

530
K757H
89229

новости фундаментальной физики

фф

выпуск 1

КОГЕРЕНТНЫЕ
СОСТОЯНИЯ
В КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ



Москва · 1972

новости фундаментальной физики

выпуск

I

КОГЕРЕНТНЫЕ
СОСТОЯНИЯ
В КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

*Перевод с английского
кандидата физ.-мат. наук
В. И. МАНЬКО*

ИЗДАТЕЛЬСТВО

«М И Р»

МОСКВА • 1972

Настоящий сборник статей посвящен одной из интереснейших проблем современной теоретической физики — развитию и применению метода когерентных состояний в задачах квантовой теории. В статьях подробно обсуждаются физические свойства когерентных состояний, а также связанный с ними математический аппарат.

Дается обзор различных аспектов применения представления когерентных состояний в квантовой теории поля, квантовой оптике, теории сверхтекучести, теории магнетизма и в фундаментальных задачах самой квантовой механики. Описаны результаты, успехи и перспективы этого нового, важного направления теоретической физики, не успевшие найти отражения в монографиях.

Книга представляет интерес для широкого круга специалистов, работающих в различных областях теоретической и математической физики, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Читатель не только ознакомится с уже имеющимися результатами в данной области, но и получит представление о еще нерешенных проблемах и тенденциях этого быстро развивающегося направления теоретической физики.

Редакция литературы по физике

Метод когерентных состояний для произвольных динамических систем

В. И. МАНЬКО

Настоящий сборник посвящен одному из замечательных методов современной квантовой теории — методу когерентных состояний. Метод когерентных состояний особенно интенсивно развивался Глаубером [1—3], который ввел и само название «когерентные состояния». Некоторые аспекты этого метода, а также некоторые свойства когерентных состояний были известны и раньше. Так, когерентные состояния квантового осциллятора, лежащие в основе метода, являются волновыми пакетами, изучавшимися еще Шредингером [4]. Представление когерентных состояний в квантовой теории по существу тесно связано с представлением Фока — Баргмана [5, 6]. Однако успех метода когерентных состояний, применяемого сегодня почти во всех областях теоретической физики, связан с возможностью дать ясную картину квантовых явлений, используя наглядный классический язык.

В указанном смысле метод когерентных состояний близок по духу методу интеграла по путям Фейнмана [7], и это не случайно. Между этими двумя методами существует глубокая связь. Формулировка квантовой теории с помощью фейнмановского интеграла по путям дает возможность проследить связь классического и квантового подходов и сделать наглядным предельный переход от квантовой механики к классической. Оператор эволюции, или функцию Грина для уравнения Шредингера, можно записать в виде интеграла по траекториям в координатном или фазовом пространстве. Этот интеграл удается вычислить только в том случае, если он гауссов или сводится к нему. И несмотря на это, формулировка Фейнмана оказалась чрезвычайно плодотворной. Когерентные состояния также дают возможность продемонстрировать связь классической и квантовой теорий. Но встречающиеся в методе когерентных состояний интегралы являются обыкновенными, что существенно

облегчает расчеты. Более того, сами когерентные состояния имеют наглядный физический смысл, который легко пояснить на чисто классическом языке. Обычно когерентные состояния вводятся для систем, описываемых квадратичными гамильтонианами, т. е. для тех или иных наборов квантовых гармонических осцилляторов. Когерентные состояния можно ввести для любой динамической квантовой системы [8]. Остановимся сейчас на результатах, полученных в этой работе. Как указывалось в [9], построение когерентных состояний произвольной квантовой системы полностью эквивалентно нахождению функции Грина, т. е. вычислению фейнмановского интеграла по путям, или нахождению всех интегралов движения системы, задающих начальные точки траекторий в фазовом пространстве.

Обсудим подробнее этот аспект когерентных состояний. Для этого вспомним, сколько независимых интегралов движения имеется у квантовой системы с n степенями свободы. У классической системы ровно $2n$ интегралов движения, поскольку ее движение описывается системой $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение которой задается $2n$ независимыми константами. В качестве этих констант естественно выбрать координаты начальной точки траектории системы в фазовом пространстве, т. е. начальные координаты и начальные импульсы системы. Принцип соответствия классической и квантовой механики требует, чтобы интегралы движения квантовой системы соответствовали классическим интегралам движения. Если существует унитарный оператор эволюции U , то построить $2n$ интегралов движения не составляет труда. Это эрмитовы операторы x_α^{in} и p_α^{in} , где $\alpha = 1, \dots, n$:

$$p_\alpha^{in} = U p_\alpha U^{-1}, \quad x_\alpha^{in} = U x_\alpha U^{-1};$$

x_α и p_α — операторы координаты и сопряженных им импульсов. Коммутационные соотношения операторов начальных координат и импульсов таковы:

$$[x_\alpha^{in}, p_\beta^{in}] = i\delta_{\alpha\beta}.$$

(Для простоты рассуждение проводится для систем, координаты и импульсы которых меняются в неограниченных пределах.) Все остальные интегралы движения могут быть построены из начальных координат и импульсов точно так же, как в классической механике. Любой интеграл движения обладает тем свойством, что переводит решение соответствующего квантового уравнения (уравнения Шредингера или Дирака и т. д.) опять в решение. Таким образом, интеграл движения коммутирует

с оператором, определяющим уравнение, не обязательно тождественно, а на решениях этого уравнения.

Перейдем теперь к построению когерентных состояний произвольной квантовой системы [8]. Для этого введем интегралы движения — операторы рождения и уничтожения

$$a_{\alpha}^{+} = \frac{x_{\alpha}^{in} - ip_{\alpha}^{in}}{\sqrt{2}}, \quad a_{\alpha} = \frac{x_{\alpha}^{in} + ip_{\alpha}^{in}}{\sqrt{2}},$$

удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям $[a_{\alpha}, a_{\beta}^{+}] = \delta_{\alpha\beta}$. Заметим, что, поскольку любая функция от интегралов движения является также интегралом движения, можно было бы выбрать и другие независимые интегралы движения, совершив каноническое симплектическое преобразование в фазовом пространстве, не нарушающее коммутационных соотношений. Это индуцировало бы преобразование операторов рождения и уничтожения.

В чем физический смысл интегралов движения a_{α} , a_{α}^{+} ? Если в начальный момент времени $t = 0$ операторы x_{α}^{in} и p_{α}^{in} совпадают с обычными координатами и импульсами, то это означает, что средние координаты фазового пространства, фиксированные в нулевой момент времени, полностью определяют эволюцию системы. Таким образом, физический смысл интеграла движения a_{α} заключается в том, что он определяет начальную точку траектории в фазовом пространстве средних координат и импульсов. Когерентные состояния строятся обычным образом как собственные состояния неэрмитовых операторов a_{α} :

$$a_{\mu} | \alpha \rangle = \alpha_{\mu} | \alpha \rangle, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Вектор α задается n произвольными комплексными числами. Для любой динамической системы существуют, таким образом, когерентные состояния (этот вывод справедлив, разумеется, и для динамических систем с координатами или импульсами, меняющимися в конечных пределах — это динамические системы типа квантового волчка, описываемого углами Эйлера.) Явный вид когерентных состояний для произвольных систем получить трудно, поскольку когерентное состояние, выбранное в начальный момент времени в виде квадратичной экспоненты, под действием оператора эволюции может сильно изменить свой функциональный вид. Лишь для систем, описываемых квадратичным гамильтонианом, для которых оператор эволюции сам представляет собой квадратичную экспоненту, функциональный вид когерентных состояний со временем не меняется, поскольку

интеграл от произведения двух квадратичных экспонент сам является квадратичной экспонентой.

Для когерентных состояний произвольной квантовой системы выполняются стандартные соотношения ортогональности и полноты

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta \right),$$

$$\pi^{-1} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1.$$

Операторы a_μ неэрмитовы, поэтому их собственные функции, принадлежащие разным собственным значениям, не обязательно ортогональны. Существование когерентных состояний для произвольных квантовых систем, обладающих оператором эволюции, дает возможность построить также фоковское представление для таких систем. Поскольку когерентное состояние $|\alpha\rangle$ задает производящую функцию для состояний $|\mathbf{n}\rangle$, являющихся собственными состояниями квадратичных операторов $a_\mu^\dagger a_\nu$ (см. [1]), легко построить эти состояния, дифференцируя функцию $|\alpha\rangle \exp(1/2|\alpha|^2)$ по переменным α_μ . Тем самым показывается, что для любых гамильтонианов существует полный набор интегралов движения, чьи собственные числа совпадают с набором собственных чисел, задающих энергии n независимых гармонических осцилляторов. Система функций $|\mathbf{n}\rangle$ полна ($\sum_n |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = 1$), причем эти функции ортогональны, $\langle \mathbf{n} | \mathbf{m} \rangle = \delta_{nm}$. Явный вид функций $|\mathbf{n}\rangle$ легко получить в случае квадратичного гамильтониана, поскольку для него оператор эволюции (квадратичная экспонента) сохраняет начальный функциональный вид состояния $|\mathbf{n}\rangle_0$ (полином Эрмита). В случае же неквадратичного гамильтониана оператор эволюции таков, что изменяет функциональный вид начального состояния $|\mathbf{n}\rangle_0$.

Распределение вероятностей в когерентном состоянии по состояниям с заданными числами n является распределением Пуассона

$$|\langle \alpha | \mathbf{n} \rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \prod_\mu \frac{|\alpha_\mu|^{2n_\mu}}{n_\mu!}.$$

Возможность построения когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и состояний $|\mathbf{n}\rangle$ для произвольных квантовых систем связана с известным свойством изоморфизма гильбертовых пространств состояний. Благодаря этому свойству пространство состояний любой n -мерной квантовой системы можно отобразить на пространство

состояний n -мерного гармонического осциллятора, что делает очевидным соответствие квантовых чисел последнего и квантовых чисел, задающих состояние любой системы.

Обсудим теперь вопрос о связи когерентных состояний с фейнмановским интегралом по путям. Поскольку когерентные состояния являются полной системой функций, функция Грина $G(2, 1, t_2, t_1)$, являющаяся амплитудой вероятности перехода частицы, находящейся в точке 1 в момент времени t_1 , в точку 2 в момент времени t_2 , вычисляется по следующей формуле:

$$G(2, 1, t_2, t_1) = \pi^{-n} \int d^2\alpha | \alpha, 2, t_2 \rangle \langle \alpha, 1, t_1 |.$$

Эта формула аналогична разложению функции Грина по любой полной системе функций, например по функциям $|n\rangle$:

$$G(2, 1, t_2, t_1) = \sum_n |n, t_2, 2\rangle \langle n, t_1, 1|.$$

Однако если вспомнить физический смысл переменной α , то формула для функции Грина с интегрированием по когерентным состояниям приобретает особый смысл. Фактически мы имеем выражение для функции Грина через интеграл по фазовому пространству начальных средних координат системы. Тем самым интеграл по траекториям Фейнмана всегда сводится к интегралу по начальным координатам траекторий в фазовом пространстве, причем переменных α как раз хватает для получения требуемого выражения. Это связано, в частности, с тем, что классическая система описывается уравнениями второго порядка. При квантовом описании с помощью интеграла по путям системы, описываемой на классическом языке уравнениями более высоких порядков, такого согласования, по-видимому, уже не будет.

Следует подчеркнуть, что в тех задачах, для которых сосчитаны явные выражения для функции Грина, легко построить и явный вид когерентных состояний. Это позволяет воспользоваться стандартными методами техники когерентных состояний, в частности рассматривать задачу на языке P -распределения, введенного Глаубером [1] (см. также работу Сударшана [10]).

Для примера подробнее рассмотрим теперь частный случай квантовой системы, которая описывается квадратичным гамилтонианом. Когерентные состояния такой системы построены Хольцем [11] (ст. 5 настоящего сборника), а также И. А. Малкиным и др. [12].

Ниже излагаются результаты работ [12] (обозначения также заимствованы из этих работ).

Рассмотрим систему с n степенями свободы и с эрмитовым гамильтонианом вида ($\hbar = c = 1$)

$$H(t) = A_{ik}(t) Q_i Q_k + B_i(t) Q_i, \quad (1)$$

$$i, k = 1, \dots, 2n,$$

где

$$Q_1 = p_1, \dots, Q_n = p_n, \quad Q_{n+1} = q_1, \dots, Q_{2n} = q_n,$$

а эрмитова матрица $A(t)$ и действительный вектор $\mathbf{B}(t)$ являются заданными функциями времени. В дальнейшем формы типа (1) будем записывать в виде $H = \mathbf{Q}A\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Q}$. В системе с гамильтонианом (1) существует $2n$ эрмитовых инвариантов, которые мы запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = i[\mathbf{I}, H], \quad \dot{\mathbf{I}}(t) = \Lambda(t)\mathbf{Q} + \delta(t), \quad (2)$$

где вектор $\delta(t)$ и действительная матрица $\Lambda(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\Lambda} = i\Lambda\sigma_2(A + A^*), \quad \dot{\delta}(t) = i\Lambda\pi_2\mathbf{B}$$

(σ_2 — блочная матрица Паули), находятся по формулам

$$\Lambda = \tilde{T} \exp \left[i \int_0^t \sigma_2(A + A^*) d\tau \right], \quad \delta = i \int_0^t \Lambda \sigma_2 \mathbf{B} d\tau. \quad (3)$$

Легко убедиться, что $[I_i, I_k] = [Q_i, Q_k]$. В качестве интегралов движения может быть выбран вектор $\mathbf{I}' = C\mathbf{I}$, где C — симплектическая матрица, сохраняющая эрмитовость и коммутационные соотношения, что соответствует другому выбору начальных условий в (3) или каноническому преобразованию. Ясно, что оператор эволюции также задает каноническое преобразование, как и в классической механике. Введем операторы уничтожения $A_\alpha = (iI_\alpha + I_{n+\alpha})/\sqrt{2}$, такие, что $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$, и построим когерентные состояния $|\alpha, t\rangle$ как собственные функции этих операторов. Вычислим сначала вакуум $|\mathbf{0}, t\rangle$, удовлетворяющий уравнению Шредингера и условию $A_\alpha|\mathbf{0}, t\rangle = 0$:

$$|\mathbf{0}, t\rangle = \pi^{-n/4} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{q}\mu\mathbf{q} + \mathbf{v}_0\mathbf{q} + \Phi(t) \right],$$

$$\mu = i\lambda_p^{-1}\lambda_q, \quad \mathbf{v}_0 = -i\lambda_p^{-1}\Delta,$$

$$\Phi = \int_0^t d\tau \{ -\text{Sp}(A_1\lambda_p^{-1}\lambda_q) + i\Delta\lambda_p^{-1T}A_1\lambda_p^{-1}\Delta + i\mathbf{b}_1\lambda_p^{-1}\Delta - \text{Sp} A_2 \}, \quad (4)$$

$$\lambda_p = \lambda_3 + i\lambda_1, \quad \lambda_q = \lambda_4 + i\lambda_2, \quad \Delta_\alpha = i\tau_\alpha + \delta_{\alpha+n}.$$

Здесь введены обозначения, отвечающие разбиению матриц A и Λ на блоки $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с отмечавшейся неоднозначностью выбора инварианта I вакуум также выбирается неоднозначно, что отвечает рассмотрению задачи в различных системах координат в фазовом пространстве, связанных каноническим преобразованием. Физический смысл инвариантов I_α состоит в том, что их собственные числа задают начальные значения классической траектории в фазовом пространстве средних величин $\langle \mathbf{p} \rangle$, $\langle \mathbf{q} \rangle$. Удовлетворяющее уравнению Шредингера когерентное состояние $|\alpha, t\rangle$ строится из (4) с помощью оператора сдвига $D(\alpha) = \exp(\alpha \mathbf{A}^\dagger - \alpha^* \mathbf{A})$. Запишем когерентное состояние в двух удобных для дальнейшего форм

$$|\alpha, t\rangle = \pi^{-n/4} \exp\left(\sigma + \mathbf{v}\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{q}\mu\mathbf{q}\right) \quad (5a)$$

и

$$|\alpha, t\rangle = |0, t\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \mathbf{s}\alpha - \frac{1}{2}\alpha t \alpha\right), \quad (5b)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= \varphi(t) - \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta^* - \Delta\lambda_p^{-1T}\lambda_p^\dagger)\alpha + \frac{1}{4}\alpha(\lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^\dagger - \lambda_q^*\lambda_p^\dagger)\alpha, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_q^\dagger - \lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^\dagger)\alpha, \quad \mu = i\lambda_p^{-1}\lambda_q, \\ t &= \frac{i}{2}(\lambda_q^*\lambda_p^\dagger - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\lambda_p^\dagger), \\ \mathbf{s} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta^* - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\Delta + \lambda_q^*\mathbf{q} - \lambda_p^*\lambda_p^{-1}\lambda_q\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6)$$

Разлагая функцию $|\alpha, t\rangle$ в ряд по степеням α_μ , получаем функцию

$$|\mathbf{n}, t\rangle = |0, t\rangle (n_1! \dots n_n!)^{-1/2} H_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n), \quad (7)$$

где $H_n(\mathbf{x})$ — полином Эрмита от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, задаваемый матрицей μ . Свойства этих полиномов хорошо известны (см. [13]). Явное выражение для функции Грина получим, беря гауссов интеграл по начальным координатам в фазовом

пространстве:

$$\begin{aligned}
 G(2, 1) &= 2^n |0, 2\rangle \langle 0, 1| (\det \rho)^{-1/2} \exp(1P^{-1}), \\
 P &= \begin{pmatrix} t(2) & it(2) \\ it(2) & -t(2) \end{pmatrix} + \sigma_3 \begin{pmatrix} 2 + t^*(1) & it^*(1) \\ it^*(1) & 2 - t^*(1) \end{pmatrix} \sigma_3, \\
 1 &= \begin{pmatrix} s(2) \\ is(2) \end{pmatrix} + \sigma_3 \begin{pmatrix} s^*(1) \\ is^*(1) \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Матрицы $t(1)$, $t(2)$ и векторы $s(1)$, $s(2)$ определены формулами (6). Получение функции Грина (8) путем интегрирования по когерентным состояниям (т. е. по координатам в фазовом пространстве) полностью эквивалентно взятию фейнмановского интеграла по классическим траекториям. Воспользуемся теперь свойствами когерентных состояний для расчета вероятностей возбуждения рассматриваемой системы. Будем считать, что при $t < 0$ и при $t \rightarrow \infty$ гамильтониан системы становится не зависящим от времени. В этих условиях существуют начальные и конечные состояния стационарной системы, между которыми происходят переходы. Амплитуда перехода из начального состояния $|in\rangle$ в конечное $|f\rangle$ дается матричным элементом $\langle f|t \rightarrow \infty\rangle$, где $|t \rightarrow \infty\rangle$ есть предел состояния $|t\rangle$ при $t \rightarrow \infty$.

Амплитуды перехода $|\alpha, in\rangle \rightarrow |\beta, f\rangle$ между когерентными состояниями легко вычисляются путем взятия гауссова интеграла по координатам:

$$\begin{aligned}
 \langle \beta, f | \alpha, t \rangle &= \langle 0, f | 0, t \rangle \exp \left[\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + s\xi - \frac{1}{2} \xi T \xi \right], \\
 \xi &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^* \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} \rho - \frac{i}{2} \tau^T [(\bar{\mu} - 1)^T + \bar{\mu}^{-1}] \lambda_p^{-1} \Delta \\ -\frac{i}{2} \tau_f^{*T} [(\bar{\mu}^{-1})^T + \bar{\mu}^{-1}] \lambda_p^{-1} \Delta \end{pmatrix}, \\
 T &= \begin{pmatrix} t - \tau^T \bar{\mu}^{-1} \tau & -\tau^T \bar{\mu}^{-1} \tau_f^* \\ -\tau_f^{*T} \bar{\mu}^{-1} \tau & t_f^* - \tau_f^* \bar{\mu}^{-1} \tau_f^* \end{pmatrix}, \\
 \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta^* - \lambda_p^* \lambda_p^{-1} \Delta), \\
 \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_q^+ - \lambda_p^{-1} \lambda_q \lambda_p^+), \\
 \bar{\mu} &= \mu + \mu_f^* = i [\lambda_p^{-1} \lambda_q - (\lambda_p^{-1} \lambda_q)_f^*], \\
 t &= \frac{i}{2} (\lambda_q^* \lambda_p^+ - \lambda_p^* \lambda_p^{-1} \lambda_q \lambda_p^+).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Амплитуда $\langle \beta, f | \alpha, t \rangle$ есть производящая функция для амплитуды $\langle \mathbf{m}, f | \mathbf{n}, t \rangle$, связывающей начальное энергетическое состояние $|\mathbf{n}, in\rangle$ с конечным $|\mathbf{m}, f\rangle$. Из формулы (9), вспоминая формулу для производящей функции для полиномов Эрмита от $2n$ переменных [13], сразу получаем

$$\langle \mathbf{m}, f | \mathbf{n}, t \rangle = \frac{\langle 0, f | 0, t \rangle}{(n_1! \dots n_n! m_1! \dots m_n!)^{1/2}} H_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{M} = (n_1, \dots, n_n; m_1, \dots, m_n), \quad \mathbf{x} = \mathbf{s}T^{-1},$$

а $H_{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$ есть полином Эрмита от $2n$ переменных, определяемый с помощью матрицы T .

Мы можем вычислить производящую функцию $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для вероятностей перехода $|\langle \mathbf{m}, f | \mathbf{n}, t \rangle|^2$ по формуле

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pi^{-2n} \int \langle \beta, f | \alpha, t \rangle \times \\ \times \langle \mathbf{v}^* \alpha, t | \mathbf{u} \beta, f \rangle d^2 \alpha_1 d^2 \beta_1 \dots d^2 \alpha_n d^2 \beta_n, \quad (11)$$

где

$$|u_\alpha| = |v_\alpha| = 1, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Вычисление интеграла (3) дает следующий результат:

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2^{2n} |\langle 0, f | 0, t \rangle|^2 [\det W(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^{-1/2} \exp(\mathbf{L}W^{-1}\mathbf{L}), \quad (12)$$

$$W = \begin{pmatrix} 2 + E & D \\ 0 & 2 + F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v\sigma_3 & 0 \\ 0 & u\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 E^* \sigma_3 & \sigma_3 D^* \sigma_3 \\ 0 & \sigma_3 F^* \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v\sigma_3 & 0 \\ 0 & u\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$E = \begin{pmatrix} t_1 & it_1 \\ it_1 & -t_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t_2 + t_3^T & i(t_2 + t_3^T) \\ -i(t_2 + t_3^T) & -t_2 - t_3^T \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$F = \begin{pmatrix} t_4 & it_4 \\ it_4 & -t_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & u_n \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ i\mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ i\mathbf{s}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ i\mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ i\mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v\sigma_3 & 0 \\ 0 & u\sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Мы разбили матрицу T на блоки $n \times n$:

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

и аналогично вектор $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$. Таким образом, W есть матрица $4n \times 4n$; вектор L имеет $4n$ компонент.

Для перехода вакуум — вакуум имеем

$$\langle 0, f | 0, t \rangle = 2^{n/2} (\det \tilde{\mu})^{-1/2} \exp \left(\Phi + \Phi_f^* + \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 \tilde{\mu}^{-1} \mathbf{v}_0 \right), \quad (17)$$

где $\tilde{\mu} = \mu + \mu_f^*$, $\mathbf{v}_0 = -i\lambda_p^{-1} \Delta$.

Полученные формулы полностью решают задачу о поведении любой квадратичной системы. Отметим, что получение в явном виде интегралов движения, когерентных состояний и амплитуд перехода для таких систем связано с возможностью вычислить для них явно гауссов интеграл по траекториям. Все рассматривавшиеся до сих пор системы с когерентными состояниями являлись частными случаями именно квадратичных систем.

Интересна, в частности, задача о вынужденном нестационарном осцилляторе переменной частоты. Эта задача впервые рассматривалась Хусими [14], нашедшим ее точное решение, функцию Грина, производящие функции для амплитуд и вероятностей переходов между энергетическими уровнями, а также сами эти амплитуды в виде рядов. Эта задача для случая постоянной частоты ранее была решена Фейнманом [15], а также изучалась Швингером [16]. Задача об осцилляторе с переменной частотой интересна тем, что, как показано Хусими [14], для нее можно ввести зависящую от времени функцию, подчиняющуюся классическому уравнению движения, и через решения этого классического уравнения выразить все квантовые величины.

Рассмотрим еще один важный случай квадратичных систем, для которых можно ввести такую функцию, — заряженный осциллятор в переменных однородных электрическом и магнитном полях, в частности рассмотрим задачу о свободном заряде в таких полях [9, 17]. В этой системе существуют когерентные состояния, являющиеся обобщением когерентных состояний для случая постоянных во времени полей [19]. Различные аспекты этой задачи изучались в [18]. Фельдману и Кану [20] (ст. 4 сборника) удалось применить когерентные состояния в постоянном магнитном поле для расчета физических эффектов, в частности диамагнетизма Ландау. Когерентные состояния в таком поле обсуждались также Тамом [21].

Ниже рассмотрены результаты, полученные в статье [9]. Уравнение Шредингера для задачи о заряженной частице, движущейся в переменном электромагнитном поле, имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\omega^2}{8} (x^2 + y^2) \Psi + \frac{i\omega}{2} \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - (E_1 x + E_2 y) \Psi. \quad (18)$$

Выбрана система единиц, в которой $\hbar = c = 1$, а заряд и масса для простоты положены равными единице. Внешнее электромагнитное поле задается потенциалами

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H}(t) \times \mathbf{r}, \quad \varphi = -\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{H}(t) = (0, 0, \omega(t)), \quad \mathbf{E}(t) = (E_1(t), E_2(t), 0).$$

Для простоты рассматривается случай $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$.

В случае постоянных потенциалов уравнение (18) описывает движение частицы в скрещенных постоянных полях. Задача о частице со спином, движущейся в рассматриваемых полях, сводится к решению уравнения (18) заменой компонент волновой функции,

$$\psi_{s_z} = \psi_{s_z}^0 \exp \left[i\mu_0 \int_0^t \omega(\tau) s_z d\tau \right],$$

отвечающих состояниям с заданными проекциями спина s_z на магнитное поле. В уравнении (18) учтена лишь часть волновой функции, зависящая от переменных x и y , поскольку движение вдоль магнитного поля является свободным. Выбранные потенциалы полей удовлетворяют уравнениям Максвелла в приближении квазистационарных полей.

Введем переменные $z(t)$, отвечающие переходу в движущуюся систему координат:

$$z(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right]. \quad (19)$$

Уравнение Шредингера (18) принимает в этих переменных вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial z^*} + \frac{\omega^2}{4} |z|^2 \Psi + (Fz^* + F^*z) \Psi, \quad (20)$$

где введена комплексная сила

$$F = 2^{-1/2} (E_1 + iE_2) \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right].$$

Как уже отмечалось, по принципу соответствия у любой квантовой системы должно существовать $2n$ действительных (или n комплексных) интегралов движения (n — число степеней свободы). Эти интегралы движения можно выбрать так, чтобы они соответствовали начальной точке классической траектории системы в фазовом пространстве. Можно найти эти интегралы движения. Непосредственной проверкой легко убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} A &= 2^{-1/2} \left[\dot{\varepsilon}z + \frac{i\varepsilon\partial}{\partial z^*} + \dot{\varepsilon}z_0 - \dot{\varepsilon}z_0 \right], \\ B &= 2^{-1/2} \left[i\varepsilon z^* - \frac{\varepsilon\partial}{\partial z} + i\dot{\varepsilon}z_0^* - i\varepsilon\dot{z}_0^* \right] \end{aligned} \quad (21)$$

являются интегралами движения (т. е. коммутируют с оператором $i\partial/\partial t - H$). Здесь зависящие от времени функции $\varepsilon(t)$, $z_0(t)$ — решения уравнений

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{4} \omega^2 \varepsilon = 0, \quad \ddot{z}_0 + \frac{1}{4} \omega^2 z_0 = 0, \quad (22)$$

причем

$$\varepsilon = |\varepsilon| \exp \left[i \int_0^t |\varepsilon|^{-2} d\tau \right].$$

Операторы (21) удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозевских операторов рождения и уничтожения

$$[A, A^\dagger] = [B, B^\dagger] = 1, \quad [A, B] = [A, B^\dagger] = 0.$$

В случае равного нулю электрического поля эти операторы переходят в интегралы движения, построенные в [18]. Если положить при этом

$$\varepsilon = \varepsilon_c = 2^{1/2} \omega_c^{-1/2} \exp \left(\frac{i\omega_c t}{2} \right), \quad (23)$$

где ω_c — постоянная частота, то инварианты (21) переходят в операторы, построенные в [19—21] для случая заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

Физический смысл интегралов движения (21), являющихся линейными функциями операторов координат и импульсов, заключается в том, что их действительные и мнимые части задают начальную точку на классической траектории. В случае постоянного магнитного поля оператор B задает центр окружности классического движения, а оператор A — начальные координаты движения по этой окружности. По теореме Эренфеста средние от операторов координат и импульсов движутся по классическим траекториям. Физический смысл операторов A и B [см. (21)] можно пояснить еще и тем, что их комплексные собственные числа задают как раз начальные средние значения координат и импульсов. Любые другие интегралы движения, в частности квадратичные, могут быть построены из линейных инвариантов (21).

Рассмотрим вопрос о связи решений уравнений (18), (20) с решениями уравнения Шредингера, когда электрическое поле отсутствует. Легко проверить, что унитарный оператор

$$D = \exp \left[-i (z \dot{z}_0^* + z_0^* \dot{z}) \right] \exp \left\{ z_0 \frac{\partial}{\partial z} + z_0^* \frac{\partial}{\partial z^*} + i \int_0^t \left(\frac{1}{4} \omega^2 |z_0|^2 - |\dot{z}_0|^2 \right) d\tau \right\} \quad (24)$$

задает взаимно однозначное соответствие ($\psi = D\psi_0$) решений ψ уравнений (18), (20) и решений ψ_0 уравнения (18) для заряда в переменном магнитном поле при равном нулю электрическом поле.

Построим когерентные состояния $|\alpha, \beta\rangle$, явное выражение для которых имеет вид

$$|\alpha, \beta\rangle = \varepsilon^{-1} \pi^{-1/2} \exp \left\{ i \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} (|z|^2 + |z_0|^2) - \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - \left(i \dot{z}_0^* - i \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} z_0^* \right) z - \left(i \dot{z}_0 - i \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} z_0 \right) z^* - i \varepsilon^{-1} 2^{1/2} [\alpha (z^* + z_0^*) - i \beta (z + z_0)] - i \alpha \beta \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} + i \int_0^t \left(\frac{\omega^2}{4} |z_0|^2 - |\dot{z}_0|^2 \right) d\tau \right\}. \quad (25)$$

Легко убедиться, что нормированная волновая функция $|\alpha\beta\rangle$ является решением уравнений (18), (20) и удовлетворяет условиям

$$A |\alpha\beta\rangle = \alpha |\alpha\beta\rangle, \quad B |\alpha\beta\rangle = \beta |\alpha\beta\rangle;$$

α, β — постоянные комплексные числа. Когерентные состояния $|\alpha, \beta\rangle$ могут быть получены из основного состояния с помощью унитарных вейлевских операторов сдвига [1, 2],

$$D(\alpha) = \exp(\alpha A^\dagger - \alpha^* A), \quad D(\beta) = \exp(\beta B^\dagger - \beta^* B),$$

согласно легко проверяемому соотношению $D(\alpha)D(\beta)|0,0\rangle = |\alpha\beta\rangle$.

Когерентные состояния (25) образуют полную систему функций, причем $|\alpha\beta\rangle^\dagger = \langle\alpha\beta|$ и

$$\pi^{-2} \int |\alpha\beta\rangle \langle\alpha\beta| d^2\alpha d^2\beta = 1, \quad d^2\alpha = (d \operatorname{Re} \alpha)(d \operatorname{Im} \alpha).$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний имеет вид

$$\langle\gamma\delta|\alpha\beta\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} [|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 + 2\gamma^*\alpha + 2\delta^*\beta]\right\}. \quad (26)$$

Когерентные состояния задают производящую функцию для состояний, являющихся собственными состояниями квадратичных интегралов движения $A^\dagger A$ и $B^\dagger B$, согласно хорошо известным соотношениям (см. [1, 2])

$$|\alpha\beta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_1} \beta^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |n_1 n_2\rangle, \quad (27)$$

где волновые функции $|n_1 n_2\rangle$ удовлетворяют уравнению Шредингера и соотношению ортогональности

$$\langle m_1 m_2 | n_1 n_2 \rangle = \delta_{m_1, n_1} \delta_{m_2, n_2},$$

причем

$$A^\dagger A |n_1 n_2\rangle = n_1 |n_1 n_2\rangle, \quad B^\dagger B |n_1 n_2\rangle = n_2 |n_1 n_2\rangle.$$

Легко вычислить явный вид этих волновых функций:

$$\begin{aligned} |n_1 n_2\rangle = & |0, 0\rangle \left(\frac{p!}{(p + |n_1 - n_2|)!} \right)^{1/2} i^{n_1} (-1)^{(n_1 + n_2 + |n_1 - n_2|)/2} \times \\ & \times \left(\frac{z + z_0}{z^* + z_0^*} \right)^{(n_2 - n_1)/2} \left(\frac{e^*}{e} \right)^{(n_1 + n)/2} \left(\frac{\sqrt{2} z_0 + \sqrt{2} z}{e} \right)^{|n_1 - n_2|} \times \\ & \times L_p^{|n_1 - n_2|} \left(2 \left| \frac{z + z_0}{2} \right|^2 \right), \quad (28) \end{aligned}$$

где $p = 1/2(n_1 + n_2 - |n_1 - n_2|)$, $L_p^m(x)$ — присоединенный полином Лагерра, а $|0, 0\rangle$ дается формулой (25), в которой $\alpha = \beta = 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении матричных элементов S -матрицы для случая полей, изменяющихся следующим образом. До нулевого момента времени существовало постоян-

ное магнитное поле ω_i (в системе единиц $e = m = c = 1$, в которой напряженность магнитного поля численно равна частоте), затем было включено переменное электрическое поле и начало меняться по величине магнитное поле; в далеком будущем электрическое поле выключается, а магнитное поле становится постоянным, равным ω_f . Легко вычислить S -матрицу в любой момент времени. S -матрица выражается через параметры $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\delta_a(t)$ и $\delta_b(t)$, тесно связанные с решениями уравнений (22). Параметры $\xi(t)$ и $\eta(t)$ выражаются через решение $\varepsilon(t)$ и его производную $\dot{\varepsilon}(t)$:

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{\omega_f}\right)^{1/2} \left[\xi \exp\left(\frac{i\omega_f t}{2}\right) - i\eta \exp\left(-\frac{i\omega_f t}{2}\right) \right],$$

$$\dot{\varepsilon} = i \left(\frac{\omega_f}{2}\right)^{1/2} \left[\xi \exp\left(\frac{i\omega_f t}{2}\right) + i\eta \exp\left(-\frac{i\omega_f t}{2}\right) \right],$$

причем

$$\varepsilon^* \dot{\varepsilon} - \varepsilon \dot{\varepsilon}^* = 2i, \quad |\xi|^2 - |\eta|^2 = 1.$$

При $t \rightarrow -\infty$ решение $\varepsilon(t)$ переходит в $(2/\omega_i)^{1/2} \exp(i\omega_i t/2)$, а при $t \rightarrow \infty$ параметры $\xi(t)$ и $\eta(t)$ переходят в постоянные комплексные числа.

Решение уравнений (22) имеет вид

$$z_0 = -2^{-1/2} (\delta_a \varepsilon^* + \delta_b^* \varepsilon),$$

$$\delta_a = -2^{-1/2} \int_0^t \varepsilon(\tau) F(\tau) d\tau, \quad \delta_b = -i2^{-1/2} \int_0^t \varepsilon(\tau) F^*(\tau) d\tau. \quad (29)$$

При $t < 0$ имеем $F(t) = 0$ и $z_0 = 0$; при $t \rightarrow \infty$ сила $F(t) \rightarrow 0$, а параметры $\delta_a(t)$ и $\delta_b(t)$ становятся постоянными числами. Конечные состояния $|\mu\nu, f\rangle$ описывают когерентные состояния частицы в постоянном магнитном поле ω_f . Эти состояния порождаются из вакуума обычным образом:

$$|\mu\nu, f\rangle = D(\mu) D(\nu) |0, 0, f\rangle,$$

где

$$D(\mu) = \exp(\mu A_f^\dagger - \mu^* A_f), \quad D(\nu) = \exp(\nu B_f^\dagger - \nu^* B_f).$$

Операторы A_f и B_f даются формулой (21), а явный вид когерентных состояний — формулой (24), причем в формулах (21) и (25) нужно положить

$$z_0 = 0, \quad \varepsilon(t) = \left(\frac{2}{\omega_f}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i\omega_f t}{2}\right).$$

Операторы A и B связаны с A_f и B_f соотношениями

$$\begin{aligned} A &= \xi(t) A_f + \eta(t) B_f^\dagger + \delta_a(t), \\ B &= \xi(t) B_f + \eta(t) A_f^\dagger + \delta_b(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Амплитуда перехода из начального когерентного в конечное когерентное состояние может быть получена либо путем вычисления интеграла, либо путем использования свойств операторов вейлевского сдвига; она имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mu\nu, f | \alpha\beta, i \rangle &= \xi^{-1} \exp \left\{ \delta_a \delta_b \frac{\eta^*}{\xi} - (|\delta_a|^2 + |\delta_b|^2 + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \right. \\ &+ |\mu|^2 + |\nu|^2) + \xi^{-1} \left[(\alpha - \delta_a) \mu^* + (\beta - \delta_b) \nu^* - \eta \mu^* \nu^* + \eta^* \alpha \beta + \right. \\ &\left. \left. + \alpha (\xi \delta_a^* - \eta^* \delta_b) + \beta (\xi \delta_b^* - \eta^* \delta_a) + i \int_0^t (F z_0^* + F^* z_0) d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Можно вычислить производящую функцию для вероятностей перехода между уровнями Ландау

$$f(z_1, z_2, y_1, y_2) = \sum_0^\infty w_{m_1 m_2 n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2};$$

она имеет вид

$$\begin{aligned} f &= \Delta^{-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\Delta} [s z_1 + t z_2 + u y_1 + w y_2 + (s + t + n + w) y_1 y_2 z_1 z_2 - \right. \\ &- s y_1 y_2 z_1 - u z_1 z_2 y_2 - w z_1 z_2 y_1 - t y_1 y_2 z_1 - q y_1 y_2 - (2u - q) y_1 z_1 - \\ &\left. - (2w - q) y_2 z_2 - (2s - 2u + q) z_1 z_2] - \frac{s + t + u + w}{2|\xi|^2} \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= |\eta|^2 (y_1 y_2 - 1) (z_1 z_2 - 1) + (y_1 z_1 - 1) (y_2 z_2 - 1), \\ u &= |\delta_a|^2, \quad w = |\delta_b|^2, \quad s = |\xi|^2 u + |\eta|^2 w - 2 \operatorname{Re} (\xi \eta \delta_a^* \delta_b^*), \\ t &= s + w - u, \quad q = u - s + (s + w) R, \quad R = \frac{|\eta|^2}{|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Амплитуда перехода (31) не зависит при больших временах от переменной t , в чем легко убедиться дифференцированием. Комплексные константы ξ , η , δ_a , δ_b , определяющие асимптотику траекторий (29), полностью задают амплитуду перехода (31). Поскольку амплитуда (31) задает производящую функцию для амплитуд перехода $\langle m_1 m_2 f | n_1 n_2, i \rangle$ между состояниями с заданными значениями энергии и углового момента, эти амплитуды

легко сосчитать обычным дифференцированием:

$$\langle m_1 m_2, f | n_1 n_2, i \rangle = \frac{H_{n_1 n_2 m_1 m_2}(x_1 x_2 x_3 x_4)}{(m_1! m_2! n_1! n_2!)^{1/2}} \langle 00, f | 0, 0, i \rangle. \quad (33)$$

Здесь $H_{n_1 n_2 m_1 m_2}$ — полином Эрмита от четырех переменных, причем

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta_a - \frac{\delta_b^* \eta}{\xi^*}, & x_2 &= \delta_b - \frac{\delta_a^* \eta}{\xi^*}, \\ x_3 &= -\frac{\delta_a^*}{\xi^*}, & x_4 &= -\frac{\delta_b^*}{\xi^*}, \end{aligned}$$

а симметричная квадратичная форма $\varphi = a_{ih} x_i x_h$, задающая эти полиномы Эрмита, имеет четыре не равные нулю коэффициента

$$a_{12} = -\frac{\eta^*}{\xi}, \quad a_{34} = \frac{\eta}{\xi}, \quad a_{13} = a_{24} = -\frac{1}{\xi}.$$

Полученные результаты легко переносятся на случай заряженного осциллятора, имеющего равные переменные частоты колебаний $\Omega(t)$ по осям x и y и частоту колебаний $\omega_3(t)$ по оси z , который движется в однородных полях:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}, & \varphi &= -\mathbf{E}(t) \mathbf{r}, \\ \mathbf{E}(t) &= (E_1(t), E_2(t), E_3(t)). \end{aligned}$$

Волновая функция разбивается при этом на произведение двух функций $\psi_1(x, y, t)$ и $\psi_2(z, t)$. Первая из них удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial z^*} + \frac{\omega^2}{4} |z|^2 \psi_1 + \Omega^2 |z|^2 \psi_1 + (F_z^* + F_z) \psi_1, \quad (34)$$

где z дается формулой (19). Уравнение (34) сводится к уравнению (20) заменой $\omega(t) \rightarrow \sqrt{\omega^2(t) + 4\Omega^2(t)}$. Функция же $\psi_2(z, t)$, описывающая движение осциллятора вдоль магнитного поля, удовлетворяет уравнению Шредингера для осциллятора с переменной частотой $\omega_3(t)$, движущегося под действием вынуждающей силы. Амплитуды перехода, аналогичные (33), при этом факторизуются в произведение полиномов Эрмита от двух и четырех переменных.

В рассмотренных примерах квадратичных систем продемонстрированы все основные свойства представления когерентных состояний.

Обсудим еще один важный аспект метода когерентных состояний. Когерентные состояния осциллятора с постоянной

частотой минимизируют произведение неопределенностей координаты и импульса. Причем со временем волновой пакет, отвечающий этому когерентному состоянию, не расплывается. Кроме того, для этой динамической системы траектория в фазовом пространстве средних величин есть в точности классическая траектория. Для когерентных состояний других динамических квантовых систем, в частности неквадратичных, оба эти свойства не имеют места. В когерентных состояниях таких систем не минимизируется произведение неопределенностей, а волновые пакеты расплываются. *Единственным общим свойством когерентных состояний любых квантовых систем является то, что они оказываются собственными состояниями оператора — интеграла движения, чьи собственные значения задают сохраняющиеся начальные значения координат в фазовом пространстве системы.* Это относится как к системам типа осциллятора и атома водорода, так и к системам типа ротатора. Задача о ротаторе рассмотрена в работе [22]. В любых задачах, в которых встречаются операторы рождения и уничтожения, можно ввести когерентные состояния и использовать их свойства.

Так, например, хорошо известно [23], что в представлении вторичного квантования любой инфинитезимальный оператор m с матричными элементами m_{ik} становится оператором $M = m_{ik} a_i^\dagger a_k$. Это свойство позволило Швингеру [24] построить теорию углового момента (теорию представлений группы SU_2) с помощью квантовой модели — двумерного осциллятора. Так как для углового момента операторы m суть матрицы Паули, $1/2\sigma^{(\alpha)}$, то по формулам из [23] сразу получаем инфинитезимальные операторы $M_\alpha = 1/2\sigma_{ik}^{(\alpha)} a_i^\dagger a_k$, полученные Швингером. Далее стандартным образом можно строить когерентные состояния для углового момента. Такое построение проводилось в работах [22, 25]. Когерентные состояния удобны также при рассмотрении различных моделей элементарных частиц в рамках релятивистских уравнений с внутренними степенями свободы типа уравнений Гинзбурга и Тамма [26] для релятивистского волчка, а также уравнений для релятивистского осциллятора, строившихся Юкавой [27] и Марковым [28]; см. также [29]. Следует отметить, что метод когерентных состояний интенсивно применяется в квантовой электродинамике [30], а в последнее время и в физике элементарных частиц в связи с дуальными моделями [31—34].

В настоящее время свойства когерентных состояний используются почти во всех разделах теоретической физики. Так, Глаубер и др. [35—38] развили и применили метод когерентных состояний в исследованиях по теории поля, квантовой оптике и

квантовой статистике. Статья 1 настоящего сборника дает полный обзор работ в этом направлении. Когерентные состояния применяются при исследовании принципиальных вопросов квантовой теории, например вопроса о свойствах оператора фазы. Статья Каррузерса и Ньюто [39] (ст. 2 сборника) дает обзор работ по этому вопросу. Имеются также и более поздние статьи по этому вопросу [22, 40, 41]. Когерентные состояния и их связь с угловым моментом использовались в недавних работах по излучению двухуровневых [42] и многоуровневых [43] систем.

Приложениям метода когерентных состояний посвящена также статья Лангера [44] (ст. 3 сборника), применившего когерентные состояния к теории сверхтекучести. Этому же вопросу посвящена статья Каммингса и Джонсона [45]. В статье Фельдмана и Кана [20] (ст. 4 сборника) метод когерентных состояний используется для исследования магнитных свойств вещества. Этой же теме посвящена недавняя статья Дугласа [46], в которой методом когерентных состояний рассматривается гейзенберговская модель ферромагнетизма. Важная статья Хольца [11], в которой введены и использованы когерентные состояния общих квадратичных систем, является статьей 5 сборника.

Наконец, статьей 6 является работа Агарвала и Вольфа [47]. Как мы видели, метод когерентных состояний позволяет в квантовой теории перейти на классический язык. В статье 6 эта идея развивается полностью и дается рецепт перехода от операторных уравнений квантовой механики к обыкновенным уравнениям типа уравнений классической физики. Данная статья является завершающей статьей серии работ тех же авторов по этой теме, и в ней приведены все основные результаты развития подхода.

К данному направлению тесно примыкает развитая Клаудером [48] еще до введения термина «когерентные состояния» теория непрерывных представлений, в которой содержатся многие идеи подхода с использованием фазового пространства квантовой системы.

Интересным является также применение метода когерентных состояний в чисто математическом аспекте. Так, когерентные состояния оказываются тесно связанными с представлением квазиимпульса и с теорией эллиптических функций, например с θ_3 -функцией (см. [49, 50]). Когерентные состояния вводились также для некоторых некомпактных групп Ли [51]. В связи с этим еще раз подчеркнем, что если имеется формулировка любой задачи, связанной с поведением произвольной динамической системы, на языке интеграла по путям Фейнмана или с помощью функциональных методов, то в этой задаче автоматич-

чески можно ввести когерентные состояния и воспользоваться при расчетах их стандартными свойствами.

Статьи сборника, хотя и не дают исчерпывающей картины использования когерентных состояний, тем не менее носят обзорный характер и показывают тенденции в этом вопросе.

В. И. Манько

ЛИТЕРАТУРА

1. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., **10**, 84 (1963).
2. Glauber R. J., Phys. Rev., **130**, 2529 (1963).
3. Glauber R. J., Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
4. Schrödinger E. S., Naturwiss., **14**, 664 (1926).
5. Фок В. А., Zs. Phys., **49**, 339 (1928).
6. Bargmann V., Rev. Mod. Phys., **34**, 829 (1962).
7. Feynmann R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
8. Малкин И. А., Манько В. И., Preprint PhIAN № 15, 1971.
9. Малкин И. А., Манько В. И., ЖЭТФ, **59**, 1746 (1970).
10. Sudarschan C. G., Phys. Rev. Lett., **10**, 277 (1963).
11. Holz A., Lett. Nuovo Cimento, **4**, 1319 (1970).
12. Малкин И. А., Манько В. И., Трифонов Д. А., Краткие сообщения по физике, № 5, 20, 27 (1971).
13. Appel P., Kampe de Fariet J., Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques, polinoms d'Hermite, Paris, 1926.
14. Husimi K., Progr. Theor. Phys., **9**, 381 (1953).
15. Feynman R. P., Phys. Rev., **84**, 108 (1951).
16. Schwinger J., Phys. Rev., **91**, 728 (1953).
17. Малкин И. А., Манько В. И., Phys. Lett., **31A**, 214 (1970); Теоретическая и математическая физика, **6**, 71 (1971).
18. Малкин И. А., Манько В. И., Трифонов Д. А., Phys. Lett., **30A**, 414 (1969); Phys. Rev., **2D**, 1371 (1970); Preprint PhIAN № 17, 1971.
19. Малкин И. А., Манько В. И., ЖЭТФ, **55**, 1014 (1968).
20. Feldman A., Kahn A. H., Phys. Rev., **1B**, 4584 (1970).
21. Tam W. G., Physica, **54**, 557 (1971).
22. Atkins P. W., Debnson J. C., Proc. Roy. Soc., **321**, 321 (1971).
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
24. Schwinger J., Quantum Theory of Angular Momentum, New York, 1965.
25. Bonifacio R., Preparata G., Phys. Rev., **2A**, 336 (1970).
26. Гинзбург В. Л., Тамм И. Е., ЖЭТФ, **17**, 227 (1947).
27. Yukawa H., Phys. Rev., **77**, 219 (1950); **80**, 1047 (1950).
28. Марков М. А., ДАН СССР, **101**, 51 (1955); Suppl. Nuovo Cimento, **3**, 760 (1956).
29. Гинзбург В. Л., Манько В. И., Nucl. Phys., **74**, 577 (1965).
30. Kibble T. W. B., Brown E., Phys. Rev., **133A**, 705 (1964).
31. Kikkawa K., Sakita B., Virasoro M. A., Phys. Rev., **184**, 1701 (1969).
32. Lovelace C., CERN preprint TH 1123, 1969.
33. Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н., JINR preprint E-2-5141, 1970.
34. Кейшидзе А. Н., Попов С. Д., Стоянов Д. Т., Тавхелидзе А. Н., JINR preprint E-2-5667, 1971.

35. *Titulaer U. M., Glauber R. J.*, Phys. Rev., **140**, 13676 (1965); **145**, 1041 (1966).
36. *Molow B. R., Glauber R. J.*, Phys. Rev., **160**, 1076, 1097 (1967).
37. *Cahill K. E., Glauber R. J.*, Phys. Rev., **177**, 1857, 1882 (1969).
38. *Glauber R. J.*, в книге Quantum Optics, Proceeding of the Summer School, ed. Maitland and Kay, Academic Press, 1970.
39. *Carruthers P., Nieto M. M.*, Rev. Mod. Phys., **40**, 411 (1968).
40. *Zak J.*, Phys. Lett., **29A**, 393 (1969).
41. *Infantis E. K.*, Journ. Math. Phys., **11**, 3138 (1970); **12**, 1021 (1971).
42. *Bonifacio R., Schwendimann P., Haake F.*, Phys. Rev., **4A**, 302, 854 (1971).
43. *Махвиладзе Т. М., Шеленин Л. А.*, Препринты ФИАИ № 55 и № 145, 1971.
44. *Langer J. S.*, Phys. Rev., **167**, 183 (1968).
45. *Cummings F. W., Johnston J. R.*, Phys. Rev., **151**, 105 (1966).
46. *Douglass K. H.*, Ann. of Phys., **62**, 383 (1971).
47. *Agarwal G. S., Wolf E.*, Phys. Rev., **D2**, № 10, 2206 (1970).
48. *Klauder J. R.*, Journ. Math. Phys., **4**, 1055 (1963); **5**, 177 (1964).
49. *Малкин И. А., Манько В. И.*, Preprint PhIAN № 150, 1969; Phys. Stat. Sol., **31K**, 15 (1969); ДАН СССР, **188**, 321 (1969).
50. *Rasetti M.*, Lett. Nuovo Cimento, **2**, 899 (1971).
51. *Barut A. O., Girordello L.*, Comm. in Math. Phys., **21**, 41 (1971).

Когерентность и детектирование квантов

Р. ГЛАУБЕР*

R. J. Glauber, в книге *Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica «E. Fermi», XLII Corso*

ВВЕДЕНИЕ

Спектр электромагнитных волн, используемый в настоящее время, очень широк; явления, которые мы наблюдаем в высокочастотной его части (рентгеновские лучи и более коротковолновые), определяются в основном корпускулярным характером излучения. К сожалению, мы уже основательно привыкли к описанию взаимодействия коротковолновых квантов с веществом на языке квантовой механики. Тем не менее пока не стоит использовать термин «квантовая оптика» в связи с работами в области очень высоких частот, поскольку в экспериментах, которые здесь можно выполнить, мы не встречаемся с большинством свойств, связываемых нами с оптикой. Источники излучения типа тех, которые применяются в области высоких частот, почти совсем не контролируются в том, что касается пространственного и временного поведения их излучения; кроме того, они испускают столь небольшое сравнительно количество квантов, что статистические свойства излучаемых полей тривиальны.

В низкочастотной же области спектра электромагнитных волн картина совсем другая. В области радиочастот, например, имеются чрезвычайно мощные источники, которыми мы в значительной мере можем управлять. Но поскольку энергии квантов $\hbar\omega$ малы, корпускулярный характер излучения по существу остается ненаблюдаемым, и для описания экспериментов достаточно классической теории электромагнетизма.

В центральной области спектра электромагнитных волн, включающей видимые, или оптические, частоты, наблюдаются свойства, характерные как для высокочастотной, так и для низкочастотной областей спектра. До недавнего времени источники света, которые использовались в оптических экспериментах, были в сущности слабыми. Хотя в этой области частот нетрудно

* Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Mass.

наблюдать квантовые явления, они обычно не являлись предметом исследования в оптических экспериментах. Соответственно большая часть теоретической оптики развивалась на базе классических представлений.

Лишь в последние примерно десять лет мы стали глубоко интересоваться экспериментами, базирующимися на детектировании отдельных оптических квантов. Таким экспериментом, начавшим эти работы, был эксперимент, в котором Хэнбери-Браун и Твисс показали, что фотоны в обычном пучке света с малой спектральной шириной имеют отчетливую тенденцию приходить в детектор коррелированными парами. Этот эксперимент и другие ему подобные к настоящему времени повторены уже много раз. Техника счета, на которой они основаны, является простым переносом в область оптических частот техники, которая была развита для детектирования квантов в области гораздо более высоких частот — в физике элементарных частиц.

Другой вид изменений в оптике в тот же период времени (если и не столь фундаментальный, то во многих отношениях с более глубокими последствиями) был вызван созданием и усовершенствованием источников когерентного света. Эти источники создают гораздо большие интенсивности излучения, причем из почти одинаковых фотонов. Кроме того, их квантовый выход во многих отношениях столь же управляем, как и для случая полей на радиочастотах. Теперь у нас в руках есть средство уменьшить на несколько порядков спектральную ширину и пространственную расходимость световых пучков и даже в огромной степени уменьшить внутренние шумы. Все это открыло новые области экспериментальных исследований в оптике. Методы, используемые в некоторых из этих областей, и полученные на сегодняшний день результаты являются обычной темой лекций нашей школы.

Некоторые из новых явлений удалось наблюдать просто потому, что мы впервые получили возможность в любой области спектра электромагнитных волн и создавать когерентные поля, и детектировать их, регистрируя отдельные кванты этих полей.

Этот цикл из пяти лекций мы посвятим обсуждению теоретического обоснования таких экспериментов. Говоря шире, мы обсудим способы описания оптических полей на языке квантовой механики и типы величин, которые измеряются в экспериментах по детектированию фотонов.

В первых трех лекциях (§ 1—6) мы дадим общий обзор квантовой теории оптической когерентности. Большая часть материала этих вводных лекций уже публиковалась; мы

представляем его главным образом как обзор уже более или менее знакомых фактов. В четвертой лекции (§ 7—11) мы обсудим статистические свойства осциллирующей моды электромагнитного поля, амплитуда которой спадает со временем. Здесь мы представим новый подход к задаче, являющейся по существу новым способом использования квантовомеханической теории затухающего гармонического осциллятора. В последней лекции (§ 12 и 13) мы покажем, как можно использовать в кажущихся очень разными областях решение задачи о затухающем осцилляторе для того, чтобы развить новый подход к проблеме расчета отклика детектора фотонов.

§ 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Во всех старых оптических экспериментах было совершенно достаточно, грубо говоря, описывать падающий световой пучок его спектральными характеристиками. Например, мы привыкли думать, что пучок плоских волн с заданной поляризацией полностью описывается функцией спектральной интенсивности I_{ω} . Если такое описание и было адекватным в прошлом, то только потому, что оптические эксперименты сводились просто к измерениям средних интенсивностей полей. Это были измерения, которые можно было осуществить для любого сколь угодно слабого поля, просто увеличивая время работы детекторов. На языке квантовой механики говорят, что измерения этого типа чувствительны только к однофотонным свойствам поля.

В реальных оптических полях обычно присутствует одновременно очень много фотонов. Используя имеющиеся теперь приборы для исследования статистических распределений этих фотонов, мы можем изучать те свойства поля и его источников, которые были полностью вне поля зрения классической оптики. Как обнаружено в экспериментах по счету фотонов, поля, обладающие одинаковыми спектральными свойствами, могут иметь совершенно различные статистические свойства.

Чтобы обойти чисто формальные трудности, связанные с бесконечно протяженными электромагнитными полями ограничим поле конечным объемом, например кубической формы. Если взять объем достаточно большим, то точный вид граничных условий не будет играть роли, и мы сможем рассмотреть куб с полностью отражающими стенками или с полностью прозрачными стенками и перейти таким образом к рассмотрению бесконечного набора одинаковых кубов. В первом случае гранич-

ные условия дают обычное решение в виде стоячих волн, во втором — в виде бегущих волн.

Электромагнитное поле внутри этого ящика может находиться в некотором квантовомеханическом состоянии $|\psi\rangle$. Мы, однако, редко имеем точную информацию о природе этого состояния и должны довольствоваться совершенно элементарной информацией о статистических свойствах поля. Самое большее, что можно сделать в таких случаях в смысле предсказания результатов экспериментов — это предсказать усредненные по неопределенностям величины, характеризующие состояние поля. Таким образом, ожидаемое значение оператора \mathcal{O} будет равно

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \{ \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \}_{\text{ср}}, \quad (1.1)$$

где усреднение должно производиться по состояниям $|\psi\rangle$, существующим в ансамбле повторяющихся экземпляров того же самого поля. Мы можем формально переписать это выражение, введя след

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \{ \text{Sp} [|\psi\rangle \langle \psi| \mathcal{O}] \}_{\text{ср}} = \text{Sp} [\{ |\psi\rangle \langle \psi| \}_{\text{ср}} \mathcal{O}]. \quad (1.2)$$

Оператор $\{ |\psi\rangle \langle \psi| \}_{\text{ср}}$ является оператором плотности системы

$$\rho = \{ |\psi\rangle \langle \psi| \}_{\text{ср}};$$

он содержит всю информацию о состоянии поля, которую мы имеем. Измеренные величины, связанные с полем, после усреднения следует сравнивать с выражениями вида

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Sp} \{ \rho \mathcal{O} \}. \quad (1.3)$$

Теперь поставим вопрос, какого вида операторы \mathcal{O} соответствуют тем измерениям, которые мы в действительности производим над полем.

§ 2. ИДЕАЛЬНЫЙ ДЕТЕКТОР ФОТОНОВ

Одной из важных величин, описывающих любое поле, является его интенсивность. Поток фотонов поля должен в идеале измеряться детектором, отклик которого не зависит от частоты излучения, а размеры много меньше характерной длины любых пространственных изменений поля. О таком детекторе можно было бы говорить, что он измеряет интенсивность поля в отдельной точке [1]. Можно представить себе хорошие приближения к такому детектору; например, атом, который детектирует фотоны, переходя в состояние непрерывного спектра, будет иметь довольно равномерный отклик в значительной области частот,

к тому же он по размерам много меньше длины волны излучения на оптических частотах.

Гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля с атомом дается в электрическом дипольном приближении произведением

$$H_I = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{d}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{E} — электрическое поле ядра в точке \mathbf{r} и \mathbf{d} — дипольный момент атома. Детектирование фотона происходит в процессе поглощения, которое переводит поле из начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$. В то же время атом выводится из основного состояния $|g\rangle$ в возбужденное состояние $|e\rangle$. Амплитуда вероятности для этого процесса легко вычисляется в первом порядке теории возмущений. Она просто пропорциональна матричному элементу гамильтониана H_I

$$\langle f | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \cdot \langle e | \mathbf{d} | g \rangle$$

между этими состояниями.

Дипольный матричный элемент атома осциллирует во времени как $\exp[(i/\hbar)(E_e - E_g)t]$, где $(E_e - E_g)$ — положительная разность энергий состояний $|e\rangle$ и $|g\rangle$. Поскольку энергия сохраняется при переходе, то вклад в амплитуду перехода могут давать только те компоненты электрического поля, которые имеют временную зависимость вида $\exp[-i\omega t]$ для $\hbar\omega \approx E_e - E_g$. Следовательно, удобно разделить электрическое поле на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Положительно-частотная часть $\mathbf{E}^{(+)}$ по определению содержит все компоненты, осциллирующие как $\exp[-i\omega t]$ при $\omega > 0$, а отрицательно-частотная часть есть эрмитово-сопряженная положительно-частотная часть

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \{\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\}^\dagger. \quad (2.3)$$

Поскольку только положительно-частотная часть поля дает существенный вклад в процесс поглощения фотона, интересующий нас матричный элемент может быть записан так:

$$\mathbf{M} \cdot \langle f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle, \quad (2.4)$$

где \mathbf{M} — сокращенная запись атомного матричного элемента. (Поскольку векторная природа электромагнитного поля не играет какой-либо существенной роли в нашем анализе, мы опустим векторные и тензорные обозначения в большинстве наших фор-

мул. Их легко восстановить, если это необходимо, например в случае полей, обладающих смешанной поляризацией.)

Вероятность перехода для данного процесса поглощения фотона, при котором поле приходит в конечное состояние $|f\rangle$, грубо говоря, пропорциональна квадрату модуля матричного элемента (2.4). Поскольку конечное состояние поля остается ненаблюдаемым, то, что мы в действительности наблюдаем, отвечает сумме вероятностей перехода, взятой по всем возможным конечным состояниям, т. е. сумме

$$|M|^2 \sum_f |\langle f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2.$$

Так как это суммирование можно свободно распространить на полный набор конечных состояний, это выражение сводится к следующему:

$$\begin{aligned} |M|^2 \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) \sum_f |f\rangle \langle f | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle = \\ = |M|^2 \langle i | \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как мы упоминали, начальное состояние поля $|i\rangle$ редко известно с достоверностью. В общем случае необходимо усреднять вероятность поглощения по возможным начальным состояниям поля; следовательно, выход нашего идеального детектора фотонов будет пропорционален величине (см. [1])

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{Sp} \{ \rho \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \}. \quad (2.6)$$

§ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И КОГЕРЕНТНОСТЬ

Если мы рассмотрим эксперименты, в которых измеряется интенсивность поля, полученного наложением полей в двух или более пространственно-временных точках (как, например, в опыте Юнга с двумя щелями), то мы обнаружим, что наш фотодетектор, вообще говоря, измеряет значения корреляционной функции поля

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(x_1) E^{(+)}(x_2) \}. \quad (3.1)$$

Здесь мы ввели сокращенное обозначение x_j для координат пространственно-временной точки \mathbf{r}_j, t_j .

Более подробный анализ [2], чем тот, что мы здесь даем, показывает, что вероятность регистрации отдельного фотона между моментами времени 0 и t имеет вид

$$p^{(1)}(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathcal{F}(t' - t'') G^{(1)}(\mathbf{r}, t', \mathbf{r}, t''). \quad (3.2)$$

Функция $\mathcal{P}(t' - t'')$ пропорциональна квадрату матричного элемента M в выражении (2.4). Зависимость ее от времени определяется частотной зависимостью чувствительности счетчика. Для идеального широкополосного детектора, который мы рассматривали, чувствительность $\mathcal{P}(t' - t'')$ сводится по существу к дельта-функции $s\delta(t' - t'')$, где s — константа, описывающая чувствительность прибора. Тогда

$$p^{(1)}(t) = s \int_0^t dt' G^{(1)}(\mathbf{r}, t', \mathbf{r}, t'), \quad (3.3)$$

а скорость счета есть просто

$$w^{(1)}(t) = \frac{dp^{(1)}(t)}{dt} = sG^{(1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}, t),$$

что эквивалентно выражению (2.6).

Можно рассмотреть более сложный эксперимент по счету фотонов, в котором определяются корреляции в откликах нескольких счетчиков, помещенных в поле излучения. Рассмотрим n идеальных широкополосных счетчиков, каждый из которых снабжен выключателем, который включает k -й счетчик в момент времени t_0 и выключает его в момент t_k . Можно показать в n -м порядке теории возмущений [2], что вероятность каждому счетчику зарегистрировать в течение времени, когда он включен, точно один фотон, имеет вид

$$p^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = s^n \int_{t_0}^{t_1} dt'_1 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt'_n \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t'_1) \dots \\ \dots E^{(-)}(\mathbf{r}_n, t'_n) E^{(+)}(\mathbf{r}_n, t'_n) \dots E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t'_1) \},$$

где $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ — координаты счетчиков. Если мы введем корреляционную функцию n -го порядка (см. [1])

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \\ = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(y_1) \dots E^{(+)}(y_n) \}, \quad (3.4)$$

то сможем написать скорость счета n -кратных совпадений

$$w^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^{(n)} p^{(n)}(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} = \\ = s^n G^{(n)}(\mathbf{r}_1 t_1, \dots, \mathbf{r}_n t_n, \mathbf{r}_n t_n, \dots, \mathbf{r}_1 t_1). \quad (3.5)$$

В обычном поле скорость счета совпадений $\omega^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ вообще говоря, отличается от произведения $\prod_{j=1}^n \omega^{(1)}(t_j)$ скоростей счета для n счетчиков, которую бы каждый из них имел в отсутствие остальных. Поскольку обычно

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_n, \dots, x_1) \neq \prod_{j=1}^n G^{(1)}(x_j, x_j),$$

то отдельные акты счета в разных детекторах имеют определенную тенденцию происходить в коррелированные моменты времени. Вообще только для специальных классов полей скорость счета совпадений факторизуется, и мы будем говорить о таких полях как об обладающих некоторыми новыми типами когерентности. Прежде чем обсуждать их дальше, напомним смысл наиболее обычного типа оптической когерентности.

