хотелось не только представить список некоторых основных понятий теории схем, но также показать, как они работают в более содержательных вопросах. Я полагал, что удачным примером такой содержательной математики является теория Гротендика колец K_0, приводящая в конце концов к доказательству теоремы

Римана — Роха. С одной стороны, она позволяет продемонстрировать технику вычислений с когерентными пучками, не требуя слишком детального изучения локальных свойств морфизмов или проблем представимости функторов (на что у меня не было времени). С другой стороны, она наиболее близка к классической проблематике и явно открыта для дальнейшего прогресса. Будучи фундаментом «численных методов» в алгебраической геометрии нётеровых схем, K-теория доставляет необходимый аппарат для исследования структуры колец Чжоу, задач об алгебраичности циклов или проблем бирациональной геометрии. Эта теория представлена в предлагаемых записках лекций второго года. Читатель, для которого лекции [2] окажутся недоступными, сможет понимать эти записки, ознакомившись с литературой, указанной в п. а) (см. в особенности [3], [4]).

Все же идейно обе части курса составляют единое целое. Я хотел изложить весь материал с подробными и полными доказательствами; к сожалению, этот идеал не был достигнут. Первую часть следовало бы дополнить некоторыми сведениями из теории размерности, гомологической алгебры и теории регулярных колец; в лекциях Серра о кратностях пересечений [5] есть все необходимое. Во второй части опущены некоторые технические подробности, в основном из второй главы «Оснований» Гротендика [1].

Кроме предлагаемых записок, сейчас существует три изложения K-теории Гротендика в контексте схем.

Первое из них — статья Бореля — Серра (см. [7]). Второе — неопубликованный препринт Гротендика [8], датированный 1957 г. и дающий другой вариант доказательства теоремы Римана — Роха, годный лишь для характеристики нуль, но приводящий к более точным результатам. Наконец, этой теории был посвящен семинар Гротендика 1966—1967 гг. (SGA 6) в Институте высших исследований [9].

Первые два изложения относились к случаю проективных неособых многообразий над полем. В семинаре теория была значительно обобщена. Основные ее результаты распространены на нётеровы схемы, не обязательно регулярные. В отчете Бореля—Серра два главных момента требуют изменений:

а) Определение колец Чжоу, которые служат областью значений теории характеристических классов.

Действительно, теория колец Чжоу для нётеровых схем не построена.

б) Определение кольца $K(X)$.

В самом деле, если отбросить условие регулярности схемы, то группы K, построенные для категории всех когерентных пучков и подкатегории локально свободных пучков перестают совпадать. Это немедленно приводит к затруднениям, если мы одновременно хотим, чтобы $K(X)$ было кольцом и обладало структурой ковариантного функтора. Определение умножения хорошо вводится для «локально свободной» группы K, а прямой образ — для «когерентной» группы.

В семинаре Гротендика первое затруднение обходится следующим образом: роль кольца Чжоу $A(X)$ играет кольцо, присоединенное к $K(X)$ относительно некоторой специальной «γ-фильтрации» (см. раздел 8). Это оправдывается тем, что для неособых многообразий над полем кольца $A(X)$ и $GK(X)$ действительно изоморфны с точностью до кручения, а теория «характера Чженя» ch все равно убивает кручение.

Второе, гораздо более серьезное затруднение, преодолевается введением нового определения $K(X)$, использующего «производные категории» Вердье и связанную с ними новомодную гомологическую алгебру. Изложение необходимой техники *ab ovo* потребовало бы по крайней мере удвоения объема этих лекций. По этой причине я ограничился здесь рассмотрением регулярных нётеровых схем.

В остальном доказательства близки к тем, которые изложены в записках [9], так что эту статью можно рассматривать как «дайджест» семинара Гротендика.

Два исключения, возможно, заслуживают быть отмеченными.

а) Вычисление Tor в разделах 3 (теорема 3.5) и 13 (предложение 13.8) производится прямым методом, без использования теоремы об умножениях в Tor.

б) При изучении фильтрации в $K(X)$, ее поведения относительно прямого образа и в доказательстве теоремы Римана — Роха для вложения я пользуюсь операциями Адамса ψ вместо операций Гротендика λ. В частности, вместо гротендиковских $\lambda^p(N, x)$ появляются «каннибальские характеристические классы» топологов $\theta^p(N)$ (раздел 16), что позволяет обойтись без общей теории λ-колец и довольно значительно сокращает изложение.

Как и в первой части, я старался разбирать примеры и указывать мотивировки, чтобы помочь читателю ориентироваться в этом бравом новом мире.

Я глубоко признателен А. Бельскому за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Литературные указания

Прилагаемый в конце статьи список литературы никак не претендует на полноту: отобраны работы, по возможности доступные и обобщающие материал. Приводимая в них библиография позволит читателю двигаться дальше.

а) Общие сведения о схемах. К этому разделу относятся работы [1] — [5]. Работа [1] — основной источник и справочник по теории схем, чрезвычайно подробный и объемистый. Для понимания наших лекций с избытком достаточно знакомства с двумя главами [1].

Лекции 3—10 из работы [3] также дают сжатый, но очень содержательный обзор почти всех фактов, которые необходимы для понимания настоящей статьи.

В курсе лекций [5] нет упоминания о схемах, но локальная теория кратностей пересечений, развитая в нем, послужила отправной точкой для введения колец K Гротендика.

б) Теорема Римана — Роха. Сведения о теореме Римана — Роха читатель найдет в работах [6] — [9]. Заметим, что в книге [6] впервые была доказана теорема Римана — Роха в алгебраической геометрии топологоаналитическими средствами. В приложении, написанном Шварценбергером, содержится обзор некоторых дальнейших результатов, в частности по K-теории, возникшей после первой публикации книги Хирцебруха.

в) Топологическая K-теория. К этому разделу относятся лекции [10] и [11].

г) Другие варианты алгебраической K-теории. К этому разделу относятся работы [12] — [14]. Из них фундаментальная книга [12] подводит итог ряду исследований Басса и других авторов по теории функторов K_0 и K_1 на категории колец. Отметим, что для схем неизвестно даже удовлетворительного определения K_1. В работе [13] содержится попытка ввести алгебраический аналог надстройки и дать определение функторов K_i для всех i на категории колец. Пока при $i \geqslant 2$ нет общепринятого определения. Еще один вариант определения K_2 дан в записках семинара Милнора, пока неопубликованных. Он связан с интересными арифметическими вопросами; см., в частности, работу [14].

1. Группы Гротендика $K_\cdot(X)$ и $K^\cdot(X)$

1.1. В первой части этого курса ([2], 25) была введена группа Гротендика $K(X)$, где X — нётерова схема. Эта группа классифицирует «аддитивные функции» от когерентных пучков. Ее изучение должно привести к лучшему пониманию специальной аддитивной функции — характеристики Эйлера — Пуанкаре.

Там же было доказано, что для проективного пространства над полем группа $K(\mathbf{P}^r)$ порождена уже классами локально свободных пучков (и настолько мала, что может быть эффективно вычислена).

Цель этого раздела — доказать аналогичное утверждение в более общей ситуации. Попутно мы выясним, почему группа $K(\mathbf{P}^r)$ оказалась кольцом ([2], 25.12).

В дальнейшем все схемы, если не оговорено обратное, предполагаются нётеровыми.

1.2. Пусть $\mathcal{S}$ — категория когерентных пучков на X, $\mathcal{L}$ — ее полная подкатегория локально свободных пучков. Обозначим через $\mathbf{Z}[\mathcal{S}]$ (соответственно $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$) свободную абелеву группу, порожденную классами $[\mathcal{F}]$ (с точностью до изоморфизма) пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{L}$).

Для каждой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

пучков из $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{L}$) образуем элемент $[\mathcal{F}_2]-[\mathcal{F}_1]-[\mathcal{F}_3]$ и рассмотрим подгруппу $\mathcal{J}$ (соответственно $\mathcal{J}_1$), порожденную такими элементами в $\mathbf{Z}[\mathcal{S}]$ (соответственно $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$).

1.3. Определение.

$$K_\cdot(X) = \mathbf{Z}[\mathcal{S}]/\mathcal{J},$$

$$K^\cdot(X) = \mathbf{Z}[\mathcal{L}]/\mathcal{J}_1.$$

1.4. Для любого пучка $\mathcal{F}$ из $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{L}$) обозначим через $cl_\cdot\mathcal{F}$ (соответственно $cl^\cdot\mathcal{F}$) его образ в $K_\cdot(X)$ (соответственно $K^\cdot(X)$).

Очевидно, $cl_\cdot$ и $cl^\cdot$ — аддитивные функции.

1.5. Предложение. а) *Группа $K^\cdot(X)$ является коммутативным кольцом с единицей, в котором умножение определено формулой*

$$cl\mathcal{F}_1 cl\mathcal{F}_2 = cl(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2). \tag{1}$$

б) *Группа $K_\cdot(X)$ является $K^\cdot(X)$-модулем с внешним умножением, определенным той же формулой.*

Доказательство. Формула (1) определяет структуру кольца уже на $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$, потому что объекты $\mathcal{L}$ (с точностью до изоморфизма) образуют моноид относительно тензорного произведения. Этот моноид ассоциативен и коммутативен.

Далее, подгруппа $\mathcal{J}_1$ образует идеал в $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$, потому что, если последовательность $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ точна, а $\mathcal{F}$ локально свободен, то и последовательность $0 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_3 \to 0$ точна. Поэтому на $K^\cdot(X) = \mathbf{Z}[\mathcal{L}]/\mathcal{J}_1$ переносится структура кольца.

$\mathbf{Z}[\mathcal{S}]$ также является кольцом и $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$-модулем, но $\mathcal{J}$, вообще говоря, не выдерживает умножения на элементы из $\mathbf{Z}[\mathcal{S}]$.

Тем не менее

$$\mathbf{Z}[\mathcal{L}]\mathcal{J} \subset \mathcal{J}, \qquad \mathcal{J}_1\mathbf{Z}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{J}.$$

Это устанавливается так же, как то, что $\mathcal{J}_1$ — идеал. Поэтому $\mathbf{Z}[\mathcal{S}]/\mathcal{J} = K_\cdot(X)$ является $K^\cdot(X)$-модулем.

1.6. Кроме описанных структур, $K_\cdot(X)$ и $K^\cdot(X)$ связаны естественным отображением

$$i\colon K^\cdot(X) \to K_\cdot(X)\colon cl^\cdot\mathcal{F} \longmapsto cl_\cdot\mathcal{F}, \tag{2}$$

которое является гомоморфизмом $K^\cdot(X)$-модулей.

Мы покажем сейчас, что при определенных условиях i есть изоморфизм. Этих условий два: локальное и глобальное.

1.7. Определение. *Схема X называется регулярной, если существует такое целое число n, что любой когерентный пучок на X всюду локально имеет свободную резольвенту длины $\leqslant n$.*

(Это свойство в [2], 25.9, называлось «гладкостью»; здесь мы возвращаемся к терминологии Гротендика.) Можно доказать, что регулярная схема не имеет нильпотентов, а любая ее связная компонента неприводима.

Глобальные резольвенты позволяет в случае $\mathbf{P}^r_A$ строить лемма Серра ([2], 22.3). Мы аксиоматизируем свойство пучка $O(1)$, которое устанавливает эта лемма.

1.8. Определение. *Обратимый пучок $\mathcal{L}$ на нётеровой схеме X называется обильным, если для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существуют целые числа $m, p > 0$ и эпиморфизм $O_X^p \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ (иначе говоря, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ порожден своими глобальными сечениями).*

1.9. Теорема. *Пусть X — нётерова регулярная схема, на которой есть обильный обратимый пучок. Тогда отображение* (2)

$$i\colon K^\cdot(X) \to K_\cdot(X)$$

является изоморфизмом.

В этом случае будем вместо $K_\cdot$ и $K^\cdot$ писать просто $K(X)$. Наоборот, если встречается обозначение $K(X)$, мы молчаливо считаем, что для X выполнены предположения теоремы 1.9.

Доказательство. *Первый шаг: i — эпиморфизм.* Для проверки этого достаточно показать, что всякий когерентный пучок F имеет (конечную) ациклическую) резольвенту, состоящую из локально свободных пучков.

В силу определения 1.8 существует эпиморфизм $O_X^p \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \to 0$ для достаточно больших p и m, т. е. эпиморфизм $(\mathscr{L}^{\otimes m})^p \to \mathscr{F} \to 0$. Это дает начало локально свободной резольвенты; продолжив ее, построим резольвенту длины n, где n — число, фигурирующее в определении 1.7:

$$0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{L}_{n-1} \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{F} \to 0.$$

Здесь $\mathscr{K}$ по определению — ядро последнего гомоморфизма. В силу регулярности X для всех $x \in X$ слой $\mathscr{K}_x$ является свободным $\mathcal{O}_x$-модулем. Покажем, что $\mathscr{K}$ локально свободен.

Пусть $x \in X$, $s_1, \ldots, s_r \in \mathscr{K}_x$ — свободный базис $\mathcal{O}_x$-модуля $\mathscr{K}_x$; $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_r$ — сечения K над некоторым открытым множеством $U \ni x$ — продолжения $s_1, \ldots, s_r$. Построим над U гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X^r|_U \to \mathscr{K}|_U$, соответствующий $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_r$. Его ядро и коядро тривиальны в точке x, потому они тривиальны и в некоторой окрестности V точки x. Это доказывает, что K локально свободен.

Второй шаг: *конструкция обратного отображения* $j\colon K_\cdot(X) \to K^\cdot(X)$. Пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Построим его локально свободную резольвенту

$$0 \to \mathscr{L}_n \to \mathscr{L}_{n-1} \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{F} \to 0$$

и поставим в соответствие классу $\mathrm{cl}_\cdot \mathscr{F}$ в $K_\cdot(X)$ класс $\sum (-1)^i \mathrm{cl}^\cdot(\mathscr{L}_i)$ в $K^\cdot(X)$.

Покажем, что класс $\sum (-1)^i \mathrm{cl}^\cdot(\mathscr{L}_i)$ не зависит от выбора резольвенты, т. е. определит отображение множеств

$$j\colon K_\cdot(X) \to K^\cdot(X).$$

Пусть даны две резольвенты

$$\mathscr{L}_\cdot \to \mathscr{F} \to 0, \qquad \mathscr{L}'_\cdot \to \mathscr{F} \to 0$$

($\mathscr{L}_\cdot$, $\mathscr{L}'_\cdot$ — комплексы пучков).

Допустим, что мы построили третью локально свободную резольвенту $\mathscr{L}''_\cdot$ и ее эпиморфизмы на первые две. Покажем, что тогда классы $\sum (-1)^i cl^\cdot(\mathscr{L}''_i)$ и $\sum (-1)^i cl^\cdot(\mathscr{L}'_i)$ совпадают в $K^\cdot(X)$; этого, очевидно, достаточно. В самом деле, $K_i = \ker(\mathscr{L}''_i \to \mathscr{L}'_i)$ является локально свободным пучком (либо локально свободный фактор-модуль свободного модуля выделяется прямым слагаемым, а проективные модули над локальными кольцами свободны ([2], 26.11). С другой стороны, пучки $\mathscr{K}_i$ образуют комплекс и притом ациклический:

$$0 \to \mathscr{K}_n \to \mathscr{K}_{n-1} \to \ldots \to \mathscr{K}_0 \to 0$$

(ацикличность следует из точной последовательности когомологий для последовательности комплексов $0 \to K_\cdot \to \mathscr{L}''_\cdot \to \mathscr{L}'_\cdot \to 0$ и ацикличности $\mathscr{L}'_\cdot$ и $\mathscr{L}''_\cdot$). Отсюда следует, что в группе $K^\cdot(X)$ элементы $\sum(-1)^i cl^\cdot(\mathscr{L}''_i)$, $\sum(-1)^i cl^\cdot(\mathscr{L}'_i)$ совпадают, ибо $\sum(-1)^i cl^\cdot(\mathscr{L}''_i - \mathscr{L}'_i)) = \sum(-1)^i cl^\cdot(K_i)$.

Остается построить резольвенту $\mathscr{L}''$. Будем строить $\mathscr{L}''_i$ индукцией по i: очередной член должен войти в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_i & \to & \mathscr{L}_{i-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{L}''_i & \to & \mathscr{L}''_{i-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{L}'_i & \to & \mathscr{L}_{i-1} \end{array}$$

Пусть $\mathscr{B}_i = \ker(\mathscr{L}_{i-1} \to \mathscr{L}_{i-2})$, аналогично определим $\mathscr{B}'_i$, $\mathscr{B}''_i$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{L}_i \arrow[r] & \mathscr{B}_i \arrow[r] & \mathscr{L}_{i-1} \\
\mathscr{L}''_i \arrow[r] & \mathscr{D}_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathscr{C}_i \arrow[urr] \arrow[rr] & \mathscr{B}''_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}''_{i-1} \arrow[u] \arrow[d] \\
 & & \mathscr{C}'_i \arrow[urr] \arrow[rr] & \mathscr{B}'_i \arrow[r] & \mathscr{L}'_{i-1} \\
 & & \mathscr{L}'_i \arrow[ur] \arrow[r] & \mathscr{B}'_i \arrow[r] & \mathscr{L}'_{i-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Стрелки $\mathscr{B}''_i \to \mathscr{B}'_i$, $\mathscr{B}''_i \to \mathscr{B}_i$ определены в ней по коммутативности, если $(i-1)$-й член резольвенты $\mathscr{L}''_\cdot$ уже построен.

Во-первых, можно считать, что эти стрелки — эпиморфизмы. Если это не так, то сначала изменим $\mathscr{L}''_{i-1}$. Именно, вместо $\mathscr{L}''_{i-1}$ возьмем $\mathscr{L}''_{i-1} \oplus \mathscr{L}_i \oplus \mathscr{L}'_i$; граничный гомоморфизм в $\mathscr{L}''_{i-2}$ доопределим нулем на новых слагаемых, а отображения на $\mathscr{L}_{i-1}$ и $\mathscr{L}'_{i-1}$ доопределим нулем на $\mathscr{L}'_i$ и $\mathscr{L}_i$ соответственно и граничным гомоморфизмом резольвенты $\mathscr{L}$ (соответственно $\mathscr{L}'$) на $\mathscr{L}_i$ (соответственно $\mathscr{L}'_i$).

Во-вторых, если уже верно, что $\mathscr{B}''_i \to \mathscr{B}'_i$ и $\mathscr{B}''_i \to \mathscr{B}_i$ эпиморфны, достроим последовательно пучки и гомоморфизмы $\mathscr{C}_i$, $\mathscr{C}'_i$, $\mathscr{D}_i$, $\mathscr{L}''_i$ следующим образом.

Положим $\mathscr{C}_i = \mathscr{L}_i \sqcup_{\mathscr{B}_i} \mathscr{B}''_i$[1], $\mathscr{C}'_i = \mathscr{L}'_i \sqcup_{\mathscr{B}'_i} \mathscr{B}''_i$, а гомоморфизмы — проекции.

Положим далее $\mathscr{D}_i = \mathscr{C}_i = \mathscr{C}_i \sqcup \mathscr{C}'_i$ (гомоморфизмы проекции), а в качестве $\mathscr{L}''_i$ возьмем локально свободный пучок с эпиморфизмом на $\mathscr{L}_i$.

Этим закончено построение резольвенты $\mathscr{L}''$; стало быть определение j корректно.

Третий шаг. Уже построены отображения $K^\cdot(X) \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} K_\cdot(X)$. Из определений немедленно следует, что отображение ji является тождественным. Поэтому ядро i тривиально и, значит, i является мономорфизмом групп. Это доказывает теорему.

Нам понадобится еще один технический результат о пучках.

---

[1] Пусть $M \xrightarrow{f} P$, $N \xrightarrow{g} P$ — гомоморфизмы модулей; тогда $M \sqcup_P N = \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = g(n)\}$.

1.10. Предложение. *Пусть Y — нётерова схема и $X \subset Y$ — открытое множество, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $(X, O_Y|_X)$. Тогда существует когерентный пучок $\mathcal{F}'$ на Y такой, что $\mathcal{F}'_X = \mathcal{F}$. Более того, если $\mathcal{F}' \subset \subset \mathcal{G}|_Y$, где $\mathcal{G}$ — пучок на Y, то можно считать, что $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$.*

Вот два полезных приложения:

1.11. Следствие. *Пусть $\mathcal{L}$ — обильный пучок на Y; тогда $\mathcal{L}|_X$ обилен на X.*

Действительно, пусть F *когерентен на* X; $\mathcal{F}'$ его продолжение на Y. Существует эпиморфизм $(\mathcal{L}^{\otimes m})^p \to \mathcal{F}'$. Его ограничение на X дает эпиморфизм $(\mathcal{L}|_X^{\otimes m})^p \to \mathcal{F}$.

Объединив это с очевидным замечанием, что ограничение обильного пучка на замкнутую подсхему обильно, мы получаем довольно большой запас нётеровых схем, обладающих таким пучком. Например, все локально замкнутые подсхемы $\mathbf{P}^r_A$ (где A — нётерово кольцо) имеют обильный обратимый пучок.

1.12. Следствие. *Пусть $Z \subset Y$ — замкнутая подсхема, $X = Y \setminus Z$. Существует последовательность групп*

$$K_\cdot(Z) \to K_\cdot(Y) \to K_\cdot(X) \to 0,$$

в которой первая стрелка индуцирована «продолжением нулем» пучков с Z на Y, а вторая — ограничением пучков с Y на X.

Эта последовательность точна.

Доказательство. Эпиморфность второго отображения сразу следует из 1.10. Точность в члене $K_\cdot(Y)$ здесь нам не понадобится, и мы не будем ее доказывать (см. Борель — Серр [7], предложение 7).

1.13. Доказательство предложения 1.10. Пусть $x \in Y \setminus X$; рассмотрим некоторую аффинную окрестность U точки x в Y. Если мы сможем продолжить $\mathcal{F}$ (сам по себе или как подпучок $\mathcal{G}$) с X на $X \cup U$, то все будет доказано в силу нётеровости Y, потому что строго возрастающая цепочка открытых множеств в Y конечна. В свою очередь достаточно продолжить $\mathcal{F}$ с $X \cap U$ на U, т. е. можно с самого начала считать, что Y аффинная.

Первый шаг. Покажем, что пучок $\mathcal{F}$ на X порождается конечным числом своих сечений, т. е. существует эпиморфизм $O_X^p \to \mathcal{F} \to 0$.

Пусть $Y = \operatorname{Spec} A$; мы можем покрыть X конечным числом открытых множеств $D(f_i) = \operatorname{Spec} A_{f_i}$, $f_i \in A$. Ограничение $\mathcal{F}$ на $D(f_i)$ порождено конечным числом образующих нётерова A_{f_i}-модуля $\Gamma(D(f_i), \mathcal{F})$; после умножения их на надлежащую степень f_i эти сечения можно продолжить до сечений $\mathcal{F}$ над всем X; отсюда следует требуемое.

Второй шаг. Пусть K — ядро эпиморфизма $O_X^p \to \mathcal{F} \to 0$ на X. Пучок O_X^p можно продолжить до O_Y^p; покажем, что K можно продолжить до подпучка $K' \subset O_Y^p$. Если это сделать, мы сможем продолжить $\mathcal{F}$, потому что можно положить $\mathcal{F}' = O_Y^p/K'$.

Следовательно, все будет доказано, если мы докажем второе утверждение предложения 1.10 в случае $Y = \operatorname{Spec} A$.

Пусть M — A-модуль; $\tilde{M}$ — соответствующий пучок на Y, $K \subset M|_X$ — его подпучок; нужно продолжить K до подпучка $\tilde{M}$ на Y.

Положим $X = \bigcup D(f_i)$ (конечное покрытие); $N_i = \Gamma(D(f_i), K) \subset M_{f_i}$. Имеем, очевидно,

$$(N_i)_{f_i} = (N_j)_{f_i} \subset M_{f_i f_j}.$$

Определим $M' = \{m \in M \mid \forall i,\ m f_i/f_i \in N_i\}$.

Я утверждаю, что $\tilde{M}' \subset \tilde{M}$ является искомым продолжением пучка K. Достаточно проверить, что $\tilde{M}'|_{D(f_i)} = K|_{D(f_i)}$ или, иначе, что $M'_{f_i} = N_i$. Вложение $M'_{f_i} \subset N_i$ очевидно из определения; чтобы проверить обратное включение, нужно доказать, что для любого $j \neq i$ всякий элемент из N_i можно представить в виде m'/f_i^k, где $m' f_i/f_i \in N_j$. Действительно, возьмем элемент m/f_i^k; имеем $f_i(m/f_i^k)/f_j \in (N_i)_{f_j} = (N_j)_{f_i} \Rightarrow f_j^r(m f_i^s - m') = 0$, $m'|_i \in N_j$, что доказывает требуемое.

2. $K(X)$ и циклы

2.1. Группа $K_\cdot(X)$ имеет интересную систему образующих «геометрического» происхождения:

Определение. *Циклом на X называется элемент свободной абелевой группы $Z(X)$, порожденной замкнутыми приведенными неприводимыми подсхемами X.*

Поставим в соответствие циклу $\Sigma a_i Y_i$ элемент $\Sigma a_i cl_\cdot(O_{Y_i}) \in K_\cdot(X)$ (O_Y продолжается нулем вне Y). Очевидно, это определяет гомоморфизм группы циклов в $K_\cdot(X)$.

2.2. Теорема. *Описанный гомоморфизм $Z(Y) \to K_\cdot(X)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Ограничимся случаем $X = \operatorname{Spec} A$. Любой A-модуль F имеет композиционный ряд, факторы которого изоморфны A/p_i, где $p_i \subset A$ — простые идеалы ([2], 24.11). Это доказывает требуемое, потому что $\tilde{A/p}$ — структурный пучок замкнутой, приведенной и неприводимой подсхемы.

(В общем случае можно дать аналогичное доказательство, развив предварительно формализм «точек, ассоциированных с когерентным пучком»).

В случае, когда $K_\cdot(X) = K^\cdot(X)$, что мы будем предполагать дальше, этот результат можно развивать в двух направлениях.

С одной стороны, он дает гомоморфизм группы циклов на X на кольцо $K(X)$. Следовательно, он позволяет ввести в этой группе умножение (по модулю некоторого соотношения эквивалентности, которое нуждается в уточнении). Сейчас мы увидим, что для циклов «в общем положении» это умножение совпадает с пересечением. Таким образом, кольцо $K(X)$ можно рассматривать как некоторый аналог кольца гомологий X (точнее, подкольца, состоящего из алгебраических циклов).

С другой стороны, класс всякого локально свободного пучка в $K(X)$ можно представить линейной комбинацией циклов на X: это — причина

существования *теории характеристических классов*, которой мы займемся позже.

2.3. Теорема. *Пусть $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subset O_X$ — когерентные пучки идеалов, Y_1, Y_2 — соответствующие замкнутые подсхемы X со структурными пучками $O_{Y_i} = O_X/\mathcal{Y}_i$. Тогда, если Y_1, Y_2 находятся «в общем положении», то*

$$cl(O_{Y_1})\, cl(O_{Y_2}) = cl(O_{Y_1 \cap Y_2}).$$

Вот точные определения:

Определение 1. $O_{Y_1 \cap Y_2} = O/(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)$.

(Множество решений объединения двух систем уравнений является пересечением множеств решений каждого из них.)

Определение 2. *Замкнутые подсхемы $Y_1, Y_2 \subset X$ называются «находящимися в общем положении», если для каждой точки $x \in Y_1 \cap Y_2$ существует ее аффинная окрестность $x \in U = \operatorname{Spec} A$ и системы образующих $(f_1, \ldots, f_r)$, $(g_1, \ldots, g_s)$ идеалов $\Gamma(U, \mathcal{Y}_1) \subset A$, $\Gamma(U, \mathcal{Y}_2) \subset A$ соответственно, такие, что (f), (g) и (f, g) являются A-регулярными последовательностями.*

(Напомним, что последовательность элементов $f_1, \ldots, f_r \in A$ называется A-регулярной, если $f_{i+1} \bmod (f_1, \ldots, f_i)$ не является делителем нуля в $A/(f_1, \ldots, f_i)$ для всех i.)

Геометрическое значение этих условий менее очевидно.

Рассмотрим в качестве примера случай когда A — кольцо многочленов над полем, а f_i, g_i — линейные формы. Набор линейных форм составляет A-регулярную последовательность, если и только если он линейно независим (проверить!), откуда легко получить, что два линейных многообразия Y_1, Y_2 в аффинном пространстве X находятся в общем положении, если и только если они не пересекаются при $\dim Y_1 + \dim Y_2 < \dim X$ или пересекаются по подпространству размерности $\dim X - \dim Y_1 - \dim Y_2$ в противном случае. Это соответствует геометрической интуиции.

Отметим еще, что условие определения 2 наложено не только на взаимное расположение Y_1 и Y_2, но и на каждую из них отдельно (в окрестности точек пересечения). Может оказаться, что Y в окрестности некоторой точки вообще нельзя задать A-системой. Это, однако, всегда можно сделать, если в этой точке X и Y регулярны.

2.4. Доказательство теоремы 2.6 затруднено следующими обстоятельствами. Пока мы умеем вычислять умножение лишь для классов локально свободных пучков. Следовательно, для вычисления $cl(O_{Y_1}) \cdot cl(O_{Y_2})$ нужно знать резольвенту хотя бы одного из пучков O_{Y_i}. Но у нас имеются только локальные сведения об этих пучках (и даже в окрестности не всех точек). Мы могли бы вычислить $cl(O_{Y_1}|_U) \cdot cl(O_{Y_2}|_U)$ для некоторых открытых множеств U, но это не дает ответа в $K(X)$, даже если $\{U_i\}$ образуют покрытие X: ядро гомоморфизма $K(X) \to \sqcup K(U_i)$ может быть нетривиально и даже совпадать со всем $K(X)$ (функтор $K(X)$ очень плохо локализуется).

Поэтому нам понадобится более тонкая конструкция, позволяющая вычислить произведения локально.

2.5. Гомологическая интерпретация умножения в $K(X)$. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ — два пучка на X. Рассмотрим локально свободную резольвенту одного из них:

$$0 \to \mathcal{L}_n \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

В силу определений имеем

$$cl(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i),$$

так что

$$cl(\mathcal{F})\, cl(\mathcal{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i)\, cl(\mathcal{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{G}) \qquad (1)$$

(в самом деле, $cl(\mathcal{L})\, cl(\mathcal{G}) = cl(\mathcal{L} \otimes \mathcal{G})$, если даже только $\mathcal{L}$, а не оба пучка локально свободны по предположению 1.5).

С другой стороны, рассмотрим комплекс пучков, получающийся из резольвенты пучка $\mathcal{F}$ тензорным умножением на $\mathcal{G}$:

$$C: 0 \to \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{L}_{n-1} \otimes \mathcal{G} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to 0.$$

По стандартному свойству аддитивных функций находим

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i cl(H_i(C)), \qquad (2)$$

где $H_i(C)$ — i-й пучок гомологий комплекса C.

Теперь мы имеем следующий результат:

2.6. Предложение. а) *Пучки $H_i(C)$ не зависят от выбора резольвенты $\mathcal{L}$, точнее, $H_i(C)$, построенные для разных $\mathcal{L}$, канонически изоморфны.*

Положим $H_i(C) = \operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ (или просто $\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$).

б) *$\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является ковариантным функтором по $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$; он канонически изоморфен $\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.*

в) *$\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ как функтор любого из аргументов при фиксированном другом является i-м производным функтором от тензорного произведения.*

В частности, имеются обычные точные последовательности Tor, *связанных с точными тройками $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \to 0$.*

Набросок доказательства. В книгах Картана — Эйленберга и Маклейна имеется теория Tor для модулей над кольцом A.

В этой теории свойство а) следует из того, что для любых двух резольвент L, L' модуля F существует гомоморфизм $f: L \to L'$, продолжающий тождественный изоморфизм F, и два таких гомоморфизма гомотопны. Поэтому f индуцирует канонически определенный изоморфизм между модулями гомологий комплексов $L \otimes G$ и $L' \otimes G$.

Совпадение $\operatorname{Tor}_0^A(F, G)$ с $F \otimes G$ получается прямым вычислением, потому что тензорное умножение точно справа. Канонический изоморфизм $\operatorname{Tor}_i^A(F, G)$ и $\operatorname{Tor}_i^A(G, F)$ строится сравнением гомологий комплексов $L \otimes G$, $F \otimes L'$ и $L \otimes L'$, где L — резольвента F, а L' — резольвента G.