Системы полос, наблюдаемые в интерференционных оптических экспериментах, можно описать как имеющие определенную степень контрастности, или видности. Когда эта контрастность максимальна, будем говорить, что складывающиеся поля когерентны [3]. Нетрудно показать, что условие максимальной видности полос эквивалентно требованию того, чтобы

$$|G^{(1)}(x_1, x_2)|^2 = G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2); \quad (3.6)$$

это наибольшее значение, которое может реально иметь модуль кросскорреляционной функции согласно неравенству Шварца.

Очевидно, что это условие для полной когерентности между полями в точках x_1 и x_2 удовлетворяется, когда $G^{(1)}$ факторизуется согласно формуле

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \mathcal{E}^*(x_1) \mathcal{E}(x_2) \quad (3.7)$$

с некоторой подходящей функцией $\mathcal{E}(x)$, которая содержит только положительно-частотные компоненты. Таким образом, факторизация корреляционной функции является достаточным условием для когерентности. Не очень трудно показать [4], что факторизация корреляционной функции является также необходимым условием для обычной оптической когерентности. Поэтому условие (3.7) полностью эквивалентно условию (3.6).

Поскольку в (3.6) и (3.7) фигурирует именно корреляционная функция первого порядка, мы будем называть эквивалентные условия (3.6) и (3.7) условиями когерентности поля первого порядка. Хотя когерентность первого порядка налагает очень жесткие ограничения на оператор плотности полей (см. [5]), уже сейчас нетрудно создать электромагнитные поля, удовлетворяющие

с довольно большой точностью этим условиям в больших пространственно-временных объемах.

Условия (3.6) и (3.7) имеют очевидное обобщение на случаи корреляционных функций высших порядков. Мы будем говорить, что поле обладает когерентностью n -го порядка в том и только в том случае, если

$$G^{(m)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \mathcal{E}^*(x_1) \dots \mathcal{E}^*(x_m) \mathcal{E}(y_1) \dots \mathcal{E}(y_m) \quad (3.8)$$

для всех точек $x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_m$ и для всех $m \leq n$.

Можно показать [4], что поля, обладающие когерентностью первого порядка, должны иметь корреляционные функции вида $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = g_n \mathcal{E}^*(x_1) \dots \mathcal{E}^*(x_n) \mathcal{E}(y_1) \dots \mathcal{E}(y_n)$, (3.9) где g_n — набор неотрицательных констант и, конечно, $g_1 = 1$. Таким образом, условия когерентности высшего порядка просто эквивалентны условиям

$$g_n = 1 \quad \text{для } n \leq m. \quad (3.10)$$

§ 4. ДРУГИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Корреляционные функции $G^{(n)}$, конечно, не являются единственными функциями, которые мы можем определить для поля излучения, и тем более не являются единственными функциями, которые в принципе могут быть измерены. Мы можем, например, определить более общий набор функций

$$G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \\ = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(y_1) \dots E^{(+)}(y_m) \}. \quad (4.1)$$

Однако эти функции обычно равны нулю при $n \neq m$, если только не имеют места довольно специальные условия. Исследуем эти условия.

Обычно наша информация о полях остается постоянной во времени, так что оператор плотности (который всегда стационарен в гейзенберговской картине) фактически коммутирует с гамильтонианом поля H . Для таких стационарных операторов плотности любое ожидаемое значение вида $\text{Sp} \{ \rho A(t_1) B(t_2) \dots Q(t_n) \}$ должно удовлетворять соотношению

$$\text{Sp} \{ \rho A(t_1 + \tau) B(t_2 + \tau) \dots Q(t_n + \tau) \} = \\ = \text{Sp} \left\{ \rho \exp \left[-\frac{iH\tau}{\hbar} \right] A(t_1) B(t_2) \dots Q(t_n) \exp \left[\frac{iH\tau}{\hbar} \right] \right\} = \\ = \text{Sp} \{ \rho A(t_1) B(t_2) \dots Q(t_n) \}, \quad (4.2)$$

т. е. оно должно оставаться неизменным при временных сдвигах.

Предположим, что поле имеет фурье-компоненты с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots$. Тогда из (4.2) нетрудно заключить, что $G^{(n, m)}$ может принимать ненулевые значения только в том случае, если из имеющихся частот можно образовать два набора, набор из n частот $\{\omega_i\}$ и набор из m частот $\{\omega_j\}$, таких, что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i - \sum_{j=1}^m \omega_j = 0, \quad (4.3)$$

а также если амплитуды поля на этих частотах определенным образом связаны в том, что касается их статистического поведения (например, оператор плотности не должен факторизоваться в произведение независимых операторов плотности для этих мод, иначе $G^{(n, m)}$ будет равно нулю).

Например, из условия (4.3) ясно, что $G^{(1, 0)}$ всегда будет равно нулю в стационарных полях, не имеющих статических ($\omega = 0$) компонент. Для больших значений n и m условия, которым нужно удовлетворить, чтобы $G^{(n, m)}$ отличались от нуля для $n \neq m$ в стационарных полях, как правило, легко реализовать только в экспериментах по нелинейной оптике. Например, для $n = 2, m = 1$ мы должны иметь три моды с частотами ω_1, ω_2 и ω_3 , такими, что

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3,$$

а это как раз то условие, которому удовлетворяют три связанные моды параметрического усилителя. Для случая $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega_2$ это есть условие, которое выполняется при генерации света на второй гармонике. Чтобы $G^{(2, 1)} \neq 0$, в этих примерах следует далее потребовать, чтобы имели место фазовые корреляции между колебаниями на разных частотах. Фактически необходимые фазовые корреляции в параметрическом усилителе или при генерации гармоник обеспечиваются динамически с помощью нелинейного механизма взаимодействия мод.

Поскольку функция $G^{(2, 1)}$ для стационарного поля может отличаться от нуля, интересен вопрос, как эту функцию измерить. Представим себе эксперимент с генерацией гармониками, в котором пучок света с частотой ω_1 падает на нелинейную среду. Мы предполагаем, что среду покидают два накладывающихся пучка: основной пучок с волновым вектором \mathbf{k}_1 и частотой ω_1 и пучок второй гармоники с частотой ω_2 и волновым вектором \mathbf{k}_2 , который очень близок по значению к $2\mathbf{k}_1$. Введем теперь в эти наложенные друг на друга пучки счетчик фотонов, не чувствительный к фотонам с частотами ω_1 и меньше. Мы можем сделать это, используя для фотокатода детектора вещество с

работой выхода несколько больше, чем $\hbar\omega_1$. Тогда наш счетчик будет свободно детектировать фотоны из пучка с частотой $2\omega_1$.

Хотя фотоны из интенсивного пучка с частотой ω_1 не могут воздействовать на счетчик по отдельности, они тем не менее будут регистрироваться счетчиком, так как могут выбивать фотоэлектроны при действии парами. Поскольку основной и вторичный пучки имеют фиксированные фазовые соотношения, две различные совокупности процессов поглощения фотонов — поглощение отдельных фотонов из пучка второй гармоники и пар фотонов из основного пучка — будут интерферировать друг с другом. Интерференция амплитуд одно- и двухфотонного поглощения описывается функцией $G^{(2,1)}$. Если плоскость фотокатода ориентирована перпендикулярно вектору $\mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_1$ и движется вдоль этого направления, то интерференционный член в вероятности фотоэмиссии будет осциллировать при изменении положения фотокатода. Амплитуда этих осцилляций пропорциональна действительной части функции $G^{(2,1)}$.

Для когерентных полей условие того, что наша информация о поле не меняется со временем, приводит к условию, привычным образом связанному с когерентностью первого порядка, а именно к тому, что поля должны быть монохроматичны. Если мы потребуем, чтобы и

$$G^{(1)}(t_1, t_2) = G^{(1)}(t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

и

$$G^{(1)}(t_1, t_2) = \mathcal{E}^*(t_1) \mathcal{E}(t_2),$$

то получим функциональное уравнение для $\mathcal{E}(t)$, единственным решением которого будет

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) e^{-i\omega t}$$

для некоторой частоты $\omega \geq 0$. И наоборот, любое поле, содержащее только одну возбужденную моду, обладает когерентностью первого порядка. Из одномодовости возбуждения не следует, однако, когерентность более высокого порядка.

§ 5. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Для дальнейшего рассмотрения электромагнитного поля удобно ввести набор чистых состояний, таких, что поля, которые они описывают, являются полями, для которых все корреляционные функции факторизуются. Мы назвали такие поля когерентными и потому будем называть эти особые состояния *когерентными состояниями* поля [6].

Поскольку операторы измеряемого поля, с которым мы будем работать, такие, как произведения отрицательно- и положительно-частотных частей электромагнитных полей, входящие в $G^{(n,m)}$, являются нормально упорядоченными, то особенно будут полезны состояния, являющиеся собственными состояниями положительно-частотной части поля. Действительно, если мы найдем состояние $| \rangle$, для которого

$$E^{(+)}(x) | \rangle = \mathcal{E}(x) | \rangle,$$

то легко увидим, что все корреляционные функции, которые являются просто ожидаемыми значениями в этом состоянии, будут на самом деле факторизованы.

Поскольку положительно-частотное электрическое поле содержит операторы уничтожения фотонов, мы можем интерпретировать это уравнение на собственные значения, считая, что, удалив из поля фотон, мы оставляем состояние поля совершенно неизменным. Это замечательное свойство когерентных состояний сразу показывает, что они не могут быть описаны с помощью какого-либо фиксированного числа фотонов.

Чтобы найти явные выражения для когерентных состояний, удобно разложить поле по нормальным модам, соответствующим объему системы. Рассмотрим набор вектор-функций $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ мод поля, ортонормированных

$$\int \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'},$$

а также удовлетворяющих уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \frac{1}{c^2} \omega_k^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0$$

и условию поперечности $\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0$. Мы можем тогда записать операторы и c -числовые поля в виде разложений

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \exp[-i \omega_k t], \quad (5.1)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} \alpha_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \exp[-i \omega_k t]. \quad (5.2)$$

(Мы используем единицы Хэвисайда — Лоренца, т. е. рационализованные гауссовы единицы, в которых закон Гаусса, например, имеет вид $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$.)

Операторы a_k и их эрмитовски сопряженные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (5.3a)$$

$$[a_k, a_{k'}] = 0 = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]. \quad (5.3b)$$

Ясно, что если когерентные состояния являются собственными состояниями поля $E^{(+)}$, отвечающими собственному значению \mathcal{E} , то они также являются собственными состояниями всех операторов a_k , принадлежащих собственным значениям α_k , так что мы будем обозначать их символом $|\{\alpha_k\}\rangle$. Фактически мы можем представить состояние $|\{\alpha_k\}\rangle$ в виде произведения состояний, относящихся к отдельным модам:

$$|\{\alpha_k\}\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle_k \quad (5.4)$$

с

$$a_k |\alpha_k\rangle_k = \alpha_k |\alpha_k\rangle_k, \quad (5.5)$$

причем соотношение

$$a_{k'} |\{\alpha_k\}\rangle = \alpha_{k'} |\{\alpha_k\}\rangle \quad (5.6)$$

имеет место, конечно, для всех k' . Ограничимся здесь кратким перечнем некоторых наиболее важных свойств состояний $|\{\alpha_k\}\rangle$. Более полное обсуждение можно найти в работах [6, 7].

Для простоты рассмотрим только одномодовые состояния и забудем про индекс k . Тогда мы будем иметь состояния $|\alpha\rangle$, обладающие свойством $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, а также сопряженные состояния $\langle\alpha|$, являющиеся собственными векторами a^\dagger , т. е. $\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$. Вследствие неэрмитовости операторов a невозможно построить собственный бра-вектор $\langle\beta|$ для a или собственный кет-вектор для a^\dagger . Конечно, можно выразить состояние $|\alpha\rangle$ через n -квантовые состояния, которые мы определяем так:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad (5.7)$$

где $|0\rangle$ — основное состояние моды. Используя коммутационные соотношения и определение (5.5), легко показать, что

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (5.8)$$

Вероятность того, что в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ будет n фотонов, задается просто распределением Пуассона

$$p(n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp[-|\alpha|^2] \quad (5.9)$$

со средним значением $\langle n \rangle = |\alpha|^2$.

Выразив состояние (5.8) через вакуумное состояние, можно убедиться, что когерентное состояние есть просто сдвинутое вакуумное состояние. Если ввести унитарный оператор

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a], \quad (5.10)$$

который просто сдвигает операторы a и a^\dagger на комплексные числа α и α^* соответственно, то когерентное состояние $|\alpha\rangle$ можно будет записать в виде

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (5.11)$$

Такое описание этих состояний в точности является описанием, использовавшимся Шредингером, который впервые упомянул их при обсуждении классического поведения квантового гармонического осциллятора. Когерентным состояниям отвечают локализованные волновые пакеты как в координатном, так и в импульсном пространствах, причем неопределенности этих сопряженных переменных реализуют минимум произведения неопределенностей:

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{1}{4} \hbar^2.$$

[Это условие минимума определяет более широкое семейство состояний, которые описываются кеннардовскими волновыми пакетами. Когерентные состояния являются такими членами из этого семейства, для которых $(\Delta p)^2 = \omega^2 (\Delta q)^2$.], Классический предел достигается, разумеется, только когда $|\alpha| \gg 1$.

Состояния $|\alpha\rangle$ неортогональны, поскольку

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left[\alpha^* \beta - \frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2\right]. \quad (5.12)$$

Но вследствие того, что

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp[-|\alpha - \beta|^2], \quad (5.13)$$

перекрывание любых двух состояний быстро спадает с взаимным удалением их амплитуд в комплексной плоскости. Если, например, $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ — два разных классических состояния ($|\alpha| \gg 1$, $|\beta| \gg 1$), то они в общем случае почти полностью ортогональны, если только не случится так, что α и β почти совпадают.

Когерентные состояния образуют, однако, полный набор. Мы можем выразить их полноту соотношением

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = 1, \quad (5.14)$$

где 1 — единичный оператор, а $d^2\alpha = d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha)$ — действительный элемент площади в комплексной плоскости. Можно показать, что это свойство полноты когерентных состояний немедленно следует из (5.8) и полноты состояний $|n\rangle$. Поскольку когерентное состояние $|\alpha\rangle$ существует для каждого комплексного числа α , в то время как состояния $|n\rangle$ образуют только счетное бесконечное множество, мы можем предположить, что набор когерентных состояний больше, чем это нужно для полноты. И действительно, как показал Кахилл [8], любая последовательность различных собственных значений α , имеющая предельную точку в конечной области α -плоскости, определяет полный набор когерентных состояний. На практике, по-видимому, не целесообразно отбрасывать какие-либо члены «переполненного» набора.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО КОГЕРЕНТНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Вследствие полноты множества когерентных состояний через них можно выразить любое состояние и любой оператор. Так, например, для любого состояния $|\psi\rangle$, используя соотношение полноты (5.14), можно построить разложение

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | \psi \rangle |\alpha\rangle. \quad (6.1)$$

Нетрудно показать, что скалярное произведение $\langle \alpha | \psi \rangle$ может быть записано в виде

$$\psi(\alpha^*) \exp\left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right],$$

где $\psi(\alpha^*)$ — целая функция от α^* . [Экспоненциальный множитель выделен из $\psi(\alpha^*)$, поскольку $|\alpha|^2 = \alpha^* \alpha$ не является аналитической функцией α^* .] Соответствие между аналитическими функциями от α^* и состояниями гармонического осциллятора изучалось Баргманом [9].

Подобным же образом можно выразить и любой оператор T :

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha | T | \beta \rangle \langle \beta | = \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} \mathcal{T}(\alpha^*, \beta) \exp\left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2\right] |\alpha\rangle \langle \beta|, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где опять-таки матричный элемент разделен на экспоненциальный множитель и аналитическую функцию от обеих переменных α^* и β .

Естественно, что особый интерес будет представлять для нас оператор плотности для поля излучения. Для отдельной моды поля мы можем записать его в форме (6.2):

$$\rho = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} R(\alpha^*, \beta) \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right] |\alpha\rangle\langle\beta|. \quad (6.3)$$

Аналитическая функция R должна удовлетворять некоторым довольно строгим условиям, поскольку ρ — положительно определенный оператор с единичным следом.

Выражение оператора плотности через когерентные состояния сильно упрощает расчет ожидаемых значений нормально упорядоченных операторов. Во всех таких расчетах ожидаемых значений операторы поля могут быть просто заменены своими собственными значениями. Например, корреляционная функция $G^{(n)}$ дается выражением

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = & \int \mathcal{E}^*(x_1, \{\alpha_k\}) \dots \\ & \dots \mathcal{E}^*(x_n, \{\alpha_k\}) \mathcal{E}(y_1, \{\beta_k\}) \dots \mathcal{E}(y_n, \{\beta_k\}) R(\{\alpha_k^*\}, \{\beta_k\}) \times \\ & \times \exp\left[-\sum_k |\alpha_k|^2 - \sum_k |\beta_k|^2\right] \cdot \prod_k \left(\frac{d^2\alpha_k}{\pi}\right) \cdot \prod_k \left(\frac{d^2\beta_k}{\pi}\right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

в котором мы обобщили обозначения так, чтобы включить случай многих мод, и написали

$$\mathcal{E}(x, \{\alpha_k\}) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} \alpha_k u_k(\mathbf{r}) \exp(i\omega_k t) \quad (6.5)$$

для собственных значений положительно-частотного поля.

Представление (6.3) совершенно общее и может использоваться для задания любого состояния поля. Для многих полей можно найти значительно более простое представление для оператора плотности в виде разложения по проекционным операторам $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, а не по более общим операторам — диадикам $|\alpha\rangle\langle\beta|$. Другими словами, мы можем искать представление оператора плотности ρ в общем виде [6, 10]:

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (6.6)$$

где $P(\alpha)$ — действительная весовая функция. Мы назвали это представление P -представлением для оператора плотности.

Вопрос о том, насколько широка область применимости этого представления, уже широко обсуждался в литературе [11, 12]. Наиболее прямой подход к этому вопросу — попытаться найти функцию $P(\alpha)$.

Для нахождения функции $P(\alpha)$ удобно ввести функцию

$$\chi_N(\lambda) = \text{Sp} \{ \rho \exp[\lambda a^\dagger] \exp[-\lambda^* a] \}, \quad (6.7)$$

которую мы назовем нормально упорядоченной характеристической функцией [12]. Используя P -представление для вычисления $\chi_N(\lambda)$, мы найдем

$$\chi_N(\lambda) = \int d^2\alpha P(\alpha) \exp[\lambda a^* - \lambda^* a]; \quad (6.8)$$

нетрудно убедиться, записывая подынтегральное выражение в декартовых координатах, что (6.8) есть не что иное, как двумерное фурье-преобразование функции $P(\alpha)$. Если это фурье-преобразование обратимо, то решение для $P(\alpha)$ дается просто выражением

$$P(\alpha) = \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \chi_N(\lambda) \exp[\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*]. \quad (6.9)$$

Поскольку функция $\chi_N(\lambda)$ может быть прямо рассчитана из известного нам оператора плотности, выражение (6.9) может быть использовано для определения $P(\alpha)$ всякий раз, когда функция $\chi_N(\lambda)$ обладает двумерным преобразованием Фурье. Вообще χ_N — функция, которая очень хорошо себя ведет в конечной λ -плоскости. Действительно, она ограничена, $|\chi_N(\lambda)| \leq \leq \exp[1/2|\lambda|^2]$, но, как показывает это неравенство, она может быть очень быстро возрастающей функцией при $\lambda \rightarrow \infty$. Интеграл Фурье (6.9) теряет смысл, когда $|\chi_N(\lambda)|$ растет таким образом; он расходится во всех точках α -плоскости. К несчастью, имеются физические состояния, для которых $|\chi_N(\lambda)|$ растет так быстро. Легко показать, например, что для состояний с минимальной неопределенностью, не совпадающих с когерентными состояниями, функция $|\chi_N(\lambda)|$ будет, вообще говоря, расти как $\exp[c(\text{Re } \lambda)^2]$ или $\exp[c(\text{Im } \lambda)^2]$, где $c > 0$. Для таких состояний, по-видимому, не существует какого-либо способа определения весовой функции $P(\alpha)$ с разумным поведением. Поскольку трудность связана с поведением χ_N при больших λ , с ней обычно сталкиваются в первую очередь для состояний, характеризующихся малыми неопределенностями величин, которые могут быть построены как линейные комбинации a и a^\dagger , например координаты и импульса.

При попытках (они предпринимались главным образом Сударшаном и Клаудером) обосновать универсальное использова-

ние P -представления привлекались более формальные построения. Физики уже знакомы с классом математических объектов, известных как обобщенные функции медленного роста (например, дельта-функция и ее производные); они являются базисом для хорошо известного способа обобщения интеграла Фурье. К сожалению, требуемое для придания универсального смысла выражению (6.9) обобщение заставило бы нас зайти гораздо дальше и работать с обобщенными функциями, гораздо более сингулярными, чем обобщенные функции медленного роста. В общем этот путь кажется открытым, по крайней мере в формальном смысле, однако правила выполнения расчетов с такими сингулярными структурами остаются неясными. Единственное сделанное до сих пор предположение требует для вычисления каждого матричного элемента оператора ρ применения бесконечного предельного перехода. Эта трудность, конечно, полностью отсутствует при использовании других способов представления оператора плотности. В частности, общее представление (6.3) позволяет использовать большую часть преимуществ P -представления при расчете средних значений нормально-упорядоченных произведений операторов поля и в то же время не приводит к каким-либо проблемам сингулярности.

§ 7. НЕСКОЛЬКО ОБЩИХ ЗАМЕЧАНИЙ

Нашей конечной целью является возможность предсказывать результаты различных измерений, которые можно выполнить для электромагнитного поля. Используя корреляционные функции, дающие основу для таких предсказаний, мы фактически разбили задачу предсказания на две части. Первая ее часть касается механизма излучения поля. Генератор поля, какой бы он ни был, создает его в таком состоянии, которое, вообще говоря, может быть описано только на языке статистики с помощью оператора плотности ρ . Итак, наш первый вопрос: как найти ρ ?

Если мы каким-либо способом нашли оператор ρ , то можно перейти ко второй части задачи предсказания: как описать конкретный набор измерений, проводимых над полем? Для простых измерений, которые мы практически можем выполнять, вторая часть задачи обычно гораздо проще, чем первая. Например, для экспериментов по счету фотонов можно построить очень точную и исчерпывающую теорию того, что измеряется, исходя из выражений теории возмущений для вероятностей переходов многоатомных систем, обсуждавшихся в § 3.

Конечно, задача о предсказании отклика реального счетчика фотонов отличается от задачи о предсказании одновременного

отклика нескольких чувствительных к фотонам атомов. Для макроскопического детектора необходимо найти вероятности того, что некоторое произвольное количество из большой совокупности атомов совершит наблюдаемый переход (что и делает детектор чувствительным), а остальные атомы не претерпят его. В настоящее время решение этой задачи [2] довольно хорошо известно. Результаты, к которым оно приводит, подробно обсуждались Арекки, Хаузом и Пайком в лекциях этой школы. Поэтому вместо того, чтобы повторять известный подход к проблеме счета фотонов, мы попытаемся в наших лекциях развить в некоторой степени новый подход.

Однако, прежде чем переходить к проблеме измерения, обратимся к задаче, которая ей предшествует. Как узнать, какой оператор плотности характеризует поле, генерируемое реальным источником? Для большого класса источников со статистически независимым выходом (включая, например, источники, являющиеся черным телом) данная задача имеет простое решение, но эти источники вряд ли являются наиболее интересными. Для тех типов источников, которые представляют интерес, задача нахождения оператора плотности важна, и потому довольно много лекций в нашей школе посвящено именно ей.

Поскольку в общем случае не удастся угадать, как должны выглядеть операторы плотности, почти все, что можно сделать, чтобы найти их, — это построить насколько возможно простую теоретическую модель данного типа источника и затем точно определить зависящие от времени статистические свойства поля, которое он излучает. Для определенного класса приборов, работающих в качестве усилителей, аттенюаторов и преобразователей частоты, уравнение движения для амплитуды поля может быть линейным, и в результате операторы плотности излучаемого поля могут быть найдены в простой, замкнутой форме. Если же основные уравнения движения нелинейны, что с необходимостью имеет место в случае лазера, то задача нахождения оператора плотности существенно усложняется. Многие лекции в нашей школе посвящены этой проблеме; она с различных точек зрения обсуждалась Скулли, Хакеном, Вейдlichem, Луиселлом и Гордоном.

Чтобы конкретно показать, с чем приходится сталкиваться при нахождении оператора плотности, мы обсудим квантовомеханическую задачу об ослаблении поля. Тот факт, что поле ослабляется, фактически означает, что каждая его мода представляет затухающий квантовый осциллятор. Модель линейно затухающего гармонического осциллятора долгое время была фундаментальной в классической механике. Но мы только не-

давно начали понимать, как описывать затухающий осциллятор квантовомеханически; поэтому данная задача очень интересна и сама по себе. Более того, мы увидим, что наше обсуждение этой задачи полезно для разработки усовершенствованной теории экспериментов по счету фотонов, которую мы разовьем в конце данных лекций.

§ 8. ЗАТУХАЮЩИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Рассмотрим одну моду электромагнитного поля, например моду в резонаторе с отражающими стенками. Мы знаем, что амплитуда моды может рассматриваться как координата гармонического осциллятора. Если стенки резонатора являются абсолютно отражающими, то осциллятор не взаимодействует с какой-либо другой динамической системой. Если он начал осциллировать, то он будет осциллировать вечно.

На практике, конечно, стенки резонатора никогда не являются абсолютно отражающими. В результате амплитуда поля очень быстро уменьшается, стенки же резонатора немного нагреваются. В случае когда мода поля совершенно не возбуждена (что отвечает абсолютному нулю температуры), стенки, если они имеют конечную температуру, будут возбуждать поле. Это четкие примеры необратимых в термодинамическом смысле процессов; строя макроскопическую теорию затухания, во всей полноте необходимо учитывать необратимость.

Суммируя в нескольких словах проблему необратимости, можно сказать, что уравнения движения, описывающие события, которые происходят на микроскопическом уровне, являются существенно обратимыми, чем резко отличаются от уравнений, описывающих такие явления макроскопического масштаба, как, например, упомянутое выше затухание. Основные принципы решения этой проблемы известны со времен Гиббса и Эренфеста. Только в пределе довольно сильной идеализации, когда число степеней свободы системы становится бесконечным, ее поведение становится истинно необратимым. Поведение систем с большим, но конечным числом степеней свободы очень близко к необратимому поведению на протяжении громадных отрезков времени, а именно такое поведение и считается практически необратимым.

К сожалению, лишь в немногих случаях такая интерпретация необратимости может быть проиллюстрирована конкретными математическими формулами. Для получения таких формул необходимо решать уравнение движения системы с бесконечным числом степеней свободы, а это — внушительная задача для

любой сколько-нибудь сложной системы. Ее, однако, можно полностью решить для многих типов систем связанных гармонических осцилляторов, причем осознание того, что такие простые системы могут проиллюстрировать проблему необратимости, привело недавно к широкому обсуждению решаемых моделей типа обсуждавшихся в [13, 14].

Изложенное ниже рассмотрение затухания было проведено автором вместе с Ареки. Мы используем опять-таки модель связанных осцилляторов, но такую, которая очень проста и подходит для обсуждения вопросов затухания. Это квантовомеханическая модель, которую можно анализировать в строгом соответствии с классической теорией с помощью когерентных состояний.

Предположим, что интересующий нас гармонический осциллятор, например осциллятор, представляющий упомянутую выше моду в резонаторе, линейно связан с другими членами большого набора независимых осцилляторов, моделирующих как механизм затухания, так и сам термостат. Мы будем называть интересующий нас осциллятор *A*-осциллятором и обозначать соответствующие операторы рождения и уничтожения символами $a(t)$ и $a^\dagger(t)$. Остальные осцилляторы, образующие термостат, назовем *B*-осцилляторами и обозначим их операторы рождения и уничтожения символами $b_k(t)$ и $b_k^\dagger(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Пусть частота *A*-осциллятора есть ω , а частоты *B*-осцилляторов суть ω_k . Следуя Гордону и др. [14], возьмем гамильтониан для этих связанных осцилляторов в виде

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k \{ \lambda_k a^\dagger b_k + \lambda_k^* b_k^\dagger a \}, \quad (8.1)$$

где λ_k — набор констант взаимодействия, вообще говоря, комплексных.

В связи с этим гамильтонианом необходимо отметить два момента. Во-первых, то, что *A*-осциллятор взаимодействует только с другими осцилляторами, может показаться нереалистичским элементом в этой модели, ведь стенки нашего резонатора не обязательно состоят из гармонических осцилляторов. Но, как будет отмечено в § 13, большие системы, не состоящие, конечно, из гармонических осцилляторов, обладают очень часто модами коллективных возбуждений, амплитуды которых динамически ведут себя подобно амплитудам осцилляторов. Гамильтониан (8.1) может описывать широкий класс механизмов затухания, связанных с коллективными возбуждениями.

Во-вторых, член взаимодействия не содержит выражений вида ab_k или $b_k^\dagger a^\dagger$. Различные физические механизмы связи, ко-

торые можно вообразить, описываются как раз такими антирезонансными членами, но их динамический эффект обычно довольно мал из-за быстрых осцилляций. Обычно ими пренебрегают, используя так называемое приближение вращающейся волны.

Гейзенберговские уравнения движения

$$\dot{a} = \frac{1}{i\hbar} [a, H], \quad \dot{b}_k = \frac{1}{i\hbar} [b_k, H] \quad (8.2)$$

для нашей модели принимают вид

$$\dot{a} = -i\omega a - i \sum_k \lambda_k b_k, \quad (8.3)$$

$$\dot{b}_k = -i\omega_k b_k - i\lambda_k^* a. \quad (8.4)$$

Поскольку все операторы в этих уравнениях коммутируют друг с другом в любой фиксированный момент времени, эти уравнения можно проинтегрировать, как если бы они были уравнениями для классических величин, а не для операторов. В конце концов нам придется работать с решением именно этих уравнений. Сейчас же мы лишь отметим, что общий вид решения должен быть таким:

$$a(t) = a(0)u(t) + \sum b_k(0)v_k(t), \quad (8.5)$$

$$b_k(t) = \sum_{k'} b_{k'}(0)x_{k'k}(t) + a(0)y_k(t), \quad (8.6)$$

причем функции $u(t)$, $v_k(t)$, $x_{k'k}(t)$ и $y_k(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u(0) = 1, \quad v_k(0) = 0, \quad (8.7)$$

$$x_{k'k}(0) = \delta_{k'k}, \quad y_k(0) = 0. \quad (8.8)$$

Простота гамильтониана (8.1) становится очевидной, если выразить состояния системы через когерентные состояния. Гамильтониан (8.1) принадлежит к классу гамильтонианов, описанному в [15], которые сохраняют когерентность первоначально когерентных состояний. Так, если в начале движения A -осциллятор и все B -осцилляторы находились в когерентных состояниях, то они останутся в них и во все последующие моменты времени. Чтобы проверить это свойство, предположим, что состояние системы в гейзенберговском представлении является прямым произведением когерентных состояний

$$|\alpha\rangle \prod_k |\beta_k\rangle_k \equiv |\alpha, \{\beta_k\}\rangle, \quad (8.9)$$

обладающим по определению свойствами

$$a(0) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \alpha |\alpha, \{\beta_k\}\rangle, \quad (8.10)$$

$$b_k(0) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \beta_k |\alpha, \{\beta_k\}\rangle. \quad (8.11)$$

Тогда из (8.5) становится ясно, что это состояние является собственным состоянием операторов $a(t)$ и $b_k(t)$ для всех моментов времени t . Определим зависящие от времени функции

$$\alpha(t) = \alpha u(t) + \sum_k \beta_k v_k(t), \quad (8.12)$$

$$\beta_k(t) = \sum_{k'} \beta_{k'} x_{k'k}(t) + \alpha y_k(t), \quad (8.13)$$

подчиняющиеся дифференциальным уравнениям для c -чисел

$$\dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t) - i \sum_k \lambda_k \beta_k(t), \quad (8.14)$$

$$\dot{\beta}_k(t) = -i\omega_k \beta_k(t) - i\lambda_k^* \alpha(t), \quad (8.15)$$

тесно связанным с операторными уравнениями (8.3) и (8.4). Тогда гейзенберговское состояние системы будет подчиняться уравнению на собственные значения

$$a(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \alpha(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle, \quad (8.16)$$

$$b_k(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \beta_k(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle \quad (8.17)$$

в любой момент t .

Чтобы связать эти результаты со шредингеровской картиной, заметим, что существует унитарный оператор $U(t)$, связывающий зависящие от времени гейзенберговские операторы с их начальными значениями, например

$$a(t) = U^{-1}(t) a(0) U(t). \quad (8.18)$$

Начальные значения операторов $a(0)$ и $b_k(0)$ могут быть взяты в качестве операторов в шредингеровском представлении. Следовательно, уравнения (8.16) и (8.17) эквивалентны уравнениям

$$a(0) U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \alpha(t) U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle, \quad (8.19)$$

$$b_k(0) U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle = \beta_k(t) U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle. \quad (8.20)$$

Состояние $U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle$ есть зависящее от времени шредингеровское состояние системы; видно, что если оно являлось вначале когерентным состоянием [$U(0) = 1$], то оно остается когерентным и во все последующие моменты времени [15]. Другими словами, можно найти шредингеровское состояние нашей системы (за исключением несущественного фазового множителя), совсем не решая уравнение Шредингера. Это верно потому, что

В действительности движение системы настолько близко к классическому, насколько это возможно. Система описывается волновым пакетом с минимальной неопределенностью, который просто движется по классической траектории, даваемой уравнениями (8.12) и (8.13), причем пакет не расплывается.

Поскольку шредингеровское состояние системы является когерентным состоянием, его можно обозначить с помощью зависящих от времени собственных значений:

$$|\alpha(t), \{\beta_k(t)\}\rangle \equiv U(t) |\alpha, \{\beta_k\}\rangle. \quad (8.21)$$

Из (8.7), (8.8), (8.12) и (8.13) ясно, что $\alpha(0) = \alpha$ и $\beta_k(0) = \beta_k$.

§ 9. ОПЕРАТОР ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ЗАТУХАЮЩЕГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Чтобы оптимально точно определить состояние A -осциллятора, предположим, что первоначально он находился в чистом когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Не имело бы смысла столь же точно определять состояния осцилляторов в термостате. Все, что мы вообще знаем об элементах термостата, это то, что они находятся в совершенно случайных или смешанных состояниях. Можно обсудить широкий класс примеров, предположив, что все B -осцилляторы первоначально находятся в хаотических состояниях. В хаотическом состоянии парциальный оператор плотности ρ_k для k -го осциллятора из термостата дается в P -представлении гауссовой функцией [6]

$$\rho_k = \frac{1}{\pi \langle n_k \rangle} \int \exp \left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle} \right] |\beta_k\rangle_k \langle \beta_k| d^2\beta_k, \quad (9.1)$$

где $\langle n_k \rangle$ есть среднее число заполнения данной моды. Если первоначально термостат находился при фиксированной температуре T , то средние числа заполнения даются формулой Планка

$$\langle n_k \rangle = \left\{ \exp \left[\frac{\hbar\omega_k}{\kappa T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (9.2)$$

где κ — постоянная Больцмана.

Если $\rho(t)$ — зависящий от времени оператор плотности в шредингеровской картине, то для выбранного начального состояния начальное значение $\rho(t)$ есть прямое произведение

$$\begin{aligned} \rho(0) &= |\alpha\rangle \langle \alpha| \prod_k \rho_k = \\ &= \int |\alpha, \{\beta_k\}\rangle \langle \alpha, \{\beta_k\}| \prod_k \exp \left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle} \right] \frac{d^2\beta_k}{\pi \langle n_k \rangle}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Теперь, поскольку нам известно, что состояния, в которые переходит система из каждого чистого состояния $|\alpha, \{\beta_k\}\rangle$, являются когерентными состояниями, даваемыми формулой (8.21), можно сразу написать решение уравнения движения для оператора плотности, т. е. квантовомеханическое уравнение Луивилля. Зависящий от времени оператор плотности с начальным значением $\rho(0)$ может даваться только выражением

$$\rho(t) = \int |\alpha(t), \{\beta_k(t)\}\rangle \langle \alpha(t), \{\beta_k(t)\}| \prod_k \exp\left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}\right] \frac{d^2\beta_k}{\pi \langle n_k \rangle}. \quad (9.4)$$

Поскольку функции $\alpha(t)$, $\beta_k(t)$ линейно зависят от параметров $\{\beta_k\}$, оператор плотности, вообще говоря, не факторизуется при $t \neq 0$; взаимодействие всех осцилляторов приводит к тому, что они перестают быть статистически независимыми, каковыми они были первоначально. Так как мы интересуемся главным образом поведением A -осциллятора, а не термостата, то для A -осциллятора удобно определить приведенный оператор плотности, взяв след оператора $\rho(t)$ по всем переменным, описывающим термостат:

$$\rho_A(t) \equiv \text{Sp}_B \rho(t). \quad (9.5)$$

Приведенный оператор плотности, соответствующий (9.4), есть просто

$$\rho_A(t) = \int |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \prod_k \exp\left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}\right] \frac{d^2\beta_k}{\pi \langle n_k \rangle}, \quad (9.6)$$

где когерентные состояния $|\alpha(t)\rangle$ относятся только к A -осциллятору. Используя точный вид $\alpha(t)$, даваемый формулой (8.12), можно записать этот оператор следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_A(t) &= \\ &= \int |au(t) + \sum \beta_k v_k(t)\rangle \langle au(t) + \sum \beta_k v_k(t)| \prod_k \exp\left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}\right] \frac{d^2\beta_k}{\pi \langle n_k \rangle}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В этом месте удобно ввести двумерную дельта-функцию

$$\delta^{(2)}(\xi) = \delta(\text{Re } \xi) \delta(\text{Im } \xi) \quad (9.8)$$

и использовать ее, чтобы записать (9.8) в виде

$$\rho_A(t) = \int |au(t) + \xi\rangle \langle au(t) + \xi| F(\xi, t) d^2\xi, \quad (9.9)$$

где

$$F(\zeta, t) = \int \delta^{(2)}\left(\zeta - \sum_k \beta_k v_k(t)\right) \prod_k \exp\left[\frac{-|\beta_k|^2}{\langle n_k \rangle}\right] \frac{d^2 \beta_k}{\pi \langle n_k \rangle}. \quad (9.10)$$

Легко показать, что этот гауссов интеграл равен следующему выражению:

$$F(\zeta, t) = \frac{1}{\pi \sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2} \exp\left[-\frac{|\zeta|^2}{\sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2}\right]. \quad (9.11)$$

Введя переменную $\gamma = \zeta + \alpha u(t)$, можно увидеть из (9.9), что приведенный оператор плотности можно записать в P -представлении:

$$\rho_A(t) = \int P(\alpha, 0 | \gamma, t) |\gamma\rangle \langle \gamma| d^2 \gamma, \quad (9.12)$$

в котором весовая функция дается в соответствии с (9.11) формулой

$$P(\alpha, 0 | \gamma, t) = \frac{1}{\pi \sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2} \exp\left[\frac{|\gamma - \alpha u(t)|^2}{\sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2}\right]. \quad (9.13)$$

В этом случае мы использовали для плотности квазивероятности то же обозначение, что и для обычной условной плотности вероятности; $P(\alpha, 0 | \gamma, t)$ является весом, связанным с амплитудой когерентного состояния γ в момент t , если известно, что A -осциллятор начал движение в момент $t = 0$ с амплитудой α . Поскольку значения всех функций $v_k(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$, видно, что P является дельта-функцией при $t = 0$. В более поздние моменты времени P является гауссовой функцией, центр которой движется по траектории $\gamma = \alpha u(t)$.

Предположим на некоторое время, что все константы взаимодействия λ_k равны нулю, так что A -осциллятор не взаимодействует с другими осцилляторами. Тогда функции $v_k(t)$ равны нулю при всех t и $u(t) = \exp[-i\omega_\alpha t]$. Следовательно, функция P [см. (9.13)] остается дельта-функцией всегда и движется равномерно по замкнутой окружности в γ -плоскости. Одним из очевидных эффектов взаимодействия A -осциллятора с хаотически возбужденными осцилляторами термостата является то, что его P -распределение уширяется, или, другими словами, его квантовое состояние становится значительно менее определенным. Чтобы подробнее обсудить наше решение для оператора плотности, в следующем параграфе мы явно вычислим функции $u(t)$ и $v_k(t)$, использовавшиеся при построении решения уравнений движения.

Предположим теперь, что начальное состояние A -осциллятора есть чистое когерентное состояние $|\alpha\rangle$. Более общим классом начальных состояний A -осциллятора является набор смешанных состояний, которые можно описать, используя P -представление оператора плотности (6.6) с произвольной весовой функцией $P(\alpha, 0)$. Беря линейную суперпозицию решений (9.12), мы видим, что для таких начальных состояний приведенный оператор плотности A -осциллятора имеет зависящее от времени P -представление

$$\rho_A(t) = \int P(\gamma, t) |\gamma\rangle \langle \gamma| d^2\gamma, \quad (9.14)$$

где

$$P(\gamma, t) = \int P(\alpha, 0) P(\alpha, 0 | \gamma, t) d^2\alpha. \quad (9.15)$$

Если бы функции P были классическими плотностями вероятности, то в (9.15) можно было бы узнать определение непрерывного марковского процесса, стационарного во времени, поскольку свойства термостата не зависят от времени. То, что функции P являются не обычными функциями вероятности, а функциями квазивероятности, означает, что представление о марковском процессе естественным образом продолжено в квантовую область.

§ 10. НЕОБРАТИМОСТЬ И ЗАТУХАНИЕ

Следует подчеркнуть, что до сих пор в нашем точном решении для оператора плотности не содержится никаких приближений. Этот результат базируется на предположении, что известно решение уравнений движения (8.3), (8.4), или, что то же самое, дифференциальных уравнений для c -чисел (8.14), (8.15). Если бы число взаимодействующих мод в нашей задаче было не слишком велико, то было бы не очень трудно численно решить уравнения (8.14), (8.15) и достичь таким образом любой точности, но поскольку нам интересен как раз случай, когда число мод в термостате бесконечно, придется довольствоваться приближенным, хотя и весьма точным решением.

Во-первых, заметим, что дифференциальные уравнения (8.14), (8.15), если не по обозначениям, то по форме, хорошо знакомы любому изучавшему теорию излучения атома. Действительно, они имеют тот же самый вид, что и приближенные уравнения теории радиационного затухания [16], связывающие амплитуду вероятности того, что атом останется в возбужденном состоянии, с амплитудой вероятности того, что атом вернется в основное

состояние, а в различных модах поля излучения появятся фотоны. В уравнениях (8.14), (8.15) величина $\alpha(t)$ играет роль (не смотря на ее в общем-то другой физический смысл) амплитуды возбуждения атома; величины же $\beta_k(t)$ играют роль амплитуд однофотонных состояний и λ_k — роль матричных элементов перехода. Если предположить, что спектр частот осцилляторов термостата ω_k непрерывен в окрестности частоты ω , то математическая задача нахождения решения дифференциальных уравнений (8.14), (8.15) становится в точности задачей, рассматривавшейся Вайскопфом и Вигнером в их классической работе [17] по радиационному затуханию.

Используя преобразование Лапласа для построения точного решения уравнений (8.14), (8.15) и делая приближения Вайскопфа — Вигнера, находим, что искомые функции $u(t)$ и $v_k(t)$ можно записать в виде [14]

$$u(t) = \exp[-[\kappa + i(\omega + \delta\omega)]t], \quad (10.1)$$

$$v_k(t) = \frac{-i\lambda_k}{\kappa + i(\omega + \delta\omega - \omega_k)} \{\exp[-i\omega_k t] - \exp[-(\kappa + i(\omega + \delta\omega))t]\}, \quad (10.2)$$

где константы $\delta\omega$ и κ определены соотношением

$$\delta\omega - i\kappa = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_k \frac{|\lambda_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon}. \quad (10.3)$$

Из (10.1) и (10.2) ясно, что κ играет роль константы затухания, в то время как $\delta\omega$ дает сдвиг частоты. Приближение Вайскопфа — Вигнера требует, чтобы эти величины были малы как по сравнению с частотой ω , так и по сравнению с интервалами частот, на которых значительно изменяются константы взаимодействия λ_k и параметры, описывающие состояния осцилляторов термостата.

Затухающий характер решений (10.1) и (10.2) ясно показывает необратимость соответствующих процессов. Может показаться, что элемент необратимости «вошел» в наши уравнения из-за приближения Вайскопфа — Вигнера, но если посмотреть более внимательно, то станет ясно, что в действительности он содержится в одном из предположений, на которых основывается это приближение. В этом приближении безоговорочно принимается, что осцилляторов в термостате так много, что их спектр частот непрерывен. Конечно, в любом реальном примере в термостате присутствует конечное число осцилляторов, и их частотный спектр хотя и плотен, но дискретен, а не непрерывен.

Следовательно, приближение Вайскопфа — Вигнера описывает поведение системы в асимптотическом пределе, когда число осцилляторов термостата становится бесконечным. Но, как уже отмечалось, именно в этом и только в этом пределе можно ожидать истинно необратимого поведения. Другими словами, необратимые решения (10.1) и (10.2) являются идеализацией, но к ним за очень большие промежутки времени с большой точностью должны приближаться решения для систем с большим, но конечным числом степеней свободы.

Предположим, что можно описать спектр частот $\{\omega_k\}$ осцилляторов термостата некоторой функцией — спектральной плотностью $g(\omega_k)$. Беря тогда мнимую часть уравнения (10.3), видим, что константа затухания может быть записана так:

$$\kappa = \pi \sum_k |\lambda_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) = \pi \int |\lambda_k|^2 g(\omega_k) \delta(\omega - \omega_k) d\omega_k = \pi |\lambda_\omega|^2 g(\omega), \quad (10.4)$$

где λ_ω — значение константы связи при $\omega_k = \omega$. Функции $v_k(t)$ описывают вклады отдельных B -осцилляторов в возбуждение моды A -осциллятора. Из (10.2) видно, что функции $|v_k(t)|^2$ пропорциональны $[(\omega + \delta\omega - \omega_k)^2 + \kappa^2]^{-1}$. Другими словами, они имеют острый пик при $\omega_k = \omega + \delta\omega$ и спадают до малых значений вне полосы частот шириной $\Delta\omega_k \sim 2\kappa$ около этого пика.

Выше мы получили общее выражение (9.13) весовой функции $P(\alpha, 0 | \gamma, t)$ для P -представления оператора плотности; теперь мы почти в состоянии вычислить ее явно. Для этого нужно вычислить сумму $\sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2$, что можно сделать, используя резко выраженный резонансный характер зависимости $|v_k|^2$ от частоты. Если предположить, что средние числа заполнения $\langle n_k \rangle$ примерно постоянны на частотном интервале шириной $\Delta\omega_k \sim 2\kappa$ около $\omega_k = \omega + \delta\omega$, то можно написать

$$\sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2 = \langle n_{\omega'} \rangle \sum_k |v_k(t)|^2, \quad (10.5)$$

где $\langle n_{\omega'} \rangle$ — среднее число заполнения на частоте $\omega' \equiv \omega + \delta\omega$. Для вычисления $\sum_k |v_k(t)|^2$ можно прямо использовать решение (10.2), но несколько проще привлечь тождество

$$|u(t)|^2 + \sum_k |v_k(t)|^2 = 1, \quad (10.6)$$

которое легко получить как прямое следствие уравнений движения (8.14), (8.15), определения (8.12) и начальных условий (8.7).

Используя в (10.5) тождество (10.6) и решение (10.1) для $u(t)$, находим

$$\sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2 = \langle n_{\omega'} \rangle \{1 - |u(t)|^2\} = \langle n_{\omega'} \rangle (1 - \exp[-2\kappa t]). \quad (10.7)$$

Используя различные полученные нами выражения, весовой функции (9.13) для затухающего осциллятора можно придать вид

$$P(\alpha, 0 | \gamma, t) = \frac{1}{\pi \langle n_{\omega'} \rangle (1 - \exp[-2\kappa t])} \exp \left[-\frac{|\gamma - \alpha \exp[-(\kappa + i\omega')t]|^2}{\langle n_{\omega'} \rangle (1 - \exp[-2\kappa t])} \right]. \quad (10.8)$$

В любой момент времени t центр этой гауссовой функции находится в точке

$$\gamma = \alpha \exp[-(\kappa + i\omega')t] \quad (10.9)$$

кривой средних значений γ . При увеличении t этот центр описывает спираль, сжимающуюся к началу координат комплексной γ -плоскости, что вызвано, конечно, затуханием.

В начальный момент $t = 0$ ширина гауссова распределения (10.8) равна нулю, и, как уже отмечалось, мы имеем

$$P(\alpha, 0 | \gamma, 0) = \delta^{(2)}(\gamma - \alpha). \quad (10.10)$$

Во все более поздние моменты его ширина уже не равна нулю и монотонно увеличивается до предельного значения $\langle n_{\omega'} \rangle$, к которому она близка при временах, много больших $(2\kappa)^{-1}$. Эта постоянно увеличивающаяся неопределенность состояния A -осциллятора вызвана кумулятивным эффектом флуктуирующих сил, действующих на него со стороны осцилляторов термостата. Для времен $t \gg (2\kappa)^{-1}$ A -осциллятор полностью «забывает» о своем начальном состоянии, и его весовая функция принимает стационарную форму

$$P(\alpha, 0 | \gamma, \infty) = \frac{1}{\pi \langle n_{\omega'} \rangle} \exp \left[-\frac{|\gamma|^2}{\langle n_{\omega'} \rangle} \right], \quad (10.11)$$

что аналогично весовой функции для осцилляторов термостата с эффективной частотой $\omega' = \omega + \delta\omega$. Другими словами, конечное состояние A -осциллятора есть просто равновесное состояние, описываемое теоремой о равномерном распределении энергии.

§ 11. УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА И БЛОХА

Кроме тенденции к вращению с угловой скоростью ω' комплексная амплитуда γ A -осциллятора еще имеет тенденцию двигаться более или менее случайным образом к началу координат.

Случайное движение величины γ можно трактовать как двумерный процесс диффузии в комплексной плоскости. Действительно, в соответствии с (9.15) и (10.10) функция $P(\alpha, 0|\gamma, t)$ имеет по крайней мере два из свойств функции Грина для процесса диффузии. Возникает вопрос: имеется ли какое-либо дифференциальное уравнение, описывающее этот диффузионный процесс?

Как эмпирический факт известно, что решение (10.8) для функции $P(\alpha, 0|\gamma, t)$ подчиняется простому дифференциальному уравнению, которое в общем несложно вывести во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω' системе координат. Если ввести

$$\gamma' = \gamma \exp [i\omega' t], \quad (11.1)$$

то легко проверить, что $P(\alpha, 0|\gamma, t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial (2\kappa t)} P = \langle n_{\omega'} \rangle \frac{\partial^2}{\partial \gamma' \partial \gamma'^*} P + \frac{1}{2} \left(\gamma' \frac{\partial}{\partial \gamma'} + \gamma'^* \frac{\partial}{\partial \gamma'^*} \right) P + P. \quad (11.2)$$

Это уравнение принимает более знакомую форму, если использовать векторные обозначения для точек в γ -плоскости, т. е. если положение точки $\gamma' = \gamma'_1 + i\gamma'_2$ описывать вектором $\mathbf{V}' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$. Тогда оно примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \frac{1}{2} \kappa \langle n_{\omega'} \rangle \nabla_{\mathbf{V}'}^2 P + \kappa \nabla_{\mathbf{V}'} \cdot (\mathbf{V}' P), \quad (11.3)$$

что совпадает с одним из вариантов уравнения тепловой диффузии, известного как уравнение Фоккера — Планка. Решение (10.8) для P , если его переписать во вращающейся системе координат, действительно принимает вид функции Грина этого уравнения.

Если положить $\langle n_{\omega'} \rangle = 0$, что отвечает термостату при температуре $T = 0$, то будет видно, что линейный по $\nabla_{\mathbf{V}'}$ член в уравнении (11.3) описывает затухание движения вектора \mathbf{V}' . В этом случае решение (10.8) для функции P остается все время дельта-функцией; А-осциллятор остается в чистом когерентном состоянии с экспоненциально уменьшающейся амплитудой. Если же $\langle n_{\omega'} \rangle \neq 0$, то квадратичный по $\nabla_{\mathbf{V}'}$ член описывает, очевидно, диффузное движение вектора \mathbf{V}' , обусловленное случайным возбуждением термостата.

Показав, что квазивероятность P подчиняется уравнению Фоккера — Планка, мы установили связь с обширной литературой по классическому затухающему осциллятору [18]. Однако при квантовомеханическом изучении статистики затухающего осциллятора до самого недавнего времени не использовалась

квазивероятностная формулировка. Вместо этого по большей части непосредственно строили дифференциальные уравнения для самого оператора плотности.

Нам, конечно, известно одно дифференциальное уравнение первого порядка по $\partial/\partial t$ — уравнение Луивилля, которому оператор плотности должен удовлетворять точно. Но удовлетворяющий ему оператор плотности описывает всю связанную систему осцилляторов; уравнение же Луивилля дает просто другой способ нахождения гейзенберговских уравнений движения (8.2). Вместо уравнения Луивилля, описывающего всю связанную систему осцилляторов, мы хотим иметь некоторое замкнутое уравнение для приведенного оператора плотности, описывающего интересующую нас часть полной системы, а именно A -осциллятор. Аналогичная задача рассматривалась Блохом много лет назад в связи с экспериментами по магнитному резонансу на ядрах, помещенных в плотное вещество. По Блоху, каждый ядерный спин взаимодействует с определенным рода термостатом, а для построения дифференциального уравнения для приведенного оператора плотности, описывающего ориентацию спинов, используется теория возмущений [19]. Для построения дифференциального уравнения для приведенного оператора плотности затухающего осциллятора можно идти совершенно аналогичным путем. Но вместо того, чтобы применять такой подход, мы, используя уже сделанный нами анализ, попытаемся глубже понять это уравнение.

Найдем явный вид приведенного оператора плотности как функции операторов a и a^\dagger . Используя простую теорему, упоминавшуюся Луиселлом и Лэксом [20], это можно сделать на основе уже имеющейся у нас информации. Предположим, что приведенный оператор плотности ρ_A обладает хорошо определенным разложением в степенной ряд по антинормально упорядоченным произведениям $a^m a^{\dagger n}$ для всех $m, n = 0, 1, \dots$, т. е.

$$\rho_A = \sum_{n, m} d_{nm} a^m a^{\dagger n}, \quad (11.4)$$

$$\rho_A \equiv \rho_{\text{ант}}(a, a^\dagger), \quad (11.5)$$

где $\rho_{\text{ант}}$ — некоторая функция от a и a^\dagger , обладающая разложением в степенной ряд (11.4).

Используя разложение единичного оператора (5.14), можно теперь написать

$$a^m a^{\dagger n} = a^m \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha a^{\dagger n} = \frac{1}{\pi} \int \alpha^m \alpha^{*n} |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (11.6)$$

Следовательно, если оператор ρ_A имеет разложение (11.4), то мы должны иметь

$$\rho_A = \frac{1}{\pi} \int \rho_{\text{ант}}(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (11.7)$$

Другими словами, функция $\pi^{-1}\rho_{\text{ант}}(\alpha, \alpha^*)$ есть весовая функция P -представления [20]:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} \rho_{\text{ант}}(\alpha, \alpha^*). \quad (11.8)$$

Если известна антинормально упорядоченная форма оператора ρ_A , то можно сразу построить для него P -представление, и, наоборот, если известно P -представление (как, например, в случае затухающего осциллятора), то можно построить антинормально упорядоченную форму оператора ρ_A . Поскольку для $t > 0$ функция P [см. (10.8)] гауссова, то очевидно, что $\pi^{-1}\rho_{\text{ант}}(\alpha, \alpha^*)$ обладает сходящимся степенным разложением в ряд. (Не лишне заметить, что использование антинормально упорядоченного выражения для ρ_A не превосходит по общности того подхода, который мы использовали в § 6 при определении P -представления. В случаях когда P -функция обладает сильной сингулярностью, оператор ρ_A не имеет хорошо определенного антинормально упорядоченного разложения.)

Чтобы использовать весовую функцию (10.8), перепишем ее в виде

$$P(\alpha, 0 | \gamma, t) = \frac{1}{\pi \bar{n}(t)} \exp \left[-\frac{1}{\bar{n}(t)} |\gamma - \bar{\alpha}(t)|^2 \right], \quad (11.9)$$

где

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha \exp[-(\kappa + i\omega')t], \quad (11.10)$$

$$\bar{n}(t) = \langle n_{\omega} \rangle (1 - \exp[-2\kappa t]). \quad (11.11)$$

Тогда в соответствии с (11.8) и (11.5) приведенный оператор плотности ρ_A будет даваться выражением

$$\rho_A(t) = \frac{1}{\pi \bar{n}(t)} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\bar{n}(t)} \{ \alpha - \bar{\alpha}(t) \} \{ \alpha^\dagger - \bar{\alpha}^*(t) \} \right] \right\}_{\text{ант}}, \quad (11.12)$$

где скобки $\{ \}_{\text{ант}}$ показывают, что заключенная в них функция должна определяться разложением в степенной ряд, взятым в антинормально упорядоченной форме.

Нетрудно выразить антинормально упорядоченную форму ρ_A через более знакомые операторные выражения, но для нас сейчас это совсем не нужно. То, что нам нужно, — это найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет оператор плотности $\rho_A(t)$, причем удобно было бы иметь его таким, чтобы

был явно виден порядок аргументов оператора, поскольку тогда можно непосредственно вычислить производные оператора $\rho_A(t)$. Видно, например, что производные от $\rho_A(t)$ по параметрам $\bar{\alpha}^*$, $\bar{\alpha}$ и \bar{n} следует писать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}^*} \rho_A = - \frac{1}{\bar{n}(t)} \{a - \bar{\alpha}(t)\} \rho_A, \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \rho_A = - \frac{1}{\bar{n}(t)} \rho_A \{a^\dagger - \bar{\alpha}^*(t)\} \quad (11.14)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} \rho_A = - \frac{1}{\bar{n}(t)} \rho_A + \frac{1}{[\bar{n}(t)]^2} [a - \bar{\alpha}(t)] \rho_A [a^\dagger - \bar{\alpha}^*(t)]. \quad (11.15)$$

Выполняя таким способом дифференцирование, легко показать, что оператор $\rho_A(t)$, даваемый формулой (11.12), подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(2\pi t)} \rho_A(t) = & \frac{1}{2} \langle n_{\omega'} \rangle \{ [a^\dagger, \rho_A a] + [a^\dagger \rho_A, a] \} + \\ & + \frac{1}{2} (1 + \langle n_{\omega'} \rangle) \{ [a \rho_A, a^\dagger] + [a, \rho_A a^\dagger] \}, \quad (11.16) \end{aligned}$$

которое есть в точности уравнение Блоха для затухающего осциллятора [21]. В недавней работе Бонифачо и Хааке [22] пошли несколько более прямым путем, показав эквивалентность этого уравнения уравнению Фоккера — Планка для функции P . Мы же вместо этого показали, используя приближение Вайскопфа — Вигнера, что оба уравнения эквивалентны и, следовательно, являются гораздо более точными, чем предположения теории возмущений, из которых их получили.

Структура уравнения Блоха (11.16), быть может, не слишком знакома читателю, но соответствующие уравнения для диагональных матричных элементов более знакомы. Если вычислить ожидаемые значения от левой и правой частей операторного уравнения (11.6) в m -квантовом состоянии A -осциллятора, то получится следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(2\pi t)} \langle m | \rho_A | m \rangle = & (1 + \langle n_{\omega'} \rangle) (1 + m) \langle m + 1 | \rho_A | m + 1 \rangle + \\ & + \langle n_{\omega'} \rangle m \langle m - 1 | \rho_A | m - 1 \rangle - \\ & - \{ \langle n_{\omega'} \rangle (1 + m) + (1 + \langle n_{\omega'} \rangle) m \} \langle m | \rho_A | m \rangle; \quad (11.17) \end{aligned}$$

его называют по-разному: уравнением Паули, скоростным уравнением или основным уравнением для заселенностей $\langle m | \rho_A | m \rangle$. Это в точности то уравнение, которое можно было бы построить, используя хорошо известные для осцилляторной системы вероятности перехода (вычисленные в наименьшем порядке теории возмущений), для того, чтобы описать, как меняются со

временем вероятности заполнения уровней. Итак, мы показали, что скоростное уравнение (11.17), хотя оно и описывает только диагональную часть оператора плотности ρ_A , имеет тем не менее ту же точность, что и приближение Вайскопфа — Вигнера.

§ 12. ТЕОРИЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ФОТОНОВ. СЧЕТЧИК ФОТОНОВ КАК ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Вернемся теперь к упоминавшейся последний раз в § 7 проблеме предсказания отклика счетчика фотонов. Может показаться, что эта проблема совсем не связана с тем, что делалось в § 8—11. Однако мы опишем новый способ подхода к ней, в значительной мере основанный на нашем обсуждении затухающего гармонического осциллятора.

Чтобы поставить задачу о счете фотонов достаточно конкретно, предположим, что снабженный выключателем счетчик фотонов помещен в пучок света. Счетчик включается в нулевой момент времени и снова выключается в момент t . Поставим вопрос: каково распределение вероятностей случайных чисел фотонов, зарегистрированных за время, которое прибор включен?

Предположим, что каждый поглощенный чувствительным элементом счетчика фотон возбуждает в нем некоторый атом (в конечном счете именно эти возбуждения атомов детектируются прибором). Для такого счетчика в общем нетрудно построить эрмитов оператор $C(t)$ с целыми собственными значениями, описывающий возможные числа фотонов, регистрируемых за время t . Чтобы найти вероятность того, что будет зарегистрировано какое-то фиксированное число фотонов, удобно определить функцию Q , зависимость которой от параметра λ дает эти вероятности. Определим эту производящую функцию так:

$$Q(\lambda, t) = \langle (1 - \lambda)^{C(t)} \rangle = \text{Sp} \{ \rho (1 - \lambda)^{C(t)} \}. \quad (12.1)$$

где ρ — оператор плотности для системы атомов в счетчике. Если нам известны вероятности $p(n, t)$ того, что за время t будет зарегистрировано n фотонов, то ясно, что

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n p(n, t). \quad (12.2)$$

Если, с другой стороны, найти производящую функцию Q каким-то независимым способом, то вероятности $p(n, t)$ будут ее производными в точке $\lambda = 1$:

$$p(n, t) = \frac{1}{n!} \left(-\frac{d}{d\lambda} \right)^n Q(\lambda, t) \Big|_{\lambda=1}. \quad (12.3)$$

Факториальные моменты распределения $p(n, t)$ можно найти, дифференцируя ту же производящую функцию в точке $\lambda = 0$, так как

$$\langle C(C-1) \dots (C-n+1) \rangle = \left(-\frac{d}{d\lambda} \right)^n Q(\lambda, t) \Big|_{\lambda=0}. \quad (12.4)$$

И наоборот, по известным моментам можно найти функцию Q в виде степенного ряда около точки $\lambda = 0$. Аналитически продолжив функцию до точки $\lambda = 1$, можно вычислить затем вероятности $p(n, t)$.

Именно этот метод использовался нами для вычисления распределения $p(n, t)$ в лекциях [2] летней школы в Лезуш (Франция) в 1964 г. Ключевой момент данного подхода есть, конечно, вычисление факториальных моментов. Мы показали, что m -й факториальный момент пропорционален взятой по всем комбинациям из m атомов детектора сумме вероятностей того, что все m атомов в каждой комбинации поглотят кванты из светового пучка за интервал времени от 0 до t . В § 3 уже показывалось, как находятся такие вероятности в m -м порядке теории возмущений и как их записать в виде интегралов от корреляционной функции поля m -го порядка. Когда были вычислены таким образом факториальные моменты и затем найдено распределение $p(n, t)$, то стало ясно, что это распределение имеет в совершенно общем случае вид сложного распределения Пуассона, т. е. в некотором роде среднего взвешенного для набора распределений Пуассона. Выбор весов для распределений Пуассона из этого набора определялся видом P -представления оператора плотности для падающего пучка света.

Практически рассматриваемый математический подход довольно прост, а даваемые им результаты проверялись экспериментально несколькими способами (некоторые из этих проверок обсуждаются в лекциях Ареки, Хауза и Пайка). Тем не менее метод встречает возражения. Использование в нем низшего порядка теории возмущений для вычисления факториальных моментов неизбежно ставит вопрос, насколько точен результат. Попытаемся поэтому найти другой подход к задаче, в котором совсем бы не использовалась теория возмущений.

Чтобы немного упростить эту задачу, предположим, что атомы, из которых сделан фотодетектор, имеют только два состояния — основное состояние $|g\rangle$ и возбужденное состояние $|e\rangle$. Предполагается, что фотон детектируется всякий раз, когда в результате фотоабсорбции атом переходит из основного состояния в возбужденное. Удобно определить пару повышающих

и понижающих операторов τ_{\pm} со свойствами

$$\begin{cases} \tau_+ |g\rangle = |e\rangle, & \tau_+ |e\rangle = 0, \\ \tau_- |g\rangle = 0, & \tau_- |e\rangle = |g\rangle, \end{cases} \quad (12.5)$$

$$\tau_+ \tau_- + \tau_- \tau_+ = 1. \quad (12.6)$$

Далее по аналогии с операторами, используемыми в ядерной физике для описания изотопического спина $1/2$, можно определить оператор

$$\tau_3 = [\tau_+, \tau_-], \quad (12.7)$$

имеющий свойства

$$\tau_3 |e\rangle = |e\rangle, \quad \tau_3 |g\rangle = -|g\rangle. \quad (12.8)$$

Предположим теперь, что чувствительный элемент фотодетектора содержит N атомов, обозначаемых индексом $j = 1, \dots, N$. Если определить набор операторов $\tau_{\pm j}$, τ_{3j} для каждого атома, то можно написать гамильтониан не взаимодействующей с полем системы атомов в виде

$$H_0 = \frac{1}{2} N \hbar \omega + \frac{1}{2} \hbar \omega \sum_j \tau_{3j}, \quad (12.9)$$

$$H_0 = \hbar \omega \sum_j \tau_{+j} \tau_{-j}, \quad (12.10)$$

где $\hbar \omega$ — разность энергий возбужденного и основного состояний атома.