Возможность перенести все эти конструкции с модулей на квазикогерентные пучки основана на том, что локализация сохраняет точные после-

довательности и тензорные произведения: если F, G — A-модули, $S \subset A$ — мультипликативная система, то из точности последовательности A-модулей $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$ следует точная последовательность A-модулей $0 \to (F_1)_S \to (F)_S \to (F_2)_S \to 0$ и $(F \underset{A}{\otimes} G)_S = F_S \underset{A_S}{\otimes} G_S$. Отсюда вытекает, что для всех i

$$\mathrm{Tor}_i^{A_S}(F_S,\ G_S) = (\mathrm{Tor}_i^A(F,\ G))_S,$$

так что вся теория Tor локализуется.

Из этого предложения и формул (1), (2) получаем следующий результат.

2.7. Теорема. *Для любых двух когерентных пучков $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на X имеем*

$$cl(\mathcal{F})\, cl(\mathcal{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})).$$

2.8. Доказательство теоремы 2.3. Достаточно установить, что в условиях теоремы

$$\mathrm{Tor}_0(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = O_{Y_1} \underset{O_X}{\otimes} O_{Y_2} \simeq O_X/(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2),$$

$$\mathrm{Tor}_i(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = 0 \text{ при } i \geqslant 1.$$

Первое утверждение верно вне зависимости от предположений. Второе достаточно проверить локально.

Если $x \notin Y_1 \cap Y_2$, то либо $(O_{Y_1})_x = 0$, либо $(O_{Y_2})_x = 0$, так что в окрестности таких точек $\mathrm{Tor}(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = 0$.

Пусть теперь $x \in Y_1 \cap Y_2$. Пользуясь тем, что Y_1, Y_2 в общем положении, сведем дело к аффинному случаю: $F = A/(f_1, \ldots, f_r)$, $G = A/(g_1, \ldots, g_r)$. Комплекс Кошуля $K^A(f)$ доставляет свободную резольвенту A-модуля F ([2], 21.6):

$$0 \to K_r^A(f) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} K_1^A(f) \to K_0^A(f) \to 0,$$

где

$$K_n(f) = \bigoplus Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant r,$$

и

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

Тензорно умножая эту резольвенту на $G = A/(g_1, \ldots, g_r)$, получаем комплекс Кошуля $K^{A/g}(f \bmod (g))$, который тоже ацикличен, ибо по условию $f \bmod (g)$ составляет $A/(g)$-последовательность. Отсюда вытекает требуемое.

3. Самопересечение и внешние степени

3.1. В предыдущем разделе мы вычислили произведение в $K(X)$ классов структурных пучков подсхем Y_1, Y_2, находящихся в «общем положении». Сейчас, пользуясь теоремой 2.7, мы вычислим $(cl(O_Y))^2$. Это — другой крайний случай: Y, очевидно, никогда не находится в общем положении по отношению к самому себе. Все же нам придется наложить на Y некоторое условие регулярности, аналогичное тому, которое фигурировало в определении общего положения.

3.2. Определение. *Замкнутая подсхема $Y \subset X$ называется регулярно вложенной, если для каждой точки $y \in Y$ существует такая аффинная окрестность $U = \mathrm{Spec}\, A$, что идеал $\mathcal{J} \subset A$, определяющий Y в U, порождается некоторой A-регулярной последовательностью.*

3.3. Пусть Y — замкнутая подсхема X, $O_Y = O_X/\mathcal{J}$. Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ отличен от нуля лишь на Y; его можно рассматривать как когерентный пучок O_Y-модулей. В дифференциально-геометрической модели $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_Y$ играет роль «конормального расслоения» на Y. Его локальные сечения являются линейными частями функций на X, равных нулю на Y; каждый касательный к X в точке $y \in Y$ вектор можно рассматривать как функцию на этих линейных частях, и эта функция тождественно равна нулю, если вектор касается Y.

3.4. Предложение. *Пусть $Y \subset X$ — регулярно вложенная замкнутая подсхема и $O_Y = O_X/\mathcal{J}$. Тогда O_Y-пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_Y$ локально свободен и ранг его в точке $y \in Y$ равен локальному числу уравнений, определяющих Y в окрестности этой точки.*

Доказательство. Очевидно, вопрос является чисто локальным. Пусть A — некоторое кольцо, $(f_1, \ldots f_r)$ — A-последовательность, $I = \sum_{i=1}^{r} Af_i$. Покажем, что A/I-модуль I/I^2 свободен ранга r. Очевидно, элементы $\bar{f}_i = f_i \bmod I$ являются его образующими; достаточно проверить, что они независимы. Проведем индукцию по r.

При $r = 1$ из того, что $\bar{a}\bar{f} = 0$, где $\bar{a} = a \bmod Af$, следует, что $af = bf^2$ для некоторого $b \in A$, откуда $f(a - bf) = 0$ и, так как f не является делителем нуля в A, $a = bf$, т. е. $\bar{a} = 0$.

Пусть предложение доказано для A-последовательности $(f_1, \ldots, f_{r-1})$. Допустим, что $\sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{f}_i = 0$ в I/I^2, где $\bar{a}_i = a_i \bmod I$, $a_i \in A$. Можно считать, что $\Sigma a_i f_i = 0$ в A: иначе $\Sigma a_i f_i = \Sigma u_i f_i$, $u_i \in I$, и можно заменить a_i на $a_i - u_i$, не изменив $\bar{a}_i$.

Так как f_r не является делителем нуля в кольце $A/(f_1, \ldots, f_{r-1})$, из равенства $a_r f_r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i f_i = 0$ следует, что справедливо $a_r = \sum_{i=1}^{r-1} b_i f_i$, откуда $\sum_{i=1}^{r-1} (a_i + b_i f_r) f_i = 0$. Из предположения индукции находим $a_i + b_i f_r \in \sum_{i=1}^{r-1} Af_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$, так что $a_i \in I$ для всех i, т. е. $\bar{a}_i = 0$, что завершает доказательство.

3.5. Теорема. *Пусть Y — регулярно вложенная замкнутая подсхема в X, $O_Y = O_X/\mathcal{J}$, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок O_Y-модулей, тривиально продолженный на X. Тогда*

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y,\ O_Y) = \Lambda_{O_Y}^i(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2),$$

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F},\ O_Y) = \mathcal{F} \otimes \Lambda_{O_Y}^i(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2).$$

Следствие. *В группе $K(X)$ имеем*

$$cl(\mathscr{F})\, cl(O_Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, cl(\mathscr{F} \underset{O_Y}{\otimes} \Lambda^i_{O_Y}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)).$$

Полагая здесь $\mathscr{F} = O_Y$, получаем обещанную формулу для «самопересечения» Y, т. е. для $cl(O_Y)^2$. С ней связаны следующие интуитивные представления.

В дифференциально-геометрической модели для вычисления самопересечения нужно «сдвинуть» Y. Это можно сделать локально, не выходя за пределы некоторой трубчатой окрестности. В свою очередь трубчатая окрестность Y определяется нормальным расслоением к нему, если Y достаточно регулярно. В нашей ситуации это проявляется в появлении пучка $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$.

3.6. Пример (индекс самопересечения диагонали). Несколько забегая вперед, мы можем дать красивое приложение этой теоремы.

Пусть X — регулярное проективное многообразие над полем, $\Delta_X \subset X \times X$ — диагональ. Конормальный пучок к диагонали — это пучок дифференциалов Ω^1_X (см. раздел 17). В стандартных обозначениях $\Lambda^i(\Omega^1_X) = \Omega^i_X$ — пучок i-мерных внешних дифференциальных форм на X.

Далее, $\dim(X \times X) = 2\dim X$, так что естественно предположить (и можно доказать), что $cl(\Delta_X)^2$ представлен линейной комбинацией пучков с нульмерными носителями. Тогда с классом «самопересечения» диагонали (в $K(X)$) можно связать некоторое целое число «индекс самопересечения». Как вычислить его? В случае, когда $Y_1, Y_2 \subset X$ находятся в общем положении и пересекаются по конечному числу замкнутых точек, естественно назвать их индексом пересечения число

$$\deg(Y_1 \cap Y_2) = \dim H^0(X, O_{Y_1 \cap Y_2}) = \chi(O_{Y_1 \cap Y_2}).$$

Так как χ — аддитивная функция, это определение годится и здесь: применяя его, находим

$$(\Delta_X \cdot \Delta_X) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \chi(\Omega^i_X) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \sum_{j=0}^{\dim X} (-1)^j \dim H^j(X, \Omega^i_X) =$$
$$= \sum_{p=0}^{2\dim X} (-1)^p \dim(\bigoplus_{i+j=p} H^j(X, \Omega^i_X)).$$

Если X определено над полем комплексных чисел, по известной теореме Де Рама — Дольбо — Серра сумма $\bigoplus_{i+j=p} H^j(X, \Omega^i_X)$ изоморфна пространству p-мерных сингулярных когомологий X с коэффициентами в $\mathbf{C}$, так что индекс самопересечения диагонали Δ_X равен обычной эйлеровой характеристике, как и должно быть.

3.7. Доказательство теоремы 3.5. Мы снова можем рассматривать чисто локальную ситуацию; нужно лишь позаботиться о том, чтобы получить *канонический* изоморфизм $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y, O_Y)$ с $\Lambda^i_{O_Y}(J/J^2)$, упомянутый в наброске доказательства предложения 2.6, — иначе мы не сможем склеить эти изоморфизмы в один глобальный.

Пусть A — коммутативное кольцо, $(f_1, \ldots, f_r)$ — A-последовательность, I — идеал, порожденный ею.

Построим комплекс Кошуля $K_\cdot(f)$; стандартный гомоморфизм $K_\cdot(f) \to A/I$ превращает его в свободную A-резольвенту модуля A/I. Из явной формулы для дифференциала в $K_\cdot(f)$ легко получается, что все дифференциалы комплекса $K_\cdot(f) \underset{A}{\otimes} A/I$ нулевые, так что группа его i-мерных гомологий, изоморфная $\mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/I)$ является свободным A/I-модулем ранга $\binom{r}{i}$. Мы определим такие изоморфизмы

$$\psi_f\colon K_\cdot(f) \underset{A}{\otimes} A/I \to \Lambda(I/I^2)$$

(справа стоит комплекс с нулевыми дифференциалами), что для любой другой A-последовательности $(g_1, \ldots, g_r)$, порождающей I (в силу предложения 3.4 она состоит из того же числа элементов), и для любого гомоморфизма комплексов $\varphi\colon K_\cdot(g) \to K_\cdot(f)$, продолжающего тождественное отображение $A/I \to A/I$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} K_\cdot(g) \otimes A/I \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[d, "\varphi \otimes 1"'] & \Lambda_{A/I}(I/I^2). \\ K_\cdot(f) \otimes A/I \arrow[r, "\psi_f"'] & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Допустим, что мы построили такие ψ_f. Тогда они определяют канонический изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/I, A/I) = \Lambda^i_{A/I}(I/I^2),$$

совместимый с локализацией, что доказывает первое утверждение теоремы. Второе немедленно следует отсюда, ибо для любого свободного A/I-модуля F имеем

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/I, F) = H_i(K_\cdot(f) \underset{A}{\otimes} F) = H_i((K_\cdot(f) \underset{A}{\otimes} A/I) \underset{A/I}{\otimes} F = \Lambda^i_{A/I}(I/I^2) \underset{A/I}{\otimes} F,$$

где все равенства означают канонические изоморфизмы, совместимые с локализацией.

Остается определить ψ_f. Пусть $K_p(f) = \bigoplus Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, $K_p(f) \underset{A}{\otimes} A/I = \bigoplus A/I e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$. Положим

$$\psi_f(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \bar{f}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{f}_{i_p},$$

где $\bar{f}_i = f_i \bmod I^2 \in I/I^2$. В силу предложения 3.4 ψ_f является изоморфизмом.

Коммутативность диаграммы (1) достаточно проверить для какого-нибудь одного гомоморфизма резольвент $\varphi_i\colon K_\cdot(g) \to K_\cdot(f)$, ибо остальные ему гомотопны. Его можно построить следующим образом. Пусть $g_i = \sum_{j=1} a_{ij} f_j$, $a_{ij} \in A$, и пусть $K_i(g) = \bigoplus Ae'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_p}$. Положим

$$\varphi(e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_p}) = (\sum_{j=1}^{r} a_{i_1 j} e_j) \wedge \ldots \wedge (\sum_{j=1}^{r} a_{i_p j} e_j).$$

Следующее вычисление показывает, что это гомоморфизм комплексов:

$$\varphi(d(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p})=\varphi\Big(\sum_k(-1)^{k+1}g_{i_k}e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge\hat{e}'_{i_k}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}\Big)=$$

$$=\sum_k(-1)^{k+1}g_{i_k}\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}e_j\Big)\wedge\ldots\wedge\hat{\sum_k}\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}e_j\Big)=$$

$$=d(\varphi(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p})=$$

$$=\sum(-1)^{k+1}\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}e_j\Big)\wedge\ldots\wedge\underbrace{\sum_{j=1}^r\widehat{a_{i_kj}f_j}}_{k\text{-е место}}\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}e_j\Big).$$

$\Big($учесть, что $g_{i_k}=\sum_{j=1}^r a_{i_kj}f_j\Big)$.

Еще одно вычисление, столь же простое, показывает коммутативность (1):

$$\psi_f\cdot(\varphi\otimes 1)(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}\otimes 1)=\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}\bar{f}_j\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}\bar{f}_j\Big)=$$

$$=\bar{g}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar{g}_{i_p}=\psi_g(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}).$$

Это завершает доказательство теоремы 3.5.

3.8. Теорема 3.5 показывает важность операций внешней степени. Покажем сейчас, что их можно перенести на $K^\cdot(X)$. Нетривиальность задачи объясняется тем, что хотя эти операции определены на образующих группы $\mathbf{Z}(\mathscr{L})$, они заведомо нелинейны, так что продолжить их по аддитивности нельзя.

Вот пример: если $X=\operatorname{Spec}k$, то $K^\cdot(X)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Z}$, где изоморфизм достигается сопоставлением каждому линейному пространству над k его размерности, и $\Lambda^i(n)=\binom{n}{i}$. Дело спасается красивым приемом, который придумал Гротендик.

3.9. Предложение. *Пусть $0\to\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}_2\to 0$ — точная последовательность локально свободных пучков конечного ранга над произвольной схемой X. Тогда для всех $n\geqslant 0$ в группе $K(X)$ имеет место тождество*

$$cl^\cdot(\Lambda^n(\mathscr{F}))=\sum_{i=0}^n cl^\cdot(\Lambda^i(\mathscr{F}_1))\cdot cl^\cdot(\Lambda^{n-i}(\mathscr{F}_2)).$$

Доказательство. Пусть сначала $X=\operatorname{Spec}A$ и пучки $\mathscr{F}_i$ соответствуют свободным модулям F_i. Введем в модуле $\Lambda^n(F)$ убывающую фильтрацию, обозначив через $\Lambda^n_i(F)$ подмодуль, порожденный элементами вида

$$a_1\wedge\ldots\wedge a_i\wedge b_{i+1}\wedge\ldots\wedge b_n,\quad\text{где } a_1,\ldots,a_i\in F_1.$$

Очевидно,

$$\Lambda^n(F)=\Lambda^n_0(F)\supset\Lambda^n_1(F)\supset\ldots\supset\Lambda^n_n(F)=\Lambda^n(F_1).$$

Удобно еще положить $\Lambda^n_{n+1}(F)=0$. Построим изоморфизм

$$\varphi\colon\Lambda^iF_1\otimes\Lambda^{n-i}F_2\to\Lambda^n_i(F)/\Lambda^{n-i}_{i+1}(F)\qquad(i=0,\ldots,n).$$

Для этого выберем сечение $s\colon F_2\to F$, определяющее прямое разложение $F=F_1+s(F_2)$, и положим

$$\varphi((a_1\wedge\ldots\wedge a_i)\otimes(b_1\wedge\ldots\wedge b_{n-i}))=$$

$$=a_1\wedge\ldots\wedge a_i\wedge s(b_1)\wedge\ldots\wedge s(b_{n-i})\bmod\Lambda^n_{i+1}(F).$$

В действительности φ не зависит от выбора s, потому что $\operatorname{Im}(s-s')\in F_1$ для любых двух сечений s, s'. То обстоятельство, что φ — изоморфизм, легко проверить, выбрав свободные базы F_1 и F_2. Так как способ конструкции совместим с локализацией, получаем отсюда формулу для классов пучков

$$cl^\cdot(\Lambda^n(\mathscr{F}))=\sum_{i=0}^n cl^\cdot(\Lambda^n_i(\mathscr{F})/\Lambda^n_{i+1}(\mathscr{F}))=\sum_{i=0}^n cl^\cdot(\Lambda^i\mathscr{F}_1\otimes\Lambda^i\mathscr{F}_2),$$

которая доказывает требуемое.

3.10. Теорема. *Для любой схемы X существует и однозначно определена серия отображений*

$$\lambda^i\colon K^\cdot(X)\to K^\cdot(X)\qquad(i=0,1,2,\ldots),$$

удовлетворяющая условиям

$$\lambda^i_r(cl^\cdot(\mathscr{F}))=cl^\cdot(\Lambda^i(\mathscr{F}))$$

для любого когерентного локально свободного O_X-модуля $\mathscr{F}$.

Доказательство. Рассмотрим группу *по умножению* $1+tK^\cdot(X)[[t]]$ формальных степенных рядов с коэффициентами в кольце $K^\cdot(X)$ и определим гомоморфизм

$$\lambda_t\colon\mathbf{Z}[\mathscr{L}]\to 1+tK^\cdot(X)[[t]],$$

положив

$$\lambda_t(\mathscr{F})=1+\sum_{i=1}^\infty cl^\cdot(\Lambda^i(\mathscr{F}))\,t^i$$

для локально свободных пучков $\mathscr{F}$ и доопределив λ_t на $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$ по аддитивности. Из предложения 3.9 тогда следует, что подгруппа в $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$, порожденная элементами $[\mathscr{F}]\to[\mathscr{F}_1]\to[\mathscr{F}_2]$ для точных последовательностей $0\to\mathscr{F}_1\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}_2\to 0$, принадлежит ядру λ_t, так что λ_t можно определить на $K^\cdot(X)$. Положим для любого элемента $x\in K^\cdot(X)$

$$\lambda_t(x)=1+\sum_{i=1}^\infty\lambda^i(x)\,t^i.$$

Это устанавливает существование операций λ^i; единственность очевидна.

Имеем, в частности, $\lambda^0(x)=1$, $\lambda^1(x)=x$ для всех x.

3.11. Пример. Рассмотрим проективное пространство $\mathbf{P}^r$ над некоторым полем. Кольцо $K(\mathbf{P}^r)$ было вычислено ранее ([2], 25.11): полагая $l=cl(O_{\mathbf{P}^r}(1))$, имеем

$$K(\mathbf{P}^r)\simeq\mathbf{Z}[X]/((1-X)^{r+1}),$$

где изоморфизм ставит в соответствие $X\rightsquigarrow l$.

Гомоморфизм λ_t легко вычислить, потому что x — класс обратимого пучка, так что $\lambda_t(l^i)=1+l^it$. Отсюда находим

$$\lambda_t\Big(\sum_{i=0}^r a_il_i^i\Big)=\prod_{i=0}^r(1+l^it)^{a_i}.$$

4. Проективизированные расслоения

4.1. В первой части этого курса было вычислено кольцо $K(\mathbf{P}_k^r)$, где k — поле. Цель ближайших трех разделов — обобщить этот результат на случай, когда вместо k рассматривается произвольная регулярная нётерова схема, имеющая обильный пучок.

Этот фундаментальный результат подобен теореме периодичности Атья — Ботта.

Нам придется провести некоторую подготовительную работу, чтобы определить понятия, входящие в формулировку основной теоремы.

4.2. Прежде всего, проективное пространство $\mathbf{P}_k^r = \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_r]$ мы обычно записывали с «выделенной системой координат» $(T_0, \ldots, T_r)$. В бескоординатной форме $\mathbf{P}_k^r = \operatorname{Proj} S_k(E)$, где E — $(r+1)$-мерное линейное пространство над k, а $S_k(E)$ — его симметрическая алгебра над k с естественной градуировкой. Аналогично $\mathbf{P}_A^r = \operatorname{Proj} S_A(E)$ для любого кольца A и любого свободного A-модуля E.

Заменив кольцо A на произвольную схему X, а свободный A-модуль E на локально свободный пучок $\mathscr{E}$ над X, мы можем аналогично построить схему, которая будет обозначаться через $\operatorname{Proj} S_{O_X}(\mathscr{E})$ или $\mathbf{P}(\mathscr{E})$. Проще всего описать ее явно, выбрав такое аффинное покрытие $X = \bigcup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, что $\mathscr{E}$ тривиален на всех U_i. Тогда мы можем построить схемы $P_i = \operatorname{Proj} S_{A_i}(\Gamma(U_i, \mathscr{E}))$. Ограничение P_i над $U_i \cap U_j$ склеивается с ограничением P_j на $U_i \cap U_j$ очевидным образом; морфизмы $P_i \to U_i$ склеиваются в морфизм $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$.

Важно заметить, что обратимые пучки $O_{P_i}(1)$, определенные на каждом из P_i, также естественно склеиваются и дают обратимый пучок $O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

4.3. Мы часто будем пользоваться следующими фактами, которые оставим без доказательства:

а) Если X регулярна, то $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ регулярна.

б) Если на X есть обильный пучок $\mathscr{L}$, то и на $P(\mathscr{E})$ есть обильный пучок: $\mathscr{L} \underset{O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}}{\otimes} O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(n)$ обилен для $n \geqslant n_0$ ([1], гл. II, предложение 4.6.13 (ii)).

Схема $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, построенная для данного локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X, и будет для нас заменой проективного пространства; мы вычислим кольцо $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

Ответ, очевидно, должен зависеть от $K(X)$; эта зависимость отражается в существовании гомоморфизма колец $K(X) \to K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, индуцированного морфизмом схем $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$. Мы построим сейчас этот гомоморфизм в общем случае.

4.4. Предложение. *Для любого морфизма схем $f\colon X \to Y$ можно определить канонический гомоморфизм колец $f^*\colon K^\cdot(Y) \to K^\cdot(X)$, так что $X \rightsquigarrow K^\cdot(X)$ превращается в контравариантный функтор из категории нётеровых схем в категорию колец.*

Набросок доказательства. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на Y. Тогда определен когерентный пучок $f^*(\mathscr{F})$ на $\mathscr{F}$ — «обратный образ» пучка $\mathscr{F}$. Она однозначно определяется следующими свойствами:

а) Если f — открытое вложение X в Y (т. е. отождествляет X с открытым подмножеством $f(X)$ в Y, а O_X — с $O_Y|_{f(X)}$, то $f^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F}|_X$.

б) Если $f\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ — морфизм аффинных схем, отвечающий гомоморфизму колец $\varphi\colon B \to A$, а $\mathscr{F} = \widetilde{F}$, то $f^*(\mathscr{F}) = \widetilde{A \underset{B}{\otimes} F}$, где A рассматривается как B-алгебра относительно φ.

в) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

г) f^* есть ковариантный функтор $\mathscr{S}_Y \to \mathscr{S}_X$, который в случае б) совпадает с обычной заменой кольца.

Мы опускаем доказательство существования «обратного образа», которое сводится к проверке различных совместимостей. Вот доказательство единственности и заодно метод вычисления: пусть $V \subset Y$, $U \subset f^{-1}(V)$ — аффинные открытые множества. Из диаграммы вложений i, j и ограничения f на U, V

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "g"] & V \arrow[u, hook, "j"'] \end{tikzcd}$$

находим, пользуясь свойствами а), б), в):

$$\Gamma(U, i^*f^*(\mathscr{F})) = \Gamma(U, g^*j^*(\mathscr{F})) = \\ = \Gamma(U, O_U) \underset{\Gamma(V, O_V)}{\otimes} \Gamma(V, j^*(\mathscr{F})) = \Gamma(U, O_U) \underset{\Gamma(V, O_V)}{\otimes} \Gamma(V, \mathscr{F}|_V).$$

Стало быть, сечения пучка $f^*(F)$ однозначно определены для достаточно мелких открытых подмножеств $U \subset X$; так же легко определить отображения ограничения.

Из локального описания вытекают следующие факты: во-первых, если $\mathscr{F}$ локально свободен, то $f^*(\mathscr{F})$ локально свободен и имеет тот же ранг; во-вторых, f^* переводит короткие точные последовательности *локально свободных* пучков в точные последовательности; в-третьих, для таких пучков

$$f^*(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2) = f^*(\mathscr{F}_1) \otimes f^*(\mathscr{F}_2).$$

Отсюда следует, что f^* индуцирует некоторый гомоморфизм колец $K^\cdot(Y) \to K^\cdot(X)$, который мы обозначим также f^*. Равенство $(fg)^* = g^*f^*$ следует из в).

Отметим, что $f^*\lambda^i = \lambda^i f^*$: это также немедленно следует из локального описания f^*.

Теперь мы можем сформулировать основной результат:

4.5. Теорема. *Пусть X — связная регулярная нётерова схема с обильным пучком, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на ней, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ — схема, описанная в п. 4.1, $\mathscr{L} = O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ — стандартный обратимый пучок на ней.*

Тогда кольцо $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, как $K(X)$-алгебра, имеет вид

$$K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = K(X)[T]/\Big(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\lambda^{r+1-i}(e)\,T^i\Big),$$

где $e = cl(\mathscr{E}) \in K(X)$,

$$T \bmod \Big(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\lambda^{r+1-i}(e)\,T^i\Big) = l = cl(\mathscr{L}) \subset K(\mathbf{P}(\mathscr{E})).$$

В частности, $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ является свободным $K(X)$-модулем ранга $r+1$.

Пример. Пусть $\mathscr{E}$ свободен: $\mathscr{E} = (O_X)^{r+1}$, X — k-схема, где k некоторое поле. Тогда $e = r+1$, $\lambda^i(e) = \binom{r+1}{i}$; с другой стороны, $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = X \times \mathbf{P}^r_k$. Отсюда

$$K(X \times \mathbf{P}^r_k) = K(X)[T]/(1-T)^{r+1} = K(X) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} K(\mathbf{P}^r_k).$$

При $k = \mathbf{C}$, $r = 1$ этот результат аналогичен теореме (комплексной) периодичности Ботта (в формулировке Атья — Ботта) для топологического K-функтора, потому что прямая $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ гомеоморфна римановой сфере S^2.

Доказательство. Мы должны установить следующие утверждения:

4.6. Утверждение. $\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^{r+1-i}(e))\,l^i = 0$, *где* $f\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — *естественная проекция.*

4.7. Утверждение. *Элементы l^i $(i = 0, \ldots, r)$ линейно независимы над $K(X)$.*

4.8. Утверждение. *Элементы l^i, $i \in \mathbf{Z}$, порождают $K(X)$-алгебру $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.*

Пункты 4.9 и 4.10 будут посвящены доказательству утверждения 4.6; раздел 5 — доказательству утверждения 4.7, наконец, раздел 6 — доказательству 4.8.

Для доказательства 4.6 нам понадобится одно вспомогательное предложение, представляющее самостоятельный интерес.

4.9. Предложение. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на схеме X; $f\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — естественное отображение. Тогда существует канонический эпиморфизм*

$$f^*(\mathscr{E}) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1) \to 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathscr{E} = \widetilde{E}$, где E — свободный A-модуль. Тогда в обозначениях ([2], 23) имеем

$$\Gamma_*(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ f^*(\mathscr{E})) = E \underset{A}{\otimes} S_A(E),$$

$$\Gamma_*(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)) = S_A(E)(1).$$

(Напомним, что $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = \operatorname{Proj} S_A(E)$, а функтор Γ_* ставит в соответствие квазикогерентному пучку $\mathscr{F}$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ градуированный $S_A(E)$-модуль $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ \mathscr{F}(n))$.)

Кроме того, имеется очевидный гомоморфизм модулей

$$E \otimes S_A(E) \to S_A(E)(1),$$
$$e \otimes f \rightsquigarrow ef.$$

Он эпиморфен, потому что E порождает $S_A(E)$. Так как Γ_* есть эквивалентность категории пучков с категорией модулей, этому гомоморфизму отвечает эпиморфизм пучков

$$f^*(\mathscr{E}) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1).$$

Совместимость таких отображений с локализацией по A легко проверяется. Это доказывает требуемое в общем случае.

(На самом деле здесь не обязательно пользоваться общим результатом об эквивалентности категорий, ибо наше утверждение гораздо более элементарно и легко проверяется с помощью явного вычисления групп сечений.)

4.10. Доказательство утверждения 4.6. Из доказанного предложения следует, что существует эпиморфизм

$$f^*(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{L}^{-1} \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}.$$

Пусть a — класс ядра этого эпиморфизма. Так как ядро является локально свободным пучком ранга r, имеем $\lambda^i a = 0$ при $i \geqslant r+1$.

Далее, в обозначениях п. 4.5,

$$f^*(e)\,l^{-1} = 1 + a.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор λ_t (см. п. 3.10):

$$\sum_{i=0}^{r+1}\lambda^i(f^*(e)\,l^{-1})\,t^i = (1+t)\Big(\sum_{i=0}^{r}\lambda^i(a)\,t^i\Big).$$

Положим здесь $t = -1$ и учтем, что для любого пучка $\mathscr{F}$ и обратимого пучка $\mathscr{L}$ имеем $\Lambda^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}) \simeq \Lambda^i(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{L}^i$:

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^i(e))\,l^{-i} = 0,$$

или

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^i(e))\,l^{r+1-i} = 0,$$

откуда соотношение 4.6 получается заменой i на $r+1-i$.

5. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ и принцип расщепления

5.1. В этом разделе мы докажем утверждение 4.7. Для этого нам понадобятся некоторые сведения *о прямых образах* пучков.

Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм, $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Пучок $f_*(\mathscr{F})$ на Y определяется своими сечениями над любым открытым множеством $U \subset Y$

$$\Gamma(U,\ f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(U),\ \mathscr{F}).$$

Он квазикогерентен.

Отображение $\mathscr{F} \rightsquigarrow f_*(\mathscr{F})$ является ковариантным функтором из категории квазикогерентных пучков на X в категорию таких пучков на Y. Если

$X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $\varphi\colon B \to A$ — гомоморфизм колец, то f_* соответствует функтору, который каждому A-модулю F ставит в соответствие B-модуль $F_{[\varphi]}$, совпадающий как группа с F; действие B на $F_{[\varphi]}$ определяется так: $b_{\varphi} s = \varphi(b) s$ для всех $b \in B$, $b \in B$, $s \in F$.

В случае, когда $Y = \operatorname{Spec} k$, k — поле, имеем

$$f_*(\mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F}).$$

Это показывает, что функтор f_*, вообще говоря, неточен. На самом деле, он, как и Γ, точен слева; его правые производные функторы обозначаются $R^i f_*$, пучки $R^i f_*(\mathscr{F})$ иногда называются *высшими прямыми образами* пучка $\mathscr{F}$.

Пучок $R^i f_*(\mathscr{F})$ ассоциирован с предпучком на Y

$$U \rightsquigarrow H^i(f^{-1}(U), \mathscr{F});$$

при $i > 0$ этот предпучок, вообще говоря, не является пучком.

Следующая формула связывает прямые и обратные образы.

Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм, $\mathscr{F}$ — локально свободный пучок на Y, $\mathscr{G}$ — квазикогерентный пучок на X. Тогда существует естественный изоморфизм пучков

$$f_*(f^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{G}) = \mathscr{F} \otimes f_*(\mathscr{G}).$$

(Так как результат локален по Y, достаточно рассмотреть случай, когда $Y = \operatorname{Spec} A$ и $\mathscr{F} = O_Y^r$. Из определения f^* немедленно получается, что $f^*(\mathscr{F}) = O_X^r$, и требуемое равенство становится очевидным.)

В частности, при фиксированном $\mathscr{F}$ функтор $\mathscr{G} \rightsquigarrow f_*(f^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{G})$ точен слева и его производные совпадают с производными функтора $\mathscr{G} \to \mathscr{F} \otimes f_*(\mathscr{G})$, которые просто равны $\mathscr{F} \otimes R^i f_*(\mathscr{G})$, ибо умножение на $\mathscr{F}$ сохраняет точные последовательности.

Следовательно,

$$R^i f_*(f^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{G}) = \mathscr{F} \otimes R^i f_*(\mathscr{G}) \text{ для всех } i \geqslant 0. \tag{1}$$

Наконец, нам понадобится следующий факт.