Примем для упрощения пространственных свойств нашей модели, что атомы расположены в эквивалентных точках поля. (Это условие выполняется, когда, например, пучок плоских волн падает нормально к поверхности плоского фотокатода.) Примем далее, что поле падающего света имеет фиксированную поляризацию, так что можно считать детектор взаимодействующим только с одной компонентой поля. Если затем обозначить матричный элемент электрического дипольного перехода между двумя состояниями атома символом M , то можно написать гамильтониан взаимодействия, описывающий связь атомов с полем, в виде

$$H' = -eM \left\{ \left(\sum_j \tau_{+j} \right) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \left(\sum_j \tau_{-j} \right) E^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right\}, \quad (12.11)$$

где $E^{(\pm)}$ — соответствующие компоненты вектора положительно- и отрицательно-частотных частей поля. Первый член гамильтониана взаимодействия описывает возбуждение атома и одновременное исчезновение фотона, т. е. процесс фотоабсорбции. Вто-

рой член описывает обратный процесс — фотоэмиссию. [Отметим, что при конструировании гамильтониана (12.10) мы воспользовались так называемым приближением «вращающейся волны», т. е. опустили члены взаимодействия, содержащие произведения вида $\tau_{-j}E^{(+)}$ и $\tau_{+j}E^{(-)}$. Эти члены очень быстро осциллируют и дают пренебрежимо малый вклад в интересующие нас реальные переходы.]

Гамильтониан взаимодействия (12.11) зависит от переменных, связанных с атомами, только через сумму $\sum \tau_{+j}$ и сопряженную ей сумму $\sum \tau_{-j}$. Покажем, что эти два оператора играют фундаментальную роль в теории. В соответствии с (12.6) и (12.7) их коммутационные соотношения имеют вид

$$\left[\sum_j \tau_{-j} \sum_j \tau_{+j} \right] = - \sum_j \tau_{3j}, \quad (12.12)$$

$$\left[\sum_j \tau_{-j} \sum_j \tau_{+j} \right] = N - 2 \sum_j \tau_{+j} \tau_{-j}. \quad (12.13)$$

При применении любого произведения операторов $\sum \tau_{-j}$ и $\sum \tau_{+j}$ к вектору начального состояния (все атомы в основном состоянии) возникает состояние, в котором возбуждения распределены по атомам симметрично. Конечно, существует огромное число способов возбудить атомы несимметрично, но взаимодействие вида (12.11) никогда не приводит к таким состояниям. Мы убедимся скоро, что в очень хорошем приближении несимметричными возбужденными состояниями системы можно просто пренебречь.

Симметрично возбужденные состояния набора одинаковых двухуровневых атомов с точки зрения физика имеют мало сходства с возбужденными состояниями гармонического осциллятора, но между ними имеется большое математическое сходство. Главное в том, что совокупность рассматриваемых нами атомов имеет набор эквидистантных уровней энергии, в точности как гармонический осциллятор. Конечно, спектр уровней атомов ограничен сверху значением $N\hbar\omega$, в то время как спектр осциллятора с собственной частотой ω не ограничен, но для столь больших значений N , которые встречаются на практике, эта разница не очень важна. Если наш модельный счетчик фотонов сколько-нибудь похож на счетчики, используемые в лаборатории, то в нем возбуждается лишь очень малая часть атомов. Система атомов никогда не возбуждается до такой степени, чтобы заселялись уровни, хотя бы отдаленно приближающиеся к вершине спектра энергий, поэтому без заметной ошибки спектр можно формально расширять до бесконечности.

Итак, мы предполагаем, что система атомов может с очень маленькой ошибкой рассматриваться как некий гармонический осциллятор. Если это так, то можно было бы рассматривать $\Sigma\tau_{+j}$ как оператор рождения возбуждения осциллятора, а $\Sigma\tau_{-j}$ как оператор уничтожения. Но их коммутатор, как видно из (12.12) и (12.13), не есть c -число, как должно было бы быть для операторов рождения и уничтожения. Именно в этом месте можно воспользоваться тем, что возбуждается лишь малая часть атомов. Собственные значения оператора $\sum_I \tau_{+I}\tau_{-I}$ дают числа возбужденных атомов, имеющих в данном состоянии. До тех пор пока этим числом можно пренебречь по сравнению с N , допустимо опустить член $2\Sigma\tau_{+j}\tau_{-j}$ в правой части коммутатора (12.13). Тогда операторы $N^{-1/2} \sum_I \tau_{-I}$ и $N^{-1/2} \sum_I \tau_{+I}$ подчиняются приближенному коммутационному соотношению

$$\left[N^{-1/2} \sum_I \tau_{-I}, N^{-1/2} \sum_I \tau_{+I} \right] \approx 1, \quad (12.14)$$

действительно являющемуся коммутационным соотношением для операторов рождения и уничтожения.

Чтобы завершить формулировку нашей задачи с помощью операторов рождения и уничтожения, необходимо показать, что гамильтониан H_0 невзаимодействующих атомов можно выразить через эти операторы. Для этого удобно ввести операторы рождения и уничтожения, отвечающие как несимметричным, так и симметричным возбуждениям системы атомов. Определим набор операторов $a_1 \dots a_N$ в виде линейной комбинации операторов $\tau_{-1} \dots \tau_{-N}$:

$$a_i = \sum_I U_{ij} \tau_{-I}, \quad (12.15)$$

где U_{ij} — элементы унитарной матрицы $N \times N$. Сопряженные операторы будут даваться формулой

$$a_i^\dagger = \sum_I U_{ij}^* \tau_{+I}. \quad (12.16)$$

Выберем матрицу U так, чтобы $U_{1j} = N^{-1/2}$ для $j = 1, \dots, N$; тогда

$$a_1 = N^{-1/2} \sum_I \tau_{-I}, \quad (12.17)$$

$$a_1^\dagger = N^{-1/2} \sum_I \tau_{+I}, \quad (12.18)$$

что совпадает с операторами, входящими в коммутационное соотношение (12.14) и в гамильтониан взаимодействия (12.11). Матричный элемент U_{ij} для $i \neq 1$ остается неопределенным.

Коммутационное соотношение для операторов a_i и a_j^\dagger имеет вид

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \sum_{m,n} U_{im} U_{jn}^* [\tau_{-m}, \tau_{+n}] = - \sum_{m,n} U_{im} U_{nj}^* \delta_{mn} \tau_{3m} = \\ &= - \sum_m U_{im} U_{mj}^* \tau_{3m}. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Теперь если все или почти все атомы находятся в основном состоянии, то с хорошей степенью точности имеем для каждого из них $\tau_3 = -1$, и коммутационные соотношения (12.19) приводят к приближенному виду

$$[a_i, a_j^\dagger] \approx \sum_m U_{im} U_{mj}^* \approx \delta_{ij}, \quad (12.20)$$

что совпадает с коммутационными соотношениями набора линейно независимых операторов рождения и уничтожения. Соотношение (12.14), обсуждавшееся ранее, отвечает случаю $i = j = 1$.

Вследствие принятой нами унитарности матрицы U операторы a_i и a_i^\dagger подчиняются тождеству

$$\sum_i a_i^\dagger a_i = \sum_j \tau_{+j} \tau_{-j}. \quad (12.21)$$

Следовательно, гамильтониан (12.10) для невзаимодействующих атомов можно записать в виде

$$H_0 = \hbar\omega \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i; \quad (12.22)$$

с учетом приближенных коммутационных соотношений (12.20), (12.22) можно рассматривать как гамильтониан набора независимых гармонических осцилляторов. Из вида гамильтониана взаимодействия (12.11) ясно, что только один из этих осцилляторов, помеченный индексом 1, действительно взаимодействует с полем. Осцилляторы с индексами $i = 2 \dots N$ играют в нашей задаче только пассивную роль: сумма $\sum_{i=2}^N a_i^\dagger a_i$ является интегралом движения; она равна нулю в начальном состоянии, а значит, и во всех последующих состояниях. Другими словами, с той степенью точности, с которой выполняются приближенные коммутационные соотношения, в H_0 можно просто опустить

члены $a_i^\dagger a_i$ для $i = 2, \dots, N$. В соответствии с (12.11), (12.17) и (12.18) эффективный гамильтониан для атомов и поля можно тогда записать в виде

$$H = \hbar\omega a_1^\dagger a_1 - eMN^{1/2} \{a_1^\dagger E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + a_1 E^{(-)}(\mathbf{r}, t)\} + H_f, \quad (12.23)$$

где H_f — гамильтониан свободного поля.

Поскольку символы a и a^\dagger уже использовались для описания возбуждений атомов, обозначим операторы рождения и уничтожения квантов k -й моды электромагнитного поля через b^k и b_k^\dagger . Если разложить электромагнитное поле по описывающим моды функциям u_k :

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar\omega_k}{2} \right)^{1/2} b_k(t) u_k(\mathbf{r}) \quad (12.24)$$

и ввести параметры λ_k , определяемые формулой

$$\lambda_k = -ieM \frac{\omega_k N}{2\hbar} u_k(\mathbf{r}), \quad (12.25)$$

то эффективный гамильтониан (12.23) запишется в виде

$$H = \hbar\omega a_1^\dagger a_1 + \hbar \sum \{ \lambda_k a_1^\dagger b_k + \lambda_k^* b_k^\dagger a \} + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k. \quad (12.26)$$

Это — в точности гамильтониан, рассматривавшийся в качестве отправной точки при обсуждении затухающего гармонического осциллятора [см. (8.1)]. Фотодетектор играет роль A -осциллятора, а электромагнитное поле — роль термостата.

§ 13. ОПЕРАТОР ПЛОТНОСТИ ДЛЯ СЧЕТЧИКА ФОТОНОВ

Поскольку чувствительный элемент нашего фотодетектора приближенно имеет математические свойства гармонического осциллятора, для его описания можно использовать когерентные состояния. Фактически можно использовать большую часть расчетов, сделанных нами в § 8—10 для системы связанных осцилляторов. Необходимо только учесть, что возбуждение электромагнитного поля необязательно носит тепловой характер. Его начальный оператор плотности вовсе не описывает хаотического состояния, что принималось нами для термостата.

При $t = 0$ (в начале облучения фотодетектора световым пучком) все его атомы находятся в основном состоянии. Таким образом, его начальное состояние является основным состоянием

$|0\rangle$ осциллятора, определяемым условием $a_1|0\rangle=0$. Другими словами, начальное состояние атомов можно рассматривать как когерентное состояние $|\alpha\rangle$ с $\alpha=0$. Следовательно, для более поздних моментов времени решение уравнения движения (8.12) для амплитуды $\alpha(t)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \sum_k \beta_k v_k(t). \quad (13.1)$$

Предположим, что начальный оператор плотности электромагнитного поля задается P -представлением

$$\rho_B = \int P(\{\beta_k\}) |\{\beta_k\}\rangle \langle\{\beta_k\}| \prod_k d^2\beta_k. \quad (13.2)$$

Фактически функция $P(\{\beta_k\})$ просто заменяет произведение гауссовых функций в наших прежних расчетах. Теперь можно построить приведенный оператор плотности для системы атомов в момент времени t точно так же, как он строился для A -осциллятора (9.7). Этот оператор дается формулой

$$\rho_A(t) = \int |\alpha(t)\rangle \langle\alpha(t)| P(\{\beta_k\}) \prod_k d^2\beta_k, \quad (13.3)$$

где амплитуда $\alpha(t)$ дается формулой (13.1).

Если обозначить n -е квантовое состояние A -осциллятора символом $|n\rangle$, то вероятность возбуждения к моменту времени t n атомов будет равна

$$\begin{aligned} \langle n | \rho_A(t) | n \rangle &= \int |\langle n | \alpha(t) \rangle|^2 P(\{\beta_k\}) \prod_k d^2\beta_k = \\ &= \int \frac{|\alpha(t)|^{2n}}{n!} \exp[-|\alpha(t)|^2] P(\{\beta_k\}) \prod_k d^2\beta_k. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Если мы имеем дело с полностью когерентным полем, когда функция $P(\{\beta_k\})$ есть, например, просто произведение дельта-функций, то эти вероятности подчиняются, очевидно, распределению Пуассона. Для более общих типов полей они описываются суперпозицией распределений Пуассона, которая фактически полностью аналогична такой же суперпозиции распределений, найденной для числа фотоотсчетов с помощью теории возмущений [2].

Чтобы сделать это сравнение более компактным, построим производящую функцию $Q(\lambda, t)$, отвечающую распределению

(13.4). В соответствии с (12.2) она дается формулой

$$Q(\lambda, t) = \sum_n (1 - \lambda)^n \langle n | \rho_A(t) | n \rangle = \int P(\{\beta_k\}) \exp[-\lambda \Omega(t, \{\beta_k\})] \prod_k d^2\beta_k, \quad (13.5)$$

где

$$\Omega(t, \{\beta_k\}) = |\alpha(t)|^2 = \left| \sum_k \beta_k v_k(t) \right|^2 \quad (13.6)$$

является положительно определенной квадратичной формой параметров β_k . Функции $v_k(t)$ нам уже известны. В приближении Вайскопфа — Вигнера они даются формулой (10.2).

Физический смысл функции Ω станет более понятным, если ввести поле, отвечающее собственному значению

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t, \{\beta_k\}) = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2} \right)^{1/2} \beta_k u_k(\mathbf{r}) \exp[-i\omega_k t], \quad (13.7)$$

поскольку тогда с учетом (10.2) и (12.15) можно написать

$$\alpha(t) = \sum \beta_k v_k(t) = \frac{ieMN^{1/2}}{\hbar} \int_0^t \exp[-(\kappa + i\omega')(t-t')] \mathcal{E}(\mathbf{r}, t', \{\beta_k\}) dt', \quad (13.8)$$

где $\omega' = \omega + \delta\omega$, а сдвиг частот $\delta\omega$ и постоянная затухания κ определяются соотношением (10.3). Следовательно, функция Ω дается выражением

$$\Omega(t, \{\beta_k\}) = N \left(\frac{eM}{\hbar} \right)^2 \left| \int_0^t \exp[-(\kappa + i\omega')(t-t')] \mathcal{E}(\mathbf{r}, t', \{\beta_k\}) dt' \right|^2. \quad (13.9)$$

Если бы поле было полностью когерентным полем, характеризующимся фиксированным набором амплитуд $\{\beta_k\}$, то функция Ω давала бы среднее число возбужденных атомов в детекторе в момент времени t . Чтобы найти среднее число возбужденных атомов для неполностью когерентных полей, функцию Ω нужно усреднить по распределению $P(\{\beta_k\})$.

Отметим два свойства интеграла в (13.8). Во-первых, из наличия в подынтегральном выражении множителя $\exp[-i\omega'(t-t')]$ явствует, что счетчик имеет тенденцию реагировать на компоненты поля с частотой $\omega' = \omega + \delta\omega$, а не на компоненты с частотой ω . Это происходит из-за изменения на $\delta\omega$ вследствие взаимодействия каждого атома с полем излучения резонансной частоты, т. е. радиационного сдвига линии. Во-вторых, наличие

в подынтегральном выражении множителя затухания $\exp[-\kappa(t-t')]$ означает, что наш счетчик фотонов чувствителен только к значениям поля \mathcal{E} , существующим в интервале времени $\Delta t \sim \kappa^{-1}$ непосредственно перед моментом t . Это связано с временем жизни $(2\kappa)^{-1}$ атомов в состояниях, возбужденных фотонами. При временах $t \gg \kappa^{-1}$ счетчик мало что помнит о значениях поля, существовавшего в окрестности нулевого момента времени, поскольку большая часть бывших возбужденными атомов к этому времени, излучив фотоны, возвращается в основное состояние. (Вновь испущенные фотоны, резонансно рассеиваясь, уходят из падающего пучка.)

С другой стороны, если с помощью упоминавшегося в § 12 подхода, основанного на теории возмущений, рассчитать производящую функцию $Q(\lambda, t)$ для детектора, состоящего из двухуровневых атомов, то получится в точности тот же результат, что и (13.5), но с Ω , даваемой формулой

$$\Omega(t, \{\beta_k\}) = N \left(\frac{eM}{\hbar} \right)^2 \left| \int_0^t \exp[-i\omega(t-t')] \mathcal{E}(\mathbf{r}, t', \{\beta_k\}) dt' \right|^2, \quad (13.10)$$

а не формулой (13.9). Поскольку расчет по теории возмущений предполагает, что возбужденный однажды атом остается возбужденным, то его, строго говоря, следует сравнивать только с нашим более точным расчетом в области слабого затухания, $\kappa \ll t^{-1}$. В этой области оба расчета отличаются только учетом радиационного сдвига линии в (13.9). Обычно эффект сдвига линии очень мал. В любом случае при применении формулы (13.10) его можно включить, беря ω просто равной наблюдаемой частоте.

Несостоятельность основанного на теории возмущений подхода сильнее проявляется в том, что для стационарного светового пучка среднее значение Ω , даваемое формулой (13.10), неограниченно растет со временем. Число же фотонов, которое может зарегистрировать такой модельный счетчик, естественно, ограничено, поскольку он содержит конечное число атомов, и ни один атом не может в рамках подхода, основанного на теории возмущений, возбуждаться дважды. Верно также и то, что теория возмущений не объясняет того, как процесс детектирования ослабляет поле. В этой связи подход к проблеме счета фотонов, похожий на представленный здесь, был независимо развит Моллоу [23].

Во всех выполненных до настоящего времени экспериментах по счету фотонов вероятность того, что любой фиксированный

атом детектора поглотит фотон, остается очень маленькой. Далее, вероятность того, что такой фотон из поля будет зарегистрирован, также мала. Следовательно, пороки основанного на теории возмущений подхода количественно не имели до сих пор никакого значения. Тем не менее интересно заметить, что эти пороки можно практически полностью ликвидировать, учитывая процессы затухания и сдвиг линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **130**, 2529 (1963).
2. *Glauber R. J.*, *Quantum Optics and Electronics* (Les Houches, 1964), ed. C. De Witt, New York, 1965, p. 63. [См. перевод в книге «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», Лекции в летней школе теоретической физики Гренобльского университета (Лезуш, Франция, 1964), изд-во «Мир», 1966.]
3. *Born M.*, *Wolf E.*, *Principles of Optics*, London, 1959, Ch. 10. (См. перевод: *М. Борн, Е. Вольф*, Принципы оптики, М., 1969.)
4. *Titulaer U. M.*, *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **140**, B676 (1965).
5. *Titulaer U. M.*, *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **145**, 1041 (1966).
6. *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **131**, 2766 (1963).
7. *Glauber R. J.*, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, II, ed. E. G. D. Cohen, Amsterdam, 1968, p. 140.
8. *Cahill K. E.*, *Phys. Rev.*, **138**, B1566 (1965).
9. *Bargmann V.*, *Commun. Pure Appl. Math.*, **14**, 187 (1961); *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **48**, 199 (1962).
10. *Glauber R. J.*, *Phys. Rev., Lett.*, **10**, 84 (1963).
11. *Sudarshan E. C. G.*, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277 (1963).
Holliday D., *Sage M.*, *Phys. Rev.*, **138**, B 485 (1965).
Klauder J., *McKenna J.*, *Currie D.*, *Journ. Math. Phys.*, **6**, 734 (1965).
Mehta C. L., *Sudarshan E. C. G.*, *Phys., Rev.*, **138**, B 753 (1965).
Klauder J., *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 534 (1966).
Bonifacio R., *Narducci L.*, *Montaldi E.*, *Nuovo Cimento*, **47A**, 890 (1967).
12. *Glauber R. J.*, *Physics of Quantum Electronics*, ed. P. L. Kelly, New York, 1966, p. 788.
13. *Mazur P.*, *Montroll E.*, *Journ. Math., Phys.*, **1**, 70 (1960).
Kogure Y., *Journ. Phys. Soc. Japan*, **16**, 14 (1961); **17**, 36 (1962).
Ford G. W., *Kac M.*, *Mazur P.*, *Journ. Math. Phys.*, **6**, 504 (1965).
Ullersma P., *Physica*, **32**, 27, 56 (1966).
Lopez A., *Zs. Phys.*, **192**, 63 (1966).
14. *Gordon J. P.*, *Walker L. R.*, *Louisell W. H.*, *Phys. Rev.*, **130**, 806 (1963).
15. *Glauber R. J.*, *Phys. Lett.*, **21**, 650 (1966).
16. *Heitler W.*, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford, 1954, p. 181. (См. перевод: *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
17. *Weisskopf V.*, *Wigner E.*, *Zs. Phys.*, **63**, 54 (1930).
18. *Chandrasekhar S.*, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1, 27 (1943).
Wang M. C., *Uhlenbeck G. E.*, *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 323 (1945).
Wax N. (ed.), *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, New York, 1954.
19. *Wangsness R. K.*, *Bloch F.*, *Phys. Rev.*, **89**, 728 (1953).
20. *Lax M.*, *Louisell W. H.*, *Journ. Quantum Electron.*, **QE-3**, 47 (1967).
21. *Weidlich W.*, *Haake F.*, *Zs. Phys.*, **185**, 30 (1965).
22. *Bonifacio R.*, *Haake F.*, *Zs. Phys.*, **200**, 526 (1967).

Переменные фаза—угол в квантовой механике

П. КАРРУЗЕРС*, М. НЬЕТО**

P. Carruthers, M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, 40, № 2, 411 (1968)

Дан обзор работ по квантовомеханическому описанию переменных фаза—угол с акцентом на соответствующем математическом описании этих координат. Выяснены соотношения между рассматриваемыми операторами и векторами состояний в свете соотношения неопределенностей Гейзенберга. Обсужден известный случай переменной φ , азимутального угла и сопряженной переменной — углового момента L_z . При использовании для описания фазовых переменных периодических переменных ($\cos\varphi$ и $\sin\varphi$) обходятся разнообразные ловушки, связанные с проблемой периодичности. Выведены и обсуждены хорошо определенные соотношения неопределенностей. Дан подробный анализ трехмерного гармонического осциллятора, находящегося в когерентном состоянии. Подробно проанализирован случай простого гармонического осциллятора. Показана ошибочность обычного предположения о том, что существует (эрмитов) оператор фазы φ (сопряженный оператору числа возбуждений N). Существуют, однако, операторы косинуса и синуса, C и S , и именно они являются подходящими фазовыми переменными. Для вывода операторов C и S привлекаются скобки Пуассона в переменных действии — угол (а не J , $\cos\varphi$, $\sin\varphi$).

Исследованы спектры и собственные функции этих операторов вместе с возможными переменными «разности фаз». Проанализированы свойства осцилляторных переменных в состояниях различных типов, причем уделено особое внимание соотношениям неопределенностей и переходу к классическому пределу. Подчеркнута польза когерентных состояний как базиса для описания эволюции матрицы плотности. На этом базисе легко получить классическое уравнение Луивилля с квантовомеханическими «поправками». Отмечается возможность физических приложений к сверхтекучим системам.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на 50 лет интенсивного развития, квантовомеханическая теория [1—3] продолжает вознаграждать изучающих ее. В течение последних нескольких лет значительно прояснился вопрос о фазовых переменных квантовых систем. В настоящей статье дан обзор последних работ в этой области. Особое внимание уделено самим определениям фазовых переменных и сопряженных с ними операторов. Интересно, что эту задачу лучше всего рассматривать, исходя из структуры соотношений неопределенностей, открытых впервые Гейзенбергом [4].

* Laboratory of Nuclear Studies and Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, Ithaca, New York.

** Institute for Theoretical Physics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, New York.

Мы не будем явно касаться вопроса о правильной интерпретации формализма квантовой механики, по которому продолжаются дебаты. Во всех практических вопросах мы присоединяемся к ортодоксальной «копенгагенской интерпретации» [5—7]. Отметим только мимоходом, что уже с первых лет существования квантовой механики многие известные физики были не удовлетворены вероятностной картиной Вселенной, которая лежит в основе ортодоксальной точки зрения [3, 8]. В частности, знаменитый спор Бора с Эйнштейном [3, 5, 6] привел к существенному прояснению многих вопросов.

Ортодоксальной интерпретации продолжают бросать вызов. Хотя были предприняты детальные математические исследования с целью лишить законной силы принцип неопределенности, большая часть их основывается на концепции «скрытых переменных» [9—15]¹⁾.

В § 2 изучается общий вопрос о соотношениях неопределенностей с привлечением нового метода, развитого недавно Джакивом [16]. Даны уравнения для определения волновых функций, минимизирующих различные произведения неопределенностей. В § 3 получены «когерентные состояния» гармонического осциллятора поля как состояния с минимумом координатно-импульсного произведения неопределенностей. Эти состояния были открыты Шредингером еще на заре квантовой механики. Изучение угловых переменных начинается в § 4 с обсуждения соотношения между угловым моментом L_z и азимутальным углом φ . Подчеркивается, что существующая в литературе немалая путаница связана с неправильной трактовкой периодичности. Даны хорошо определенные соотношения неопределенностей, включающие L_z и периодические переменные $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Затем показывается, что эти неравенства становятся почти равенствами для трехмерного осциллятора в когерентном состоянии. И наконец, даны точные состояния с минимальным произведением неопределенностей.

В § 5 обсуждается применение числовых и фазовых переменных для описания квантовомеханического гармонического осциллятора. Дирак в своей основополагающей статье [17] по квантованию электромагнитного поля предположил, что существует эрмитов оператор фазы φ , сопряженный оператору числа (его собственные значения — главные квантовые числа квантового гармонического осциллятора или число частиц в бозонной системе). Как показано в важной статье Сусскинда и Глоговера [18],

¹⁾ В работе [15] изложено доказательство фон Неймана.

это предположение ведет к противоречиям. Фазу можно описать, однако, с помощью двух хорошо определенных эрмитовых операторов C и S , соответствующих в классическом пределе $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Подчеркивается, что отсутствие правильного оператора фазы следует из ограниченности спектра собственных значений оператора числа. Выведены и обсуждаются соотношения неопределенностей [19], связывающие хорошо определенные операторы.

В § 6 рассматриваются спектры собственных значений и собственные функции операторов C и S . Спектры собственных значений операторов C и S непрерывны и простираются от -1 до $+1$. Собственные функции (фазовые состояния) являются нормированными на дельта-функцию обобщенными функциями (распределениями); с течением времени они перестают быть собственными состояниями. В § 7 построены операторы, отвечающие разности фаз двух независимых осцилляторов. Там найден интересный результат, что операторы синуса и косинуса, представляющие разность фаз, коммутируют с оператором полного числа возбуждений. Эти операторы имеют точечный спектр. Вычисляются собственные функции и спектр собственных значений.

В § 8 анализируются с акцентом на соотношениях неопределенностей физические свойства когерентных состояний, фазовых состояний, состояний с минимальной неопределенностью и состояний с заданным числом возбуждений. Подчеркивается, что для когерентных состояний правильные соотношения неопределенностей число — фаза почти минимизируются, когда среднее осцилляторное число больше единицы [19]. Наконец, для простого гармонического осциллятора даны (нормализуемые) состояния с минимальной неопределенностью Джаккива [16].

В § 9 обсуждается полезность переменных число — фаза для теории необратимости в системе осцилляторов [20]. В базисе когерентных состояний дано уравнение движения для матрицы плотности; при переходе к переменным действие — угол получают уравнения того же типа, что и полученные Брутом и Пригожиным [21, 22] для классических систем с квантовыми поправками. Мы обрисует общий вывод квантовомеханического кинетического уравнения для распределения энергии системы связанных гармонических осцилляторов. Даны соотношения неопределенностей, связывающие невозмущенный оператор Луивилля и сопряженный ему фазовый угол. Наконец, в § 10 обращается внимание на некоторые интересные аналогии между изучаемыми здесь векторами состояний и качественными

свойствами волновых функций, описывающих сверхтекучие системы [23]¹⁾.

Хотя мы не обсуждаем проблематическое соотношение неопределенностей энергия — время²⁾, думается, что представленный анализ имеет отношение к этому вопросу. По нашему мнению, еще предстоит дать окончательную трактовку соотношению неопределенности энергия — время. В частности, кажется, что все предложенные до сих пор [24—27] операторы времени математически не определены. Мы даем представительный список работ по этой проблеме [26, 28—30].

§ 2. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

а. Метод Гейзенберга и прямой метод

Во многих учебниках квантовой механики [28, 31—33] даются разные варианты стандартного гейзенберговского вывода соотношения неопределенностей.

Начинают с определения среднеквадратичного отклонения эрмитовой динамической переменной x :

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \langle A \rangle \equiv \langle \Psi | A | \Psi \rangle, \quad (2.1)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle X^2 \rangle, \quad (2.2)$$

где X есть среднее отклонение,

$$X = x - \langle x \rangle. \quad (2.3)$$

Согласно неравенству Шварца,

$$(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 = \langle X^2 \rangle \langle Y^2 \rangle \geq |\langle XY \rangle|^2, \quad (2.4)$$

$$(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \equiv |\langle XY \rangle|^2 + R(\Psi);$$

здесь R — неотрицательно определенный, зависящий только от Ψ остаточный член. Легко видеть, что условием исчезновения R являются равенства

$$R(\Psi) = 0 \Leftrightarrow X | \Psi \rangle = c Y | \Psi \rangle, \quad (2.5)$$

где c — константа.

Пусть теперь коммутатор X и Y равен iA :

$$[x, y] = [X, Y] \equiv iA. \quad (2.6)$$

¹⁾ См. также литературу, цитируемую в этой работе.

²⁾ См., однако, замечания в конце § 5.

Тогда произведение XU можно записать в виде

$$XU = \frac{1}{2}\{X, U\} + \frac{1}{2}iA. \quad (2.7)$$

Ожидаемое значение антикоммутатора

$$\frac{1}{2}\langle\{X, U\}\rangle = \frac{1}{2}\langle\{x, y\}\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle \quad (2.8)$$

есть квантовомеханический аналог взаимного изменения двух случайно распределенных переменных [34]. Переменные можно считать несвязанными, если обе стороны соотношения (2.8) равны нулю.

Объединяя (2.5) — (2.7), имеем

$$U(\Psi) = (\Delta x)^2(\Delta y)^2 = \frac{1}{4}P(\Psi) + \frac{1}{4}Q(\Psi) + R(\Psi), \quad (2.9)$$

$$P(\Psi) = |\langle[X, Y]\rangle|^2 = |\langle A\rangle|^2, \quad (2.10)$$

$$Q(\Psi) = |\langle\{X, Y\}\rangle|^2. \quad (2.11)$$

В методе Гейзенберга A считается постоянной (c -числом). Тогда P не зависит от Ψ и равен A^2 . В этом случае

$$U(\Psi) = (\Delta x)^2(\Delta y)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}Q(\Psi) + R(\Psi), \quad (2.12)$$

$$U(\Psi) \geq \frac{1}{4}A^2. \quad (2.13)$$

Дэвидсон [35] подчеркнул, что этот вывод соотношения (2.13) не является общим, так как он теряет силу, когда $|\Psi\rangle$ есть собственное состояние x или y . В этом случае оператор x не эрмитов относительно $y|x\rangle$, а y не эрмитов относительно $x|y\rangle$. Это легко доказать от противного: если

$$\langle x'|xy|x'\rangle = x'\langle x'|y|x'\rangle,$$

то $A = 0$, что противоречит (2.6).

Дэвидсон выяснил, что по крайней мере в случае координаты и импульса общее доказательство можно провести, используя вариационный принцип Эйлера — Лагранжа; это приводит к хорошо известной гауссовой функции состояния, минимизирующей $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$. Как мы увидим в следующем параграфе, вариационный принцип позволяет построить соответствующее доказательство для операторов x , y и A общего вида.

Соотношение (2.13) сводится к равенству (т. е. достигается минимум произведения неопределенностей), если R и Q исче-

зают. Джакив [16]¹⁾ показал, что это условие дает уравнение на собственные значения для состояния с минимальной неопределенностью. Соотношение (2.5) (означающее, что $R = 0$) просто подставляется в (2.8), в результате чего (2.8) обращается в нуль (т. е. $Q = 0$). Тогда находят, что $c = i\gamma$, где γ действительно, и получают уравнение на собственные значения для состояния с минимальной неопределенностью:

$$X|\Psi\rangle + i\gamma Y|\Psi\rangle = 0 \quad (\gamma \text{ действительно}), \quad (2.14)$$

или

$$(x + i\gamma y)|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle, \quad \lambda \equiv \langle x \rangle + i\gamma \langle y \rangle. \quad (2.15)$$

Собственные значения γ легко определяются. Умножая (2.14) на $(X - i\gamma Y)$, получаем

$$(X^2 + \gamma^2 Y^2 + i\gamma[X, Y])|\Psi\rangle = 0. \quad (2.16)$$

Используя далее (2.6) и (2.13) со знаком равенства, получаем

$$[X^2 + \gamma^2 Y^2 \mp 2\gamma(\Delta x)(\Delta y)]|\Psi\rangle = 0, \quad (2.17)$$

где знак определяется так: $A = \pm |A|$ и $\Delta x = \pm [(\Delta x)^2]^{1/2}$. Беря ожидаемое значение от (2.16) и используя (2.2), находим

$$\gamma = \pm \left[\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right]^{1/2} = \frac{\langle A \rangle}{2(\Delta y)^2} = \frac{A}{2(\Delta y)^2}, \quad (2.18)$$

так что

$$\left[\frac{X^2}{(\Delta x)^2} + \frac{Y^2}{(\Delta y)^2} - 2 \right]|\Psi\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Итак, мы имеем уравнение на собственное значение (2.15) для получения состояния $|\Psi\rangle$ с минимальной неопределенностью. В нем три действительных параметра: γ , $\text{Re } \lambda$ и $\text{Im } \lambda$. Используется, естественно, и условие нормировки $\langle \Psi|\Psi\rangle = 1$. Следуя Джакиву [16], назовем это *прямым методом*, справедливым, когда A есть c -число²⁾.

¹⁾ В этом параграфе мы используем обозначения Готфрида [33] и Джакива [16]. У последнего мы заимствовали и схему изложения. В его работе полностью исследуется этот аспект проблемы.

²⁾ Этот результат не снимает возражений Дэвидсона (см. [21]) для случая, когда $|\Psi\rangle$ является собственным состоянием x или y . Однако в этих случаях можно точно сосчитать и узнать, минимизируется ли произведение неопределенностей.

б. Аналитический метод

Прямой метод не является общим для получения состояния с минимальной неопределенностью, когда A есть q -число (оператор) [36, 37]. В этом более общем случае Джакив [16] развил формализм Эйлера — Лагранжа¹⁾. Начнем с дополнительного условия $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Считая вариацию функции $\langle \Psi |$ не зависящей от вариации функции $|\Psi\rangle$, получаем условие для минимума произведения неопределенностей координаты и импульса $U(\Psi)$:

$$\frac{\delta U}{\delta \langle \Psi |} = m |\Psi\rangle. \quad (2.20)$$

Здесь m — лагранжев множитель. Теперь из (2.1) имеем

$$\frac{\delta (\Delta x)^2}{\delta \langle \Psi |} = x^2 |\Psi\rangle - 2x |\Psi\rangle \langle x \rangle = X^2 |\Psi\rangle - \langle x^2 \rangle |\Psi\rangle. \quad (2.21)$$

Комбинируя (2.9), (2.20) и уравнение типа (2.21), находим

$$[(\Delta y)^2 X^2 |\Psi\rangle + (\Delta x)^2 Y^2 |\Psi\rangle] = [(\Delta x)^2 \langle y \rangle^2 + (\Delta y)^2 \langle x \rangle^2 + m] |\Psi\rangle. \quad (2.22)$$

Беря от (2.22) ожидаемое значение, получаем, что числовая константа справа в квадратных скобках равна $2(\Delta x)^2 (\Delta y)^2$. Подставляя ее опять в (2.22) и делая преобразования, получаем уравнение Эйлера — Лагранжа для состояния $|\Psi\rangle$, в котором U имеет минимум:

$$\left\{ \frac{X^2}{(\Delta x)^2} + \frac{Y^2}{(\Delta y)^2} - 2 \right\} |\Psi\rangle = 0 \quad (2.23)$$

или

$$\left\{ \left(\frac{x - \alpha}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - \beta}{b} \right)^2 - 2 \right\} |\Psi\rangle = 0. \quad (2.24)$$

Уравнения (2.23) и (2.24) являются уравнениями на собственные значения для $|\Psi\rangle$ с четырьмя действительными параметрами α , a , β , b , самосогласованно определяемыми требованиями

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle x \rangle, & \beta &= \langle y \rangle, \\ a^2 &= (\Delta x)^2, & b^2 &= (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Назовем состояния, удовлетворяющие (2.24), *критическими состояниями* [16]. Им может отвечать максимум, минимум или точка перегиба функционала U . Чтобы проверить, отвечает ли данное состояние минимуму U , нужно взять вторую вариацию U .

1) Получающееся соотношение справедливо, только если матричные элементы x для собственных состояний y расходятся, и наоборот. Другими словами, получается, очевидно, нулевое произведение неопределенностей.

Рассчитав произведение $(\Delta x)^2(\Delta y)^2 = a^2b^2$ для разных критических состояний, можно увидеть, какое из них дает наименьшее значение U .

Это обобщение прямого метода, которое справедливо, если $[x, y]$ есть s -число или q -число. Такая процедура называется *аналитическим методом* [16].

Найдем соотношение между прямыми и аналитическим методами. Для этого используем прямой метод в случае, когда A есть q -число. Начинаем с формулы (2.16), которая в этом случае справедлива, и действуем, как прежде. На этот раз получаем

$$\Psi = \frac{(A)}{2(\Delta y)^2} = \pm \left[\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right]^{1/2}, \quad (2.26)$$

$$\left\{ \frac{X^2}{(\Delta x)^2} + \frac{Y^2}{(\Delta y)^2} - \frac{2A}{(A)} \right\} |\Psi\rangle = 0. \quad (2.27)$$

Сравнивая (2.26) и (2.27) с результатами, полученными прямым методом, а именно (2.18) и (2.19), видим, что если A есть q -число, то прямой метод определяет критическое состояние $|\Psi\rangle$ в том и только в том случае, если $|\Psi\rangle$ — собственное состояние оператора A . Вообще эти состояния не исчерпывают всех возможных критических состояний, поэтому прямой метод не есть общий метод определения тех состояний, которые минимизируют $U(\Psi)$, когда A является q -числом.

в. Усложненные соотношения неопределенностей и прямой метод

Отметим, что поскольку уравнение Эйлера — Лагранжа аналитического метода имеет более высокий порядок, чем уравнение прямого метода, то их уравнение может иметь решение, в то время как прямой метод решений не дает (это все же оставляет открытым вопрос, минимизирует ли решение функционал U). Однако уравнение Эйлера — Лагранжа сложнее, так что если бы удалось (для любого заданного соотношения неопределенностей) использовать прямой метод, то было бы, конечно, легче решить вопрос о минимизации.

Это можно сделать, используя «усложненные» соотношения неопределенностей. Если разделить (2.9) на $P(\Psi)$, то получим

$$\Psi_1(\Psi) = \frac{U(\Psi)}{(A)^2}, \quad (2.28)$$

$$U_1(\Psi) = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(A)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{Q(\Psi)}{P(\Psi)} + \frac{R(\Psi)}{P(\Psi)}, \quad (2.29)$$

$$U_1(\Psi) \geq \frac{1}{4}. \quad (2.30)$$

Применяя к (2.28) вариационный принцип, получаем необходимое условие

$$\left\{ \frac{X^2}{(\Delta x)^2} + \frac{Y^2}{(\Delta y)^2} - \frac{2A}{\langle A \rangle} \right\} |\Psi\rangle = 0. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) идентично (2.27). Таким образом, рассматривая соотношение неопределенностей с $U_1(\Psi)$ вместо соотношения неопределенностей с $U(\Psi)$, можно использовать прямой метод для получения состояний с минимальной неопределенностью. [Случай, когда $P(\Psi) = \langle A \rangle^2 = 0$, должен рассматриваться отдельно.] Это будет нам очень полезно ниже.

Закончим этот параграф некоторым наблюдением. Вследствие условия нормировки множество функций $|\Psi\rangle$ некомпактно. Поэтому произведение неопределенностей может не достигать минимума или максимума и у нас не будет нормируемых решений, удовлетворяющих уравнению Эйлера — Лагранжа. Не будет у нас и состояний, которые «настолько классичны, насколько возможно», так как состояния с малым произведением неопределенностей приближаются к некоторому предельному минимальному состоянию, которое не принадлежит множеству допустимых состояний. Мы опишем такие случаи ниже.

§ 3. ПЕРЕМЕННЫЕ КООРДИНАТА — ИМПУЛЬС; КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В качестве первого применения результатов предыдущего параграфа рассмотрим известный случай координата — импульс. Начиная с коммутатора

$$[x, p] = i, \quad p = -i \frac{d}{dx}, \quad (3.1)$$

используем прямой метод [см. (2.15) и (2.18)]:

$$\left[x + \gamma \frac{d}{dx} \right] \psi = \lambda \psi, \quad (3.2)$$

$$\lambda = \langle x \rangle + i\gamma \langle p \rangle, \quad (3.3)$$

$$\gamma = \frac{1}{2(\Delta p)^2} = 2(\Delta x)^2. \quad (3.4)$$

Последнее равенство в (3.4) верно, потому что по предположению ψ — состояние с минимальной неопределенностью. Решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\psi \sim \exp\left(\frac{\lambda x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\gamma}\right). \quad (3.5)$$

Комбинируя (3.2) и (3.5), а также нормируя, получаем

$$\psi(x) = [2\pi(\Delta x)^2]^{-1/4} \exp \left\{ \left[\frac{x - \langle x \rangle}{2\Delta x} \right]^2 + i \langle p \rangle x \right\}. \quad (3.6)$$

Можно также было бы использовать вариационный [35] метод или аналитический метод Эйлера — Лагранжа [16] и получить уравнение на собственные значения

$$\left[\left(\frac{x - \alpha}{a} \right)^2 + \left(\frac{-i(\partial/\partial x) - \beta}{b} \right)^2 \right] \psi(x) = 2\psi(x). \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.7) с уравнением для гармонического осциллятора, находим, что, когда

$$ab = \Delta x \Delta y = n + \frac{1}{2}, \quad (3.8)$$

получаются нормированные решения вида

$$\psi_n(x) = \exp(i\beta x) u_n(x - \alpha) = \exp(i \langle p \rangle x) u_n(x - \langle x \rangle), \quad (3.9)$$

где $u_n(x)$ — обычные нормированные (энергетические) собственные функции оператора «числа» с массой $m = b^2/2$, константой упругости $K = 2/a^2$ и энергией 2. В обычных обозначениях они имеют вид

$$u_n(x) = \left(\frac{\eta}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\eta x) \exp \left(-\frac{1}{2} \eta^2 x^2 \right), \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} \rightarrow \eta = mK = m^2 \omega^2,$$

где H_n — полиномы Эрмита [38] и ω — угловая частота, отвечающая классическому гармоническому осциллятору.

При обычном рассмотрении гармонического осциллятора используются энергетические собственные функции (3.10). Они ортогональны и принадлежат значениям энергии

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (3.11)$$

Однако вне зависимости от того, как велико квантовое число n , имеем

$$\langle n | x | n \rangle = \langle n | p | n \rangle = 0. \quad (3.12)$$

Поэтому они никоим образом не переходят в решение для классического гармонического осциллятора, для которого

$$x_{\text{кл}}(t) = A \cos(\varphi - \omega t), \quad p_{\text{кл}}(t) = m\omega A \sin(\varphi - \omega t). \quad (3.13)$$

Ключ к нахождению состояний гармонического осциллятора, которые настолько близки к классическим, насколько это воз-

можно, дает соотношение (3.8). Оно представляет хорошо известный результат, что в энергетическом представлении основное состояние наиболее классично из всех состояний, т. е. для него $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = 1/4$. Основное состояние выделено, поскольку описывается функцией Гаусса. Это означает, что его фурье-образ (волновая функция в импульсном пространстве) есть также функция Гаусса.

Теперь у нас есть ключ к нахождению искомым состояний: если распределение Гаусса узкое или широкое [мало или велико $(\Delta x)^2$], то его преобразование Фурье соответственно широкое или узкое [велико или мало $(\Delta p)^2$] и потому произведение $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$ равно постоянной величине (здесь $1/4$). Сдвиг центра гауссовой функции, $\langle x \rangle \neq 0$, $\langle p \rangle \neq 0$, также не влияет на ее трансформационные свойства. Таким образом, можно получить любые ожидаемые значения энергии $\langle H \rangle$. Это означает, что имеется нечетное число состояний, каждое из которых в гейзенберговском представлении соответствует (3.1), т. е.

$$\langle x \rangle = x_{\text{кл}}, \quad \langle p \rangle = p_{\text{кл}}. \quad (3.14)$$

Соотношение (3.14) можно рассматривать как описывающее гауссовский волновой пакет, центр которого при $t = 0$ расположен в точке $A \cos \varphi$. При $t > 0$ пакет колеблется между $+A$ и $-A$ с угловой частотой ω , не расплываясь. Такая картина была элегантно описана Хенли и Тиррингом [39].

Только что описанные состояния называются «когерентными». Из (3.6) непосредственно видно, что это как раз разыскиваемые состояния. [Чтобы получить гейзенберговское представление, надо выражение (3.6) умножить на $\exp i\omega t$ и подставить в (3.14).] Легко проверить непосредственно, что для этих состояний действительно

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{«когерентные» состояния}). \quad (3.15)$$

Впервые когерентные состояния были открыты Шредингером [40], причем весьма нетривиальным способом: он искал нерасплывающиеся колеблющиеся волновые пакеты описанного типа¹⁾. Заметив, что производящая функция для полиномов Эрмита имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) H_n(x) = \exp\left(-\xi^2 + 2\xi x - \frac{1}{2}x^2\right), \quad (3.16)$$

¹⁾ Д. Бом ([31], раздел 2, стр. 306) дает вывод, аналогичный выводу Шредингера (см. [40]).

он понял, что нужную гауссову функцию можно получить в виде ряда.

$$\psi = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \frac{\Psi_n}{n!}, \quad (3.17)$$

где C — нормировочная константа.

Физически когерентные состояния очень важны. Они не только являются «естественными» состояниями осциллятора, но и описывают поле излучения классического тока; очень полезны они и при квантовомеханическом описании когерентных источников света, что подчеркивалось Глаубером [41—45], а также Сударшаном и Мехтой [46—48]. Они использовались также при исследовании других явлений с упорядочением, таких, как сверхпроводимость и сверхтекучесть [49], а также фононы в кристаллах [20].

В предыдущей статье [50] мы очень подробно исследовали метод когерентных состояний применительно к гармоническому осциллятору. Обсуждались также вопросы распределения вероятностей осциллятора в когерентных состояниях, более общий случай квантового осциллятора с вынуждающей силой и вероятности перехода для осциллятора с вынуждающей силой. За полным описанием когерентных состояний в гейзенберговском представлении мы отсылаем читателя к этой статье, а также к работе [43].

Вместо переменных координата — импульс часто удобно использовать операторы рождения и уничтожения a^\dagger и a вида

$$a = \frac{i}{(2m\omega)^{1/2}} (p - im\omega x), \quad a^\dagger = -\frac{i}{(2m\omega)^{1/2}} (p + im\omega x),$$

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.18)$$

Коммутационное соотношение в (3.18) эквивалентно (3.1). Спектр собственных значений осциллятора легче всего проанализировать в этих комплексных нормальных координатах. Гамильтониан имеет вид

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \omega; \quad (3.19)$$

его собственные значения суть (3.11); $a^\dagger a$ называется оператором числа. Из коммутаторов

$$[a, H] = \omega a, \quad [a^\dagger, H] = -\omega a^\dagger \quad (3.20)$$

видно, что: 1) гейзенберговские операторы $a(t)$ и $a^\dagger(t)$ суть $a \exp(-i\omega t)$ и $a^\dagger \exp(i\omega t)$ соответственно; 2) $a(a^\dagger)$ уменьшает

(увеличивает) энергию состояния на ω . Для энергетического состояния $|n\rangle$ с главным квантовым числом n имеем

$$|n\rangle = \frac{1}{(n!)^{1/2}} (a^\dagger)^n |0\rangle,$$

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle. \quad (3.21)$$

Операторы координаты и импульса можно найти из (3.18):

$$x = x_0(a + a^\dagger), \quad p = -im\omega x_0(a - a^\dagger), \quad x_0 = (2m\omega)^{-1/2}, \quad (3.22)$$

где x_0 — среднеквадратичная флуктуация в нуле.

Когерентные состояния можно определить как собственные состояния оператора уничтожения, т. е.

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.23)$$

где α — любое комплексное число. Разложение когерентного состояния $|\alpha\rangle$ по энергетическим состояниям приводит к легко разрешаемым рекуррентным соотношениям для коэффициентов разложения:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle,$$

$$|\alpha\rangle = A(\alpha)|0\rangle, \quad A(\alpha) \equiv \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (3.24)$$

где $A(\alpha)$ — унитарный оператор ($AA^\dagger = A^\dagger A = 1$), порождающий когерентные состояния. Операторы a , a^\dagger и A имеют следующие свойства:

$$A^\dagger(\alpha) a A(\alpha) = a + \alpha, \quad (3.25)$$

$$A^\dagger(\alpha) a^\dagger A(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*, \quad (3.26)$$

$$A(\alpha) = A^\dagger(-\alpha). \quad (3.27)$$

Как отмечалось выше, когерентные состояния неортогональны. (Они и не могут быть ортогональными, поскольку пространство «натягивается» на счетный базис, в то время как когерентных состояний имеется несчетное количество — одно для каждого α из комплексной плоскости.) Из (3.24) следует, что скалярное произведение когерентных состояний равно

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(\alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right), \quad |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2), \quad (3.28)$$

т. е. соответствует интегралу перекрытия двух гауссовых функций в волновой картине Шредингера. Однако когерентные

состояния полны:

$$1 = \pi^{-1} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (3.29)$$

$$d^2\alpha = d \operatorname{Re} \alpha d \operatorname{Im} \alpha. \quad (3.30)$$

Для когерентных состояний легко рассчитывать ожидаемые значения. Ожидаемое значение любого полинома от a и a^\dagger (упорядоченного так, что все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения) получается просто подстановкой $a \rightarrow \alpha$, $a^\dagger \rightarrow \alpha^*$. В частности,

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = x_0 \langle\alpha|(a+a^\dagger)|\alpha\rangle = x_0(\alpha+\alpha^*) = 2x_0 \operatorname{Re} \alpha. \quad (3.31)$$

Аналогично

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = 2m\omega x_0 \operatorname{Im} \alpha, \quad (3.32)$$

$$\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \omega \langle\alpha|(a^\dagger a + \frac{1}{2})|\alpha\rangle = \omega(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}). \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) показывает, что для гамильтониана (как и предсказывалось) можно получить любое ожидаемое значение. Комбинируя (2.1), (3.18) и (3.31), нетрудно убедиться, что

$$(\Delta x)_{\text{когер}}^2 = x_0^2 = (2m\omega)^{-1} \quad (3.34)$$

и

$$(\Delta p)_{\text{когер}}^2 = m^2 \omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2} m\omega. \quad (3.35)$$

Следовательно, для всех когерентных состояний

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)_{\text{когер}}^2 = \frac{1}{4}. \quad (3.36)$$

Итак, в координатно-импульсном пространстве когерентные состояния являются настолько классическими, насколько это возможно.

В заключение этого параграфа хотелось бы подчеркнуть важность когерентных состояний. Она обусловлена не только их физической значимостью, но также большим упрощением аппарата. То, что они неортогональны, не вызывает особых возражений и часто полностью перевешивается их полезностью.

§ 4. ПЕРЕМЕННЫЕ УГЛОВОЙ МОМЕНТ — УГОЛ

a. Соотношения неопределенностей

Правильное описание угловых или фазовых переменных требует учета условия периодичности. Этот учет особенно важен тем, что подводит нас к пониманию второго кардинального мо-

мента — природы спектра собственных значений оператора, сопряженного угловой переменной.

Начнем с рассмотрения известной задачи об угловом моменте в трех измерениях. Пусть φ — азимутальный угол поворота вокруг оси z ; по определению равенство

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (4.1)$$

задает φ только по модулю 2π . Определив φ как непрерывную переменную, изменяющуюся от $-\infty$ до ∞ , можно представить z -компоненту орбитального момента дифференциальным оператором ($\hbar = 1$)

$$L_z = xp_y - yp_x = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad (4.2)$$

L_z и φ обычно рассматриваются как сопряженные переменные с коммутатором

$$[\varphi, L_z] = i. \quad (4.3)$$

Однако использование этих угловых переменных содержит для неискушенного исследователя много ловушек. В частности, оператор L_z , даваемый формулой (4.2), эрмитов только в пространстве периодических с периодом 2π функций $\{\psi\}_P$. Только в этом пространстве

$$\langle L_z \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | L_z \psi_2 \rangle, \quad (4.4)$$

поскольку, как показывает детальный анализ, переход от левой части (4.4) к правой его части связан с исчезновением «поверхностного члена». Но по определению (4.1) сам угол φ не периодичен. Поэтому оператор L_z неэрмитов и нельзя заключить, что из (4.3) вытекает соотношение неопределенности

$$\Delta L_z \Delta \varphi \geq \frac{1}{2} \quad (\text{неверно!}). \quad (4.5)$$

Конечно, в справедливости (4.5) уже давно сомневались [51], поскольку известно, что флуктуации φ , большие 2π , физически имеют мало смысла. Легко подобрать волновые функции, для которых $\Delta L_z \leq 1/4$ и потому $\Delta \varphi > 2\pi$. При выборе в качестве собственных функций оператора L_z сферических гармоник $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (обозначаемых символом $|lm\rangle$) может даже оказаться, что $\Delta L_z = 0$. (Нужно, однако, помнить сделанные в § 2 замечания касательно соотношений неопределенностей в состояниях, являющихся собственными функциями одного из операторов.)

Еще одна трудность связана с «парадоксом», вытекающим из простодушной веры в эрмитовость L_z . Беря от (4.3) матрич-

ный элемент, находим

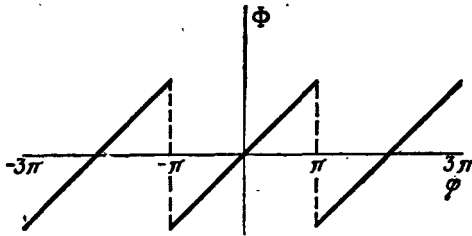
$$\begin{aligned} \langle lm' | [\varphi, L_z] | lm \rangle &= i \langle lm' | lm \rangle, \\ (m - m') \langle lm' | \varphi | lm \rangle &= i \delta_{mm'} \quad (\text{неверно!}); \end{aligned} \quad (4.6)$$

из последнего равенства при $m' = m$ следует, что $0 = 1$. Ошибка заключается в предположении, что в матричном элементе

$$\langle lm' | L_z \varphi | lm \rangle$$

L_z может «действовать налево» [см. (4.4)]. Трудность возникает из-за неперIODичности функции $\varphi | lm \rangle$ или, с другой стороны, из-за неэрмитовости φ по отношению к $L_z | lm \rangle$.

Возможное решение парадокса — введение периодической координаты $\Phi(\varphi)$ (фиг. 2.1). Тогда можно будет работать со



Фиг. 2.1. Разрывная периодическая фазовая переменная Φ .

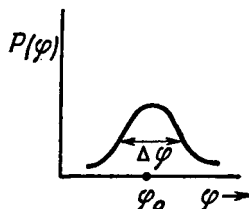
сферическими гармониками и периодической переменной Φ , а оператор L_z будет определенно эрмитов. Но правило коммутации [см. (4.3)] усложняется [18, 52]:

$$[\Phi, L_z] = i \left\{ 1 - 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[\varphi - (2n + 1)\pi] \right\}. \quad (4.7)$$

Разрывы Φ можно ввести и в других точках, но всегда одна из дельта-функций в (4.7) будет давать вклад в физическом интервале $0 - 2\pi$. Следовательно, для Φ «соотношение неопределенностей» (4.5) также не имеет места. Поскольку в качественном отношении (4.5) не вызывает сомнения, то решение задачи следует искать на пути его корректной математической формулировки. Один из способов был предложен Джаджем [53]. Джадж и др. [53—57], изучая соотношение неопределенности, вытекающее из (4.7), определили $(\Delta\varphi)^2$ соотношением

$$(\Delta\varphi)^2 = V(\gamma) = \min \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 |\Psi(\varphi + \gamma)|^2 d\varphi. \quad (4.8)$$

Мы предпочтем другой метод, который кажется проще и также приводит к соотношению (4.5) всегда, когда последнее справедливо, т. е. когда $\Delta\varphi$ существенно меньше, чем 2π . Идея состоит просто в том, чтобы для локализации по азимуту использовать *непрерывные* периодические переменные. Как впер-



Фиг. 2.2. «Хорошее» распределение вероятностей $P(\varphi)$ с шириной $\Delta\varphi$, малой по сравнению с 2π , приводящее к «обычному» соотношению неопределенности (4.5).

вые указал Луиселл [58], совершенно естественно взять вместо $\varphi \sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Используя ряды Фурье, можно построить любую другую физическую (периодическую) функцию. Из коммутационных соотношений

$$[\sin \varphi, L_z] = i \cos \varphi, \quad [\cos \varphi, L_z] = -i \sin \varphi \quad (4.9)$$

можно вывести соотношения неопределенностей

$$(\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \varphi)^2 \geq \frac{1}{4} \langle \cos \varphi \rangle^2, \quad (4.10a)$$

$$(\Delta L_z)^2 (\Delta \cos \varphi)^2 \geq \frac{1}{4} \langle \sin \varphi \rangle^2, \quad (4.10б)$$

или

$$\frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \varphi)^2}{\langle \cos \varphi \rangle^2} \geq \frac{1}{4}, \quad (4.10в)$$

$$\frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \cos \varphi)^2}{\langle \sin \varphi \rangle^2} \geq \frac{1}{4}, \quad (4.10г)$$

поскольку теперь оператор L_z эрмитов. Всегда предполагается периодичность волновой функции; при этом не возникает никаких трудностей с полученным *полным* угловым моментом, так как волновая функция фигурирует в виде квадратичного выражения.

Если нужно, любую пару соотношений (4.10) можно переписать в форме одного, симметричного относительно $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$:

$$U \equiv \frac{(\Delta L_z)^2 [(\Delta \cos \varphi)^2 + (\Delta \sin \varphi)^2]}{\langle \sin \varphi \rangle^2 + \langle \cos \varphi \rangle^2} \geq \frac{1}{4}. \quad (4.11)$$

Любое из соотношений (4.10), (4.11) сводится к (4.5) всякий раз, когда зависящий от φ фактор в волновой функции доста-

точно локализован. Действительно, интегрируя по всем переменным, за исключением φ , сразу строим распределение вероятностей $P(\varphi)$. Предполагается, что $P(\varphi)$ имеет пик при φ_0 с существенно симметричным распределением (фиг. 2.2).

Разлагая $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ до квадратичных (по $\delta\varphi = \varphi - \varphi_0$) членов, получаем

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 \right] - \sin \varphi_0 \delta\varphi, \\ \sin \varphi &= \sin \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 \right] + \cos \varphi_0 \delta\varphi, \\ \delta\varphi &\equiv \varphi - \varphi_0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

[Отметим, что поскольку $P(\varphi)$ по предположению локализовано около φ_0 , то любая существенная вариация $\delta\varphi \ll 2\pi$.] Тогда

$$\begin{aligned}\langle \cos \varphi \rangle &= \cos \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} \langle (\delta\varphi)^2 \rangle \right], \\ \langle \sin \varphi \rangle &= \sin \varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} \langle (\delta\varphi)^2 \rangle \right], \\ \langle \cos^2 \varphi \rangle &= \cos^2 \varphi_0 [1 - \langle (\delta\varphi)^2 \rangle] + \sin^2 \varphi_0 \langle (\delta\varphi)^2 \rangle, \\ \langle \sin^2 \varphi \rangle &= \sin^2 \varphi_0 [1 - \langle (\delta\varphi)^2 \rangle] + \cos^2 \varphi_0 \langle (\delta\varphi)^2 \rangle.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Удерживая члены не выше второго порядка, находим

$$\begin{aligned}(\Delta \cos \varphi)^2 &\equiv \langle \cos^2 \varphi \rangle - \langle \cos \varphi \rangle^2 = \sin^2 \varphi_0 \langle (\delta\varphi)^2 \rangle, \\ (\Delta \sin \varphi)^2 &\equiv \langle \sin^2 \varphi \rangle - \langle \sin \varphi \rangle^2 = \cos^2 \varphi_0 \langle (\delta\varphi)^2 \rangle.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Поскольку $\cos^2 \varphi_0$ совпадает в низшем порядке с $\langle \cos^2 \varphi \rangle$, равенство (4.14) сводит каждое из соотношений (4.10) к (4.5) с естественной идентификацией

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle = (\Delta\varphi)^2.\tag{4.15}$$

Итак, если «придерживаться» традиционного коммутатора (4.3), то использование угловой переменной φ для локализации геометрической точки в xy -плоскости ведет к проблеме неэрмитовости генератора вращений (L_z) вокруг оси z . Кажется предпочтительным использовать пару непрерывных периодических переменных; простейшие из них — $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, а также всевозможные произведения этих величин. Тогда оператор L_z эрмитов и любая пара соотношений неопределенностей (4.10) дает математически и физически корректное описание ситуации.

Спектр собственных значений оператора L_z дискретен и симметричен; он представляет собой набор целых чисел от $-l$ до l через единицу. Это следствие ограниченности оператора L^2 .

Для истинно двумерной задачи (скажем, бусина на проволочном кольце) спектр L_z дискретен, но охватывает все целые числа от $-\infty$ до ∞ . (Здесь мы отвлекаемся от двузначных представлений.) Когда рассматривается фаза гармонического осциллятора, спектр «сопряженной» переменной (число) существенно другой, хотя он также дискретен.

б. Трехмерный осциллятор в когерентных состояниях

Поскольку когерентные состояния имеют такое важное физическое значение и являются состояниями с минимальной неопределенностью координата — импульс, то интересно узнать, являются ли они состояниями с малой неопределенностью угловой момент — угол. Этот вопрос уже исследовался одним из авторов [59].

Во-первых, пусть $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ — когерентные состояния, квантованные вдоль оси x и y соответственно. Рассмотрим анизотропный случай

$$\omega_x = \left(\frac{k_x}{m}\right)^{1/2}, \quad \omega_y = \left(\frac{k_y}{m}\right)^{1/2}, \quad (4.16)$$

где k_i — упругие константы, ω_i — угловые скорости и m — масса. Среднеквадратичные координаты даются теперь формулами ($\hbar = 1$)

$$x_0 = (2m\omega_x)^{-1/2}, \quad y_0 = (2m\omega_y)^{-1/2}. \quad (4.17)$$

В гейзенберговской картине

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(a(t) + a^\dagger(t)), & p_x &= -im\omega_x x_0(a(t) - a^\dagger(t)), \\ y(t) &= y_0(b(t) + b^\dagger(t)), & p_y &= -im\omega_y y_0(b(t) - b^\dagger(t)). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Используя (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle &= \langle \alpha, \beta | (xp_y - yp_x) | \alpha, \beta \rangle = \\ &= 4mx_0y_0 [\omega_y \operatorname{Re} \alpha \operatorname{Im} \beta - \omega_x \operatorname{Re} \beta \operatorname{Im} \alpha], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\langle \alpha, \beta | = | \alpha, \beta \rangle^\dagger$. Имеем также

$$\begin{aligned} \langle L_z^2 \rangle &= m^2 x_0^2 y_0^2 \{ \omega_y^2 [4(\operatorname{Re} \alpha)^2 + 1] [4(\operatorname{Im} \beta)^2 + 1] - \\ &\quad - \omega_x \omega_y [8 \operatorname{Re} \alpha \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Re} \beta \operatorname{Im} \beta + 2] + \\ &\quad + \omega_x^2 [4(\operatorname{Im} \alpha)^2 + 1] [4(\operatorname{Re} \beta)^2 + 1] \}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

так что

$$\begin{aligned} (\Delta L_z)^2 &= m^2 x_0^2 y_0^2 \{ \omega_y^2 [1 + 4(\operatorname{Re} \alpha)^2 + 4(\operatorname{Im} \beta)^2] - 2\omega_x \omega_y + \\ &\quad + \omega_x^2 [1 + 4(\operatorname{Im} \alpha)^2 + 4(\operatorname{Re} \beta)^2] \}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Для изотропного случая (4.21) сводится к

$$(\Delta L_z)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = N_\alpha + N_\beta = N. \quad (4.22)$$

Среднее $\langle \sin \varphi \rangle$ дается числом $\langle y/(x^2 + y^2)^{1/2} \rangle$, или

$$\langle \sin \varphi \rangle = \langle \alpha, \beta | \frac{y_0 (b + b^\dagger)}{[\{x_0 (a + a^\dagger)\}^2 + \{y_0 (b + b^\dagger)\}^2]^{1/2}} | \alpha, \beta \rangle. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) демонстрирует одно из привлекательных свойств операторов $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ — они имеют смысл и в формализме вторичного квантования. Используя свойства когерентных состояний [ср. (3.24), (3.25)]

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= A(\alpha) |0\rangle, & A^\dagger(\alpha) A(\alpha) &= 1, \\ [a + a^\dagger, A(\alpha)] &= (\alpha + \alpha^*) A(\alpha), \end{aligned} \quad (4.24)$$

мы преобразуем выражение (4.23) в следующее:

$$\langle \sin \varphi \rangle = \langle 0, 0 | \frac{y_0 (b + b^\dagger + 2 \operatorname{Re} \beta)}{[\{x_0 (a + a^\dagger + 2 \operatorname{Re} \alpha)\}^2 + \{y_0 (b + b^\dagger + 2 \operatorname{Re} \beta)\}^2]^{1/2}} | 0, 0 \rangle, \quad (4.25)$$

являющееся ожидаемым значением в основном состоянии.