Пусть X — нётерова схема, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на ней, $f\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — морфизм, описанный в предыдущем разделе. Тогда для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ все пучки $R^i f_*(\mathscr{F})$ когерентны. В самом деле, они квазикогерентны по определению и имеют локально конечный тип по теореме Серра ([2], 22.1).

5.2. Лемма. *Пусть $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — когерентные пучки на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$. Если $cl(\mathscr{F}) = cl(\mathscr{G}) \in K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, то для всех $n \geqslant n_0$ имеем*

$$cl(f_*\mathscr{F}(n)) = cl(f_*(\mathscr{G}(n)) \in K(X),$$

где

$$\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \underset{\mathbf{P}(\mathscr{E})}{\otimes} \mathscr{L}^n, \quad \mathscr{L} = O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1). \tag{2}$$

Доказательство. Из равенства $cl(\mathscr{F}) = cl(\mathscr{G})$ следует, что в группе $\mathbf{Z}[\mathscr{S}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}]$ имеем

$$\mathscr{F} - \mathscr{G} = \sum_i n_i (\mathscr{U}_i + \mathscr{V}_i - \mathscr{W}_i),$$

где пучки под знаком суммы связаны точными последовательностями: $0 \to \mathscr{U}_i \to \mathscr{W}_i \to \mathscr{V}_i \to 0$ (мы пишем пучки вместо их классов с точностью до изоморфизма). Так как тензорное умножение на $\mathscr{L}$ сохраняет все точные последовательности, имеем для всех n равенство в группе $\mathbf{Z}[S_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}]$

$$\mathscr{F}(n) - \mathscr{G}(n) = \sum n_i (\mathscr{U}_i(n) + \mathscr{V}_i(n) - \mathscr{W}_i(n)),$$

откуда в группе $\mathbf{Z}[\mathscr{S}_X]$

$$f_*(\mathscr{F}(n)) - f_*(\mathscr{G}(n)) = \sum n_i (f_*(\mathscr{U}_i(n) + f_*(\mathscr{V}_i(n) - f_*(\mathscr{W}_i(n)).$$

Из теоремы Серра ([2], 22.1) следует, что при $n \geqslant n_0$ для достаточно мелких $U \subset X$ имеем

$$H^i(f^{-1}(U), \mathscr{U}_i(n)) = 0, \quad i \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\forall i\, R^i f_*(\mathscr{U}_i(n)) = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

так что последовательности

$$0 \to f_*(\mathscr{U}_i(n)) \to f_*(\mathscr{W}_i(n)) \to f_*(\mathscr{V}_i(n)) \to 0$$

точны на X, что доказывает равенство

$$cl(f_*(\mathscr{F}(n)) = cl(f_*(\mathscr{G}(n)).$$

5.3. Лемма. *Предположим, что в $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^{r} f^*(x_i)\, t^i = 0, \qquad x_i \in K(X).$$

Тогда, полагая $\sigma^n(e) = cl(S^n(\mathscr{E})) \in K(X)$ ($S^n(\mathscr{E})$ — n-я симметрическая степень), имеем для всех $n \geqslant n_0$ в $K(X)$

$$\sum_{i=0}^{r} x_i \sigma^{n+i}(e) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x_i = cl(\mathscr{F}_i) - cl(\mathscr{F}'_i)$ в $K(X)$, где $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ — локально свободные пучки на X; положим

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{i=0}^{r} f^*(\mathscr{F}_i(i)), \quad \mathscr{M}' = \bigoplus_{i=0}^{r} f^*(\mathscr{F}'_i(i)).$$

Из условия леммы следует, что в $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ имеем

$$cl(\mathscr{M}) = cl(\mathscr{M}').$$

Согласно предыдущей лемме

$$cl(f_*(\mathscr{M}(n)) = cl(f_*(\mathscr{M}'(n)), \quad n \geqslant n_0,$$

т. е.

$$cl[\bigoplus_{i=0}^{r} f_*(f^*(\mathscr{F}_i) \otimes \mathscr{L}^{n+i})] = cl[\bigoplus_{i=0}^{r} f_*(f^*(\mathscr{F}'_i) \otimes \mathscr{L}^{n+i}].$$

Так как $\mathscr{F}_i$, $\mathscr{F}'_i$ — локально свободные пучки, замечание в конце п. 5.1 показывает, что

$$f_*(f^*(\mathscr{F}_i) \otimes \mathscr{L}^{n+i}) = \mathscr{F}_i \otimes f_*(\mathscr{L}^{n+i}).$$

С другой стороны, из теоремы ([2], 23.6) вытекает, что

$$f_*(\mathscr{L}^{n+i}) = S^{n+i}(\mathscr{E}).$$

Следовательно,

$$f_*(\mathscr{M}(n)) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathscr{F}_i \otimes S^{n+i}(\mathscr{E}),$$

$$f_*(\mathscr{M}'(n)) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathscr{F}'_i \otimes S^{n+i}(\mathscr{E}),$$

откуда и получается утверждение леммы.

5.4. Лемма. *Для всех $n \geqslant 1$ в кольце $K(X)$ имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\, \sigma^{n-i}(e) = 0,$$

где по определению $\sigma^j(e) = 0$ при $j < 0$.

Доказательство. Определим для любого p, $1 \leqslant p \leqslant r+1$, гомоморфизм пучков O_X-модулей

$$d_p\colon \Lambda^p\mathscr{E} \otimes S(\mathscr{E}) \to \Lambda^{p-1}(\mathscr{E}) \otimes S(\mathscr{E}),$$

полагая для всякого открытого множества $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, над которым $\mathscr{E}$ тривиален:

$$d_p((f_1 \wedge \ldots \wedge f_p) \otimes g) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (f_1 \wedge \ldots \wedge f_i \wedge \ldots \wedge f_p) \otimes (f_i \otimes g),$$

где $f_i \in \Gamma(U, \mathscr{E})$, $g \in \Gamma(U, S(\mathscr{E}))$.

Без труда проверяется, что такие гомоморфизмы существуют и что $d_{p-1} \circ d_p = 0$. Обозначим еще через ε естественную проекцию $S(\mathscr{E}) \to O_X$ пучка градуированных алгебр на компоненту нулевой степени; получается комплекс O_X-модулей

$$0 \to \Lambda^{r+1}\mathscr{E} \otimes S(\mathscr{E}) \to \Lambda^r\mathscr{E} \otimes S(\mathscr{E}) \to \ldots \to \Lambda^1\mathscr{E} \otimes S(\mathscr{E}) \xrightarrow{\varepsilon} O_X \to 0.$$

Этот комплекс ацикличен. Действительно, над всяким открытым множеством $U = \operatorname{Spec} A$, над которым $\mathscr{E}$ тривиален и соответствует A-модулю E, комплекс сечений является комплексом Кошуля, построенным для симметрической алгебры $S_A(E)$ и $S_A(E)$-последовательности, состоящей из какого-нибудь базиса E.

Так как d_p отображает $\Lambda^p\mathscr{E} \otimes S^q(\mathscr{E})$ в $\Lambda^{p-1}\mathscr{E} \otimes S^{q+1}(\mathscr{E})$, мы можем разбить этот комплекс в прямую сумму, получив для каждого $n \geqslant 1$ точную последовательность

$$0 \to \Lambda^{r+1}\mathscr{E} \otimes S^{n-r-1}(\mathscr{E}) \to \ldots \to \Lambda^1\mathscr{E} \otimes S^{n-1}\mathscr{E} \to S^n(\mathscr{E}) \to 0,$$

где $S^j(\mathscr{E}) = 0$ при $j < 0$.

Это доказывает лемму.

5.5. Доказательство утверждения 4.7. Пусть $\sum_{i=0}^{r} f^*(x_i)\, t^i = 0$ в кольце $K(X)$. Из леммы 5.3 следует, что тогда $\sum_{i=0}^{r} x_i \sigma^{n+i}(e) = 0$ при $n \geqslant n_0$. Иначе говоря, в кольце $K(x)[[t]]$ степенной ряд

$$\Big(\sum_{i=0}^{r} x_i t^{r-i}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i(e)\, t^i\Big) = F(t) \tag{2}$$

является на самом деле многочленом.

С другой стороны, лемма 5.4 дает тождество

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i(e)\, t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\, t^i\Big) = 1. \tag{3}$$

Поэтому, умножая (2) на $\lambda_{-t}(e)$, получаем

$$\sum_{i=0}^{r} x_i t^{r-i} = F(t) \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\, t^i.$$

Так как старший коэффициент $\lambda^{r+1}(e)$ обратим, сравнение степеней многочленов слева и справа показывает, что такое тождество возможно лишь при $F(t) = 0$, так что $x_i = 0$ при $i = 0, \ldots, r$.

Отметим одно важное следствие из уже доказанных результатов: так называемый «принцип расщепления».

5.6. Предложение. *Пусть X — нётерова регулярная схема с обратимым пучком, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на ней. Тогда существует такой морфизм $Y \xrightarrow{f} X$, где Y — нётерова и регулярна, и такие обратимые пучки $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{r+1}$ на Y, что выполнены следующие два условия:*

а) *Гомоморфизм колец $f^*\colon K(X) \to K(Y)$ является вложением.*

б) *$f^*(e) = l_1 + \ldots + l_{r+1}$, где*

$$e = cl(\mathscr{E}) \in K(X), \quad l_i = cl(\mathscr{L}_i) \in K(Y).$$

Доказательство. Согласно предложению 4.9 у пучка $\mathscr{E}$, поднятого на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, имеется обратимый фактор-пучок; поэтому в $K(\mathbf{P}(\mathscr{E})$ класс $f^*(e)$ распадается в сумму классов обратимого пучка и локально свободного пучка на единицу меньшего ранга. Итерируя эту конструкцию, получаем требуемое; мономорфность f^* следует из утверждения 4.7.

6. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ (окончание)

Здесь мы докажем утверждение 4.8, опуская проверку ряда технических фактов. Доказательство будет разбито на несколько шагов.

6.1. Первый шаг. Цель его — свести задачу вычисления $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ к некоторой задаче о пучках *на* X. Для случая $X = \operatorname{Spec} k$ этот шаг состоит в сопоставлении каждому когерентному пучку на $\mathbf{P}^r_k$ некоторого градуированного модуля над однородным координатным кольцом проективного пространства, т. е. градуированного линейного пространства над k. В общем случае появляются пучки градуированных модулей над пучком алгебр $S(\mathscr{E})$. Нам нужны также функториальные свойства этого соответствия, формализующие то обстоятельство, что «при рассмотрении градуированных объектов конечным числом однородных компонент можно пренебречь» (ср. [2], 23).

Начнем с точных определений.

6.2. Определение категории $\mathfrak{S}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$. *Объекты $\mathscr{M}$ категории $\mathfrak{S}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$* — локально свободные над X пучки градуированных $S(\mathscr{E})$-модулей конечного типа.

Точнее говоря, $\mathscr{M}$ задается, во-первых, набором своих однородных компонент:

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathscr{M}_i, \quad \mathscr{M}_i = 0 \text{ при } i < i_0(\mathscr{M}),$$

где $\mathscr{M}_i$ — локально свободные когерентные пучки на X, и, во-вторых внешним законом композиции

$$S^i(\mathscr{E}) \times \mathscr{M}_j \longrightarrow \mathscr{M}_{i+j}, \quad \forall i,\ j \in \mathbf{Z},$$

который должен удовлетворять обычным аксиомам действия градуированного кольца на градуированный модуль.

Объекты вида $\bigoplus_{i=1}^{m} S(\mathscr{E})(n_i)$ называются свободными; напомним, что $(S(\mathscr{E})(n))_i = S^{n+i}(\mathscr{E})$; закон композиции определяется законом умножения в пучке алгебр $S(\mathscr{E})$.

По определению, $\mathscr{M}$ *имеет конечный тип*, если существуют такие целые числа $i_0 \leqslant i_1$, что естественный гомоморфизм пучков градуированных $S(\mathscr{E})$-модулей

$$\bigoplus_{i=i_0}^{i_1} \mathscr{M}_i \otimes S(\mathscr{E}) \longrightarrow \bigoplus_{i \geqslant i_0} \mathscr{M}_i$$

является эпиморфизмом. В этом случае объекты $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathscr{M}_i$ имеют конечный тип для всех n_0.

Морфизмы категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$. Пусть $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — два объекта из $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$; по определению

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \varinjlim_{n_0} \mathrm{Hom}_{S(\mathscr{E})}\Big(\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathscr{M}_i;\ \bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathscr{N}_i\Big),$$

где справа от знака $\varinjlim$ стоит группа однородных гомоморфизмов пучков градуированных модулей над пучком $S(\mathscr{E})$.

Композиция гомоморфизмов определяется очевидным образом.

Из этого определения следует, что объекты $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ в категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$ изоморфны, если пучки $S(\mathscr{E})$-модулей $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathscr{M}_i$, $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathscr{N}_i$ изоморфны для некоторого n_0. Пучки $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ с такими свойствами называются *TN-изоморфными*.

Так как во всем последующем будут важны лишь классы пучков с точностью до TN-изоморфизма, мы для краткости будем иногда считать объектами категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$ также все пучки, TN-изоморфные описанным в начале этого пункта.

Теперь мы можем сформулировать основной результат первого шага доказательства.

6.3. Предложение. *Пусть $\mathscr{F}$ — локально свободный когерентный пучок на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$. Положим*

$$\alpha(\mathscr{F}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(\mathscr{F}(n)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha(\mathscr{F})_n.$$

Тогда $\alpha(\mathscr{F})$ TN-изоморфен объекту категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$.

Отображение $\mathscr{F} \rightsquigarrow \alpha(\mathscr{F})$ является ковариантным функтором, который устанавливает эквивалентность категории $\mathscr{L}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}$ локально свободных когерентных пучков на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ с некоторой полной подкатегорией категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}(\mathscr{E})$, замкнутой относительно расширений.

Замечание. В этой формулировке неявно содержится утверждение о том, что если $\mathscr{F}$ локально свободен на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, то $f_*(\mathscr{F}(n))$ локально свободен на X при всех $n \geqslant n_0$. Пучки, обладающие последним свойством допускают полную характеризацию: это в точности пучки, плоские над X. Нам этот факт не понадобится.

6.4. Второй шаг. Для применения результата 6.3 нам нужно знать, какие объекты в $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$ соответствуют пучкам вида $f^*(\mathscr{F})(i)$, где $\mathscr{F}$ — когерентный локально свободный пучок на X. В силу 5.1, 5.2 имеем

$$\alpha(f^*(\mathscr{F})(i)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(f^*(\mathscr{F})(n+i)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^{n+i}(\mathscr{E}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} S(i).$$

(Мы можем рассматривать $\mathscr{F}$ как градуированный пучок, для которого $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_i = 0$, $i > 0$.)

6.5. Мы выведем теперь утверждение 4.8 из следующего результата.

Предложение. *Для всякого объекта $\mathscr{M}$ в категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$ существует резольвента вида*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{Z}_r \longrightarrow \mathscr{L}_r \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathscr{L}_0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0, \tag{4}$$

где $\mathscr{L}_i$ $(i = 0, \ldots, r)$ — прямые суммы пучков вида $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\mathscr{E})(j)$ ($\mathscr{F}$ когерентен и локально свободен на X), а $\mathfrak{Z}_r$ имеет конечный убывающий ряд градуированных подпучков, факторы которого изоморфны прямым суммам пучков вида $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} S(\mathscr{E})(j)$.

Действительно, пусть этот результат доказан.

Пользуясь предложением 6.3 и вычислением в п. 6.4, находим, что для всякого локально свободного пучка $\mathscr{F}$ на X существует резольвента, в которой все пучки, кроме последнего, являются прямыми суммами пучков $f^*(\mathfrak{G})(i)$, а у последнего есть композиционный ряд с факторами такого же вида. Переводя это утверждение на язык группы $K(X)$ и учитывая, что

$$cl(f^*(\mathfrak{G})(i) = f^*(cl(\mathfrak{G}))\, l^i$$

в обозначениях п. 4.5, немедленно получаем требуемое.

6.6. Третий шаг. Он будет состоять в доказательстве предложения 6.5.

Пусть $\mathscr{M}$ — произвольный объект из $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$. Так как он конечного типа, существует эпиморфизм

$$\mathscr{L}_0 \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow 0,$$

где $\mathscr{L}_0$ — конечная прямая сумма пучков вида

$$\mathscr{M}_i \otimes S(\mathscr{E}), \quad i \geqslant i_0.$$

Однородные компоненты ядра этого гомоморфизма, очевидно, локально свободны на X; из нётеровости X легко следует, что это ядро имеет конечный тип. Поэтому оно принадлежит категории $\mathfrak{G}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$, и мы можем продолжить

резольвенту такого типа как угодно далеко. Остановимся на r-м члене и обозначим через $\mathfrak{Z}_r$ ядро отображения $\mathcal{L}_r \to \mathcal{L}_{r-1}$.

Мы хотим доказать, что у $\mathfrak{Z}_r$ есть фильтрация с факторами описанного типа. Сначала установим, что *локально* $\mathfrak{Z}_r$ изоморфен прямой *сумме пучков* вида $S(\mathscr{E})(j)$. Для этого нам потребуется следующее обобщение теоремы Гильберта о сизигиях ([2], 25.10).

6.7. Лемма. *Пусть A — нётерово кольцо, $B = A[T_0, \ldots, T_r]$, M — B — модуль конечного типа, проективный над A. Тогда у M есть резольвента, состоящая из проективных B-модулей, длины $r+1$.*

Чтобы не нарушать последовательность изложения, доказательство этой леммы отнесено в последний пункт.

6.8. Вернемся к пучку $\mathfrak{Z}_r$. Для любой точки $x \in X$ существует аффинная окрестность $U = \operatorname{Spec} A$, над которой пучок $\mathscr{E}$ свободен; пусть $\mathscr{E} = \tilde{E}$, где E — свободный A-модуль. Сечения однородных компонент $\mathfrak{Z}_r$ над U являются проективными A-модулями конечного типа; поэтому $N = \Gamma(U, \mathfrak{Z}_r)$ как A-модуль проективен. Кроме того, N является градуированным модулем конечного типа над кольцом $S_A(E)$. Окрестность U можно считать настолько мелкой, что над ней все пучки $\mathcal{L}_i$ из резольвенты (1) изоморфны прямым суммам пучков вида $S(E)(k)$. Поэтому сечения (1) образуют точную последовательность градуированных $S_A(\mathscr{E})$-модулей:

$$0 \to N \to L_r \to \ldots \to L_0 \to M \to 0,$$

где L_i свободны.

В силу леммы 6.7, примененной к M и $B = S_A(E)$, $S_A(E)$-модуль N, рассматриваемый *без градуировки*, проективен и имеет конечный тип.

Отсюда следует, что A-модуль $A \underset{B}{\otimes} N$ проективен и конечного типа. (Здесь A рассматривается как B-алгебра относительно пополнения ε: $B \to A$; $\varepsilon(E) = 0$.) То же верно относительно его однородных компонент, лишь конечное число которых ненулевые.

Поэтому окрестность U можно еще уменьшить так, чтобы над ней $\widetilde{A \underset{B}{\otimes} N}$ стал свободен. Пусть U уже удовлетворяет этому условию.

Я утверждаю, что тогда N свободен как градуированный модуль над $S_A(E)$.

Действительно, поднимая до N элементы однородного свободного A-базиса модуля $A \underset{B}{\otimes} N$, находим гомоморфизм B-модулей

$$L \to M,$$

где L — свободный градуированный B-модуль. Пусть K, C — ядро и коядро этого гомоморфизма. После тензорного умножения на A над B он становится изоморфизмом. Поэтому, обозначая $I = \bigoplus_{i \geqslant 1} S_A^i(E)$, имеем $IK = K$, $IC = C$, откуда следует, что $K = C = 0$, ибо степени ненулевых однородных компонент K и C ограничены слева («градуированная лемма Накаяма», ср. [2], 26.18).

6.9. Предыдущий пункт показывает, что пучок Z_r локально над X изоморфен прямой сумме пучков вида $S(E)(k)$. Покажем, что любой объект $\mathscr{M}$ в категории $\mathfrak{S}\mathscr{M}_{\mathscr{E}}$ с таким свойством допускает фильтрацию, факторы которой изоморфны прямым суммам пучков $\mathscr{F} \otimes S(\mathscr{E})(k)$.

Так как $\mathscr{M}$ конечного типа, существуют такие целые числа $i_0 \leqslant i$, что $\mathscr{M}$ порожден над $S(\mathscr{E})$ своими однородными компонентами степеней от i_0 до i_1.

Если $i_0 = i_1 = i$, то, очевидно, M изоморфен $\mathscr{M}_i \otimes S(\mathscr{E})$: это следует из локального свойства $\mathscr{M}$, о котором мы говорили.

В общем случае индукция по разности $i_0 - i_1$ немедленно показывает требуемое: из локальных соображений следует, что гомоморфизм

$$\mathscr{M}_{i_0} \otimes S(\mathscr{E}) \to \mathscr{M}$$

не имеет ядра, а фактор по нему удовлетворяет условиям, в которых выполнено индуктивное предположение.

6.10. Доказательство леммы 6.7. Напишем резольвенту L длины r модуля M, состоящую из свободных B-модулей конечного ранга и обозначим через N ядро последней стрелки. Для доказательства того, что N проективен, достаточно проверить, что для всех простых идеалов $Q \subset B$ локализация N_Q является B_Q — свободным модулем.

Рассмотрим B_Q как A_P-алгебру (где $P = A \cap Q$) A_P и B_P-нётеровы локальные кольца; пусть $\bar{P}$, $\bar{Q}$ — их максимальные идеалы; $k = A_P/\bar{P}$. Локализуя B-резольвенту модуля M по Q, мы получим B_Q-резольвенту $L_{\cdot} \underset{B}{\otimes} B_Q$ модуля M_Q. Но так как все модули $L_i \otimes B_Q$, а также модули циклов и границ A_P-проективны, то, умножая $L_{\cdot} \underset{B}{\otimes} B_Q$ тензорно на k над A_P, получим (ациклическую) $B_Q \underset{A}{\otimes} k$-резольвенту модуля $M_Q \otimes k$.

Поскольку $B_Q \otimes k$ является локализацией кольца $k[T_0, \ldots, T_r]$, пользуясь теоремой Гильберта о сизигиях получаем, что модуль $N_Q \otimes k$ свободен над $B_Q \otimes k$.

Таким образом, достаточно рассмотреть следующую ситуацию. Дан локальный гомоморфизм нётеровых локальных колец $A_P \to B_Q$ и B_Q-модуль N конечного типа; $N \underset{A_P}{\otimes} k$ свободен над $B_Q \otimes k$ (где k — поле классов вычетов A_P); требуется доказать, что N свободен над B_Q.

Поднимем элементы свободного базиса $N_Q \otimes k$ над $B_Q \otimes k$ до элементов из N и рассмотрим соответствующий гомоморфизм $B_Q^p \to N_Q$. Пусть K, C — его ядро и коядро соответственно.

Из леммы Накаяма легко следует, что $C = 0$; из точной последовательности Tor вытекает, что $K = 0$.

7. $K(X)$ как ковариантный функтор

7.1. Пусть X — проективная нётерова схема над полем k, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на ней. Напомним, что его характеристика $\chi(\mathscr{F})$ определяется формулой

$$\chi(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathscr{F}). \qquad (1)$$

Эта сумма имеет смысл, потому что $\dim H^i(X, \mathcal{F}) < \infty$ и $H^i(X, \mathcal{F}) = \{0\}$ при $i > \dim X$ (теорема Серра).

Попытаемся обобщить это определение. Пусть сначала $X = \operatorname{Proj} R$, где R — градуированная нётерова A-алгебра (A — нётерово кольцо, заменяющее поле k). Тогда естественная замена (1) получится, если в альтернированной сумме вместо $\dim H^i(X, \mathcal{F})$ рассмотреть $\varphi(H^i(X, \mathcal{F}))$, где φ — произвольная аддитивная функция на категории нётеровых A-модулей. (Здесь снова теорема Серра обеспечивает нётеровость H^i и конечность суммы). Так как существует универсальная аддитивная функция $cl_.$ со значениями в группе $K_.(X)$, есть и «универсальная» эйлерова характеристика. Мы можем записать ее в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(\widetilde{H^i(X, \mathcal{F})}) \in K_.(Y), \tag{2}$$

где $\widetilde{H^i(X, \mathcal{F})}$ — пучок на $Y = \operatorname{Spec} A$, модуль глобальных сечений которого совпадает с $H^i(X, \mathcal{F})$.

Наконец, сумму (2) можно переписать еще иначе, если заметить, что структура A-алгебры на R определяет некоторый морфизм $f\colon X = \operatorname{Proj} R \to \operatorname{Spec} A = Y$ и что в обозначениях п. 5.1 имеем

$$\widetilde{H^i(X, \mathcal{F})} = R^i f_* \mathcal{F}.$$

Тем самым сумма (2) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(R^i f_* \mathcal{F}) \in K_.(Y). \tag{3}$$

Это выражение немедленно обобщается на случай морфизма $f\colon X \to Y$, где Y не обязательно аффинная схема. Чтобы оно имело смысл, однако, локально над Y строение f должно допустить применение теоремы Серра. Такие морфизмы можно описать следующим образом, обобщая конструкцию $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ в п. 4.2.

7.2. Пусть X — нётерова схема, $\mathcal{R}$ — квазикогерентный пучок нётеровых градуированных O_x-алгебр над ней. Для каждого открытого аффинного множества $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ определена нётерова градуированная A-алгебра $R = \Gamma(U, \mathcal{R})$, ее проективный спектр $\operatorname{Proj} R$ и морфизм $\operatorname{Proj} R \to U$. Все эти проективные спектры и морфизмы естественно склеиваются над разными U, и определяют морфизм

$$f\colon \operatorname{Proj} \mathcal{R} \to X.$$

Пусть, кроме того, $\mathcal{R}$ как $\mathcal{R}_0$-алгебра порождена пучком $\mathcal{R}_1$; тогда на каждой из схем $\operatorname{Proj} \Gamma(U, \mathcal{R})$ определен обратимый пучок $O(1)$ и все вместе они склеиваются в пучок, который мы будем обозначать $O_Y(1)$, где $Y = \operatorname{Proj} \mathcal{R}$.

Пучок алгебр $\mathcal{R}$ восстанавливается с помощью пучка $O_Y(1)$ с точностью до конечного числа компонент: в силу теоремы Серра существует гомоморфизм алгебр

$$\alpha\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(O_X(n)) \to \mathcal{R},$$

однородные компоненты α_n которого являются изоморфизмами при $n \geqslant n_0$.

7.3. Определение. *Морфизмы $f\colon Y \to X$, описанные в 7.2, называются проективными морфизмами.*

7.4. Примеры. Морфизм $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$, *определенный в* п. 4.2, *проективен.*

Более общо, пусть $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок на X. Обозначая через $S^n(\mathcal{F})$ n-ю симметрическую степень пучка $\mathcal{F}$ над O_X, построим пучок градуированных алгебр $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\mathcal{F}) = S(\mathcal{F})$. Можно проверить, что он нётеров. Тем самым определен проективный морфизм

$$\operatorname{Proj} S(\mathcal{F}) \to X.$$

Наконец, пусть $\mathcal{J} \subset O_X$ — когерентный пучок идеалов на X. Мы можем тогда рассматривать степени $\mathcal{J}^n$ внутри пучка O_X, и образовать пучок алгебр $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}^n$. Его проективный спектр вместе с морфизмом на X называется *моноидальным преобразованием X с центром в пучке $\mathcal{J}$* (или в подсхеме Y, $O_Y = O_X/\mathcal{J}$). Несколько позже мы будем подробно изучать структуру таких морфизмов и поведение $K(X)$ относительно них.

Теперь мы воспользуемся формулой (3), чтобы для всякого проективного морфизма $f\colon Y \to X$ определить гомоморфизм групп $K_.(Y) \to K_.(X)$, обобщающий эйлерову характеристику: Для проверки корректности нам нужен следующий легкий вариант теоремы Серра.

7.5. Лемма. *Пусть $f\colon Y \to X$ — проективный морфизм нётеровых схем, и пусть на X есть обильный пучок, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на Y. Тогда $R^i f_* \mathcal{F}$ — когерентные пучки на X и $R^i f_* \mathcal{F} = 0$ при $i \geqslant i_0$.*

Доказательство. Прежде всего, можно свести все к случаю, когда $Y = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — некоторый локально свободный пучок на X. Действительно, пусть $Y = \operatorname{Proj} \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ порождена над O_X пучком $\mathcal{R}_1$. Так как на X есть обильный пучок, существует эпиморфизм $\mathcal{E} \to \mathcal{R}_1$ ($\mathcal{E}$ локально свободен), определяющий замкнутое погружение $Y \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ (над X). Прямые образы пучка $\mathcal{F}$ совпадают с прямыми образами его «продолжения нулем» на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$.

Поскольку определение $R^i f_* \mathcal{F}$ и свойство пучка быть когерентным локально по X, мы можем считать далее, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, и $\mathcal{E} = \tilde{E}$, где E — свободный A-модуль; а в этом случае утверждение леммы прямо следует из теоремы Серра. (Нётеровость базы обеспечивает существование общего i_0, начиная с которого $R^i f_* \mathcal{F} = 0$).

7.6. Теорема. *Пусть $f\colon Y \to X$ — проективный морфизм, X — гладкая квазипроективная схема. Тогда отображение*

$$\mathcal{F} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(R^i f_* \mathcal{F})$$

является аддитивной функцией на категории когерентных пучков на Y со значениями в группе $K_.(X)$ и, следовательно, определяет гомоморфизм групп

$$f_*\colon K_.(Y) \to K_.(X)$$

(не путать f_* с прямым образом *пучка*!).

Доказательство теоремы 7.6 очень просто и в сущности повторяет доказательство аддитивности эйлеровой характеристики, поэтому мы его не приводим.

7.7. Пример. Пусть $Y = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $l = cl.(O_Y(1)) \in K(Y)$. Все необходимое для вычисления $f(l^i)$, $i \geqslant 0$, нам известно (теорема Серра):

$$f_*(O(i)) = S^i(\mathscr{E}),$$
$$R^k f_*(O(i)) = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 1,\ i \geqslant 0.$$

Отсюда

$$f_*(l^i) = \sigma^i(l), \quad i \geqslant 0.$$

Упражнение. Пользуясь вычислением когомологий пучка $O(i)$ на $\mathbf{P}^r_A$ при $i \leqslant 0$, вычислить $f_*(l^i)$ для отрицательных i.

7.8. Пример. Пусть $i\colon Y \to X$ — замкнутое вложение. Легко видеть, что это — проективный морфизм:

$$Y = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} O_Y t^n\right)$$

(t — вспомогательная «градуирующая» переменная).

Далее, $i_*(\mathscr{F})$ есть «продолжение нулем», так что i_* — точный функтор. Поэтому

$$i_*(cl.(\mathscr{F})) = cl.(i_*(\mathscr{F})).$$

Упражнение. Вычислить i_* для линейного вложения проективных пространств над полем: $\mathbf{P}^s_k \to \mathbf{P}^r_k$, зная явный вид K.

Теперь мы можем установить основные свойства f_*, являющиеся новыми по сравнению со свойствами эйлеровой характеристики:

7.9. Теорема. *Пусть $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ — два проективных морфизма, и на X есть обильный пучок. Тогда морфизм fg тоже проективен и*

$$(fg)_* = f_* g_*.$$

Набросок доказательства. Мы опустим доказательство того, что fg — проективный морфизм (см: [1], гл. II, предложение 5.5.5 (ii) и предложение 4.6.13 (ii)).

Доказательство второго утверждения опирается на следующую лемму.

7.10. Лемма. *В условиях теоремы 7.9 пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на Z. Тогда существует когомологическая спектральная последовательность, для которой*

$$E_2^{p,q} = R^q f_*(R^q g_*(\mathscr{F})),$$

сходящаяся к $R^n(fg)_*(\mathscr{F})$.

Доказательство. Мы применим общую теорему Гротендика о спектральной последовательности произведения функторов (Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры, гл. II, теорема 2.4.1). Ситуация следующая: даны три абелевых категории — *квазикогерентных* пучков на Z, Y, X и два функтора $\mathscr{F}_Z \xrightarrow{g_*} \mathscr{F}_Y \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}_X$. Во всех этих категориях достаточно много инъективных объектов, оба функтора точны слева.

Поэтому для применимости теоремы Гротендика достаточно проверить, что при $q > 0$

$$(R^q f_*)(g_* \mathscr{J}) = 0,$$

если $\mathscr{J}$ — любой инъективный пучок на X.