Если перейти теперь к шредингеровской волновой картине и использовать волновую функцию основного состояния осциллятора [60], то найдем в результате

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta | \sin \varphi | \alpha, \beta \rangle &= \\ &= \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-y^2) \left\{ \frac{(y + \mathcal{B}) W}{[(x + \mathcal{A})^2 + W^2 (y + \mathcal{B})^2]^{1/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta | \sin \varphi | \alpha, \beta \rangle &= \\ &= \frac{1}{\pi W} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[\frac{-(x - \mathcal{A})^2 - (y - \mathcal{B})^2}{W^2} \right] y (x^2 + y^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

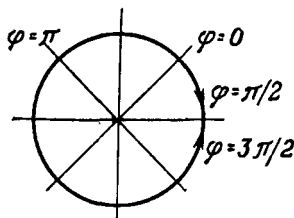
$$W = \frac{\omega_x}{\omega_y}, \quad \mathcal{A} = 2^{1/2} \operatorname{Re} \alpha, \quad \mathcal{B} = 2^{1/2} \operatorname{Re} \beta. \quad (4.28)$$

Уравнения (4.24) — (4.27) демонстрируют свойство оператора сдвигать центр гауссова распределения (см. § 2). Операторы $\sin^2 \varphi$, $\cos \varphi$ и $\cos^2 \varphi$ имеют тот же вид, (4.27); оператор же $\sin \varphi$ в подынтегральном выражении [т. е. $y/(x^2 + y^2)^{1/2}$] заменен другими тригонометрическими операторами.

Число W в (4.28) является мерой анизотропии осциллятора. Интегралы типа (4.27) легче брать для изотропного случая ($W = 1$); ограничившись этим случаем, мы не потеряем никакой важной новой информации. Положим до конца этого пункта $W = 1$ (рекомендуем читателю самому вычислить эти интегралы в общем случае). Выражения типа (4.27) дают полезные соотношения

$$\begin{aligned} \langle \sin \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rangle &= \langle \cos \varphi(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rangle, \\ \langle \sin^2 \varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rangle &= \langle \cos^2 \varphi(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Это значит, что соотношения неопределенностей (4.10) не меняются при замене $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, так что достаточно изучить первую пару из них.



Фиг. 2.3. Четыре «классические орбиты» для $y = y_0 \cos \omega t$, $x = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$ с $x_0 = y_0$ и различными значениями φ .

Эллипсы общего вида имеют место для $x_0 \neq y_0$; $\varphi = 0$ отвечает случаю действительных α и β . Фаза включена в x . Если допустить комплексные β , то не появляется никаких новых орбит.

Поскольку тригонометрические операторы содержат только действительные части α и β , соотношения (4.10) и (4.22) говорят нам, что наименьшее произведение неопределенностей имеет место для действительных α и β . Для действительных α и β $\langle L_z \rangle = 0$ и «орбита» — прямая линия, проходящая через начало координат, но неопределенность $(\Delta L_z)^2 \neq 0$. Если у α и β появляются мнимые части, то $\langle L_z \rangle \neq 0$ и орбиты становятся эллипсами (см. фиг. 2.3).

Поскольку мы пытаемся строить наименьшие произведения неопределенностей, то будем считать с этого момента α и β действительными. При действительных α и β можно определить e ($0 \leq e \leq 1$) таким, чтобы

$$\begin{aligned} N = N_x + N_y &= \frac{1}{2} \mathcal{A}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}^2 = eN + (1 - e)N, \\ e &= \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Используя переменные N и ϵ , приведем уравнения (4.29) к виду

$$\langle \sin \varphi(N, \epsilon) \rangle = \langle \cos \varphi(N, 1 - \epsilon) \rangle. \quad (4.31)$$

Для вычисления (4.27) перейдем к полярным координатам:

$$\langle \sin \varphi \rangle = \frac{e^{-R^2}}{\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \exp[-r^2 + 2r(\mathcal{A} \cos \varphi + \mathcal{B} \sin \varphi)],$$

$$\langle \sin \varphi \rangle = \frac{e^{-R^2}}{\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \exp[-r^2 + 2rR \cos(\varphi - \delta)], \quad (4.32)$$

$$R^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2, \quad \cos \delta = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}.$$

Используем стандартный прием вычисления:

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = \frac{\exp(i\delta) \exp(-R^2)}{\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \exp[-r^2 + 2rR \cos \theta]. \quad (4.33)$$

Интегрирование по r можно выполнить точно ([61], ф-ла (314.5 b))

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = \frac{1}{2} [\exp(i\delta) \exp(-R^2)] \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi^{1/2} R \cos \theta \exp(R^2 \cos^2 \theta) \right] [1 + \Phi(R \cos \theta)], \quad (4.34)$$

$$\Phi(x) = \operatorname{erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Первый член равен нулю, поскольку $\cos \theta$ — нечетная функция относительно интервала $[0, 2\pi]$. Член с функцией ошибок также исчезает, потому что $\cos^2 \theta$ — четная функция, в то время как $\Phi(R \cos \theta)$ — нечетная. Остается только средний член. После небольших алгебраических преобразований [действительная и мнимая части ожидаемого значения возникают из $\exp(i\delta)$] получаем наконец

$$\left\langle \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle = \begin{Bmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \end{Bmatrix} \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \exp(-R^2 \sin^2 \theta). \quad (4.35)$$

Для $\langle \sin^2 \varphi \rangle$ и $\langle \cos^2 \varphi \rangle$ следует начинать с выражения, подобного второй строке формулы (4.32). Интегрирование по r дает

$$\begin{aligned} \left\langle \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \right\rangle &= \frac{\exp(-R^2)}{\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi^{1/2} R \cos \theta \exp(R^2 \cos^2 \theta) \right] \times \\ &\times [1 + \Phi(R \cos \theta)] \left\{ \begin{array}{c} \sin^2(\theta + \delta) \\ \cos^2(\theta + \delta) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \right\rangle &= \frac{1}{2} \exp(-R^2) + \frac{R \exp(-R^2)}{2\pi^{1/2}} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \exp(R^2 \cos^2 \theta) \Phi(R \cos \theta) \times \\ &\times \left[\left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \delta \\ \cos^2 \delta \end{array} \right\} \pm \sin^2 \theta (2 \cos^2 \delta - 1) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В (4.36) перекрестные члены выпадают, а члены с $(\theta + \delta)$ мы разлагаем в ряд. Первый интеграл в (4.37) берется, если сложить две строки; тогда становится ясно, что он в точности равен единице. Комбинируя члены и изменяя вид остающегося интеграла, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \left\langle \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \right\rangle &= \frac{1}{2} \exp(-R^2) + \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \delta \\ \cos^2 \delta \end{array} \right\} [1 - \exp(-R^2)] \pm \\ &\pm \frac{2R}{\pi^{1/2}} (2 \cos^2 \delta - 1) \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin^2 \theta \exp(-R^2 \sin^2 \theta) \Phi(R \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Последний интеграл можно вычислить, заметив, что

$$\begin{aligned} I &= R \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin^2 \theta \exp(-R^2 \sin^2 \theta) \Phi(R \cos \theta) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dR} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \exp(-R^2 \sin^2 \theta) \Phi(R \cos \theta) + \\ &\quad + \pi^{-1/2} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \exp(-R^2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Первый интеграл справа совпадает с только что вычисленным и равен $\pi^{1/2}[1 - \exp(-R^2)]/2R$. Отсюда легко вывести, что

$$I = \frac{1}{4} \pi^{1/2} \left[\frac{1 - \exp(-R^2)}{R^2} - \exp(-R^2) \right]. \quad (4.40)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{Bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{2} \exp(-R^2) + \left\langle \begin{Bmatrix} \sin^2 \delta \\ \cos^2 \delta \end{Bmatrix} \right\rangle [1 - \exp(-R^2)] + \\ &+ \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{1}{2} (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \left[\frac{1 - \exp(-R^2)}{R^2} - \exp(-R^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Простые расчеты дают теперь пределы:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle &\sim \left\langle \begin{Bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \end{Bmatrix} \right\rangle \left(1 - \frac{1}{4R^2} + \dots \right), \quad N \rightarrow \infty, \\ \left\langle \begin{Bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle &\sim \left\langle \begin{Bmatrix} \sin^2 \delta \\ \cos^2 \delta \end{Bmatrix} \right\rangle + \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2}{R^4} + \dots, \quad N \rightarrow \infty, \\ \left\langle \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle &\sim \frac{1}{2} \pi^{1/2} \left\langle \begin{Bmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \end{Bmatrix} \right\rangle + \dots, \quad N \rightarrow 0, \\ \left\langle \begin{Bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} \right\rangle &\sim \frac{1}{2} + \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{1}{4} (\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2) + \dots, \quad N \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Определим из (4.10) произведение неопределенностей $S(N, \epsilon)$ в когерентных состояниях

$$S(N, \epsilon) \equiv \frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \varphi)^2}{\langle \cos^2 \varphi \rangle} \geq \frac{1}{4}. \quad (4.43)$$

Функция $S(N, \epsilon)$ была рассчитана численно; график ее как функции N при различных значениях ϵ приведен на фиг. 2.4. Результаты расчета согласуются с пределами при больших и малых N , вытекающими из (4.42):

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} S(N, \epsilon) &= [\pi(1 - \epsilon)]^{-1} > \pi^{-1} > \frac{1}{4}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} S(N, \epsilon) &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Симметричное произведение неопределенностей U [см. (4.11)] не зависит для когерентных состояний от ϵ . [Это видно из формул (4.35), (4.41) и (4.11).] Действительно, U определяется формулой¹⁾

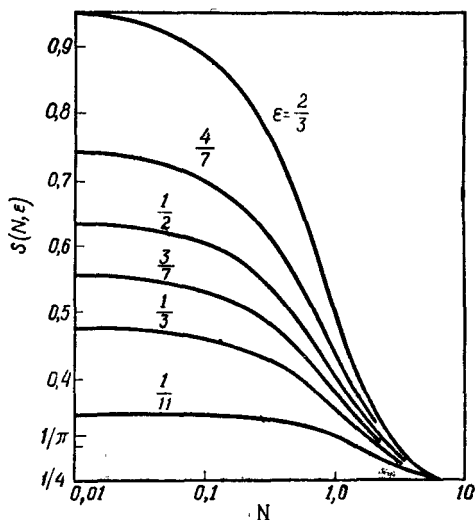
$$U(N) = S\left(N, \frac{1}{2}\right). \quad (4.45)$$

Это следует из того, что $\sin^2 \delta(\epsilon = 1/2) = \cos^2 \delta(\epsilon = 1/2) = 1/2$.

¹⁾ Мы благодарны В. Бардину за помощь при доказательстве этого положения на той стадии, когда результат нелегко было увидеть.

Из фиг. 2.4 видно, что когерентные состояния действительно дают малое значение произведения неопределенностей для всех N , являющееся практически минимальным при больших N . Из физических и статистических соображений следовало бы ожидать, что для реальной системы ϵ приблизительно равно $1/2$, а не 0 или 1.

Отметим, что наименьшее произведение неопределенностей получается при $\epsilon = 0$, т. е. когда $\langle \sin \varphi \rangle = 0$.



Фиг. 2.4. Произведение неопределенностей $S(N, \epsilon) = (\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \varphi)^2 / (\cos \varphi)^2$ как функция N для различных значений параметра ϵ [см. (4.30)].

$S(N, 1/2)$ — также произведение неопределенностей $U(N)$, определяемое соотношением (4.43). Все ожидаемые значения вычислены для двумерных когерентных состояний, обсуждаемых в тексте.

Интуитивно ясно, почему произведение неопределенностей уменьшается при $N \rightarrow \infty$. Из предыдущего пункта нам известно, что для переменных, спектры которых представляют собой множество всех действительных чисел, состояния с минимальным произведением неопределенностей ведут себя как гауссовы функции и в координатном, и в сопряженном импульсном пространстве. Но в данном случае спектр занимает ограниченную область. Однако при $\langle L_z \rangle \rightarrow \infty$ можно «аппроксимировать» L_z гауссовой функцией с $\Delta L_z \sim \langle L_z \rangle^{1/2}$. Неопределенность же $\Delta \varphi$ описывается узким распределением Гаусса. При $\langle L_z \rangle \rightarrow 0$ уже нельзя «аппроксимировать» $\Delta \varphi$ функцией Гаусса, так как хвосты распределения обрезаются. На основе этих интуитивных соображений можно ожидать, что произведения неопределенностей уменьшаются при $N \rightarrow \infty$. В следующем пункте станет ясно, почему при $N \sim 0$ наименьшие произведения неопределенностей имеют место при $\epsilon \sim 0$, т. е. при $\langle \sin \varphi \rangle \sim 0$.

в. Состояние с минимальной неопределенностью

Можно использовать для нахождения состояния с минимальной неопределенностью прямой метод, поскольку (4.10в) является обсуждавшимся в § 2 соотношением неопределенности «усложненного» типа. Из (4.10в), (2.15) и (2.26) имеем

$$(L_z + i\gamma \sin \varphi) \psi = \lambda \psi, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma \sin \varphi \right) \psi = i\lambda \psi, \quad (4.46)$$

$$\gamma = - \frac{\langle \cos \varphi \rangle}{2(\Delta \sin \varphi)^2}.$$

Решение для ψ имеет вид

$$\psi_{\min} = G \exp(-\gamma \cos \varphi + i\lambda \varphi). \quad (4.47)$$

Нормировочная константа дается формулой

$$G^{-2} = \int_0^{2\pi} \exp(-2\gamma \cos \varphi) d\varphi = 2\pi I_0(-2\gamma), \quad (4.48)$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя (см. [62]).

Из (4.46) следует, что

$$\lambda = \langle L_z \rangle + i\gamma \langle \sin \varphi \rangle, \quad (4.49)$$

где γ — некоторое действительное число. Но раз λ комплексно, то функция ψ_{\min} неоднозначна [см. (4.47)], поскольку содержит множитель $\exp(-\varphi \operatorname{Im} \lambda)$. Следовательно, λ должно быть действительным и равным $\langle L_z \rangle$. Таким образом, получен интересный результат, что в состоянии с минимальным произведением неопределенностей $\langle \sin \varphi \rangle = 0$.

Это проясняет свойства когерентных состояний с точки зрения соотношения неопределенностей; напомним, что лучшие с этой точки зрения когерентные состояния отвечают $\epsilon = 0$, т. е. $\langle \sin \varphi \rangle = 0$. При ϵ же, равных 1, т. е. при $\langle \cos \varphi \rangle = 0$, произведение неопределенностей в когерентных состояниях стремится к ∞ при $N \rightarrow 0$, хотя даже эти состояния являются состояниями, минимизирующими произведение неопределенностей при больших N . Данная ситуация аналогична случаю прямого метода, результаты которого неоднозначны при $\langle [x, y] \rangle = 0$. Подчеркнем следующий момент: когерентные состояния, являющиеся состояниями с минимальной координатно-импульсной неопределенностью, ведут себя подобно критическим состояниям для переменных угловой момент — фаза, в том числе и в случае $\langle \sin \varphi \rangle = 0$, отвечающем состоянию с минимальной неопределенностью. Это действительно замечательное свойство имеет

место также и в случае переменных число — фаза, обсуждаемом в следующем параграфе.

В заключение этого параграфа вычислим ожидаемые значения изучаемых операторов. Их легко рассчитать, используя известные свойства модифицированных функций Бесселя (см. [61], ф-ла (337.9a — b); [62])

$$\langle \sin \varphi \rangle_{\text{мин}} = 0, \quad \langle \sin^2 \varphi \rangle_{\text{мин}} = - \frac{\langle \cos \varphi \rangle}{2\gamma} = - \frac{I_1(-2\gamma)}{2\gamma I_0(-2\gamma)}, \quad (4.50)$$

$$\langle \cos^n \varphi \rangle_{\text{мин}} = \frac{I_n(-2\gamma)}{I_0(-2\gamma)},$$

$$\langle L_z \rangle_{\text{мин}} = \lambda, \quad \langle L_z^2 \rangle_{\text{мин}} = - \frac{1}{2} \gamma \frac{I_1(-2\gamma)}{I_0(-2\gamma)} + \lambda^2. \quad (4.51)$$

Отсюда сразу же следует равенство

$$\frac{(\Delta L_z)^2 (\Delta \sin \varphi)^2}{\langle \cos \varphi \rangle^2} \Big|_{\text{мин}} = \frac{1}{4}. \quad (4.52)$$

Отметим, наконец, что, как следует из равенства (4.45) и только что проведенного обсуждения, нет такого состояния, в котором симметричное произведение неопределенностей (4.11) достигало бы своего минимального значения. Это связано с тем, что, разыскивая такое состояние, мы проделали бы те же операции, что и при минимизации U с помощью состояний с $\langle \sin \varphi \rangle = \langle \cos \varphi \rangle \neq 0$ (что, как было выяснено нами, невозможно). Это пример соотношения неопределенностей типа обсуждавшегося в конце § 2, для которого не имеется минимизирующего состояния. Мы рассмотрим ниже еще один пример.

§ 5. ОПЕРАТОРЫ ЧИСЛА И ФАЗЫ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Квантовомеханический гармонический осциллятор обычно описывается в переменных координата — импульс (x, p) или в переменных рождение — уничтожение (a, a^\dagger) . В последних оператор сдвига (в картине Гейзенберга) выражается так:

$$x(t) = x_0 [a \exp(-i\omega t) + a^\dagger \exp(i\omega t)]. \quad (5.1)$$

Здесь $x_0 = (1/2m\omega)^{1/2}$ — среднеквадратичная флуктуация в нуле, являющаяся удобной единицей для измерения координаты.

В классической механике часто используют еще одну пару переменных, а именно пару амплитуда — фаза:

$$x(t) = 2A \cos(\varphi - \omega t). \quad (5.2)$$

Описанная ниже связь A и φ с классическими сопряженными переменными действие — угол заставляет искать аналоги переменных амплитуда — фаза в виде квантовомеханических операторов. Записывая равенство (5.2) в виде

$$x(t) = A [\exp(i\varphi) \exp(-i\omega t) + \exp(-i\varphi) \exp(i\omega t)] \quad (5.3)$$

и сравнивая его с (5.1), мы приходим к одному из возможных методов решения этой задачи. В классическом пределе оператор a пропорционален $A \exp(i\varphi)$. Соответствующая замена оператора уничтожения числом осуществляется взятием от (5.1) ожидаемого значения в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, причем фаза α выбирается равной φ :

$$\langle \alpha | x(t) | \alpha \rangle = 2x_0 J^{1/2} \cos(\varphi - \omega t), \quad (5.4)$$

$$\alpha = J^{1/2} \exp(i\varphi), \quad J = \bar{N}. \quad (5.5)$$

Можно предположить, что существует операторное разложение оператора уничтожения a , соответствующее (5.5). Пусть оператор a факторизуется в произведение эрмитовой функции оператора числа $f(N)$ и унитарного оператора U . Последний определяет тогда (по модулю 2π) эрмитов оператор $\Phi_{\text{опер}}$ фазы $U = \exp(i\Phi_{\text{опер}})$:

$$a = \exp(i\Phi_{\text{опер}}) f(N), \quad \Phi_{\text{опер}}^+ = \Phi_{\text{опер}}, \quad f^+ = f. \quad (5.6)$$

Требование $a^+a = N$ вместе с предположениями об эрмитовости дает

$$N = f^+ \exp(-i\Phi_{\text{опер}}) \exp(i\Phi_{\text{опер}}) f = f^2. \quad (5.7)$$

Выбирая положительный знак (в $\Phi_{\text{опер}}$ всегда можно включить знак минус), получаем соотношение

$$a = \exp(i\Phi_{\text{опер}}) N^{1/2} \quad (\text{неверно!}), \quad (5.8)$$

в точности такое же, какое можно получить из (5.5). [Отметим, что тот же результат (5.8) получится, если поменять порядок операторов f и $\exp(i\Phi_{\text{опер}})$ в (5.6). В этом случае

$$f^2 = \exp(i\varphi) N \exp(-i\varphi) \quad \text{и} \quad f = \exp(i\varphi) (N)^{1/2} \exp(-i\varphi),$$

a оператор $a = f \exp(i\varphi)$, как в (5.8).]

Замена переменных (5.8) проводилась даже в основополагающей статье Дирака [17] по квантованию электромагнитного поля. К сожалению, результат его формального расчета неверен (детали см. ниже). Но предположим на мгновение, что результат верен, чтобы провести обычное рассмотрение [63] соотношения неопределенностей число — фаза.

Вместо правила квантования

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (5.9)$$

(5.8) дает

$$\exp(i\varphi_{\text{опер}})N - N\exp(i\varphi_{\text{опер}}) = \exp(i\varphi_{\text{опер}}). \quad (5.10)$$

Это уравнение решается, если N и $\varphi_{\text{опер}}$ подчиняются соотношению

$$[N, \varphi_{\text{опер}}] = i, \quad (5.11)$$

поскольку по индукции из (5.11) находим, что

$$[N, \varphi_{\text{опер}}^n] = in\varphi_{\text{опер}}^{n-1}. \quad (5.12)$$

Умножая (5.12) на $i^n/n!$ и суммируя от 0 до ∞ , вновь получаем (5.10).

Ошибочное предположение, что N и $\varphi_{\text{опер}}$ — хорошо определенные эрмитовы операторы, ведет к тому, что называют «традиционным» соотношением неопределенности число — фаза

$$\Delta N \Delta \varphi \geq \frac{1}{2} \quad (\text{неверно!}), \quad (5.13)$$

но можно было бы обсудить (5.13) в духе квазиклассики, как сделали некоторые авторы [64—66].

Соотношение (5.13) неверно по двум причинам. Прежде всего имеется проблема периодичности (см. § 4). Ее можно было бы преодолеть, используя операторы синуса и косинуса [18]¹⁾

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{\text{опер}} &= \frac{1}{2} [\exp(i\varphi_{\text{опер}}) + \exp(-i\varphi_{\text{опер}})], \\ \sin \varphi_{\text{опер}} &= \frac{1}{2} i [\exp(-i\varphi_{\text{опер}}) - \exp(i\varphi_{\text{опер}})], \end{aligned} \quad (5.14)$$

но такая структура операторов ведет к противоречиям. Действительная трудность заключена в недопустимом предположении о существовании унитарного оператора $U = \exp(i\varphi_{\text{опер}})$.

Сускинд и Глоговер [18] первые обнаружили противоречия, следующие из предположения Дирака (5.8). Перепишем (5.8) в виде

$$a = UN^{1/2}, \quad U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \quad (5.15)$$

и проверим условия унитарности. Поскольку оператор U эквивалентен бесконечной матрице, необходимо проверить оба

¹⁾ Использовать операторы синуса и косинуса предложил на основе физических соображений Луисселл [58].

соотношения унитарности в (5.15). Применяя (5.15) к состоянию $|n\rangle$, видим, что U является понижающим оператором для $n = 1, 2, \dots$:

$$a|n\rangle = UN^{1/2}|n\rangle = n^{1/2}U|N\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

Поэтому

$$U|n\rangle = |n-1\rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

Для $n = 0$ из (5.16) не получаем никакой полезной информации. Из свойства полноты состояний $|n\rangle$ имеем для основного состояния

$$U|0\rangle = \sum_{n=0} d_n |n\rangle. \quad (5.18)$$

Чтобы определить действие U^+ на базис состояний с заданным числом возбуждений, используем свойство полноты и равенства (5.17), (5.18):

$$U^+|n\rangle = \sum_{m=0} \langle m|U^+|n\rangle|m\rangle = d_n^*|0\rangle + |n+1\rangle. \quad (5.19)$$

Теперь видно, эквивалентен ли оператор U^+U единичному оператору. Применяя U^+ к (5.17) и используя (5.19), получаем (для $n > 1$)

$$U^+U|n\rangle = U^+|n-1\rangle = d_{n-1}^*|0\rangle + |n\rangle. \quad (5.20)$$

Уравнение (5.20) говорит о том, что $d_{n-1} = 0$ для $n = 1, 2, \dots$, если $U^+U = 1$, т. е. $d_n = 0$ для всех n . Таким образом, из (5.18) получаем, что U обращает основное состояние в нуль:

$$U|0\rangle = 0. \quad (5.21)$$

Следовательно, в основном состоянии

$$\langle 0|U^+U|0\rangle = 0,$$

что противоречит унитарности¹⁾. Отметим, что оператор же UU^+ является единичным оператором, поскольку $U^+|n\rangle = |n+1\rangle$ для всех n [см. (5.19)]. Поэтому

$$\langle m|UU^+|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (5.22)$$

Поскольку оператор U неунитарен, нельзя определить эрмитов оператор фазы $\phi_{\text{опер}}$ соотношением $U = \exp(i\phi_{\text{опер}})$. Таким об-

¹⁾ Более простой способ показать это — скомбинировать (5.9) и (5.15). Это дает $UNU^+ = N + 1$, что нарушает унитарность. Мы благодарны профессору У. Мак-Глинну за данное указание.

разом, правильное квантовое описание переменной фазы следует искать на другом пути.

Чтобы найти подходящие переменные, рассмотрим формулировку задачи об осцилляторе с помощью скобок Пуассона. Такой метод угадывания квантовомеханических коммутаторов с успехом применялся Дираком. К настоящей проблеме его предложил применить Лернер¹⁾.

Переменные действие J и угол φ вводятся так:

$$p = (2m\omega J)^{1/2} \sin \varphi(t), \quad x = \left(\frac{2J}{m\omega}\right)^{1/2} \cos \varphi(t). \quad (5.23)$$

Гамильтониан не зависит от φ , поскольку

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad H = \omega J. \quad (5.24)$$

Таким образом, J — константа, в то время как $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ зависят от времени:

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \varphi(t)}{dt} &= \{\cos \varphi(t), H\} = \omega \sin \varphi(t), \\ \frac{d \sin \varphi(t)}{dt} &= \{\sin \varphi(t), H\} = -\omega \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Эти уравнения показывают, что фазовый угол $\varphi(t)$ равен

$$\varphi(t) = \varphi - \omega t. \quad (5.26)$$

В классическом пределе J связано с \bar{N} , $J = \bar{N}/\hbar$.

Наш опыт по учету условий периодичности заставляет искать операторные аналоги не самой фазы $\varphi(t)$, а $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$. Классические результаты (5.25) можно было бы воспроизвести, если бы были найдены операторы C и S , для которых замена в (5.25) скобок Пуассона коммутатором давала ту же самую алгебраическую структуру, что и сами скобки. В соответствии с общим рецептом

$$\{A, B\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (5.27)$$

Таким образом, перед нами поставлена задача нахождения таких операторов C и S , чтобы

$$\dot{C} = \frac{1}{i\hbar} [C, H] = \omega S, \quad \dot{S} = \frac{1}{i\hbar} [S, H] = -\omega C \quad (5.28)$$

¹⁾ E. Lerner, University of South Carolina Report, 1966, не опубликовано.

имели смысл как операторные уравнения ¹⁾. Записав квантово-механический гамильтониан как $H = N\hbar\omega$, упростим (5.28):

$$[C, N] = iS, \quad [S, N] = -iC. \quad (5.29)$$

Видим, что C и S подчиняются обычным уравнениям для (нормальных) мод колебаний

$$C + \omega^2 C = 0, \quad \ddot{S} + \omega^2 S = 0. \quad (5.30)$$

Чтобы решить (5.29), введем „экспоненциальные“ операторы E_{\pm} :

$$E_{\pm} \equiv C \mp iS. \quad (5.31)$$

Поскольку по предположению C и S эрмитовы, то

$$E_{\pm} = (E_{\mp})^{\dagger}. \quad (5.32)$$

В классическом пределе операторам E_{\pm} отвечают функции $\exp(\mp i\varphi)$, где φ — классическая фаза. Индексы у E поставлены потому, что, как будет показано, E_{\pm} — нормированные повышающий и понижающий операторы.

Уравнения (5.29) и (5.31) предполагают, что

$$[E_{\mp}, N] = \pm E_{\mp}. \quad (5.33)$$

Из (5.33) находим

$$N(E_{\pm}|n\rangle) = E_{\pm}(N \pm 1)|n\rangle = (n \pm 1)(E_{\pm}|n\rangle) \quad (5.34)$$

с одним исключением

$$E_-|0\rangle = 0, \quad (5.35)$$

позволяющим убрать отрицательные собственные значения N . Таким образом,

$$E_+|n\rangle = |n+1\rangle \text{ для любых } n, \\ E_-|n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & \text{для } n \geq 1, \\ 0 & \text{для } n = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Оператор E_- по существу идентичен U из (5.15). Однако, кроме того, что определение

$$U = aN^{-1/2} \quad (5.37)$$

¹⁾ Заметим, что, хотя $[\sin \varphi, \cos \varphi]$ исчезает, коммутатор $[S, C]$ не исчезает, но он пренебрежимо мал в классическом пределе. Используя тождество Якоби, с помощью (5.29) можно показать, что коммутатор $[S, C]$ диагонален в энергетическом представлении [см. (5.42)]. Большая часть последующего материала взята из работы Каррузерса и Ньюто [19]; эти результаты неявно или явно содержатся в работе Сускинды и Глоговера [18].

является неверным, оно еще и двусмысленно, поскольку спектр значений N включает точку нуль. Вместо этого используем формально эквивалентные¹⁾, но однозначные формы

$$E_- = (N + 1)^{-1/2} a, \quad E_+ = a^\dagger (N + 1)^{-1/2}. \quad (5.38)$$

Оператор $(N + 1)^{-1/2}$ хорошо определен, так что требования (5.36) определенно выполняются.

Операторы E_\pm не унитарны, но они «односторонне унитарны». Это показывается взятием матричных элементов от $E_\pm E_\mp$ на базисе состояний с заданным числом возбуждений

$$\begin{aligned} (E_- E_+)_{mn} &\equiv \langle m | E_- E_+ | n \rangle = \langle m | (E_+)^{\dagger} E_+ | n \rangle = \\ &= \langle m + 1 | n + 1 \rangle = \delta_{mn} \quad \text{для любых } m, n, \\ (E_+ E_-)_{mn} &= \begin{cases} 0 & \text{для } m, n = 0, \\ \delta_{mn} & \text{для } m, n \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Вводя для основного состояния проекционный оператор \mathcal{P}_0 , можно записать (5.39) в операторных обозначениях:

$$E_- E_+ = 1; \quad E_+ E_- = 1 - \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 \equiv |0\rangle\langle 0|. \quad (5.40)$$

Из этого расчета ясно, что окончание спектра собственных значений N в нуле отвечает за неунитарность оператора E_- и, следовательно, за несуществование сопряженного эрмитова оператора фазы $\varphi_{\text{опер}} = -i \ln E_-$. Хотя операторы E_\pm неунитарны, операторы C и S , получаемые путем решения (5.31), определенно эрмитовы:

$$C = \frac{1}{2} (E_- + E_+) = C^\dagger, \quad S = \frac{1}{2i} (E_- - E_+) = S^\dagger, \quad (5.41)$$

что следует из (5.32).

Итак, нам удалось построить точно эрмитовы операторы, отвечающие классической переменной — фаза. Прежде чем расматривать спектр собственных значений и собственные функции, изложим еще несколько важных результатов и сформулируем корректные соотношения неопределенностей число — фаза.

Из уравнений (5.28) видно, что C и S — по существу временные производные друг друга. Вполне естественно, что они не коммутируют. Точный расчет, основанный на (5.41),

¹⁾ Для любой «аналитической функции» оператора числа $f(N)$ имеем операторное уравнение $af(N) = f(N + 1)a$.

показывает, что

$$[C, S] = \frac{1}{2i} (E_- E_+ - E_+ E_-) = \frac{\mathcal{P}_0}{2i},$$

$$C^2 + S^2 = \frac{1}{2} (E_- E_+ + E_+ E_-) = 1 - \frac{1}{2} \mathcal{P}_0. \quad (5.42)$$

Некоммутативность C и S тесно связана с неунитарностью операторов $C \pm iS$. Это верно, поскольку для каждого оператора C и S можно определить независимые эрмитовы операторы φ_C и φ_S путем разложения в степенной ряд¹⁾

$$\varphi_C \equiv \cos^{-1} C = \frac{1}{2} \pi - \sin^{-1} C = \frac{1}{2} \pi - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} C^{2k+1},$$

$$\varphi_S \equiv \sin^{-1} S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} S^{2k+1}, \quad (5.43)$$

$$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-b+1)}{1 \cdot 2 \dots b}.$$

Разложения (5.43) законны, поскольку операторы C и S имеют ограниченные спектры (см. следующий параграф).

Действительно, через φ_C и φ_S можно определить унитарные операторы вида

$$U_C = \exp(i\varphi_C), \quad U_C^\dagger U_C = U_C U_C^\dagger = 1,$$

$$U_S = \exp(i\varphi_S), \quad U_S^\dagger U_S = U_S U_S^\dagger = 1, \quad (5.44)$$

но поскольку φ_C и φ_S не коммутируют, т. е.

$$[\varphi_C, \varphi_S] \neq 0, \quad (5.45)$$

это не противоречит предыдущим результатам. Записанный через φ_C и φ_S оператор уничтожения имеет вид

$$a = (N+1)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} [\exp(i\varphi_C) + \exp(i\varphi_S)] + \frac{1}{2} [\exp(-i\varphi_C) - \exp(-i\varphi_S)] \right\}. \quad (5.46)$$

По-видимому, следует отметить, что если бы существовал эрмитов оператор фазы $\varphi_{\text{Фонер}}$, то можно было бы дать простую интерпретацию соотношения неопределенностей энергия — время в случае гармонического осциллятора. Время можно было

¹⁾ Авторы благодарны д-ру К. Эленбергу за это наблюдение. Отметим также, что Левин ([67], раздел III) первым отметил существование единственного унитарного оператора $\exp(i\varphi)$.

бы определить как «движение» фазы осциллятора с оператором времени $t_{\text{опер}} \equiv \Phi_{\text{опер}}/\omega$. Тогда произведение $\Delta N \Delta \Phi$ было бы тем же самым, что и $\Delta E \Delta t/\hbar$. Но имеются два оператора Φ_C/ω и Φ_S/ω , что мешает такой интерпретации. Хотя было предложено много операторов времени [24—27], все они страдают от трудностей типа тех, которые встречаются при попытке определить единственный оператор фазы $\Phi_{\text{опер}}$. В добавление к проблеме времени как параметра (а не как оператора) в стандартной нерелятивистской квантовой теории отметим, что сопряженная по предположению времени переменная (H) имеет ограниченный спектр. По нашему мнению, проходившее до сих пор обсуждение соотношения неопределенностей энергия — время еще не окончилось [26, 28—30] и правильную интерпретацию соотношению неопределенностей энергия — время еще предстоит найти¹⁾.

Дадим теперь соотношения неопределенностей, следующие из коммутационных правил (5.29) и (5.42). Не прибегая к собственным функциям соответствующих операторов, получаем

$$\Delta N \Delta C \geq \frac{1}{2} \langle S \rangle, \quad (5.47)$$

$$\Delta N \Delta S \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle, \quad (5.48)$$

$$\Delta S \Delta C \geq \frac{1}{2} \langle \mathcal{P}_0 \rangle. \quad (5.49)$$

Соотношения (5.47) и (5.48) можно также привести к виду

$$\frac{(\Delta N)^2 (\Delta C)^2}{\langle S \rangle^2} > \frac{1}{4}, \quad (5.50)$$

$$\frac{(\Delta N)^2 (\Delta S)^2}{\langle C \rangle^2} > \frac{1}{4}. \quad (5.51)$$

Всякий раз, когда это можно, (5.47) и (5.48) сводятся к (5.13), как и в случае соотношений, описывающих L_z и ϕ . Возводя (5.47) и (5.48) в квадрат и складывая, получаем соотношение, симметричное относительно S и C :

$$\frac{(\Delta N)^2 [(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2]}{\langle C \rangle^2 + \langle S \rangle^2} \geq \frac{1}{4}. \quad (5.52)$$

В соответствии с (5.49) S и C можно одновременно точно измерить только тогда, когда перекрытие волновой функции данного состояния с функцией основного состояния пренебрежимо мало.

¹⁾ Работы [24—30] дают представление об обычном понимании этой проблемы, существовавшем до сих пор. Кроме того, в работах [26, 29, 30] ведутся горячие споры о природе соотношения неопределенностей время — энергия.

§ 6. СПЕКТРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРОВ СИНУСА И КОСИНУСА

Для правильной интерпретации эрмитовых операторов C и S существенно, что исследуется природа спектра собственных значений и соответствующих собственных функций ¹⁾. Собственные значения дают возможные результаты измерений C и S , в то время как перекрытие собственных функций с вектором состояния дает вероятности. Поскольку C и S не коммутируют, собственные функции оператора C не являются собственными функциями оператора S и наоборот.

Итак, C и S имеют непрерывные спектры собственных значений, лежащие в интервале $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ и $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ действительной оси. Здесь введен параметр θ , чтобы обычным образом обозначить эти собственные значения. Поскольку спектр непрерывен, собственные функции нельзя нормировать, хотя скалярные произведения можно выразить через дельта-функции. Собственные функции S и C по отдельности образуют полные наборы.

Рассмотрим уравнение на собственные значения

$$C|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle. \quad (6.1)$$

Разложим $|\lambda\rangle$ по состояниям с заданным числом колебаний и учтем простое действие оператора C на эти состояния [ср. (5.41)]:

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (6.2)$$

Коэффициенты C_n подчиняются рекуррентным соотношениям

$$2\lambda C_0 = C_1, \quad (6.3)$$

$$2\lambda C_{n+1} = C_n + C_{n+2}. \quad (6.4)$$

Соотношение (6.4) определяет C_2 и все более высокие C_n .

Если λ и p связаны:

$$2\lambda = p + \frac{1}{p}, \quad (6.5)$$

то рекуррентное соотношение (6.4) имеет решение

$$C_n = Ap^n + Bp^{-n} \quad (6.6)$$

для любых A и B . Поэтому (6.4) принимает вид

$$A(p^n + p^{n-2}) + B(p^{-n} + p^{-n-2}) = 2\lambda (Ap^{n+1} + Bp^{-n-1}). \quad (6.7)$$

¹⁾ Многое из § 6 и 7 основано на результатах Сускинда и Глоговера [18].

Для ограничения C_n при $n \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы $|p| = 1$. Записывая p как $\exp(i\varphi)$, имеем

$$p = \exp(i\theta), \quad \lambda = \cos \theta. \quad (6.8)$$

Любое θ дает решение, но все независимые решения перебираются лишь тогда, когда параметр θ пробегает конечную область. Выбор этой области обсуждается ниже.

Чтобы завершить решение, нужно найти A и B в (6.6). Коэффициент C_0 может быть выбран действительным, так что все C_n действительны. Для удобства выберем C_0 равным $\sin \theta$:

$$\begin{aligned} C_0 &= \sin \theta, & C_1 &= 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta, \\ C_2 &= 2 \cos \theta C_1 - C_0 = \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Легко показать, что общее решение имеет вид

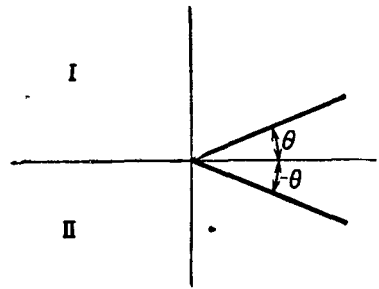
$$C_n = \sin(n+1)\theta. \quad (6.10)$$

Из действительности C_n ясно, что в (6.6) $B = A^*$. Записывая A в виде $A = |A| \exp(i\psi)$, имеем

$$C_n = 2|A| \cos(n\theta + \psi). \quad (6.11)$$

Сравнение этого выражения с точным выражением для C_2 показывает, что $2|A| = 1$, $\psi = \theta - \pi/2$, т. е. для произвольного

Фиг. 2.5. Независимые собственные функции $|\cos \theta\rangle$ содержатся в верхней полуплоскости переменной θ , помеченной цифрой I . Вектор состояния, соответствующий $-\theta$, есть просто $-\cos \theta$.



C_n получаем (6.10). Итак, собственные функции оператора C найдены:

$$C|\cos \theta\rangle = \cos \theta|\cos \theta\rangle, \quad (6.12)$$

$$|\cos \theta\rangle = K \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+1)\theta |n\rangle; \quad (6.13)$$

K — нормировочная константа, которую мы выберем позднее.

Из (6.13) видно, что все зависимые решения содержатся в интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ (область I на фиг. 2.5). Если θ лежит

в области I , то состояние $|\cos(-\theta)\rangle$, отвечающее углу $-\theta$ (из области II), есть $-|\cos\theta\rangle$. Естественно, что $|\cos(-\theta)\rangle$ имеет собственное значение $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Отметим, что, когда θ проходит значение 2π , вектор состояний меняется с $|\cos\theta\rangle$ на $-|\cos\theta\rangle$. Эта двузначность связана со спинорностью представлений группы вращений.

Исследуем далее ортогональность и полноту множества состояний $|\cos\theta\rangle$. Их скалярное произведение имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \cos\theta | \cos\theta' \rangle &= |K|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+1)\theta \sin(n+1)\theta' = \\ &= \frac{|K|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\cos(n+1)(\theta - \theta') - \cos(n+1)(\theta + \theta')]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Чтобы работать с обобщенными функциями встречающегося здесь типа, выпишем несколько полезных формул из книги Гельфанда и Шилова [68]

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx &= -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} x, \quad (6.15) \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(inx) &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n). \end{aligned}$$

Следовательно, правая сторона (6.14) принимает вид

$$-\frac{1}{2} \pi |K|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} [\delta(\theta - \theta' - 2\pi n) - \delta(\theta + \theta' - 2\pi n)]. \quad (6.16)$$

Если θ и θ' находятся в интервалах $0 \leq \theta, \theta' \leq \pi$, то вклады в (6.16) дает только член

$$\frac{1}{2} \pi |K|^2 [\delta(\theta - \theta') - \delta(\theta + \theta') - \delta(\theta + \theta' - 2\pi)]. \quad (6.17)$$

Покажем далее, что последние два члена в (6.17) в действительности вклада не дают. Второй член мог бы дать вклад только при наличии сингулярности на конце интервала при $\theta = \theta' = 0$. Чтобы исследовать этот вклад, положим $\theta = 0$, а θ' близким к нулю. Тогда последняя дельта-функция $\delta(\theta' - 2\pi)$ исчезает и первые два члена сокращаются. Таким же образом третий член дает вклад только при наличии сингулярности на конце интервала, при $\theta = \theta' = \pi$. Если положить $\theta = \pi$, а θ' близким к π , то средний член в (6.17) исчезает; остается

$\delta(\pi - \theta') - \delta(\theta' - \pi) = 0$. Таким образом, выбирая $K = (2/\pi)^{1/2}$, мы получаем

$$|\cos \theta\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+1)\theta |n\rangle, \quad (6.18)$$

$$\langle \cos \theta | \cos \theta' \rangle = \delta(\theta - \theta'). \quad (6.19)$$

Сингулярности в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ отсутствуют, поскольку нет состояний, связанных с этими точками. [Отметим, что все коэффициенты разложения в (6.18) исчезают, если θ равно нулю или π .]

Полнота множества состояний $|\cos \theta\rangle$ видна из следующего разложения единицы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\theta |\cos \theta\rangle \langle \cos \theta| &= \frac{2}{\pi} \sum_{m, n=0}^{\infty} |m\rangle \langle n| \int_0^{\pi} d\theta \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta = \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} |m\rangle \langle n| \delta_{mn} = 1. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Построение собственных функций S проводится по той же схеме:

$$S|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle, \quad |\mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} S_n |n\rangle.$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения имеют вид

$$S_1 = 2i\mu S_0, \quad 2i\mu S_{n+1} = S_{n+2} - S_n. \quad (6.22)$$

Второе рекуррентное соотношение имеет решение

$$S_n = Dq^n + Fq^{-n} \quad (6.23)$$

для произвольных D и F , если q и μ связаны:

$$2i\mu = q - \frac{1}{q}. \quad (6.24)$$

Опять единственная возможность ограничить при $n \rightarrow \infty$ коэффициент S_n — положить q по модулю равным единице:

$$q = e^{i\theta}, \quad \mu = \sin \theta; \quad (6.25)$$

спектр собственных значений оператора S составляют тогда числа от -1 до $+1$.

Чтобы получить коэффициенты разложения, удобно выбрать S_0 равным $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} S_0 &= \cos \theta, & S_1 &= 2i \cos \theta \sin \theta = i \sin 2\theta, \\ S_2 &= S_0 + 2i \sin \theta S_1 = \cos 3\theta, & S_3 &= i \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (6.26)$$

и вообще

$$\begin{aligned} S_n &= \cos(n+1)\theta, & n &= 0, 2, 4, \dots, \\ S_n &= i \sin(n+1)\theta, & n &= 1, 3, 5, \dots, \\ S_n &= \frac{1}{2} \{ \exp[i(n+1)\theta] - \exp[-i(n+1)(\theta - \pi)] \}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Результаты нашего расчета суммируются следующими формулами:

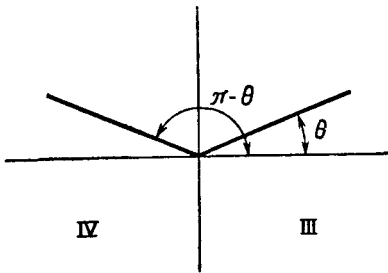
$$S|\sin \theta\rangle = \sin \theta |\sin \theta\rangle, \quad (6.28)$$

$$|\sin \theta\rangle = \frac{1}{2} K' \sum_{n=0}^{\infty} \{ \exp[i(n+1)\theta] - \exp[-i(n+1)(\theta - \pi)] \} |n\rangle, \quad (6.29)$$

где K' выбирается из условий нормировки. Из (6.29) видно, что

$$|\sin \theta\rangle = |\sin(\pi - \theta)\rangle, \quad (6.30)$$

поэтому полуплоскости θ достаточно для описания всех неза-



Фиг. 2.6. Независимые собственные функции $|\sin \theta\rangle$ содержатся в правой полуплоскости переменной θ , помеченной цифрой III.

Состояния, получаемые отражением относительно оси y , совпадают с ними: $|\sin \theta\rangle = |\sin(\pi - \theta)\rangle$.

висимых состояний. Выберем $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ (фиг. 2.6). Используя тождество (6.15), находим

$$\begin{aligned} \langle \sin \theta | \sin \theta' \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} |K'|^2 \sum_{n=0}^{\infty} [\cos(n+1)(\theta - \theta') - \cos(n+1)(\theta + \theta' - \pi)] = \\ &= \frac{1}{2} \pi |K'|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \delta(\theta - \theta' - 2\pi n) - \delta[\theta + \theta' - (2n+1)\pi] \}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Для θ, θ' , изменяющихся в интервалах $-\pi/2 \leq \theta, \theta' \leq \pi/2$, сингулярности могут возникать из члена

$$\frac{1}{2} \pi |K'|^2 [\delta(\theta - \theta') - \delta(\theta + \theta' - \pi) - \delta(\theta + \theta' + \pi)]. \quad (6.32)$$

Как и прежде, полагая $\theta = \pi/2$, а затем $-\pi/2$, показываем, что никаких вкладов в особых точках $\theta = \theta' = \pm \pi/2$ не возникает. Выбирая $K' = (2/\pi)^{1/2}$, получаем результаты, аналогичные (6.18) и (6.19):

$$|\sin \theta\rangle = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \{\exp[i(n+1)\theta] - \exp[-i(n+1)(\theta - \pi)]\} |n\rangle, \quad (6.33)$$

$$\langle \sin \theta | \sin \theta' \rangle = \delta(\theta - \theta'). \quad (6.34)$$

По аналогии с (6.20) находим соотношение полноты

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta |\sin \theta\rangle \langle \sin \theta| = 1. \quad (6.35)$$

Векторы $|\cos \theta\rangle$ и $|\sin \theta\rangle$ являются также собственными функциями определенных в (5.43) операторов φ_C и φ_S

$$\begin{aligned} \varphi_C |\cos \theta\rangle &= \arccos C |\cos \theta\rangle = \theta |\cos \theta\rangle, \\ \varphi_S |\sin \theta\rangle &= \arcsin S |\sin \theta\rangle = \theta |\sin \theta\rangle. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Этот результат получается с помощью разложений в ряды $\arccos C$ и $\arcsin S$, содержащихся в (5.43). Комбинация (6.36) с разложениями единицы [см. (6.20) и (6.35)] дает следующие представления для φ_C и φ_S :

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \int_0^{\pi} d\theta \cdot \theta |\cos \theta\rangle \langle \cos \theta|, \\ \varphi_S &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \theta |\sin \theta\rangle \langle \sin \theta|. \end{aligned} \quad (6.37)$$

В § 7 будет дано более полное рассмотрение физических свойств этих состояний.

Введем вспомогательные состояния $|\theta\rangle$, определяемые формулой

$$|\theta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{(2\pi)^{1/2}} |n\rangle. \quad (6.38)$$

На первый взгляд может показаться, что состояния $|\theta\rangle$ — собственные состояния фазы. Чтобы объяснить, почему это неверно, рассмотрим аналогичную конструкцию для переменных координата — импульс. Требуется, чтобы коммутатор

$$[x, p] = i, \quad (6.39)$$

удовлетворяется, если p определить как дифференциальный оператор

$$p = -i \frac{d}{dx}. \quad (6.40)$$

Собственные функции импульса суть $\exp(ipx)/(2\pi)^{1/2} = \langle x | p \rangle$. Собственная функция координаты $|x\rangle$ разлагается по собственным функциям $|p\rangle$, сопряженной переменной p с помощью функции преобразования $\langle p | x \rangle$:

$$|x\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-ipx) |p\rangle, \\ \langle x | x' \rangle = \delta(x - x'), \quad \langle p | p' \rangle = \delta(p - p'). \quad (6.41)$$

Можно было бы попытаться сделать то же самое и представить оператор числа в виде

$$N = i \frac{d}{d\varphi}, \quad [N, \varphi] = i \text{ (неверно!)}. \quad (6.42)$$

Собственные функции оператора N имели бы тогда с учетом периодичности вид $\exp(-in\varphi)/(2\pi)^{1/2}$. Но получается непрерывный спектр $-\infty < n < \infty$, в то время как известно, что правильный спектр простирается от 0 до ∞ и что собственные функции не являются простыми экспонентами.

Состояния $|\theta\rangle$ неортогональны. Используя формулы (6.15), получаем

$$\langle \theta | \theta' \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-in(\theta - \theta')] = \\ = (4\pi)^{-1} + \frac{1}{2} \delta(\theta - \theta') - \frac{i}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\theta - \theta'). \quad (6.43)$$

Но имеет место разложение единицы по состояниям $|\theta\rangle$:

$$\int_0^{2\pi} d\theta |\theta\rangle \langle \theta| = \sum_{m, n=0}^{\infty} |m\rangle \langle n| \int_0^{2\pi} \exp[i\theta(n - m)] \frac{d\theta}{2\pi} = \\ = \sum_{m, n} |m\rangle \langle n| \delta_{mn} = 1. \quad (6.44)$$

В случае двумерного углового момента можно представить L_z в коммутаторе $[\varphi, L_z] = i$ в виде $-id/d\varphi$. Собственные функции $\exp(im\varphi)/(2\pi)^{1/2}$ ($-\infty < m < \infty$) образуют полный набор с целыми m , так что собственные состояния оператора фазы суть

$$|\varphi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-im\varphi)}{(2\pi)^{1/2}} |m\rangle. \quad (6.45)$$

Волновая функция для собственного состояния оператора фазы имеет вид

$$\langle\varphi|\varphi'\rangle = \delta(\varphi - \varphi'), \quad (6.46)$$

где φ и φ' лежат в интервале между 0 и 2π . Для трехмерного углового момента $|m| \leq l$, так что все значения l должны быть использованы при построении дельта-функции (6.46). Этот пример ясно показывает, что не дискретность, а ограниченность спектра с одной стороны не дает возможности провести аналогию с $x-p$ -проблемой.

Но состояния $|\theta\rangle$ не всегда бесполезны; при некоторых обстоятельствах их можно использовать вместо состояний $|\cos\theta\rangle$ или $|\sin\theta\rangle$. В частности, используя (6.44), можно разложить произведение операторов по матричным элементам между этими состояниями

$$\langle\theta''|AB|\theta\rangle = \int \langle\theta''|A|\theta'\rangle \langle\theta'|B|\theta\rangle \frac{d\theta'}{2\pi}. \quad (6.47)$$

Состояния $|\cos\theta\rangle$ и $|\sin\theta\rangle$ связаны с $|\theta\rangle$ соотношениями

$$\begin{aligned} |\cos\theta\rangle &= -i [\exp(i\theta)|\theta\rangle - \exp(-i\theta)|(-\theta)\rangle], \\ |\sin\theta\rangle &= \exp(i\theta)|\theta\rangle + \exp(-i\theta)|(\pi - \theta)\rangle. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Состояния θ развиваются со временем очень просто. Действительно, как и можно было ожидать для «истинной» фазовой переменной,

$$\begin{aligned} |\theta(t)\rangle &= \exp(-i\tilde{H}t)|\theta\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-in\omega t)|n\rangle = |(\theta - \omega t)\rangle, \end{aligned} \quad (6.49)$$

где $\tilde{H} = H - 1/2\omega$ — энергия за вычетом энергии нулевых колебаний.

Некоторый интерес представляет зависимость от времени операторов C и S и их собственных функций. Чтобы разобраться в этом, построим оператор, отвечающий классической величине

$\cos(\varphi - \lambda)$. Поскольку φ как оператор не существует, нельзя воспользоваться очевидным определением. Пусть λ — действительный или в более общем случае даже эрмитов оператор. Определим (эрмитовы) операторы C_λ, S_λ соотношениями

$$\begin{aligned} 2C_\lambda &= \exp(-i\lambda) E_- + E_+ \exp(i\lambda), \\ 2iS_\lambda &= \exp(-i\lambda) E_- - E_+ \exp(i\lambda); \end{aligned} \quad (6.50)$$

при $\lambda = 0$ операторы C_0 и S_0 совпадают с C и S . Более того, как мы сейчас покажем, гейзенберговские операторы $C(t), S(t)$ фактически имеют тот же вид при $\lambda = \omega t$. Однако эта конструкция не подходит для описания разности фаз двух осцилляторов (см. следующий параграф).

Из основных правил коммутации имеем

$$\begin{aligned} \exp(iHt) a \exp(-iHt) &= a \exp(-i\omega t), \\ E_-(t) &= \exp(iHt) E_- \exp(-iHt) = E_- \exp(-i\omega t), \\ E_+(t) &= E_+ \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Поэтому оператор $C(t)$ дается формулой

$$C(t) = \frac{1}{2} [E_- \exp(-i\omega t) + E_+ \exp(i\omega t)], \quad (6.52)$$

откуда

$$C(t) = C_{\omega t}, \quad S(t) = S_{\omega t}. \quad (6.53)$$

Как следствие (6.52) имеем, что если $|\cos \theta\rangle$ — собственная функция оператора C при $t = 0$, то она не является собственной функцией $C(t)$ в более поздние моменты времени. Эквивалентно этому в картине Шредингера состояние $|\cos \theta(t)\rangle = \exp(-iH(t)) |\cos \theta\rangle$ не остается собственным состоянием оператора C .

На обычном языке говорят, что «волновой пакет расплывается». Хотя

$$C |\cos \theta(t)\rangle \neq \cos \theta |\cos \theta(t)\rangle, \quad (6.54)$$

тем не менее можно было бы предположить, что собственное значение меняется каким-либо простым образом, например $\cos \theta$ заменяется на $\cos(\theta - \omega t)$, как в случае состояний $|\theta\rangle$ [ср. (6.49)].

Это неверно; как следует из (6.49) и разложения $|\cos \theta\rangle$ по состояниям $|\pm \theta\rangle$ [см. (6.48)]:

$$\exp(-iHt) |\cos \theta\rangle = -i [\exp(i\theta) |0 - \omega t\rangle - \exp(-i\theta) |-\theta - \omega t\rangle]. \quad (6.55)$$

Следовательно, кроме (6.54), имеет место также

$$C |\cos \theta(t)\rangle \neq \cos(\theta - \omega t) |\cos \theta(t)\rangle. \quad (6.56)$$

Аналогичные соотношения справедливы для оператора синуса S .

Состояния $|\cos \theta\rangle$ и $|\sin \theta\rangle$ обладают свойствами, похожими на свойства обычных собственных функций координаты, $\delta(x - x_0)$. Если в данный момент частица находится в таком состоянии, то неопределенность импульса вызывает расплывание. Фазовые состояния являются обобщенными функциями, подобными $\delta(x - x_0)$. Они дают полезную идеализацию, проясняя принципиальные аспекты оператора фазы, но для практических расчетов они не так полезны, как нормируемые когерентные состояния или состояния с заданным числом возбуждений.

§ 7. ОПЕРАТОРЫ РАЗНОСТИ ФАЗ

Хотя для одного осциллятора переменные число и фазу нельзя задавать одновременно, можно получить определенную разность фаз двух независимых осцилляторов при фиксированном полном числе квантов в обеих системах. Обозначая два осциллятора индексами 1 и 2, имеем

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2, & N &= N_1 + N_2, \\ H_1 &= \omega_1 \left(N_1 + \frac{1}{2} \right), & H_2 &= \omega_2 \left(N_2 + \frac{1}{2} \right), \\ N_1 &= a_1^\dagger a_1, & N_2 &= a_2^\dagger a_2, & [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для наглядности можно представить себе пространственные координаты x_j для двух осцилляторов. Если построить произведение когерентных состояний

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \alpha_2\rangle &= |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle, \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 | x_j(t) | \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= 2x_0 |\alpha_j| \cos(\varphi_j - \omega_j t), \\ \alpha_j &= |\alpha_j| \exp(i\varphi_j), \end{aligned} \quad (7.2)$$

то, как видно из (7.2), будем иметь два движения, совершающиеся с разностью фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. Из прежнего опыта мы знаем, почему важно использовать $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ вместо самой разности фаз. Тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (7.3)$$

позволяют дать следующее определение операторов C_{12} и S_{12} , соответствующих косинусу и синусу разности фаз:

$$C_{12} \equiv C_1 C_2 + S_1 S_2, \quad (7.4)$$

$$S_{12} \equiv S_1 C_2 - S_2 C_1. \quad (7.5)$$

Для вычислительных целей полезно выразить C_{12} и S_{12} через повышающие и понижающие операторы $E_{i\pm}$ ¹⁾:

$$C_{12} = \frac{1}{2} (E_{1-} E_{2+} + E_{1+} E_{2-}), \quad (7.6)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2i} (E_{1-} E_{2+} - E_{1+} E_{2-}). \quad (7.7)$$

Отметим следующий важный результат: C_{12} и S_{12} коммутируют с оператором полного числа колебаний,

$$[C_{12}, N_1 + N_2] = 0, \quad [S_{12}, N_1 + N_2] = 0. \quad (7.8)$$

Это тотчас получается в результате сокращения после использования операторного тождества

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (7.9)$$

и правил коммутации

$$[C_j, N_k] = i\delta_{jk} S_j, \quad [S_j, N_k] = -i\delta_{jk} C_k. \quad (7.10)$$

Как следствие (7.8) можно найти собственные функции операторов C_{12} или S_{12} , обладающие фиксированным главным числом N . Поскольку число таких состояний конечно, волновая функция нормируема. Следовательно, спектры операторов C_{12} и S_{12} — точечные в противоположность спектрам операторов C и S . В пределе больших N спектр становится, как и следовало ожидать, плотным.

Интересно отметить, что C_{12} и S_{12} коммутируют с гамильтонианом лишь при $\omega_1 = \omega_2$:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{12} &= i[H, C_{12}] = (\omega_1 - \omega_2) S_{12}, \\ \dot{S}_{12} &= i[H, S_{12}] = -(\omega_1 - \omega_2) C_{12}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Таким образом, C_{12} и S_{12} являются нормальными координатами для моды колебаний, частота которой равна разности начальных частот двух осцилляторов

$$\begin{aligned} \ddot{C}_{12} + (\omega_1 - \omega_2) C_{12} &= 0, \\ \ddot{S}_{12} + (\omega_1 - \omega_2) S_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

¹⁾ Заметим, что в классическом пределе $E_{j\pm} \rightarrow \exp(\mp i\varphi_j)$ соотношения (7.6) и (7.7) имеют ожидаемую форму.

Как и прежде, C_{12} и S_{12} не коммутируют. Однако коммутатор $[C_{12}, S_{12}]$ диагонален на состояниях с заданным полным числом возбуждений. Это доказывается с помощью тождества Якоби

$$[[S_{12}, C_{12}], N] + [[C_{12}, N], S_{12}] + [[N, S_{12}], C_{12}] = 0, \quad (7.13)$$

поскольку, согласно (7.8), равенство (7.13) сводится к¹⁾

$$[[S_{12}, C_{12}], N] = 0. \quad (7.14)$$

Поэтому для состояний $|N'\rangle$ и $|N''\rangle$

$$\langle N'' | [[S_{12}, C_{12}], N] | N' \rangle = (N' - N'') \langle N'' | [S_{12}, C_{12}] | N' \rangle = 0. \quad (7.15)$$

Значит, при $N' \neq N''$ матричный элемент $\langle N'' | [S_{12}, C_{12}] | N' \rangle$ исчезает.

Изучим далее собственные функции C_{12} для различных произведений состояний с полным числом возбуждений N :

$$|\lambda_{12}\rangle = \sum_{n=0}^N b_n |n\rangle |N-n\rangle. \quad (7.16)$$

В каждом слагаемом в (7.16) левое состояние — множитель $|n\rangle$ относится к осциллятору номер один, правое же $|N-n\rangle$ — к осциллятору номер два. Мы часто будем пользоваться упрощенным обозначением

$$|m, n\rangle = |m\rangle |n\rangle. \quad (7.17)$$

При $N = 0$ состояние $|0, 0\rangle$ является собственной функцией оператора C_{12} с нулевым собственным значением

$$C_{12} |0, 0\rangle = 0. \quad (7.18)$$

При $N = 1$ — два возможных состояния, $|1, 0\rangle$ и $|0, 1\rangle$. Уравнение на собственные значения

$$C_{12}(b_0 |0, 1\rangle + b_1 |1, 0\rangle) = \lambda(b_0 |0, 1\rangle + b_1 |1, 0\rangle) \quad (7.19)$$

накладывает связь на коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 2\lambda b_0 \\ b_0 &= 2\lambda b_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}. \quad (7.20)$$

Две нормированные собственные функции суть

$$\left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} (|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle). \quad (7.21)$$

¹⁾ Простой расчет показывает, что $[S_{12}, C_{12}] = (\mathcal{P}_0^{(1)} - \mathcal{P}_0^{(2)})/2i$, где $\mathcal{P}_0^{(j)}$ — оператор проектирования на основное состояние осциллятора j .

Эти уравнения уже решены нами для $n = 0, 1, 2$. Для $n \geq 2$ последнее рекуррентное соотношение используется для расчета всех b_n , лежащих между b_1 и b_{N-1} . Это соотношение в точности того же вида, что и (6.4), поэтому

$$b_n = Ap^n + Bp^{-n}, \quad 2\lambda = p + \frac{1}{p}; \quad (7.26)$$

причины же, по которым $\lambda = \cos \theta$, другие. Поскольку λ действительно (как собственное значение эрмитова оператора), то $p^{-1} = p^*$. Если записать p как $A \exp(i\theta)$, то станет ясно, что $A = \pm 1$. Знак минус всегда можно включить в θ , так что собственные значения оператора C_{12} равны

$$\lambda_{N_r} = \cos \theta_{N_r}. \quad (7.27)$$

Обрыв ряда на b_N ограничивает в этой задаче θ_{N_r} некоторыми значениями. Как и при анализе собственных функций оператора C , положим $b_0 = \sin \theta$, $b_1 = \sin 2\theta$, ..., $b_n = \sin(n+1)\theta$. Второе равенство в (7.25) налагает дополнительное условие

$$2 \cos \theta \sin(N+1)\theta = \sin N\theta,$$

или

$$\sin(N+2)\theta = 0. \quad (7.28)$$

Последнее уравнение решается с помощью (7.24). Изменение θ на $-\theta$ не дает дополнительных решений, поскольку b_n просто меняет знак. Коэффициент b_n опять-таки тождественно равен нулю при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Для $N = 10$ спектр собственных значений показан на фиг. 2.7, *г*. При больших N спектр становится плотным.

Нормированные собственные функции имеют вид

$$|\cos \theta_{N_r}\rangle = \left(\frac{2}{N+2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^N \sin(n+1)\theta_{N_r} |n\rangle |N-n\rangle, \quad (7.29)$$

$$\langle \cos \theta_{N_r} | \cos \theta_{M_s} \rangle = \delta_{NM} \delta_{rs}. \quad (7.30)$$

Собственные значения θ_{N_r} исчерпываются значениями (7.24). Для ясности собственные функции можно было бы индексировать и собственными значениями оператора числа $|N, \cos \theta_{N_r}\rangle$. Собственные функции, имеющие разные N , автоматически ортогональны.

Задача на собственные значения оператора S_{12} решается аналогично. Пишем

$$S_{12} |\mu\rangle = \mu |\mu\rangle. \quad |\mu\rangle = \sum_{n=0}^N C_n |n\rangle |N-n\rangle. \quad (7.31)$$

Основное состояние удовлетворяет уравнению

$$S_{12}|0, 0\rangle = 0. \quad (7.32)$$

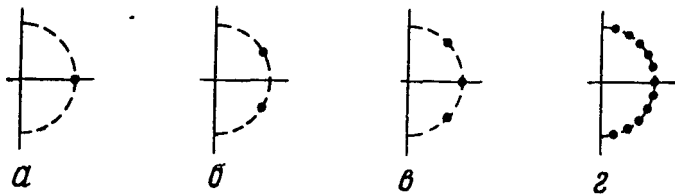
Рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты разложения, имеют вид

$$2i\mu C_0 = C_1, \quad 2i\mu C_N = -C_{N-1}, \quad 2i\mu C_n = C_{n+1} - C_{n-1}. \quad (7.33)$$

Для полноты картины дадим решение для $N = 1, 2$ [ср. (7.21) — (7.23)]:

$$\begin{aligned} N = 1, \quad \mu = \pm \frac{1}{2}, \quad \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle &= 2^{-1/2} (|1, 0\rangle \pm i|0, 1\rangle), \\ N = 2, \quad \mu = \pm 2^{-1/2}, \quad \left| \pm 2^{-1/2} \right\rangle &= \frac{1}{2} (|2, 0\rangle \mp i2^{1/2}|1, 1\rangle - |0, 2\rangle), \\ \mu = 0, \quad |0\rangle &= 2^{-1/2} (|2, 0\rangle - |0, 2\rangle). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Фиг. 2.8 показывает допустимые значения $\varphi = \arcsin \mu$.



Фиг. 2.8. Собственные значения оператора снуса разности фаз представлены точками единичной окружности.

a, б, в — полное число собственных значений равно 0, 1 и 2 соответственно; *г* — когда N велико, спектр становится плотным (показано качественно). Все независимые состояния исчерпываются при значениях θ в правой полуплоскости.

В случае произвольного N остается в силе большая часть анализа, проделанного для оператора синуса (§ 6). Положив $C_0 = \cos \varphi$, можем сразу написать общий член: он дается формулой (6.27). Второе соотношение в (7.33) дает дополнительное условие, фиксирующее φ :

$$2i(\sin \varphi) C_N = -C_{N-1}, \quad (7.35)$$

которое можно упростить:

$$\exp[i(N+2)\varphi] + (-1)^{N+1} \exp[-i(N+2)\varphi] = 0, \quad (7.36)$$

или

$$\begin{aligned} \sin(N+2)\varphi = 0, \quad N = 0, 2, 4, \dots, \\ \cos(N+2)\varphi = 0, \quad N = 1, 3, 5, \dots, \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\varphi_{Nr} = \frac{r\pi}{N+2} - \frac{\pi}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, N+1. \quad (7.38)$$

(Можно было бы взять $+\pi/2$ вместо $-\pi/2$.) Заметим, что замена $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ не меняет C_n , так что все независимые решения получаются при φ , лежащем в интервале

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (7.39)$$

Собственные значения оператора S_{12} , представленные на фиг. 2.8, получены поворотом фиг. 2.7 на угол $\pi/2$. Спектры операторов S_{12} и C_{12} идентичны. Нормированные собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} S_{12} |\sin \varphi_{N_r}\rangle &= \sin \varphi_{N_r} |\sin \varphi_{N_r}\rangle, \\ |\sin \varphi_{N_r}\rangle &= \left(\frac{2}{N+2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2} \{ \exp [i(n+1)\varphi_{N_r}] - \\ &\quad - \exp [-i(\varphi_{N_r} - \pi)(n+1)] \} |n\rangle |N-n\rangle = \\ &= \left(\frac{2}{N+2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^N (-i)^n \sin(n+1)\vartheta_{N_r} |n\rangle |N-n\rangle, \\ \langle \sin \varphi_{N_r} | \sin \varphi_{M_s} \rangle &= \delta_{NM} \delta_{rs}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

где φ_{N_r} дается формулой (7.38), а ϑ_{N_r} — формулой (7.24).

§ 8. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ, ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ И СОСТОЯНИЙ С МИНИМАЛЬНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

а. Когерентные состояния: соотношения неопределенностей число — фаза

Среди многих типов волновых функций, описывающих классический предел некоторой системы, когерентные состояния имеют особое значение, поскольку эти состояния возникают при линейном взаимодействии осциллятора с заданной классической силой [50]. Так как эта модель является прототипом механизма излучения классического источника тока, то у нее много важных приложений. Следует подчеркнуть, что когерентные состояния возникают даже тогда, когда среднее число квантов так мало, что состояние нельзя называть классическим.

Как показано в § 3, когерентные состояния являются волновыми пакетами с минимальным произведением неопределен-

ностей координата — импульс. Поэтому они весьма хороши, хотя и не являются состояниями с минимальным произведением неопределенностей число — фаза, а для всех практических целей при $N > 1$ они являются таковыми. В п. «г» мы рассмотрим истинные состояния с минимальными неопределенностями числа и фазы, найденные Джакивом [16].

Действие операторов C и S на когерентные состояния не является очень простым:

$$C|\alpha\rangle = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^{n+1}}{[(n+1)!]^{1/2}} |n\rangle + \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n+1\rangle \right\},$$

$$S|\alpha\rangle = (2i)^{-1} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha^{n+1}}{[(n+1)!]^{1/2}} |n\rangle - \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n+1\rangle \right]. \quad (8.1)$$

Представим теперь α в виде $N^{1/2} \exp(i\varphi)$ (где $\langle N \rangle$ записано для упрощения обозначений в виде N), тогда N будет связано с α формулой

$$N = |\alpha|^2. \quad (8.2)$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \langle \alpha | C | \alpha \rangle &= N^{1/2} e^{-N} \psi_1(N) \cos \varphi, \\ \langle \alpha | S | \alpha \rangle &= N^{1/2} e^{-N} \psi_1(N) \sin \varphi, \\ \langle \alpha | C^2 | \alpha \rangle &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-N} + \frac{1}{2} N e^{-N} \psi_2(N) \cos 2\varphi, \\ \langle \alpha | S^2 | \alpha \rangle &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-N} - \frac{1}{2} N e^{-N} \psi_2(N) \cos 2\varphi, \\ \langle \alpha | C^2 + S^2 | \alpha \rangle &= 1 - \frac{1}{2} e^{-N}, \\ \langle \alpha | C^2 - S^2 | \alpha \rangle &= N e^{-N} \psi_2(N) \cos 2\varphi, \\ \langle \alpha | CS + SC | \alpha \rangle &= N e^{-N} \psi_2(N) \sin 2\varphi, \\ \langle \alpha | CS - SC | \alpha \rangle &= \frac{1}{2} i e^{-N}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где функции $\psi_\lambda(N)$ определены степенными рядами

$$\psi_1(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n! [(n+1)!]^{1/2}}, \quad (8.4a)$$

$$\psi_2(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n! [(n+1)(n+2)!]^{1/2}}. \quad (8.4b)$$

Ниже нам понадобятся асимптотические пределы ψ_1 и ψ_2 . Рассчитаем их. При $N \ll 1$ нужно просто взять несколько первых членов (8.4):

$$\begin{aligned}\psi_1(N) &\sim 1 + \frac{N}{2} + \frac{N^2}{2(3)^{1/2}} + \dots, & N \rightarrow 0, \\ \psi_2(N) &\sim \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{N}{6^{1/2}} + \frac{N^2}{4(3)^{1/2}} + \dots, & N \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (8.5)$$

При больших N вычисляем ψ_1 , используя тождество¹⁾

$$\frac{1}{(n+1)^{z+1}} \equiv \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_0^\infty t^z \exp[-(n+1)t] dt, \quad (8.6)$$

где Γ — гамма-функция; в нашей задаче $z = -1/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_1(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n! \pi^{1/2}} \int_0^\infty t^{1/2} \exp[-(n+1)t] dt = \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty dt t^{1/2} e^{-t} \exp(Ne^{-t}) = \frac{e^N}{\pi^{1/2}} \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{1-y} \right) \right]^{-1/2} e^{-Ny} dy.\end{aligned}\quad (8.7)$$

Мы сделали замену

$$e^t = 1 - y. \quad (8.8)$$

Используя затем разложение

$$\left[\ln \left(\frac{1}{1-y} \right) \right]^c = y^c + \frac{1}{2} c y^{c+1} + \dots \quad (8.9)$$

и вводя

$$x = Ny, \quad (8.10)$$

получаем

$$\psi_1(N) = \frac{e^N}{(\pi N)^{1/2}} \int_0^N \left[x^{-1/2} - \frac{x^{1/2}}{4N} + \dots \right] e^{-x} dx. \quad (8.11)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ интегралы становятся гамма-функциями, и мы получаем

$$\psi_1(N) \sim \frac{e^N}{N} [1 - (8N)^{-1} + \dots]. \quad (8.12)$$

Чтобы найти $\psi_2(N \rightarrow \infty)$, заметим, во-первых, что при $c \gg 1$

$$[c^2 + c]^{1/2} = c + \frac{1}{2} - \frac{1}{8c} + \dots, \quad (8.13)$$

¹⁾ Авторы благодарны профессору Х. Уидому за помощь в вычислении этого интеграла.

так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{[c^2 + c]^{1/2}} &= \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{2c} + \frac{3}{8c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{2(c+1)} - \frac{1}{8(c+1)(c+2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^3}\right) \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Принимая во внимание, что

$$(n+1)(n+2) = (n+1)^2 + (n+1), \quad (8.15)$$

находим

$$\begin{aligned} \Psi_2(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{(n+1)!} \{ 1 - [2(n+2)]^{-1} - [8(n+2)(n+3)]^{-1} + \dots \} = \\ &= \frac{e^N}{N} \left[1 - (2N)^{-1} - \frac{1}{8N^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Главные члены в (5.12) и (5.16) можно было бы предсказать заранее из требования существования правильных классических пределов для ожидаемых значений операторов.

При $N \gg 1$ ожидаемое классическое поведение таково:

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &\sim \cos \varphi, & \langle S \rangle &\sim \sin \varphi, \\ \langle C^2 \rangle &\sim \cos^2 \varphi, & \langle S^2 \rangle &\sim \sin^2 \varphi, \\ \langle C^2 + S^2 \rangle &\sim 1, & \langle C^2 - S^2 \rangle &\sim \cos 2\varphi, \\ \langle SC + CS \rangle &\sim \sin 2\varphi, & \langle CS - SC \rangle &\sim 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ясно, что при $N \gg 1$ для любых тригонометрических операторов ожидаемое значение $\langle \alpha | F(C, S) | \alpha \rangle$ любой функции F от переменных C и S переходит в $F(\cos \varphi, \sin \varphi)$. При $N \gg 1$ вклад в $|\alpha\rangle$ основного состояния пренебрежимо мал, $\mathcal{O}(e^{-N})$, поэтому C и S можно рассматривать как коммутирующие переменные.

В противоположность классическому пределу (8.17) имеется «квантовый предел» для когерентных состояний при $N \ll 1$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &\sim N^{1/2} \sin \varphi, & \langle C \rangle &\sim N^{1/2} \cos \varphi, \\ \langle S^2 \rangle &\sim \frac{1}{4}, & \langle C^2 \rangle &\sim \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

(Эти соотношения немедленно следуют из того факта, что в этом пределе $|\alpha\rangle \approx |0\rangle$.)

Для нас особенно интересен вид соотношений неопределенностей (5.47) — (5.52) в когерентных состояниях. Если последние действительно когерентны, то следует ожидать приближения к равенству. В действительности так оно и есть [19].

Напомним, что в когерентных состояниях вклады состояний с заданным числом возбуждений подчиняются распределению Пуассона [50]:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle. \quad (8.19)$$

Нам нужно теперь вычислить величины

$$P(N, \varphi) = \frac{(\Delta N)^2 (\Delta C)^2}{\langle S \rangle^2}, \quad (8.20)$$

$$Q(N, \varphi) = \frac{(\Delta N)^2 (\Delta S)^2}{\langle C \rangle^2} \quad (8.21)$$

при различных φ как функции $\langle N \rangle$ и сравнить их с минимальным значением $1/4$. При больших и малых N можно вычислить (8.20) и (8.21) с помощью асимптотических формул (8.5), (8.12) и (8.16).

Удерживая в (8.12) и (8.16) в скобках члены порядка не выше $1/N$, находим

$$(\Delta C)^2 \sim \frac{\sin^2 \varphi}{4N}, \quad (\Delta S)^2 \sim \frac{\cos^2 \varphi}{4N} \quad (N \gg 1), \quad (8.22)$$

так что при $N \gg 1$ получаем минимально возможные значения

$$P(N, \varphi) \sim \frac{1}{4}, \quad Q(N, \varphi) \sim \frac{1}{4}. \quad (8.23)$$

При $N \ll 1$, используя (8.18), получаем

$$P(N, \varphi) \sim \frac{1}{4 \sin^2 \varphi},$$

$$Q(N, \varphi) \sim \frac{1}{4 \cos^2 \varphi} \quad (N \ll 1). \quad (8.24)$$

При промежуточных значениях N для получения результатов нужно использовать численную оценку функций $\psi_\lambda(N)$. Опубликованные в работе [19] результаты численного счета Q на ЭВМ показаны на фиг. 2.9. Отметим, что если среднее число возбуждений существенно больше 1, то когерентные состояния являются фактически состояниями с минимальным произведением неопределенностей число — фаза. Замена на фиг. 2.9 φ на $\pi/2 - \varphi$ переводит его в семейство кривых $P(N, \varphi)$.

Симметричное произведение неопределенностей (5.52)

$$U = \frac{(\Delta N)^2 [(\Delta C)^2 + (\Delta S)^2]}{\langle S^2 \rangle + \langle C \rangle^2} \quad (8.25)$$

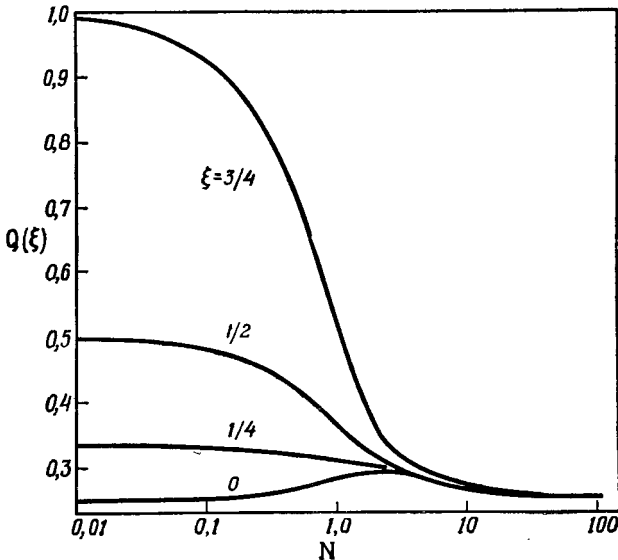
не зависит от фазы φ . Явное выражение для U таково:

$$U = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-N} - Ne^{-2N}\psi_1^2(N)}{e^{-2N}\psi_1^2(N)}. \quad (8.26)$$

Подставляя (8.3) и (8.19) в (8.20) и (8.21) и сравнивая результат с (8.25), видим, что

$$P\left(N, \frac{\pi}{4}\right) = Q\left(N, \frac{\pi}{4}\right) = U. \quad (8.27)$$

Таким образом, U дается на фиг. 2.9 кривой с $\xi \equiv \sin^2 \varphi = 1/2$.



Фиг. 2.9. Величина $Q(\xi) = S(\xi)/\langle G \rangle^2$ (следовательно, $\xi = \sin^2 \varphi$) как функция $(\Delta N)^2 = N$ при разных ξ для когерентных состояний. Согласно (5.51), $Q(\xi)$ должно быть больше $1/4$.

Равенство (8.27) принадлежит к результатам того же типа, которые получались в § 4, п. «б» для случая угловой момент — угол. Из асимптотических формул видно, что

$$\begin{aligned} U &\sim \frac{1}{2}, & N \ll 1, \\ U &\sim \frac{1}{4}, & N \gg 1. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Ни для каких значений N величина U не превосходит минимального значения больше чем в 2 раза.

Рассмотрим, наконец, соотношение неопределенностей (5.49). В когерентных состояниях оно принимает вид

$$(\Delta S)(\Delta C) \geq \frac{1}{4} e^{-N}. \quad (8.29)$$

Из (8.18) следует, что при $N \ll 1$ левая сторона (8.29) равна $1/4$, так что равенство удовлетворяется. При $N \gg 1$ левая сторона уменьшается как $1/N^2$:

$$(\Delta S)^2 (\Delta C)^2 \sim \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{16N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (8.30)$$

[ср. с (8.12), которое столь же мало, как и правая сторона (8.29)].

Рассмотрим, наконец, временную зависимость гейзенберговских операторов в когерентных состояниях. Имеем

$$\langle \alpha | C(t) | \alpha \rangle = \langle \alpha | \exp(iHt) C \exp(-iHt) | \alpha \rangle = \langle \alpha(t) | C | \alpha(t) \rangle, \quad (8.31)$$

где $\alpha(t) = \alpha \exp(-i\omega t) = N^{1/2} \exp(i\varphi - i\omega t)$. Этот расчет сводится к предыдущему с заменой $\varphi \rightarrow \varphi - \omega t$, так что выражения (8.3) принимают вид

$$\langle \alpha | C(t) | \alpha \rangle = N^{1/2} e^{-N} \psi_1(N) \cos(\varphi - \omega t) \quad (8.32)$$

и т. д.

Полезно отметить подобие полученных численных результатов и результатов для случая угловой момент — угол в когерентных состояниях (ср. фиг. 2.4 и 2.9). Это проливает дополнительный свет на роль операторов S и C .

б. Флуктуации фазы в состояниях с заданным числом возбуждений

В энергетическом базисе $\Delta N = 0$, так что соотношения неопределенностей (5.47) — (5.52) сводятся к утверждению, не несущему информации, $0 \geq 0$. Все нечетные степени C и S имеют нулевые ожидаемые значения в энергетических состояниях:

$$\begin{aligned} \langle n | C^{2m+1} | n \rangle &= \langle n | S^{2m+1} | n \rangle = 0, & m, n - \text{любые,} \\ \langle n | C^l S^m | n \rangle &= 0, & (l+m) - \text{нечётно, } n - \text{любые,} \end{aligned} \quad (8.33)$$

поскольку число операторов уничтожения должно соответствовать числу операторов рождения, чтобы получалось нулевое ожидаемое значение.

Рассмотрим классическое распределение $P(\varphi) = 1/(2\pi)$. Для него

$$\langle \cos^{2m} \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m}. \quad (8.34)$$

Среднее $\langle \sin^{2m} \varphi \rangle$ совпадает с (8.34). Поскольку обычно говорят, что при заданном N фаза «совершенно неопределенна», то мы рассчитаем теперь

$$\langle n | C^{2m} | n \rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.35)$$

чтобы показать несправедливость этого утверждения.

Из равенств

$$\begin{aligned} C | n \rangle &= \frac{1}{2} (| n + 1 \rangle + | n - 1 \rangle), \quad n \geq 1, \\ C^2 | n \rangle &= \frac{1}{4} (| n - 2 \rangle + 2 | n \rangle + | n + 2 \rangle), \quad n \geq 2, \\ C^3 | n \rangle &= \frac{1}{8} (| n - 3 \rangle + 3 | n - 1 \rangle + 3 | n + 1 \rangle + | n + 3 \rangle), \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (8.36)$$

найдем

$$\begin{aligned} \langle n | C^2 | n \rangle &= \frac{1}{2}, \quad n \geq 1, & \langle n | C^6 | n \rangle &= \frac{20}{64}, \quad n \geq 3, \\ \langle n | C^2 | n \rangle &= \frac{1}{4}, \quad n = 0, & \langle n | C^6 | n \rangle &= \frac{13}{64}, \quad n = 2, \\ \langle n | C^4 | n \rangle &= \frac{3}{8}, \quad n \geq 2, & \langle n | C^6 | n \rangle &= \frac{14}{64}, \quad n = 1, \\ \langle n | C^4 | n \rangle &= \frac{5}{16}, \quad n = 1, & \langle n | C^6 | n \rangle &= \frac{5}{64}, \quad n = 0. \\ \langle n | C^4 | n \rangle &= \frac{1}{8}, \quad n = 0, \end{aligned} \quad (8.37)$$

Сравнение классического и квантового результатов проведено в табл. 2.1. Если состояние $| n \rangle$ обладает не настолько малым числом возбуждений, чтобы применение к нему оператора C^m

ТАБЛИЦА 2.1

Сравнение классических и квантовых ожидаемых значений (в энергетических состояниях) степеней косинуса

Ожидаемые значения всех нечетных степеней в обеих теориях исчезают.

n	$\langle C^m \rangle$	$\langle n C^m n \rangle$
0	1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ($n \geq 1$)
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$ ($n \geq 2$)
6	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$ ($n \geq 3$)

уничтожило некоторые из получающихся в результате состояний, то моменты $\langle C^{2m} \rangle$ согласуются с классическими до $\langle C^6 \rangle$; начиная же с последнего величины моментов расходятся. Таким образом, первые пять моментов C для энергетических состояний $|n\rangle$ и равномерного классического распределения фазы совпадают, если $n > 2$.

в. Фазовые состояния

Собственные функции оператора C (или S) дают нулевые ΔC (или ΔS). Флуктуация числа возбуждений в собственных состояниях оператора C (или S) неопределенна (бесконечна). Качественно имеем обычный результат: полностью определенная фаза приводит к полностью неопределенному числу возбуждений.

Упомянем также, что Джакив [16] своим аналитическим методом, обсуждавшимся в § 2, показал отсутствие нормируемых состояний, минимизирующих произведения неопределенностей для C и S (5.49). Но можно было бы использовать и ненормируемые состояния, такие, как $|\theta\rangle$, $|\cos \theta\rangle$ или $|\sin \theta\rangle$.

г. Состояния с минимальным произведением неопределенностей

Из § 2, п. «в» следует, что для усложненных соотношений неопределенностей (5.50) и (5.51) можно использовать прямой метод. Джакив [16] сделал это и получил для (5.50) состояния с минимальными неопределенностями.

Если

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle, \quad (8.38)$$

то

$$[N + i\gamma C]|\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle. \quad (8.39)$$

Беря ожидаемые значения, получаем рекуррентное соотношение

$$(\lambda - n) a_n = \left(\frac{i\gamma}{2}\right)(a_{n+1} + a_{n-1}), \quad a_{-1} = 0, \quad (8.40)$$

где для совместности необходимо, чтобы

$$\lambda = \langle N \rangle + i\gamma \langle C \rangle, \quad \gamma = \left[\frac{(\Delta N)^2}{(\Delta C)^2} \right]^{1/2}. \quad (8.41)$$

Если теперь положить $a_n = (-i)^n b_n$, то

$$\left(\frac{2}{\gamma}\right)(n - \lambda) b_n = (b_{n-1} - b_{n+1}), \quad b_{-1} = 0. \quad (8.42)$$

Если λ действительно, т. е. $\langle C \rangle = 0$, то решение имеет вид (см. [62], гл. 4):

$$b_n = \nu I_{n-\lambda}(\gamma), \quad (8.43)$$

где ν — нормировочная константа, $I_\mu(\gamma)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода μ -го порядка. Нам нужно, чтобы $I_{-\lambda}(\gamma) = 0$, поэтому λ удовлетворяет условию $2h + 1 > \lambda > 2h$, $h = 0, 1, \dots$. Таким образом, наше состояние имеет вид

$$|\lambda, \gamma\rangle_C = \nu \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n I_{n-\lambda}(\gamma) |n\rangle, \quad \langle \lambda, \gamma | \lambda, \gamma \rangle_C = 1. \quad (8.44)$$

Это сложное состояние, но оно является состоянием с минимальным произведением неопределенностей. В табл. 2.2 проведено сравнение главных качественных свойств различных векторов состояний.

ТАБЛИЦА 2.2

Сравнение важных качественных свойств некоторых интересных векторов состояния для гармонического осциллятора

Тип состояния	Свойство оператора числа возбуждений	Свойство оператора фазы	Нормируем ли вектор состояния?
1. Энергетическое, $ n\rangle$	$(\Delta N)^2 = 0$	$(\Delta C)^2 = 1/2^a$	Да
2. Фазовое, $ \cos \theta\rangle$	$(\Delta N)^2 = \infty$	$(\Delta C)^2 = 0$	Нет
3. Когерентное, $ \alpha\rangle$	$(\Delta N)^2 = N$	Сложное ^{б)}	Да
4. С минимальным произведением неопределенностей, $ \lambda, \gamma\rangle_C$	Сложное ^{б)}	Сложное ^{б)}	»
5. С фиксированной разностью фаз, $ \cos \theta_{12}\rangle$	$(\Delta N_{\text{поли}})^2 = 0$	$(\Delta C_{12})^2 = 0$	»

^{а)} Кроме как в основном состоянии, где $(\Delta C)^2 = 1/4$.

^{б)} См. обсуждение в тексте.

Аналогичным образом можно рассчитать состояния с минимальным произведением неопределенностей (5.51):

$$|\lambda, \gamma\rangle_S = \nu \sum_{n=0}^{\infty} I_{n-\lambda}(\gamma) |n\rangle, \quad \lambda = \langle N \rangle, \quad (8.45)$$

$$\gamma = \left[\frac{(\Delta N)^2}{(\Delta S)^2} \right]^{1/2}, \quad \langle S \rangle = 0.$$

Решение (8.45) опять делает возможным сравнение со случаем переменных угловой момент — угол. Все сделанные в § 4 замечания относительно близости когерентных состояний и состояний с минимальным произведением неопределенностей остаются справедливыми.

В когерентных состояниях при больших N произведение неопределенностей весьма близко к минимуму. Когерентное состояние с $\langle S \rangle = 0$ наиболее близко к состоянию с минимальным произведением неопределенностей, а такое решение, как (8.45), дает в точности минимальное произведение неопределенностей. Для $\langle C \rangle = 0$ произведение неопределенностей в состоянии (8.44) может увеличиться (как в случае когерентных состояний при $N \rightarrow 0$); здесь это означало бы, что прямой метод неоднозначен.

Опять-таки можно отметить, что когерентные состояния образуют наиболее подходящий набор состояний для новой пары переменных число — фаза. Вместе с их физической значимостью и свойствами когерентности в переменных координата — импульс и угловой момент — угол это делает их самыми замечательными состояниями.

Поскольку, по-видимому, нельзя иметь одновременно $\langle C \rangle = 0 = \langle S \rangle$, то мы не думаем, что удастся получить состояние с минимальной неопределенностью, отвечающее симметричному соотношению неопределенностей (5.52). Справедливость этого была показана точно Джакивом [16] (напомним, что аналогичный результат имеет место для случая угловой момент — угол). Как уже упоминалось, Джакив также показал, что произведение неопределенностей (5.49) (переменные S и C) не минимизируется ни в каких нормируемых состояниях.

§ 9. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И НЕОБРАТИМОСТЬ В БАЗИСЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

а. Общие замечания

Распределение энергии в системах бозонов связано с операторами чисел N_k , описывающих различные степени свободы, индексированные переменной k . С другой стороны, уравнение временной эволюции таких систем (описывающее, в частности, приближение к равновесию) так или иначе всегда содержит фазовые переменные. В предыдущих параграфах рассматривались идеализированные, «чистые», изолированные квантовомеханические системы. В настоящем пункте мы привлечем внимание читателей к той большой пользе, которую дает базис

когерентных состояний при описании временной эволюции матрицы плотности [20]¹⁾. Здесь мы ограничимся случаем простого гармонического осциллятора; обсуждение же реальных задач, в которых рассматриваются ангармонически связанные осцилляторы (фононы в кристалле), читатель найдет в работе [20]¹⁾.

Уравнение движения для матрицы плотности является полностью квантовомеханическим, однако появляется в базе когерентных состояний очевидное соответствие с классическим уравнением Лиувилля в том виде, как оно сформулировано в базе переменных действие — угол Брутом и Пригожиным [21, 22]. Явно появляется и классический предел вместе с членами, которые можно рассматривать как «квантовомеханические поправки».

Уравнение движения для матрицы плотности имеет вид²⁾

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho]. \quad (9.1)$$

Ниже мы будем предполагать, что все операторы можно представить сходящимися упорядоченными рядами по a и a^\dagger :

$$\tilde{A} = \sum_{m,n} A_{mn} (a^\dagger)^m a^n \equiv \tilde{A}(a^\dagger, a). \quad (9.2)$$

Беря матричные элементы между когерентными состояниями, найдем

$$\frac{\langle \alpha | A(a^\dagger, a) | \beta \rangle}{\langle \alpha | \beta \rangle} = \sum_{m,n} A_{mn} (\alpha^*)^m \beta^n = A(\alpha^*, \beta). \quad (9.3)$$

Назовем величину $A(\alpha^*, \beta)$ приведенным матричным элементом оператора A . Если коэффициенты разложения ведут себя достаточно хорошо, то $A(\alpha^*, \beta)$ является аналитической функцией двух комплексных переменных [70]. Следовательно, достаточно рассчитать функцию $A(\alpha^*, \alpha)$, являющуюся граничным значением $A(\alpha^*, \beta)$. Чтобы найти общий вид функции $A(\alpha^*, \beta)$, используется аналитическое продолжение.

Используя соотношение полноты [ср. (3.29)], можно записать (9.1) в виде

$$i \langle \alpha | \frac{\partial \rho}{\partial t} | \alpha \rangle = \pi^{-1} \int d^2\beta [\langle \alpha | H | \beta \rangle \langle \beta | \rho | \alpha \rangle - \langle \alpha | \rho | \beta \rangle \langle \beta | H | \alpha \rangle]. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4) указывает как будто бы на то, что для расчета $\langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ нужны недиагональные элементы $\langle \beta | \rho | \alpha \rangle$. Мы покажем, однако, что это не так.

¹⁾ K. S. Dy, Ph. D. Thesis, Cornell University, June 1967, не опубликовано.

²⁾ Краткое изложение метода матрицы плотности дано Киттелем [69].

Предположив, что гамильтониан H имеет вид (9.2), мы встретимся с интегралами типа

$$\pi^{-1} \int d^2\beta (\alpha^*)^m \beta^n \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \rho | \alpha \rangle, \quad (9.5)$$

где m и n — целые числа. Используя формулу

$$\pi^{-1} \int d^2\beta \exp(-|\beta|^2) \beta^l (\beta^*)^m = \delta_{lm} (l! m!)^{1/2}, \quad (9.6)$$

найдем, что любая функция, которую можно разложить в ряд Тэйлора, удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \int d^2\beta \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) f(\beta^*) &= f(\alpha^*), \\ \pi^{-1} \int d^2\beta \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) \beta^n f(\beta^*) &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^n f(\alpha^*), \\ \pi^{-1} \int d^2\beta \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) f(\beta) &= f(\alpha), \\ \pi^{-1} \int d^2\beta \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) (\beta^*)^n f(\beta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^n f(\alpha). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Как видно из (9.5), структура экспонент в (9.7) продиктована видом $\langle \alpha | \beta \rangle$ [см. (3.28)].

Рассмотрим некоторый тривиальный пример ряда для иллюстрации применения тождеств (9.7). Пусть H содержит оператор уничтожения a . Тогда первый член в (9.4) приводит к появлению в (9.5) члена с $m = 0$, $n = 1$:

$$\pi^{-1} \int d^2\beta \cdot \beta \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \rho | \alpha \rangle. \quad (9.8)$$

Из (9.3) видим, что $\langle \beta | \rho | \alpha \rangle$ является произведением $\langle \beta | \alpha \rangle$ и некоторой аналитической функции от β^* и α :

$$\langle \beta | \rho | \alpha \rangle \equiv \langle \beta | \alpha \rangle \rho(\beta^*, \alpha). \quad (9.9)$$

Заметим, что в результате

$$\rho(\alpha^*, \alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle. \quad (9.10)$$

Объединение (9.8) и (9.9) с (3.28) дает

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \int d^2\beta \cdot \beta \langle \beta | \alpha \rangle \langle \beta | \rho | \alpha \rangle &= \\ &= \exp(-|\alpha|^2) \pi^{-1} \int d^2\beta \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) \beta [\exp(\beta^* \alpha) \rho(\beta^*, \alpha)] = \\ &= \exp(-|\alpha|^2) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} [\exp(\alpha^* \alpha) \rho(\alpha^*, \alpha)] = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \rho(\alpha^*, \alpha). \end{aligned} \quad (9.11)$$

[Для перехода в (9.11) от второй строки к третьей использовалось соотношение (9.76).] В расчетах такого типа существенно, что переменная α^* считается независимой от α . (Таким способом вводятся в динамическое описание недиагональные элементы $\langle \beta | \rho | \alpha \rangle$.)

Нетрудно обобщить предшествующий расчет на случай общего матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle \alpha | A \rho | \alpha \rangle &= \pi^{-1} \int d^2\beta |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 A(\alpha^*, \beta) \rho(\beta^*, \alpha) = \\ &= \exp(-|\alpha|^2) \sum_{mn} A_{mn}(\alpha^*)^m \times \\ &\times \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp(\alpha^*\beta - |\beta|^2) \beta^n [\exp(\beta^*\alpha) \rho(\beta^*, \alpha)] = \\ &= \exp(-|\alpha|^2) \sum_{mn} A_{mn}(\alpha^*)^m \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right)^n [\exp(\alpha^*\alpha) \rho(\alpha^*, \alpha)]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Получаем простой результат

$$\langle \alpha | A \rho | \alpha \rangle = \exp(-|\alpha|^2) A\left(\alpha^*, \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) [\exp(\alpha^*\alpha) \rho(\alpha^*, \alpha)]. \quad (9.13)$$

Из него можно получить полезное выражение для среднего по ансамблю от оператора A

$$\langle A \rangle = \text{Sp } \rho A = \pi^{-1} \int d^2\alpha \exp(-|\alpha|^2) A\left(\alpha^*, \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) [\exp(\alpha^*\alpha) \rho(\alpha^*, \alpha)]. \quad (9.14)$$

Примененный выше метод интегрирования можно использовать для того, чтобы выразить все встречающиеся физические величины через диагональные матричные элементы. Это привлекательное свойство представления когерентных состояний не казалось ранее простым или очевидным.

Если ρ является функцией от $a^\dagger a$, то возможны дальнейшие упрощения. В этом случае $\rho(\alpha^*, \alpha)$ становится функцией произведения $\alpha^* \alpha$. Предположим, что оператор $B(a^\dagger, a)$ также зависит только от $a^\dagger a$:

$$B = \sum_n b_n (a^\dagger a)^n. \quad (9.15)$$

Поскольку оператор B диагонален в числовом базисе, можно использовать (3.24):

$$\langle \alpha' | B | \beta \rangle = \sum_n b_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} (\alpha^* \beta)^k \exp\left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |\beta|^2\right] \equiv B_1(\alpha^* \beta) \langle \alpha | \beta \rangle,$$

$$B_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n(z), \quad F_n(z) = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n z^k}{k!}, \quad (9.16)$$

Таким образом, если оператор B есть функция от $a^\dagger a$, то его приведенный матричный элемент $\langle \alpha | B | \beta \rangle / \langle \alpha | \beta \rangle$ есть функция произведения $\alpha^* \beta$.

б. Переход к переменным действие — угол

По аналогии с § 5 определим действие как среднее число возбуждений в состоянии $|\alpha\rangle$, а φ — как соответствующую фазу

$$J = \alpha^* \alpha, \quad \varphi = \frac{1}{2i} \ln \frac{\alpha}{\alpha^*}. \quad (9.17)$$

Замечая, что α^* не зависит от α , находим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = J^{1/2} e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial J} - \frac{i}{2J} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \alpha^*} = J^{1/2} e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial J} + \frac{i}{2J} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (9.18)$$

От интегрирования по α -плоскости переходим к интегрированию в переменных действие — угол

$$\int d^2\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty dJ \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (9.19)$$

Наиболее важный (и простой) случай — это свободный гармонический осциллятор

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_0, \rho] \equiv L_0 \rho, \quad (9.20)$$

где L_0 — оператор Луивилля, определяемый формулой (9.20). Гамильтониан H_0 , конечно, равен $\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Небольшой расчет показывает, что оператор $\rho(\beta^*, \alpha)$ эволюционирует согласно уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho(\beta^*, \alpha) = L_0(\beta^*, \alpha) \rho(\beta^*, \alpha), \quad (9.21)$$

где $L_0(\beta^*, \alpha)$ — дифференциальный оператор:

$$L_0(\beta^*, \alpha) = \omega \left(\beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*} - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right). \quad (9.22)$$

Отметим, что если при $t = 0$ $\rho(\beta^* \alpha)$ есть функция от $\beta^* \alpha$, то ρ не зависит от времени. Это соответствует тому тривиальному факту, что $[\rho(N), N]$ равен нулю.

Поскольку необходимо рассчитать только $\rho(\alpha^*, \alpha)$, уравнения (9.21) — (9.22) сильно упрощаются:

$$i \frac{\partial \rho(J, \varphi)}{\partial t} = L_0 \rho(J, \varphi), \quad L_0 = i\omega \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (9.23)$$

Переписывая (9.23) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \rho(J, \varphi) = 0, \quad (9.24)$$

видим, что любая функция вида $\rho(J, \varphi - \omega t)$ является решением (9.24), в точности как в случае классического осциллятора.

Очень интересно, что оператор Луивилля в (9.23) имеет форму, подобную той, которая непосредственно угадывается для оператора H на базе сопряженных переменных N, φ [см. обсуждение после (6.42)]. Смысл этого результата рассматривается ниже (§ 9, п. «г»).

Переходя к произвольному числу независимых осцилляторов с частотами ω_k , имеем

$$L_0 = \sum_k i\omega_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k}. \quad (9.25)$$

Собственные функции оператора L_0 играют важную роль в разложении матрицы плотности в ряд теории возмущений (при добавлении к H_0 членов взаимодействия). Эти собственные функции те же, что и в классическом анализе:

$$f\{v\} = (2\pi)^{-N/2} \exp\left(-i \sum_k v_k \varphi_k\right), \quad L_0 f\{v\} = \left(\sum_k v_k \omega_k\right) f\{v\}. \quad (9.26)$$

Здесь v_k пробегает все положительные и отрицательные целые числа; суммирование по k проводится по всем N нормальным модам колебаний. Набор $\{v\}$ не следует путать с числами заполнения N_k ; набор $\{v\}$ определяет фазы осцилляторов.

Нормировка в (9.26) выбрана в соответствии со скалярным произведением

$$(g | h) = \int g^*\{\varphi\} h\{\varphi\} \prod_k d\varphi_k, \quad (9.27)$$

так что собственные функции $f\{v\}$ нормированы следующим образом:

$$(f\{v\} | f\{v'\}) = \delta_{\{v\}\{v'\}}. \quad (9.28)$$

Дельта-символ Кронекера в (9.28) означает, что $v_k = v'_k$ при всех k . Для обозначения скалярного произведения в пространстве собственных функций мы использовали круглые скобки, чтобы не спутать его с обычным квантовомеханическим скалярным произведением (записываемым в треугольных скобках).

Приведем также несколько результатов для важных функций оператора числа возбуждений при $\rho = \rho(a^\dagger a)$. В этом случае $\rho(\alpha^*, \alpha)$ зависит только от J , так что

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \pi^{-1} \int d^2\alpha \alpha^* \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \rho(\alpha^*, \alpha) = \\ &= \int dJ J \rho(J) + \int dJ \cdot J \frac{\partial}{\partial J} \rho(J). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Интегрируя второй член по частям и используя условие нормировки, имеем

$$\langle N \rangle = \int dJ \cdot J \rho(J) - 1. \quad (9.30)$$

Следовательно, статистическое среднее переменной действия есть

$$\langle\langle J \rangle\rangle = \int_0^\infty dJ \cdot J \rho(J) = \langle N \rangle + 1. \quad (9.31)$$

Возможно и обобщение

$$\langle\langle (a^\dagger)^n a^n \rangle\rangle = (-1)^n \int_0^\infty dJ \cdot L_n(J) \rho(J) \equiv (-1)^n \langle\langle L_n(J) \rangle\rangle; \quad (9.32)$$

здесь $L_n(J)$ — полином Лагерра [71].

Матрица плотности для гармонического осциллятора, находящегося в термодинамическом равновесии, имеет вид

$$\rho = \frac{\exp(-\beta\omega a^\dagger a)}{\text{Sp} \exp(-\beta\omega a^\dagger a)}, \quad (9.33)$$

где $\beta = 1/kT$. Поэтому, используя (9.15) и (9.16), получаем

$$\rho(J) = \frac{\exp\{-J[1 - \exp(-\beta\omega)]\}}{[1 - \exp(-\beta\omega)]^{-1}}. \quad (9.34)$$

Из этого выражения получаем результаты, которые можно было предвидеть:

$$\begin{aligned} \langle\langle J \rangle\rangle &= \int dJ \cdot J \rho(J) = [1 - \exp(-\beta\omega)]^{-1}, \\ \langle N \rangle &= \langle\langle J \rangle\rangle - 1 = [\exp(\beta\omega) - 1]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.35)$$

в. Связанные осцилляторы; необратимость

Предположим, что система осцилляторов описывается гамильтонианом

$$H = H_0 + H_{вз}, \quad H_0 = \sum \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (9.36)$$

Если $H_{вз}$ обладает такой структурой, что вызывает рассеяние возбуждений между разными модами из непрерывного спектра, отмеченными индексом k в (9.36), то возникает необратимость. Из вида интегральных формул (9.7) ясно, что (9.4) сводится к следующему дифференциальному уравнению в частных производных, содержащему переменные действие — угол, J_k, φ_k :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho(\{J_k, \varphi_k\}, t) = (L_0 + L_I) \rho(\{J_k, \varphi_k\}, t); \quad (9.37)$$

оператор L_0 дается формулой (9.23), в то время как оператор

$$L_I = L_I \left(\{J_k\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial J_k} \right\}; \{\varphi_k\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \right\} \right) \quad (9.38)$$

специфичен для рассматриваемой задачи.

Подробные примеры можно найти в [20]¹⁾; мы же получим только формальное решение уравнения (9.37) по теории возмущений. Во-первых, определим матрицу плотности в «картине взаимодействия»

$$\rho_I(\{J_k, \varphi_k\}, t) = \exp(-iL_0 t) \rho(\{J_k, \varphi_k\}, t). \quad (9.39)$$

Матрица ρ_I удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \rho_I}{\partial t} = L_I(t) \rho_I, \quad (9.40)$$

где

$$L_I(t) = \exp(-iL_0 t) L_I \exp(iL_0 t).$$

¹⁾ K. S. Dy, Ph. D. Thesis, Cornell University, June 1967, не опубликовано.

Формальным решением уравнения (9.40) является

$$\rho_I(t) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t L_I(t') dt' \right) \rho_I(t_0), \quad (9.41)$$

где T — обычный оператор упорядочения по времени. Матрицу $\rho_I(t)$ можно разложить по собственным функциям оператора L_0 :

$$\rho_I(t) = \sum_{\{v\}} \rho_I(\{J_k, v_k\}, t) f\{v\}. \quad (9.42)$$

Коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} \rho_I(\{J_k, v_k\}, t) &= (f\{v\} | \rho_I(\{J_k, \Phi_k\}, t)) = \\ &= \int f^*\{v\} \rho_I(\{J_k, \Phi_k\}, t) \prod_k d\Phi_k \end{aligned} \quad (9.43)$$

связаны с разложением матрицы плотности по фазовым функциям $f\{v\}$. Подставляя (9.39) в (9.43), находим

$$\begin{aligned} \rho_I(\{J_k, v_k\}, t) &= \sum_{\{v\}} \left(f\{v\} | T \exp \left[-i \int_{t_0}^t L_I(t') dt' \right] | f\{v\} \right) \times \\ &\quad \times (f\{v\} | \rho_I(\{J_k, \Phi_k\}, 0)). \end{aligned} \quad (9.44)$$

Это соотношение все еще содержит члены с производными типа $\{\partial/\partial J_k\}$.

Вместо исследования всех возможных начальных условий ограничимся обычным предположением о случайном распределении начальных фаз

$$\rho_I(\{J_k, \Phi_k\}, 0) = 0, \quad \{v\} \neq \{0\}, \quad (9.45)$$

которое получается, если $\rho(\{J_k, \Phi_k\}, t)$ не зависит при $t = 0$ от Φ_k . Замечательно, что при таком условии распределение чисел возбуждений сохраняет это свойство все время. Как объяснялось выше, независимость ρ от фаз $\{\Phi\}$ существует только тогда, когда ρ является функцией операторов чисел возбуждений $\{N_k\}$. Если это верно, то коэффициент

$$\rho_I(\{J_k, v_k = 0\}, t) \equiv \rho_E(\{J_k\}, t) \quad (9.46)$$

описывает распределение энергии по различным нормальным модам.

Таким образом, в момент t коэффициент ρ_E дается формулой

$$\rho_E(\{J_k\}, t) = \left(f\{0\} \left| T \exp \left[-i \int_0^t L_I(t') dt' \right] \right| f\{0\} \right) \rho_E(\{J_k\}, 0), \quad (9.47)$$

где принято, что $t_0 = 0$. Величины вида

$$\left\langle T \exp \left(-i \int_0^t L_I(t') dt' \right) \right\rangle \quad (9.48)$$

часто возникают в статистике и квантовой механике. Для вычисления таких величин можно использовать стандартную технику [72]. В (9.47) нужно вычислить среднее от «экспоненты» по углам. Как хорошо известно, такое среднее можно выразить в виде экспоненты от преобразованного ряда.

Метод полуинвариантов (или кумулянтов), изложенный в [72], дает эффективный способ вычислений этой экспоненты. Для ясности установим некоторые соотношения. Рассмотрим производящую функцию для моментов $\langle \exp(ixt) \rangle$, где среднее взято по некоторому распределению вероятностей $P(x)$. Логарифм этой величины разлагается следующим образом:

$$\ln \langle \exp(ixt) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} M_n, \quad (9.49)$$

где первые несколько полуинвариантов имеют вид

$$M_1 = \langle x \rangle, \quad M_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad M_3 = \langle x^3 \rangle - 3 \langle x \rangle^2 \langle x \rangle + 2 \langle x \rangle^3, \quad (9.50)$$

$$M_4 = \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4.$$

Случай экспоненты от оператора с упорядочением по времени ненамного сложнее [72]. Вместо $\langle x^n \rangle$ имеем

$$(-t)^n \langle x^n \rangle \rightarrow \left\langle T \left[\int_0^t dt' L_I(t') \right]^n \right\rangle. \quad (9.51)$$

Поэтому

$$\ln \left\langle T \exp \left(-i \int_0^t L_I(t') dt' \right) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n M_n(t)}{n!}, \quad (9.52)$$

$$M_1 = \int_0^t \langle L_I(t') \rangle dt', \quad (9.53)$$

$$M_2 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [\langle T L_I(t_1) L_I(t_2) \rangle - \langle L_I(t_1) \rangle \langle L_I(t_2) \rangle].$$

Из (9.47) и (9.52) имеем

$$\rho_E(\{J_k\}, t) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n M_n(t)}{n!} \right] \rho_E(\{J_k\}, 0). \quad (9.54)$$

Заметим теперь, что при больших временах полуинварианты M_n становятся пропорциональными t . Полуинвариант M_1 часто равен нулю, а если не так, то его можно убрать перенормировкой энергии ω_k . Таким образом, часто доминирует член второго порядка (при малом возмущении), и получается уравнение Брута — Пригожина

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_E(\{J_k\}, t) &= \mathcal{O}_0 \rho_E(\{J_k\}, t), \\ \mathcal{O}_0 &= - \sum_{\{v\}} (f\{0\} | L_I | f\{v\}) \delta_+ \left(\sum_k v_k \omega_k \right) (f\{v\} | L_I | f\{0\}), \\ \pi \delta_+(x) &\equiv \pi \delta(x) + i \frac{P}{x}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Здесь P/x — главное значение.

Уравнение для матрицы плотности (9.55) можно использовать для вывода кинетических уравнений для чисел заполнения $\langle N_k \rangle$. Если в рассмотрение включаются пространственные неоднородности, то приходится использовать более сложные компоненты матрицы плотности [21, 22].

г. Соотношение неопределенностей оператора Луивилля и угла

Уравнение движения для матрицы плотности

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = L \rho \equiv [H, \rho] \quad (9.57)$$

формально совпадает с уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (9.58)$$

Но оператор Луивилля не обязательно ограничен с одной стороны, поэтому возникает возможность введения «фазовых операторов».

Рассмотрим вновь простой гармонический осциллятор. В базе когерентных состояний оператор Луивилля, действующий на $\rho(\alpha^*, \alpha) = \rho(J, \varphi)$, имеет вид (9.23). Оператор L_0 эрмитов в пространстве периодических функций. Более того, имеется коммутатор

$$[l, f(\varphi)] = i \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad l \equiv \frac{L_0}{\omega}, \quad (9.59)$$

где f — любая дифференцируемая функция φ . В частности, формула (9.59) дает

$$[L, \varphi] = i. \quad (9.60)$$

Проблемы существования оператора φ не возникает, поскольку спектр L_0 простирается от $-\infty$ до ∞ :

$$L_0 f(\nu) = \nu \omega f(\nu), \quad f(\nu) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-i\nu\varphi), \quad (9.61)$$

$$\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Повторяя выводы § 4, находим соотношения неопределенностей, связывающие L_0 и тригонометрические функции фазы:

$$(\Delta L_0)^2 (\Delta \sin \varphi)^2 \geq \frac{1}{4} \omega^2 \langle \cos \varphi \rangle^2,$$

$$(\Delta L_0)^2 (\Delta \cos \varphi)^2 \geq \frac{1}{4} \omega^2 \langle \sin \varphi \rangle^2. \quad (9.62)$$

Эти ожидаемые значения вычисляются для состояний из пространства, натянутого на собственные функции $f(\nu)$ уравнения (9.61), но требуются специальные оговорки, когда величины, фигурирующие в (9.62), вычисляются для какой-либо самой собственной функции.

§ 10. АНАЛОГИИ СО СВЕРХТЕКУЧИМИ СИСТЕМАМИ

Качественное описание физического поведения различных сверхтекучих систем зависит в большой степени от правильного понимания фазовых переменных [23]. Мы видели, что традиционный подход, рассматривающий число и фазу как сопряженные переменные, теряет точный смысл при малых квантовых числах. В этом параграфе мы хотим привлечь внимание читателя к подобию приближенных соотношений, использовавшихся Андерсоном [23] для объяснения сверхтекучести, и строгих соотношений, выполняющихся для бозевских операторов в когерентных состояниях. Мы не хотим сказать, что волновые функции сверхтекучих систем являются когерентными состояниями описанного выше типа, хотя такая возможность обсуждалась [49]. Но имеющиеся аналогии настолько впечатляющи, что истинные волновые функции этих систем имеют, вероятно, подобную структуру.

Рассмотрим бозевскую систему, описываемую нерелятивистским оператором поля:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k(t) \exp(ik \cdot \mathbf{x}). \quad (10.1)$$

Операторы a_k подчиняются обычным коммутационным соотношениям, а функция $\psi(x)$ удовлетворяет соотношению

$$[\psi(x, t), \psi^\dagger(x', t)] = \delta(x - x') \quad (10.2)$$

при одинаковых временах. Для любого состояния с заданным числом возбуждений ожидаемое значение от (10.1) равно нулю. Но, как указывал Андерсон [23], наблюдаемое поведение показывает, что истинное состояние обладает ожидаемым значением

$$\langle \psi(x, t) \rangle = f(x, t) \exp[i\varphi(x, t)]. \quad (10.3)$$

Величина $[f(x, t)]^2$ есть плотность числа частиц $\rho(x, t)$. Поэтому, написав

$$\langle \psi(x, t) \rangle = \rho^{1/2} \exp(i\varphi), \quad (10.4)$$

видим, что это напоминает когерентное состояние осциллятора

$$\langle \alpha | a | \alpha \rangle = N^{1/2} \exp(i\varphi). \quad (10.5)$$

Действительно, можно получить совершенно произвольное ожидаемое значение $\psi(x)$, используя произведение когерентных состояний

$$|\{\alpha_k\}\rangle = \prod_k |\alpha_k\rangle. \quad (10.6)$$

Таким образом, α_k суть коэффициенты Фурье функции $\langle \psi \rangle$. Подчеркиваем, однако, что в динамическом аспекте данное рассмотрение совершенно бессодержательно.

Рассмотрим уравнение движения для оператора уничтожения отдельной моды

$$i \frac{da}{dt} = [a, H]. \quad (10.7)$$

Здесь H — произвольный гамильтониан. Беря от (10.7) ожидаемое значение в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ и используя интегральные формулы из § 9, п «а», имеем

$$i \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H(\alpha^*, \alpha)}{\partial t}. \quad (10.8)$$

Переходя с помощью формул (9.17), (9.18) к переменным действие — угол, находим

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\partial H(J, \varphi)}{\partial J}, & J &= \langle N \rangle, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= - \frac{\partial H(J, \varphi)}{\partial J}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Эти уравнения играют важную роль в андерсоновской трактовке сверхтекучести.

Хотя уравнения (10.9) не применимы непосредственно к реальным сверхтекучим системам, мы верим, что именно для когерентных систем будут развиты в конце концов наиболее интересные приложения изложенных в этой статье идей. Действительно, используя оператор разности фаз (см. § 7), один из авторов недавно предсказал эффект квантования фазы при джозефсоновском туннелировании постоянного тока [73].

ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W., Zs., Phys., 33, 879 (1925).
2. Schrödinger E., Ann. der Phys., 79, 361, 489, 734 (1926).
3. Jammer M., Conceptual Development of Quantum Mechanics, New York, 1966.
4. Heisenberg W., Zs. Phys., 43, 172 (1927).
5. Bohr N., в сб. «Albert Einstein: Philosoph-Scientist», Ed. P. A. Schilpp, Evanston, Ill., 1949. (См. перевод: А. Эйштейн, Сборн. научн. трудов., т. IV, стр. 282.)
6. Heisenberg W., в книге Niels Bohr and the Development of Physics, Ed. W. Pauli, London, 1955. (См. перевод в сб. «Нильс Бор и развитие физики», под ред. В. Паули, ИЛ, 1958.)
7. Heisenberg W., Das Naturbild der Heutigen Physik, Hamburg, 1958.
8. Einstein A., Podolsky B., Rosen N., Phys. Rev., 47, 777 (1935).
9. Picht J., Wiss. Zs. Pädagogischen Hochschule Potsdam, 7, 1 (1962).
10. Picht J., Acta Phys. Polon., 27, 25 (1965).
11. Bohm D., Phys. Rev., 85, 166, 180 (1952).
12. Bohm D., Bub J., Rev. Mod. Phys., 38, 453, 470 (1966).
13. Bell J. S., Rev. Mod. Phys., 38, 447 (1966).
14. von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, 1932. (См. перевод: И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», 1964.)
15. Albertson J., Am. Journ. Phys., 29, 478 (1961).
16. Jackiw R., Journ. Math. Phys., 9, 339 (1968).
17. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A114, 243 (1927).
18. Susskind L., Glogower J., Physics, 1, 49 (1964).
19. Carruthers P., Nieto M. M., Phys. Rev. Lett., 14, 387 (1965).
20. Carruthers P., Dy K. S., Phys. Rev., 147, 214 (1966).
21. Brout R., Prigogine I., Physica, 22, 621 (1956).
22. Prigogine I., Non-Equilibrium Statistical Mechanics, New York, 1962. (См. перевод: И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, изд-во «Мир», 1964.)
23. Anderson P. W., Rev. Mod. Phys., 38, 298 (1966).
24. Pauli W., Handbuch der Physik, vol. V/1, Berlin, 1958, стр. 59—64. (См. перевод в сб. «Нильс Бор и развитие физики», под ред. В. Паули, ИЛ, 1958.)
25. Smith F. T., Phys. Rev., 118, 349 (1960).
26. Агаонов У., Bohm D., Phys. Rev., 122, 1649 (1961).
27. Lippmann B. A., Phys. Rev., 151, 1023 (1966).
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, Физматгиз, 1963.

29. Фок В. А., ЖЭТФ, 42, 1135 (1962).
30. Aharonov Y., Bohm D., Phys. Rev., 134, B1417 (1964).
31. Bohm D., Quantum Theory, Englewood Cliffs, N. J., 1951..
32. Merzbacher E., Quantum Mechanics, New York, 1961. p. 156.
33. Gottfried K., Quantum Mechanics, New York, 1966, p. 215.
34. Parzen E., Modern Probability Theory and Its Applications, New York, 1960, p. 361.
35. Davidson E. R., Journ. Chem. Phys., 42, 1491 (1965).
36. Dirac P. A. M., Proc. Cambridge Phil. Soc., 23, 412 (1926).
37. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., 113, 621 (1927).
38. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ч. I, ИЛ, 1958.
39. Henley E. M., Thirring W., Elementary Quantum Field Theory, New York, 1962. (См. перевод: Э. Хенли, В. Тирринг, Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, 1963, гл. 2.)
40. Schrödinger E., Zs. Phys., 14, 664 (1926).
41. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett. 10, 84 (1963).
42. Glauber R. J., Phys. Rev., 130, 2529 (1963).
43. Glauber R. J., Phys. Rev., 131, 2766 (1963).
44. Glauber R. J., в книге Quantum Electronics, Proceedings of the Third Intern. Congress (Paris, 1963), ed. N. Bloembergen and P. Grivet, vol. I, New York, 1964, p. 111.
45. Glauber R. J., в книге «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», «Мир», 1966, стр. 91.
Лекции в летней школе теоретической физики Гренобльского университета (Лезуш, Франция, 1964).
46. Sudarshan E. C. G., Phys. Rev. Lett., 10, 227 (1963).
47. Sudarshan E. C. G., в книге Proceedings of the Symposium on Optical Masers, 1963, Brooklyn, New York, 1963, p. 45.
48. Mehta C. L., Sudarshan E. C. G., Phys. Rev., 138, B274 (1965).
49. Cummings F. W., Johnston J. R., Phys. Rev., 151, 105 (1966); Errata, в печати.
50. Carruthers P., Nieto M. M., Am. Journ. Phys., 33, 537 (1965).
51. Jordan P., Zs. Phys., 44, 1 (1927).
52. Judge D., Lewis J. T., Phys. Letters, 5, 190 (1963).
53. Judge D., Phys. Lett., 5, 189 (1963).
54. Judge D., Nuovo Cimento, 31, 332 (1964).
55. Bouten M., Maene N., VanLeuven P., Nuovo Cimento, 37, 1119 (1965).
56. Evett A. A., Mahmud A. H., Nuovo Cimento, 38, 295 (1965).
57. Kraus K., Zs. Phys., 188, 374 (1965); 201, 134 (1967).
58. Louisell W. H., Phys., Lett., 7, 60 (1963).
59. Nieto M. M., Phys. Rev., Lett., 18, 182 (1967).
60. Шифф Л. И., Квантовая механика, перев. с англ., гл. 4, ИЛ, 1959.
61. Gröbner W., Hofreiter N., Integraltafel, Vienna, 1961.
62. Watson C. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1966. (См. перевод: Ч. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2, ИЛ, 1949.)
63. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, London, 1954. (См. перевод 3-го изд.: В. Гайлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
64. Serber R., Townes C. H., Quantum Electronics New York, 1960, p. 249.
65. Brunet H., Phys. Lett., 10, 172 (1964).
66. Harms J., Loringny J., Phys. Lett., 10, 173 (1964).
67. Levine R. D., Journ. Chem. Phys., 44, 3597 (1966).
68. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, т. 1, Физматгиз, 1962.

69. Киттель Ч., Элементарная статистическая физика, ИЛ, 1964.
70. Vochner S., Martin W. T., Several Complex Variables, Princeton, N. J., 1948. (См. перевод: С. Бохнер, У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, М., 1951.)
71. Higher Transcendental Functions, ed. A. Erdelyi, Vol. 1, New York, 1953, p. 188. (См. перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, ч. 1, М., 1965.)
72. Brout R., Carruthers P., Lectures on the Many-Electron Problems, Ch. 1, New York, 1962.
73. Nieto M. M., Phys. Rev., **167**, 416 (1968).

Когерентные состояния в теории сверхтекучести

Д ж. ЛАНГЕР*

J. S. Langer, Phys. Rev., 167, 183 (1968).

Показано, что представление когерентных состояний для многобозонной волновой функции может быть идентифицировано с функцией, являющейся параметром упорядочения, используемым обычно для описания сверхтекучести. В представлении когерентных состояний переформулирована статистическая механика многобозонной системы и в очевидном приближении вновь получена теория типа теории Гинзбурга—Ландау. Развитый формализм особенно полезен для описания метастабильных состояний в конечном сверхтекучем потоке и флуктуаций, которые могут вызывать спонтанный распад таких состояний.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ: ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Обобщенная (в небольшой степени) интерпретация феноменологической модели сверхтекучести Гинзбурга—Ландау приводит к нескольким новым выводам о природе сверхтекучего потока. Эти выводы были опубликованы в работах [1, 2], и мы суммируем их в настоящем введении. Остальная часть статьи посвящена систематическому выводу модели Гинзбурга—Ландау в такой форме, в которой мы хотим использовать ее для многобозонных систем. В этом выводе используется представление когерентных состояний бозонных полей—формализм, оказавшийся очень удачным при обсуждении сверхтекучести.

В модели Гинзбурга—Ландау [3]¹⁾ состояния системы описываются комплекснозначным параметром упорядочения $\psi(\mathbf{r})$, являющимся функцией положения \mathbf{r} . Эта функция $\psi(\mathbf{r})$ обычно интерпретируется как волновая функция сверхтекучей компоненты системы. В частности,

$$n_s(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad (1.1)$$

* Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, USA.

¹⁾ Более поздний обзор работ по применению теории Гинзбурга—Ландау к металлическим сверхпроводникам см. в книге [4]. Использовать уравнение Гинзбурга—Ландау для описания сверхтекучего гелия предложили Гросс [5], а также Гинзбург и Питаевский [6, 7].

есть плотность числа частиц в сверхтекучей компоненте, а соответствующая плотность тока есть

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (1.2)$$

(Мы всегда будем работать в системе единиц, где $\hbar = 1$.) Предполагается, что ψ зависит от времени как $\exp(i\mu t)$ [или как $\exp(2i\mu t)$ для сверхпроводника], где μ — химический потенциал. В более общем случае если выбрать две отдельные точки в сверхтекучей жидкости, то можно написать

$$\Delta\mu = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \arg \psi, \quad (1.3)$$

где $\Delta\mu$ — разность химических потенциалов между этими двумя точками, а $\Delta(\arg \psi)$ — соответствующая разность фаз волновой функции ψ . Уравнение (1.3) вместе с (1.2) описывает ускорение сверхтекучего потока градиентом потенциала и таким образом характеризует внутренние сверхтекучие свойства системы [8, 9].

Наша специфическая феноменологическая картина основана на предположении, что пространство всех функций $\psi(\mathbf{r})$, удовлетворяющих нужным граничным условиям, подходит для представления изотермического канонического ансамбля. Это значит, что статистические флуктуации системы, вызванные взаимодействием с термостатом, должны проявляться как непрерывное случайное движение изображающей точки системы с волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$ в пространстве функций, причем в окрестность каждой точки система приходит с частотой, пропорциональной бoльцмановскому фактору $\exp(-F\{\psi\}/k_B T)$. Функцию $F(\psi)$ мы возьмем в форме обычного функционала свободной энергии Гинзбурга — Ландау:

$$F\{\psi\} = \int d\mathbf{r} \left[|\nabla\psi|^2 - A|\psi|^2 + \frac{1}{2} B|\psi|^4 + \dots \right], \quad (1.4)$$

где A и B — зависящие от времени постоянные. В частности, постоянная A проходит через нуль при некоторой температуре T_0 , будучи положительной при $T < T_0$.

Зависимость A и B от времени означает, что $F\{\psi\}$ представляет собой некоторый вид крупномасштабной свободной энергии, т. е. что частично произведено суммирование в выражении для статистической суммы, чтобы получить $F\{\psi\}$. Как раз на этот момент и обращено наибольшее внимание в последующем анализе. Здесь, однако, важно подчеркнуть, что, хотя состояние ψ_0 , минимизирующее функционал $F\{\psi\}$, есть наиболее вероятное состояние системы, $F\{\psi_0\}$ не является корректной свободной

энергией. Истинная же свободная энергия есть

$$-k_B T \ln \left\{ \int \delta\psi(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{-F(\psi)}{k_B T} \right] \right\}, \quad (1.5)$$

где символ $\int \delta\psi(\mathbf{r}) \dots$ обозначает интегрирование в пространстве функций $\psi(\mathbf{r})$. Только когда этот интеграл можно аппроксимировать наибольшим значением подинтегрального выражения, справедлива обычная теория Гинзбурга — Ландау (теория среднего поля).

Описанная выше формулировка очень удобна для обсуждения метастабильных состояний.

Если допускаются только непрерывные деформации функции ψ , т. е. если возмущения в некотором смысле малы, то любому локальному минимуму функционала $F\{\psi\}$ отвечает стабильное или метастабильное состояние. Следовательно, условие стабильности есть

$$\frac{\delta F}{\delta\psi(\mathbf{r})} = 0; \quad (1.6)$$

к нему мы добавляем требование, чтобы матрица

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\psi(\mathbf{r}) \delta\psi(\mathbf{r}')} \quad (1.7)$$

была положительно определенной. Уравнение (1.6) есть просто уравнение Гинзбурга — Ландау с F общего вида. В работах [1, 2] обсуждались свойства метастабильных состояний.

а. Состояния с постоянным током

Выберем F в виде (1.4) и наложим периодические граничные условия. Тогда решением уравнения (1.6) будет

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad f_{\mathbf{k}}^2 = \frac{A^2 - k^2}{B}; \quad (1.8)$$

соответствующий вектор плотности тока равен

$$j_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} f_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k} \frac{A - k^2}{B}. \quad (1.9)$$

Для $k^2 < 1/3 A$ (обычный критический волновой вектор Гинзбурга — Ландау, см. [10]) каждое из состояний (1.8) дает изолированный локальный минимум функционала F . Если же $1/3 \leq k^2 < A$, то матрица (1.7) перестает быть положительно определенной [11]. Действительно, эти состояния нестабильны

относительно деформации вида

$$\psi_{\mathbf{k}} \rightarrow \psi_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.10)$$

где вектор \mathbf{q} мал и преимущественно параллелен \mathbf{k} , $\delta_{\mathbf{q}}$ — бесконечно малая амплитуда, фаза которой зависит от \mathbf{q} .