Пучок $(R^q f_*)(g_* \mathscr{J})$ связан с предпучком на X

$$U \rightsquigarrow H^q(f^{-1}(U),\ g_*(\mathscr{J}));$$

поэтому достаточно доказать, что этот предпучок является нулевым. С другой стороны, группы когомологий можно вычислить по Чеху. Пусть (V_i) — конечное аффинное покрытие $f^{-1}(U)$ на Y; тогда

$$H^q(f^{-1}(U),\ g_*(\mathscr{J})) = \check{H}^q((V_i),\ g_*\mathscr{J}).$$

Но комплекс Чеха $C^q((V_i),\ g_*\mathscr{J})$, как легко видеть, изоморфен комплексу Чеха

$$C^q(g^{-1}(V_i);\ \mathscr{J})$$

покрытия $(g^{-1}(V_i))$ некоторого открытого множества в Z с коэффициентами в $\mathscr{J}$.

Ограничение пучка $\mathscr{J}$ на $Ug^{-1}(V_i) = (fg)^{-1}(U)$ является по-прежнему инъективным пучком. (Это легко следует из определения инъективности и возможности продолжения пучков.)

Поэтому для доказательства леммы достаточно установить следующий результат: пусть $\mathscr{J}$ — инъективный пучок на схеме Z, (U_i) — произвольное конечное покрытие Z; тогда $\check{H}^q((U_i),\ \mathscr{J}) = 0$ при $q > 0$.

Для этого достаточно показать, что комплекс Чеха имеет вид $C^q((U_i),\ \mathscr{J}) = \operatorname{Hom}(\tilde{C}_q,\ \mathscr{J})$, где $(\tilde{C}_q)$ — некоторый комплекс пучков на Z, ациклический в размерностях > 0.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{Z}$ пучок, связанный с постоянным предпучком $\mathbf{Z}$; пусть U — переменное открытое множество; положим

$$\tilde{C}_q(U) = \prod_i{}' \Gamma(U \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_q},\ \mathfrak{Z}),$$

где штрих указывает, что мы рассматриваем лишь симметрические коцепи. Определим далее дифференциал обычной формулой. Тогда ацикличность $\tilde{C}$ получается с помощью известной гомотопии.

7.11. Доказательство теоремы 7.9. Утверждение теоремы следует теперь из леммы 7.10 с помощью обычных соображений «сохранения характеристики Эйлера в спектральной последовательности».

Точнее говоря, пусть

$$\ldots \subset F^p R^n (fg)_*(\mathscr{F}) \subset F^{p+1} R^n (fg)_*(\mathscr{F}) \subset \ldots$$

— такая фильтрация пучка $R^n(fg)(\mathscr{F})$, что ее p-й фактор изоморфен пучку $E_\infty^{p,\,n-p}$ в спектральной последовательности, для которой $E_2^{p,q} = R^p f(R^q g.\mathscr{F})$. Тогда

$$(fg)_*(cl.\mathscr{F}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(R^n(fg)_*(\mathscr{F})) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} cl.(E_\infty^{p,\,n-p}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(E_\infty^n).$$

С другой стороны,

$$g_*(cl.(\mathscr{F})) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q cl.(R^q g_*(\mathscr{F})):$$

$$f_*(g_* cl.(\mathscr{F})) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q f_*(cl.(R^q g_* \mathscr{F})) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^q \sum_{q=0}^{\infty} cl.(R^p f_*(R^q g_* \mathscr{F})) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n-p} cl.(R^p f_*(R^{n-p} g_* \mathscr{F})) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{n} cl.(E_2^n).$$

Но так как комплекс $(E_{r+1}^{\cdot})$ является комплексом гомологий для $(E_r^{\cdot})$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(E_2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(E_3^n) = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(E_\infty^n),$$

что и доказывает требуемое.

7.12. Если $K_. = K^{\cdot} = K$, то гомоморфизм групп f_*: $K(Y) \to K(X)$, вообще говоря, не является гомоморфизмом колец, как легко убедиться хотя бы на примере $Y = \mathbf{P}_k^n$, $X = \operatorname{Spec} k$. Однако следующее частичное свойство мультипликативности справедливо и часто используется, особенно в случае, когда $K_. = K^{\cdot}$.

7.13. Предложение («Формула проекции»). *Пусть f: $X \to Y$ — проективный морфизм, $x \in K_.(X)$, $y \in K^{\cdot}(Y)$. Тогда*

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

Доказательство. В силу аддитивности обеих частей по x, y достаточно считать, что $y = cl^{\cdot}(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — локально свободный пучок на Y и $x = cl.(\mathscr{G})$. Тогда, пользуясь доказанным в разделе 5 равенством

$$R^i f_*(f^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{G}) = \mathscr{F} \otimes R^i f_*(\mathscr{G}),$$

получаем

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = \sum_i (-1)^i cl.(R^i f_*(\mathscr{G} \otimes f^*(\mathscr{F})) =$$

$$= \sum_i (-1)^i cl.(R^i f_*(\mathscr{G}) \otimes \mathscr{F}) =$$

$$= \sum_i (-1)^i cl.(R_i f_*(\mathscr{G})) cl^{\cdot}(\mathscr{F}) = f_*(x) \cdot y.$$

8. γ-фильтрация кольца $K^{\cdot}(X)$

8.1. Определение. *Операции γ^i: $K^{\cdot}(X) \to K^{\cdot}(X)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются формулой*

$$\gamma_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i(x) t^i = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(x) = \sum \lambda^i(x)(t + t^2 + \ldots)^i \in 1 + tK(X)[[t]].$$

8.2. Следующие свойства операций γ^i немедленно получаются из определения:

а) $\gamma_t(x+y) = \gamma_t(x) \cdot \gamma_t(y)$, т. е.

$$\gamma^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \gamma^i(x) \cdot \gamma^j(y);$$

б) $\gamma_t(1) \quad 1 + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}$; $\gamma_t(-1) = 1 - t$;

в) Пусть l — класс обратимого пучка; тогда

$$\gamma_t(l-1) = \gamma_t(l)\gamma_t(-1) = \left(1 + \frac{t}{1-t} l\right) \cdot (1-t) = 1 + t(l-1),$$

$$\gamma_t(1-l) = \frac{1}{\gamma_t(l-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-l)^i t^i.$$

8.3. Определение. *Введем в кольце $K^{\cdot}(X)$ фильтрацию, полагая*

$$F^1 K^{\cdot}(X) = \operatorname{Ker}(K^{\cdot}(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}),$$

где ε — гомоморфизм, ставящий в соответствие классу локально свободного пучка на X ранг его слоя (X считается связным), и

$$F^n K^{\cdot}(X) = \begin{cases} \mathbf{Z}\text{-модуль, порожденный элементами } \gamma_1^{r_1} x_1 \ldots \gamma_k^{r_k} x_k, \\ \text{где } x_i \in F^1 K^{\cdot}(X), \quad \sum r_i \geqslant n. \end{cases}$$

(Мотивировка определения см. ниже, п. 8.12.)

8.4. Без труда проверяется, что $\{F^i K^{\cdot}(X)\}$ — действительно фильтрация кольца; в частности, $F^i K^{\cdot}(X)$ — идеалы, потому что

$$x(\gamma_1^{r_1} x_1 \ldots \gamma_k^{r_k} x_k) = (x - \varepsilon(x))(\gamma_1^{r_1} x_1 \ldots \gamma_k^{r_k} x_k) + \varepsilon(x)(\ldots)$$

и первый член в этой сумме принадлежит $F^{i+1} K(X)$.

Нашей ближайшей задачей будет подробное изучение этой фильтрации. Начнем с простейшего случая.

8.5. Предложение. *Допустим, что аддитивная группа кольца $K^{\cdot}(X)$ порождена классами обратимых пучков на X. Тогда*

$$F^i K^{\cdot}(X) = (F^1 K^{\cdot}(X))^i.$$

Доказательство. Пусть (l_i) — классы обратимых пучков. Так как

$$(l_1 - 1) \ldots (l_i - 1) = \gamma^1(l_1 - 1) \ldots \gamma^1(l_i - 1),$$

то всегда $(F^1 K^{\cdot}(X))^i \subset F^i K^{\cdot}(X)$. Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что $\gamma^i(x) \in (F^1 K^{\cdot}(X))^i$ при всех $i \geqslant 1$, $x \in F^1 K(X)$. В силу формулы 8.2а) можно ограничиться случаем, когда $x = \pm(l-1)$, а этот случай вытекает из формул 8.2а).

8.6. Пример. $F^i K^{\cdot}(\mathbf{P}_k^r) = ((l-1)^i)$, где $l = k(O(1))$. Следующий результат верен в общем случае.

8.7. Предложение. *Пусть на X есть обильный пучок. Тогда $F^1 K^{\cdot}(X)$ является нильрадикалом кольца $K^{\cdot}(X)$.*

Доказательство. Из принципа расщепления (5.6) легко следует, что достаточно установить нильпотентность элементов вида $l-1$, где l — класс обратимого пучка.

Так как на X есть обильный пучок $O_X(1)$, относительно которого определена операция скручивания, для достаточно большого целого числа n существует число m и точная последовательность вида

$$O_X^m \to \mathscr{L}^{-1}(n) \to 0,$$

откуда

$$\mathcal{L} \otimes O_X^m(-n) \to O_X \to 0.$$

Пусть $l_1 = cl.(O_X(1))$, тогда ядро последнего гомоморфизма локально свободно ранга $m-1$, откуда в $K^{\cdot}(X)$ имеем

$$0 = \lambda^m(mll_1^{-n}-1) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\lambda^i(mll_1^{-n}) = (-1)^m\lambda_{-1}(mll_1^{-n}) =$$

$$= (-1)^m(\lambda_{-m}(ll_1^{-n}))^m = (-1)^m(1-ll_1^{-n})^m.$$

Наконец,

$$(1-l) = 1-ll_1^{-n} + l(l_1^{-n}-1),$$

и оба слагаемых нильпотентны, если n достаточно велико.

Следствие. *Если $x \in F^1K(X)$, то $\gamma_t(x)$ является многочленом.*

(Действительно, это верно для $x = \pm(l-1)$ в силу формул 8.2в) и доказанного предложения; принцип расщепления дает результат в общем случае.

Вычислим теперь фильтрацию в кольце $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

8.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на X, $x = cl(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)) - 1$. Тогда*

$$F^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = \sum_{i=0}^{r} F^{k-i}K(X)\,x^i.$$

Доказательство. а) Сначала мы установим, что

$$F^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = \sum_{i=0}^{\infty} F^{k-i}K(X)\,x^i.$$

Обозначим группу, стоящую справа, через $\Phi^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Очевидно, $\{\Phi^k\}$ является некоторой фильтрацией кольца $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, причем $\Phi^k(K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \subset \subset F^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Для доказательства обратного включения поэтому достаточно установить, что

$$\gamma^k(y) \in \Phi^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$$

для всех $k \geqslant 1$ и всех y из некоторой системы образующих аддитивной группы $F^1K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. В качестве такой системы образующих возьмем семейство элементов вида

$$a(l^m-1),\ b,$$

где $a \in K(X)$, $l = x+1$, $m \geqslant 1$, $b \in F^1K(X)$. (Мы отождествляем $K(X)$ с подкольцом $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.) (Проверьте, что это действительно система образующих!).

Включение $\gamma^k(K(X)) \subset \Phi^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ очевидно; поэтому достаточно установить, что

$$\gamma^k(a(l^m-1)) \subset \Phi^k(K(\mathbf{P}(\mathscr{E})).$$

Пусть вообще l_1, l_2 — классы двух обратимых пучков на некоторой схеме. Положим $x_1 = l_1-1$, $x_2 = l_2-1$, $x_{12} = l_1l_2-1$. Тогда имеем, пользуясь 8.2в) и тем, что $x_{12} = x_1x_2+x_1+x_2$:

$$\gamma^k(x_1x_2) = \gamma^k(x_{12}-x_1-x_2) = \sum_{p+q+r=k}\gamma^p x_{12}\gamma^q(-x_1)\gamma^r(-x_2) =$$

$$= \sum_{q+r=k}(-x_1)^q(-x_2)^r + (x_1x_2+x_1+x_2)\sum_{q+r=k-1}(-x_1)^q(-x_2)^r =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,k}(x_1)\,x_2^i,$$

где ненулевой младший член многочлена P_{ik} имеет степень $\geqslant k-i$. Пусть теперь $a = \sum_j(l_1^{(j)}-1)$. Полагая $x_1^{(j)} = l_1^{(j)}-1$, имеем тогда, пользуясь 8.2а) и предыдущей формулой:

$$\gamma^k(ax_2) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x_1^j)\,x_2^i,$$

где Q_i — *симметрический многочлен* от $\{x_1^{(j)}\}$, у которого младшая ненулевая однородная компонента имеет степень $\geqslant k-i$. Пусть S_n — n-я элементарная симметрическая функция от $x_1^{(j)}$; приписывая ей вес n, получаем, что $Q_i(x_1^{(j)})$ можно представить в виде многочлена $R_i(S_n)$, каждый ненулевой одночлен которого имеет вес $\geqslant k-i$. Но по 8.2а)

$$S_n = \gamma^n(a);$$

поэтому

$$\gamma^k(a(l^m-1)) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(\gamma^1a,\ \ldots,\ \gamma^ka,\ \ldots)(l^m-1)^i,$$

где $R_i(\gamma^1a, \ldots, \gamma^ka, \ldots) \in F^{k-i}K(X)$. В силу принципа расщепления это же верно для любых элементов $a \in K(X)$, представленных классами $\mathscr{F} - rk\,\mathscr{F}$ в $\mathbf{Z}[\mathscr{F}]$, где $\mathscr{F}$ локально свободен. Достаточно рассматривать лишь такие a, потому что они порождают всю аддитивную группу $K(X)$. Поскольку к тому же

$$(l^m-1)^i = x^i(l^{m-1}+\ldots+1)^i = x^if(x),$$

где f — многочлен с целыми коэффициентами, получаем равенство (1).

б) Теперь мы должны установить, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} F^{k-i}K(X)\,x^i = \sum_{i=0}^{r} F^{k-i}K(X)\,x^i.$$

Для этого, конечно, нужно воспользоваться тем, что x над $K(X)$ удовлетворяет некоторому полиномиальному соотношению. Оно приведено в п. 4.6 для l; здесь мы несколько преобразуем его.

8.9. Лемма $\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\gamma^i(e-r-1)\,x^{r+1-i} = 0.$

Доказательство. Напомним, что $e = cl(\mathscr{E})$. Имеем

$$\gamma_t(e-r-1) = \frac{\gamma_t(e)}{\gamma_t(r+1)} = (1-t)^{r+1}\lambda_{\frac{t}{1-t}}(e) = \sum_{i=0}^{r+1}\lambda^i(e)\,t^i(1-t)^{r+1-i},$$

так что $\gamma_t(e-r-1)$ — многочлен степени $\leqslant r+1$.

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{r+1}\gamma^i(e-r-1)\,t^{r+1-i} = t^r\gamma_{1/t}(e-r-1) = \sum_{i=0}^{r+1}\lambda^i(e)\,(t-1)^{r+1-i}.$$

Подставляя сюда $t = 1-l = -x$, получаем

$$\sum_{i=0}^{r+1}\gamma^i(e-r-1)\,(-1)^i x^{r+1-i} = \sum_{i=0}^{r+1}\lambda^i(e)\,(-1)^{r+1-i}l^{r+1-i} = 0$$

в силу соотношения п. 4.6, что и доказывает лемму.

Отсюда немедленно следует, что для всех $k \geqslant r+1$ имеем

$$x^k \in \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i}K(X)\,x^i,$$

и, значит, тривиальной индукцией по $k-r$:

$$x^k \in \sum_{i=0}^{r} F^{k-i}K(X)\,x^i.$$

Теорема доказана.

8.10. Следствие. $f_*(F^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))) \subset F^{k-r}K(X)$.

Доказательство. Так как («формула проекции», п. 7.13)

$$f_*(f^*y \cdot x^i) = y f_*(x^j),$$

имеем

$$f_*(F^iK(X) \cdot x^j) \in F^iK(X).$$

Отсюда и из теоремы следует требуемое.

8.11. *Дополнение к принципу расщепления* 5.6. *В обозначениях* п. 5.6 *Y можно выбрать так, что дополнительно будет выполнено условие*

в) $$\forall i \quad f^*(F^iK(X)) = f^*K(X) \cap F^iK(Y).$$

В самом деле, если схема Y получается последовательной конструкцией проективизированных расслоений, то условие в) выполнено для нее в силу теорем 8.8 и 4.5.

8.12. Замечания. γ-фильтрация была придумана Гротендиком в качестве замены более естественной топологической фильтрации группы $K_\cdot(X)$, в которой i-я фильтрационная подгруппа порождена классами пучков с коразмерностью носителя $\geqslant i$.

Эта топологическая фильтрация имеет два недостатка:

а) Она переносится на $K^\cdot(X)$ лишь в случае совпадения $K_\cdot = K^\cdot$.

б) Даже в этом случае неясно, совместима ли она с умножением (положительный ответ известен лишь для многообразий над полем).

К γ-фильтрации приводит следующий ход мыслей.

Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ — его ненулевое сечение. Обозначим через $Y \subset X$ «дивизор нулей» сечение s. Это замкнутая подсхема X, которая локально в окрестности любой точки x определяется главным идеалом $\mathscr{Y}_x = O_x\,\varphi(s_x) \subset O_x$, где $\varphi\colon \mathscr{L} \xrightarrow{\sim} O_x$ — любой изоморфизм. Идеал $\mathscr{Y}_x$, очевидно, не зависит от выбора φ.

Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to O_X^{\psi} \to \mathscr{L} \to O_Y \to 0,$$

так что

$$\gamma^1(cl(\mathscr{L}) - 1) = clO_Y.$$

С другой стороны, любая подсхема, локально задающаяся одним уравнением, не делителем нуля, является нулем сечения некоторого обратимого пучка. Классы структурных пучков таких подсхем порождают некоторую подгруппу первой топологической фильтрационной группы в $K(X)$. Поэтому можно считать $F^1K(X)$ подходящей заменой этой группы в общем случае. После этого группы $F^nK(X)$ практически однозначно определяются, если мы хотим совместимости определений с f^* и с умножением.

В самом деле, нужно воспользоваться принципом расщепления, чтобы представить элемент $a \in F^1K(X)$ в виде $\sum (l_i - 1)$. Тогда k-я симметрическая функция от $l_i - 1$ должна попадать в $F^kK(X)$. Операции γ — лишь удобное алгебраическое оформление этих соображений.

В следующем разделе связь γ-фильтрации с размерностью будет изучена более подробно. Однако топологическая фильтрация, которую мы введем, будет определяться более сложно, что позволит установить ее совместимость с умножением.

9. Фильтрация и размерность

Наша ближайшая цель — доказательство следующей теоремы.

9.1. Теорема. *Пусть X — регулярная нётерова схема размерности d с обильным пучком. Тогда $F^{d+1}K(X) = 0$.*

Для доказательства нам придется сначала ввести другую фильтрацию —«топологическую»— $F^i_{\mathrm{top}}K(X)$. Для нее утверждение, аналогичное теореме 9.1, получается «по определению». Затем мы сравним две фильтрации.

9.2. Определение. *$F^i_{\mathrm{top}}K(X)$ — множество элементов $x \in K(X)$, обладающих следующим свойством.*

Для всякого замкнутого подмножества $Y \subset X$ существует такой конечный комплекс $\mathscr{L}$ локально свободных пучков на X

$$0 \to \ldots \to \mathscr{L}_i \to \mathscr{L}_{i+1} \to \ldots \to 0,$$

что

$$x = \sum (-1)^i\, cl(\mathscr{L}_i) \overset{\mathrm{def}}{=} cl(\mathscr{L}_\cdot)$$

и

$$\operatorname{codim}_Y(\operatorname{supp} H^\cdot(\mathscr{L}) \cap Y) \geqslant i,$$

где $\operatorname{supp} H^\cdot(\mathscr{L}) = \bigcup_i \operatorname{supp} H^i(\mathscr{L})$.

9.3. Предложение. *$\{F^i_{\mathrm{top}}K(X)\}$ — фильтрация кольца $K(X)$, для которой $F^{d+1}_{\mathrm{top}}K(X) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что для любого топологического пространства Y и неприводимого замкнутого подмножества $Z \subset Y$ коразмерность $\operatorname{codim}_Y Z$ определяется как верхняя граница длин цепочек замкнутых неприводимых множеств, содержащих Z. Если $Z = \bigcup Z_i$, где Z_i — неприводимые компоненты, то по определению

$$\operatorname{codim}_Y(Z) = \inf_i \operatorname{codim}_Y(Z_i).$$

Легко проверить, что последняя формула тогда остается справедливой, даже если не предполагать, что Z_i неприводимы.

Отсюда немедленно следует, что $F^i_{\mathrm{top}}K(X)$ — группы. Действительно, пусть дано замкнутое множество $Y \subset X$ и элементы $x_1, x_2 \in K(X)$. Если $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ — комплексы, удовлетворяющие условиям 9.2 соответственно для x_1, x_2 и Y, то $\mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$ годится для $x_1 + x_2$. Докажем теперь, что если $x_1 \in F^i_{\mathrm{top}}K(X)$, $x_2 \in F^j_{\mathrm{top}}K(X)$, то

$$x_1x_2 \in F^{i+j}_{\mathrm{top}}K(X).$$

Пусть $Y \subset X$ — замкнутое множество. Найдем такой комплекс $\mathcal{L}_1$, что $x_1 = cl(\mathcal{L}_1)$ и

$$\operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap Y) \geqslant i.$$

Далее, найдем такой комплекс $\mathcal{L}_2$, что $x_2 = cl(\mathcal{L}_2)$ и

$$\operatorname{codim}_{\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap Y} (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2) \cap (\operatorname{supp}(\mathcal{L}_1) \cap Y)) \geqslant j.$$

Нетрудно видеть, что

$$x_1 x_2 = cl(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2).$$

Предположим, что мы докажем включение

$$\operatorname{supp} H(L_1 \otimes L_2) \subset \operatorname{supp} H(L_1) \cap \operatorname{supp} H(L_2).$$

Тогда, пользуясь тривиальными неравенствами, верными для $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3$:

$$\operatorname{codim}_{Y_3} Y_1 \geqslant \operatorname{codim}_{Y_3} Y_2$$
$$\operatorname{codim}_{Y_3} Y_1 \geqslant \operatorname{codim}_{Y_2} Y_1 + \operatorname{codim}_{Y_3} Y_2,$$

найдем

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \cap Y) &\geqslant \\ &\geqslant \operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap H(\mathcal{L}_2) \cap Y) \geqslant \\ &\geqslant \operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap Y) + \\ &\qquad + \operatorname{codim}_{\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \cap Y)} (M) \geqslant i + j,\end{aligned}$$

где

$$M = \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2) \cap Y.$$

Остается, следовательно, проверить лемму.

9.4. Лемма $\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \subset \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что для всякой точки $x \in X$, в которой комплекс $(\mathcal{L}_2)_x$ ацикличен, комплекс $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)_x$ также ацикличен.

Так как $(\mathcal{L}_2)_x$ — комплекс, состоящий из свободных модулей над локальным кольцом O_x, он распадается в прямую сумму комплексов вида

$$\mathcal{L}: 0 \to O_x e_i \xrightarrow{d} O_x e_{i+1} \to 0,$$

где $de_i = e_{i+1}$, $\deg e_i = i$, $\operatorname{Ann} e_i = \operatorname{Ann} e_{i+1} = \{0\}$.

Достаточно, следовательно, проверить, что $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}$ ацикличен. Можно считать даже, что $i = 0$. Имеем

$$(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L})_i = \mathcal{L}_{1,i} e_0 \oplus \mathcal{L}_{1,i-1} e_1,$$
$$d(l_i e_0 + l_{i-1} e_1) = dl_i e_0 + (dl_{i-1} + (-1)^i l_i) e_1.$$

Элемент $l_i e_0 + l_{i-1} e_1$ является циклом, если

$$dl_i = 0, \quad dl_{i-1} + (-1)^i l_i = 0.$$

Тогда

$$l_i e_0 + l_{i-1} e_1 = (-1)^{i+1} dl_{i-1} e_0 + l_{i-1} e_1 = (-1)^{i-1} d(l_{i-1} e_0),$$

что и доказывает лемму.

Тем самым умножение в кольце $K(X)$ совместно с $F^i_{\text{top}} K(X)$. Наконец, утверждение

$$F^{d+1}_{\text{top}} K(X) = 0$$

получается прямо из определения, если применить его к $Y = X$ и учесть, что всякий комплекс $\mathcal{L}_\cdot$, для которого

$$\operatorname{codim}_X (\operatorname{supp} H^\cdot(\mathcal{L}_\cdot)) \geqslant d + 1$$

ацикличен, так что $cl(\mathcal{L}_\cdot) = 0$. Предложение 9.3 этим доказано.

9.5. Лемма. *Пусть l_1, l_2 — классы обратимых пучков на квазипроективной схеме конечного типа X. Тогда*

$$l_1 - l_2 \in F^1_{\text{top}} K(X)$$

(ср. п. 8.12).

Прежде, чем доказывать эту лемму, выведем из нее теорему 9.1.

9.6. Доказательство теоремы 9.1. Пусть $\sum_j i_j \geqslant d + 1$; мы хотим доказать, что

$$\gamma^{i_1} x_1 \ldots \gamma^{i_k} x_k = 0$$

для любых $x_j \in F^1 K(X)$.

Согласно принципу расщепления существует морфизм $f: Y \to X$ такой, что все элементы $f^*(x_j) \in K(Y)$ содержатся в подкольце $K(Y)$, которое порождено конечным числом классов обратимых пучков на Y. Пусть $x = \gamma_1^{i_1} x_1 \ldots \gamma^{i_k} x_k$; лемма 9.5 и простое рассуждение, как и в п. 8.5, показывают, что

$$f^*(x) \in F^{d+1}_{\text{top}} K(Y).$$

(Учесть, что группы F^i_{top} образуют фильтрацию кольца.)

Заметим теперь, что Y получается из X конечным числом шагов, каждый из которых состоит в построении схемы $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ для некоторого локально свободного пучка $\mathcal{E}$ над предыдущей схемой. Если $\mathcal{E}$ — пучок ранга $r + 1$ над X, то $\dim \mathbf{P}(\mathcal{E}) - \dim X = r$. Кроме того, $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ является свободным $K(X)$-модулем и существует базис $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ над $K(X)$, содержащий элемент вида $\prod_{i=1}^{s} (l_i - 1)$, где l_i — классы обратимых пучков. (Например, можно взять $l_i = cl(O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1))$ для всех i). Отсюда следует, что $K(Y)$ является свободным $K(X)$-модулем и что существует элемент базиса этого модуля, имеющий вид $\prod_{i=1}^{s} (l_i - 1)$, где $s = \dim Y - \dim X = \dim X - d$. Но $f^*(x) \prod_{i=1}^{s} (l_i - 1) \in F^{s+d+1}_{\text{top}} K(Y) = F^{\dim Y + 1}_{\text{top}} K(Y) = 0$. Поэтому $f^*(x) = 0$ и $x = 0$, что и требовалось доказать.

9.7. Доказательство леммы 9.5. а) Установим прежде всего следующее вспомогательное утверждение: *пусть $x_1, \ldots, x_r \in X$ — конечное число замкнутых точек: $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X. Существует такое d, что для всех достаточно больших n, делящихся на d, существует сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(n))$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_r$* (скручивание, как обычно, определяется с помощью фиксированного обильного пучка $O(1)$).

Начнем с частного случая: $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда O_X, очевидно, обилен. Проверим наше утверждение для X и O_X. Пусть $\mathcal{L} = \widetilde{L}$, $\mathfrak{p} \subset O_X$ —

наибольший пучок идеалов, определяющий замкнутое множество $\bigcup_{k=1}^{r} x_k$. Тогда эпиморфизм пучков

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L} \to 0$$

индуцирует эпиморфизм групп сечений. Но, как нетрудно видеть, пучок $\mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L}$ сосредоточен на $\bigcup_{k=1}^{r} x_k$, и $\Gamma(X, \mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{k=1}^{r} k(x_k)$. Рассмотрим сечение, равное единице во всех точках x_k, и поднимем его до сечения пучка $\mathcal{L}$. Оно удовлетворяет нужным условиям.

Перейдем теперь к общему случаю.

В силу [1], гл. II, 4.5.4 можно найти такое d_0, что есть сечение $f \in \Gamma(X, O(d_0))$ со свойствами $\bigcup x_i \subset D_+(f)$ и $D_+(f)$ — аффинное множество.

Пользуясь уже установленным частным случаем, найдем сечение $s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L})$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_k$. По лемме Серра есть такое число d_1, что сечение $t = f^{\otimes d_1} \otimes s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L}(d_0 d_1))$ продолжается на все X. Положим $d = d_0 d_1$.

Имеем $f^{\otimes d_1} \in \Gamma(X, O_X(d)) \Rightarrow t \otimes f^{kd_1} \in \Gamma(X, O_X((k+1)d))$ для всех $k \geqslant 0$. Это и есть сечение, которое нам нужно.

б) Будем доказывать теперь, что $l_1 - l_2 \in F^1_{\mathrm{top}} K(X)$. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество: Y_i $(i = 1, \ldots, r)$ — его неприводимые компоненты, $x_i \in Y_i$ — замкнутые точки. Тогда для достаточно большого n имеются сечения

$$O_X \to \mathcal{L}_1(n), \quad O_X \to \mathcal{L}_2(n),$$

(где $l_i = cl(\mathcal{L}_i)$), не обращающиеся в нуль в $x_1, \ldots, x_r$.

Складывая получающиеся комплексы

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0 \text{ и } 0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \to 0,$$

находим комплекс

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \oplus O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0,$$

класс которого (в смысле определения 9.2) в кольце $K(X)$ равен $l_1 - l_2$. С другой стороны, этот комплекс ацикличен в точках x_i, поэтому носитель его гомологий не содержит ни одной из неприводимых компонент множества Y и, значит, его пересечение с Y имеет в Y коразмерность $\geqslant 1$. Это завершает доказательство леммы и теоремы 9.1.

10. Связь между $K(X)$ и $\operatorname{Pic} X$

10.1. Группа $\operatorname{Pic} X$ изучена значительно лучше, чем $K(X)$. Между этими двумя объектами существуют тесные связи, которые мы используем в этой лекции для получения дополнительной информации о каждом из них. $\operatorname{Pic} X$ и $K(X)$ связаны двумя фундаментальными отображениями. Первое из них i: $\operatorname{Pic} X \to K(X)$ ставит в соответствие классу обратимого пучка $\mathcal{L}$ в $\operatorname{Pic} X$ его же класс в $K(X)$. Оно является гомоморфизмом $\operatorname{Pic} X$ в мультипликативную группу обратимых элементов $K(X)$.

Второе отображение det: $K(X) \to \operatorname{Pic} X$ является гомоморфизмом *аддитивной* группы $K(X)$ в мультипликативную группу $\operatorname{Pic} X$ и строится менее тривиально. Рассмотрим свободную группу $\mathbb{Z}[\mathcal{L}]$, порожденную классами локально свободных пучков на X (см. 1.2) и определим ее гомоморфизм в $\operatorname{Pic} X$, задав его на образующих так: класс пучка $\mathcal{E}$ переходит в класс $\Lambda^r \mathcal{E}$, где $r = rk\mathcal{E}$. Для любой точной последовательности $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ в силу предложения 3.9 имеем $\Lambda^{rk\mathcal{E}}\mathcal{E} \simeq \Lambda^{rk\mathcal{E}_1}\mathcal{E}_1 \otimes \Lambda^{rk\mathcal{E}_2}\mathcal{E}_2$. Отсюда следует, что элементы $\mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}_2$ лежат в ядре этого гомоморфизма, так что он индуцирует гомоморфизм $K(X) \to \operatorname{Pic} X$, который мы и обозначим det.

10.2. Предложение. 1) *Рассмотрим $K(X)$ и $\operatorname{Pic} X$ как контравариантные функторы от X; тогда i и* det *определяют морфизмы этих функторов.*

2) *Отображение i: $\operatorname{Pic} X \to K(X)$ является мономорфизмом, а* det: $K(X) \to \operatorname{Pic} X$ — *эпиморфизмом.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из определения операции обратного образа пучка. i мономорфно, потому что $(\det \circ i)(l) = l$ для всех $l \in \operatorname{Pic} X$, по этой же причине det — эпиморфизм.