б. Флуктуации, уменьшающие ток

Важное свойство любой флуктуации, которая переводит систему из одного состояния с постоянным потоком в другое, заключается в том, что волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ должна во время перехода где-то проходить через нуль¹⁾. Например, рассмотрим кольцо с длиной окружности L , в котором сверхтекучий поток характеризуется состоянием $\psi_{\mathbf{k}}$. Состояния ψ в окрестности $\psi_{\mathbf{k}}$ будут иметь то свойство, что при обходе по окружности $\arg \psi$ увеличивается точно на kL . Но если флуктуационное отклонение от $\psi_{\mathbf{k}}$ достаточно велико, чтобы ψ где-то обратилось в нуль, то полное изменение $\arg \psi$ при обходе по окружности не определено для данной волновой функции и изображающая точка системы может переходить непрерывно из области состояний с полным изменением фазы kL в область с полным изменением фазы, равным, скажем, $k'L$.

Это обстоятельство очень важно в связи с тем, что именно флуктуации фазы препятствуют возникновению недиагонального дальнего порядка в одномерных и двумерных сверхтекучих жидкостях [13, 14]. Ясно, что если ψ никогда не обращается в нуль, то никакие флуктуации способа изменения фазы при переходе от точки к точке, вероятно, не могут повлиять на полное изменение фазы при обходе окружности. Действительно, если амплитуда ψ остается неизменной, то постоянная компонента потока также должна оставаться неизменной. Отсюда вытекает следующее: можно ожидать, что система будет вести себя как сверхтекучая всякий раз, когда существует энергетический барьер, подавляющий флуктуации амплитуды ψ , независимо от того, имеется или нет истинный фазовый переход с дальним порядком.

в. Барьер свободной энергии

Из топологии очевидно, что для перехода изображающей точки из одного локального минимума функционала $F(\psi)$ в другой она должна преодолеть барьер свободной энергии. Наимень-

¹⁾ Последующее изложение во многом следует работе [12].

ший барьер и, следовательно, флуктуации, которые с наибольшей вероятностью вызывают требуемый переход, существуют в седловой точке между двумя минимумами. Так, уменьшающая ток флуктуация [назовем ее $\bar{\psi}(r)$] удовлетворяет уравнению Гинзбурга — Ландау (1.6); но матрица (1.7) должна иметь единственное отрицательное собственное значение при действии на ψ , определяющее направление в ψ -пространстве, вдоль которого с наибольшей вероятностью нарастают флуктуации.

Свойства флуктуаций в седловой точке $\bar{\psi}$ были недавно изучены в нескольких различных аспектах. Вообще $\bar{\psi}$ описывает состояние, которое всюду является таким же, как метастабильное состояние (в нашем случае $\bar{\psi}_k$), но которое содержит единственную локализованную флуктуацию. Самый простой пример такой флуктуации — хорошо известная критическая капля, служащая центром конденсации пересыщенного пара [15, 16]. Для случая жидкого гелия мы приводили аргументы [1] в пользу того, что флуктуация $\bar{\psi}$ должна описывать вихревое кольцо критических размеров, определяемых скоростью сверхтекучей жидкости [17]. Поскольку $\bar{\psi}$ становится равной нулю на сердцевине вихря, расширяющееся вихревое кольцо с единичной циркуляцией в конце концов «вычитает» 2π из общего изменения фазы при обходе системы. Статья [2] была посвящена изучению практически одномерного сверхпроводника, для которого удается точно решить уравнение Гинзбурга — Ландау и подробно исследовать соответствующие флуктуации амплитуды.

Подчеркнем, что состояние с конечным сверхтекучим движением является истинно метастабильным в противоположность стабильному в том смысле, что всегда существует ненулевая вероятность переходов в состояния с меньшим потоком и меньшей свободной энергией. Во всех случаях эта вероятность перехода зависит от частоты образования некоторых локализованных флуктуаций амплитуды и, следовательно, не зависит от размеров системы. Вместо того чтобы прямо рассчитывать эту вероятность перехода¹⁾, мы [1, 2] просто привлекли эргодическую гипотезу и сказали, что частота переходов имеет вид

$$\tau_0^{-1} \exp\left(\frac{-\Delta F}{k_B T}\right), \quad (1.11)$$

¹⁾ Краткое обсуждение трудностей, встречающихся при попытках прямо рассчитать вероятность перехода с рождением вихревого кольца, дано Виненом [18]. Наша точка зрения отличается от точки зрения Винена в следующем: мы предполагаем, что критический вихрь рождается в большом количестве небольших переходов, а не в одном квантовом скачке.

где ΔF — высота барьера свободной энергии, а τ_0 — некоторое характеристическое время микроскопических процессов. Результаты практических расчетов, например, критических потоков или удельных сопротивлений оказываются совершенно нечувствительными к выбору времени τ_0 . Эти расчеты дают скорости релаксации для состояний конечного сверхтекучего движения, которые всегда являются чрезвычайно быстро меняющимися функциями температуры и величины потока, причем ненаблюдаемо малыми в большей части обычной области сверхтекучего движения. Мы оценили, например, что ширина наблюдаемого перехода в состояние с конечным сопротивлением для оловянной проволоки сечением 1 мкм^2 составляет величину порядка 10^{-4} К (см. [2]). Однако в принципе проволока имела бы конечное сопротивление и ниже этого перехода, но чтобы наблюдать его, нужно было бы проводить измерения в течение космологически больших времен.

§ 2. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Предыдущее обсуждение основывалось на феноменологической модели, немного более общей, чем обычная теория Гинзбурга — Ландау, и, следовательно, требует дополнительного обоснования. В частности, мы должны ответить на вопрос, можно ли сформулировать совершенно общую характеристику системы многих тел, включающей нормальную и сверхтекучую фазы, с помощью функции $\psi(r)$ — параметра упорядочения. Ниже мы попытаемся показать, что такая характеристика, причем очень простая, может быть дана для многобозонных систем. Имеется надежда, что такую же простую характеристику удастся найти и для сверхпроводящих многофермионных систем¹⁾.

Обычно параметр упорядочения ψ для многобозонной системы определяется как термодинамическое ожидаемое значение бозонного оператора поля, причем фазовый переход в состояние сверхтекучести обычно связывается с потерей симметрии, дающей возможность этому ожидаемому значению отличаться от нуля. Однако в предыдущем рассмотрении параметр ψ характеризовал некоторым образом чистые квантовые состояния системы и сам по себе не был термодинамической величиной. Наше утверждение состоит в том, что параметр упорядочения

¹⁾ В более ранней статье [19] проблема сверхпроводимости была сформулирована с помощью функционального интеграла, что соответствует выводу § 3 настоящей статьи. Для сверхпроводника главная разница состоит в том, что ψ зависит от дополнительной времениподобной переменной.

ψ , как мы использовали его выше, обычно может быть выбран в качестве представления когерентных состояний для чистых квантовых состояний системы.

Рассмотрим бозонный оператор поля $\Psi_{\text{опер}}(\mathbf{r})$, удовлетворяющий коммутационному соотношению¹⁾

$$[\Psi_{\text{опер}}(\mathbf{r}), \Psi_{\text{опер}}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.1)$$

Мы часто будем работать в представлении Фурье

$$\Psi_{\text{опер}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

где

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.3)$$

и V — объем квантования. Правые собственные состояния оператора уничтожения

$$a_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle \quad (2.4)$$

являются так называемыми „когерентными состояниями“ [20—22]²⁾:

$$| \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} | \alpha_{\mathbf{k}} |^2\right) \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^{n_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} | n_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (2.5)$$

где $| n_{\mathbf{k}} \rangle$ — состояния с заданным числом колебаний в \mathbf{k} -й моде бозе-поля и $\alpha_{\mathbf{k}}$ может быть любым комплексным числом. Тогда параметр упорядочения $\psi(\mathbf{r})$ есть

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.6)$$

Состояния (2.5) нормированы, но не ортогональны:

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}} | \beta_{\mathbf{k}} \rangle = \exp\left(\alpha_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} | \alpha_{\mathbf{k}} |^2 - \frac{1}{2} | \beta_{\mathbf{k}} |^2\right). \quad (2.7)$$

Они образуют, однако, полный набор

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle \langle \alpha_{\mathbf{k}} | = 1_{\text{опер}}; \quad (2.8)$$

¹⁾ Мы будем использовать индекс «опер» для обозначения вторично квантованных операторов.

²⁾ Задача об ангармоническом кристалле, обсуждаемая в статье [22], математически тесно связана с обсуждаемой нами проблемой взаимодействующих бозонов. Важность когерентных состояний в теории сверхтекучести была ранее подчеркнута в работе [23].

здесь интегрирование ведется по двумерной комплексной α -плоскости. Таким образом, набор всех состояний вида

$$\prod_k |\alpha_k\rangle \equiv |\alpha\rangle \equiv |\psi\rangle, \quad \Psi_{\text{опер}}(\mathbf{r})|\psi\rangle = \psi(\mathbf{r})|\psi\rangle \quad (2.9)$$

есть полный набор для многобозонной системы. В остальной части статьи мы неизменно будем использовать обозначения, введенные в (2.9).

Когерентные состояния наиболее полезны для исследования систем многих тел, которые в некотором смысле ведут себя как классические, т. е. систем с большими числами заполнения бозонных мод. Если это так, то функция $\psi(\mathbf{r})$ становится классическим полем Шредингера, описывающим всю многобозонную систему точно так же, как максвелловское поле описывает классический предел квантовой электродинамики. Действительно, наиболее плодотворным приложением когерентных состояний явилось систематическое квантовомеханическое описание интенсивных полей излучения, для которых классическая электродинамика дает правильное, хотя и неполное, описание [20]. Мы утверждаем, что для многочастичных бозе-систем в противоположность многофотонным системам справедливость классического описания означает сверхтекучесть.

Полезно обсудить свойства когерентных состояний в классическом пределе. Рассмотрение несколько усложняется тем, что $|\alpha_k\rangle$ есть собственные состояния оператора уничтожения a^k , не являющегося эрмитовым. Чуть проще вывести классический предел, введя координату q и сопряженный импульс p (на время опустим индекс k)

$$q_{\text{опер}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \quad p_{\text{опер}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a). \quad (2.10)$$

Обозначим собственные состояния $q_{\text{опер}}$ символом $|q'\rangle$. Тогда легко показать [20], что

$$\langle q' | \alpha \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(q' - q)^2 + ip(q' - q) + \frac{1}{2}p^2 \right\}, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip). \quad (2.12)$$

Таким образом, когерентное состояние есть гауссов волновой пакет с центром в точке с координатой q . Аналогично в импульсном представлении это волновой пакет с центром в точке p . В любом представлении такой волновой пакет становится в классическом пределе чрезвычайно узким. Чтобы убедиться

этом, заметим, что

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \gg 1 \text{ („классика“)}. \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) означает, что $\hbar |\alpha|^2$ есть число, которое остается конечным при $\hbar \rightarrow 0$; при этом (2.11) становится дельта-функцией. Отсюда следует, что когерентные состояния дают приемлемое (но никоим образом не единственное) представление для квантовомеханического анализа классических и полуклассических систем. Такое представление особенно удобно с аналитической точки зрения вследствие прямой связи между α и оператором уничтожения, а также простоты канонического преобразования (2.12).

Рассмотрим теперь бозонные моды k с числами заполнения $|\alpha_k|^2$, достаточно большими для того, чтобы было более или менее справедливо классическое приближение. Уравнения движения Гамильтона имеют вид

$$\frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (2.14)$$

Отталкиваясь от (2.14), мы можем выполнить последовательность канонических преобразований, чтобы вывести уравнения движения для комплексного поля $\psi(\mathbf{r})$, которое описывает классический предел многобозонной системы.

Из равенства (2.12) и комплексно сопряженного ему имеем

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = -i \frac{\partial H}{\partial \alpha_k^*}, \quad \frac{d\alpha_k^*}{dt} = i \frac{\partial H}{\partial \alpha_k}. \quad (2.15)$$

Это эквивалентно ¹⁾ [24]

$$\frac{d\psi(\mathbf{r})}{dt} = -i \frac{\delta H}{\delta \psi^*(\mathbf{r})}, \quad \frac{d\psi^*(\mathbf{r})}{dt} = i \frac{\delta H}{\delta \psi(\mathbf{r})}. \quad (2.16)$$

Наконец, введем обозначение

$$\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})], \quad (2.17)$$

где f и φ — действительные функции \mathbf{r} . В чистом когерентном состоянии или в классическом пределе f^2 есть просто локальная плотность числа частиц $n(\mathbf{r})$:

$$n(\mathbf{r}) = \langle \Psi_{\text{опер}}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{\text{опер}}(\mathbf{r}) \rangle = |\psi(\mathbf{r})|^2 = f^2(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

¹⁾ В этой форме уравнения движения сводятся к нелинейному дифференциальному уравнению, изучавшемуся в [24].

Если перейти к сопряженным переменным n и φ (действие, угол), то получим

$$\frac{dn(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \varphi(\mathbf{r})}, \quad \frac{d\varphi(\mathbf{r})}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta n(\mathbf{r})}. \quad (2.19)$$

Это в точности уравнения сверхтекучего движения, обсуждавшиеся Андерсоном¹⁾. Нужно, однако, подчеркнуть, что уравнения (2.14)—(2.16) или (2.19) дают в лучшем случае полуклассическое приближение к уравнениям движения квантовомеханических систем многих тел.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Обратимся теперь к статистической механике многобозонных систем, описываемой на языке когерентных состояний. Весь наш анализ будет основываться на свойстве полноты набора состояний (2.9), так что мы можем вычислить статистическую сумму для большого канонического ансамбля следующим образом:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Sp} \exp\left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T}\right) = \\ &= \prod_{\mathbf{k}} \left(\int \frac{d^2 \alpha_{\mathbf{k}}}{\pi} \right) \langle \{\alpha\} | \exp\left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T}\right) | \{\alpha\} \rangle = \\ &= \int \delta\psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{F(\psi)}{k_B T}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В конечном выражении (3.1) мы опять употребляем обозначения функционального интегрирования, использовавшиеся впервые в (1.5); мы сделаем также важную идентификацию

$$F(\psi) = -k_B T \ln \left[\langle \{\psi\} | \exp\left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T}\right) | \{\psi\} \rangle \right]. \quad (3.2)$$

В этом параграфе мы рассчитаем функционал свободной энергии $F\{\psi\}$.

Рассмотрим сначала случай невзаимодействующих бозонов. Имеем ($\hbar = m = 1$)

$$H_{\text{опер}}^{(0)} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^2 a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (3.3)$$

¹⁾ См. [9], стр. 300. Те же уравнения использовались в формализме когерентных состояний Каррузерсом и Ньюто (не опубликовано).

так что

$$\langle \{\alpha\} | \exp \left(- \frac{H_{\text{опер}}^{(0)} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T} \right) | \{\alpha\} \rangle = \prod_k \langle \alpha_k | \exp \left(- \frac{\bar{\epsilon}_k}{k_B T} a_k^\dagger a_k \right) | \alpha_k \rangle, \quad (3.4)$$

где

$$\bar{\epsilon}_k \equiv \frac{1}{2} k^2 - \mu. \quad (3.5)$$

Используя для когерентных состояний представление (2.5), получаем

$$\langle \alpha_k | \exp \left(- \frac{\bar{\epsilon}_k}{k_B T} a_k^\dagger a_k \right) | \alpha_k \rangle = \exp \left[(e^{-\bar{\epsilon}_k/k_B T} - 1) |\alpha_k|^2 \right]. \quad (3.6)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} F^{(0)}\{\psi\} &= -k_B T \sum_k (e^{-\bar{\epsilon}_k/k_B T} - 1) |\alpha_k|^2 = \\ &= -k_B T \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) \left[\exp \left(\frac{-1/2 \nabla^2 + \mu}{k_B T} \right) - 1 \right] \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) примет более знакомую форму, если мы ограничимся медленно меняющимися функциями ψ и вспомним, что вблизи бозе-конденсации потенциал μ мал и отрицателен. Тогда мы сможем оставить только первый член в разложении экспоненты

$$F^{(0)}\{\psi\} \approx \int d\mathbf{r} \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + |\mu| |\psi|^2 \right). \quad (3.8)$$

Функционал (3.7) является квадратичной формой по ψ . Это означает, во-первых, что статистическая сумма Z есть произведение гауссовых интегралов, которое может быть легко вычислено и дает совершенно правильный результат для системы невзаимодействующих бозонов. Но более важным является тот факт, что (3.7) не предсказывает никаких метастабильных состояний, т. е. функционал $F^{(0)}\{\psi\}$ не имеет изолированных минимумов, за исключением минимума при $\psi = 0$, и, следовательно, согласно нашему критерию, нет сверхтекучести. Математически механизм бозе-конденсации в формулировке представления когерентных состояний очень напоминает сферическую модель ферромагнетика [25]; интересно отметить, что последняя также нереалистична при описании ферромагнитного фазового перехода, поскольку она не предсказывает никаких метастабильных состояний [26].

Для того чтобы (3.7) и (3.8) описывали систему, которая может иметь метастабильное сверхтекучее движение, необходим

член более высокого порядка в подинтегральном выражении для $F\{\psi\}$, например типа $|\psi|^4$. Такой член (причем с правильным знаком) возникает в исходном гамильтониане за счет двухчастичных сил отталкивания. Но если к гамильтониану H добавить еще член типа (3.9), то мы уже не сможем точно рассчитать $F\{\psi\}$. В дальнейшем мы получим $F\{\psi\}$ в виде ряда по степеням ψ , причем член с $|\psi|^4$ будет наименьшим членом, учитывающим двухчастичное взаимодействие.

Метод вычисления $F\{\psi\}$ в виде ряда по степеням ψ является тем же, что и используемый в большинстве разложений теории возмущений в задачах многих тел и теории поля. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}} = K_{\text{опер}} + H'_{\text{опер}}, \quad K_{\text{опер}} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}},$$

$$H'_{\text{опер}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \bar{v}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}, \quad (3.9)$$

где $v(\mathbf{q})$ — фурье-образ потенциала двухчастичного взаимодействия. Соответствующее разложение имеет вид

$$\exp\left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{K_{\text{опер}}}{k_B T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{(k_B T)^{-1}} d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda_n H'_{\text{опер}}(\lambda_1) \dots H'_{\text{опер}}(\lambda_n), \quad (3.10)$$

причем оператор $H'_{\text{опер}}(\lambda)$ — взятый в представлении взаимодействия оператор $H'_{\text{опер}}$:

$$H'_{\text{опер}}(\lambda) \equiv e^{\lambda K_{\text{опер}}} H'_{\text{опер}} e^{-\lambda K_{\text{опер}}}. \quad (3.11)$$

Наша методика состоит в почленном вычислении диагонального матричного элемента (3.10) для состояния $\{|\alpha\rangle\}$, а затем во взятии экспоненты от вычисленного ряда для получения свободной энергии, которая пропорциональна единственной величине — объему V . Взятие этой экспоненты равнозначно разложению в лестничном приближении.

Рассчитывая матричный элемент любого члена в (3.10), мы, во-первых, используем то, что операторы рождения и уничтожения в представлении взаимодействия всегда можно записать в виде

$$a_{\mathbf{k}}(\lambda) = e^{-\lambda \epsilon_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}, \quad a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\lambda) = e^{\lambda \epsilon_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (3.12)$$

Все зависящие от λ величины входят теперь просто числовыми множителями и могут быть вынесены из матричного элемента.

Следующий шаг состоит в перенесении операторов уничтожения a_k направо, а операторов рождения a_k^\dagger налево. Делается это с использованием бозевских коммутационных соотношений (2.3). Результат есть произведение матричных элементов вида

$$\langle \alpha_k | \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}_k}{k_B T} a_k^\dagger a_k\right) (a_k^\dagger)^s (a_k)^t | \alpha_k \rangle \quad (3.13)$$

по одному на каждую моду k . Это выражение можно вычислить следующим образом. Используя соотношение полноты (2.8) и представление чисел заполнения (2.5), запишем (3.13) в виде

$$\int \frac{d^2\beta_k}{\pi} |\langle \alpha_k | \beta_k \rangle|^2 (\beta_k^*)^s (\alpha_k)^t \exp[(e^{-\bar{\epsilon}_k/k_B T} - 1) \alpha_k^* \beta_k]. \quad (3.14)$$

Интегрирование по β_k можно выполнить с помощью второй из следующих интегральных формул, справедливых для любой функции $f(\alpha)$, разложимой в ряд по степеням α [см. в работе [22] уравнения (2.6)]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp(\alpha^* \beta - |\beta|^2) \beta^n f(\beta^*) &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right)^n f(\alpha^*), \\ \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp(\alpha \beta^* - |\beta|^2) (\beta^*)^n f(\beta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^n f(\alpha). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Окончательная форма (3.13) есть

$$\exp[(e^{-\bar{\epsilon}_k/k_B T} - 1) |\alpha_k|^2] \exp\left(-\frac{s\bar{\epsilon}_k}{k_B T}\right) (\alpha_k^*)^s (\alpha_k)^t. \quad (3.16)$$

Первая экспонента в (3.16) — как раз та величина, которая вычислялась в (3.6); следовательно, величина $\exp(-F^0\{\psi\}/k_B T)$ должна быть выделена в каждом члене разложения по теории возмущений.

Остающиеся вклады удобно изобразить диаграммами типа показанной на фиг. 3.1. Переменная λ увеличивается вверх от 0 до $(k_B T)^{-1}$. Вертикальные сплошные линии обозначают частицы, горизонтальные пунктирные линии — взаимодействия. И линии частиц, и линии взаимодействий несут импульсы, причем импульс сохраняется при каждом взаимодействии.

Правила вычисления этих диаграмм следующие:

1) Для каждой линии, соответствующей частице с импульсом k , начинающейся в точке $\lambda = 0$, пишем множитель α_k . Для каждой линии, кончающейся в точке $\lambda = (k_B T)^{-1}$, пишем множитель α_k^* .

2) Для каждой линии частицы с импульсом \mathbf{k} , начинающейся в λ' и кончающейся в λ , пишем множитель

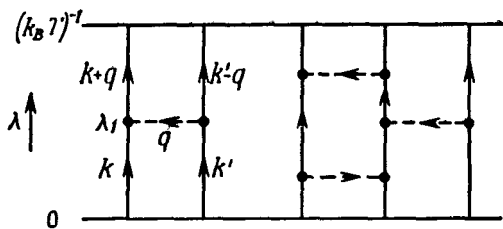
$$\exp [-(\lambda - \lambda') \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}].$$

Точки λ и λ' могут быть либо вершинами, либо конечными точками 0 и $(k_B T)^{-1}$.

3) Для линии взаимодействия, несущей импульс \mathbf{q} , пишем множитель

$$\left(\frac{1}{V}\right) \tilde{v}(\mathbf{q}).$$

4) Суммируем по всем импульсам, учитывая закон сохранения импульса в каждой вершине. Интегрируем по всем λ в тех же пределах, что и в (3.10).



Фиг. 3.1. Типичная диаграмма, появляющаяся в разложении статистической суммы.

Диаграмма содержит пять линий частиц и четыре линии взаимодействия. Имеются две несвязанные части, из которых только левая показана со всеми обозначениями импульсов и λ .

5) Умножаем на стандартные множители, учитывающие одинаковые диаграммы при выполнении суммирования по переменным импульсам. Процедура, выполненная по указанным правилам, дает

$$\langle \{\alpha\} | \exp \left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T} \right) | \{\alpha\} \rangle = \exp \left(-\frac{F^{(0)}(\alpha)}{k_B T} \right) \sum_{\Gamma} W_{\Gamma} \{\alpha\}, \quad (3.17)$$

где $W_{\Gamma} \{\alpha\}$ — числовой вклад диаграммы Γ , определенный по этим правилам. Обычный метод связанных диаграмм тогда дает

$$F \{\alpha\} - F^{(0)} \{\alpha\} = k_B T \sum_{\Gamma^{(c)}} W_{\Gamma^{(c)}} \{\alpha\}, \quad (3.18)$$

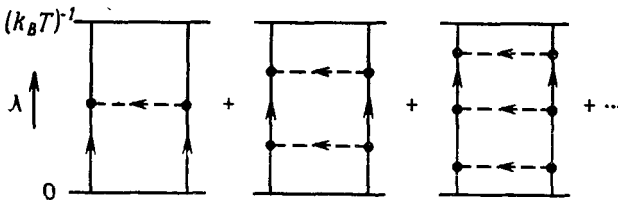
где теперь только связанные диаграммы $\Gamma^{(c)}$ включены в сумму. Под связанной мы понимаем такую диаграмму, в которой каждая линия частицы связана с остальной частью диаграммы хотя бы одной линией взаимодействия.

В соответствии с указанным выше правилом 1 диаграмма с l линиями частиц формально является диаграммой порядка $|\alpha|^{2l}$, т. е. она содержит l множителей $\alpha_k, \alpha_{k'}$ и т. д. и l множителей $\alpha_p^*, \alpha_{p'}^*$ и т. д. Чтобы получить полный вклад в $F\{\alpha\}$ порядка $|\alpha|^4$, мы должны просуммировать все двухчастичные диаграммы, подобные показанным на фиг. 3.2. Трехчастичные диаграммы дадут вклад порядка $|\alpha|^6$ и т. д.

Для полноты мы приведем численный вклад в F от первой диаграммы, показанной на фиг. 3.2:

$$\frac{k_B T}{2V} \sum_{k, k', q} \tilde{v}(q) \left(\frac{e^{-E/k_B T} - e^{-E'/k_B T}}{E' - E} \right) \alpha_{k+q}^* \alpha_{k'-q}^* \alpha_k \alpha_{k'}, \quad (3.19)$$

где $E = \tilde{\epsilon}_k + \tilde{\epsilon}_{k'}$, $E' = \tilde{\epsilon}_{k+q} + \tilde{\epsilon}_{k'-q}$. Если гамильтониан двухчастичного взаимодействия содержит твердую сердцевину или же просто слишком силен, чтобы можно было использовать (3.19),



Фиг. 3.2. Последовательность двулестничных диаграмм, которые необходимо суммировать, чтобы получить полный вклад в F членов порядка $|\alpha|^4$.

то необходимо суммировать весь ряд лестничных диаграмм. В этом месте наш формализм становится очень близким формализму, развитому Ли и Янгом [27], так что за подробностями таких расчетов мы отсылаем читателя к их статьям.

В заключение отметим, что мы построили функционал свободной энергии $F\{\psi\}$ по существу в форме Гинзбурга — Ландау [см. (1.4)], причем единственное действительное отличие заключается в том, что производные функции ψ входят несколько более сложным образом, когда ψ быстро меняется с изменением координат. Простая форма члена четвертого порядка в (1.4) правильна для тех ψ , которые медленно меняются на расстояниях порядка длины двухчастичного рассеяния. Наконец, резкая зависимость A (коэффициент при $|\psi|^2$) от температуры по существу такая же, как и зависимость от температуры химического потенциала μ , который должен быть выбран так, чтобы фиксировать число частиц. Мы знаем, что для невзаимодействую-

щих частиц потенциал μ отрицателен при высоких температурах и стремится к нулю у точки бозе-эйнштейновской конденсации. Если мы учитываем эффект сил отталкивания, т. е. добавляем член $B|\psi|^4$ с положительным B , то можно ожидать, что μ станет положительным ниже некоторой критической температуры, как это и требуется феноменологической моделью.

§ 4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ И МОДЕЛЬ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

Функционал

$$\rho(\{\alpha^*\}, \{\alpha\}) = \frac{1}{Z} \langle \{\alpha\} | \exp\left(-\frac{H_{\text{опер}} - \mu N_{\text{опер}}}{k_B T}\right) | \{\alpha\} \rangle = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{F(\psi)}{k_B T}\right) \quad (4.1)$$

является диагональным элементом матрицы плотности в представлении когерентных состояний. Нам хотелось бы интерпретировать (4.1) просто как вероятность найти систему в состоянии ψ , но следует помнить, что матрица плотности не совсем диагональна в этом представлении. Рассмотрим, например, ожидаемое значение плотности числа частиц, которое дается для чистого состояния формулой (2.18). Оно дается выражением [см. [22], ур. (2.16)]

$$n_k = \text{Sp}(a_k^\dagger a_k \rho_{\text{опер}}) = \prod_{k'} \left(\int \frac{d^2 \alpha_{k'}}{\pi} \right) \alpha_k^* \left(\alpha_k + \frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} \right) \rho(\{\alpha^*\}, \{\alpha\}), \quad (4.2)$$

которое выводится с помощью интегральных формул (3.15). Интегрирование по частям является законным, так что

$$n_k = \prod_{k'} \left(\int \frac{d^2 \alpha_{k'}}{\pi} \right) (|\alpha_k|^2 - 1) \rho(\{\alpha^*\}, \{\alpha\}) = \langle |\alpha_k|^2 \rangle_\psi - 1, \quad (4.3)$$

где треугольные скобки означают среднее по ψ или по α -пространству с (4.1) в качестве статистического веса.

Важно отметить, что ожидаемая тождественность n_k и $\langle |\alpha_k|^2 \rangle_\psi$ является хорошим приближением только в классическом пределе, $n_k \gg 1$. Эта тождественность абсолютно правильна, только если имеется макроскопическая заселенность мод, т. е. числа n_k имеют порядок N .

Полную плотность можно написать в виде

$$n = \frac{1}{V} \sum_k n_k = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle_\psi - \frac{1}{V} \sum_k 1. \quad (4.4)$$

Очевидно, что здесь мы должны ожидать коротковолновую (большие величины k) расходимость в $\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle_\psi$. Действительно, это та же самая расходимость, которая появляется в теоретико-полевых вычислениях, и в (4.4) хорошо видно, как она убирается. Эта расходимость исчезает в формуле для плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{1}{V} \sum_k k n_k = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \left\langle \frac{1}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right\rangle_\psi. \quad (4.5)$$

Теория Гинзбурга—Ландау и модель двух жидкостей «вступают в игру» только в том случае, если можно оценить приведенные выше выражения, что равнозначно расчету среднего поля, проведенного в приближении случайных фаз. Предположим, что $\rho\{\psi\}$ [см. (4.1)] имеет острый пик при какой-то функции ψ , например ψ_s . Примем, что ψ_s — наиболее вероятное (причем намного более вероятное, чем прочие) состояние в своей области функционального пространства, так что она должна описывать стабильное или метастабильное состояние системы. Тогда с ψ_s могут быть связаны плотность числа частиц в сверхтекучей компоненте n_s и плотность сверхтекучего тока \mathbf{j}_s :

$$n_s = |\psi_s|^2, \quad \mathbf{j}_s = \frac{1}{2i} (\psi_s^* \nabla \psi_s - \psi_s \nabla \psi_s^*). \quad (4.6)$$

Для того чтобы величины (4.6) имели смысл, необходимо, чтобы ψ_s была порядка единицы (а не, скажем, порядка $N^{-1/2}$) во всей системе. Таким образом, ψ_s должна обладать свойствами классического поля, обсуждавшимися в § 2; в частности, она должна подчиняться уравнениям сверхтекучего движения (2.19). Итак, самая вероятная функция ψ описывает сверхтекучую компоненту системы.

Следует, однако, учитывать, что наиболее вероятная функция ψ не то же самое, что средняя функция ψ ; n_s и \mathbf{j}_s — также не то же самое, что средние или ожидаемые значения n и \mathbf{j} , определяемые формулами (4.4) и (4.5). Чтобы вычислить правильно плотность и ток, нужно учесть ширину пика функционала $\rho\{\psi\}$ около ψ_s , т. е. нужно учесть флуктуации. Как строго сделать это — неизвестно (за исключением одномерного случая), однако при температурах, достаточно далеких от критической точки, где малы флуктуации, качественно правильные результаты можно получить следующим образом.

В принципе нам нужно разложить $F\{\psi\}$ до квадратичного по $(\psi - \psi_s)$ члена, а затем взять получающиеся при этом гаус-

совы интегралы¹⁾. Эта процедура слегка усложнена тем, что функционал $F\{\psi\}$ не зависит от фазы функции ψ ; флуктуации же фазы всегда существенны и должны рассматриваться отдельно. Предположим, что ψ_s — одно из однородных сверхтекучих состояний, описываемых формулой (1.8)

$$\psi_s = f_k \exp(ik \cdot r), \quad (4.7)$$

Следуя далее выводу Райса [13], пишем

$$\psi(r) = [f_k + v(r)] \exp[ik \cdot r + i\varphi(r)], \quad (4.8)$$

где v и φ — действительные функции r . Имеет смысл разложить затем $F\{\psi\}$ до квадратичных по v и φ членов. Для $F\{\psi\}$ в виде (1.4) имеем

$$F\{\psi\} \approx F\{\psi_s\} + \int dr [(\nabla v)^2 + f_k^2 (\nabla \varphi)^2 + 4f_k v k \cdot \nabla \varphi + \kappa^2 v^2], \quad (4.9)$$

где

$$\kappa^2 = 2Bf_k^2 = 2(A - k^2). \quad (4.10)$$

Если использовать более общий функционал $F\{\psi\}$, содержащий квадратичный член $F^{(0)}\{\psi\}$ [см. (3.7)], который необходим, чтобы привлечь быстро меняющиеся функции ψ , то соответствующая квадратичная форма усложнится, но останется похожей по структуре на (4.9). Мы придем к выражениям вида

$$n = n_s + \langle v^2 \rangle - \frac{1}{V} \sum_k l \quad (4.11)$$

и

$$j = j_s + 2f_k (v \nabla \varphi) + k \langle v^2 \rangle, \quad (4.12)$$

где угловые скобки обозначают усреднение с написанным выше гауссовым приближением для весового множителя $\rho\{\psi\}$. В формулах (4.11) и (4.12) вклад флуктуаций в n и j аддитивен и, по-видимому, описывает нормальную компоненту жидкости.

Конкретные расчеты такого типа опубликованы Райсом [13], который подчеркнул, что флуктуации фазы препятствуют возникновению недиагонального дальнего порядка в одномерном и двумерном случаях. Читатель может проверить, используя результаты Райса [13], что формулы для n и j остаются хорошо определенными всюду, за исключением области около самой критической точки, в которой флуктуации становятся аномально большими. Тот факт, что данный метод не годится в некотором

¹⁾ Математическая значимость выполнения этих интегрирований в окрестности функции ψ_s , которая не реализует абсолютного минимума функционала $F\{\psi\}$, обсуждается в работе [16].

температурном интервале, особенно в одномерном и двумерном случаях, не говорит ничего о том, происходит ли в действительности фазовый переход, и не обесценивает полученных качественных результатов в области, где флуктуации достаточно малы, чтобы считать развитый метод самосогласованным. Действительно, известные свойства решаемой одномерной модели того же типа, что и обсуждаемая здесь, в которой используется простейшая форма Гинзбурга—Ландау для $F\{\psi\}$, также являются наиболее поразительными свойствами сделанного выше приближения. Действительно, дальний порядок отсутствует, но наиболее вероятное значение амплитуды функции ψ не равно нулю и очень маловероятно, чтобы при достаточно низких температурах она вообще где-либо исчезала. Таким образом, одномерная модель в некотором смысле может обладать сверхтекучестью. Как эта одномерная модель, так и дальнейший анализ поведения нормальной компоненты, рассматриваемой с учетом флуктуаций, явятся предметом следующих сообщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langer J. S., Fisher M. E., Phys. Rev. Lett., **19**, 560 (1967).
2. Langer J. S., Ambegaokar V., Phys. Rev., **165**, 498 (1967).
3. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).
4. de Gennes P. G., Superconductivity of Metals and Alloys, New York, 1966, Ch. 6 and 7.
5. Gross E. P., Nuovo Cimento, **20**, 454 (1961).
6. Гинзбург В. Л., Питаевский Л. П., ЖЭТФ, **34**, 1240 (1958).
7. Питаевский Л. П., ЖЭТФ, **40**, 646 (1961).
8. Josephson B. D., Advan. Phys., **14**, 419 (1965).
9. Anderson P. W., Rev. Mod. Phys., **38**, 298 (1966).
10. Bardeen J., Rev. Mod. Phys., **34**, 607 (1962).
11. Langer J. S., Phys. Rev., **165**, 498 (1967); App. C.
12. Little W. A., Phys. Rev., **156**, 396 (1967).
13. Rice T. M., Phys. Rev., **140**, A1889 (1965).
14. Hohenberg P., Phys. Rev., **158**, 383 (1967).
15. Frenkel J., Kinetic Theory of Liquids, New York, 1955, Ch. 7.
16. Langer J. S., Ann. of Phys., **41**, 108 (1967).
17. Иорданский С. В., ЖЭТФ, **48**, 708 (1965).
18. W. F. Wines, в книге Proceedings of the International School of Physics «Enrico Fermi», Course XXI, ed. G. Gareri, New York, 1963.
19. Langer J. S., Phys. Rev., **134**, A553 (1964).
20. Glauber R. J., Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
21. Carruthers P., Nieto M. M., Am. Journ. Phys., **33**, 537 (1965).
22. Carruthers P., Dy K. S., Phys. Rev., **147**, 214 (1966).
23. Cummings F. W., Johnson J. R., Phys. Rev., **151**, 105 (1966).
24. Gross E. P., Ann. of Phys., **4**, 57 (1958).
25. Berlin T. H., Кас М., Phys. Rev., **86**, 821 (1952).
26. Langer J. S., Phys. Rev., **137**, A1531 (1965).
27. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **113**, 1165 (1959).

Расчет диамагнетизма Ландау с помощью когерентных состояний электрона в однородном магнитном поле

А. Ф Е Л Ъ Д М А Н*, А. К А Н*

A. Feldman, A. H. Kahn, *Phys. Rev.*, B1, № 12, 4584 (1970)

Для электрона в однородном магнитном поле построен полный набор волновых пакетов — когерентных состояний. Эти состояния являются нерасплывающимися пакетами с минимальной неопределенностью, совершающими классическое движение. Используются лестничные операторы, генерирующие все собственные состояния гамильтониана из одного энергетического собственного состояния. Когерентные состояния являются собственными состояниями двух лестничных операторов, annulling основное состояние с нулевым угловым моментом. Мы вычислили статистическую сумму, используя преимущества базиса когерентных состояний. Диамагнетизм Ландау и осцилляции де Гааза — Ван Альфена описываются с помощью когерентных состояний.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Недавняя работа Глаубера [1] вновь привлекла внимание к волновым пакетам — когерентным состояниям. Это вызвано главным образом тем, что эти состояния полезно использовать в качестве базисных состояний для расчета физически наблюдаемых величин [1, 2]. Кроме того, они важны для квантовомеханического определения фазы осциллятора [3]. Когерентное состояние является волновым пакетом, распределение вероятностей которого инвариантно во времени, за исключением случая перемещения его как целого соответственно классическим уравнениям движения. Физические и математические свойства когерентных состояний линейного осциллятора подытожил Луиселл [2].

В этой статье мы ввели полный набор когерентных состояний заряженной частицы в магнитном поле, используя лестничные операторы¹⁾. Некоторые из этих состояний были впервые

* National Bureau of Standards, Washington, D. C. 20234.

¹⁾ После окончания работы авторы обнаружили, что когерентные состояния того же вида были построены И. А. Малкиным и В. И. Манько [4].

найлены Дарвином [5] при исследовании классического действия. Чтобы получить все эти состояния, мы построили, вдобавок к лестничным операторам π_{\pm} , построенным Джонсоном и Липманом [6], лестничные операторы X_{\pm} . Спин всюду в этой статье не учитывается.

В качестве приложения мы использовали когерентные состояния для расчета намагниченности и магнитной восприимчивости газа свободных электронов и, следовательно, вновь вывели формулы для диамагнетизма Ландау. Расчету помогают упрощения, возникающие при использовании когерентных состояний в качестве базиса.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Собственные векторы и собственные значения энергии заряженной частицы в магнитном поле впервые были найдены Ландау [7]. Мы рассмотрим эту задачу, чтобы получить операторы, генерирующие когерентные состояния. Мы будем использовать обозначения Кубо и др. [8]. Двумя константами, характеризующими задачу, являются циклотронная частота $\Omega = eH/\mu c$ и радиус классической орбиты, отвечающей основному состоянию Ландау, $l = (\hbar/\mu\Omega)^{1/2}$.

Гамильтониан свободного электрона в магнитном поле без учета спина равен

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^2}{2\mu}, \quad (2.1)$$

где μ — масса электрона

$$\pi = p + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (2.2)$$

и

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.3)$$

Вектор-потенциал выбираем в виде

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2} Hy, \frac{1}{2} Hx, 0 \right), \quad (2.4)$$

что соответствует магнитному полю, параллельному оси z . Поскольку движение вдоль оси z является движением свободной частицы, то необходимо решить только двумерную задачу в плоскости xy . Подходящий гамильтониан для поперечного движения имеет вид

$$\mathcal{H}_t = \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x - \frac{1}{2} \mu \Omega y \right)^2 + \left(p_y + \frac{1}{2} \mu \Omega x \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Если ввести операторы [6]

$$\pi_{\pm} = p_x \pm ip_y \pm \left(\frac{i\hbar}{2l^2} \right) (x \pm iy), \quad (2.6)$$

подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[\pi_{-}, \pi_{+}] = 2\mu\hbar\Omega, \quad (2.7)$$

то

$$\mathcal{H}_l = \frac{\pi_{+}\pi_{-}}{2\mu} + \frac{1}{2} \hbar\Omega. \quad (2.8)$$

Математически это эквивалентно гамильтониану линейного осциллятора с оператором числа возбуждений $\pi_{+}\pi_{-}/2\mu\hbar\Omega$. Оператор углового момента

$$L_z = xp_y - yp_x, \quad (2.9)$$

имеющий целые собственные значения (в единицах \hbar), коммутирует с \mathcal{H}_l . Мы отберем энергетические собственные состояния, одновременно являющиеся собственными состояниями и оператора L_z . Обозначая их символом $|N, m\rangle$, получаем уравнения на собственные значения:

$$\mathcal{H}_l |N, m\rangle = \left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega |N, m\rangle \quad (2.10)$$

и

$$L_z |N, m\rangle = m\hbar |N, m\rangle. \quad (2.11)$$

Из коммутационных соотношений π_{\pm} с \mathcal{H} и L_z ,

$$[\mathcal{H}, \pi_{\pm}] = \pm \hbar\Omega\pi_{\pm}, \quad (2.12)$$

$$[L_z, \pi_{\pm}] = \pm \hbar\pi_{\pm}, \quad (2.13)$$

видно, что операторы π_{+} и π_{-} — соответственно повышающий и понижающий операторы для энергии и углового момента одновременно:

$$\pi_{+} |N, m\rangle = (2\mu\hbar\Omega)^{1/2} (N + 1)^{1/2} |N + 1, m + 1\rangle, \quad (2.14)$$

$$\pi_{-} |N, m\rangle = (2\mu\hbar\Omega)^{1/2} N^{1/2} |N - 1, m - 1\rangle. \quad (2.15)$$

На фиг. 4.1 показаны свойства операторов π_{\pm} . В наборе состояний $|N, m\rangle$ действие операторов π_{\pm} смещает изображающую точку вдоль любой из диагоналей. Очевидно, для того чтобы генерировать все состояния из любого одного состояния, нужно найти оператор, ведущий от одной диагонали к другой. Оператор с таким свойством можно построить из операторов координат

нат центра орбиты [8],

$$X = x - \frac{\pi_y}{\mu\Omega} \quad (2.16)$$

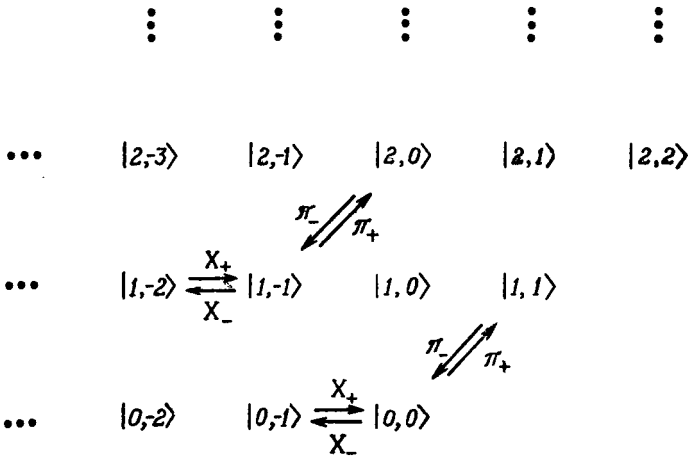
и

$$Y = y + \frac{\pi_x}{\mu\Omega}. \quad (2.17)$$

Операторы

$$X_{\pm} = X \pm iY \quad (2.18)$$

обладают искомыми свойствами, поскольку они сдвигают только угловой момент и не меняют энергии, что видно из коммута-



Фиг. 4.1. Энергетические собственные состояния $|N, m\rangle$ для поперечного движения электронов в магнитном поле.

Собственное значение энергии равно $(N + 1/2) \hbar\Omega$, собственное значение углового момента равно $m\hbar$. Действие лестничных операторов π_{\pm} и X_{\pm} показано стрелками.

ционных соотношений

$$[L_z, X_{\pm}] = \pm \hbar X_{\pm} \quad (2.19)$$

и

$$[\mathcal{H}, X_{\pm}] = 0. \quad (2.20)$$

Кроме того, они коммутируют с π_{\pm} . Следовательно, можно показать, что

$$X_+ |N, m\rangle = (\sqrt{2}) l(N - m)^{1/2} |N, m + 1\rangle$$

и

$$X_- |N, m\rangle = (\sqrt{2}) l(N - m + 1)^{1/2} |N, m - 1\rangle.$$

Ясно, что для данной энергии $(N + 1/2) \hbar \Omega$ число m может принимать значения $N, N - 1, \dots, 0, -1, \dots, -\infty$, поскольку применение оператора X_+ к состоянию $|N, N\rangle$ дает нуль. Все энергетические собственные состояния можно теперь получить из основного состояния $|0, 0\rangle$ последовательным применением π_+ и X_- :

$$|N, m\rangle = [(2\mu\hbar\Omega)^N (2l^2)^{N-m} N! (N-m)!]^{-1/2} X_-^{N-m} \pi_+^N |0, 0\rangle. \quad (2.21)$$

Это схематически показано на фиг. 4.1.

Волновая функция основного состояния с нулевым угловым моментом в координатном представлении получается из двух условий:

$$\langle r | X_+ | 0, 0 \rangle = \left[l^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (x + iy) \right] \psi_{00} = 0,$$

$$\langle r | \pi_- | 0, 0 \rangle = -i\hbar \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2l^2} (x - iy) \right] \psi_{00} = 0.$$

Решение упрощается, если сделать замену переменных $\rho_{\pm} = x \pm iy$. В результате получаем состояние

$$\psi_{00}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4l^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l} \exp\left(-\frac{\rho_+ \rho_-}{4l^2}\right),$$

нормированное на единицу в плоскости xy .

§ 3. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Когерентные состояния гармонического осциллятора подробно обсуждались Глаубером [1]. Мы будем следовать его подходу, решая задачу об электроде в магнитном поле. Рассмотрим только поперечное движение. Определим когерентное состояние $|\alpha, \xi\rangle$ как собственное состояние одновременно двух коммутирующих неэрмитовых операторов, зануляющих основное состояние:

$$\pi_- |\alpha, \xi\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\alpha}{l^2} |\alpha, \xi\rangle, \quad (3.1)$$

$$X_+ |\alpha, \xi\rangle = \xi |\alpha, \xi\rangle. \quad (3.2)$$

Комплексные собственные значения α и ξ имеют размерность длины. Их физический смысл и когерентные свойства мы обсудим ниже.

Построим когерентное состояние в виде разложения по полному набору энергетических собственных функций:

$$|\alpha, \xi\rangle = \sum |N, m\rangle \langle N, m | \alpha, \xi\rangle. \quad (3.3)$$

Все коэффициенты разложения $\langle N, m | \alpha, \xi \rangle$ можно выразить через единственный коэффициент $\langle 0, 0 | \alpha, \xi \rangle$, используя (3.1) и (3.2) и эрмитовски сопряженное равенство (2.21):

$$\langle N, m | \alpha, \xi \rangle = \frac{(\alpha/i)^N (\xi)^{N-m}}{(2l^2)^{N/2} (N!)^{1/2} (2l^2)^{(N-m)/2} [(N-m)!]^{1/2}} \langle 0, 0 | \alpha, \xi \rangle. \quad (3.4)$$

Из условия нормировки

$$\langle \alpha, \xi | \alpha, \xi \rangle = 1 \quad (3.5)$$

получаем, что

$$\langle 0, 0 | \alpha, \xi \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\xi|^2}{4l^2}\right), \quad (3.6)$$

где произвольный фазовый множитель положен равным единице.

Дополнительно используя выражение (2.21), можно привести когерентное состояние к виду

$$|\alpha, \xi\rangle = \exp\left[-\frac{1}{4l^2} (|\alpha|^2 + |\xi|^2) + \frac{\alpha\pi_+}{2i\hbar} + \frac{\xi X_-}{2l^2}\right] |0, 0\rangle. \quad (3.7)$$

Зависимость когерентного состояния от времени выводится путем нахождения зависимости от времени операторов X_+ и π_- в гейзенберговской картине. Оператор X_+ является константой движения, поскольку он коммутирует с \mathcal{H} . С другой стороны,

$$\pi_-(t) = \exp(-i\Omega t) \pi_-(0), \quad (3.8)$$

что следует из уравнения движения

$$\frac{d\pi_-}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\pi_-, \mathcal{H}] = -i\Omega\pi_-. \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\pi_-(t) |\alpha, \xi\rangle \exp(-i\Omega t) \pi_-(0) |\alpha, \xi\rangle = \alpha \exp(-i\Omega t) |\alpha, \xi\rangle. \quad (3.10)$$

При переходе к шредингеровской картине зависящее от времени когерентное состояние принимает вид $|\alpha \exp(-i\Omega t), \xi\rangle$.

Шредингеровское представление когерентного состояния $\psi_{\alpha\xi}(r)$ можно получить несколькими способами. Один из них — решить уравнения (3.1) и (3.2) в координатном представлении. Используя $\rho_{\pm} = x \pm iy$, мы получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho_+} + \frac{1}{4l^2} \rho_-\right) \psi_{\alpha\xi} = \frac{\alpha}{2l^2} \psi_{\alpha\xi}, \quad (3.11a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho_-} + \frac{1}{4l^2} \rho_+\right) \psi_{\alpha\xi} = \frac{\xi}{2l^2} \psi_{\alpha\xi}. \quad (3.11b)$$

Так как решения при $\alpha = \xi = 0$ есть $\exp(-\rho_+\rho_-/4l^2)$, то естественно попытаться получить остальные решения сдвигом переменных ρ_+ и ρ_- :

$$\psi_{\alpha\xi} \sim \exp\left[-\frac{(\rho_+ - 2\xi)(\rho_- - 2\alpha)}{4l^2}\right] \exp[f(t)], \quad (3.12)$$

где $f(t)$ — неизвестная функция времени. Последнюю мы найдем, требуя, чтобы $\psi_{\alpha\xi}$ удовлетворяло уравнению Шредингера со временем с $\alpha(t)$, имеющей временную зависимость вида $\exp(-i\Omega t)$; это дает $f(t) = \alpha(t)\xi/2l^2$. Следовательно, нормированная на единицу волновая функция есть

$$\psi_{\alpha\xi} = \frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{4l^2}(|\alpha|^2 + |\xi|^2) - \frac{1}{4l^2}(\rho_+ - 2\xi)(\rho_- - 2\alpha) + \frac{\alpha\xi}{2l^2}\right]. \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) можно получить прямо путем записи выражения (3.7) в координатном представлении. При этом используются операторные тождества

$$\exp\left(x + c \frac{\partial}{\partial x}\right) = \exp(x) \exp\left(c \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\frac{1}{2}c\right)$$

и

$$\left[\exp\left(c \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] f(x) = f(x + c).$$

Пространственная плотность вероятности равна

$$|\psi_{\alpha\xi}|^2 = \frac{1}{2\pi l^2} \exp\left[-\left(\frac{1}{2l^2}\right)[(x - \alpha_1 - \xi_1)^2 + (y + \alpha_2 - \xi_2)^2]\right], \quad (3.14)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, причем α_1 , α_2 , ξ_1 , ξ_2 — все действительны. Следовательно, когерентный волновой пакет имеет форму основного состояния, но сдвинут в пространстве к центру движения. Его средние координаты суть

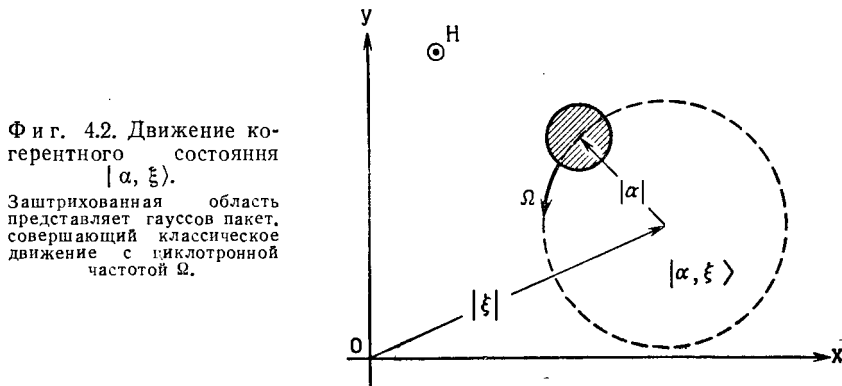
$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \text{Re} [\xi + \alpha(0) \exp(-i\Omega t)], \\ \bar{y}(t) &= \text{Im} [\xi - \alpha(0) \exp(-i\Omega t)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, центр пакета движется по классической орбите радиусом $|\alpha|$ с центром в точке (ξ_1, ξ_2) . Форма пакета не зависит от времени. Это движение иллюстрируется фиг. 4.2. Использование оператора X_- дает возможность поместить центр пакета в любом месте. Такую же методику можно использовать для нахождения когерентных состояний в скрещенных электрическом и магнитном полях и для гармонического осциллятора в магнитном поле. Эти случаи обсуждаются в приложениях А и Б.

Когерентные состояния образуют полный базис. Следуя Глауберу [1], запишем соотношение полноты для них в виде

$$\frac{1}{4\pi^2 l^4} \int |\alpha, \xi\rangle \langle \alpha, \xi| d^2\alpha d^2\xi = 1, \quad (3.16)$$

где $d^2\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2$; $d^2\xi = d\xi_1 d\xi_2$. Как и в случае гармонического осциллятора, эти когерентные состояния являются состояниями



с минимальной неопределенностью, т. е. они удовлетворяют соотношениям

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{1}{2} \hbar. \quad (3.17)$$

§ 4. ДИАМАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Когерентные состояния, позволяя использовать классические представления для описания электронных орбит, тем не менее содержат все квантовые эффекты. Мы используем этот подход для расчета статистической суммы. Таким способом получают и формулы для диамагнетизма Ландау. Статистическая сумма дается выражением

$$\begin{aligned} Z &= \text{Sp} \exp(-\mathcal{H}/kT) = \sum \langle \alpha, \xi, k_z | \exp(-\mathcal{H}/kT) | \alpha, \xi, k_z \rangle = \\ &= \sum_{k_z} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k_z^2}{2\mu kT}\right) \int \frac{d^2\xi d^2\alpha}{4\pi^2 l^4} \langle \alpha, \xi | \left[\exp\left(-\frac{\pi_+ \pi_-}{2\mu kT} - \frac{1}{2} \frac{\hbar\Omega}{kT}\right) \right] | \alpha, \xi \rangle. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Сумма по k_z даст обычную статистическую сумму для одномерного свободного движения. Вычислим Z для цилиндрического тела длиной L и радиусом R , ориентированного вдоль магнит-

ного поля. Имеем

$$Z = Z_{\parallel} Z_{\perp}, \quad (4.2)$$

где

$$Z_{\parallel} = \frac{L}{\hbar} (2\pi\mu kT)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Поперечный сомножитель можно упростить благодаря свойствам когерентных состояний. Чтобы вычислить статистическую сумму (4.1), мы используем следующее тождество для бозонных операторов [2]:

$$\exp(xa^{\dagger}a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\exp x - 1)^n}{n!} a^{\dagger n} a^n, \quad (4.4)$$

где a и a^{\dagger} удовлетворяют условию $[a, a^{\dagger}] = 1$. Итак,

$$\langle \alpha \xi | \left[\exp\left(-\frac{\pi_+ \pi_-}{2\mu kT}\right) \right] | \alpha \xi \rangle = \exp\left\{ \frac{|\alpha|^2}{2l^2} \left[\exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (4.5)$$

так что поперечный сомножитель равен

$$Z_{\perp} = \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{2kT}\right) \int \frac{d^2\xi d^2\alpha}{4\pi^2 l^4} \exp\left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2l^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Чтобы выполнить интегрирование по ξ и α , мы исключим все когерентные состояния с $|\alpha + \xi| > R$, т. е. просуммируем все орбиты, лежащие внутри цилиндра. Это ограничение на когерентные состояния, по которым берется интеграл, эквивалентно обрезанию энергетических собственных состояний, использовавшемуся Ландау [7]. Поскольку в нашем случае $R \gg l$ и экспонента быстро спадает с ростом $|\alpha|^2$, то можно распространить интегрирование по α до бесконечности. Тогда

$$Z_{\perp} = \frac{\exp(-\hbar\Omega/2kT)}{4\pi^2 l^4} \int_0^R 2\pi |\xi| |d| |\xi| \int_0^{\infty} 2\pi |\alpha| |d| |\alpha| \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2l^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{kT}\right) \right] \right\} \quad (4.7)$$

и

$$Z = V \frac{(2\pi\mu kT)^{1/2}}{\hbar} \frac{\mu\Omega}{4\pi\hbar} \frac{1}{\text{sh}(\hbar\Omega/2kT)}. \quad (4.8)$$

Намагниченность M получается из свободной энергии F

$$F = -nkT \ln Z \quad (4.9)$$

и

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{ne\hbar}{\mu c} \left(\frac{kT}{\hbar\Omega} - \frac{1}{2} \text{cth} \frac{\hbar\Omega}{2kT} \right). \quad (4.10)$$

В высокотемпературном пределе восприимчивость χ на один электрон дает корректное выражение для диамагнитной вос-

приемчивости Ландау

$$\chi = -\frac{1}{n} \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{1}{3} \left(\frac{e\hbar}{2\mu c} \right)^2 \frac{1}{kT}. \quad (4.11)$$

Коль скоро известна статистическая сумма для невырожденного случая, свободную энергию электронного газа, подчиняющегося ферми-статистике, можно, как показал Вильсон [9], найти непосредственно. Это связано с тем, что плотность состояний дается обратным преобразованием Лапласа статистической суммы [10]. Следовательно, все квантовые эффекты, включая эффект де Гааза — ван Альфена, описываются в методе когерентных состояний.

В приложении Б мы получим статистическую сумму Z для осциллятора в магнитном поле [11]. В этом случае нет необходимости проводить обрезание на радиусе R . В пределе малой константы упругости мы получим те же M и χ , что и выше.

Итак, когерентные состояния позволяли нам использовать классические представления о центре и радиусе орбиты. Квантовые эффекты проявляются в некоммутативности операторов π_+ и π_- . Последняя приводит к распределению радиусов орбит того же вида, что и впервые выведенная Блохом [12] для распределения амплитуд гармонического осциллятора при тепловом равновесии.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: СКРЕЩЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ

В скрещенных электрическом и магнитном полях к гамильтониану добавляется член

$$V = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = e(E_x x + E_y y) = \frac{1}{2} e(E_+ \rho_- + E_- \rho_+),$$

где $E_{\pm} = E_x \pm iE_y$. Гейзенберговские уравнения движения для операторов π_- и X_+ принимают вид

$$\frac{d\pi_-}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\pi_-, \mathcal{H}_t + V] = -i\Omega\pi_- - eE_-$$

и

$$\frac{dX_+}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [X_+, V] = -\frac{ieE_+}{\mu\Omega}.$$

Их решения имеют вид

$$\pi_-(t) = \exp(-i\Omega t) \pi_-(0) - \frac{eE_-}{i\Omega},$$

$$X_+(t) = X_+(0) - \frac{ieE_+}{\mu\Omega} t.$$

Таким образом, когерентное состояние $|\alpha_0, \xi_0\rangle$ при $t=0$ переходит в момент времени t в состояние

$$\left| \alpha_0 \exp(-i\Omega t) - \frac{eE_-}{\mu\Omega^2}, \xi_0 - \frac{ieE_+}{\mu\Omega} t \right\rangle.$$

Положение центра орбиты в момент времени t дается формулами

$$\bar{x}(t) = \text{Re} \left[\xi_0 - \frac{ieE_+}{\mu\Omega} t + \alpha_0 \exp(-i\Omega t) - \frac{eE_-}{\mu\Omega^2} \right],$$

$$\bar{y}(t) = \text{Im} \left[\xi_0 - \frac{ieE_+}{\mu\Omega} t - \alpha_0 \exp(-i\Omega t) - \frac{eE_-}{\mu\Omega^2} \right].$$

Эти формулы описывают движение по циклоиде, по которой перемещается классический электрон в скрещенных полях. Когерентное состояние имеет то же распределение заряда, что и прежде, но движется по этой новой траектории.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б: ЭЛЕКТРОН В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И В ПОЛЕ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Собственные функции и собственные значения для этой задачи были впервые найдены Фоком [11]. Гамильтониан \mathcal{H}_t имеет вид

$$\mathcal{H}_t = \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x - \frac{1}{2} \mu\Omega y \right)^2 + \left(p_y + \frac{1}{2} \mu\Omega x \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \mu\omega_0^2 (x^2 + y^2).$$

Если сделать подстановку

$$\Omega' = (\Omega^2 + 4\omega_0^2)^{1/2},$$

то получим

$$\mathcal{H}_t = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi_+ \pi_-}{2\mu} \left(1 + \frac{\Omega}{\Omega'} \right) + \frac{1}{2} \mu\Omega'^2 X_- X_+ \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega'} \right) + \hbar\Omega' \right], \quad (\text{Б.1})$$

где частота Ω' подставлена вместо Ω в определениях l , X_{\pm} и π_{\pm} . Собственные состояния гамильтониана (Б.1) те же, что и прежде, а собственные значения другие:

$$\left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega' - m\hbar \left[\frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \right].$$

Когерентные состояния также те же, что и прежде, за исключением того, что α и ξ стали зависеть от времени:

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp \left\{ -i \left[\frac{1}{2} (\Omega' + \Omega) \right] t \right\},$$

$$\xi(t) = \xi(0) \exp \left\{ -i \left[\frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \right] t \right\}.$$

Волновой пакет, следовательно, совершает классическое движение.

Чтобы рассчитать в этом случае сомножитель Z_{\perp} , можно выполнить все интегрирования от 0 до ∞ . Тогда статистическая сумма примет вид

$$Z_{\perp} = \left(4 \operatorname{sh} \frac{\hbar (\Omega' - \Omega)}{4kT} \operatorname{sh} \frac{\hbar (\Omega' + \Omega)}{4kT} \right)^{-1}.$$

При $\omega_0 \ll \Omega$ сомножитель Z_{\perp} становится равным

$$Z_{\perp} = \left(\frac{2\hbar\omega_0^2}{kT\Omega} \operatorname{sh} \frac{\hbar\Omega}{2kT} \right)^{-1}.$$

С точностью до константы пропорциональности это выражение совпадает с (4.8) и, следовательно, приводит к тем же формулам для намагниченности и восприимчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
2. *Louisell W.*, Radiation and Noise in Quantum Electronics, New York, 1964.
3. *Carruthers P., Nieto M. N.*, Rev. Mod. Phys., **40**, 411 (1968) (ст. 2 настоящего сборника).
4. *Малкин И. А., Манько В. И.*, ЖЭТФ, **55**, 1014 (1968).
5. *Darwin G. C.*, Proc. Roy. Soc., **117**, 258 (1928).
6. *Johnson M. H., Lippmann B. A.*, Phys. Rev., **76**, 828 (1949).
7. *Ландау Л. Д.*, Zs. Phys., **64**, 629 (1930).
8. *Kubo R., Miyake S. J., Hashitsume N.*, Solid State Phys., **17**, 269 (1965).
9. *Wilson A. H.*, The Theory of Metals, Cambridge, England, 1953, p. 160.
10. *Kittel C.*, Elementary Statistical Physics, New York, 1958, p. 56. (См. перевод: Ч. Киттель, Элементарная статистическая физика, ИЛ, 1964.)
11. *Фок В. А.*, Zs. Phys., **47**, 446 (1928).
12. *Bloch F.*, Zs. Phys., **74**, 295 (1932).

***N*-мерный анизотропный осциллятор в зависящем от времени однородном электромагнитном поле**

А. ХОЛЬЦ*

A. Holz, Lett. al Nuovo Cimento, 4, № 26, 1319 (1970)

Метод зависящих от времени инвариантов [1] был недавно использован Малкиным и Манько [2, 3] для изучения эволюции когерентных состояний в точно решаемых нестационарных задачах. Этот метод используется в задаче об *n*-мерном анизотропном осцилляторе, находящемся в зависящем от времени однородном электромагнитном поле. Точные решения для соответствующего не зависящего от времени осциллятора были получены недавно в работе [5].

Допустим, что гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{p} + \frac{1}{2} [\mathbf{q}, A(t) \mathbf{p}]_+ + \frac{1}{2} \mathbf{q} K(t) \mathbf{q} + \mathbf{f}(t) \mathbf{p} + \mathbf{g}(t) \mathbf{q}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $K(t)$ — действительные зависящие от времени матрицы $n \times n$, а $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ — действительные зависящие от времени *n*-мерные векторы. Зависимость от величин, определяющих электромагнитное поле, в формуле (1) явно не выписана. Операторы \mathbf{p} и \mathbf{q} подчиняются коммутационным соотношениям

$$[q_i, p_j]_- = i\hbar \delta_{ij}. \quad (2)$$

Следуя работе [3], примем, что зависящие от времени инварианты b_j (область изменения j будет определена ниже) имеют вид

$$b_j = \mathbf{v}_j(t) \mathbf{q} + i \mathbf{w}_j(t) \mathbf{p} + \delta_j(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{v}_j(t)$ и $\mathbf{w}_j(t)$ — *n*-мерные векторы, а $\delta_j(t)$ — скаляр. Инвариант b_j должен удовлетворять условию

$$\frac{db_j}{dt} = \frac{\partial b_j}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} [b_j, H]_- = 0. \quad (4)$$

* Center for the Application of Mathematics, Lehigh University, Bethlehem, Pa.

Для того чтобы равенство (4) тождественно выполнялось для инвариантов b_j , имеющих вид (3), должны выполняться следующие соотношения:

$$\delta_j(t) = \int_0^t (i\mathbf{g}(t) \mathbf{w}_j - \mathbf{f}(t) \mathbf{v}_j) dt, \quad (5)$$

$$\Gamma(t) \boldsymbol{\eta}_j(t) = -i\Xi \boldsymbol{\eta}_j, \quad (6)$$

где $\Gamma(t)$ и Ξ — матрицы $2n \times 2n$, имеющие вид

$$\Xi = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} I & \tilde{A}(t) \\ A(t) & K(t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а

$$\boldsymbol{\eta}_j(t) = \begin{pmatrix} -\mathbf{v}_j(t) \\ i\mathbf{w}_j(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

— $2n$ -мерный вектор. Символ \tilde{A} обозначает транспонированную матрицу A , а I — n -мерную единичную матрицу. Мы предполагаем, что при $t < 0$ гамильтониан H не зависит от времени и что

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) = 0, \quad t \leq 0. \quad (9)$$

Фундаментальную систему решений уравнений (6) можно найти с помощью следующего приема ([6], р. 75):

$$\boldsymbol{\eta}_j = \boldsymbol{\xi}_j \exp[i\omega_j t], \quad t \leq 0, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\xi}_j$ — не зависящий от времени $2n$ -мерный вектор, определяемый из равенства

$$\Gamma \boldsymbol{\xi}_j = \omega_j \Xi \boldsymbol{\xi}_j. \quad (11)$$

Это соотношение изучалось в работе [5], где оно было получено при рассмотрении не зависящей от времени задачи с помощью операторов рождения и уничтожения. Решение уравнения (11) представим в виде выражения, содержащего две матрицы $n \times n$

$$\tilde{V}(t) \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \quad \tilde{W}(t) \equiv (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n). \quad (12)$$

Тогда набор операторов b_j и набор их эрмитовски сопряженных операторов b_j^\dagger [оба набора удовлетворяют (4)] можно

записать в таком виде:

$$\mathbf{b} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = V(t) \mathbf{q} + iW(t) \mathbf{p}, \quad \mathbf{b}^\dagger \equiv \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix} = V^*(t) \mathbf{q} - iW^*(t) \mathbf{p}, \quad (13)$$

где V^* — матрица, комплексно сопряженная V . Легко показать, что если уравнение (11) имеет только действительные отличные от нуля собственные значения, то все решения можно нормировать так, чтобы выполнялись соотношения

$$V^* \tilde{W} + W^* \tilde{V} = \hbar^{-1} I, \quad V \tilde{W} - W \tilde{V} = 0. \quad (14)$$

Подробный вывод (14) для положительно определенных гамильтонианов, для которых матрица

$$K - A\tilde{A}, \quad (15)$$

должна быть положительно определенной, дан в работе [5]. В случае, когда матрица (15) положительно определена, все положительные ω_j связаны с \mathbf{b} . Из соотношений (14) следует, что

$$[b_i b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}, \quad [b_i, b_j]_- = [b_i^\dagger, b_j^\dagger]_- = 0. \quad (16)$$

Обозначая матрицы (12) при $t=0$ символами V_i и W_i , мы имеем для начальных условий зависящей от времени задачи соотношения

$$\mathbf{b}(0) = V_i \mathbf{q} + iW_i \mathbf{p}, \quad \mathbf{b}^\dagger(0) = V_i^* \mathbf{q} - iW_i^* \mathbf{p}. \quad (17)$$

Если предположить, что $\Gamma(t)$ непрерывна на замкнутом ограниченном t -интервале $(0, t_f)$, то в соответствии с работой ([6], р. 20) решения (6) однозначно определяются этими начальными значениями. В общем случае эти решения могут быть получены только приближенно. Они, однако, удовлетворяют ряду важных соотношений. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{d}{dt} [b_i, b_j^\dagger]_- = \hbar \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_j^\dagger(t) \mathbf{w}_i(t) + \mathbf{w}_j^\dagger(t) \mathbf{v}_i(t)) = 0, \quad (18a)$$

$$\frac{d}{dt} [b_i, b_j]_- = \hbar \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_i(t) \mathbf{w}_j(t) + \mathbf{w}_i(t) \mathbf{v}_j(t)) = 0. \quad (18б)$$

Интегрируя (18a), (18б) и используя начальные условия (17), можно показать, что соотношения (14), (16) выполняются также и в t -интервале $(0, t_f)$.

Рассмотрим далее эволюцию когерентных состояний. Из (14), (16) вытекает, что когерентные состояния можно построить как собственные состояния операторов

$$b_j |\alpha\rangle = \alpha_j |\alpha\rangle, \quad j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где α_j — произвольное комплексное число. При $t = 0$ они принимают вид

$$|\alpha, i\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right] \sum_{\{m_j\}} \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j^{m_j}}{(m_j)!^{1/2}} |\{m_j\}\rangle, \quad (20)$$

т. е. выражаются через собственные состояния $|\{m_j\}\rangle$ начального гамильтониана. В координатном представлении

$$|\alpha, i\rangle = (2\pi\hbar^2)^{-n/4} |\det W_i|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right] \times \\ \times \exp\left[-\mathbf{q} \frac{W_i^{-1} V_i}{2\hbar} \mathbf{q} + \hbar^{-1} \alpha \tilde{W}_i^{-1} \mathbf{q}\right], \quad (21)$$

где α — n -мерный вектор с компонентами α_i . Нормировка состояния (21) получается путем сравнения разложения Тейлора функции (21) с функцией (20) и нормировки основного состояния [5]. С помощью (14) можно показать [5], что матрицы W и V несингулярны и что $\text{Re}(WV^{-1})$ — положительно определенная матрица.

Собственные состояния $b_j(t)$ при $t \geq 0$ можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли уравнению Шредингера и начальному условию

$$|\alpha, 0\rangle = |\alpha, i\rangle. \quad (22)$$

Получаем

$$|\alpha, t\rangle = (2\pi\hbar^2)^{-n/4} |\det W_t|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right] \times \\ \times \varphi(t, \alpha) \exp\left[-\mathbf{q} \frac{W^{-1}(t) V(t)}{2\hbar} \mathbf{q} + \hbar^{-1} (\alpha - \delta(t)) \tilde{W}^{-1}(t) \mathbf{q}\right], \quad (23)$$

где

$$\varphi(t, \alpha) = \exp\left[-\int_0^t dt \left(\frac{i}{4} \text{Sp}(W^{-1}(t) V(t)) - \hbar^{-1} \mathbf{f}(t) W^{-1}(t) (\alpha - \delta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} ((\alpha - \delta(t)) \tilde{W}^{-1}(t))^2\right)\right]. \quad (24)$$

При $t \geq t_f$ гамильтониан опять-таки не зависит от времени. Мы предполагаем, что

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) = 0 \quad \text{при } t \geq t_f. \quad (25)$$

Конечные ($t = t_f$) когерентные состояния даются формулой

$$|\beta, f\rangle = (2\pi\hbar^2)^{-n/4} |\det W_f|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2\right] \times \\ \times \exp\left[-\mathbf{q} \frac{W_f^{-1} V_f}{2\hbar} \mathbf{q} + \hbar^{-1} \beta \tilde{W}_f^{-1} \mathbf{q}\right], \quad (26)$$

где матрицы V_f и W_f определяются из равенства (11) для $\Gamma(t_f)$. Отметим, что матрица W_f не равна $W(t_f)$.

Используя (23) и (26), можно получить производящую функцию [4] для амплитуд перехода между энергетическими собственными состояниями начального и конечного гамильтонианов в виде

$$\langle \beta, f | \alpha, t_f \rangle \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)\right] = \\ = (\det R)_{\text{гл. зн.}}^{-1/2} |\det W_f|^{-1/2} |\det W_i|^{-1/2} \varphi(t_f, \alpha) \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2} (\beta^* W_f^{-1} R^{-1} W_f^{-1} \beta^* + 2(\alpha - \delta(t_f)) \tilde{W}^{-1}(t_f) R^{-1} W_f^{-1} \beta^* + \right. \\ \left. + (\alpha - \delta(t_f)) \tilde{W}^{-1}(t_f) R^{-1} W^{-1}(t_f) (\alpha - \delta(t_f)))\right], \quad (27)$$

где

$$R = \hbar (W^{-1}(t_f) V(t_f) + W_f^{-1} V_f^*), \quad (28)$$

(«гл. зн.» — главное значение). С помощью (14) можно показать, что действительная часть матрицы R положительно определена и, следовательно, $\det(R)$ несингулярен.

Другое представление формулы (27) имеет вид

$$\langle \beta, f | \alpha, t_f \rangle \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)\right] = \\ = \sum_{\{m_i\}} \sum_{\{r_j\}} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \frac{(\alpha_i)^{m_i} (\beta_j^*)^{r_j}}{(m_i! r_j!)^{1/2}} \langle \{r_j\} | \{m_i\} \rangle. \quad (29)$$

Здесь $|\{r_j\}\rangle$ — собственные состояния конечного гамильтониана в энергетическом представлении, а $|\{m_i\}\rangle$ — те состояния, в ко-

торые переходят в результате эволюции, вызванной взаимодействием с электромагнитным полем, собственные состояния гамильтониана при $t = 0$. Из сравнения разложения (27) в ряд Тэйлора с (29) определяются амплитуды перехода [4]

$$\langle \{r_i\} | \{m_j\} \rangle. \quad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lewis H. R., Riesenfeld W. B.*, Journ. Math. Phys., **10**, 1458 (1969).
2. *Малкин И. А., Манько В. И., Трифонов Д. А.*, Phys. Lett., **30A**, 414 (1969).
3. *Малкин И. А., Манько В. И.*, Phys. Lett., **32A**, 243 (1970).
4. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
5. *Bergmann E. E., Holz A.*, Exact solutions of an n -dimensional anisotropic oscillator in a uniform magnetic field, Preprint, Department of Physics, Lehigh University, Bethlehem, Pa.
6. *Coddington E. A., Levinson N.*, The Theory of Ordinary Differential Equations, New York—Toronto—London, 1955, (См. перевод: Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.)

Исчисление функций некоммутирующих операторов и общие методы фазового пространства в квантовой механике

III. Обобщенная теорема Вика и многовременное отображение

Дж. АГАРВАЛ*, Е. ВОЛЬФ*

G. S. Agarwal, E. Wolf, *Phys. Rev.*, D2, № 10, 2206 (1970)

В новом c -числовом исчислении функций некоммутирующих операторов, развитом в [1] и примененном в [2] для формулировки общего метода описания бозонных систем на языке фазового пространства, фигурируют только одновременные операторы. В настоящей статье представлено обобщенное рассмотрение задач, в которых используются бозонные операторы при двух или более моментах времени. Подробно изучается отображение упорядоченных во времени произведений на c -числовые функции.

Полученные результаты дают возможность вычислять упорядоченные во времени произведения бозонных операторов методами фазового пространства. Обычная теорема Вика для бозонных систем получена как частный случай гораздо более общей теоремы о временном упорядочении. Наш метод вывода дает, по-видимому, первое прямое доказательство теоремы Вика, а также ясное представление о ее истинном смысле. Получено также замкнутое выражение оператора временной эволюции через решение c -числового дифференциального уравнения для эквивалента этого оператора в фазовом пространстве.

Новое исчисление применено также к задаче о вычислении нормально упорядоченных и упорядоченных во времени корреляционных функций, а также антинормально упорядоченных и упорядоченных во времени корреляционных функций.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] этой серии было развито новое исчисление функций некоммутирующих операторов, основанное на понятии отображения функции $G(a, a^\dagger)$ некоммутирующих бозонных операторов a и a^\dagger на c -числовую функцию $F(z, z^*)$ комплексных переменных z и z^* . Было показано, что это исчисление позволяет дать общее описание бозонных систем на языке фазового пространства и развить систематический подход к решению весьма разнообразных квантовомеханических задач

* Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York.

c -числовыми методами. В статьях [1, 2] были рассмотрены только задачи, в которых фигурируют операторы, удовлетворяющие одновременным коммутационным соотношениям $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$.

В настоящей статье теория обобщается на случаи некокоммутирующих бозонных операторов, взятых в два или более момента времени. Подробно изучается отображение упорядоченного во времени произведения набора операторов на c -числовые функции. В § 2 выводится общая формула, дающая возможность вычислять упорядоченные во времени произведения через произведения, упорядоченные в соответствии с некоторым правилом. Показано, что хорошо известная теорема Вика [3, 4] для бозонных систем, обычно получаемая по индукции, прямо следует из этой новой теоремы как частный случай. Кажется, что наш метод вывода дает первое прямое доказательство теоремы Вика и новое понимание ее истинного смысла. В § 3 получено новое тождество, дающее возможность записать упорядоченные во времени произведения набора операторов, являющихся линейными функционалами от положительно- и отрицательно-частотных частей операторов поля, в нормально упорядоченной форме. Это тождество по существу является обобщением формулы, данной Андерсоном (см. [5, 6]), которая, подобно теореме Вика, часто используется в теории поля. В § 4 в замкнутой форме дается выражение для унитарного оператора временной эволюции бозонной системы через решение c -числового дифференциального уравнения, которому удовлетворяет эквивалент этого оператора в фазовом пространстве. Этот результат иллюстрируется выводом точного выражения оператора временной эволюции вынужденного гармонического осциллятора. В § 5 вводится представление о многовременном отображении разновременных бозонных операторов на c -числовые переменные; затем показывается, как это соответствие можно использовать для вычисления нормально упорядоченных и упорядоченных во времени корреляционных функций, а также антинормально упорядоченных и упорядоченных во времени корреляционных функций.

Некоторые результаты этого параграфа аналогичны результатам, полученным недавно Лэксом [7] в связи с c -числовыми методами решения задач в таких областях, как теория лазера и статистика фотоэлектронов. В § 6 представлено краткое резюме главных результатов, полученных в наших статьях: сравниваются основные уравнения квантовой механики в обычной операторной форме и в нашем представлении фазового пространства.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДАМИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИКА

Хорошо известная теорема Вика [3, 4] позволяет выразить упорядоченные во времени произведения операторов через нормально упорядоченные произведения. Эта теорема играет фундаментальную роль в основанных на теории возмущений расчетах, относящихся к поведению унитарного оператора временной эволюции квантовомеханической системы.

В этом параграфе с помощью s -числовых методов, развитых в статьях [1, 2], устанавливается интересное обобщение теоремы Вика для бозонных систем. Эта обобщенная теорема позволяет выражать упорядоченные во времени произведения гейзенберговских операторов — как линейные, так и нелинейные по операторам рождения и уничтожения — через произведения, в которых упорядочение проведено согласно некоторому предписанному правилу. Нормальное упорядочение играет такую важную роль в теории поля, конечно же, вследствие важности вакуумных ожидаемых значений. Но, как уже подчеркивалось [1], иногда применяются и другие правила упорядочения, например вейлевское упорядочение в квантовой статистике [8] и антинормальное упорядочение в квантовой оптике [9]. В любом случае устанавливаемая здесь обобщенная теорема Вика и выводы § 3 и 4 настоящей статьи проясняют не вполне осознававшийся до сих пор факт, что представление фазового пространства для операторов играет фундаментальную роль в задачах с упорядочением во времени.

Пусть T — оператор упорядочения во времени и рассматривается упорядоченное во времени произведение $T\{G_1(t_1), G_2(t_2), \dots, G_M(t_M)\}$ M гейзенберговских операторов G_m ($m = 1, 2, \dots, M$). Операторы G_m зависят также от a и a^\dagger {т. е. $G_m = G_m(a, a^\dagger; t_m)$; $[a, a^\dagger] = 1$ }, но, как правило, мы не будем выписывать эту зависимость. Упорядоченное во времени произведение можно выразить в виде

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = \sum_{\Pi} \theta(t_{i_1} - t_{i_2}) \dots \theta(t_{i_{M-1}} - t_{i_M}) G_{i_1}(t_{i_1}) \dots G_{i_M}(t_{i_M}), \quad (2.1)$$

где

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau > 0, \\ 0, & \text{если } \tau < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

а \sum_{Π} обозначает суммирование по всем перестановкам 1, 2, ..., M. Пусть $F_j^{(\Omega)}(z, z^*; t_j)$ есть Ω -эквивалент оператора G_j , т. е.

$$\begin{aligned} G_j(a, a^+; t_j) &= \Omega \{F_j^{(\Omega)}(z, z^*; t_j)\}, \\ F_j^{(\Omega)}(z, z^*; t_j) &= \Theta \{G_j(a, a^+; t_j)\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Ω — произвольный линейный оператор отражения, определенный в § 2 работы [1], а Θ — обратный ему оператор. Тогда Ω -эквивалент $F_{12}^{(\Omega)} \dots G_M(a, a^+; t_M)$ произведения $G_1(a, a^+; t_1) \dots G_M(a, a^+; t_M)$, т. е. c -числовая функция, такая, что

$$G_1(a, a^+; t_1) \dots G_M(a, a^+; t_M) = \Omega \{F_{12}^{(\Omega)} \dots G_M(z, z^*; t_1, \dots, t_M)\}, \quad (2.4a)$$

$$F_{12}^{(\Omega)} \dots G_M(z, z^*; t_1, \dots, t_M) = \Theta \{G_1(a, a^+; t_1) \dots G_M(a, a^+; t_M)\}, \quad (2.4b)$$

дается следующей формулой, являющейся обобщением на случай произведения произвольного числа операторов теоремы V (теорема о произведении), доказанной в разделе III работы [2] (см. приложение А настоящей статьи):

$$\begin{aligned} F_{12}^{(\Omega)} \dots G_M(z, z^*; t_1, \dots, t_M) &= \exp \left\{ \sum_I \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \right\} \times \\ &\times \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots G_M \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j^*} - \frac{\partial}{\partial z_i^*} \frac{\partial}{\partial z_j} \right), \quad (2.6)$$

$$\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots G_M = \prod_{m=1}^M \Omega \left(\frac{\partial}{\partial z_m^*}, - \frac{\partial}{\partial z_m} \right) \bar{\Omega} \left(\sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m^*}, - \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m} \right). \quad (2.7)$$

В выражении (2.7) функция $\Omega(\alpha, \beta)$ является функцией фильтра для Ω -отображения, а $\bar{\Omega}(\alpha, \beta) = [\Omega(\alpha, \beta)]^{-1}$ есть функция фильтра для отображения, обратного Ω .

Заметим, что при перестановке индексов i и j оператор Λ_{ij} меняет знак, в то время как оператор $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots G_M$ остается неизменным. Поэтому из (2.4a), (2.5) и (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} T \{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} &= \Omega \left\{ \exp \left[\sum_I \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) \right] \times \right. \\ &\times \left. \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots G_M \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1, & \text{если } \tau > 0, \\ -1, & \text{если } \tau < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Правую сторону (2.8) можно представить во многих различных функциональных формах. В частности, ее можно представить как Ω -упорядоченную форму. Последняя получается при замене оператора отображения Ω в правой части (2.8) оператором подстановки $S^{(\Omega)}$ для Ω -отображения [см. (I.2.16)]¹⁾:

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(\Omega)} \left\{ \exp \left[\sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) \right] \times \right. \\ \left. \times \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_{M-1, M} \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}. \quad (2.10)$$

Эта формула дает упорядоченное во времени произведение $T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\}$ в Ω -упорядоченной форме. Будем называть (2.10) *обобщенной теоремой Вика* для бозонных систем.

Рассмотрим теперь частный случай, когда каждый из операторов G_m является линейной комбинацией операторов рождения и уничтожения. Операторы G_m возьмем в представлении взаимодействия, так что их зависимость от времени будет такой же, как и у свободных операторов поля, т. е.

$$G_m(t) = A_m a e^{-i\omega t} + B_m a^+ e^{i\omega t}, \quad (2.11)$$

где A_m и B_m суть c -числа. Рассмотрим теперь класс отображений, чьи функции фильтра даются (I.3.38), т. е.²⁾

$$\Omega(\alpha, \beta) = \exp(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \lambda\alpha\beta). \quad (2.12)$$

Тогда в соответствии с (I.3.34) и (I.3.36) устанавливаем, что Ω -эквивалент оператора $G_m(t)$ дается выражением

$$F_m^{(\Omega)}(z, z^*; t) = A_m z e^{-i\omega t} + B_m z^* e^{i\omega t}. \quad (2.13)$$

Отметим, что для каждого оператора $G_m(t)$ вида (2.11) Ω -эквивалент [даваемый формулой (2.13)] при любом выборе Ω из класса, для которого имеет место (2.12), *не зависит* от конкретного выбора Ω .

Для класса отображений, характеризующихся равенством (2.12), оператор $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_{M-1, M}$, определяемый (2.7), можно записать

¹⁾ Формулы, перед которыми стоит римская цифра I или II, относятся к уравнениям работ [1, 2] соответственно.

²⁾ Ограничение на функцию фильтра вида (2.12) несущественно и сделано здесь только ради простоты.

В виде

$$\mathcal{U}_{12\dots M}^{(\Omega)} = \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} \exp(u_{ij}^{(\Omega)}), \quad (2.14a)$$

где [ср. (II. 3.10)]

$$u_{ij}^{(\Omega)} = -2\nu \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - 2\mu \frac{\partial}{\partial z_i^*} \frac{\partial}{\partial z_j^*} + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j^*} + \frac{\partial}{\partial z_i^*} \frac{\partial}{\partial z_j} \right). \quad (2.146)$$

Значит, (2.10) можно в таких случаях записать в виде

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(\Omega)} \left\{ \exp \left[\sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) + u_{ij}^{(\Omega)} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим сперва частный случай $M=2$. Разлагая экспоненту в (2.15) и используя линейность c -числовых функций $F_1^{(\Omega)}(z, z^*; t)$ и $F_2^{(\Omega)}(z, z^*; t)$ по переменным z и z^* , получаем

$$T\{G_1(t_1) G_2(t_2)\} = S^{(\Omega)} \left\{ [1 + \varepsilon(t_1 - t_2) \Lambda_{12} + u_{12}^{(\Omega)}] \times \right. \\ \left. \times F_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*; t_1) F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^*; t_2) \Big|_{z_1=z_2=z, z_1^*=z_2^*=z^*} \right\} = \\ = S^{(\Omega)} \{ F_1^{(\Omega)}(z, z^*; t_1) F_2^{(\Omega)}(z, z^*; t_2) \} + [G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(\Omega)}, \quad (2.16)$$

где

$$[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(\Omega)} = S^{(\Omega)} \left\{ [\Lambda_{12} \varepsilon(t_1 - t_2) + u_{12}^{(\Omega)}] \times \right. \\ \left. \times F_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*; t_1) \cdot F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^*; t_2) \Big|_{z_1=z_2=z, z_1^*=z_2^*=z^*} \right\}. \quad (2.17)$$

Назовем $[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(\Omega)}$ хронологическим сужением операторов $G_1(t_1)$ и $G_2(t_2)$ при Ω -отображении. Если вспомнить определения операторов Λ_{12} и $u_{12}^{(\Omega)}$ [см. (2.6) и (2.146)] с $i=1, j=2$ и использовать точные выражения для $F_1^{(\Omega)}$ и $F_2^{(\Omega)}$ [см. (2.13)], то сразу же найдем, что

$$[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(\Omega)} = -2\mu B_1 B_2 e^{i\omega(t_1+t_2)} - 2\nu A_1 A_2 e^{-i\omega(t_1+t_2)} + \\ + A_1 B_2 \left[\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon(t_1 - t_2) \right] e^{-i\omega(t_1-t_2)} + \\ + A_2 B_1 \left[\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon(t_2 - t_1) \right] e^{-i\omega(t_2-t_1)}. \quad (2.18)$$

В более общем случае, разлагая экспоненту в правой части (2.15) в степенной ряд, получаем следующее выражение для

упорядоченного во времени произведения M операторов $G_m(t_m)$:

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(\Omega)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) + u_{ij}^{(\Omega)} \right]^n \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}. \quad (2.19)$$

Типичный член с индексами ij при $n=1$ может быть представлен в виде

$$S^{(\Omega)} \left\{ \left[\Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) + u_{ij}^{(\Omega)} \right] \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\} = \\ = S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1, m \neq i, j}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*; t_m) [G_i \cdot (t_i) G_j \cdot (t_j)]^{\Omega} \right\}. \quad (2.20)$$

Подобным же образом можно упростить выражение для вклада типичного члена с индексами ij при каждом значении n . Очевидно, что каждый член разложения выражения

$$S^{(\Omega)} \left\{ \left[\sum_j \sum_{i < j} u_{ij}^{(\Omega)} + \Lambda_{ij} \varepsilon(t_i - t_j) \right]^n \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}$$

ведет к n хронологическим сужениям. Поэтому (2.19) приводит в конце концов к тождеству

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = \mathcal{F}_0^{(\Omega)} + \mathcal{F}_1^{(\Omega)} + \dots, \quad (2.21)$$

где ¹⁾

$$\mathcal{F}_0^{(\Omega)} = S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*; t_m) \right\},$$

$$\mathcal{F}_1^{(\Omega)} = \sum_i \sum_{i < j} S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1, m \neq i, j}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*; t_m) [G_i \cdot (t_i) G_j \cdot (t_j)]^{(\Omega)} \right\}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{F}_2^{(\Omega)} = \frac{1}{2!} \sum_j \sum_{i < j} \sum_l \sum_{k < l} S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1; m \neq i, j, k, l}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*; t_m) \times \right. \\ \left. \times [G_i \cdot (t_i) G_j \cdot (t_j)]^{(\Omega)} [G_k \cdot (t_k) G_l \cdot (t_l)]^{(\Omega)} \right\}$$

¹⁾ В более привычных обозначениях выражение $S^{(\Omega)} \{F_1^{(\Omega)}(z, z^*; t_1) \dots \dots F_M^{(\Omega)}(z, z^*; t_M)\}$ с Ω , отвечающим нормальному правилу отображения, пишется так: $G_1(t_1) \dots G_M(t_M)$; где двоеточия указывают на то, что проведено нормальное упорядочение. Привычные обозначения скрывают, однако, важную роль, которую играет представление фазового пространства в задаче об упорядочении.

и т. д. Формула (2.21) вместе с (2.22) выражает упорядоченное во времени произведение линейных по a и a^\dagger операторов в виде суммы всех Ω -упорядоченных произведений операторов G со всеми возможными хронологическими сужениями при Ω -отображении, включающей и член без сужения.

В частном случае, когда Ω -отображение проводится в соответствии с *нормальным* правилом упорядочения [верхний индекс N в (2.23)] и используется тот факт, что для нормального правила параметры в (2.12) имеют значения $\mu = \nu = 0$, $\lambda = 1/2$ (ср. табл. IV в [1]), хронологическое сужение (2.18) сводится к

$$[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)} = \frac{1}{2} \varepsilon(t_1 - t_2) [A_1 B_2 e^{-i\omega(t_1 - t_2)} - A_2 B_1 e^{i\omega(t_1 - t_2)}] + \\ + \frac{1}{2} [A_1 B_2 e^{-i\omega(t_1 - t_2)} + A_2 B_1 e^{i\omega(t_1 - t_2)}]. \quad (2.23)$$

Сужение $[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)}$ имеет простой физический смысл. Действительно, возьмем ожидаемое значение от (2.16) по вакуумному состоянию (с Ω , опять-таки отвечающим нормальному правилу)

$$\langle 0 | T \{ G_1(t_1) G_2(t_2) \} | 0 \rangle = \\ = \langle 0 | S^{(N)} \{ F_1^{(N)}(z, z^*; t_1) F_2^{(N)}(z, z^*; t_2) \} | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | [G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)} | 0 \rangle. \quad (2.24)$$

Первый член справа исчезает, поскольку является средним от нормально упорядоченного оператора в вакуумном состоянии. Второй член равен $[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)}$; поскольку он, будучи c -числом, не меняется при вычислении ожидаемого значения. Итак, равенство

$$[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)} = \langle 0 | T \{ G_1(t_1) G_2(t_2) \} | 0 \rangle \quad (2.25)$$

показывает, что $[G_1 \cdot (t_1) G_2 \cdot (t_2)]^{(N)}$ есть в точности хронологическое произведение, определенное обычным образом [3, 4]. Теперь видно, что в частном случае, когда Ω выбрано соответственно нормальному правилу отображения, формула (2.21) есть в других обозначениях не что иное, как теорема Вика [3, 4] для упорядоченных во времени произведений бозонных операторов.

Очевидно, что наша обобщенная теорема Вика (2.10), из которой в качестве специального случая мы только что вывели обычную форму теоремы Вика для бозонных систем, есть весьма общая теорема. Она позволяет выразить упорядоченные во времени произведения гейзенберговских операторов G_1, \dots, G_M

(не обязательно линейных по a и a^\dagger) бозонной системы в Ω -упорядоченной форме. Вообще говоря, использование нашей обобщенной теоремы Вика требует решения динамического уравнения для Ω -эквивалента $F_m^{(\Omega)}$ каждого из гейзенберговских операторов G_m . В частном случае, когда все операторы взяты в представлении взаимодействия, решение динамического уравнения дается очень простыми выражениями (2.13), которые имеют, как легко видеть, ту же математическую форму, что и сами операторы G_m [см. (2.11)]. Вероятно, именно по этой причине роль представления фазового пространства для интерпретации теоремы Вика ранее не была выяснена.

Напомним, наконец, что существует также теорема Вика для обычного произведения операторов. В приложении А показано, что нетрудно обобщить ее и что это обобщение связано с теоремой Вика для *обычного произведения* так же, как (2.10) связано с теоремой Вика для упорядоченного во времени произведения. Эта обобщенная теорема выражается формулой

$$\{G_1(a, a^\dagger) \dots G_M(a, a^\dagger)\} = S^{(\Omega)} \left\{ \exp \left[\sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \right] \times \right. \\ \left. \times \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_{M-1M} \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*} \right\}, \quad (2.26)$$

где дифференциальные операторы Λ_{ij} и $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_{M-1M}$ имеют прежний смысл. В приложении А также показано, что (2.26) приводит к следующей теореме.

Теорема. Обычное произведение набора бозонных операторов, линейных по операторам рождения и уничтожения, равно сумме всех Ω -упорядоченных произведений операторов G со всеми возможными спариваниями для Ω -отображения [определенными равенством (A.24)], включающей и член без спаривания. В частности, когда отображение Ω задается нормальным правилом, эта теорема сводится к стандартной теореме Вика для обычных произведений.

§ 3. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АНДЕРСОНА НА УПОРЯДОЧЕННОЕ ВО ВРЕМЕНИ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ОПЕРАТОРОВ ПОЛЯ

Произведем теперь одно интересное обобщение результата Андерсона (см. [5, 6]), в котором он связал упорядоченное во времени произведение функций от операторов поля с нормально упорядоченными произведениями. С этой целью выберем опять отображение Ω в соответствии с нормальным правилом

ассоциации. Тогда если подставить в правую часть (2.10) выражения (2.6) и (2.14) (с $\mu = \nu = 0$, $\lambda = 1/2$, что соответствует нормальному правилу), а также использовать тождество $\theta(\tau) = 1/2[1 + \varepsilon(\tau)]$ для функций $\theta(\tau)$ и $\varepsilon(\tau)$, определенных равенствами (2.2) и (2.9) соответственно, то получим следующее соотношение:

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(N)} \left\{ \exp \left[\sum_i \sum_j \theta(t_i - t_j) \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j^*} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(N)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z; z_m^*=z^*} \right\}. \quad (3.1)$$

Предположим опять, что каждый оператор G_m имеет вид (2.11), так что его эквивалент в представлении фазового пространства дается формулой (2.13). Запишем этот эквивалент так:

$$F_m^{(N)}\{z(t), z^*(t)\} = A_m z(t) + B_m z^*(t), \quad (3.2)$$

где

$$z(t) = z e^{-i\omega t}, \quad z^*(t) = z^* e^{i\omega t}. \quad (3.3)$$

Тогда тождество (3.1) принимает вид

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(N)} \left\{ \exp \left[\sum_i \sum_j \theta(t_i - t_j) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp[-i\omega(t_i - t_j)] \frac{\partial}{\partial z_i(t_i)} \frac{\partial}{\partial z_j^*(t_j)} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(N)}\{z_m(t_m), z_m^*(t_m)\} \Big|_{z_m(t_m)=z(t_m); z_m^*(t_m)=z^*(t_m)} \right\}. \quad (3.4)$$

Ввиду линейности $F_m^{(N)}$ выражение (3.4) можно переписать так:

$$T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(N)} \left\{ \exp \left[\int dt' \int dt D(t' | t) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta}{\delta z(t)} \frac{\delta}{\delta z^*(t)} \prod_{m=1}^M F_m^{(N)}\{z(t_m), z^*(t_m)\} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$D(t' | t) = \theta(t' - t) \exp[-i\omega(t' - t)], \quad (3.6)$$

а $\delta/\delta z(t)$ — символ функциональной производной.

Тождество (3.5) легко обобщить на системы с произвольным числом степеней свободы, для которых операторы $G_m(t)$

ИМЕЮТ ВИД

$$G_m(t) = \int [A_m(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) e^{-i\omega_p t} + B_m(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\omega_p t}] d^3 p, \quad (3.7)$$

причем $a(\mathbf{p})$ и $a^\dagger(\mathbf{p})$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.8)$$

Эквивалент оператора $G_m(t)$ в фазовом пространстве для нормального правила ассоциации равен

$$F_m^{(N)}[z(\mathbf{p}, t), z^*(\mathbf{p}, t)] = \int [A_m(\mathbf{p}) z(\mathbf{p}, t) + B_m(\mathbf{p}) z^*(\mathbf{p}, t)] d^3 p, \quad (3.9)$$

где $z(\mathbf{p}, t)$ и $z^*(\mathbf{p}, t)$ имеют вид

$$z(\mathbf{p}, t) = z(\mathbf{p}) e^{-i\omega_p t}, \quad z^*(\mathbf{p}, t) = z^*(\mathbf{p}) e^{i\omega_p t}. \quad (3.10)$$

Тогда вместо (3.5) получим формулу

$$\begin{aligned} T\{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = \\ = S^{(N)} \left\{ \exp \left[\int dt' d^3 p' \int dt d^3 p D(t', \mathbf{p}' | t, \mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta z(\mathbf{p}', t')} \frac{\delta}{\delta z^*(\mathbf{p}, t)} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(N)} [z(\{\mathbf{p}\}, t_m), z^*(\{\mathbf{p}\}, t_m)] \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

с

$$D(t', \mathbf{p}' | t, \mathbf{p}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') D(t' | t). \quad (3.12)$$

Теперь мы можем обобщить результат Андерсона. Пусть $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$ — положительно- и отрицательно-частотные части оператора бозонного поля φ . В представлении взаимодействия коммутатор $[\varphi^{(+)}(\mathbf{x}, t'), \varphi^{(-)}(\mathbf{y}, t)]$ является c -числом. Установим соответствие¹⁾ (аналогичное соответствию $a \rightarrow z, a^\dagger \rightarrow z^*$)

$$\varphi^{(+)} \rightarrow J, \quad \varphi^{(-)} \rightarrow J^*, \quad (3.13)$$

где J есть c -число, а J^* — его комплексно сопряженное. Вместо операторов $G_m(t)$, определяемых (2.11), имеем теперь операторы

$$G_m(t) = \int [A_m(\mathbf{x}) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}, t) + B_m(\mathbf{x}) \varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t)] d^3 x, \quad (3.14)$$

¹⁾ Это представление поля $\varphi^\dagger(\mathbf{x})$ c -числом $J(\mathbf{x})$ очень похоже на то, которое использовалось Швингером [10] в его представлении бозонного поля с помощью внешнего источника.

т. е. линейные функционалы от операторов $\varphi^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t)$; c -числовые эквиваленты операторов (3.14) для нормального правила ассоциации имеют вид

$$F_m^{(N)} [J(\{\mathbf{x}\}, t), J^*(\{\mathbf{x}\}, t)] = \int [A_m(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}, t) + B_m(\mathbf{x}) J^*(\mathbf{x}, t)] d^3x. \quad (3.15)$$

Заметим, что (3.15) будет иметь тот же вид, что и (3.9), если перейти к импульсному представлению. Прямым функциональным дифференцированием можно также показать, что

$$\int dt' d^3x \int dt d^3y D(t', \mathbf{x} | t, \mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, t')} \frac{\delta}{\delta J^*(\mathbf{y}, t)} = \int dt' d^3p' \int dt d^3p D(t', \mathbf{p}' | t, \mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta z(\mathbf{p}', t')} \frac{\delta}{\delta z^*(\mathbf{p}, t)}, \quad (3.16)$$

где

$$D(t', \mathbf{x} | t, \mathbf{y}) = \theta(t' - t) [\varphi^{(+)}(\mathbf{x}, t') \varphi^{(-)}(\mathbf{y}, t)]. \quad (3.17)$$

Тогда (3.11) переходит в следующее тождество:

$$T \{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\} = S^{(N)} \left\{ \exp \left[\int dt' d^3x \int dt d^3y D(t', \mathbf{x} | t, \mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x}, t')} \frac{\delta}{\delta J^*(\mathbf{y}, t)} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{m=1}^M F_m^{(N)} [J(\{\mathbf{x}\}, t_m), J^*(\{\mathbf{x}\}, t_m)] \right\}. \quad (3.18)$$

Тождество, связывающее упорядоченное во времени произведение M операторов, являющихся линейными функционалами от бозонных операторов поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$, с нормально упорядоченными произведениями, было выведено Андерсоном [5] [см. там формулы (8), (12) и (13)]. Нашу формулу (3.18) можно рассматривать как обобщение тождества Андерсона на случай операторов, являющихся линейными функционалами от положительно- и отрицательно-частотных компонент $\varphi^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ оператора поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Более того, как и при нашей формулировке теоремы Вика (см. § 2), формула (3.18) ясно показывает, что представление фазового пространства играет ключевую роль при интерпретации этого тождества.

§ 4. ЭКВИВАЛЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЗАМКНУТОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Покажем теперь, что наши методы фазового пространства дают новый систематический подход к вычислению унитарного оператора временной эволюции бозонной системы. Ограничимся ради простоты системой с одной степенью свободы. Обобщение на случай системы с произвольным числом степеней свободы производится непосредственно.

Оператор временной эволюции $U(a, a^+; t, t_0)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial U(a, a^+; t, t_0)}{\partial t} = H(a, a^+; t) U(a, a^+; t, t_0), \quad (4.1)$$

где $H(a, a^+; t, t_0)$ — гамильтониан системы. Оператор U удовлетворяет начальному условию

$$U(a, a^+; t_0, t_0) = 1. \quad (4.2)$$

Как хорошо известно, формальное решение (4.1) с учетом (4.2) имеет вид [4]

$$U(a, a^+; t, t_0) = T \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(a, a^+; t') dt' \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Пусть $F_U^{(Q)}(z, z^*; t, t_0)$ — эквивалент оператора временной эволюции U , т. е.

$$F_U^{(Q)}(z, z^*; t, t_0) = \Theta \{ U(a, a^+; t, t_0) \}. \quad (4.4)$$

Как показано в разделе IVA работы [2], $F_U^{(Q)}$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial F_U^{(Q)}}{\partial t} = \mathcal{L}_+ F_U^{(Q)}, \quad (4.5)$$

где „оператор Луивилля“ \mathcal{L}_+ определен соотношением (II.3.16a)¹⁾, т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ F_U^{(Q)} = \\ = \exp(\Lambda_{12}) \mathcal{U}_{12}^{(Q)} F_H^{(Q)}(z_1, z_1^*; t) F_U^{(Q)}(z_2, z_2^*; t, t_0) \Big|_{z_1=z_2=z, z_1^*=z_2^*=z^*}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹⁾ Напоминаем читателю, что, например, формула (II.3.16) есть формула (3.16) работы [2]. — *Прим. перев.*

Здесь Λ_{12} и $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)}$ — дифференциальные операторы, определенные соответственно формулами (II.3.4) и (II.3.5), а $F_H^{(\Omega)}$ есть Ω -эквивалент оператора гамильтониана H . Уравнение (4.5) необходимо решать с учетом начального условия

$$F_U^{(\Omega)}(z, z^*; t_0, t_0) = 1 \text{ для всех } z \text{ и } z^*. \quad (4.7)$$

Уравнения (4.5) и (4.7) — не что иное, как Ω -эквиваленты уравнений (4.1) и (4.2) соответственно.

Если дифференциальное уравнение в частных производных (4.5) решено, то с учетом начального условия (4.7) легко получить оператор временной эволюции. Действительно, согласно (4.4) и теореме I об отображении [см. (I.2.22)], U дается формулой

$$U(a, a^*; t, t_0) = S^{(\Omega)} \{F_U^{(\Omega)}(z, z^*; t, t_0)\}, \quad (4.8)$$

где $S^{(\Omega)}$ — оператор подстановки для Ω -отображения. Перепишем (4.8) в более детальной форме:

$$T \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(a, a^*; t') dt' \right] \right\} = S^{(\Omega)} \{F_U^{(\Omega)}(z, z^*; t, t_0)\}. \quad (4.9)$$

Эта формула говорит следующее: оператор временной эволюции бозонной системы можно определить, решая сначала уравнение движения в фазовом пространстве (4.5) для Ω -эквивалента оператора эволюции [вместе с начальным условием (4.7)] и применяя затем к решению оператор подстановки $S^{(\Omega)}$ для Ω -отображения.

В частном случае, когда Ω -отображение задается в соответствии с нормальным правилом ассоциации, тождество (4.9) сможет служить основой методов нормального упорядочения, развивавшихся в последние годы при решении квантоводинамических задач с зависящими от времени гамильтонианами [см., например, [11)]. Мы скоро увидим, что по существу (4.9) тесно связано с нашей обобщенной теоремой Вика.

Проиллюстрируем полезность нового тождества (4.9), определив оператор эволюции для вынужденного гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H(t) = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar f(t)(a + a^\dagger), \quad (4.10)$$

где $f(t)$ — действительная функция, представляющая вынуждающую силу. Гамильтониан взаимодействия в картине взаимодействия дается в этом случае формулой

$$H_I(t) = \hbar f(t)(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}). \quad (4.11)$$

В соответствии с (4.11) и (4.3) формальное выражение для оператора эволюции имеет вид

$$U_I(t) = T \left\{ \exp \left[-i \int_0^t f(t') (ae^{-i\omega t'} + a^+ e^{i\omega t'}) dt' \right] \right\}, \quad (4.12)$$

где выбрано $t_0 = 0$.

Применим теперь для вычисления (4.12) наш метод. Ограничимся опять классом Ω -отображений, для которого функция фильтра имеет вид (2.12). Ω -эквивалент гамильтониана (4.11) дается формулой

$$F_H^{(\Omega)}(z, z^*; t) = \hbar f(t) (ze^{-i\omega t} + z^* e^{i\omega t}). \quad (4.13)$$

Если подставить (4.13) в (4.6), то сразу получим точный вид $\mathcal{L}_+ F_U^{(\Omega)}$ [ср. (II.3.18a)], и из (4.5) получим затем уравнение для Ω -эквивалента оператора временной эволюции для данной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{i \partial F_U^{(\Omega)}}{\partial t} = & \left[f(t) e^{-i\omega t} z + f^*(t) e^{i\omega t} z^* - 2\mu f(t) e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial z^*} - \right. \\ & - 2\nu f(t) e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) f(t) e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial z^*} + \\ & \left. + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) f(t) e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial z} \right] F_U^{(\Omega)}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Параметры λ , μ и ν характеризуют, разумеется, данное отображение.

Возьмем в качестве пробного решения уравнения (4.14) выражение вида¹⁾

$$F_U^{(\Omega)}(z, z^*; t) = \exp [A(t) + B(t)z + C(t)z^*]. \quad (4.15)$$

Начальное условие (4.7) требует, чтобы

$$A(0) = B(0) = C(0) = 0. \quad (4.16)$$

Подставим далее (4.15) в (4.14). Тогда каждая сторона уравнения примет вид произведения $F_U^{(\Omega)}$ на полином по z и z^* . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z

¹⁾ Эту форму пробного решения подсказывает теорема Марбургера [12], относящаяся к решениям s -числовых уравнений для систем, гамильтонианы которых квадратичны по a и a^+ .

и z^* , получим следующую систему уравнений:

$$\frac{i \partial B}{\partial t} = f(t) e^{-i\omega t}, \quad (4.17a)$$

$$\frac{i \partial C}{\partial t} = f(t) e^{i\omega t}, \quad (4.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{i \partial A}{\partial t} = & -2\mu f(t) e^{i\omega t} C(t) - 2\nu f(t) e^{-i\omega t} B(t) + \\ & + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) f(t) e^{-i\omega t} C(t) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) f(t) e^{i\omega t} B(t). \end{aligned} \quad (4.17b)$$

Эта система дифференциальных уравнений вместе с начальными условиями (4.16) легко решается:

$$B(t) = -i \int_0^t f(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad (4.18a)$$

$$C(t) = -i \int_0^t f(t') e^{i\omega t'} dt' = -B^*(t), \quad (4.18b)$$

$$\begin{aligned} A(t) = & -\mu C^2(t) - \nu B^2(t) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) B(t) C(t) - \\ & - i \int_0^t f(t') e^{-i\omega t'} C(t') dt'. \end{aligned} \quad (4.18b)$$

Из (4.9), (4.12) и (4.15) следует, что

$$\begin{aligned} T \left\{ \exp \left[-i \int_0^t f(t') (ae^{-i\omega t'} + a^+ e^{i\omega t'}) dt' \right] \right\} = \\ = S^{(\Omega)} \{ \exp [A(t) + B(t)z + C(t)z^*] \}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ даются формулами (4.18).

Рассмотрим частный случай, когда Ω задается нормальным правилом ассоциации ($\mu = \nu = 0$, $\lambda = 1/2$; ср. табл. IV в [1]). Заметим, что из трех коэффициентов (4.18) только коэффициент A зависит от конкретного выбора связи и для нормального правила (индекс N) становится таким:

$$\begin{aligned} A_N = & - \int_0^t f(t') e^{-i\omega t'} dt' \int_0^{t'} f(t'') e^{i\omega t''} dt'' = \\ = & - \frac{1}{2} \left| \int_0^t f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right|^2 = - \frac{1}{2} |B(t)|^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Замечая также, что согласно (4.18а) и (4.18б), $C(t) = -B^*(t)$ [поскольку $f(t)$ — действительная величина], приведем теперь (4.19) к виду

$$\begin{aligned} T \left\{ \exp \left[-i \int_0^t f(t') (ae^{-i\omega t'} + a^+ e^{i\omega t'}) dt' \right] \right\} = \\ = S^{(N)} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} |B(t)|^2 \right] \exp [B(t)z] \exp [-B^*(t)z^*] \right\} = \\ = \exp \left[-\frac{1}{2} |B(t)|^2 \right] \exp [-B^*(t)a^+] \exp [B(t)a], \quad (4.21) \end{aligned}$$

где $B(t)$ дается формулой (4.18а). Тожество (4.21) было давно известно [13, 14]. Недавно оно было получено s -числовым методом Хеффнером и Луиселлом [15].

Возвращаясь к общему случаю, мы видим, что возможность получения замкнутого решения для оператора временной эволюции методом фазового пространства существенно зависит от того, можно ли найти замкнутое решение дифференциального уравнения (4.5). Последнее всегда можно решить по стандартной теории возмущений. Запишем решение (4.5) в виде следующего ряда теории возмущений:

$$F_U^{(\Omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} [F_U^{(\Omega)}]_n, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} [F_U^{(\Omega)}]_n = \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{L}_+(t_1) \dots \\ \dots \mathcal{L}_+(t_n) F_U^{(\Omega)}(z, z^*; 0). \quad (4.23) \end{aligned}$$

Согласно (4.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+(t_n) F_U^{(\Omega)}(z, z^*; 0) = \\ = \exp(\Lambda_{12}) \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} F_H^{(\Omega)}(z_1, z_1^*; t_n) F_U^{(\Omega)}(z_2, z_2^*; 0) \Big|_{z_1=z_2=z, z_1^*=z_2^*=z^*}. \quad (4.24) \end{aligned}$$

В силу (I. 3.30) и (II. 3.5) оператор $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)}$ имеет вид $\exp(u_{12}^{(\Omega)})$, где $u_{12}^{(\Omega)}$ — степенной ряд по $\partial/\partial z_i$ и $\partial/\partial z_i^*$ ($i = 1, 2$), а Λ_{12} — квадратичная функция этих производных. Поскольку, согласно (4.7), $F_U^{(\Omega)}(z, z^*; 0) = 1$, то сразу получаем, что операторы $\exp(\Lambda_{12})$ и $\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)}$ в (4.24) можно заменить единицей, и (4.24) принимает вид

$$\mathcal{L}_+(t_n) F_U^{(\Omega)}(z, z^*; 0) = F_H^{(\Omega)}(z, z^*; t_n). \quad (4.25)$$

Если использовать (4.25), то (4.23) можно переписать так:

$$[F_U^{(Q)}]_n = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{L}_+(t_1) \dots \mathcal{L}_+(t_{n-1}) F_H^{(Q)}(z, z^*, t_n). \quad (4.26)$$

В приложении Б показано, что подынтегральное выражение в (4.26) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_+(t_1) \dots \mathcal{L}_+(t_{n-1}) F_H^{(Q)}(z, z^*; t_n) = \\ & = \exp\left\{ \sum_l \sum_{i < l} \Lambda_{il} \right\} \mathcal{U}_{12 \dots n}^{(Q)} \prod_{m=1}^n F_H^{(Q)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.26) и используя свойства симметрии операторов Λ_{il} и $\mathcal{U}_{12 \dots n}^{(Q)}$ относительно перестановки индексов [см. замечание перед (2.8)], получаем, что член n -го порядка $[F_U^{(Q)}]_n$ в разложении по теории возмущений (4.22) величины $F_U^{(Q)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} [F_U^{(Q)}]_n &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t dt_1 \dots dt_n \exp\left[\sum_l \sum_{i < l} \Lambda_{il} \varepsilon(t_l - t_i) \right] \times \\ & \quad \times \mathcal{U}_{12 \dots n}^{(Q)} \prod_{m=1}^n F_H^{(Q)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где функция $\varepsilon(\tau)$ определена формулой (2.9).

Из (4.8) и (4.22) получаем окончательное выражение для оператора временной эволюции

$$U(a, a^+; t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} [U(a, a^+; t, 0)]_n, \quad (4.29)$$

где

$$[U(a, a^+; t, 0)]_n = S^{(Q)} \{ [F_U^{(Q)}(z, z^*; t, 0)]_n \}. \quad (4.30)$$

Смысл правой части (4.30) можно сразу понять, заметив, что подынтегральное выражение в формуле (4.28) для $[F_U^{(Q)}]_n$ имеет в точности тот же вид, что и правая часть нашей обобщенной теоремы Вика [см. (2.10)]. Поэтому из обобщенной теоремы Вика и из (4.28) вытекает, что

$$\begin{aligned} S^{(Q)} \{ [F_U^{(Q)}(z, z^*; t, 0)]_n \} &= \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t dt_1 \dots dt_n T \{ H(t_1) \dots H(t_n) \}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Но правая часть (4.31) есть в точности член n -го порядка в обычном разложении в ряд по теории возмущений оператора эволюции (4.3). Итак, соотношение (4.30) означает, что член n -го порядка в разложении в ряд по теории возмущений оператора эволюции U можно получить, применяя оператор подстановки $S^{(\Omega)}$ для Ω -отображения к решению $[F_U^{(\Omega)}]_n$ в n -м порядке теории возмущений уравнения (4.5) для Ω -эквивалента $F_U^{(\Omega)} = \Theta\{U\}$ оператора временной эволюции.

§ 5. МНОГОВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ КАК СРЕДНИЕ ПО ФАЗОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ

В разделе II статьи [2] из нашей серии рассматривалась задача о вычислении методами фазового пространства следа произведения двух операторов. Было показано, в частности, как можно использовать эти методы для определения ожидаемого значения наблюдаемой величины, если система находится в состоянии, описываемом оператором плотности ρ . В той статье рассматривались операторы, являющиеся функциями операторов рождения и уничтожения, взятых в один и тот же момент времени.

Покажем теперь, что можно обобщить эти методы на случай расчета ожидаемого значения наблюдаемой величины, представляемой оператором, являющимся произвольной функцией операторов рождения и уничтожения, взятых в различные моменты времени. Ожидаемые значения такого типа недавно стали важны в квантовой оптике, в частности в связи с теорией лазера¹⁾, и в задачах, связанных со свойствами когерентности световых пучков [19]. В общем расчет таких ожидаемых значений — довольно сложная задача.

Пусть $a(t)$ и $a^+(t)$ — операторы уничтожения и рождения в момент времени t . При разных аргументах эти операторы, вообще говоря, не коммутируют, т. е.

$$[a(t_1), a(t_2)] \neq 0, \quad \text{если} \quad t_1 \neq t_2. \quad (5.1)$$

Пусть $G[a(t_1), a^+(t_1); \dots; a(t_n), a^+(t_n)]$ — произвольная функция бозонных операторов, взятых при различных временах t_1, t_2, \dots, t_n , где²⁾

$$t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_1. \quad (5.2)$$

¹⁾ Такие корреляционные функции, встречающиеся в теории лазеров, основанной на осцилляторной модели ван-дер-Поля, сосчитаны несколькими авторами; см., например, [16—18].

²⁾ В этом параграфе сохраняется порядок (5.2).

Далее, пусть z_1, z_2, \dots, z_n суть c -числа, связанные с операторами уничтожения $a(t_1), \dots, a(t_n)$, а z_1^*, \dots, z_n^* (где z_j^* — число, комплексно сопряженное z_j) — c -числа, связанные с операторами рождения. Введем теперь оператор линейного отображения $\Omega_T^{(N)}$, определив его формулой¹⁾

$$\begin{aligned} \Omega_T^{(N)} \{ (z_1^*)^{i_1} \dots (z_n^*)^{i_n} (z_1)^{j_1} \dots (z_n)^{j_n} \} = \\ = \tilde{T} \{ [a^+(t_1)]^{i_1} \dots [a^+(t_n)]^{i_n} \} T \{ [a(t_1)]^{j_1} \dots [a(t_n)]^{j_n} \} = \\ = [a^+(t_1)]^{i_1} \dots [a^+(t_n)]^{i_n} [a(t_n)]^{j_n} \dots [a(t_1)]^{j_1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ — любые целые неотрицательные числа, а T и \tilde{T} — операторы хронологического и антихронологического упорядочения соответственно. Введем также обратный оператор $\Theta_T^{(N)}$:

$$\begin{aligned} \Theta_T^{(N)} \{ \tilde{T} \{ [a^+(t_1)]^{i_1} \dots [a^+(t_n)]^{i_n} \} T \{ [a(t_1)]^{j_1} \dots [a(t_n)]^{j_n} \} \} = \\ = (z_1^*)^{i_1} \dots (z_n^*)^{i_n} (z_1)^{j_1} \dots (z_n)^{j_n}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.3) видно, что оператор $\Omega_T^{(N)}$ заменяет все c -числа соответствующими операторами рождения и уничтожения согласно правилу

$$z_j \rightarrow a(t_j), \quad z_j^* \rightarrow a^+(t_j), \quad (5.5)$$

и ставит все операторы рождения слева от операторов уничтожения, а также располагает все операторы уничтожения в хронологическом, а операторы рождения в антихронологическом порядке. Следуя Лэксу [7], назовем находящееся в правой части (5.3) произведение *нормально упорядоченным и упорядоченным во времени* произведением. Такие произведения естественно возникают, например, при анализе фотоблектрического детектирования фотонов [19]. При таком анализе появляются

¹⁾ Конечно, выражение в правой части (5.3) можно записать во многих различных функциональных формах, используя коммутационные соотношения. По аналогии с (I. 2.10) можно также ввести некоторый присоединенный оператор подстановки $S_T^{(N)}$, такой, что

$$\begin{aligned} S_T^{(N)} \{ (z_1^*)^{i_1} \dots (z_n^*)^{i_n} (z_1)^{j_1} \dots (z_n)^{j_n} \} \equiv [a^+(t_1)]^{i_1} \dots \\ \dots [a^+(t_n)]^{i_n} [a(t_n)]^{j_n} \dots [a(t_1)]^{j_1}, \end{aligned}$$

где знак тождества используется в том же смысле, что и прежде [ср. с обсуждением после (I. 2.13)].

корреляционные функции вида

$$\Gamma_T^{(N)} = \langle \tilde{T} \{ [A^{(-)}(t_1)]^{l_1} \dots [A^{(-)}(t_n)]^{l_n} \} \times T \{ [A^{(+)}(t_1)]^{l_1} \dots [A^{(+)}(t_n)]^{l_n} \} \rangle, \quad (5.6)$$

где $A^{(+)}(t)$ и $A^{(-)}(t)$ — положительно- и отрицательно-частотные части соответствующего оператора поля A . Назовем (5.6) *нормально упорядоченной и упорядоченной во времени корреляционной функцией*. Если в поле всего одна мода, то функция (5.6) сводится к следующей:

$$\Gamma_T^{(N)} = \langle [a^+(t_1)]^{l_1} \dots [a^+(t_n)]^{l_n} [a(t_n)]^{l_n} \dots [a(t_1)]^{l_1} \rangle. \quad (5.7)$$

Аналогичным образом можно ввести другие линейные операторы отображений. Например, оператор $\Omega_T^{(A)}$, связанный с нормальным правилом ассоциации, определяется таким свойством:

$$\begin{aligned} \Omega_T^{(A)} \{ (z_1^*)^{l_1} \dots (z_n^*)^{l_n} (z_1)^{l_1} \dots (z_n)^{l_n} \} = \\ = [a(t_1)]^{l_1} \dots [a(t_n)]^{l_n} [a^+(t_n)]^{l_n} \dots [a^+(t_1)]^{l_1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

По аналогии с (5.7) определим *антинормально упорядоченную и упорядоченную во времени корреляционную функцию* $\Gamma_T^{(A)}$

$$\Gamma_T^{(A)} = \langle [a(t_1)]^{l_1} \dots [a(t_n)]^{l_n} [a^+(t_n)]^{l_n} \dots [a^+(t_1)]^{l_1} \rangle. \quad (5.9)$$

Корреляционные функции этого типа появляются в теории детекторов фотонов, работающих на основе не процесса поглощения, а процесса испускания фотонов [9].

Рассмотрим подробно отображение, осуществляемое оператором $\Omega_T^{(N)}$. Пусть $F_T^{(N)}$ есть s -числовой эквивалент оператора G при этом отображении:

$$\begin{aligned} G[a(t_1), a^+(t_1); \dots; a(t_n), a^+(t_n)] = \\ = \Omega_T^{(N)} \{ F_T^{(N)}(z_1, z_1^*; \dots; z_n, z_n^*) \}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Тогда ожидаемое значение от G можно записать в виде выражения

$$\begin{aligned} \langle G \rangle = \langle G[a(t_1), a^+(t_1); \dots; a(t_n), a^+(t_n)] \rangle = \\ = \langle \Omega_T^{(N)} \{ F_T^{(N)}(z_1, z_1^*; \dots; z_n, z_n^*) \} \rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

которое можно переписать в виде

$$\langle G \rangle = \left\langle \Omega_T^{(N)} \left\{ \int \dots \int d^2\{\bar{z}_n\} F_T^{(N)}(\bar{z}_1, \bar{z}_1^*; \dots; \bar{z}_n, \bar{z}_n^*) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \prod_{\lambda=1}^n \delta^{(2)}(z_\lambda - \bar{z}_\lambda) \right\} \right\rangle, \quad (5.12)$$

что ввиду линейности $\Omega_T^{(N)}$ можно представить так:

$$\langle G \rangle = \int \dots \int d^2\{\bar{z}_n\} F_T^{(N)}(\bar{z}_1, \bar{z}_1^*; \dots; \bar{z}_n, \bar{z}_n^*) \times \\ \times \Phi_T^{(A)}(\bar{z}_1, \bar{z}_1^*, t_1; \dots; \bar{z}_n, \bar{z}_n^*, t_n), \quad (5.13)$$

где

$$\Phi_T^{(A)}(\bar{z}_1, \bar{z}_1^*, t_1; \dots; \bar{z}_n, \bar{z}_n^*, t_n) = \left\langle \Omega_T^{(N)} \left\{ \prod_{\lambda=1}^n \delta^{(2)}(z_\lambda - \bar{z}_\lambda) \right\} \right\rangle. \quad (5.14)$$

Из (5.13) видно, что функция $\Phi_T^{(A)}$ играет роль многовременной функции распределения в фазовом пространстве¹⁾. Можно переписать (5.14) следующим образом:

$$\Phi_T^{(A)}(\bar{z}_1, \bar{z}_1^*, t_1; \dots; \bar{z}_n, \bar{z}_n^*, t_n) = \langle \Delta_T^{(N)} \rangle, \quad (5.15)$$

где $\Delta_T^{(N)}$ — оператор отображения Δ для правила ассоциации, характеризующегося оператором $\Omega_T^{(N)}$; он дается формулой

$$\Delta_T^{(N)} = \Omega_T^{(N)} \left\{ \prod_{\lambda=1}^n \delta^{(2)}(z_\lambda - \bar{z}_\lambda) \right\}. \quad (5.16)$$

¹⁾ Это соотношение следует отличать от соотношения, недавно введенного Лэксом ([7], уравнение (5.3)). Лэкс определяет многовременную функцию распределения в фазовом пространстве P_n формулой, которая в его обозначениях имеет вид

$$P_n = \langle \delta(\beta_1^* - b^\dagger(t_1)) \dots \delta(\beta_n^* - b^\dagger(t_n)) \delta(\beta_n - b(t_n)) \dots \delta(\beta_1 - b(t_1)) \rangle.$$

Видно, что это определение содержит дельта-функции от аргументов, не являющихся истинными c -числами; использование их подчас приводит к неоднозначностям.

С помощью интегрального представления дельта-функции приведем (5.16) к виду

$$\begin{aligned} \Delta_T^{(N)} &= \frac{1}{\pi^{2n}} \int \dots \int d^2 \{\alpha\} \prod_{\lambda=1}^n \exp[-(\alpha_\lambda \bar{z}_\lambda^* - \alpha_\lambda^* \bar{z}_\lambda)] \times \\ &\quad \times \Omega_T^{(N)} \left\{ \prod_{\lambda=1}^n \exp(\alpha_\lambda z_\lambda^* - \alpha_\lambda^* z_\lambda) \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi^{2n}} \int \dots \int d^2 \{\alpha\} \prod_{\lambda=1}^n \exp[-(\alpha_\lambda \bar{z}_\lambda^* - \alpha_\lambda^* \bar{z}_\lambda)] \times \\ &\quad \times \exp[\alpha_1 a^+(t_1)] \dots \exp[\alpha_n a^+(t_n)] \times \\ &\quad \times \exp[-\alpha_n^* a(t_n)] \dots \exp[-\alpha_1^* a(t_1)], \quad (5.17) \end{aligned}$$

где использованы соотношения (5.2) и (5.3). Формулы (5.13), (5.15) и (5.17) являются естественным обобщением на случай многовременных операторов наших результатов (II.2.9) и (II.2.8), а также (I.3.14) (соответствующих $\Omega = \Omega^{(N)}$). В частности, из (5.13) получаем следующее выражение для нормально упорядоченной и упорядоченной во времени корреляционной функции (5.7):

$$\begin{aligned} \Gamma_T^{(N)} &= \int \dots \int d^2 \{z_n\} \Phi_T^{(A)}(z_1, z_1^*, t_1; \dots; z_n, z_n^*, t_n) \times \\ &\quad \times \prod_{\lambda=1}^n \{(z_\lambda^*)^{t_\lambda} (z_\lambda)^{t_\lambda}\}. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Эта формула является обобщением формулы (II.2.19).

Выведем теперь точное выражение для многовременной функции распределения в фазовом пространстве $\Phi_T^{(A)}$. Покажем, что функцию $\Phi_T^{(A)}$ можно выразить через функцию Грина s -числового уравнения движения для эквивалента оператора плотности в фазовом пространстве. Основные свойства функции Грина и применение ее к расчетам многовременных корреляционных функций обсуждались в статье [20]¹⁾. Напомним сперва некоторые из полученных в [20] результатов.

Пусть $K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0)$ — функция Грина, соответствующая уравнению движения для Ω -эквивалента $F_\rho^{(\Omega)}(z, z^*, t)$

¹⁾ Результаты этой статьи были получены в предположении, что $\Omega(\alpha, \beta)$ — симметричная функция α и β и что она имеет вид (2.12). Эти ограничения легко снять.