10.3. Упражнение. Доказать, что для любых локально свободных пучков $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ рангов r_1, r_2 соответственно имеет место изоморфизм

$$\Lambda^{r_1 r_2}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \simeq (\Lambda^{r_1}\mathcal{E}_1)^{r_2} \otimes (\Lambda^{r_2}\mathcal{E}_2)^{r_1}.$$

Пользуясь билинейностью, вывести отсюда формулу, показывающую поведение det относительно умножения в кольце $K(X)$:

$$\det(xy) = (\det(x))^{\varepsilon(y)} (\det(y))^{\varepsilon(x)}.$$

10.4. Теорема. *В условиях* п. 4.5 *отображение*

$$\varphi\colon \operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})), \quad \varphi(x, n) = x \cdot l^n, \quad x \in \operatorname{Pic} X, \quad l = cl(P_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)),$$

является изоморфизмом группы $\operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z}$ *с* $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Сначала покажем, что φ — мономорфизм. Действительно, если $xl^n = 1$ в $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$, то в силу предложения 10.2 то же равенство имеет место в $K(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ (мы отождествляем Pic с подмножеством K с помощью i). Умножая обе части этого равенства на l^i и пользуясь леммой 5.3, получаем, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место соотношение в $K(X)$:

$$x\sigma^{n+i}(e) = \sigma^i(e),$$

где $e = cl(\mathcal{E})$. Но при $n \neq 0$ это невозможно, ибо ранги пучков $S^{n+i}(\mathcal{E})$ и $S^i(\mathcal{E})$ не могут совпадать для всех $i \geqslant i_0$, а если $n = 0$, то $x = 1$, откуда и следует мономорфность φ.

Эпиморфность φ следует из того, что класс всякого обратимого пучка в $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ имеет вид $\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right)$ (где $rk\mathcal{E} = r + 1$). Действительно,

$$\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right) = \prod_{i=0}^{r} \det(a_i l^i) = \left(\prod_{i=0}^{r} \det a_i\right) l_i^{\sum_i i\varepsilon(a_i)}$$

(мы воспользовались результатом упражнения 10.3).

наибольший пучок идеалов, определяющий замкнутое множество $\bigcup_{k=1}^{r} x_k$. Тогда эпиморфизм пучков

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L} \to 0$$

индуцирует эпиморфизм групп сечений. Но, как нетрудно видеть, пучок $\mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L}$ сосредоточен на $\bigcup_{k=1}^{r} x_k$, и $\Gamma(X, \mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{k=1}^{r} k(x_k)$. Рассмотрим сечение, равное единице во всех точках x_k, и поднимем его до сечения пучка $\mathcal{L}$. Оно удовлетворяет нужным условиям.

Перейдем теперь к общему случаю.

В силу [1], гл. II, 4.5.4 можно найти такое d_0, что есть сечение $f \in \Gamma(X, O(d_0))$ со свойствами $\bigcup x_i \subset D_+(f)$ и $D_+(f)$ — аффинное множество.

Пользуясь уже установленным частным случаем, найдем сечение $s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L})$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_k$. По лемме Серра есть такое число d_1, что сечение $t = f^{\otimes d_1} \otimes s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L}(d_0 d_1))$ продолжается на все X. Положим $d = d_0 d_1$.

Имеем $f^{\otimes d_1} \in \Gamma(X, O_X(d)) \Rightarrow t \otimes f^{kd_1} \in \Gamma(X, O_X((k+1)d))$ для всех $k \geqslant 0$. Это и есть сечение, которое нам нужно.

б) Будем доказывать теперь, что $l_1 - l_2 \in F^1_{\mathrm{top}} K(X)$. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество: Y_i $(i = 1, \ldots, r)$ — его неприводимые компоненты, $x_i \in Y_i$ — замкнутые точки. Тогда для достаточно большого n имеются сечения

$$O_X \to \mathcal{L}_1(n), \quad O_X \to \mathcal{L}_2(n),$$

(где $l_i = cl(\mathcal{L}_i)$), не обращающиеся в нуль в $x_1, \ldots, x_r$.

Складывая получающиеся комплексы

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0 \text{ и } 0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \to 0,$$

находим комплекс

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \oplus O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0,$$

класс которого (в смысле определения 9.2) в кольце $K(X)$ равен $l_1 - l_2$. С другой стороны, этот комплекс ацикличен в точках x_i, поэтому носитель его гомологий не содержит ни одной из неприводимых компонент множества Y и, значит, его пересечение с Y имеет в Y коразмерность $\geqslant 1$. Это завершает доказательство леммы и теоремы 9.1.

10. Связь между $K(X)$ и $\operatorname{Pic} X$

10.1. Группа $\operatorname{Pic} X$ изучена значительно лучше, чем $K(X)$. Между этими двумя объектами существуют тесные связи, которые мы используем в этой лекции для получения дополнительной информации о каждом из них. $\operatorname{Pic} X$ и $K(X)$ связаны двумя фундаментальными отображениями. Первое из них i: $\operatorname{Pic} X \to K(X)$ ставит в соответствие классу обратимого пучка $\mathcal{L}$ в $\operatorname{Pic} X$ его же класс в $K(X)$. Оно является гомоморфизмом $\operatorname{Pic} X$ в мультипликативную группу обратимых элементов $K(X)$.

Второе отображение det: $K(X) \to \operatorname{Pic} X$ является гомоморфизмом *аддитивной* группы $K(X)$ в мультипликативную группу $\operatorname{Pic} X$ и строится менее тривиально. Рассмотрим свободную группу $\mathbb{Z}[\mathcal{L}]$, порожденную классами локально свободных пучков на X (см. 1.2) и определим ее гомоморфизм в $\operatorname{Pic} X$, задав его на образующих так: класс пучка $\mathcal{E}$ переходит в класс $\Lambda^r \mathcal{E}$, где $r = rk\mathcal{E}$. Для любой точной последовательности $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ в силу предложения 3.9 имеем $\Lambda^{rk\mathcal{E}}\mathcal{E} \simeq \Lambda^{rk\mathcal{E}_1}\mathcal{E}_1 \otimes \Lambda^{rk\mathcal{E}_2}\mathcal{E}_2$. Отсюда следует, что элементы $\mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}_2$ лежат в ядре этого гомоморфизма, так что он индуцирует гомоморфизм $K(X) \to \operatorname{Pic} X$, который мы и обозначим det.

10.2. Предложение. 1) *Рассмотрим $K(X)$ и $\operatorname{Pic} X$ как контравариантные функторы от X; тогда i и* det *определяют морфизмы этих функторов.*

2) *Отображение i: $\operatorname{Pic} X \to K(X)$ является мономорфизмом, а* det: *$K(X) \to \operatorname{Pic} X$ — эпиморфизмом.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из определения операции обратного образа пучка. i мономорфно, потому что $(\det \circ i)(l) = l$ для всех $l \in \operatorname{Pic} X$, по этой же причине det — эпиморфизм.

10.3. Упражнение. Доказать, что для любых локально свободных пучков $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ рангов r_1, r_2 соответственно имеет место изоморфизм

$$\Lambda^{r_1 r_2}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \simeq (\Lambda^{r_1}\mathcal{E}_1)^{r_2} \otimes (\Lambda^{r_2}\mathcal{E}_2)^{r_1}.$$

Пользуясь билинейностью, вывести отсюда формулу, показывающую поведение det относительно умножения в кольце $K(X)$:

$$\det(xy) = (\det(x))^{\varepsilon(y)} (\det(y))^{\varepsilon(x)}.$$

10.4. Теорема. *В условиях п. 4.5 отображение*

$$\varphi\colon \operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})), \quad \varphi(x, n) = x \cdot l^n, \quad x \in \operatorname{Pic} X, \quad l = cl(P_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)),$$

является изоморфизмом группы $\operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z}$ *с* $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Сначала покажем, что φ — мономорфизм. Действительно, если $xl^n = 1$ в $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$, то в силу предложения 10.2 то же равенство имеет место в $K(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ (мы отождествляем Pic с подмножеством K с помощью i). Умножая обе части этого равенства на l^i и пользуясь леммой 5.3, получаем, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место соотношение в $K(X)$:

$$x\sigma^{n+i}(e) = \sigma^i(e),$$

где $e = cl(\mathcal{E})$. Но при $n \neq 0$ это невозможно, ибо ранги пучков $S^{n+i}(\mathcal{E})$ и $S^i(\mathcal{E})$ не могут совпадать для всех $i \geqslant i_0$, а если $n = 0$, то $x = 1$, откуда и следует мономорфность φ.

Эпиморфность φ следует из того, что класс всякого обратимого пучка в $\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathcal{E})$ имеет вид $\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right)$ (где $rk\mathcal{E} = r+1$). Действительно,

$$\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right) = \prod_{i=0}^{r} \det(a_i l^i) = \left(\prod_{i=0}^{r} \det a_i\right) l_i^{\sum_i i\varepsilon(a_i)}$$

(мы воспользовались результатом упражнения 10.3).

Так как классы двух обратимых пучков в $\operatorname{Pic} Y$ (и, следовательно, в $K(Y)$) совпадают, если и только если эти пучки изоморфны, получаем

10.5. Следствие. *Всякий обратимый пучок на* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *изоморфен пучку вида* $f^*(\mathscr{L})(n)$, *где* $\mathscr{L}$ — *некоторый обратимый пучок на базе* X.

10.6. Предложение. *Ядро гомоморфизма* $\det\colon K(X) \to \operatorname{Pic} X$ *совпадает с* $\mathbf{Z} + F^2K(X)$

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathbf{Z} + F^2K(X) \in \operatorname{Ker}\det$. Относительно первого слагаемого это очевидно.

Из результата 10.3 ясно, что достаточно проверить равенства $\det(\gamma^r(x)) = 1$ при $r \geqslant 2$. Так как по теореме 10.4 естественное отображение $f^*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \mathbf{P}(\mathscr{E})$ мономорфно, можно воспользоваться принципом расщепления и считать, что x является линейной комбинацией классов одномерных пучков. Но тогда $\gamma^r x$ является суммой одночленов вида $\pm \prod_{i=1}^{k} (l_i - 1)$, $k \geqslant r$, l_i обратимы, а каждый такой одночлен можно представить в виде произведения двух элементов из $F^1K(X)$. Поэтому из 10.3 следует требуемое.

Наоборот, пусть $\det x = 1$, $\varepsilon(x) = 0$. Тогда $x = e_1 - e_2$, где e_i — классы локально свободных пучков одинакового ранга r. Из доказательства леммы 8.9 видно, что

$$\det e_i = \lambda^r e_i = \gamma_1(e_1 - r) \equiv e_i - r + 1 \bmod F^2K(X).$$

Так как $\det x = \det e_1/\det e_2 = 1$, отсюда следует, что

$$x = e_1 - e_2 \equiv \det e_1 - \det e_2 \equiv 0 \bmod F^2K(X),$$

что доказывает предложение.

10.7. Мы можем переформулировать этот результат несколько более удобным образом.

Пусть $\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]$ — групповое кольцо группы Пикара схемы X. Гомоморфизм i определяет по универсальности гомоморфизм колец

$$\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X] \to K(X).$$

Вообще говоря, он не является ни вложением, ни эпиморфизмом. Однако, обозначая через $I \subset \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]$ идеал — ядро пополняющего отображения $\sum a_i l^i \to \sum a_i$, — и пользуясь формулами 8.2в), находим, что этот гомоморфизм переводит I^n в $F^nK(X)$, индуцируя тем самым отображения

$$\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^n \to K(X)/F^nK(X)$$

и

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k/I^{k+1} \to GK(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F^kK(X)/F^{k+1}K(X).$$

Из предложения 10.6 легко следует

10.8. Теорема. *Отображение*

$$i\colon \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2 \to K(X)/F^2K(X)$$

является изоморфизмом колец.

Следствие $K(X)/F^2(X) \simeq \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Pic} X$ (*прямая сумма аддитивных групп, в которой* $\operatorname{Pic} X$ — *идеал с нулевым умножением*). *В частности,*

$$G^1K(X) \simeq \operatorname{Pic} X.$$

Доказательство. Мы построим гомоморфизм колец, обратный к i_1. Для всякого элемента $x \in K(X)$ положим

$$j(x) = \varepsilon(x) - 1 + \det x \in \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X].$$

Имеем

$$j(x+y) - j(x) - j(y) = (1 - \det x)(1 - \det y) \in I^2.$$

Поэтому j определяет гомоморфизм аддитивных групп

$$K(X) \to \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2.$$

Из 10.6 очевидно, что $F^2K(X)$ находится в ядре этого гомоморфизма, а что он определяет отображение, которое мы обозначим той же буквой j:

$$j\colon K(X)/F^2K(X) \to \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2.$$

Равенство $j \circ i_1 = id$ очевидно из определений, а $i_1 \circ j = id$ следует из доказательства предложения 10.6:

$$i \circ j(e) = \varepsilon(e) - 1 + \lambda^{\varepsilon(e)} e \equiv e \bmod F^2K(X).$$

10.9. Замечания. а) Предыдущий результат показывает, в частности, что если $\dim X = 1$, то

$$K(X) = \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Pic} X.$$

Пусть X — гладкая проективная кривая над алгебраическим замкнутым полем k; $\operatorname{Pic} X$, как известно, естественно изоморфна группе k-точек некоторой групповой схемы над k, размерность которой равна $1 - \chi(O_X) = g$. Тем самым при $g \geqslant 1$ $K(X)$ является «недискретным» кольцом. Только при $g = 0$, когда $X \simeq \mathbf{P}^1$, имеем $G^1K(X) \simeq \mathbf{Z}$.

К сожалению, характер групп $G^iK(X)$ при $i \geqslant 2$ в общем случае совершенно неизвестен. В частности, неизвестно, для каких поверхностей X, даже над полем комплексных чисел, $G^2K(X) \simeq \mathbf{Z}$. Старая гипотеза Севери сформулированная, впрочем, для несколько другого объекта) утверждает, что это должно быть верно лишь для поверхностей, бирационально эквивалентных проективной плоскости.

б) Хотя структура $G^dK(X)$ для d-мерной проективной схемы над полем и неизвестна, эйлерова характеристика определяет гомоморфизм

$$\chi\colon G^dK(X) \to \mathbf{Z}.$$

Им можно воспользоваться для конструкции скалярных произведений

$$G^iK(X) \times G^{d-i}K(X) \to \mathbf{Z}$$
$$(x_1, x_2) \to \chi(x_1 x_2).$$

Легко видеть, что если x_1, x_2 — классы структурных пучков двух подсхем $X_1, X_2 \subset X$, находящихся в «общем положении» и таких, что их пересечения нульмерно, $\chi(x_1, x_2)$ дает «индекс пересечения» X_1 и X_2 (ср. 3.6).

В кольце $GK(X)$, в частности, можно определить подгруппу элементов, численно эквивалентных нулю (ядро формы $\chi(x_1, x_2)$). Они образуют идеал; соответствующее фактор-кольцо служит заменой «кольца классов циклов с точностью до численной эквивалентности».

в) Отметим, наконец, *«теорему Римана»* для гладких кривых X; полагая для класса обратимого пучка $l \in K(X)$

$$\deg l = \chi(l-1) = \chi(l) - \chi(X),$$

находим

$$\chi(l) = \deg l + \chi(X).$$

Равенство, конечно, является тавтологическим; наименее тривиальные моменты состоят в том, что, во-первых, $\deg(l_1, l_2) = \deg l_1 + \deg l_2$ и, во-вторых, что $\deg l$ можно интерпретировать как «степень дивизора» (ср. 8.12).

11. Классы Чженя и операции Адамса

11.1. Определение. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $rk\mathscr{E}$ на схеме X. Положим*

$$c_i(\mathscr{E}) = \gamma^i(cl(\mathscr{E}) - rk\,\mathscr{E}) \bmod F^{i+1}K(X) \in G^iK(X), \quad i \geqslant 1.$$

Элемент $c_i(\mathscr{E}) \in G^iK(X)$ называется i-м классом Чженя пучка $\mathscr{E}$ $(i \geqslant 1)$.

11.2. Мы перечислим сейчас ряд свойств классов c_i, показывающих, что обычный формальный механизм теории характеристических классов работает и в нашем случае.

(11.2.1). *Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X. Тогда*

$$c_i(\mathscr{L}) = \begin{cases} cl(\mathscr{L}) - 1 \bmod F^2K(X), & i = 1, \\ 0 & i > 1. \end{cases}$$

(11.2.2). *Для любого морфизма $Y \xrightarrow{f} X$ и локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X имеем*

$$c_i(f^*(\mathscr{E})) = Gf^*(c_i(\mathscr{E}))$$

(где Gf^*: $GK(X) \to GK(Y)$ индуцирован гомоморфизмом колец f^*, который совместим с γ-фильтрацией).

(11.2.3). *Положим*

$$c_t(\mathscr{E}) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mathscr{E})\, t^i.$$

Тогда для любой точной последовательности $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$ имеем

$$c_t(\mathscr{E}) = c_t(\mathscr{E}_1) \cdot c_t(\mathscr{E}_2).$$

(11.2.4). *Имеем*

$$GK(\mathbb{P}(\mathscr{E})) = GK(X)[\bar{x}],$$

где элемент $\bar{x} = cl(O_{\mathbb{P}(\mathscr{E})}) - 1 \bmod F^2K(\mathbb{P}(\mathscr{E})$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i c_i(\mathscr{E})\, \bar{x}^i = 0.$$

(Доказательство немедленно получается из теоремы 8.8 и леммы 8.9.)

(11.2.5). $c_i(\mathscr{E}) = 0$ *при* $i > rk\mathscr{E}$.

Для доказательства воспользоваться принципом расщепления и свойством (11.2.1).

(11.2.6). *Отображение $\mathscr{E} \to c_t(\mathscr{E})$ продолжается до гомоморфизма групп*

$$c_t\colon K(X) \to 1 + \bigoplus_{i=1}^{\infty} G^iK(X)\, t^i$$

(следует из (11.2.3)).

11.3. Определение. *Характером Чженя локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X называется элемент*

$$ch\mathscr{E} \in GK(X) \otimes \mathbf{Q},$$

который формально определяется выражением

$$ch(\mathscr{E}) = \sum e^{a_i(\mathscr{E})},$$

где $a_i(\mathscr{E})$ находятся из тождества

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{rk\mathscr{E}} (1 + a_i(\mathscr{E})\, t).$$

11.4. Предложение. *Существует гомоморфизм колец*

$$ch\colon K(X) \to GK(X) \otimes \mathbf{Q},$$

однозначно определяемый условием

$$ch(cl(\mathscr{E})) = ch(\mathscr{E})$$

для всех локально свободных пучков $\mathscr{E}$ конечного ранга на X.

Доказательство. Из свойства (11.2.3) следует, что для любой точной последовательности $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$ имеем

$$ch(\mathscr{E}) = ch(\mathscr{E}_1) + ch(\mathscr{E}_2).$$

Из принципа расщепления и (11.2.1) следует, что в обозначениях 11.3

$$\prod_i (1 + a_i(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)\, t) = \prod_{i,j} (1 + (a_i(\mathscr{E}_1) + a_j(\mathscr{E}_2))\, t),$$

откуда

$$ch(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2) = ch(\mathscr{E}_1) \cdot ch(\mathscr{E}_2).$$

Отсюда результат получается с помощью стандартных рассуждений.

11.5. Замечание. Те же рассуждения показывают несколько более точный результат: можно определить гомоморфизм

$$ch\colon K(X) \to GK(X) \otimes \mathbf{Z}_{d!},$$

где $d = \dim X$. Действительно, из теоремы о симметрических функциях легко следует, что $\sum a_i(\mathscr{E})^k \in F^kK(X)$, поэтому

$$ch(\mathscr{E}) = \sum_{k=0}^{d} \frac{d_i(\mathscr{E})^k}{k!}$$

(ибо $F^{d+1}K(X) = 0$). Нежелательность «лишних» знаменателей очевидна из-за того, что $GK(X)$ может иметь большое кручение хотя бы потому, что $G^1K(X) = \operatorname{Pic} X$.

11.6. Теорема. *Пусть $F^iK(X) = 0$ для достаточно больших i. Тогда характер Чженя индуцирует изоморфизм колец*

$$ch\colon K(X) \otimes \mathbf{Q} \to GK(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

11.7. Для доказательства этой теоремы нам понадобится определение операций Адамса, которые мы затем используем, чтобы построить отображение, обратное к ch.

Введем отображение

$$\psi_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i t^i \colon K(X) \to K(X)[[t]]$$

формулой

$$\psi_t(x) = \varepsilon(x) - t\frac{d}{dt}\log\lambda_{-t}(x).$$

Следующие свойства операций ψ^i проверяются без труда:

(11.7.1) $\psi^i(x+y) = \psi^i(x) + \psi^i(y)$, $i \geqslant 0$.

(11.7.2) $\psi^i(l) = l^i$, где l — класс обратимого пучка.

(11.7.3) $\psi^i \cdot f^* = f^* \cdot \psi^i$ для любого морфизма $f\colon X \to Y$. (Из принципа расщепления легко следует, что эти три свойства однозначно определяют операции ψ^i.)

(11.7.4) $\psi^i(xy) = \psi^i(x)\cdot\psi^i(y)$.

(Применить (11.7.2), (11.7.3) и принцип расщепления.)

(11.7.5) $\psi^i \cdot \psi^k = \psi^{ik}$.

(Принцип расщепления и (11.7.2).)

Несколько менее тривиально поведение ψ относительно γ-фильтрации.

11.8. Предложение. *Пусть $x \in F^nK(X)$, тогда*

$$\psi^i(x) - i^n x \in F^{n+1}K(X).$$

Иначе говоря, операции ψ^i переносятся на $GK(X)$: ψ^i на $G^nK(X)$ действует как умножение на i^n.

Доказательство. При $n=0$ результат очевиден из определений. Далее легко видеть, что достаточно проверить утверждение для элементов вида $x = \gamma^n y$, где y пробегает некоторый базис аддитивной группы X. Рассматривая в качестве y классы локально свободных пучков и применяя принцип расщепления и теорему 8.8, сводим все к случаю $x = \prod_{k=1}^{n}(l_k - 1)$, где l_k — классы обратимых пучков. В этом случае

$$\psi^i(x) = \prod_{k=1}^{n}(l_k - 1) = \prod_{i=1}^{n}(l_k - 1)\prod_{k=1}^{n}(l_k^{i-1} + \ldots + 1).$$

Но, очевидно,

$$l_k^{i-1} + \ldots + 1 \equiv i \bmod F^1K(X).$$

Отсюда следует, что

$$\psi^i(x) \equiv i^n x \bmod F^{n+1}K(X).$$

11.9. Следствие. *Обозначим через V_m подпространство $K(X)\otimes\mathbf{Q}$, соответствующее собственному значению i^m оператора ψ^i $(i \geqslant 2)$. Тогда, если $F^{d+1}K(X) = 0$, имеем*

$$K(X)\otimes\mathbf{Q} = \bigoplus_{m=0}^{d} V_m$$

и V_m не зависит от i.

Доказательство. Из предложения 11.8 следует, что

$$\prod_{n=0}^{d}(\psi^i - i^n) = 0,$$

как оператор на $K(X)$, поэтому тождественный оператор на $K(X)\otimes\mathbf{Q}$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных проекторов

$$1 = \sum_{n=0}^{d}\prod_{m\neq n}(\psi^i - i^m)/(i^n - i^m).$$

Образ m-го проектора и есть V_m.

Чтобы проверить независимость от i, обозначим временно V_m через $V_{m,i}$. Из предложения 11.8 следует, что

$$\prod_{n\neq m}(\psi^i - i^n)(\psi^m - k^m) = 0$$

для любого натурального k; поэтому $V_{m,i} \subset V_{m,k}$, откуда по симметрии $V_{m,i} = V_{m,k} = V_m$.

11.10. Теперь мы следующим образом определим гомоморфизм колец, совместимый с пополнением:

$$g\colon GK(X)\otimes\mathbf{Q} \to K(X)\otimes\mathbf{Q}$$

для всякого ненулевого элемента $x \in G^mK(X)\otimes\mathbf{Q}$, $m \geqslant 1$ обозначим через $g(x) \in K(X)\otimes\mathbf{Q}$ такой элемент $g(x) \in F^mK(X)\otimes\mathbf{Q}$, что

$$x = g(x) \bmod F^{m+1}K(X)\otimes\mathbf{Q},$$
$$\psi^p(g(x)) = p^m g(x), \quad p \geqslant 2.$$

(То, что это — гомоморфизм колец, следует из однозначности $g(x)$.)

11.11. Доказательство теоремы 11.6. Мы проверим сейчас, что ch и g являются взаимно обратными гомоморфизмами. Все наши конструкции совместны с гомоморфизмами f^*, поэтому можно применить принцип расщепления, т. е. ограничиться рассмотрением элементов x, лежащих в подкольце $K(X)$ (соответственно $GK(X)$), порожденном классами обратимых пучков.

Пусть $x = l - 1 \bmod F^2K(X) \in G^1K(X)$, где l — класс обратимого пучка. Я утверждаю, что

$$g(x) = \ln(1 + (l-1)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(l-1)^n}{n}.$$

Действительно, очевидно, что $x = g(x) \bmod F^2K(X)$; кроме того,

$$\psi^i \ln(1 + (l-1)) = \ln[1 + (l^i - 1)] = i\ln[1 + (l-1)].$$

С другой стороны, по определению (см. 11.3 и (11.2.1))

$$ch(l-1) = e^x - 1 \in GK(X)\otimes\mathbf{Q}.$$

Это показывает, что

$$g\circ ch(l-1) = l - 1, \quad ch\circ g(x) = x,$$

и ввиду сделанного выше замечания доказывает теорему 11.6.

12. Структура моноидальных преобразований

12.1. Напомним (см. 7.4, а также [2], 12.4), что для любой схемы X и когерентного пучка идеалов $\mathcal{Y} \subset O_X$ можно построить схему $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}^n)$ и канонический морфизм $f\colon X' \to X$. Морфизм f называется *моноидальным преобразованием* X с центром в пучке $\mathcal{Y}$ (или в замкнутой подсхеме $Y^i \hookrightarrow X$ такой, что $i_*(O_Y) = O_X/\mathcal{Y}$). В этом разделе мы начнем изучать структуру морфизма f и поведение $K(X)$ и $K_1(X')$ по отношению к этому морфизму в предположении, что подсхема Y *регулярно вложена* (определение 3.2). Технические результаты, которые мы получим, будут занимать центральное место в изучении гомоморфизма «прямого образа» и в доказательстве теоремы Римана—Роха. Кроме того, они представляют самостоятельный интерес с точки зрения бирациональной геометрии, в которой моноидальное преобразование играет исключительную по важности роль.

12.2. Предложение. *Пусть $Y^i \hookrightarrow X$ — регулярное вложение замкнутой подсхемы, $N = i^*(\mathcal{Y}/\mathcal{Y}^2)$ — конормальный пучок на Y (где $\mathcal{Y}$ — пучок идеалов, соответствующий Y). Пусть $f\colon X' \to X$ — моноидальное преобразование с центром Y; $Y' = Y \times_X X'$ — прообраз Y на X' (в категории схем); $j\colon Y' \hookrightarrow X'$ — каноническое вложение, $g\colon Y' \to Y$ — ограничение морфизма f на Y'. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *ограничение f на $(X' \setminus Y') \to (X \setminus Y)$ является изоморфизмом схем;*

(б) *морфизм $g\colon Y' \to Y$ изоморфен каноническому морфизму $\mathbb{P}(N) \to Y$;*

(в) *$j\colon Y' \to X'$ — регулярное вложение коразмерности единица, и конормальный пучок к $Y' = \mathbb{P}(N)$ в X' изоморфен $O_{\mathbb{P}(N)}(1)$.*

Кроме того, если X и Y регулярны и на X есть обильный пучок, то и X' регулярна и обладает обильным пучком (доказательство мы опускаем).

Неформально говоря, этот результат означает, что X' получается из X «раздуванием» (blowing up) замкнутой подсхемы Y до *дивизора*. Геометрически это можно представлять себе следующим образом. Вне Y ничего не меняется, а каждая точка $y \in Y$ заменяется целым проективным пространством, точкам которого соответствуют «направления подхода к y по нормали к Y» (направление понимается в проективном смысле). В частности, если Y — замкнутая точка, то Y' — проективное пространство, размерность которого на единицу меньше, чем у X.

Дивизоры, которые получаются с помощью моноидальных преобразований из схем коразмерности >1, называются *исключительными*. Мы продолжим обсуждение их свойств ниже в п. 13.5.

Доказательство. Все утверждения можно проверять локально по X, покрыв X такими малыми открытыми аффинными множествами, в которых $\mathcal{Y}$ порожден регулярной системой параметров. Поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{Y} = \tilde{I}$, где $I = (f_1, \ldots, f_r) \in A$, (f_i) — регулярная система.

Так как $\mathcal{Y}|_{X \setminus Y} = O_X|_{X \setminus Y}$, утверждение (а) становится очевидным, ибо $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} At^n) = \operatorname{Spec} A$ (в окрестности точек, не содержащихся в Y).

Далее, $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n)$, $Y' = X' \otimes_A A/I = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$. В самом деле, умножая тензорно точную последовательность $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ на I^n над A, находим $I \otimes_A I^n \to I^n \to A/I \otimes_A I^n \to 0$, откуда $A/I \otimes_A I^n \simeq I^n/I^{n+1}$.

Определим эпиморфизм колец

$$\psi\colon S_{A/I}(I/I^2) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

следующим образом: пусть $\bar{a}_i = a_i \bmod I^2$, $a_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$; тогда

$$\psi(\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n) = a_1 \ldots a_n \bmod I^n/I^{n+1}.$$

Корректность определения и совместимость с локализацией по базе проверяется без труда.

Утверждение (б) будет установлено, если мы докажем следующую лемму.

12.3. Лемма. *В условиях предыдущего пункта гомоморфизм*

$$\psi\colon S_{A/I}(I/I^2) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

является изоморфизмом градуированных A/I-алгебр.

Доказательство. Полагая $I = (f_1, \ldots, f_r)$, проведем индукцию по числу регулярных образующих r.

Пусть $r = 1$. По предложению 3.4 I/I^2 является свободным A/I-модулем ранга 1 с образующей $\bar{f}_1 = f_1 \bmod I^2$. n-я симметрическая степень I/I^2 является также свободным A/I-модулем ранга 1 с образующей $\bar{f}_1^n$. По определению $\psi(\bar{f}_1^n) = f_1^n \bmod I^{n+1}$. Поэтому для доказательства того, что ψ — изоморфизм, нужно лишь проверить, что если $af_1^n \in I^{n+1}$, то $a \in I$. Но если $af_1^n = bf_1^{n+1}$, то $a = bf_1$, ибо f_1 не является делителем нуля в A, что и доказывает требуемое.

Пусть теперь $I_0 = (f_1, \ldots, f_{r-1})$, и пусть лемма доказана для идеала I_0. Из доказательства предложения 3.4 следует, что

$$I/I^2 = I_0/(I_0^2 + f_r I_0) \oplus (A/I)\bar{f}_r,$$

где $\bar{f}_r = f_r \bmod I^2$ — свободный элемент над A/I. Поэтому

$$S^n_{A/I}(I/I^2) = \bigoplus_{k=0}^{n} S^{n-k}_{A/I}(I_0/(I_0^2 + f_r I_0)) \cdot \bar{f}_r^k$$

(в очевидных обозначениях).

Далее снова по предложению 3.4

$$I_0/(I_0^2 + f_r I_0) = A/I \otimes_A I_0/I_0^2$$

(справа и слева стоят свободные A/I-модули ранга $r-1$ и они канонически изоморфны). Поэтому

$$S^i_{A/I}(I_0/(I_0^2 + f_r I_0) = S^i_{A/I_0}(I_0/I_0^2) \otimes_A A/I.$$

По предположению индукции, ψ устанавливает изоморфизм

$$S^i_{A/I_0}(I_0/I_0^2) = I_0^i/I_0^{i+1}.$$

Кроме того,

$$I_0^i/I_0^{i+1} \underset{A}{\otimes} A/I = I_0^i/(I_0^{i+1} + f_r I_0^i).$$

Отсюда

$$S^n_{A/I}(I/I^2) = \bigoplus_{k=0}^{n} (I_0^{n-k}/(I_0^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k}))\cdot \bar{f}_r^k.$$

Если $\operatorname{Ker}\psi \neq 0$, то для некоторого n в $S^n_{A/I}(I/I^2)$ найдется элемент, принадлежащий этому ядру и имеющий вид

$$\sum_{k=0}^{i} \bar{x}_k \cdot \bar{f}_r^k, \quad \bar{x}_k \in I_0^{n-k}/(I^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k}), \quad \bar{x}_i \neq 0.$$

Пусть

$$\bar{x}_k = x_k \mod (I_0^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k}).$$

Мы достигнем противоречия, показав, что $x_i \in I_0^{n-i+1} + f_r I_0^{n-i}$, т. е. что $\bar{x}_i = 0$, вопреки предположению.

Принадлежность $\sum_{k=0}^{i} \bar{x}_k \bar{f}_r^k$ ядру ψ, как нетрудно видеть, означает, что

$$\sum_{k=0}^{i} x_k f_r^k \in I,$$

т. е. учитывая, что $x_k \in I_0^{n-k}$, $I^{n+1} \subset I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A$:

$$x_i \cdot f_r^i \in I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A.$$

Так как, по предположению индукции, $I_0^n/I_0^{n+1} = S^n_{A/I_0}(I_0/I_0^2)$, а I_0/I_0^2 свободный A/I_0-модуль, f_r не является делителем нуля относительно I_0^n/I_0^{n+1} и, значит, также относительно A/I_0^h для всех $h \geqslant 1$.

Поэтому из включения

$$x_i f_r^i \in I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A,$$

т. е. из включения

$$x_i \cdot f_r^i + y \cdot f_r^{i+1} \in I_0^{n-i+1}$$

следует, что

$$x_i + y \cdot f_r \in I_0^{n-i+1},$$

откуда $y \cdot f_r \in I_0^{n-i}$ (ибо $x \in I_0^{n-i}$), так что $y \in I_0^{n-i}$ и, наконец, $x_i \in I_0^{n-i+1} + f_r I_0^{n-i}$.

Лемма доказана.

12.4. Остается проверить последнее утверждение предложения 12.2. Это тоже достаточно сделать локально по базе. Имеем: $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n) = \bigcup_{i=1}^{r} D_+(f_i t)$ (здесь t — вспомогательная переменная степени 1, отмечающая однородные компоненты).

Далее $D_+(f_i t) = \operatorname{Spec}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n)_{(f_i t)}$. Кольцо $(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n)_{(f_i t)}$, как нетрудно видеть, изоморфно подкольцу $A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_r}{f_i}\right]$ кольца A_{f_i}, порожденному элементами вида $a/1$ $(a \in A)$ и $g_{ji} = f_j/f_i$ $(j \neq i)$.

Действительно, пусть $A_1 \subset A_2$ — два кольца, $S \subset A_1$ — мультипликативное подмножество. Тогда канонический гомоморфизм $A_{1,S} \to A_{2,S}$ является вложением. Применяя этот результат к случаю $A_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n$, $A_2 = A[t]$, $S = \{(f_i t)^n\}$ и ограничиваясь рассмотрением компонент нулевой степени, получим требуемое.

Идеал, определяющий Y' внутри $D_+(f_i t)$, порожден элементами $f_j/1$, т. е. элементами $f_i/1$ и $g_{ji} f_i$ $(j \neq i)$. Следовательно, он порожден $f_i/1$. Очевидно, что $f_i/1$ не является делителем нуля в $A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_r}{f_i}\right]$, потому что в A_{f_i} этот элемент обратим.

Стало быть, $Y' \overset{j}{\hookrightarrow} X'$ — регулярное вложение коразмерности 1.

Это же вычисление показывает, что если I' — пучок идеалов, определяющий Y' внутри X', то $j^*(I'/I'^2) \simeq O_{\mathbf{P}(N)}(1)$ (более того, $I' = O_{X'}(1)$ в обозначениях п. 7.2).

Предложение 12.2 полностью доказано.

13. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании

13.1. В этом и двух последующих разделах мы займемся вычислением $K(X')$, где X' — результат моноидального преобразования, примененного к X. Прежде всего нам понадобится гомологический метод вычисления f^*: характер результата и доказательство аналогичны теореме 2.7. Мы боремся с той же трудностью: f^* легко вычисляется на классах локально свободных пучков; нужно перенести метод вычисления на все когерентные пучки.

13.2. Теорема. *Пусть $f\colon X' \to X$ — проективный морфизм, X — регулярная нётерова схема с обильным пучком, F — когерентный пучок на X. Тогда*

$$f^*(cl(\mathcal{F})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F}, O_{X'})).$$

(Определение $\operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F}, O_{X'})$ см. ниже.)

Доказательство. Пусть

$$\ldots \to \mathcal{L}_n \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

— конечная локально свободная резольвента $\mathcal{F}$ на X. Тогда

$$f^*(cl(\mathcal{F})) = f^*(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathcal{L}_i \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}).$$

(Мы пишем $f^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}$: см. определение f^* в п. 4.4). На схеме X' пучки гомологий комплекса

$$\ldots \to \mathcal{L}_n \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to 0$$

изоморфны $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathscr{F}, O_{X'})$, откуда

$$f^*(cl(\mathscr{F})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathscr{F}, O_{X'})),$$

что и доказывает требуемое.

13.3. Теперь мы возвращаемся к обозначениям предложения 12.2: мы рассматриваем диаграмму схем и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

в которой f — морфизм моноидального преобразования X с центром в регулярной подсхеме $i(Y)$. Через $\mathscr{N}$ обозначается конормальный пучок на Y, а через N — его класс в $K(Y)$. Все эти обозначения будут закреплены.

Мы докажем ряд тождеств относительно гомоморфизмов h_* и h^* (где h — один из морфизмов i, j, f, g) и их композиций.

Заметим, что поскольку g изоморфен проекции $\mathbf{P}(N) \to Y$, поведение K относительно g нам уже хорошо известно.

13.4. Предложение. *Для любого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$i^* \cdot i_*(y) = y \cdot \lambda_{-1}(N).$$

Доказательство. В силу регулярности Y и аддитивности $i^* \cdot i_*$ достаточно рассмотреть случай, когда $y = cl(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y. По теореме 13.2

$$i^* \cdot i_*(cl(\mathscr{E})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y, \mathscr{E})).$$

С другой стороны, по теореме 3.5

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y, \mathscr{E}) = \Lambda^i_{O_Y}(\mathscr{N}) \underset{O_X}{\otimes} \mathscr{E}.$$

Это доказывает требуемое.

13.5. Следствие. *Для любых двух элементов $y_1, y_2 \in K(Y)$*

$$i_*(y_1) \cdot i_*(y_2) = i_*(y_1 \cdot y_2 \cdot \lambda_{-1}(N)).$$

Доказательство. Подставим в правую часть вместо $y_2\lambda_{-1}(N)$ выражение $i^* \cdot i_*(y_2)$ и воспользуемся «формулой проекции» 7.13.

Заметим, что результаты 13.4 и 13.5 можно применять и к морфизму j, так как он также является регулярным вложением: Y' локально определен одним уравнением.

Так как конормальный пучок N' к Y' изоморфен $O_{\mathbf{P}(N)}(1)$, имеем $\lambda_{-1}(N) = 1 - l$, где l — класс N' в $K(Y')$, и, в частности,

$$j_*(1)^2 = j_*(1 - l). \tag{1}$$

Стало быть, класс самопересечения Y' внутри X, ограниченный на Y', равен $1 - l$. Рассмотрим случай, когда Y — замкнутая точка в X. Тогда Y' — проективное пространство $\mathbf{P}$, а класс его самопересечения совпадает с классом

$$1 - cl(O_{\mathbf{P}}(1)) = -cl\, O_E,$$

где $E \subset \mathbf{P}$ — некоторая «гиперплоскость» в $\mathbf{P}$, т. е. нуль сечения пучка $O_{\mathbf{P}}(1)$ (см. п. 8.12).

Здесь замечателен знак минус! Его можно интерпретировать как показатель «жесткости», «недеформируемости» исключительного дивизора Y'. В самом деле, если бы существовала *подсхема* Y'' внутри X, класс структурного пучка, который совпадал бы с классом $O_{Y'}$, и находящаяся в общем положении с Y', то

$$j_*^2(1) = cl(O_{Y'})^2 = cl(O_{Y'})\, cl(O_{Y''}) = cl(O_{Y' \cap Y''})$$

(см. теорему 2.3). Но легко проверить (скажем, в случае, когда X — проективное многообразие над полем), что $-cl(O_E) \neq cl(O_{Y' \cap Y''})$, потому что и E, и $Y' \cap Y''$ — подсхемы. Действительно, индекс пересечения $cl(O_{Y' \cap Y''})$ с классом линейного подпространства дополнительной размерности положителен, а для $-cl(O_E)$ он отрицателен. Стало быть Y'' не существует.

Частный случай этого результата показывает, что если X — поверхность над полем k, то моноидальное преобразование с центром в k-точке x заменяет ее на проективную прямую, *индекс самопересечения которой равен* -1. Классическая теорема Кастельнуово—Энриквеса утверждает, что неприводимые исключительные дивизоры на регулярных поверхностях характеризуются этим свойством.

В общем случае у нас есть лишь *необходимые условия*: для того чтобы дивизор $Y' \subset X'$ был исключительным, он должен иметь вид $\mathbf{P}(\mathscr{N})$, а его самопересечение должно даваться формулой (1).

В какой мере они являются достаточными, отчасти выясняют недавние глубокие результаты Б. Мойшезона и П. Гриффитса.

13.6. Сейчас мы проведем аналогичные вычисления для гомоморфизма $j^* \cdot i_*$. Они будут длиннее, потому что вычисление соответствующих Tor придется провести отдельно.

Введем еще одно обозначение. Так как $Y' = \mathbf{P}(\mathscr{N})$, в силу предложения 4.9 существует канонический эпиморфизм пучков на Y': $g^*(\mathscr{N}) \to O_{Y'}(1) \to 0$. Пусть $\mathscr{F}$ — ядро этого эпиморфизма, локально свободный пучок на Y', а F — его класс в $K(Y')$.

13.7. Предложение. *Для всякого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$f^* \cdot i_*(y) = j_*(g^*(y) \cdot \lambda_{-1} F).$$

Доказательство. Полагая $y = cl(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на Y, как выше, находим

$$f^* \cdot i_*(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathscr{E})).$$

Поэтому требуемый результат будет установлен, если мы докажем следующий аналог теоремы 3.5.

13.8. Предложение. *Пучок $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathscr{E})$, $i \geqslant 0$ сосредоточен на Y' и, как пучок $O_{Y'}$-модулей, изоморфен $\Lambda^i(\mathscr{F}) \underset{O_{Y'}}{\otimes} g^*(\mathscr{E})$.*

Доказательство. Первый шаг. Вычислим $\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)$. Прежде всего, из точной последовательности пучков O_X-модулей

$$0 \to \mathcal{Y} \to O_X \to O_Y \to 0,$$

умножая ее тензорно на $O_{X'}$ и учитывая, что $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_X, O_{X'}) = 0$, $i \geqslant 1$, находим

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to \mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to O_{X'} \to O_{Y'} \to 0.$$

Согласно вычислению, проведенному в п. 12.4, образ $\mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}$ в $O_{X'}$ равен $\mathcal{Y}' \simeq O_{Y'}(1)$, так что для вычисления Tor_1 получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to \mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to \mathcal{Y}' \to 0.$$

Так как $\mathcal{Y}'$ — локально свободный пучок, а $\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)$ является пучком $O_{X'}/\mathcal{Y}'$-модулей, эту точную последовательность можно умножить тензорно на $O_{X'}/\mathcal{Y}'$, не нарушив ее точности и не изменив первого члена. Имеем

$$\mathcal{Y}' \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2,$$

$$(\mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}) \underset{O_{X'}}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \underset{O_{X'}}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}/\mathcal{Y}^2 \otimes O_{Y'} = g^*(\mathcal{N}),$$

откуда

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to g^*(\mathcal{N}) \to \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2 \to 0. \tag{1}$$

Это показывает, что

$$\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) = \mathcal{F}.$$

(см. определение $\mathcal{F}$ в п. 13.6). (Совпадение гомоморфизма $g^*(\mathcal{N}) \to \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2$ с каноническим гомоморфизмом $g^*(\mathcal{N}) \to O(1)$ предоставляется проверить читателю.)

Второй шаг. Проведем теперь локальные вычисления Tor_i. Пусть $\mathrm{Spec}\, A$ — аффинная открытая подсхема в X, $(f_1, \ldots, f_r) \subset A$ — регулярная система элементов, порождающая пучок $\tilde{I} = \mathcal{Y}$ над ней, $I = (f_1, \ldots, f_r)$.

Как в п. 12.4, прообраз $\mathrm{Spec}\, A$ относительно f покрывается аффинными множествами $\mathrm{Spec}\, B_j$, где

$$B_j = A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right],$$

а сечения пучка $\mathcal{Y}'$ над $\mathrm{Spec}\, B_j$ образуют идеал $f_j \cdot B_j = I'_j$.

Рассматривая сечения точной последовательности над $\mathrm{Spec}\, B_j$, находим

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(B_j, A/I) \to B_j/I'_j \underset{A/I}{\otimes} I/I^2 \xrightarrow{u} I'_j/I'^2_j \to 0.$$

Положим

$$f_i = f_i \bmod I^2, \quad \tilde{f}_j = f_j/1 \bmod I'^2_j,$$
$$\varphi_{ij} = f_i/f_j \in B_j, \quad \bar{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij} \bmod I'_j.$$

Тогда, очевидно, $B_j/I'_j \underset{A/I}{\otimes} I/I^2$ есть свободный B_j/I'_j-модуль, порожденный элементами $1 \otimes \bar{f}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, а I'_j/I'^2_j — свободный модуль, порожденный элементом $\tilde{f}_j$. Значение u на этих образующих легко вычисляется:

$$u(1 \otimes \bar{f}_i) = \varphi_{ij}\tilde{f}_j.$$

Отсюда немедленно следует, что модуль $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Tor}_1^A(A/I, B_j)$ *свободно порожден элементами*

$$1 \otimes f_i - \bar{\varphi}_{ij} \otimes \tilde{f}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ i \neq j). \tag{2}$$

Третий шаг. Пользуясь этим локальным вычислением Tor_1, мы построим сейчас локальные изоморфизмы

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i_{O_X}(\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)),$$

или, точнее,

$$\mathrm{Tor}_i^A(B_j, A/I) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i_A(\mathrm{Ker}\, u). \tag{3}$$

Конструкция будет зависеть от выбора образующих $(f_1, \ldots, f_r)$; следующий шаг покажет независимость гомоморфизмов от этого выбора.

Чтобы построить изоморфизм (3), напишем комплекс Кошуля $K(A, f_1, \ldots, f_r)$ — резольвенту A-модуля A/I, и умножим ее тензорно на B_j над A. В стандартных обозначениях получим комплекс, гомологии которого дают $\mathrm{Tor}_n^A(B_j, A)$:

$$\ldots \oplus B_j e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \xrightarrow{d} B_j e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-1}} \to \ldots,$$

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{i_k}/1 e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

Чтобы вычислить эти гомологии, сделаем замену образующих e_i, положив

$$e'_i = e_i - \varphi_{ij} e_j, \quad j \neq i, \quad \varphi_{ij} = f_i/f_j,$$
$$e'_j = e_j.$$

Легко видеть, что тогда

$$d(e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin (i_1, \ldots, i_n) \\ (-1)^{k+1} f_j/1 e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}, & \text{если } j = i_k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Z_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) &= \bigoplus_{j \notin (i_1, \ldots, i_n)} B_j e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}, \\ B_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) &= f_j/1 \cdot Z^n(B_j \otimes K(A, f)). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Теперь построим изоморфизмы

$$\psi_f\colon H_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(\mathrm{Tor}_1^A(A/I, B_j)), \tag{5}$$

отображая класс цикла $e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}$ в элемент

$$\bigwedge_{k=1}^{n} (\bar{f}_{i_k} \otimes 1 - \varphi_{i_k j} \otimes \tilde{f}_j)$$

(ср. с (2)).

Четвертый шаг. Мы должны теперь показать, что при замене $(f_1, \ldots, f_r)$ на другую систему регулярную систему образующих $(g_1, \ldots, g_r)$ идеала I локальные изоморфизмы (5) ведут себя согласованно и склеиваются в глобальные изоморфизмы Tor.

Рассуждение аналогично приведенному в п. 3.7; дополнительные технические детали связаны с тем, что замена (f_i) на (g_i) меняет также покрытие $f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$, в терминах которого мы проводим локальные вычисления:

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \bigcup_j \operatorname{Spec} A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right] = \bigcup_k \operatorname{Spec} A\left[\frac{g_1}{g_k}, \ldots, \frac{g_r}{g_k}\right].$$

Поэтому нужно рассмотреть общее измельчение этих покрытий:

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \bigcup \operatorname{Spec} B_{jk},$$

где

$$B_{jk} = A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right]_{g_k/f_j} = B_{kj} = A\left[\frac{g_1}{g_k}, \ldots, \frac{g_r}{g_k}\right]_{f_j/g_k}.$$

Все конструкции предыдущего шага проходят, если заменить в них B_j на B_{jk}.

Аналогично, применяя их к B_{kj} и $(g_1, \ldots, g_r)$ вместо B_{jk} и $(f_1, \ldots, f_r)$, построим изоморфизм

$$\psi_g = H_n(B_{kj} \otimes K(A, g)) \longrightarrow \Lambda^n(\operatorname{Tor}_1^A(A/I, B_{kj})).$$

Как в п. 3.7, мы должны проверить, что ψ_f и ψ_g коммутирует с гомоморфизмами резольвент $K(A, g) \longrightarrow K(A, f)$.

Пусть

$$g_i = \sum_{l=1}^{r} a_{il} f_l \quad (i = 1, \ldots, r),$$

и пусть

$$K_n(A, g) = \Lambda^n\left(\bigoplus_{i=1}^{r} A\bar{e}_i\right).$$

Определим, как в п. 3.7, гомоморфизм комплексов $K(A, g) \longrightarrow K(A, f)$:

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{e}_{i_n} \longrightarrow \bigwedge_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{r} a_{iml} e_l\right).$$

Обозначим через φ гомоморфизм, который индуцирован этим отображением на гомологиях комплексов $K \otimes B$:

$$\varphi\colon H_\cdot(B_{kj} \otimes K(A, g)) \longrightarrow H_\cdot(B_{jk} \otimes K(A, f)).$$

Нужно проверить коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_n(B_{jk} \otimes K(A, f)) & \xrightarrow{\psi_f} & \Lambda^n(\operatorname{Tor}_1 A/I, B_{jk})), \\ \uparrow\varphi & & \| \\ H_n(B_{kj} \otimes K(A, g)) & \xrightarrow{\psi_g} & \Lambda^n(\operatorname{Tor}_1(A/I, B_{kj})). \end{array}$$

Это делается прямыми вычислениями. Положим

$$e_i' = \bar{e}_i - \chi_{ij}\bar{e}_k, \quad \chi_{ij} = g_i/g_j \in B_{kj}, \quad (i \neq k)$$
$$\bar{e}_k' = \bar{e}_i.$$

Тогда (мы пишем под знаком ψ_g, ψ_f, φ для краткости цикл вместо класса гомологий):

$$\psi_g(e_i') = \bar{g}_i - \bar{\chi}_{ij} \otimes g_j \quad (i \neq k),$$

где

$$\bar{g}_i = g_i \bmod I^2,$$
$$\bar{\chi}_{ij} = \chi_{ij} \bmod (I_{kj}')^2.$$

С другой стороны, $\varphi(\bar{e}_i') = \text{класс}\left(\sum_{l=1}^{r} a_{il}e_l - g_i/g_j \sum_{l=1}^{r} a_{kl}e_l\right)$, откуда

$$\psi_f \circ \varphi(e_i') = \sum_{l=1}^{r} a_{il}\bar{e}_l - g_i/g_j \sum_{l=1}^{r} a_{kl}e_l - \psi_g(\bar{e}_i'),$$

что и доказывает коммутативность.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \simeq \Lambda^i_{O_{X'}}(\mathscr{F}).$$

Пятый шаг. Наконец, укажем кратко, какие изменения нужно провести в предыдущих рассуждениях, чтобы получить изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathscr{E}) \simeq \Lambda^i(\mathscr{F}) \underset{O_{Y'}}{\otimes} \mathscr{E}$$

для любого локально O_Y-свободного пучка $\mathscr{E}$ вместо O_Y.

Они не сложны: нужно заменить в конструкции третьего шага резольвенту

$$K_\cdot(A, f) \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

на резольвенту

$$\bigoplus K_\cdot(A, f) \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

представив свободный A/I-модуль E сечений пучка $\mathscr{E}$ над $\operatorname{Spec} A$ в виде прямой суммы модулей A/I.

Все последующие построения проходят с очевидными видоизменениями, что приводит к изоморфизмам

$$\operatorname{Tor}_i^A(B_{kj}, E_{kj}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(\operatorname{Tor}_1^A(B_{kj}, A/I)) \otimes E_{kj}.$$

Независимость их от выбора первоначального представления $E = \bigoplus A/I$ проверяется немедленно.

Доказательство закончено.

14. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (продолжение)

14.1. Мы сохраним обозначения раздела 13: диаграмма, описывающая моноидальное преобразование

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

приводит к диаграмме, состоящей из групп K, в которой число морфизмов увеличивается до восьми:

$$\begin{array}{ccc} K(Y') & \underset{j^*}{\overset{j_*}{\rightleftarrows}} & K(X') \\ {\scriptstyle g^*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle g_*} & & {\scriptstyle f^*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y) & \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} & K(X). \end{array}$$

В предыдущей лекции были доказаны два результата, выясняющие, в какой мере эта последняя диаграмма коммутативна, т. е. сравнивающие морфизмы групп K, которые получаются, если проходить по двум разным путям этой диаграммы с общим началом и концом:

$$i^* \cdot i_*(y) = y\lambda_{-1}N \quad \text{(предложение 13.4)},$$

$$f^* \cdot i_*(y) = j_*(g^*(y)\lambda_{-1}F) \quad \text{(предложение 13.7)}.$$

Роль появляющихся здесь корректирующих множителей $\lambda_{-1}N$ и $\lambda_{-1}F$ можно интуитивно объяснить, пользуясь представлением о «деформации внутри трубчатой окрестности», подобно п. 3.6.

Сейчас мы добавим еще три утверждения подобного же типа, которые будут использованы потом для вычисления $K(X')$.

14.2. Предложение. (а) $f_*f^*\colon K(X) \to K(X)$ *есть тождественное отображение*;

(б) $g_*(\lambda_{-1}(F)) = 1$;

(в) *если* $y \in \operatorname{Ker} j_* \subset K(Y')$, *то* $y = g^*g_*(y)\lambda_{-1}F$.

14.3. Доказательство 14.2 (а). Прежде всего заметим, что достаточно проверить тождество $f_*(1) = 1$. Действительно, если оно верно, то, пользуясь формулой проекции, находим для любого элемента $y \in K(Y)$

$$f_*f^*(y) = f_*(f^*(y)\cdot 1) = y \cdot f_*(1) = y.$$

Имеем далее

$$f_*(1) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(R^i f_* O_{X'}).$$

Поэтому все будет доказано, если мы установим, что

$$R^i f_* O_{X'} = \begin{cases} O_X & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как пучок идеалов $\mathcal{Y}' \simeq O_{X'}(1)$, определяющий Y' в X', обратим (см. п. 12.4), умножая тензорно на $O_{X'}(n)$ точную последовательность

$$0 \to \mathcal{Y}' \to O_{X'} \to j_*(O_{Y'}) \to 0,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to O_{X'}(n+1) \to O_{X'}(n) \to j_*(O_{Y'}(n)) \to 0.$$

Применим к ней функтор f_*. Для вычисления производной точной последовательности заметим, что $f_*j_* = i_*g_*$ и что функторы i_* и j_* точны, так что $R^p i_* = 0$, $R^p j_* = 0$ при $p \geqslant 1$. Поэтому

$$R^p f_*(j_* O_{Y'}(n)) = R^p(f_*j_*)(O_{Y'}(n)) =$$

$$= R^p(i_*g_*)(O_{Y'}(n)) \quad i_*R^p g_*(O_{Y'}(n)) = \begin{cases} i_*(S^n\mathcal{N}) & \text{при } p = 0, \\ 0 & \text{при } p \geqslant 1. \end{cases}$$

(Мы пользуемся тем, что $Y' = \mathbf{P}(\mathcal{N})$, и результатом примера 7.7.) Отсюда при $p \geqslant 1$ и любом $n \geqslant 0$ находим точную последовательность

$$0 \to R^p f_* O_{X'}(n+1) \to R^p f_* O_{X'}(n) \to 0.$$

Но так как, по теореме Серра $R^p j_* O_{X'}(n+1) = 0$ при *достаточно больших* n, это верно и при *всех* $n \geqslant 0$. Тем самым $R^p f_* O_{X'} = 0$.

Далее, при $p = 0$ получаем для любого $n \geqslant 0$ точную последовательность

$$0 \to f_*(O_{X'}(n+1)) \to f_*(O_{X'}(n)) \to i_*(S^n\mathcal{N}) \to 0.$$

Так как $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}^n)$, существуют канонические гомоморфизмы пучков на X: $\mathcal{Y}^n \to f_*(O_{X'}(n))$, которые приводят к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f_*(O_{X'}(n+1)) \arrow[r] & f_*(O_{X'}(n)) \arrow[r] & i_*(S^n\mathcal{N}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y}^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{Y}^n \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{Y}^n/\mathcal{Y}^{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Левая вертикальная стрелка является изоморфизмом для $n \geqslant n_0$ в силу теоремы Серра, а правая — изоморфизм для любых n по лемме 12.3. Индукцией вниз по n отсюда находим, что средняя стрелка является изоморфизмом при всех $n \geqslant 0$, что завершает доказательство.

14.4. Доказательство 14.2(б). Распространим отображение g_* *покоэффициентно* на множество $1 + K(Y)[[t]]$. Пользуясь тем, что $F = g^*(N) - l$, где $l = cl(O_{\mathbf{P}(N)}(1))$, и учитывая формулу проекции, находим

$$g_*(\lambda_t F) = g_*(\lambda_t(g^*N)\cdot\lambda_t(-l)) = \lambda_t(N)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i g_*(l^i)\,t^i\right) = \lambda_t(N)\,\sigma_{-t}(N) = 1$$

в силу пп. 5.4 и 7.7.

14.5. Доказательство 14.2(в). Так как $j_*(y) = 0$, имеем

$$0 = j^*j_*(y) = y\lambda_{-1}(N') = y(1 - l),$$

где $l = cl(O_{Y'}(1))$ (применить предложение 13.4 к j вместо i). С другой стороны, по теореме о структуре $K(Y') = K(\mathbf{P}(\mathcal{N}))$ имеем однозначное представление

$$y = \sum_{i=0}^{r} a_i(l-1)^i, \quad a_i \in g^*K(Y),$$

где $r + 1 = rkN$ и где элемент $l - 1$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N - r - 1)(l-1)^i = 0.$$

(см. лемму 8.9). Сравнивая это соотношение с уравнением

$$y(l-1) = \sum_{i=1}^{r+1} a_{i-1}(l-1)^i = 0,$$

находим

$$(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N - r - 1)\cdot a_r = a_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, r+1),$$

откуда

$$y = a_r\left(\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+i-1}(N - r - 1)(l-1)^{i-1}\right) =$$

$$= a_r\left(\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^r\gamma^{r+1-i}(N - r - 1)\gamma^{i-1}(1 - l)\right) =$$

$$= (-1)^r a_r\gamma^r(N - r - l) = (-1)^r a_r\gamma^r(F - r) \quad (-1)^r a_r\lambda_{-1}(F)$$

(Тождество $\gamma'(F-r)=\lambda_{-1}(F)$ было получено в ходе доказательства леммы 8.9.)

Это равенство доказывает требуемое, потому что из тождества

$$y=(-1)^r g^*(a_r)\,\lambda_{-1}(F)$$

и равенства $g_*(\lambda_{-1}(F))=1$ следует, что

$$(-1)^r a_r = g_*(y),$$

так что

$$y=g^*g_*(y)\,\lambda_{-1}(F).$$

15. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (окончание)

15.1. Теперь мы сможем доказать основной результат о структуре кольца $K(X')$. Сначала введем некоторые объекты, фигурирующие в формулировке этого результата.

Кольца $K(Y)_N$ и $K(Y')_{N'}$. Сохранив аддитивную структуру кольца K_Y, введем в нем новый закон умножения, положив

$$y_1 * y_2 = y_1 y_2 \lambda_{-1} N,$$

$K(Y)_N$ — коммутативное, ассоциативное кольцо без единицы. Аналогично определим кольцо $K(Y')_{N'}$ с законом умножения $y_1' * y_2' = y_1' y_2' \lambda_{-1} N' = y_1' y_2' (1-l)$.

Кольцо $K(X)\oplus K(Y')_{N'}$. Аддитивная группа этого кольца — прямая сумма групп $K(X)$ и $K(Y')_{N'}$; умножение в $K(X)$ обычно, а в $K(Y')_{N'}$ совпадает с определенным выше; наконец,

$$(x,0)\cdot(0,y')=(0,g^*i^*(x)\,y').$$

Гомоморфизм $\alpha\colon K(Y)_N \to K(X)\oplus K(Y')_{N'}$. Положим

$$\alpha(y)=(i_*(y),\ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F).$$

Это, очевидно, гомоморфизм групп. Совместимость с умножением следует из тождеств

$$\alpha(y_1 * y_2)=\alpha(y_1y_2\lambda_{-1}N)=(i_*(y_1y_2\lambda_{-1}N),\ -g^*(y_1y_2\lambda_{-1}N)\,\lambda_{-1}F)$$

и

$$\begin{aligned}(i_*(y_1),\ -g^*(y_1)\,\lambda_{-1}F)\,(i_*(y_2),\ -g^*(y_2)\,\lambda_{-1}F)&=\\ =(i_*(y_1)\,i_*(y_2),\ g^*(y_1y_2)\,\lambda_{-1}(F)^2\,(1-l)&-\\ -g^*i^*i_*(y_1)\,g^*(y_2)\,\lambda_{-1}(F)-g^*i^*i_*(y_2)\,g^*(y_1)\,\lambda_{-1}F&=\\ =(i_*(y_1y_2\lambda_{-1}N),\ -g^*(y_1y_2\lambda_{-1}N)\,\lambda_{-1}F)&,\end{aligned}$$

потому что $\lambda_{-1}(F)\,(1-l)=g^*(\lambda_{-1}N)$.

Кроме того, *образ α является идеалом в кольце $K(X)\oplus K(Y')_{N'}$*:

$$\begin{aligned}(x,y')\,\alpha(y)&=(x,y')\,(i_*(y),\ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F)=\\ &=(x\cdot i_*(y),\ -g^*i^*(x)\,g^*(y)\,\lambda_{-1}F+g^*i^*i_*(y)\,y'-\\ &-g^*(y)\,y'\lambda_{-1}F\,(1-l))=(i_*(i^*(x)\cdot y),\ -g^*(i^*(x)\cdot y)\,\lambda_{-1}F)=\alpha(i^*(x)\cdot y).\end{aligned}$$

Из этой формулы, кроме того, видно, что

(а) *Образ α и $K(Y')_{N'}$ ортогональны относительно умножения.*

(б) *α является не только гомоморфизмом колец, но и гомоморфизмом $K(X)$-алгебр.*

(в) *Гомоморфизм групп $\alpha'\colon K(X)\oplus K(Y')_{N'}\to K(Y)$:*

$$\alpha'(x,y')=-g_*(y')$$

обладает свойством

$$\alpha'\circ\alpha(y)=y,\quad \forall y\in K(Y).$$

Поэтому идеал $\alpha(K(Y))$ выделяется прямым слагаемым (как аддитивная подгруппа).

Гомоморфизм колец $\beta\colon K(X)\oplus K(Y')_{N'}\to K(X')$. Положим

$$\beta(x,y')=f^*(x)+j_*(y').$$

Совместимость с умножением внутри подгрупп элементов вида $(x,0)$ и $(0,y')$ очевидна; совместимость с умножением «крест накрест» следует из того, что

$$\begin{aligned}\beta((x,0)\,(0,y'))&=\beta(0,\ g^*\cdot i^*(x)\,y')=j_*(g^*\cdot i^*(x)\,y')=\\ &=j_*(j^*f^*(x)\,y')=f^*(x)\,j_*(y')=\beta(x,0)\,\beta(0,y').\end{aligned}$$

15.2. Теорема. *Последовательность*

$$0\to K(Y)_N\xrightarrow{\alpha}K(X)\oplus K(Y')_{N'}\xrightarrow{\beta}K(X')\to 0$$

точна.