оператора плотности ρ . Эта функция Грина удовлетворяет уравнению движения (II. 4.7), т. е.

$$\frac{i\hbar \partial K^{(\Omega)}}{\partial t} = (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) K^{(\Omega)} \quad (5.19)$$

[операторы \mathcal{L}_+ и \mathcal{L}_- определены уравнением (II. 3.16)], и подчиняется начальному условию

$$K^{(\Omega)}(z, z^*, t_0 | z_0, z_0^*, t_0) = \delta^{(2)}(z - z_0). \quad (5.20)$$

В [20] показано, что $K^{(\Omega)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) = \\ = \pi \text{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^+) \hat{U}^+(t, t_0) \times \\ \times \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^+) \hat{U}(t, t_0) \}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Введем теперь в представлении взаимодействия Δ -оператор отображения $\Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^+; t)$. Он связан с Δ -оператором отображения в шредингеровском представлении унитарным преобразованием

$$\begin{aligned} \Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^+; t) = U^+(t, t_0) \times \\ \times \Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^+) U(t, t_0). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Комбинируя (5.21) и (5.22), найдем, что

$$\begin{aligned} K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) = \\ = \pi \text{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^+) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^+; t) \}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Это соотношение имеет простой смысл. Действительно, в силу теоремы III [см. (I. 3.25)] получается, что

$$K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t | z, z^*, t_0) = \tilde{\Theta} \{ \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_1 - a, z_1^* - a^+; t) \}; \quad (5.24)$$

обращая это соотношение, получаем

$$\Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_1 - a, z_1^* - a^+; t) = \tilde{\Omega} \{ K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t | z, z^*, t_0) \}. \quad (5.25)$$

Следовательно, $K^{(\Omega)}$ есть $\tilde{\Omega}$ -эквивалент Δ -оператора для $\tilde{\Omega}$ -отображения в гейзенберговском представлении. В приложении В показано, что функция Грина $K^{(\Omega)}$ удовлетворяет соотношению типа соотношения Чэпмена — Колмогорова, т. е.

$$\begin{aligned} K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) = \\ = \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t_1 | z_0, z_0^*, t_0) d^2 z_1, \end{aligned} \quad (5.26)$$

для всех значений t_1 , таких, что $t \geq t_1 \geq t_0$.

Выразим теперь оператор $G[a(t), a^\dagger(t)]$ через полный набор операторов в какой-либо более ранний момент времени, например t_1 . Согласно теореме II [см. (I. 3.13)], имеем

$$G[a(t), a^\dagger(t)] = \int F_G^{(\Omega)}(z, z^*) \Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^\dagger; t) d^2z, \quad (5.27)$$

где $F_G^{(\Omega)}(z, z^*)$ есть Ω -эквивалент $G[a, a^\dagger]$. Теперь из (5.25) и теоремы II [см. (I. 3.13)] имеем

$$\begin{aligned} \Delta^{(\Omega)}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t) &= \\ &= \int K^{(\tilde{\Omega})}(z_1, z_1^*, t | z, z^*, t_1) \Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^\dagger; t_1) d^2z. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Следовательно, подставляя (5.28) в (5.27), получим требуемое выражение для $G[a(t), a^\dagger(t)]$

$$\begin{aligned} G[a(t), a^\dagger(t)] &= \iint F_G^{(\Omega)}(z, z^*) K^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) \times \\ &\quad \times \Delta^{(\Omega)}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t_1) d^2z d^2z_1, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где t_1 ($t_0 \leq t_1 \leq t$) — произвольный момент времени¹⁾. Покажем теперь, что повторное использование выражения (5.29), конкретизированного для случая нормального правила отображения, может дать явное выражение для нормально упорядоченной и упорядоченной во времени корреляционной функции $\Gamma_T^{(N)}$, определенной равенством (5.7). Сначала с помощью (II. 2.8) и (II. 2.9) выразим $\Gamma_T^{(N)}$ в виде

$$\Gamma_T^{(N)} = \int d^2z_0 \mathcal{D}^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) F_G^{(N)}(z_0, z_0^*; t_0, t_1, \dots, t_n), \quad (5.30)$$

¹⁾ Результат (5.29) ведет к следующим двум интересным формулам:

$$\begin{aligned} \langle G_2(t_2) \rangle &= \iint d^2z d^2z_1 F_2^{(\Omega)}(z, z^*) K^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) \times \\ &\quad \times \langle \Delta^{(\Omega)}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t_1) \rangle \quad (t \geq t_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle G_2(t_2) G_1(t_1) \rangle &= \iint d^2z d^2z_1 F_2^{(\Omega)}(z, z^*) K^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*, t_2 | z_1, z_1^*, t_1) \times \\ &\quad \times \langle \Delta^{(\Omega)}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t_1) G_1(t_1) \rangle \quad (t_2 \geq t_1). \end{aligned}$$

Они означают, что если среднее от оператора в момент t выражается через среднее от Δ -операторов отображения (образующих, естественно, полный набор) в более ранний момент t_1 , то среднее от произведения двух операторов получается просто заменой $\langle \Delta^{(\Omega)} \rangle$ на $\langle \Delta^{(\Omega)} G_1 \rangle$. Это утверждение по существу является содержанием важной «теоремы о квантовой регрессии», сформулированной Лэксом [7].

где $F_G^{(N)} = \Theta^{(N)}\{G\}$ есть Ω -эквивалент, отвечающий нормальному правилу ассоциации для оператора

$$G = [a^+(t_1)]^{l_1} \dots [a^+(t_n)]^{l_n} [a(t_n)]^{l_n} \dots [a(t_1)]^{l_1} \quad (5.31)$$

и

$$\Phi^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) = \frac{1}{\pi} \Theta^{(A)}\{\rho\}.$$

Рассмотрим теперь произведение двух операторов из (5.31), взятых в наиболее поздний момент времени t_n , т. е. произведение $[a^+(t_n)]^{l_n} [a(t_n)]^{l_n}$. Поскольку это произведение нормально упорядочено, его эквивалент для нормального правила отображения, очевидно, таков: $(z^*)^{l_n} (z)^{l_n}$. Следовательно, (5.29) дает

$$[a^+(t_n)]^{l_n} [a(t_n)]^{l_n} = \int \int d^2 z_n d^2 z' (z_n^*)^{l_n} (z_n)^{l_n} \times \\ \times K^{(A)}(z_n, z_n^*, t_n | z', z'^*, t_{n-1}) \Delta^{(N)}(z' - a, z'^* - a^+; t_{n-1}). \quad (5.32)$$

Отсюда вытекает, что оператор G можно представить в виде

$$G = \int \int d^2 z_n d^2 z'_n (z_n^*)^{l_n} (z_n)^{l_n} K^{(A)}(z_n, z_n^*, t_n | z', z'^*, t_{n-1}) \times \\ \times [a^+(t_1)]^{l_1} \dots [a^+(t_{n-1})]^{l_{n-1}} \Delta^{(N)}(z' - a, z'^* - a^+; t_{n-1}) \times \\ \times [a(t_{n-1})]^{l_{n-1}} \dots [a(t_1)]^{l_1}. \quad (5.33)$$

Воспользуемся далее тем, что для нормального правила отображения c -числовой эквивалент оператора

$$[a^+(t_{n-1})]^{l_{n-1}} \Delta^{(N)}(z' - a, z'^* - a^+; t_{n-1}) [a(t_{n-1})]^{l_{n-1}}$$

является функцией $(z^*)^{l_{n-1}} z^{l_{n-1}} \delta^{(2)}(z' - z)$, так что с учетом (5.29) имеем

$$[a^+(t_{n-1})]^{l_{n-1}} \Delta^{(N)}(z' - a, z'^* - a^+; t_{n-1}) [a(t_{n-1})]^{l_{n-1}} = \\ = \int \int d^2 z_{n-1} d^2 z'' (z_{n-1}^*)^{l_{n-1}} (z_{n-1})^{l_{n-1}} \delta^{(2)}(z' - z_{n-1}) \times \\ \times K^{(A)}(z_{n-1}, z_{n-1}^*, t_{n-1} | z'', z''^*, t_{n-2}) \Delta^{(N)}(z'' - a, z''^* - a^+; t_{n-2}). \quad (5.34)$$

Подставляя (5.34) в (5.33) и интегрируя, получаем формулу

$$G = \int \int \int d^2 z_n d^2 z_{n-1} d^2 z' (z_n^*)^{l_n} (z_n)^{l_n} (z_{n-1}^*)^{l_{n-1}} (z_{n-1})^{l_{n-1}} \times \\ \times K^{(A)}(z_n, z_n^*, t_n | z_{n-1}, z_{n-1}^*, t_{n-1}) K^{(A)}(z_{n-1}, z_{n-1}^*, t_{n-1} | z', z'^*, t_{n-2}) \times \\ \times [a^+(t_1)]^{l_1} \dots [a^+(t_{n-2})]^{l_{n-2}} \Delta^{(N)}(z' - a, z'^* - a^+; t_{n-2}) \times \\ \times [a(t_{n-2})]^{l_{n-2}} \dots [a(t_1)]^{l_1}. \quad (5.35)$$

Повторяя эту процедуру снова и снова, придем в конце концов к следующему выражению для G :

$$G = \int \dots \int d^2 \{z_n\} d^2 z_0 \times \\ \times \prod_{\lambda=1}^n \{(z_\lambda^*)^{t_\lambda} (z_\lambda)^{t_\lambda} K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1})\} \times \\ \times \Delta^{(N)}(z_0 - a, z_0^* - a^+; t_0). \quad (5.36)$$

Из (5.36) и теоремы II [см. (I.3.13)] сразу вытекает, что c -числовой эквивалент оператора G для нормального правила отображения дается формулой

$$F_G^{(N)} = \int \dots \int \prod_{\lambda=1}^n \{(z_\lambda^*)^{t_\lambda} (z_\lambda)^{t_\lambda} K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1})\} \times \\ \times d^2 \{z_\lambda\}. \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.30), получаем окончательно следующее выражение для нормально упорядоченной и упорядоченной во времени корреляционной функции $\Gamma_T^{(N)}$ через функцию распределения в фазовом пространстве $\Phi^{(A)}$ и соответствующую функцию Грина $K^{(A)}$:

$$\Gamma_T^{(N)} = \int \dots \int \Phi^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) \prod_{\lambda=1}^n \{(z_\lambda^*)^{t_\lambda} (z_\lambda)^{t_\lambda} \times \\ \times K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1})\} d^2 \{z_\lambda\} d^2 z_0. \quad (5.38)$$

Похожим образом можно вывести выражение для *антинормально упорядоченной во времени корреляционной функции* $\Gamma_T^{(A)}$, определенной соотношением (5.9):

$$\Gamma_T^{(A)} = \int \dots \int \Phi^{(N)}(z_0, z_0^*, t_0) \prod_{\lambda=1}^n \{(z_\lambda^*)^{t_\lambda} (z_\lambda)^{t_\lambda} \times \\ \times K^{(N)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1})\} d^2 \{z_\lambda\} d^2 \{z_0\}. \quad (5.39)$$

Рассмотрим теперь многовременную функцию распределения в фазовом пространстве $\Phi_T^{(A)}(z_1, z_1^*, t_1; \dots; z_n, z_n^*, t_n)$, определяемую соотношением (5.14). Подставим (5.17) в (5.15) и разложим каждый из операторов $\exp[\alpha_i a^+(t_i)]$ и $\exp[-\alpha_i^* a(t_i)]$

в степенной ряд. Тогда, используя (5.38), найдем, что

$$\Phi_T^{(A)} = \int \Phi^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) \prod_{\lambda=1}^n K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1}) d^2 z_0. \quad (5.40)$$

Можно выполнить интегрирование по z_0 , заметив, что

$$\int \Phi^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) K^{(A)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) d^2 z_0 = \Phi^{(A)}(z, z^*, t). \quad (5.41)$$

Следовательно, многовременная функция распределения в фазовом пространстве $\Phi_T^{(A)}$ может быть выражена через функцию Грина $K^{(A)}$ и одновременную функцию распределения $\Phi^{(A)}$ с помощью формулы

$$\begin{aligned} \Phi_T^{(A)}(z_1, z_1^*, t_1; \dots; z_n, z_n^*, t_n) = \\ = \Phi^{(A)}(z_1, z_1^*, t_1) \prod_{\lambda=2}^n K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda | z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1}). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Этот замечательный результат впервые был получен Лэксом [7] совсем другим способом на основе его «теоремы о квантовой регрессии».

Можно также дать выражение для $\Phi_T^{(A)}$ через $\Phi^{(\Omega)}$ и $K^{(\Omega)}$ для любого правила отображения Ω , задаваемого функцией фильтра вида (2.12). Этот результат и его доказательство¹⁾ даны в приложении Г.

§ 6. РЕЗЮМЕ И СРАВНЕНИЕ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ИХ ОБЫЧНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМОЙ

Ввиду значительного объема статей этой серии и большой общности нашего анализа мы суммируем сейчас главные результаты.

Основным в данной теории является понятие об отображении функции $G(a, a^\dagger)$ некокоммутирующих бозонных операторов a и a^\dagger на функции c -чисел $F(z, z^*)$. В разделе II статьи [1] был введен класс линейных отображений, каждый из которых

¹⁾ Другие доказательства соотношений (5.38) и (Г.17), основанные на уравнении движения для Ω -эквивалента производящей функции для нормально упорядоченных и упорядоченных во времени корреляционных функций, были даны Агарвалом в диссертации: Ph. D. thesis, University of Rochester, 1969, не опубликована.

характеризуется оператором отображения $\Omega [G = \Omega\{F\}]$. Был введен также оператор обратного отображения $\Theta [F = \Theta\{G\}]$. Было показано, что такие отображения тесно связаны с задачей упорядочения функций некоммутирующих бозонных операторов в соответствии с некоторым предписанным правилом. Было найдено, что по существу задачи об отображении и об упорядочении эквивалентны друг другу. В разделе III работы [1] было показано, что каждое отображение Ω (удовлетворяющее некоторым очевидным условиям регулярности) характеризуется целой аналитической функцией $\Omega(\alpha, \beta)$ двух комплексных переменных α и β . Там же были выведены замкнутые выражения s -числовой функции, отвечающей данному оператору, и оператора, отвечающего данной s -числовой функции, для любого заданного отображения из этого класса. Задача об отображении решается с помощью оператора $\Delta^{(\Omega)}$, который был назван Δ -оператором отображения и который играет роль ядра преобразования. Этот Δ -оператор отображения является оператором, на который отображается с помощью Ω двумерная дельта-функция Дирака.

В работе [2] было показано, как это новое исчисление можно использовать для систематического расчета квантовомеханических ожидаемых значений s -числовыми методами. В разделе II работы [2] было найдено, что ожидаемые значения можно выразить в той же математической форме, что и ожидаемые значения в классической механике, т. е. как взвешенные средние s -числовых функций в (обобщенном) фазовом пространстве. Функция распределения в фазовом пространстве, связанная с данным (вообще говоря, смешанным) состоянием квантовомеханической системы, единственная при данном выборе отображения Ω , пропорциональна той s -числовой функции, на которую отображается оператор плотности. В разделе IV работы [2] были выведены уравнения движения для функции распределения в представлении фазового пространства, для s -числового эквивалента оператора временной эволюции и для оператора Гейзенберга; в разделе VI этой работы было приведено уравнение Блоха для ненормированного оператора плотности ρ равновесной системы в представлении фазового пространства. Было найдено, что все эти уравнения в фазовом пространстве имеют форму обобщенного уравнения Луивилля.

В настоящей статье эта новая техника применяется к различным задачам с упорядочением во времени. В § 2 мы установили интересное обобщение теоремы Вика для бозонных систем и показали, что представление фазового пространства

**Главные квантовомеханические формулы
в представлении фазового пространства и в обычной форме**

Обычная операторная теория	Представление фазового пространства
Произвольный оператор G	Эквивалент оператора G в фазовом пространстве: $F_G^{(\Omega)}(z, z^*) = \Theta \{G(a, a^+)\} =$ $= \pi \text{Sp} \{G \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^+)\}$
Состояние системы, задаваемое оператором плотности ρ	Состояние системы, задаваемое обобщенной функцией распределения: $\Phi^{(\Omega)}(z, z^*) = \frac{1}{\pi} \Theta \{\rho(a, a^+)\}$
Ожидаемое значение оператора G : $\langle G \rangle = \text{Sp}(\rho G)$	Ожидаемое значение оператора G , выражаемое как среднее по фазовому пространству: $\langle G \rangle = \int \Phi^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*) F_G^{(\Omega)}(z, z^*) d^2z$
Уравнение движения Шредингера для унитарного оператора временной эволюции $U(t, t_0)$: $i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU$	Уравнение движения в фазовом пространстве для Ω -эквивалента $F_U^{(\Omega)}$ оператора $U(t, t_0)$: $i\hbar \frac{\partial F_U^{(\Omega)}}{\partial t} = \mathcal{L}_+ F_U^{(\Omega)}$
Уравнение движения Шредингера для оператора плотности ρ : $i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$	Уравнение движения в фазовом пространстве для функции распределения $\Phi^{(\Omega)}$: $i\hbar \frac{\partial \Phi^{(\Omega)}}{\partial t} = (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) \Phi^{(\Omega)}$
Уравнение движения гейзенберговского оператора G : $i\hbar \frac{dG}{dt} = -[H, G] + i\hbar \frac{\partial G}{\partial t}$	Уравнение движения в фазовом пространстве для Ω -эквивалента $F_G^{(\Omega)}$ гейзенберговского оператора G : $i\hbar \frac{dF_G^{(\Omega)}}{dt} = -(\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) F_G^{(\Omega)} +$ $+ i\hbar \frac{\partial F_G^{(\Omega)}}{\partial t}$
Уравнение Блоха для неинормированного оператора плотности ρ системы в термодинамическом равновесии: $\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -H\rho$	Уравнение для Ω -эквивалента $F_\rho^{(\Omega)}$ оператора плотности ρ системы в термодинамическом равновесии: $\frac{\partial F_\rho^{(\Omega)}}{\partial \beta} = -\mathcal{L}_+ F_\rho^{(\Omega)}$

Обычная операторная теория	Представление фазового пространства
<p>Эволюция оператора плотности ρ во времени:</p>	<p>Эволюция функции распределения в представлении фазового пространства $\Phi^{(\Omega)}$ во времени:</p>
$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t)$	$\Phi^{(\Omega)}(z, z^*, t) = \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t z_0, z_0^*, t_0) \times \Phi^{(\Omega)}(z_0, z_0^*, t_0) d^2 z_0$
<p>Эволюция гейзенберговского оператора G во времени:</p>	<p>Эволюция во времени Ω-эквивалента $F_G^{(\Omega)}$ оператора G:</p>
$G(t) = U^\dagger(t) G(0) U(t)$	$F_G^{(\Omega)}(z, z^*; t) = \int \tilde{K}^{(\Omega)}(z, z^*, t z_0, z_0^*, t_0) \times F_G^{(\Omega)}(z_0, z_0^*; t_0) d^2 z_0$
<p>Основное (групповое) свойство оператора временной эволюции U:</p>	<p>Основное свойство ядра $K^{(\Omega)}$ оператора временной эволюции</p>
$U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0) \quad (t \geq t_1 \geq t_0)$	$K^{(\Omega)}(z, z^*, t z_0, z_0^*, t_0) = \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t z_1, z_1^*, t_1) \times K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t_1 z_0, z_0^*, t_0) d^2 z_1 \quad (t \geq t_1 \geq t_0)$
<p>Произведение M операторов:</p>	<p>Эквивалент произведения M операторов в представлении фазового пространства:</p>
$G_1 G_2 \dots G_M$	$F_{12 \dots M}^{(\Omega)} = \Theta \{G_1 G_2 \dots G_M\} = \exp \left\{ \sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \right\} \mathcal{U}_{12 \dots M}^{(\Omega)} \times \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*) \Big _{z_m=z, z_m^*=z^*}$
<p>Упорядоченное во времени произведение M операторов:</p>	<p>Эквивалент упорядоченного во времени произведения M операторов в представлении фазового пространства:</p>
$T \{G_1(t_1) G_2(t_2) \dots G_M(t_M)\}$	$F_{12 \dots M}^{(\Omega)} = \Theta \{T \{G_1(t_1) \dots G_M(t_M)\}\} = \exp \left\{ \sum_j \sum_{i < j} \Lambda_{ij} e(t_i - t_j) \right\} \times \mathcal{U}_{12 \dots M}^{(\Omega)} \times \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big _{z_m=z, z_m^*=z^*}$

Обычная операторная теория	Представление фазового пространства
<p>Теорема Вика для обычного произведения двух операторов¹⁾, линейных по операторам a и a^\dagger:</p> $G_1 G_2 =: G_1 G_2 : + G_1 \cdot G_2 \cdot$	<p>Новое тождество для обычного произведения двух операторов¹⁾, линейных по операторам a и a^\dagger:</p> $G_1 G_2 = S^{(\Omega)} \{ F_1^{(\Omega)} F_2^{(\Omega)} \} + [G_1 \cdot G_2 \cdot]^{(\Omega)}.$
<p>Теорема Вика для упорядоченного во времени произведения двух операторов¹⁾, линейных по операторам a и a^\dagger:</p> $T \{ G_1(t_1) G_2(t_2) \} =$ $=: G_1(t_1) G_2(t_2) : + G_1 \cdot(t_1) G_2 \cdot(t_2)$	<p>Новое тождество для упорядоченного во времени произведения двух операторов¹⁾, линейных по операторам a и a^\dagger:</p> $T \{ G_1(t_1) G_2(t_2) \} =$ $= S^{(\Omega)} \{ F_1^{(\Omega)}(t_1) F_2^{(\Omega)}(t_2) \} +$ $+ [G_1 \cdot(t_1) G_2 \cdot(t_2)]^{(\Omega)}.$
<p>Нормально упорядоченная и упорядоченная во времени корреляционная функция:</p> $\Gamma_T^{(N)} = \text{Sp} \{ \rho [a^\dagger(t_1)]^{l_1} \dots$ $\dots [a^\dagger(t_n)]^{l_n} [a(t_n)]^{l_n} \dots [a(t_1)]^{l_1} \}$	<p>В специальном случае, когда Ω-отображение задается нормальным правилом, это тождество эквивалентно теореме Вика. Более общее тождество для упорядоченного во времени произведения n операторов, не обязательно линейных по операторам a и a^\dagger, дается формулой (2.10)</p>
<p>Нормально упорядоченная и упорядоченная во времени корреляционная функция, выражаемая как среднее по фазовому пространству:</p> $\Gamma_T^{(N)} = \int \dots \int \Phi^{(A)}(z_0, z_0^*, t_0) \times$ $\times \prod_{\lambda=1}^n \{ (z_\lambda^*)^{i_\lambda} (z_\lambda)^{j_\lambda} \times$ $\times K^{(A)}(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda z_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1}) \} \times$ $\times d^2\{z_\lambda\} d^2 z_0$	<p>Нормально упорядоченная и упорядоченная во времени корреляционная функция, выражаемая как среднее по фазовому пространству:</p>

¹⁾ Для простоты тождества Вика и наши новые тождества даны в формах, содержащих произведение только двух операторов. Общий вид наших новых тождеств, содержащих любое число операторов, дается соотношениями (2.21) и (2.26).

позволяет четко уяснить смысл этой теоремы. В § 5 мы обсудили отображение функций бозонных операторов, взятых в разные моменты времени, на s -числовые функции и дали методы расчета нормально и антинормально упорядоченных корреляционных функций.

В данной серии статей рассматривались только замкнутые системы. Обобщение наших методов на открытые системы (например, на системы, взаимодействующие с резервуаром) было проведено в статье [21].

Наконец, в табл. 6.1 помещены основные квантовомеханические формулы в обычной форме и в представлении фазового пространства.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: Ω -ЭКВИВАЛЕНТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БОЗОННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИКА ДЛЯ ОБЫЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В этом приложении мы выведем формулу (2.5), выражающую Ω -эквивалент произведения M бозонных операторов через Ω -эквиваленты каждого из этих операторов. Мы покажем, что этот результат, являющийся обобщением теоремы V (раздел III работы [2]), ведет к интересному обобщению теоремы Вика для обычных произведений бозонных операторов.

Пусть $F_m^{(\Omega)}(z, z^*)$ есть Ω -эквивалент операторов $G_m(a, a^\dagger)$ ($m = 1, 2, \dots, M$). Выражение для каждого из Ω -эквивалентов $F_m^{(\Omega)}$ через оператор $G_m^{(\Omega)}$ дается теоремой III [см. (I.3.25) и (I.3.26)]. Это выражение можно записать так:

$$F_m^{(\Omega)}(z, z^*) = \int \bar{\Omega}(\alpha, \alpha^*) g_m(\alpha, \alpha^*) \exp(\alpha z^* - \alpha^* z) d^2\alpha, \quad (\text{A.1})$$

где

$$g_m(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \text{Sp} \{ G_m(a, a^\dagger) D^\dagger(\alpha) \} \quad (\text{A.2})$$

и $D^\dagger(\alpha)$ — оператор, эрмитово-сопряженный оператору смещения (см. приложение В работы [1]).

Теперь мы используем операторный аналог теоремы Фурье [см. (I.C1)], чтобы выразить произведение M операторов G_m в виде

$$G_1(a, a^\dagger) \dots G_M(a, a^\dagger) = \int \dots \int \prod_{m=1}^M g_m(\alpha_m, \alpha_m^*) D(\alpha_m) d^2\alpha_m. \quad (\text{A.3})$$

Напомним, что произведению двух операторов смещения можно придать следующую форму:

$$D(\alpha_m) D(\alpha_n) = D(\alpha_m + \alpha_n) \exp(\psi_{mn}), \quad (\text{A.4})$$

где

$$\psi_{mn} = \frac{1}{2} (\alpha_m \alpha_n^* - \alpha_m^* \alpha_n). \quad (\text{A.5})$$

Тождество (A.4) можно обобщить на случай произведения любого числа операторов смещения. Результат, который легко доказать по индукции, таков:

$$\prod_{m=1}^M D(\alpha_m) = D\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m\right) \exp\left[\sum_{m < n} \sum_n \psi_{m, n}\right]. \quad (\text{A.6})$$

Запишем далее первый член в правой части (A.6) в виде

$$D\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m\right) = \bar{\Omega}\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m, \sum_{m=1}^M \alpha_m^*\right) \Omega\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m, \sum_{m=1}^M \alpha_m^*\right) D\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m\right); \quad (\text{A.7})$$

это возможно, поскольку функция фильтра $\bar{\Omega}(\alpha, \alpha^*)$ определена как функция, обратная $\Omega(\alpha, \alpha^*)$; последняя же по предположению не имеет нулей [ср. (I.3.23)]. Теперь ввиду равенства (I.3.17), которое можно записать так:

$$\Omega\{\exp(\alpha z^* - \alpha^* z)\} = \Omega(\alpha, \alpha^*) D(\alpha),$$

очевидно, что выражение (A.7) можно переписать в форме

$$D\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m\right) = \bar{\Omega}\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m, \sum_{m=1}^M \alpha_m^*\right) \Omega\left\{\exp\left[\sum_{m=1}^M (\alpha_m z^* - \alpha_m^* z)\right]\right\}. \quad (\text{A.8})$$

Из (A.6) и (A.8) вытекает, что произведение $\prod_{m=1}^M D(\alpha_m)$ M бозонных операторов смещения можно выразить следующим образом:

$$\prod_{m=1}^M D(\alpha_m) = \bar{\Omega}\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m, \sum_{m=1}^M \alpha_m^*\right) \exp\left[\sum_{m < n} \sum_n \psi_{mn}\right] \times \\ \times \Omega\left\{\exp\left[\sum_{m=1}^M (\alpha_m z^* - \alpha_m^* z)\right]\right\}, \quad (\text{A.9})$$

и, следовательно, (A.3) можно записать так:

$$\prod_{m=1}^M G_m(\alpha, \alpha^*) = \Omega\{F_{12}^{(Q)} \dots_M(z, z^*)\}, \quad (\text{A.10})$$

где

$$F_{12\dots M}^{(\Omega)}(z, z^*) = \int \dots \int \bar{\Omega} \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i, \sum_{i=1}^M \alpha_i^* \right) \prod_{i=1}^M g_i(\alpha_i, \alpha_i^*) \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{i < j} \sum_l \psi_{ijl} \right\} \exp \left[\sum_{i=1}^M (\alpha_i z^* - \alpha_i^* z) \right] d^2 \alpha_1 \dots d^2 \alpha_M. \quad (\text{A.11})$$

Соотношение (A.10) показывает, что c -числовая функция $F_{12\dots M}^{(\Omega)}(z, z^*)$ есть Ω -эквивалент произведения $G_1(a, a^+) \dots \dots G_M(a, a^+)$ M операторов G_m . Выразим теперь $F_{12\dots M}^{(\Omega)}$ через Ω -эквиваленты каждого из этих операторов. С этой целью перепишем $F_{12\dots M}^{(\Omega)}$ в виде

$$F_{12\dots M}^{(\Omega)}(z, z^*) = f(z_1, z_1^*; \dots; z_M, z_M^*) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}, \quad (\text{A.12})$$

где

$$f(z_1, z_1^*; \dots; z_M, z_M^*) = \int \dots \int \prod_{m=1}^M [g_m(\alpha_m, \alpha_m^*) \bar{\Omega}(\alpha_m, \alpha_m^*) \times \\ \times \exp(\alpha_m z_m^* - \alpha_m^* z_m)] \prod_{m=1}^M \Omega(\alpha_m, \alpha_m^*) \bar{\Omega} \left(\sum_{m=1}^M \alpha_m, \sum_{m=1}^M \alpha_m^* \right) \times \\ \times \exp \left[\sum_n \sum_{m < n} \psi_{mn} \right] d^2 \alpha_1 \dots d^2 \alpha_M. \quad (\text{A.13})$$

Теперь в точности тем же способом, который использовался при выводе формулы (II. В.15), можно представить (A.13) в виде

$$f(z_1, z_1^*, \dots; z_M, z_M^*) = \\ = \prod_{m=1}^M \Omega \left(\frac{\partial}{\partial z_m^*}, -\frac{\partial}{\partial z_m} \right) \bar{\Omega} \left(\sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m^*}, -\sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m} \right) \times \\ \times \exp \left[\frac{1}{2} \sum_n \sum_{m < n} \left(\frac{\partial}{\partial z_m} \frac{\partial}{\partial z_n^*} - \frac{\partial}{\partial z_m^*} \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \right] \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*), \quad (\text{A.14})$$

здесь мы использовали выражение (A.1). Из (A.12) и (A.14) следует, что Ω -эквивалент $F_{12\dots M}^{(\Omega)}(z, z^*)$ произведения M операторов $G_1(a, a^+) \dots G_M(a, a^+)$ можно записать следующим

образом:

$$F_{12}^{(\Omega)} \dots M(z, z^*) = \exp \left\{ \sum_I \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \right\} \times \\ \times \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots M \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z_m, z_m^*) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}. \quad (\text{A.15})$$

Здесь

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j^*}, - \frac{\partial}{\partial z_i^*} \frac{\partial}{\partial z_j} \right), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots M = \prod_{m=1}^M \Omega \left(\frac{\partial}{\partial z_m^*}, - \frac{\partial}{\partial z_m} \right) \bar{\Omega} \left(\sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m^*}, - \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m} \right). \quad (\text{A.17})$$

Формула (A.10) совместно с (A.15) составляет содержание *теоремы о произведении* для произвольного числа бозонных операторов.

Конечно, произведение $G_1(a, a^+) \dots G_M(a, a^+)$ можно представить и многими другими способами. В частности, его можно выразить как Ω -упорядоченную форму для выбранного правила упорядочения. Согласно (A.10) и теореме I [см. (I. 2.22) и (I. 2.23)], Ω -упорядоченная форма этого произведения дается формулой

$$\mathcal{G}^{(\Omega)}(a, a^+) = \\ = \left[\Omega\text{-упорядоченная форма произведения } \prod_{m=1}^M G_m(a, a^+) \right] \equiv \\ \equiv S^{(\Omega)} \{ F_{12}^{(\Omega)} \dots M(z, z^*) \}, \quad (\text{A.18})$$

где $S^{(\Omega)}$ — оператор подстановки для Ω -отображения [см. (I. 2.16)]. Формулу (A.18) и выражение (A.15) для $F_{12}^{(\Omega)} \dots M(z, z^*)$ можно рассматривать как *обобщение теоремы Вика для обычного произведения бозонных операторов* [3, 4]. Чтобы выявить связь между (A.18) и теоремой Вика для обычных произведений, рассмотрим частный случай, когда каждый из операторов — есть линейная комбинация операторов рождения и уничтожения, т. е.

$$G_m(a, a^+) = A_m a + B_m a^+, \quad (\text{A.19})$$

где A_m и B_m — c -числа. Опять рассмотрим отображения с функциями фильтра, даваемыми формулой (2.12), т. е.

$$\Omega(\alpha, \beta) = \exp(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \lambda\alpha\beta). \quad (\text{A.20})$$

Тогда с учетом (I.3.34) и (I.3.36) Ω -эквивалент оператора G_m дается выражением

$$F_m^{(\Omega)}(z, z^*) = A_m z + B_m z^*, \quad (\text{A.21})$$

которое не зависит от конкретного выбора Ω . Подставим (A.21) в (A.15) и разложим выражения правой части (A.15), содержащие дифференциальные операторы Λ_{ij} и $\mathcal{U}_1^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_M^{(\Omega)}$, в степенные ряды. Тогда в точности тем же способом, что и при выводе (2.21), получим следующее выражение для произведения $G_1 \dots G_M$:

$$G_1(a, a^\dagger) \dots G_M(a, a^\dagger) = \mathcal{H}_0^{(\Omega)} + \mathcal{H}_1^{(\Omega)} + \dots, \quad (\text{A.22})$$

где

$$\mathcal{H}_0^{(\Omega)} = S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*) \right\},$$

$$\mathcal{H}_1^{(\Omega)} = \sum_I \sum_{i < j} S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1; m \neq i, j}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*) [G_i \cdot G_j]_p^{(\Omega)} \right\},$$

$$\mathcal{H}_2^{(\Omega)} = \frac{1}{2!} \sum_I \sum_{i < j} \sum_l \sum_{k < l} S^{(\Omega)} \left\{ \prod_{m=1; m \neq i, j, k, l}^M F_m^{(\Omega)}(z, z^*) \times [G_i \cdot G_j]_p^{(\Omega)} [G_k \cdot G_l]_p^{(\Omega)} \right\} \quad (\text{A.23})$$

и т. д. Здесь функция $[G_i \cdot G_j]_p^{(\Omega)}$, названная нами спариванием операторов G_i и G_j при Ω -отображении, дается формулой

$$[G_1 \cdot G_2]_p^{(\Omega)} = -2\mu B_1 B_2 - 2\nu A_1 A_2 + A_1 B_2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) + A_2 B_1 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.24})$$

Равенство (A.22) выражает обычное произведение набора операторов, линейных по операторам рождения и уничтожения, в виде суммы Ω -упорядоченных произведений операторов G со всеми возможными спариваниями для Ω -отображения, включающей и член без спаривания.

В частном случае, когда Ω задается нормальным правилом ассоциации ($\mu = \nu = 0$, $\lambda = 1/2$), спаривание (A.24) упрощается:

$$[G_1 \cdot G_2]_p^{(N)} = A_1 B_2. \quad (\text{A.25})$$

Это спаривание имеет простой физический смысл. Действительно, возьмем от (A.22) для случая $M = 2$ вакуумное среднее с Ω , задаваемым нормальным правилом ассоциации. Тогда получим

$$[G_1 \cdot G_2]_p^{(N)} = \langle 0 | G_1 G_2 | 0 \rangle, \quad (\text{A.26})$$

т. е. $[G_1 \cdot G_2 \cdot]_p^{(N)}$ есть вакуумное среднее от произведения $G_1 G_2$. Выражение (A.22) при $\Omega = \Omega^{(N)}$ вместе с (A.26) составляет содержание обычной теоремы Вика для обычного произведения [3, 4] бозонных операторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА (4.27)

Выведем теперь тождество (4.27), т. е.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_+(t_1) \dots \mathcal{L}_+(t_{n-1}) F_H^{(\Omega)}(z, z^*; t_n) = \\ & = \exp \left\{ \sum_I \sum_{i < j} \Lambda_{ij} \right\} \mathcal{U}_{12}^{(\Omega)} \dots \mathcal{U}_{n-1}^{(\Omega)} F_H^{(\Omega)}(z_m, z_m^*; t_m) \Big|_{z_m=z, z_m^*=z^*}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Рассмотрим сначала выражение $\mathcal{L}_+(t_i) F_H^{(\Omega)}(t_j)$ ($t_i < t_j$). Из (4.6) и (A.1) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_+(t_i) F_H^{(\Omega)}(t_j) = \\ & = \int \int d^2 \alpha_i d^2 \alpha_j \bar{\Omega}(\alpha_i, \alpha_i^*) \bar{\Omega}(\alpha_j, \alpha_j^*) g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) g_H(\alpha_j, \alpha_j^*; t_j) \times \\ & \times \exp(\Lambda_{ij}) \mathcal{U}_{ij}^{(\Omega)} \exp(\alpha_i z_i^* - \alpha_i^* z_i) \exp(\alpha_j z_j^* - \alpha_j^* z_j) \Big|_{z_i=z_j=z, z_i^*=z_j^*=z^*}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где

$$g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) = \left(\frac{1}{\pi} \right) \text{Sp} \{ H(\alpha, \alpha^*; t_i) D^+(\alpha_i) \}. \quad (\text{B.3})$$

Поскольку в (B.2) дифференциальные операторы Λ_{ij} и $\mathcal{U}_{ij}^{(\Omega)}$ [определенные уравнениями (II.3.4) и (II.3.5)] действуют на экспоненту, то можно заменить их аргументы $\partial/\partial z_i$ на $-\alpha_i^*$, $\partial/\partial z_i^*$ на α_i и т. д.:

$$\begin{aligned} & \exp(\Lambda_{ij}) \mathcal{U}_{ij}^{(\Omega)} \exp(\alpha_i z_i^* - \alpha_i^* z_i) \exp(\alpha_j z_j^* - \alpha_j^* z_j) = \\ & = \exp \left[\frac{1}{2} (-\alpha_i^* \alpha_j + \alpha_i \alpha_j^*) \right] \Omega(\alpha_i, \alpha_i^*) \Omega(\alpha_j, \alpha_j^*) \times \\ & \times \bar{\Omega}(\alpha_i + \alpha_j, \alpha_i^* + \alpha_j^*) \exp(\alpha_i z_i^* - \alpha_i^* z_i) \exp(\alpha_j z_j^* - \alpha_j^* z_j). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В силу (B.4) выражение (B.2) становится следующим:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_+(t_i) F_H^{(\Omega)}(t_j) = \int \int d^2 \alpha_i d^2 \alpha_j \bar{\Omega}(\alpha_i + \alpha_j, \alpha_i^* + \alpha_j^*) \times \\ & \times g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) g_H(\alpha_j, \alpha_j^*; t_j) \times \\ & \times \exp[(\alpha_i + \alpha_j) z^* - (\alpha_i^* + \alpha_j^*) z] \exp(\psi_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

где ψ_{ij} дается формулой (A.5), т. е.

$$\psi_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i \alpha_j^* - \alpha_i^* \alpha_j). \quad (\text{B.6})$$

Перепишем (B.5) в виде

$$\mathcal{L}_+(t_i) F_H^{(Q)}(t_j) = \int d^2 \alpha \bar{\Omega}(\alpha, \alpha^*) g_{ij}(\alpha, \alpha^*) \exp(\alpha z^* - \alpha^* z), \quad (\text{B.7})$$

где

$$g_{ij}(\alpha, \alpha^*) = \int \int d^2 \alpha_i d^2 \alpha_j g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) g_H(\alpha_j, \alpha_j^*; t_j) \times \\ \times \exp(\psi_{ij}) \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_i - \alpha_j). \quad (\text{B.8})$$

Применим теперь к (B.7) оператор $\mathcal{L}_+(t_k)$. С помощью (B.5) можно сразу получить результат, если заметить, что правая часть (B.7) имеет ту же математическую форму, что и (A.1), а функция g_{ij} в (B.7) соответствует g_m в (A.1):

$$\mathcal{L}_+(t_k) \mathcal{L}_+(t_i) F_H^{(Q)}(t_j) = \int \int d^2 \alpha_k d^2 \alpha_0 \bar{\Omega}(\alpha_k + \alpha_0, \alpha_k^* + \alpha_0^*) \times \\ \times g_H(\alpha_k, \alpha_k^*; t_k) g_{ij}(\alpha_0, \alpha_0^*) \exp[(\alpha_k + \alpha_0) z^* - (\alpha_k^* + \alpha_0^*) z] \exp(\psi_{k0}) \\ (t_k \leq t_i \leq t_j). \quad (\text{B.9})$$

Подставляя (B.8) в (B.9), мы приходим к выражению

$$\mathcal{L}_+(t_k) \mathcal{L}_+(t_i) \mathcal{L}_+(t_j) = \\ = \int \int \int d^2 \alpha_i d^2 \alpha_j d^2 \alpha_k \bar{\Omega}(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \alpha_i^* + \alpha_j^* + \alpha_k^*) \times \\ \times g_H(\alpha_k, \alpha_k^*; t_k) g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) g_H(\alpha_j, \alpha_j^*; t_j) \times \\ \times \exp[(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k) z^* - (\alpha_i^* + \alpha_j^* + \alpha_k^*) z] \times \\ \times \exp(\psi_{ki} + \psi_{ij} + \psi_{kj}). \quad (\text{B.10})$$

Повторяя эту процедуру снова и снова, приходим в конце концов к формуле

$$\mathcal{L}_+(t_1) \dots \mathcal{L}_+(t_{n-1}) F_H^{(Q)}(t_n) = \\ = \int \dots \int \bar{\Omega}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i^*\right) \prod_{i=1}^n g_H(\alpha_i, \alpha_i^*; t_i) \times \\ \times \exp\left[\sum_{i < j} \sum_j \psi_{ij}\right] \exp\left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i z^* - \alpha_i^* z)\right] d^2 \alpha_1 \dots d^2 \alpha_n. \quad (\text{B.11})$$

Правая часть (B.11) имеет тот же вид, что и правая часть (A.11), поэтому с (B.11) можно проделать ту же процедуру,

которая была проделана с (A.11). Получающаяся в результате формула, соответствующая (A.15), и есть требуемое тождество (B.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ВЫВОД СООТНОШЕНИЯ ЧЭПМЕНА — КОЛМОГорова для функций ГРИНА $K^{(\Omega)}$

В этом приложении будет установлено соотношение (5.26), г. е.

$$K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) = \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t_1 | z_0, z_0^*, t_0) d^2 z_1, \quad (B.1)$$

имеющее место при всех значениях t , таких, что $t \geq t_1 \geq t_0$. Функция Грина $K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0)$ дается формулой (5.21), г. е.

$$K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t) = \pi \operatorname{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^\dagger) \times \\ \times U^+(t, t_0) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger) U(t, t_0) \}. \quad (B.2)$$

Здесь $\Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^\dagger)$ есть Δ -оператор отображения в представлении Шредингера и, следовательно, не зависящий от времени. Используя теперь в (B.2) выражения (5.22) и (5.28), получаем тождество

$$K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t) = \pi \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) \times \\ \times \operatorname{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^\dagger) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t_1) \} d^2 z_1, \quad (B.3)$$

где предполагается, что $t \geq t_1 \geq t_0$. Используя еще раз (5.28), выразим $\Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_1 - a, z_1^* - a^\dagger; t_1)$ в (B.3) через $\Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger; t_0)$:

$$K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_0, z_0^*, t_0) = \pi \int \int K^{(\Omega)}(z, z^*, t | z_1, z_1^*, t_1) K^{(\Omega)}(z_1, z_1^*, t_1 | z_2, z_2^*, t_0) \times \\ \times \operatorname{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^\dagger) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_2 - a, z_2^* - a^\dagger; t_0) \} d^2 z_1 d^2 z_2. \quad (B.4)$$

Итак, $\Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger; t_0)$ есть Δ -оператор для $\tilde{\Omega}$ -отображения в представлении Шредингера. Поскольку по предположению в момент $t = t_0$ картины Шредингера и Гейзенберга совпадают, имеем

$$\Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger; t_0) = \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger). \quad (B.5)$$

Из соотношения ортогональности (I.4.8) для Δ -операторов отображения с помощью (B.5) сразу получаем, что

$$\text{Sp} \{ \Delta^{(\Omega)}(z_0 - a, z_0^* - a^+) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z_2 - a, z_2^* - a^+; t_0) \} = \frac{1}{\pi} \delta^{(2)}(z_2 - z_0). \quad (\text{B.6})$$

Подставляя (B.6) в (B.4) и выполняя тривиальное интегрирование по z_2 , получаем требуемое тождество (B.1), т. е. соотношение типа Чэпмена—Колмогорова¹⁾ для функции Грина $K^{(\Omega)}$. Это соотношение по существу является отражением хорошо известного группового свойства унитарного оператора эволюции U , т. е.

$$U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0) \quad (t \geq t_1 \geq t_0). \quad (\text{B.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г: ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ НОРМАЛЬНО УПОРЯДОЧЕННОЙ И УПОРЯДОЧЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ $\Gamma_T^{(N)}$ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ГРИНА $K^{(\Omega)}$ И ФУНКЦИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА $\Phi^{(\Omega)}$

В § 5 была определена нормально упорядоченная и упорядоченная во времени корреляционная функция $\Gamma_T^{(N)}$ [см. (5.7)], причем последняя была выражена через функцию Грина $K^{(A)}$ и функцию распределения в представлении фазового пространства $\Phi^{(A)}$ [см. (5.39)]. В этом приложении мы выведем выражение для $\Gamma_T^{(N)}$ через функцию Грина $K^{(\Omega)}$ и функцию распределения в представлении фазового пространства $\Phi^{(\Omega)}$, где Ω задает любое конкретное отображение, характеризующееся функцией фильтра (2.12):

$$\Omega(\alpha, \beta) = \exp(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \lambda\alpha\beta). \quad (\text{Г.1})$$

Полезно ввести производящую функцию $N(\xi_1, \xi_1^*, t_1; \dots; \xi_n, \xi_n^*, t_n)$, определенную тождеством

$$\begin{aligned} N(\xi_1, \xi_1^*, t_1; \dots; \xi_n, \xi_n^*, t_n) &\equiv \\ &\equiv \langle \tilde{T} \left\{ \exp \left[\sum_i \xi_i a^+(t_i) \right] \right\} T \left\{ \exp \left[- \sum_i \xi_i^* a(t_i) \right] \right\} \rangle = \\ &= \langle \exp [\xi_1 a^+(t_1)] \dots \exp [\xi_n a^+(t_n)] \exp [-\xi_n^* a(t_n)] \dots \\ &\quad \dots \exp [-\xi_1^* a(t_1)] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

¹⁾ Соотношение Чэпмена—Колмогорова для функции Грина $K^{(\Omega)}$ в частном случае, когда Ω задается правилом Вейля, было впервые получено Мойлом [22].

Нормально упорядоченная и упорядоченная во времени корреляционная функция $\Gamma_T^{(N)}$, определенная соотношением (5.7), выражается через эту производящую функцию:

$$\Gamma_T^{(N)} = \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n+l_1+\dots+l_n}}{(\partial \xi_1)^{i_1} \dots (\partial \xi_n)^{i_n} (-\partial \xi_n^*)^{l_n} \dots (-\partial \xi_1^*)^{l_1}} \times \\ \times N(\xi_1, \xi_1^*, t_1; \dots; \xi_n, \xi_n^*, t_n) \Big|_{\{\xi_i\}=0, \{\xi_i^*\}=0}. \quad (\Gamma.3)$$

Найдем теперь выражение для производящей функции N .

Согласно (II.2.8), ее можно выразить в виде

$$N = \int \Phi^{(\tilde{\Omega})}(z_0, z_0^*, t_0) F_G^{(\tilde{\Omega})}(z_0, z_0^*; t_0, \{\xi_i\}, \{\xi_i^*\}, \{t_i\}) d^2 z_0, \quad (\Gamma.4)$$

где $F_G^{(\tilde{\Omega})} = \tilde{\Theta}(G)$ есть $\tilde{\Omega}$ -эквивалент оператора

$$G = \exp[\xi_1 a^\dagger(t_1)] \dots \exp[\xi_n a^\dagger(t_n)] \times \\ \times \exp[-\xi_n^* a(t_n)] \dots \exp[-\xi_1^* a(t_1)]. \quad (\Gamma.5)$$

Чтобы найти выражение для $\tilde{\Omega}$ -эквивалента G , рассмотрим сначала оператор

$$g_n = \exp(\xi_n a^\dagger) \exp(-\xi_n^* a). \quad (\Gamma.6)$$

Согласно теореме III [см. (I.3.25)], $\tilde{\Omega}$ -эквивалент $F_n^{(\tilde{\Omega})}$ оператора g_n дается формулой

$$F_n^{(\tilde{\Omega})} = \pi \text{Sp} \left\{ \exp[\xi_n a^\dagger] \exp[-\xi_n^* a] \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z - a, z^* - a^\dagger) \right\} = \\ = \frac{1}{\pi} \int \Omega(\alpha, \alpha^*) \text{Sp} [D(\xi_n) D^\dagger(\alpha)] \exp\left(\frac{1}{2} |\xi_n|^2\right) \exp(\alpha z^* - \alpha^* z) d^2 \alpha, \quad (\Gamma.7)$$

где использованы формулы (I.3.14) и (I.3.9). Как и прежде, $D(\alpha)$ есть оператор смещения для когерентного состояния $|\alpha\rangle$. Используя свойство ортогональности операторов смещения, выражаемое формулой (I.В.12), мы сведем (Г.7) к следующему:

$$F_n^{(\tilde{\Omega})} = \Omega(\xi_n, \xi_n^*) \exp(\xi_n z^* - \xi_n^* z) \exp\left(\frac{1}{2} |\xi_n|^2\right). \quad (\Gamma.8)$$

Предположим теперь, что функция фильтра $\Omega(\alpha, \beta)$ имеет вид (Г.1). Используя (5.29) и (Г.8), находим, что

$$g_n = \exp[\xi_n a^\dagger(t_n)] \exp[-\xi_n^* a(t_n)] = \\ = \int \int d^2 z_n d^2 z'_n \Omega(\xi_n, \xi_n^*) \exp(\xi_n z_n^* - \xi_n^* z_n) \exp\left(\frac{1}{2} |\xi_n|^2\right) \times \\ \times K^{(\tilde{\Omega})}(z_n, z_n^*, t_n | z'_n, z'_n^*, t_{n-1}) \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z' - a, z'^* - a^\dagger; t_{n-1}); \quad (\Gamma.9)$$

используя (Г.9), получаем, что оператор G [см. (Г.5)] можно выразить в виде

$$G = \int \int d^2 z_n d^2 z'_n \Omega(\xi_n, \xi_n^*) \exp(\xi_n z_n^* - \xi_n^* z_n) \exp\left(\frac{1}{2} |\xi_n|^2\right) \times \\ \times K^{(\Omega)}(z_n, z_n^*, t_n | z', z'^*, t_{n-1}) \exp[\xi_1 a^\dagger(t_1)] \dots \exp[\xi_{n-1} a^\dagger(t_{n-1})] \times \\ \times \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z' - a, z'^* - a^\dagger; t_{n-1}) \exp[-\xi_{n-1}^* a(t_{n-1})] \dots \\ \dots \exp[-\xi_1^* a(t_1)]. \quad (\text{Г.10})$$

Чтобы упростить (Г.10), воспользуемся тождеством, содержащим $\tilde{\Omega}$ -эквивалент оператора

$$g_{n-1} = \exp[\xi_{n-1} a^\dagger(t_{n-1})] \Delta^{(\tilde{\Omega})}(z' - a, z'^* - a^\dagger; t_{n-1}) \times \\ \times \exp[-\xi_{n-1}^* a(t_{n-1})]. \quad (\text{Г.11})$$

Обозначая $\tilde{\Omega}$ -эквивалент этого оператора символом $F_{n-1}^{(\tilde{\Omega})}$, получаем, согласно теореме III [см. (I. 3.25)],

$$F_{n-1}^{(\tilde{\Omega})} = \pi \text{Sp} \{g_{n-1} \Delta^{(\Omega)}(z - a, z^* - a^\dagger)\}. \quad (\text{Г.12})$$

Подставляя далее (Г.11) в (Г.12), выражая каждый из двух Δ -операторов отображения в интегральной форме (I. 3.14), используя соотношение ортогональности (I. B.12) и вспоминая, что $\Omega(\alpha, \beta)$ дается формулой (Г.1), сразу получаем выражение для $F_{n-1}^{(\tilde{\Omega})}$

$$F_{n-1}^{(\tilde{\Omega})} = \frac{1}{\pi^2} \int \exp\left[\mu \xi_{n-1}^2 + \nu \xi_{n-1}^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) |\xi_{n-1}|^2 + \xi_{n-1} z^* - \xi_{n-1}^* z + \right. \\ \left. + 2\mu \alpha \xi_{n-1} + 2\nu \alpha^* \xi_{n-1}^* + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) (\alpha \xi_{n-1} + \alpha^* \xi_{n-1}^*)\right] \times \\ \times \exp[-\alpha(z'^* - z^*) + \alpha^*(z' - z)] d^2 \alpha = \\ = \exp\left[\mu \xi_{n-1}^2 + \nu \xi_{n-1}^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) |\xi_{n-1}|^2 + \xi_{n-1} z^* - \xi_{n-1}^* z\right] \times \\ \times \exp\left[-2\mu \xi_{n-1} \frac{\partial}{\partial z'^*} + 2\nu \xi_{n-1}^* \frac{\partial}{\partial z'} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \xi_{n-1}^* \frac{\partial}{\partial z'^*} + \right. \\ \left. + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \xi_{n-1} \frac{\partial}{\partial z'}\right] \delta^{(2)}(z' - z). \quad (\text{Г.13})$$

Выражая оператор g_{n-1} [см. (I. 11)] через его $\tilde{\Omega}$ -эквивалент $F_{n-1}^{(\tilde{\Omega})}$ [см. (Г.13)] с помощью тождества (5.29) и используя это представление в (Г.10), получаем, что оператор G можно записать

В виде

$$\begin{aligned}
 G = & \int \int d^2 z_n d^2 z_{n-1} d^2 z' \times \\
 & \times \prod_{\lambda=n-1}^n \exp \left[\mu \xi_\lambda^2 + \nu \xi_\lambda^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) |\xi_\lambda|^2 + \xi_\lambda z_\lambda^* - \xi_\lambda^* z_\lambda \right] \times \\
 & \times K^{(\Omega)} \left(z_n, z_n^*, t_n \mid z_{n-1} - 2\nu \xi_{n-1}^* - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{n-1}, z_{n-1}^* + 2\mu \xi_{n-1} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{n-1}^*, t_{n-1} \right) K^{(\Omega)} \left(z_{n-1}, z_{n-1}^*, t_{n-1} \mid z', z'^*, t_{n-2} \right) \times \\
 & \times \exp [\xi_1 a^+ (t_1)] \dots \exp [\xi_{n-2} a^+ (t_{n-2})] \Delta^{(\tilde{\Omega})} (z' - a, z'^* - a^+; t_{n-2}) \times \\
 & \quad \times \exp [-\xi_{n-2}^* a (t_{n-2})] \dots \exp [-\xi_1^* a (t_1)]. \quad (\Gamma.14)
 \end{aligned}$$

Повторяя процедуру, аналогичную той, с помощью которой мы от (Г.10) перешли к (Г.14), приходим в конце концов к следующему выражению для оператора G :

$$\begin{aligned}
 G = & \int \dots \int d^2 \{z_\lambda\} d^2 z_0 \times \\
 & \times \prod_{\lambda=1}^n \exp \left[\mu \xi_\lambda^2 + \nu \xi_\lambda^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) |\xi_\lambda|^2 + \xi_\lambda z_\lambda^* - \xi_\lambda^* z_\lambda \right] \times \\
 & \times \prod_{\lambda=2}^n K^{(\Omega)} \left(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda \mid z_{\lambda-1} - 2\nu \xi_{\lambda-1}^* - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1}, z_{\lambda-1}^* + 2\mu \xi_{\lambda-1} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1} \right) K^{(\Omega)} (z_1, z_1^*, t_1 \mid z_0, z_0^*, t_0) \times \\
 & \quad \times \Delta^{(\tilde{\Omega})} (z_0 - a, z_0^* - a^+; t_0). \quad (\Gamma.15)
 \end{aligned}$$

Из (Г.15) и теоремы II [см. (I. 3.13)] сразу следует, что $\tilde{\Omega}$ -эквивалент оператора G дается формулой

$$\begin{aligned}
 F_G^{(\tilde{\Omega})} = & \int \dots \int d^2 \{z_\lambda\} \times \\
 & \times \prod_{\lambda=1}^n \exp \left[\mu \xi_\lambda^2 + \nu \xi_\lambda^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) |\xi_\lambda|^2 + \xi_\lambda z_\lambda^* - \xi_\lambda^* z_\lambda \right] \times \\
 & \times \prod_{\lambda=2}^n K^{(\tilde{\Omega})} \left(z_\lambda, z_\lambda^*, t_\lambda \mid z_{\lambda-1} - 2\nu \xi_{\lambda-1}^* - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1}, \right. \\
 & \quad \left. z_{\lambda-1}^* + 2\mu \xi_{\lambda-1} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1} \right) K^{(\Omega)} (z_1, z_1^*, t_1 \mid z_0, z_0^*, t_0). \quad (\Gamma.16)
 \end{aligned}$$

Используя (Г.16), мы получаем окончательно следующее выражение¹⁾ для производящей функции $N(\xi_1, \xi_1^*, t_1; \dots; \xi_n, \xi_n^*, t_n)$ через функцию Грина $K^{(\Omega)}$ и функцию распределения в представлении фазового пространства $\Phi^{(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}
 N = & \int \dots \int d^2\{z_\lambda\} d^2\{z_0\} \times \\
 & \times \prod_{\lambda=1}^n \exp \left[\mu \xi_\lambda^2 + \nu \xi_\lambda^{*2} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) |\xi_\lambda|^2 + \xi_\lambda z_\lambda^* - \xi_\lambda^* z_\lambda \right] \times \\
 & \times \prod_{\lambda=2}^n K^{(\Omega)} \left(z_\lambda, z_\lambda^*, t_{\lambda-1} \mid z_{\lambda-1} - 2\nu \xi_{\lambda-1}^* - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1} z_{\lambda-1}^* + \right. \\
 & \left. + 2\mu \xi_{\lambda-1} + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \xi_{\lambda-1}^*, t_{\lambda-1} \right) K^{(\Omega)} \left(z_1, z_1^*, t_1 \mid z_0, z_0^*, t_0 \right) \times \\
 & \times \Phi^{(\Omega)} \left(z_0, z_0^*, t_0 \right). \quad (\text{Г.17})
 \end{aligned}$$

Из (Г.3) и (Г.17) можно получить нормально упорядоченную и упорядоченную во времени корреляционную функцию $\Gamma_T^{(N)}$. Подчеркнем, что в (Г.17) Ω является любым отображением, задаваемым функцией фильтра вида (Г.1). При специальном выборе функции фильтра, отвечающем отображению с антинормальным правилом, когда $\mu = \nu = 0$, $\lambda = -1/2$ (ср. с табл. IV работы [1]), легко показать, что (Г.3) и (Г.17) дают формулу (5.38), выведенную в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agarwal G. S., Wolf E., Phys. Rev., **D2**, 2161 (1970).
2. Agarwal G. S., Wolf E., Phys. Rev., **D2**, 2187 (1970).
3. Wick G. C., Phys. Rev., **80**, 268 (1950).
4. Швeбер С. С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, перевод с англ., ИЛ, 1963.
Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, Физматгиз, 1958.
5. Anderson J. L., Phys. Rev., **94**, 703 (1954).
6. Matsubara T., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), **14**, 351 (1955).
7. Lax M., Phys. Rev., **172**, 350 (1968).
8. Mori H., Oppenheim I., Ross J., в книге Studies in Statistical Mechanics, ed. J. de Boer and G. E. Uhlenbeck, Vol. 1, Amsterdam, 1962, p. 217.
9. Mandel L., Phys. Rev., **152**, 438 (1966).
10. Schwinger J., Proc. Natl Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951).

¹⁾ После завершения анализа настоящего приложения появились работы [23, 24], содержащие некоторые специальные случаи нашей формулы (Г.17).

11. *Louisell W. H.*, *Radiation and Noise in Quantum Electronics*, New York, 1964.
12. *Marburger J. H.*, *Journ. Math. Phys.*, **7**, 829 (1966).
13. *Feynman R. P.*, *Phys. Rev.*, **80**, 440 (1950); **84**, 108 (1951).
14. *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **84**, 395 (1951).
15. *Heffner H.*, *Louisell W. H.*, *Journ. Math. Phys.*, **6**, 474 (1965).
16. *Risken H.*, *Zs. Phys.*, **191**, 302 (1966).
17. *Hempstead R. D.*, *Lax M.*, *Phys. Rev.*, **161**, 350 (1967).
18. *Risken H.*, *Schmidt C.*, *Weidlich W.*, *Zs. Phys.*, **193**, 37 (1966); **194**, 337 (1966).
19. *Kelley P. L.*, *Kleiner W. H.*, *Phys. Rev.*, **136**, A316 (1964).
20. *Agarwal G. S.*, *Phys. Rev.*, **177**, 400 (1969).
21. *Agarwal G. S.*, *Phys. Rev.*, **178**, 2025 (1969).
22. *Moyal J. E.*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**, 99 (1949).
23. *Graham F.*, *Haake F.*, *Haken H.*, *Weidlich F.*, *Zs. Phys.*, **213**, 21 (1968).
24. *Graham R.*, *Haake F.*, *Phys. Lett.*, **26A**, 365 (1968).

СОДЕРЖАНИЕ

В. И. Манько. Вступительная статья. Метод когерентных состояний для произвольных динамических систем	5
Литература	24
1. Р. Глаубер. Когерентность и детектирование квантов	26
Введение	26
§ 1. Статистические свойства электромагнитного поля	28
§ 2. Идеальный детектор фотонов	29
§ 3. Корреляционные функции и когерентность	31
§ 4. Другие корреляционные функции	34
§ 5. Когерентные состояния	36
§ 6. Разложения по когерентным состояниям	40
§ 7. Несколько общих замечаний	43
§ 8. Затухающий гармонический осциллятор	45
§ 9. Оператор плотности для затухающего осциллятора	49
§ 10. Необратимость и затухание	52
§ 11. Уравнения Фоккера — Планка и Блоха	55
§ 12. Теория детектирования фотонов. Счетчик фотонов как гармонический осциллятор	60
§ 13. Оператор плотности для счетчика фотонов	66
Литература	70
2. П. Каррузерс, М. Ньюто. Переменные фаза — угол в квантовой механике	71
§ 1. Введение	71
§ 2. Соотношения неопределенностей	74
а. Метод Гейзенберга и прямой метод (74). б. Аналитический метод (77). в. Усложненные соотношения неопределенностей и прямой метод (78).	
§ 3. Переменные координаты — импульс; когерентные состояния	79
§ 4. Переменные угловой момент — угол	84
а. Соотношения неопределенностей (84). б. Трехмерный осциллятор в когерентных состояниях (89). в. Состояние с минимальной неопределенностью (96).	
§ 5. Операторы числа и фазы для гармонического осциллятора	97
§ 6. Спектры и собственные функции операторов синуса и косинуса	106
§ 7. Операторы разности фаз	115
§ 8. Физические свойства когерентных состояний, фазовых состояний и состояний с минимальным произведением неопределенностей	121

а. Когерентные состояния: соотношения неопределенностей число — фаза (121). б. Флуктуации фазы в состояниях с заданным числом возбуждений (127). в. Фазовые состояния (129). г. Состояния с минимальным произведением неопределенностей (129).	
§ 9. Статистическая механика и необратимость в базисе когерентных состояний	131
а. Общие замечания (131). б. Переход к переменным действие — угол (135). в. Связанные осцилляторы; необратимость (138). г. Соотношение неопределенностей оператора Лиувилля и угла (141).	
§ 10. Аналоги со сверхтекучими системами	142
Литература	144
3. Дж. Лангер. Когерентные состояния в теории сверхтекучести	147
§ 1. Введение: феноменологическая модель	147
а. Состояния с постоянным током (149). б. Флуктуации, уменьшающие ток (150). в. Барьер свободной энергии (150).	
§ 2. Когерентные состояния	152
§ 3. Функционал свободной энергии	156
§ 4. Термодинамические средние и модель двух жидкостей	162
Литература	135
4. А. Фельдман, А. Кан. Расчет диамагнетизма Ландау с помощью когерентных состояний электрона в однородном магнитном поле	166
§ 1. Введение	166
§ 2. Собственные состояния и собственные значения энергии	167
§ 3. Когерентные состояния	170
§ 4. Диамагнитная восприимчивость	173
Приложение А: скрещенные электрическое и магнитное поля	175
Приложение Б: электрон в однородном магнитном поле и в поле с гармоническим потенциалом	176
Литература	177
5. А. Хольц. N-мерный анизотропный осциллятор в зависящем от времени однородном электромагнитном поле	178
Литература	183
6. Дж. Агарвал, Е. Вольф. Исчисление функций некоммутирующих операторов и общие методы фазового пространства в квантовой механике, III. Обобщенная теорема Вика и многовременное отображение	184
§ 1. Введение	184
§ 2. Вычисление упорядоченных во времени произведений гейзенберговских операторов методами фазового пространства и обобщенная теорема Вика	186
§ 3. Обобщение теоремы Андерсона на упорядоченное во времени произведение функционалов от операторов поля	192
§ 4. Эквиваленты операторов в фазовом пространстве и замкнутое выражение для оператора временной эволюции	196
§ 5. Многовременные корреляционные функции как средние по фазовому пространству	202

СОДЕРЖАНИЕ

§ 6. Резюме и сравнение квантовых уравнений в обобщенном фазовом пространстве с их обычной операторной формой	211
Приложение А: Ω -эквивалент произведения бозонных операторов и обобщенная теорема Вика для обычных произведений	216
Приложение Б: доказательство тождества (4.27)	221
Приложение В: вывод соотношения Чэпмена — Колмогорова для функций Грина $K^{(\Omega)}$	223
Приложение Г: выражение для нормально упорядоченной и упорядоченной во времени корреляционной функции $\Gamma_T^{(N)}$ через функцию Грина $K^{(\Omega)}$ и функцию распределения в представлении фазового пространства $\Phi^{(\Omega)}$	224
Литература	228

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Редактор В. В. РАБИН

Художник Г. А. Щетинин

Художественный редактор А. Г. Антонова

Технический редактор Н. А. Иовлева

Корректор Н. И. Баранова

Сдано в набор 26/I-1972 г. Подписано к печати 18/V 1972 г. Бумага тип. № 3. 60×84/16 = 7,25 бум. л. 13,49 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 13,26. Изд. № 2/6320. Цена 1 р. 03 к. Заказ № 44.

Издательство «Мир» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29,