Доказательство. Мы проверим точность в каждом члене в отдельности.

α-вложение. Действительно, пусть $\alpha(y)=0$. Тогда, в частности,

$$g^*(y)\,\lambda_{-1}(F)=0,$$

откуда

$$0=g_*(g^*(y)\,\lambda_{-1}(F))=yg_*(\lambda_{-1}F)=y.$$

β-эпиморфизм. Достаточно проверить, что для любого элемента $x'\in K(X')$ имеем

$$x'-f^*f_*(x')\in j_*(K(Y')).$$

Можно ограничиться случаем $x'=cl(\mathscr{E})$. Тогда имеем

$$f^*f_*cl(\mathscr{E})=\sum_{i,j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}cl(R^if^*(R^jf_*(\mathscr{E}))).$$

В сумме справа пучки $R^if^*(R^jf_*(\mathscr{E}))$ сосредоточены на Y', если $i+j\geqslant 1$, потому что f является изоморфизмом вне Y'. Поэтому

$$f^*f_*cl(\mathscr{E})=cl(f^*f_*(\mathscr{E}))+x'',$$

где x'' принадлежит подгруппе, порожденной классами пучков, сосредоточенных на Y'.

Покажем, что к этой же подгруппе принадлежит разность $cl(\mathscr{E})-clf^*f_*(\mathscr{E})$. Действительно, вне Y' пучки $\mathscr{E}$ и $f^*f_*\mathscr{E}$ естественно изоморфны. Вложим $\mathscr{E}\,|\,_{X'\setminus Y'}$ диагонально в пучок $(\mathscr{E}\oplus f^*f_*(\mathscr{E}))\,|\,_{X'\setminus Y'}$ и продолжим получившийся подпучок до подпучка $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}\oplus f^*f_*(\mathscr{E})$ на всем пространстве X' (см. п. 1.13).

Проекции $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' \to f^* f_* \mathscr{E}$ являются изоморфизмами вне Y'. Отсюда следует, что $cl(\mathscr{E}') - cl(\mathscr{E})$ и $cl(\mathscr{E}') - cl(f^* f_*(\mathscr{E}))$, а стало быть, и разность этих элементов, принадлежит подгруппе в $K(X)$, порожденной классами пучков, сосредоточенных на Y'.

Но эта подгруппа содержится в образе $j_*(K(Y))$, так как у каждого такого пучка есть конечный ряд подпучков, факторы которого аннулируются $\mathcal{J}'$, т. е. являются $O_{Y'}$-модулями.

$\beta \circ \alpha = 0$. Действительно,

$$\beta \circ \alpha(y) = f^* i_*(y) - j_*(g^*(y)\lambda_{-1}F) = 0$$

в силу предложения 13.7.

$\operatorname{Ker}\beta \subset \operatorname{Im}\alpha$. Пусть $(x, y') \in \operatorname{Ker}\beta$. Тогда

$$f^*(x) = -j_*(y').$$

Мы хотим доказать существование такого элемента y, что

$$x = i_*(y), \quad y' = -g^*(y)\lambda_{-1}F.$$

Первому равенству легко удовлетворить: действительно, по 14.2(а)

$$x = f_* f^*(x) = -f_* j_*(y') = -i_* g_*(y'),$$

так что достаточно положить $y = -g_*(y')$.

Остается доказать, что этот элемент удовлетворяет и второму равенству, т. е. что

$$y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}(F) = 0.$$

Сразу же получается несколько более слабый результат

$$j_*(y') = f^*(i_* g_*(y')) = j_*(g^* g_*(y')\lambda_{-1}F)$$

(см. предложение 13.7), откуда

$$j_*(y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F) = 0.$$

Теперь применим предложение 14.2(в) к элементу

$$y = y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F.$$

Получим

$$y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F = g^* g_*(y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F)\lambda_{-1}F =$$
$$= g^*(g_* y' - g_*(y') g_*(\lambda_{-1}F))\lambda_-$$

ибо $g_*(\lambda_{-1}F) = 1$. Теорема доказана.

15.3. Теперь покажем, как доказанные результаты позволяют новить кольцо $K(X')$ и связанные с ним гомоморфизмы, пользуяс мацией о вложении $Y \xrightarrow{i} X$. Начнем с аддитивной структуры этог

Задание следующих структур определяет группу $K(X')$:

(а) *Группы $K(X)$, $K(Y)$ и гомоморфизм*

$$i_*: K(Y) \to K(X).$$

(б) *Класс конормального пучка $N \in K(Y)$, его внешние степени $\lambda^i N$ и произведения этих элементов на элементы из $K(Y)$.*

Действительно, вычисление группы $K(X')$ проводится тогда следующим образом.

Первый шаг. Конструкция группы $K(Y')$ и гомоморфизма $g^*: K(Y) \to K(Y')$.

Положим формально

$$K(Y') = \bigoplus_{i=0}^{r} K(Y)\, l^i,$$

где g^* — вложение $K(Y)$ на слагаемое $K(Y)\, l^0$.

(Здесь $l^0 = 1, l, \ldots, l^r$ — формальные индексы, нумерующие компоненты прямой суммы $r+1$ экземпляра групп $K(Y)$.)

Второй шаг. Конструкция гомоморфизма $\alpha: K(Y) \to K(X) \oplus K(Y')$. Положим

$$F = g^*(N) - l \in K(Y').$$

Для конструкции α нужно знать, кроме i_*, еще гомоморфизм

$$y \to g^*(y)\lambda_{-1}(F),$$

т. е. уметь умножать на $\lambda_{-1}(F)$ в кольце $K(Y')$. Но

$$\lambda_{-1}(F) = \sum_{i=0}^{r} \gamma^{r-i}(N - r - 1)(1 - l)^i.$$

Поэтому достаточно уметь умножать отдельно на степени l и на элементы $\gamma^{r-i}(N - r - 1)$. Первое сводится ко второму, потому что $\gamma^{r-i}(N - r - 1)$ — коэффициенты полиномиального уравнения, которому удовлетворяет l. В свою очередь эти коэффициенты линейно над $\mathbf{Z}$ выражаются через $\lambda^i N$.

Третий шаг. Вычисление группы $K(X')$

$$K(X') = (K(X) \oplus K(Y'))/\alpha(K(Y)).$$

15.4. Для вычисления умножения в $K(X')$ нужно знать, в дополнение к перечисленным в п. 15.3, следующие структуры:

(в) *Умножение в $K(X)$ и $K(Y)$.*

(г) *Гомоморфизм колец $i^*: K(X) \to K(Y)$.*

Действительно, тогда кольцо $K(Y')$ вычисляется так:

$$K(Y') = K(Y)[t]/\left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N - r - 1)(t - 1)^i\right.$$

(образ t^i — это элемент l^i в обозначениях предыдущего пункта). Определения п. 15.1 позволяют построить кольца $K(Y)_N$, $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ и гомоморфизм α. Кольцо $K(X')$ восстанавливается тогда как ядро α.

Следует отметить, что для вычисления g_* нужно пользоваться формулой

$$g_*(g^*(y)\, l^i) = y\sigma^i(N) \quad (i \geqslant 0),$$

а $\sigma^i(N)$ можно представить в виде целочисленных линейных комбинаций элементов $\lambda^i(N)$, пользуясь формулой

$$\lambda_t(N)\,\sigma_{-t}(N) = 1.$$

15.5. В диаграмме, приведенной в п. 14.1, кольцо $K(X')$ является началом или концом четырех стрелок: f^*, f_*, j^* и j_*. Покажем, что описанной информации достаточно также для вычисления этих гомоморфизмов. Точнее говоря, все они некоторым каноническим образом поднимаются до

гомоморфизмов кольца $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$, которые мы будем обозначать той же буквой с чертой наверху.

Имеяно, следующие четыре диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] & K(X') \\ & K(X) \arrow[u, "f^*"'] \arrow[ul, "\bar{f}^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\bar{f}^*"'] & K(X') \arrow[d, "f^*"] \\ & K(X) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\bar{j}^*"'] & K(X') \arrow[d, "j_*"] \\ & K(Y') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] & K(X') \\ & K(Y') \arrow[u, "j^*"'] \arrow[ul, "\bar{j}^*"] \end{tikzcd}$$

где

$$\bar{f}^*(x) = (x, 0),$$
$$\bar{f}_*(x, y') = x + i_* g_*(y'),$$
$$\bar{j}_*(y') = (0, y'),$$
$$\bar{j}^*(x, y') = g^* i^*(x) + y'(1 - l).$$

Наконец, полезно отметить тождества

$$\bar{f}_* \circ \bar{f}^* = id,$$
$$\bar{j}^* \circ \bar{j}_*(y') = y'(1 - l),$$
$$\bar{f}^* \circ \bar{i}_*(y) - \bar{j}_*(\bar{g}^*(y)\lambda_{-1}F) = \alpha(y).$$

16. Операции Адамса и гомоморфизм прямого образа

16.1. Цель этого раздела и добавления к нему — дополнить утверждение теоремы 15.2 результатами о поведении γ-фильтрации относительно гомоморфизмов α и β, что позволит доказать вариант этой теоремы для колец $GK(X) \otimes \mathbf{Q}$. Так как по ходу доказательства мы все равно утратим возможность следить за кручением (по крайней мере частично), ограничимся рассмотрением операций Адамса ψ^p (см. раздел 11) вместо λ^p и γ^p, что технически значительно проще, потому что ψ^p являются гомоморфизмами колец. Точнее говоря, мы введем на кольцах $K(Y)_N$ и $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ такой набор операций ψ^p, что гомоморфизмы α и β будут коммутировать с ними с точностью до кручения. (При этом мы, естественно, хотим, чтобы на $K(X)$ и $K(Y)$ эти новые операции совпадали со старыми.) Начнем с интуитивного объяснения новых операций.

Первая задача состоит в том, чтобы попытаться угадать вид новых операций ψ_N^p на кольце $K(Y)_N$. Так как умножение в $K(Y)_N$ отличается от умножения в $K(Y)$ корректирующим множителем $\lambda_{-1}N$, попробуем положить

$$\psi_N^p(y) = \psi^p(y) \cdot \theta,$$

где $\theta \in K(Y)_N$ — некоторый новый корректирующий множитель, и выясним, как отразится на выборе θ требование о том, чтобы отображение ψ_N^p было эндоморфизмом *кольца* $K(Y)_N$. Должно быть выполнено соотношение

$$\psi_N^p(y_1 * y_2) = \psi_N^p(y_1) * \psi_N^p(y_2), \quad y_1, y_2 \in K(Y),$$

т. е.

$$\psi^p(y_1 y_2 \lambda_{-1}N)\theta = \psi^p(y_1)\psi^p(y_2)\lambda_{-1}N \cdot \theta^2.$$

Если бы в кольце $K(Y)$ не было делителей нуля, из равенства следовало бы, что $\theta = \psi^p(\lambda_{-1}N)/\lambda_{-1}N$. На самом деле не только этот вывод неверен, но и само равенство не имеет смысла, потому что $\lambda_{-1}N \in F^1 K(Y)$, и, следовательно (предложение 8.7), знаменатель нильпотентен!

Все же посмотрим на простейший случай, когда N — обратимый пучок. Тогда $\psi^p(\lambda_{-1}N) = \psi^p(1 - N) = 1 - N^p$, и имеется большой соблазн положить $\psi^p(\lambda_{-1}N)/\lambda_{-1}N = 1 + N + \ldots + N^{p-1}$ в этом случае. Естественно, возникает идея воспользоваться затем для продолжения этой операции на все N принципом расщепления, потребовав совместимости этой операции с гомоморфизмами f^* и выполнимости «функционального уравнения»

$$\frac{\psi^p(\lambda_{-1}(N_1 + N_2))}{\lambda_{-1}(N_1 + N_2)} = \frac{\psi^p(\lambda_{-1}N_1)}{\lambda_{-1}N_1} \cdot \frac{\psi^p(\lambda_{-1}N_2)}{\lambda_{-1}N_2}$$

(в конце концов числитель и знаменатель в отдельности этому уравнению удовлетворяют!).

Эта идея проходит вполне гладко.

16.2. Определение-лемма. *Пусть $K(X)^+$ — полугруппа классов локально свободных пучков на X по сложению, а $K(X)^*$ — полугруппа всех элементов кольца по умножению. Тогда можно единственным способом определить для всех схем X гомоморфизмы полугрупп $\theta^p : K(X)^+ \to K(X)^*$, $p \geqslant 1$, так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(16.2.1) $\theta^p \circ f^* = f^* \circ \theta^p$ для всех морфизмов $f : X \to Y$.

(16.2.2) $\theta^p(l) = 1 + l + \ldots + l^{p-1}$, *если l — класс обратимого пучка.*

Доказательство. Единственность θ^p немедленно следует из принципа расщепления. Существование получается следующей прямой конструкцией. Пусть $X_1, \ldots X_r$ — независимые переменные, Y_i $(i = 1, \ldots, r)$ — i-я элементарная симметрическая функция от (X_i). Определим многочлен $\Pi_{p,r}(Y_1, \ldots, Y_r) \in \mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_r]$ формулой

$$\Pi_{p,r}(Y_1, \ldots, Y_r) = \prod_{k=1}^{r} (1 + X_k + \ldots + X_k^{p-1})$$

и для любого класса N локально свободного пучка ранга r положим

$$\theta^p(N) = \Pi_{p,r}(\lambda^1 N, \ldots, \lambda^r N).$$

Все свойства θ^p проверяются немедленно, если учесть, что для $N = \sum_{i=1}^{r} l_i$ (l_i — классы обратимых пучков) $\lambda^k N$ есть k-я элементарная симметрическая функция от (l_i).

16.3. Замечание. Из определения $\Pi_{p,r}$ очевидно, что

$$\varepsilon(\theta^p(N)) = p^{\varepsilon(N)} \neq 0.$$

Поэтому элементы $\theta^p(N)$ обратимы в $K(X) \otimes \mathbf{Q}$, откуда немедленно следует, что θ^p однозначно продолжается до гомоморфизма групп

$$K(X) \to (K(X) \otimes \mathbf{Q})^*.$$

16.4. Свойства $\theta^p(N)$. В дополнение к перечисленным в 16.2 операция θ^p удовлетворяет следующим двум тождествам:

$$\theta^p(N)\lambda_{-1}N = \psi^p(\lambda_{-1}N); \tag{16.4.1}$$

$$\theta^{pq}(N) = \psi^p(\theta^q(N))\cdot\theta^p(N). \tag{16.4.2}$$

Оба они немедленно получаются из принципа расщепления, если заметить, что левые и правые части их мультипликативны по N и совпадают на классах обратимых пучков.

Теперь мы можем ввести операции ψ^p_N на кольце $K(Y)_N$.

16.5. Определение-лемма. *Положим для любого элемента $y \in K(Y)_N$*

$$\psi^p_N(y) = \psi^p(y)\cdot\theta^p(N).$$

Тогда ψ^p_N для всех натуральных p является эндоморфизмом кольца $K(Y)_N$ и, кроме того, $\psi^p_N \circ \psi^q_N = \psi^{pq}_N$.

Доказательство. Тривиальная проверка с помощью формул (16.4.1) и (16.4.2) показывает, что наша машина делает в точности то, ради чего она была построена:

$$\psi^p_N(y_1 * y_2) = \psi^p(y_1y_2)\lambda_{-1}N\theta^p(N);$$

$$\psi^p_N(y_1) * \psi^p_N(y_2) = \psi^p(y_1)\theta^p(N)\psi^p(y_2)\theta^p(N)\lambda_{-1}N = \psi^p(y_1y_2)\lambda_{-1}(N))\theta^p(N);$$

$$\psi^p_N(\psi^q_N(y)) = \psi^p(\psi^q(y)\theta^q(N))\theta^p(N) = \psi^{pq}(y)\theta^{pq}(N) = \psi^{pq}_N(y).$$

Теперь мы установим гораздо более тонкий результат: коммутирование (с точностью до кручения) наших операций ψ^p_N с гомоморфизмами прямого образа.

16.6. Теорема. *Пусть $i\colon Y \to X$ — регулярное вложение с классом конормального пучка $N \in K(Y)$. Тогда*

$$p^2(i_*\psi^p_N(y) - \psi^p(i_*(y))) = 0.$$

Доказательство. Назовем пару (i, y), состоящую из морфизма i и элемента $y \in K(Y)$ «хорошей», если для нее

$$i_*\psi^p_N(y) - \psi^p(i_*(y)) = 0.$$

Мы разобьем доказательство на несколько шагов, которые доставят нам много хороших пар; но когда естественные способы получать хорошие пары исчерпаются, придется ввести искусственный прием, который и приведет к лишнему множителю p^2 в формулировке теоремы. Я не знаю, можно ли от него избавиться совсем или уменьшить его, скажем, до p.

Первый шаг. *Пара (i, y) является хорошей, если пара $(j, g^*(y)\lambda_{-1}F)$ хороша* (обозначения трех последних разделов). Действительно, так как $f_*f^* = id$, f^* является вложением, так что (i, y) — хорошая пара, если $f^*i_*\psi^p_N(y) = f^*\psi^p(i_*(y))$. Но

$$f^*i_*\psi^p(y) = j_*(g^*(\psi^p_N(y))\lambda_{-1}F) = j_*(\psi^p(g^*y)\theta^p(g^*N)\lambda_{-1}F) =$$
$$= j_*(\psi^p(g^*y)\theta^p(F)\lambda_{-1}F\theta^p(l)) = j_*(\psi^p_l(g^*y\lambda_{-1}F)).$$

(Мы пользуемся последовательно предложением 13.7, формулой $g^*N = F + l$ и тождеством (16.4.1), примененным к F.) Далее

$$f^*(\psi^p(i_*(y))) = \psi^p(f^*i_*(y)) = \psi^p(j_*(g^*(y)\lambda_{-1}F)),$$

чем завершается первый шаг.

Второй шаг. *Если $y' \in \operatorname{Im} j^*$, то пара (j, y') хороша.* Действительно, пусть $y' = j^*(x)$. *Тогда*

$$j_*(\psi^p_l(y')) = j_*(\psi^p(j^*(x))(1 + l + \ldots + l^{p-1})) = \psi^p(x)\cdot j_*(1 + l + \ldots + l^{p-1}),$$
$$\psi^p(j_*(y')) = \psi^p(j_*j^*(x)) = \psi^p(xj_*(1)) = \psi^p(x)\psi^p(j_*(1)).$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$\psi^p(j_*(1)) = j_*(1 + l + \ldots + l^{p-1}).$$

Положим $L = O_{X'}(1)$, тогда $l = j^*(L)$ и $j^*(1) = 1 - L$. Поэтому $j_*(l^i) = j_*j^*(L^i) = L^ij_*(1) = L^i(1 - L)$, так что

$$\psi^p(j_*(1)) = 1 - L^p,$$
$$\sum_{i=0}^{p-1} j_*(l^i) = \sum_{i=0}^{p-1} L^i(1 - L) = 1 - L^p,$$

что доказывает требуемое.

Заметим теперь, что в силу первого шага нам нужно проверять пары (j, y'), в которых элемент y' имеет очень специальный вид: $y' = g^*(y)\lambda_{-1}F$.

Третий шаг. *Все пары $(j, g^*(y)\lambda_{-1}F)$ хороши, если $\lambda^i(N - 2) = 0$ при $i > r - 2$, где $r = \varepsilon(N)$.*

В самом деле, если $y' = y''(1 - l)$, то $y' = j^*j_*(y'') \in \operatorname{Im} j^*$. Поэтому достаточно проверить, что при выполнении нашего условия $\lambda_{-1}F$ делится на $1 - l$. Действительно,

$$\lambda_{-1}F = (-1)^{r-1}\lambda^{r-1}(F - 1) = (-1)^{r-1}\lambda^{r-1}(g^*(N - 2) + (1 - l)) =$$
$$= (-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-2} g^*\lambda^i(N - 2)\lambda^{r-1-i}(1 - l),$$

а $\lambda^j(1 - l)$ делится на $1 - l$ при $j \geqslant 1$.

Собирая вместе результаты первых трех шагов, получаем: *все пары (i, y') хороши (в частности, теорема 16.6 верна даже без множителя p^2), если $\lambda^i(N - 2) = 0$ при $i > \varepsilon(N) - 2$.*

Лемма 21 статьи Бореля — Серра показывает, что это условие для многообразий X, Y выполнено, например, если $\varepsilon(N) \geqslant \dim Y + 2$, т. е. если $2\dim Y + 2 \leqslant \dim X$: вложение должно быть достаточно «глубоким»; тогда ψ^p_N переходят в ψ^p.

Мы не будем пользоваться этой леммой, а вместо нее применим следующий искусственный прием. Вложим X регулярно в некоторую схему Z $(s : X \to Z)$ так, чтобы конормальный пучок X в Z был тривиален ранга 2. Геометрически естественно ожидать (и будет доказано ниже), что в индуцированном вложении Y в Z конормальный пучок будет $N + 2$. По результатам первых трех шагов все пары $(s \circ i, y)$ и (s, x) будут хорошими. Отсюда для всех пар (i, y) автоматически получится утверждение теоремы.

Приступим к выполнению этой программы.

16.7. Лемма. *Пусть $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{s} Z$ — цепочка регулярных вложений. Обозначим через $\mathcal{N}(Y, X)$ конормальный пучок вложения Y в X; аналогично $\mathcal{N}(Y, Z)$, $\mathcal{N}(X, Z)$. Тогда $s \circ i$ является регулярным вложением и имеет место точная последовательность*

$$0 \to i^*\mathcal{N}(X, Z) \to \mathcal{N}(Y, Z) \to \mathcal{N}(Y, X) \to 0.$$

Чтобы не прерывать связности изложения, отнесем доказательство этой леммы в конец. Приняв ее, продолжим доказательство теоремы 16.6.

16.8. Четвертый шаг. *Конструкция вложения s и некоторые его свойства.*

Положим $Z = \mathbf{P}(O_X^3) = \operatorname{Proj}(O_X[T_0; T_1; T_2])$, где T_0, T_1, T_2 — три независимых сечения $O_Z(1)$. Подсхема Z, заданная уравнениями $T_0 = T_1 = 0$, очевидно, канонически изоморфна X; обозначим через $s : X \to Z$ соответствующее вложение, а через $p : Z \to X$-каноническую проекцию, так что $p \circ s = id$. Легко проверить, что класс конормального пучка к X в Z равен 2. Нам понадобится еще следующий факт: $\operatorname{Ker} s_* = 0$. Он немедленно следует из того, что $p_* s_*(x) = x$.

16.9. Пятый шаг. Окончание доказательства теоремы 16.6.

По лемме 16.7 класс конормального пучка к Y в Z равен $N + 2$. Следовательно, все пары $(s \circ i, y)$ хороши, т. е.

$$\psi^p(s_* i_*(y)) = (si)_* \psi^p_{N+2}(y) = p^2 (si)_* \psi^p_N(y).$$

С другой стороны, класс конормального пучка к X в Z равен 2, так что все пары (s, x) хороши, в частности, пара $(s, i_*(y))$:

$$\psi^p(s_* i_*(y)) = s_* \psi^p_2(i_*(y)) = p^2 s_* \psi^p(i_*(y)).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$p^2 (si)_* \psi^p_N(y) = p^2 s_* \psi^p(i_*(y)),$$

что доказывает теорему, потому что, как было доказано на предшествующем шаге, ядро s_* тривиально.

16.10. Доказательство леммы 16.7. Рассмотрим локальную ситуацию, когда все схемы аффинные. То, что $s \circ i$ регулярное вложение, очевидно из определений. Пусть $Z = \operatorname{Spec} A_Z$, $X = \operatorname{Spec} A_Z/I_{X,Z}$, аналогичный смысл имеют кольца A_X, A_Y и идеалы $I_{Y,Z}$, $I_{Y,X}$. Имеет место точная последовательность A_Z-модулей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & I_{X,Z} & \to & I_{Y,Z} & \to & I_{Y,X} & \to 0 \\ & \cap & & \cap & & \cap & \\ & A_Z & & A_Z & & A_X = A_Z/I_{X,Z} & . \end{array}$$

Умножим ее тензорно на A_X над A_Z. Это дает точную последовательность A_X-модулей

$$I_{X,Z}/I^2_{X,Z} \to I_{Y,Z} \otimes A_X \to I_{Y,X} \to 0.$$

Теперь умножим эту точную последовательность тензорно на $A_Y = A_X/I_{Y,X}$ над A_X. Получим точную последовательность A_Y-модулей

$$I_{X,Z}/I^2_{X,Z} \otimes_{A_X} A_Y \to I_{Y,X}/I^2_{Y,Z} \to I_{Y,X}/I^2_{Y,X} \to 0.$$

(При вычислении среднего члена воспользоваться ассоциативностью и тем, что $A_X \otimes_{A_X} A_Y = A_Y$.) Она является последовательностью сечений последовательности, выписанной в формулировке леммы 16.7. Нуль слева можно поставить, не нарушая точности, потому что все фигурирующие здесь пучки локально свободны на Y и ранг среднего равен сумме рангов двух крайних (Напоминаем: ранг конормального пучка к Y равен числу элементов регулярной системы уравнений, локально задающих Y, что делает аддитивность очевидной.)

Теперь, пользуясь доказанной теоремой, выясним поведение γ-фильтрации относительно гомоморфизма i_*. Положим $K_{\mathbf{Q}} = K \otimes \mathbf{Q}$.

16.11. Лемма. *Пусть $p \geqslant 2$ — фиксированное целое число, $y \in K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Следующие два утверждения равносильны:*

а) $y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)$;

б) $\psi^p(y) - p^k(y) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$.

Доказательство. Импликация а $\Rightarrow$ b уже доказана (даже в кольце $K(Y)$) в предложении 11.8.

Наоборот, пусть выполнено условие б). Пусть m — самое большое целое число, для которого $y \in F^m K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Покажем, что предположение $m < k$ приводит к противоречию. Действительно,

$$\psi^p(y) - p^k(y) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y),$$
$$\psi^p(y) - p^m(y) \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y),$$

откуда при $m < k$

$$(p^m - p^k)\, y \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$$

и, значит $y \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$, в противоречие с определением m. Лемма доказана.

16.12. Предложение. *В прежних обозначениях пусть $F^d K_{\mathbf{Q}}(Y) = 0$ при достаточно больших d. Тогда*

$$i_*(F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)) \subset F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X),$$

где r — коразмерность вложения $Y \xrightarrow{i} X$.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Leftrightarrow \psi^p(y) - p^k y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi^p(y)\, \theta^p(N) - p^k y \theta^p(N) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$$

Но $\theta^p(N) - p^r \in F^1 K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Поэтому

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow \psi^p_N(y) - p^{k+r} y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

Применим теперь убывающую индукцию по k. При достаточно больших k предложение тривиально в силу предложения об обрыве фильтрации (оно, впрочем, несущественно, и его можно было бы обойти, слегка изменив доказательство). Пусть предложение верно для $k + 1$. Тогда

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow \psi^p_N(y) - p^{k+r} y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_*(\psi^p_N(y) - p^{k+r} y) \in F^{k+1+r} K_{\mathbf{Q}}(X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi^p(i_*(y)) - p^{k+r} i_*(y) \in F^{k+r+1} K_{\mathbf{Q}}(X),$$

откуда $i_*(y) \in F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X)$ в силу леммы 16.11.

16.13. Теперь мы можем объяснить план дальнейшей работы. Пусть $Y \xrightarrow{i} X$ — регулярное вложение коразмерности r. Так как $i_*(F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)) \subset \subset F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X)$, можно определить гомоморфизм градуированных групп

$$i_*: GK_{\mathbf{Q}}(Y) \to GK_{\mathbf{Q}}(X),$$

повышающий степень на r (здесь $GK_{\mathbf{Q}}(Y) = \bigoplus_k F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)/F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$).

Тем самым по категории (гладких, нётеровых, с обильным пучком) схем и регулярных вложений есть два *ковариантных* функтора: $K_{\mathbf{Q}}$ и $GK_{\mathbf{Q}}$. С другой стороны, для каждой схемы X определен изоморфизм ch: $K_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$ (см. теорему 11.6). Оказывается, однако, что ch не определяет морфизм функторов, потому что он не коммутирует с i_*. Нашей главной целью будет выяснить правило коммутирования: оно составляет содержание «теоремы Римана — Роха — Гротендика» для вложения.

В действительности мы можем проследить за поведением фильтрации и, значит, группы $GK_{\mathbf{Q}}$ при гомоморфизмах прямого образа не только для регулярных вложений, но и, например, для проекций на базу проективизированных расслоений (см. следствие 8.10). Это открывает возможность расширить введенную выше категорию, рассматривая морфизмы, которые являются итерациями регулярных вложений и проекций расслоений на базу. (Нужно, однако, проверить, что сдвиг градуировки относительно f_* не зависит от способа разложения f в произведение вложений и проекций). При этом самую существенную роль в сравнении $f_* \mathrm{ch}$ и $\mathrm{ch} \circ f_*$ будут играть касательные пучки (или пучки дифференциалов), которые вводятся в следующей лекции.

Отметим, наконец, что для гладких квазипроективных многообразий над полем любой проективный морфизм разлагается в произведение регулярного вложения и проекции.

Д о б а в л е н и е. Рассмотрим точную последовательность теоремы 15.2. Введем операции $\psi^p_{N'}$ на среднем члене этой точной последовательности, положив

$$\psi^p_{N'}(x, y') = (\psi^p(x),\ \psi^p(y')\,\theta^p(N')).$$

Нетрудно проверить, что $\psi^p_{N'}$ являются гомоморфизмами кольца:

$$\psi^p_{N'}[(x, 0)(0, y')] = \psi^p_{N'}(0, g^* \cdot i^*(x)\, y') = (0,\ \psi^p(g^* i^*(x)\, y')(1 - l^p)),$$

$$\psi^p_{N'}(x, 0)\,\psi^p_{N'}(0, y') = (0, \psi^p(x_0))\,(0, \psi^p(y')(1 - l^p)) =$$
$$= (0,\ g^* \cdot i^* \cdot (\psi^p(x_0)\,\psi^p(y'))\,(1 - l^p)).$$

Я утверждаю, что с точностью до кручения гомоморфизмы α и β перестановочны с операциями ψ. Проверка опирается на теорему 16.6; для β она тривиальна, для α — состоит из следующих вычислений (все равенства — с точностью до кручения):

$$\psi^p(\alpha(y)) = \psi^p(i_*(y),\ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F) = (\psi^p(i_*(y)),\ -\psi^p(g^*(y)\,\lambda_{-1}F)\,\theta^p(l)),$$

$$\alpha(\psi^p_N(y)) = \alpha(\psi^p(y)\,\theta^p(N)) = (i_*(\psi^p(y)\,\theta^p(N)),\ -g^*(\psi^p(y)\,\theta^p(N))\,\lambda_{-1}F),$$

и требуемое сведение получается из-за того, что

$$g^*(\theta^p(N)) = \theta^p(F + l) = \theta^p(F)\,\theta^p(l),$$
$$\theta^p(F)\,\lambda_{-1}(F) = \psi^p(\lambda_{-1}F).$$

Теперь мы можем установить градуированный вариант теоремы 15.2.

К о л ь ц о $GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)}$. Аддитивная группа этого кольца градуирована:

$$(GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)})^{(i)} = F^{i+r} K_{\mathbf{Q}}(Y)/F^{i+r+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

Умножение в нем определяется с помощью умножения «начальных форм» и поправочного множителя (см. 15.1):

$$c_r(N) = \gamma^r(N - r) \bmod F^{r+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

(Напомним, что $\lambda_{-1}N = \gamma^r(N - r)$.)

К о л ь ц о $GK_{\mathbf{Q}}(Y')(1)_{c_1(N')}$. Определение совершенно аналогично.

Г о м о м о р ф и з м $G\alpha$ (соответственно $G\beta$) получается из гомоморфизма α (соответственно β) тензорным умножением на $\mathbf{Q}$ и рассмотрением «начальных форм».

16.14. Т е о р е м а. *Имеет место точная последовательность градуированных колец*

$$0 \to GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)} \xrightarrow{G\alpha} GK_{\mathbf{Q}}(X) \oplus GK_{\mathbf{Q}}(Y)(1)_{c_1(N')} \xrightarrow{G\beta} GK_{\mathbf{Q}}(X') \to 0.$$

Доказательство оставляется читателю (воспользоваться следствием 11.9).

17. Пучок дифференциалов

17.1. Пусть A, B — кольца, B — A — алгебра. Обозначим через $I = I_{B/A}$ ядро гомоморфизма умножения:

$$p: B \otimes_A B \to B, \quad p(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2.$$

Группа I/I^2 имеет естественную структуру $B \otimes_A B/I = B$-модуля. Обозначим этот B-модуль через $\Omega^1_{B/A}$.

Геометрическая интерпретация соответствующего пучка над $\operatorname{Spec} B$ следующая. Схема $\operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$ канонически изоморфна $\operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$, а гомоморфизм p соответствует диагональному отображению

$$\Delta: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B.$$

Пучок $\tilde{I}/\tilde{I}^2$ поэтому является конормальным пучком к диагонали при этом вложении. Поэтому его естественно рассматривать как кокасательный пучок к $\operatorname{Spec} B$ вдоль слоев морфизма $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

Определим отображение

$$d = d_{B/A}: B \to \Omega^1_{B/A}$$

формулой

$$d(b) = (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \bmod I^2.$$

17.2. Лемма. 1) *Отображение d является дифференцированием, т. е. удовлетворяет тождествам.*

$$d(b_1+b_2)=db_1+db_2,$$
$$d(b_1b_2)=b_1\,db_2+b_2\,db_1,$$
$$d(f(a))=0,\quad a\in A,$$

где $f\colon A\to B$ — структурный гомоморфизм.

2) *Пусть (b_i) — некоторая система образующих A-алгебры B. Тогда (db_i) составляют систему образующих B-модуля $\Omega^1_{B/A}$.*

Доказательство. Первое утверждение проверяется без труда; ограничимся тождеством для $d(b_1b_2)$:

$$b_1b_2\otimes 1-1\otimes b_1b_2=b_1\otimes 1\,(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)+1\otimes b_2\,(b_1\otimes 1-1\otimes b_1).$$

(Учесть, что умножение в $\Omega^1_{B/A}$ на b индуцировано умножением на $b\otimes 1$ или на $1\otimes b$ в $B\otimes B$.)

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что

$$\sum b_i\underset{A}{\otimes}b_i'\in I\Leftrightarrow\sum b_ib_i'=0\Leftrightarrow\sum b_i\otimes b_i'=$$
$$=\sum b_i\otimes b_i'-\sum b_ib_i'\otimes 1=0=\sum b_i\otimes 1\,(1\otimes b_i'-b_i'\otimes 1).$$

Отсюда следует, что $\Omega_{B/A}$ как B-модуль порожден элементами вида db при всех $b\in B$. Так как d — дифференцирование, обращающееся в нуль на образе A, то отсюда легко получается требуемое.

17.3. Пример. Пусть $B=A[T_1,\ldots,T_r]$. Тогда $\Omega^1_{B/A}$ — свободный B-модуль, свободно порожденный элементами dT_i.

17.4. Предложение. *Для любого дифференцирования $d'\colon B\to M$ кольца B в B-модуль M, обращающегося в нуль на образе A, существует единственный гомоморфизм B-модулей $f\colon\Omega^1_{B/A}\to M$, для которого $d'=f\circ d_{B/A}$.*

Доказательство. Единственность f немедленно следует из того, что $d'b=f(db)$ для всех $b\in B$, так что f однозначно определен на системе образующих $\Omega^1_{B/A}$.

Для доказательства существования определим сначала гомоморфизм групп

$$\varphi\colon B\underset{A}{\otimes}B\to M,$$

положив $\varphi(b\underset{A}{\otimes}b')=-b\,d'b'$.

Гомоморфизм обращается в нуль на I^2. Действительно, прежде всего, гомоморфизм φ является гомоморфизмом B-модулей, если действие B на $B\underset{A}{\otimes}B$ определить через $b\to b\otimes 1$. Далее, как было показано выше, элементы $b\otimes 1-1\otimes b$ порождают B-модуль I. Поэтому попарные произведения $(b_1\otimes 1-1\otimes b_1)(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)$ порождают B-модуль I^2. Следовательно достаточно проверить, что φ обращается в нуль на них. Действительно,

$$\varphi[(b_1\otimes 1-1\otimes b_1)(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)]=b_1\,d'b_2+b_2\,d'b_1-d'(b_1b_2)=0.$$

Поэтому φ индуцирует некоторое отображение $f\colon I/I^2\to M$. Имеем

$$f(db)=\varphi(b\otimes 1-1\otimes b)=d'b,$$

что завершает доказательство.

17.5. Следствие. *Пусть $S\subset B$ — мультипликативное множество. Тогда отображение*

$$f\colon\Omega^1_{B_S/A}\to(\Omega^1_{B/A})_S\colon f(d(b_1/b_2))=(b_2\,db_1-b_1\,db^2)/b_2^2$$

определено и является изоморфизмом B_S-модулей.

Доказательство. Сквозное отображение

$$B\to B_S\xrightarrow{d}\Omega^1_{B_S/A}$$

является дифференцированием. Поэтому оно проводится через некоторый гомоморфизм B-модулей

$$\Omega^1_{B/A}\to\Omega^1_{B_S/A},$$

который в свою очередь индуцирует гомоморфизм B_S-модулей

$$B_S\underset{B}{\otimes}\Omega^1_{B/A}=(\Omega^1_{B/A})_S\to\Omega^1_{B_S/A}.$$

Элементарная проверка показывает, что этот гомоморфизм и отображение f, построенное в формулировке следствия, взаимно обратны.

17.6. Теорема. *Пусть $f\colon X\to Y$ — морфизм схем. Тогда на X существует однозначно определенный пучок $\Omega^1_{X/Y}$, обладающий следующим свойством: для любых двух открытых аффинных подсхем* Spec $B=U\subset X$, Spec $A=V\subset Y$ *таких, что $f(U)\subset V$*

$$\Gamma(U,\Omega^1_{X/Y})=\Omega^1_{B/A}.$$

Доказательство состоит из формальных проверок совместимости с локализациями, основанных на предыдущем результате, и мы его опускаем.

17.7. Рассмотрим теперь следующую ситуацию. Пусть $i\colon Y\to X$ — замкнутое вложение схем. В дифференциально геометрической модели при соблюдении некоторых условий регулярности ограничение на Y касательного пучка к X содержит касательный пучок к Y, а фактором является нормальный пучок к Y. Мы хотим выяснить, в какой мере это переносится на случай схем.

Начнем с рассмотрения локальной ситуации.

Пусть B — некоторая A-алгебра, I — B-идеал. Тогда B/I также является A-алгеброй, и мы имеем относительные (над Spec A) кокасательные пучки к Spec B и Spec B/I, представленные модулями $\Omega^1_{B/A}$ и $\Omega^1_{(B/I)/A}$. С другой стороны, конормальный пучок вложения Spec $B/I\to$ Spec B представлен B/I-модулем I/I^2. Двойственное к классическому утверждение выглядит так:

17.8. Предложение. *Существует точная последовательность B/I-модулей*

$$I/I^2\xrightarrow{\delta}B/I\underset{B}{\otimes}\Omega^1_{B/A}\xrightarrow{u}\Omega^1_{(B/I)/A}\to 0;$$

гомоморфизмы δ и u совместимы с локализацией по B.

Доказательство. Определение гомоморфизма δ. Пусть $\bar{e} \in I/I^2$ представлен элементом $e \in I$; положим

$$\delta\bar{e} = 1 \otimes d_{B/A}e.$$

Результат не зависит от выбора e, потому что если $\bar{e} = 0$, т. е. $e \in I^2$, то $de \in Id_{B/A}I$, так что $1 \otimes d_{B/A}e = 0$. То, что δ является гомоморфизмом групп, очевидно; совместимость с действием B/I следует из того, что для любого элемента $\bar{b} = b \bmod I$ имеем

$$\delta(\bar{b}\bar{e}) = 1 \underset{B}{\otimes} d(be) = 1 \underset{B}{\otimes} (e\,db + b\,de) = \bar{b} \underset{B}{\otimes} de = \bar{b}\delta(\bar{e}).$$

Определение гомоморфизма u. Отображение $d'\colon B \to \Omega^1_{(B/I)/A}$, для которого

$$d'b = d_{(B/I)/A}(b \bmod I)$$

очевидно, является дифференцированием над A. Поэтому (п. 17.4) его можно пропустить через некоторый однозначно определенный гомоморфизм B-модулей $\Omega^1_{B/A} \to \Omega'_{(B/A)/A}$. Так как второй модуль аннулируется умножением на I, этот гомоморфизм определяет гомоморфизм B/I-модулей:

$$B/I \otimes \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{(B/I)A},$$

который по определению и есть u. Легко видеть, что

$$u(1 \underset{B}{\otimes} d_{B/A}b) = d_{(B/I)/A}(b \bmod I),$$

и, следовательно, u является эпиморфизмом.

Проверка того, что $u \circ \delta = 0$:

$$u \circ \delta(\bar{e}) = u(1 \otimes de) = d(e \bmod I) = 0.$$

Точность в среднем члене. Построим гомоморфизм

$$v\colon \Omega^1_{(B/I)/A} \to (B/I \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A})/\operatorname{Im}\delta$$

такой, что u и v будут взаимно обратны. С этой целью положим для $\bar{b} = b \bmod I$

$$v(d\bar{b}) = 1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta.$$

Независимость от выбора b следует из того, что $1 \otimes de \in \operatorname{Im}\delta$ при $e \in I$. Так как

$$u \circ v(db) = d\bar{b},$$
$$v \circ u(1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta) = 1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta,$$

а u является гомоморфизмом модулей, отсюда следует требуемое.

Глобализация нашего результата дает

17.9. Предложение. *Пусть $i\colon Y \to X$ — замкнутое вложение S-схем, где S — некоторая базисная схема* (Spec A *в предыдущем предложении*). *Пусть $\mathcal{J}$ — пучок идеалов на X, определяющий Y. Тогда существует точная последовательность*

$$i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \xrightarrow{\delta} i^*(\Omega^1_{X/S}) \to \Omega^1_{Y/S} \to 0.$$

17.10. Определение. *Вложение $i\colon Y \to X$ называется правильным (над S), если выполнены следующие два условия:*

а) *i — регулярное вложение,*

б) $\operatorname{Ker}\delta = 0$.

17.11. *Пример регулярного, но неправильного вложения.*

Пусть $X = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, $Y = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, где p — простое число; $S = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$. Тогда $\Omega^1_{X/S} = 0$ и $\Omega^1_{Y/S} = 0$; между тем $i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ представлен одномерным линейным пространством на $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

В этом примере проявляется «невозможность дифференцировать в арифметическом направлении».

В заключение мы вычислим пучок Ω^1 на проективизированном расслоении. Пусть X — некоторая неприводимая схема, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок конечного ранга на X.

17.12. Предложение. *Пусть $f\colon \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ — стандартная проекция. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \to f^*(\mathcal{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \to 0,$$

в которой гомоморфизм $f^*(\mathcal{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}}(\mathcal{E})$ получается скручиванием из гомоморфизма, определенного в предложении 4.9.

Замечание. Этот результат проясняет роль пучка $\mathcal{F}$ на Y' в теории моноидального преобразования (п. 13.6):

$$\mathcal{F} = \Omega^1_{Y'/Y}(-1).$$

Доказательство. Построим интересующую нас точную последовательность локально по базе: совместимость со склеиваниями проверяется без труда.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{E} = \widetilde{E}$, где E — свободный A-модуль, свободно порожденный элементами $T_0, \ldots, T_r \in E$. Пусть

$$f^*(T_i) \in \Gamma(\mathbf{P}(\mathcal{E}), f^*(\mathcal{E}))$$

их прообразы над $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. Полагая

$$t_{ij} = \frac{T_j}{T_i} \in S_A(E)_{(T_i)},$$

имеем

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \bigcup_{i=0}^{r} U_i,$$

$$U_i = D_+(T_i) = \operatorname{Spec} A[t_{i0}, t_{i1}, \ldots, t_{ir}].$$

Пучок $f^*(\mathcal{E})|_{U_i}$ порождается сечениями $f^*(T_j)|_{U_i}$ $(j = 0, \ldots, r)$, которые склеиваются очевидным образом.

Пучок $O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1)|_{U_i}$ изоморфен $O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}|_{U_i}$. Пусть $s_i \in O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1)|_{U_i}$ — прообраз единичного сечения структурного пучка. Известно, что локальные изоморфизмы можно выбрать таким образом, что

$$s_i|_{U_i \cap U_k} = t_{ik}s_k|_{U_k \cap U_i}.$$

Положим теперь

$$T_{ij} = f^*(T_j) \otimes s_i \in \Gamma(U_i, f^*(\mathcal{E})(-1)),$$
$$j = 0, \ldots, r.$$

Пучок $f^*(\mathscr{E})(-1)|_{U_i}$ порожден этими сечениями; склеиваются они на $U_i \cap U_k$ с помощью отождествления

$$T_{ij}|_{U_i \cap U_k} = t_{ik} T_{kj}|_{U_k \cap U_i} \quad (j = 0, \ldots, r).$$

Стандартный гомоморфизм $f^*(\mathscr{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}$ на U_i переводит сечение T_{ij} в t_{ij}. Отсюда следует, что его ядро над U_i свободно порождено сечениями

$$T_{ij} - t_{ij} T_{ii}, \quad j \neq i.$$

С другой стороны, ограничение пучка $\Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}$ на U_i свободно порождено сечениями dt_{ij}, $j \neq i$. Определим локальный изоморфизм

$$\varphi_i\colon \Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}|_{U_i} \to \operatorname{Ker}(f^*(\mathscr{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}),$$

положив $\varphi_i(dt_{ij}) = T_{ij} - t_{ij} T_{ii}$. Покажем, что на $U_i \cap U_k$ гомоморфизмы φ_i и φ_k согласованы. Действительно,

$$\varphi_i(dt_{ij})|_{U_i \cap U_k} = T_{ij}|_{U_i \cap U_k} - t_{ij} T_{ii}|_{U_i \cap U_k} = t_{ik} T_{kj}|_{U_k \cap U_i} - t_{ik} t_{ij} T_{ki}|_{U_k \cap U_i}.$$

С другой стороны,

$$\varphi_k(dt_{ij})|_{U_k \cap U_i} = \varphi_k\left(d\left(\frac{t_{kj}}{t_{ki}}\right)\right)\Big|_{U_k \cap U_i} = \varphi_k\left(\frac{t_{ki}\, dt_{kj} - t_{kj}\, dt_{ki}}{t_{ki}^2}\right)\Big|_{U_k \cap U_i} =$$

$$= \frac{1}{t_{ki}} T_{kj}|_{U_k \cap U_i} - \frac{t_{kj}}{t_{ki}} T_{kk}|_{U_k \cap U_i} - \frac{t_{kj}(T_{ki} - t_{ki} T_{kk})}{t_{ki}^2}\Big|_{U_k \cap U_i}$$

Сравним коэффициенты при T в правых частях двух последних формул.

При T_{kj} они совпадают, потому что $t_{ki} = t_{ik}^{-1}$. При T_{ki} — потому что $t_{ik} t_{ij} = \frac{t_{kj}}{t_i^2}$.

Наконец, при T_{kk} коэффициенты справа и слева равны нулю. Предложение доказано.

18. Теорема Римана—Роха для вложений

18.1. Пусть $i\colon Y \to X$ — регулярное вложение коразмерности r. В этой лекции будет доказано, что i_* коммутирует с ch с точностью до поправочного множителя по аналогии с результатом теоремы 16.6. Этот поправочный множитель определяется следующими свойствами.

18.2. Определение-лемма. *Можно однозначно определить для всех схем X отображения*

$$\mathrm{Td}\colon K(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

(18.2.1) $\mathrm{Td}(l) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i-1}}{i!}\right)^{-1}$, $x = c_1(l)$ *для классов обратимых пучков l,*

(18.2.2) $\mathrm{Td} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{Td}$ для всех морфизмов $f\colon X \to Y$,

(18.2.3) $\mathrm{Td}(x_1 + x_2) = \mathrm{Td}(x_1)\,\mathrm{Td}(x_2)$.

Доказательство стандартное (ср. п. 16.2), и мы оставляем его читателю.

18.3. Напомним теперь, что отображение $ch\colon K_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$ устанавливает изоморфизм этих колец, с помощью которого различные структуры можно перенести из одного кольца в другое.

В частности, можно определить операции $\psi^p\colon GK_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$, полагая $\psi^p(chx) = ch\psi^p(x)$. Из определения и ранее доказанных результатов немедленно следует, что ψ^p действует на $G^i K_{\mathbf{Q}}(X)$, как умножение на p^i.

Мы можем указать теперь связь операции Td («класс Тодда») с операцией θ^p.

18.4. Лемма. $ch\theta^p(N) = p^r \cdot \mathrm{Td}\,\check{N}(\mathrm{Td}\,\check{N}))^{-1}$, где N — класс пучка, двойственного к $\mathscr{N}$; $r = \varepsilon(N)$.

Доказательство. Обе части равенства мультипликативны и перестановочны с f^*. Поэтому достаточно проверить, что они совпадают на классах обратимых пучков l. Действительно, при $p \geqslant 1$

$$ch\theta^p(l) = ch(1 + l + \ldots + l^{p-1}) = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(p-1)x},$$

где $x = c_1(l)$. С другой стороны, $\mathrm{Td}\, l^{-1}$ получается подстановкой $-x$ в степенной ряд $\frac{X}{1 - e^{-X}}$, так что правая часть интересующей нас формулы получается подстановкой x в ряд

$$p \cdot \frac{-X}{1 - e^{-X}} \cdot \frac{1 - e^{pX}}{-pX} = 1 + e^X + \ldots + e^{(p-1)X},$$

что доказывает требуемое.

18.5. Теорема Римана—Роха для вложения. *Пусть $i\colon Y \to X$ — правильное вложение коразмерности r, $N \in K(Y)$ — класс конормального пучка. Тогда для любого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$ch(i_*(y)) = i_*(chy \cdot \mathrm{Td}(-\check{N})).$$

18.6. Замечание. Предположим, что для некоторой базисной схемы S вложение i является *правильным над* S (см. п. 17.10). Положим

$$\omega_X = cl(\Omega^1_{X/S}), \quad \omega_Y = cl(\Omega^1_{Y/S}).$$

Из предложения 17.9 следует тогда, что $N = i^*\omega_X - \omega_Y$, откуда

$$\mathrm{Td}(-\check{N}) = \mathrm{Td}\,\omega_Y (i^* \mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1}.$$

По формуле проекции

$$i_*(chy \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y (i^* \mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1}) = i_*(chy \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y)(\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1},$$

откуда, пользуясь теоремой 18.4, получаем следующий ее вариант для *правильных вложений*:

$$ch(i_*(y))\,\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X = i_*(chy \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y).$$

18.7. Доказательство. Положим $T = ch^{-1}(\mathrm{Td}(-\check{N}))$ и $y = Tx$. Тогда формула, которую мы хотим доказать, приобретает вид

$$ch(i_*(xT^{-1})) = i_*(chx).$$

Прежде всего заметим, что $T \equiv 1 \bmod F^{-1}K(X)$. Далее, если $ch\,x = ch_m x + ch_{m+1} x + \ldots$, где $ch_i x \in G^i K(X)$, имеем

$$ch_m x = (x - \varepsilon(x)) \bmod F^{m+1} K(X).$$

Это немедленно следует из определения ch для классов обратимых пучков и из принципа расщепления в общем случае. Поэтому, если $x \in F^m K(X)$, имеем по меньшей мере сравнение

$$ch(i_*(xT^{-1})) \equiv i_*(chx) \bmod \left(\bigoplus_{i=m+1}^{\infty} G^i K(X)\right).$$

Для того чтобы доказать точное равенство, достаточно ограничиться случаем, когда элемент chx однороден, $chx \in G^m K(X)$. Тогда $i_*(chx)$ также однороден степени $m+r$ и точное равенство будет установлено, если мы докажем, что и элемент $ch(i_*(xT^{-1}))$ однороден степени $m+r$.

Иначе говоря, нужно доказать следующую импликацию:

$$\psi^p(chy) = p^m chy \Rightarrow \psi^p(ch(i_*(yT^{-1}))) = p^{m+r} ch(i_*(yT^{-1})),$$

или равносильную импликацию

$$\psi^p y = p^m y \Rightarrow \psi^p(i_*(yT^{-1})) = p^{m+r}(i_*(yT^{-1})).$$

Имеем по теореме 16.6

$$\psi^p(i_*(yT^{-1})) = i_*(\psi^p(yT^{-1})\,\theta^p(N)) = p^m i_*(y\psi^p(T^{-1})\,\theta^p(N)).$$

Поэтому все будет доказано, если мы установим, что

$$p^r \cdot T^{-1} = \psi^p(T^{-1})\,\theta^p(N),$$

а это немедленно следует из леммы 18.4, если применить к обеим частям равенства гомоморфизм ch и учесть, что

$$chT = \mathrm{Td}(-\check{N}).$$

19. Теорема Римана—Роха для проекции

19.1. Мы продолжаем осуществлять программу, набросок которой был приведен в конце раздела 16.

Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ над связной схемой X, g: $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — стандартная проекция. Докажем теорему Римана — Роха для морфизма g. Нуждается в вычислении гомоморфизм Gg_*: $GK_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$; так как (следствие 8.10)

$$g_*(F^i K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))) \subset F^{i-r} K(X),$$

мы определим Gg_* как гомоморфизм, присоединенный к g_* и *понижающий степени на* r.

Теперь мы можем сформулировать результат, аналогичный теореме 18.5.

19.2. Теорема Римана — Роха для проекции. *Для любого элемента* $y \in K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ *имеем*

$$chg_*(y) = Gg_*(chy \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}),$$

где

$$\omega_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = cl(\Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}).$$

Доказательство. Прежде всего, левая и правая части формулы 19.2 аддитивны по y. Далее, из формулы проекции немедленно следует, что если теорема верна для y, то она верна для любого элемента вида $g^*(x) \cdot y$, где $x \in K(X)$. Поэтому *ее достаточно проверить для какой-нибудь системы образующих* $K(X)$*-модуля* $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, *например для элементов* l^k, $-r \leqslant k \leqslant 0$, *где* $l = cl(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1))$.

Вычислим отдельно левую и правую части основной формулы для этой системы образующих.

Вычисление левой части. Имеем по определению

$$g_*(l^k) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j cl(R^j g_*(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(k))).$$

Согласно теореме Серра при $k<0$ все члены этой суммы нулевые, а при $k=0$ отличен от нуля лишь член $cl(g_*(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})})) = 1$. Следовательно,

$$chg_*(l^k) = \begin{cases} 0 & \text{при } -r \leqslant k \leqslant -1, \\ 1 & \text{при } k=0. \end{cases}$$

Вычисление правой части. а) Вычисление кольца $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Рассмотрим формальное разложение многочлена Чжена пучка $\mathscr{E}$ (см. п. 11.3):

$$c_t(\mathscr{E}) = \sum_{i=0}^{r+1} c_i(\mathscr{E})\, t^i = \prod_{i=1}^{r+1} (1 + a_i t).$$

Положим еще $x = c_1(l) = l - 1 \bmod F^2 K_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \in G^1 K_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Так как элемент l удовлетворяет тождеству (п. 8.9)

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \gamma^i(e-r-1)(l-1)^{r+1-i} = 0,$$

где $e = cl(\mathscr{E})$, то элемент x в кольце $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i c_i(e)\, x^{r+1-i} = 0,$$

т. е.

$$\prod_{i=1}^{r+1} (x - a_i) = 0.$$

В силу теоремы 8.8 находим отсюда, что кольцо $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ изоморфно фактор-кольцу

$$GK(X)[T]/\left(\prod_{i=1}^{r+1} (T - a_i)\right),$$

где $T \bmod \prod_{i=1}^{r+1} (T - a_i)$ отождествляется с x.

б) Вычисление $\mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}$. По предложению 17.12

$$\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = g^*(\check{e}(1)) - 1.$$

Поэтому в силу формулы из доказательства предложения 11.4

$$c_t(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) = \prod_{i=1}^{r+1} (1 + (x - a_i)\, t),$$

откуда

$$\mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = \prod_{i=1}^{r+1} \frac{x - a_i}{1 - e^{-x+a_i}}.$$

в) Вычисление Gg_*. В силу аддитивности и линейности относительно умножения на элементы из $g^*(GK(X))$ достаточно вычислить Gg_* на элементах x^k, $0 \leqslant k \leqslant r$.

Результат следующий:

$$Gg_*(x^k) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k < r, \\ 1 & \text{при } k = r. \end{cases}$$

Действительно, g_* снижает степень на r, а x^k принадлежит в точности $G^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ в силу теоремы 8.8. Поэтому при $k < r$ утверждение очевидно. При $k = r$ в силу определения g_* имеем

$$Gg_*(x^r) = \varepsilon(f_*((l-1)^r)) = \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{r}(-1)^i f_*(l^i)\binom{r}{i}\right) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+i}{i}.$$

Так как

$$(1-t)^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}t^{r-i}, \quad \frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k}{k}t^k,$$

сумма $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+i}{i}$ равна коэффициенту при t^r в разложении $\frac{1}{1-t}$, т. е. 1.

Собирая вместе результаты вычислений, получаем

$$Gg_*(ch\, l^k \cdot \mathrm{Td}\, \check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) = Gg_*\left(e^{kx}\prod_{i=1}^{r+1}\frac{x-a_i}{1-e^{-x+a_i}}\right).$$

Справа стоит коэффициент при x^r разложения величины $e^{kx}\prod$ по степеням x.

Поэтому, для того чтобы проверить формулу Римана — Роха для морфизма g, достаточно установить следующую чисто формальную лемму.

19.3. Лемма. *Рассмотрим кольцо* $\mathbf{Q}[[A_1, \ldots, A_{r+1}]][T]/(\prod_{i=1}^{r+1}(T - A_i))$, *где* (A_i), T — *независимые переменные. Класс формального ряда* $e^{kT}\prod_{i=1}^{r+1}\frac{T-A_i}{1-e^{-T+A_i}}$ *в этом кольце представлен некоторым однозначно определенным многочленом от* T *степени* r *с коэффициентами в* $\mathbf{Q}[[A_1, \ldots, A_{r+1}]]$.

Тогда старший коэффициент этого многочлена равен 0 *при* $-r \leqslant k < 0$ *и* 1 *при* $k = 0$.

К сожалению, я не знаю прямого доказательства этой леммы в общем случае.

В семинаре Гротендика она доказана следующим окольным путем: сначала устанавливается утверждение, более слабое, чем лемма 19.3. Из него непосредственно следует теорема Римана — Роха для проекций $g\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$, где $\mathscr{E}$ — *свободный пучок*. Комбинируя затем уже доказанные формулы Римана — Роха для вложения и проекции, устанавливается полная ее форма для *алгебраических схем над полем*, откуда затем легко получится лемма 19.3 в полной общности.

Мы ограничимся проверкой частного случая.

Ослабление леммы 19.3, которое легко доказать непосредственно, формулируется так:

19.4. Лемма. *Утверждение леммы* 19.3 *верно по модулю идеала* $(A_1, \ldots, A_{r+1})$.

(Иначе говоря, вместо коэффициента при x^r мы рассматриваем лишь его свободный член.)

Доказательство. Мы можем положить $A_1 = A_2 = \ldots = A_{r+1} = 0$ в формулировке леммы. Тогда придется рассматривать формальный ряд $e^{kT}\left(\frac{T}{1-e^{-T}}\right)^{r+1}$ и его представителя в кольце $\mathbf{Q}[T]/(T^{r+1})$. Иначе говоря, нужно доказать, что коэффициент при T^r у этого ряда равен 0 при $-r \leqslant k < 0$ и 1 при $k = 0$.

Этот коэффициент равен вычету при $T = 0$ дифференциала $\frac{e^{kT}dT}{(1-e^{-T})^{r+1}}$. Подстановка $u = 1 - e^{-T}$ превращает этот дифференциал в $\frac{(1-u)^{-k-1}\,du}{u^{r+1}}$, для которого результат очевиден.

19.5. Следствие. *Теорема* 19.2 *верна, если* $c_1(\mathscr{E}) = 1$ (*в частности, если* $\mathscr{E}$ — *свободный пучок* O_X^{r+1}).

Теперь сформулируем теорему Римана — Роха для композиции регулярного вложения и проекции: это и будет ее самый общий вид.

19.6. Теорема Римана — Роха. *Пусть* $f\colon Y \to X$ — *морфизм, который представляется в виде* $Y \xrightarrow{i} \mathbf{P}(\mathscr{E}) \xrightarrow{g} X$, *где* i — *регулярное вложение, а* $\mathscr{E}$ — *локально свободный пучок. Если формула Римана — Роха верна для* g, *то для всех* $y \in K(Y)$ *имеем*

$$chf_*(y) = Gf_*(chy \cdot \mathrm{Td}(i^*(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N})),$$

где N — *класс конормального пучка к* Y *в* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

Доказательство. Подставив в формулу

$$ch(g_*(z)) = Gg_*(chz \cdot \mathrm{Td}\, \check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X})$$

элемент $z = i_*(y)$. Тогда получим

$$chf_*(y) = Gg_*(chi_*(y) \cdot \mathrm{Td}\, \check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) = Gg_*(Gi_*(chy \cdot \mathrm{Td}(-\check{N})) \cdot \mathrm{Td}\, \check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) =$$
$$= G(g_* i_*)(chy \cdot \mathrm{Td}(-\check{N}) \cdot \mathrm{Td}\, i^* \check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) = Gf_*(chy \cdot \mathrm{Td}(i^*(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N})),$$

что и требовалось доказать.

Частный случай. Пусть X, Y — проективные алгебраические многообразия над полем k, $f\colon Y \to X$ — проективный морфизм. Тогда его всегда можно представить в виде произведения $Y \to \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$, где $\mathscr{E}$ — свободный пучок над X, например подходит разложение

$$Y \xrightarrow{i} \mathbf{P}^r \times X \xrightarrow{p_2} X,$$

где $i\colon Y \to \mathbf{P}^r$ — какое-нибудь замкнутое вложение Y, а p_2 — проекция.

19.7. В формулировке теоремы 19.6 правая часть априори зависит от разложения f в произведение вложения i и проекции g. Эта зависимость проявляется в двух местах: в определении элемента $i^*(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N}$ и в

определении гомоморфизма Gf_*, точнее, сдвига градуировки, которым мы должны пользоваться для вычисления Gf_*. В действительности ни то, ни другое от выбора разложения не зависит. (Достаточно проверить независимость $i^*(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N}$, потому что градуировка сдвигается в точности на ранг этого элемента.) Мы не станем этого проверять, ибо для всех практических надобностей формулировка 19.6 достаточна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Grothendieck, en collaboration avec J. Dieudonné, Eléments de Géometrie Algébrique, Publications Mathématiques de IHES, гл. I, № 4 (1960); гл. II, № 8 (1961), гл. III, 1-я часть, № 11 (1961); гл. III, 2-я часть, № 17 (1963), гл. IV, 1-я часть, № 20 (1964) и т. д.

[2] Ю. И. Манин, Лекции по алгебраической геометрии, изд. МГУ, 1968.

[3] Д. Мамфорд, Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М., «Мир», 1968.

[4] Дж. Дьедонне, Алгебраическая геометрия, Сб. перев. «Математика» 9 : 1 (1965), 54—126.

[5] Ж. П. Серр, Локальная алгебра и теория кратностей, Сб. перев. «Математика» 7 : 5 (1963), 3—94.

[6] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Berlin, Springer, 1966.

[7] А. Борель, Ж. П. Серр, Теорема Римана — Роха, Сб. перев. «Математика», 5 : 5 (1961), 17—54.

[8] A. Grothendieck, Classes de faisceaux et théorème de Riemann—Roch (preprint), 1957.

[9] Théorie globale des intersections et théorème de Riemann—Roch, Séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Jllusie (SGA 6 (1966—1967), IHES).

[10] М. Атья, Лекции по K-теории, М., «Мир», 1967.

[11] Р. Ботт, K-теория, Сб. перев. «Математика», 11 : 2 (1967), 32—56; 11 : 3 (1967), 3—36.

[12] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[13] A. Nobile, O. E. Villamayor, Sur la K-théorie algébrique, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4 серия, 1 (1968), 581—616.

[14] J. Tate (redigée par J. R. Joly), Sur la première demonstration par Gauss de la loi de réciprocité, Université de Grenoble, Colloque de Mathématiques pures, 1968.

ПОДП. К ПЕЧАТИ 6/1-71 Г. Л-115002. Ф. 60x90/16
БУМ. ОФС. № 2. ФИЗ.П.Л. 5,5. УЧ.-ИЗД. Л. 6,0.
ЗАКАЗ 2037. ТИРАЖ 2500. ЦЕНА 16 КОП.

ОТПЕЧАТАНО НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД. МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.